

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ТЕПЛОМ НАГРЕВЕ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ**

*Н. В. Дергачева*

Получены решения задачи о локальном тепловом нагреве ортотропной оболочки для усилий и моментов. Выполнены исследования зависимостей усилий и моментов от термомеханических и геометрических параметров ортотропных оболочек. Рассмотрен случай оболочек отрицательной кривизны. Для определения локального термоупругого состояния использовалось фундаментальное решение уравнения термоупругого равновесия пластин и оболочек и формула свертки. Численное интегрирование полученных аналитических решений проводилось методом Файлона.

*Ключевые слова:* ортотропная оболочка, термоупругое состояние, локальный нагрев, фундаментальные решения.

**Введение.** Большое количество элементов современных конструкций и инженерных сооружений работают в условиях неравномерного, в том числе локального нагрева. Исследование термоупругих параметров оболочки при локальных нагревах в зависимости от моделей ортотропного материала, кривизны является актуальной задачей для повышения эффективности разрабатываемых сооружений, а также реализации новых конструкторских решений и технологических процессов.

На сегодняшний день существуют разные модели локальных и сосредоточенных температурных влияний на тонкостенные элементы конструкций. Для сосредоточенных температурных воздействий это – сосредоточенный нагрев и сосредоточенный источник тепла. Модель с сосредоточенным источником тепла учитывает условия теплообмена с окружающей средой и характер распределения температуры по тонкостенному элементу. Модель с сосредоточенным нагревом не учитывает условие теплообмена с окружающей средой и использует для исследования термоупругого состояния оболочки лишь уравнения термоупругого равновесия. В данной работе рассматривается задача в рамках второй модели. Понятие так называемого "сосредоточенного нагрева" используется для построения частного решения ключевых уравнений термоупругости, т.е фундаментального решения, посредством которого путем интегрирования записывается решение задач термоупругости при заданном в некоторой области распределении температуры. Впервые постановка задачи о сосредоточенных температурных воздействиях на оболочки рассмотрена в монографии [1] и в статье [2]. В статьях [3, 4, 5] построены фундаментальные решения задачи теплопроводности для пластин и пологих оболочек.

В данной работе исследуется решение для усилий и моментов задачи о локальном тепловом нагреве ортотропной оболочки произвольной гауссовой кривизны [6, 7]. Ранее исследования проводились для усилий  $T_{12}$  и моментов  $M_{12}$ , но только для одного ортотропного материала, не представлены ранее исследования для усилия при "изгибном" тепловом нагреве и для моментов при "плоском" тепловом нагреве. В работе исследованы зависимости усилий и моментов от термомеханических и геометрических параметров ортотропных оболочек при локальном нагреве. Рассмотрен случай оболочек отрицательной кривизны.

**Постановка и решение задачи.** Проведем исследование поведения усилий при "плоском" и "изгибном" локальном нагреве.

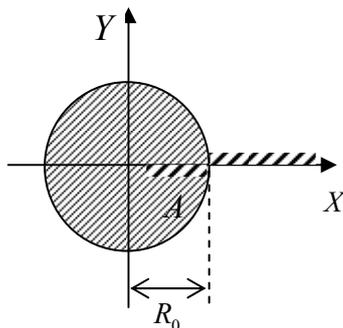


Рис. 1

Рассмотрим тонкую пологую оболочку толщиной  $2h$  произвольной гауссовой кривизны, площадка  $S$  которой нагревается заданной распределенной температурой (рис. 1). Определение термоупругого состояния заданной оболочки сводится к решению системы уравнений [6]:

$$\sum_{j=1}^3 L_{ij} u_j = -X_i \quad (i = \overline{1,3}), \tag{1}$$

в которой  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$  – компоненты вектора перемещений;  $L_{ij}$  – известные дифференциальные операторы.  $X_i$  – функции которые определяют нагрев оболочки.

Закон распределения интегральных характеристик температуры возьмем в соответствии с законом распределения в сварочной дуге или пламени, близкой к закону нормального распределения Гаусса [6]:

$$t_{1,2}(r) = \begin{cases} \mu_{0,1} e^{-k_0 r^2}, & |r| \leq R_0, \\ 0, & |r| > R_0, \end{cases} \tag{2}$$

где  $\mu_0, \mu_1$  – значение интегральных характеристик температуры  $t_1, t_2$  в центре пятна нагрева;  $r_0$  – радиус пятна нагрева;  $k_0$  – коэффициент, характеризующий форму кривой нормального распределения температуры.

Решение рассмотренной задачи о распределенном нагреве оболочки по области  $S \in S^\infty$  получим, используя формулу сверток для соответствующего фундаментального решения [9] с функцией, которая описывает локальное распределение температуры (2). Формула сверток имеет вид [8]:

$$F(x, y) = \iint_S E(x-x_0, y-y_0) t_{1,2}(x_0, y_0) dx_0 dy_0,$$

где  $F$  – компоненты термоупругого состояния,  $E$  – компоненты фундаментального решения, которые отвечают элементам фундаментальных матриц усилий и моментов,  $t_{1,2}$  – закон распределения интегральных характеристик температуры по области  $S$ ;  $x, y \in S^\infty, x_0, y_0 \in S$ .

В задаче было рассмотрено две области: область вне пятна нагрева и сама область нагрева (рис.1). В работе [6] получены решения для каждой из них. Для случая области вне пятна нагрева, но в непосредственной близости к нему выражение для усилий при «изгибном» локальном нагреве ( $\mu_0 = 0$ ):

$$T_{1,2}^{(1)}(r, \varphi) = -\frac{Eh^2 \Delta_\alpha^+ \mu_1}{\pi^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa^3}\right) R_2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} e_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t'_{mn}(\lambda)}{m!} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G_{n,n+m}(k\rho\sqrt{i}) \cos(2n\varphi_1) e^{-k_0 r_0^2} dr_0 d\varphi_0, \quad (3)$$

где

$$\rho^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0), \quad k^4 = 12(1-\nu^2)/(R_2^2 h^2), \quad \Delta_\alpha^+ = \alpha_t^{(2)} + \alpha_t^{(1)} \kappa^2, \\ \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin \varphi_0 + r \sin \varphi}{r_0 \cos \varphi_0 + r \cos \varphi};$$

$r, \varphi$  – полярные координаты;  $(r_0, \varphi_0)$  – координаты точки приложения сосредоточенного теплового нагрева,  $\alpha_t^{(1)}, \alpha_t^{(2)}$  – температурные коэффициенты линейного расширения.

$$t'_{mn}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \left( \frac{1 + \lambda \kappa^2 (1 + 2\gamma \cos 2\theta)}{2 \sqrt{\Delta_8}} \right)^{l+n+2} \times \\ \times \left( \sqrt{\frac{1-\mu}{a^2}} \right)^{l+n+2} \cos(2n\theta) \frac{[(1+\nu) + (1-\nu)\gamma_1 \cos 2\theta]}{t^2(\theta)} \left( \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta,$$

где  $\Delta_8 = \left[ 1 + 4\tilde{\mu}(1-\nu) \cos^2 2\theta \right] \left[ 1 - 4\tilde{\mu}(1+\nu) \cos^2 2\theta \right]$   $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$ ,  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона вдоль главных осей ортотропии;  $\lambda = R_2 / R_1$ ,  $R_1, R_2$  – кривизна и радиусы кривизны оболочки вдоль главных осей ортотропии,  $\mu = (E - 2G_{12}(1+\nu))/E$ ,  $\gamma_1 = (\alpha_t^{(1)} \kappa^2 - \alpha_t^{(2)}) / \Delta_\alpha^+$ .

Аналогичным образом были найдены моменты. Для случая "плоского" локального нагрева моменты будут иметь вид:

$$M_{1,2}^{(0)}(r, \varphi) = -\frac{Eh^3 \Delta_\alpha^+ \mu_0}{2\pi^2 R_2 \left(\frac{\kappa}{\kappa^2}\right)} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} e_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m_{mn}}{m!} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G_{n,m+n}(k\rho\sqrt{i}) e^{-k_0 r_0^2} \cos(2n\varphi_1) dr_0 d\varphi_0 \quad (4)$$

Внутри нагреваемой области оболочки рассматривается зависимость функций усилий от радиуса пятна нагрева  $\alpha$ , который принимает значения в промежутке  $(0, R_0)$ . Усилие при «плоском» локальном нагреве ( $\mu_1 = 0$ ):

$$T_{1,2}^{(0)}(\alpha) = -\frac{Eh^3 k \Delta_\alpha^+ \mu_0 (1-\mu)}{2\pi^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa^3}\right) a} \operatorname{Im} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_{m0}}{m!} \int_0^\alpha G_{0,m}(\zeta_0 \sqrt{i}) e^{-\frac{k_0}{k^2} \zeta_0^2} d\zeta_0. \quad (5)$$

Здесь

$$t_{mn}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \left( \frac{1 + \lambda x^2}{2} \frac{(1 + 2\gamma \cos 2\theta)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \right)^{l+n+1} \left( \sqrt{\frac{1-\mu}{a^2}} \right)^{l+n+1} (1 - \cos 2\theta) \times \\ \times \cos(2n\theta) (1 + \gamma_1 \cos 2\theta) \Delta_2^{-1} d\theta, \quad \Delta_2 = \left[ 1 - 4\tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta \right]. \quad (6)$$

При «изгибном» локальном нагреве ( $\mu_0 = 0$ ):

$$T_{1,2}^{(1)}(\alpha) = -\frac{Eh^2 \Delta_\alpha^+ \mu_1}{\pi^2 R_2 k \left( \frac{\kappa}{\kappa^3} \right)} \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t'_{m0}(\lambda)}{m!} \int_0^\alpha G_{0,m}(\zeta_0 \sqrt{i}) e^{-\frac{k_0}{k^2} \zeta_0^2} d\zeta_0 \quad (7)$$

Аналогичным образом были получены моменты. Для случая «плоского» локального нагрева ( $\mu_1 = 0$ ):

$$M_{1,2}^{(0)}(\alpha) = -\frac{Eh^3 \Delta_\alpha^+ \mu_0}{2\pi^2 R_2 k \left( \frac{\kappa}{\kappa^2} \right)} \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m_{m0}}{m!} \int_0^\alpha G_{0,m}(\zeta_0 \sqrt{i}) e^{-\frac{k_0}{k^2} \zeta_0^2} d\zeta_0 \quad (8)$$

Для случая «изгибного» локального нагрева ( $\mu_0 = 0$ ):

$$M_{1,2}^{(1)}(\alpha) = -\frac{Eh^4 \mu_1 k \Delta_\alpha^+}{24(1-\nu)\pi^2 a \left( \frac{\kappa}{\kappa^3} \right)} \operatorname{Im} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m'_{m0}(\lambda)}{m!} \int_0^\alpha G_{0,m}(\zeta_0 \sqrt{i}) e^{-\frac{k_0}{k^2} \zeta_0^2} d\zeta_0 \quad (9)$$

**Результаты численных исследований.** Все численные исследования были проведены для следующих материалов: 1) изотропный стеклопластик (материал М1); 2) стеклопластик косоугольной намотки (М2) [10]; 3) стеклопластик косоугольной намотки, который обладает сильной анизотропией (М3) [6]; 4) композит КАСТ-В (М4) [11]. Значения термомеханических параметров приведены в таблице.

Таблица

Параметр	Материалы			
	М1	М2	М3	М4
$E_1 / e_0$	10,000	10,000	36,730	1,390
$E_2 / e_0$	10,000	35,710	9,810	2,000
$G_{12} / e_0$	2,820	3,700	3,920	0,720
$\nu_1$	0,077	0,275	0,280	0,174
$\alpha_1 / \alpha_0$	0,800	3,900	0,700	4,000
$\alpha_2 / \alpha_0$	0,800	0,800	3,800	3,000
$\mu$	0	0,404	0,520	-0,042

где  $e_0 = 10^2$  МПа,  $\alpha_0 = 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>.

Графики приведены для обезразмеренных функций усилий и моментов

$$F^0(\lambda, \nu, E, G_{12}) = k_F^0 \cdot F^{(0)}(\lambda, \nu, E, G_{12}), \quad \text{где } k_m^0 = \frac{\pi^2 R_2}{\sqrt{3} a_0 h^2 \mu_0}, \quad k_M^0 = \frac{\pi^2 R_2}{a_0 h^3 \mu_0}, \quad (10)$$

$a_0 = 10^2$  МПа/1<sup>o</sup> К,  $F^{(0)}$  – функция усилия, или момента,  $k_T^0$ ,  $k_M^0$  – коэффициенты при усилиях и моментах.

На рис. 2-5 для внутренней области А приведены значения усилий и моментов при нагреве, когда ( $\mu_0 = 1^o$  К,  $\mu_1 = 0$ ) и при нагреве, когда ( $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_1 = 1^o$  К).

Цифрой 1 обозначены кривые для изотропного материала, цифрой 2 – для модели материала с «приведенной» ортотропией ( $\mu = 0$ ,  $E_1 \neq E_2$ ,  $G_{12} = \sqrt{E_1 E_2} / (2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}))$ ), цифрой 3 – для ортотропного материала М2, цифрой 4 – для ортотропного материала М3, цифрой 5 – для ортотропного материала

М4, кривизна  $\lambda = 0,5$ , радиус области нагрева  $r_0 = 10h$ .

В случае «плоского» локального нагрева ( $\mu_1 = 0$ ) имеем

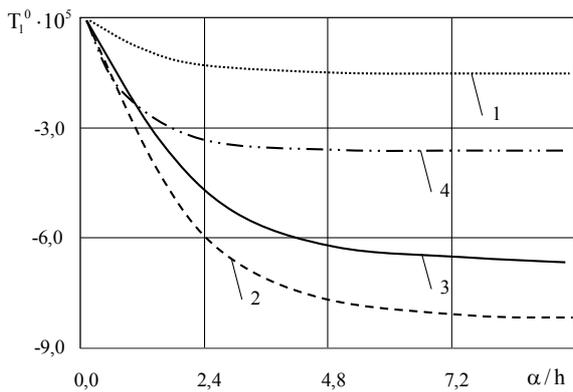


Рис. 2

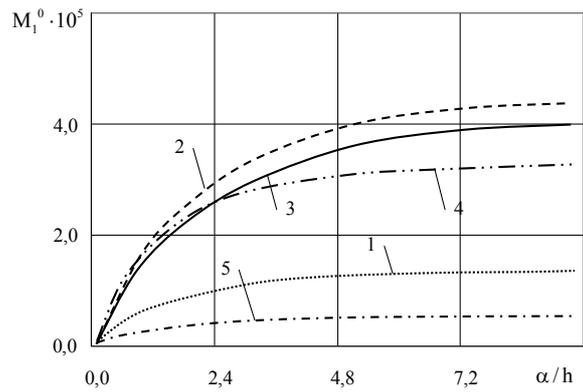


Рис. 3

Как видно из графиков, ортотропия материала существенным образом влияет на значение термоупругих усилий в области нагрева. Для усилия расхождение для кривых с пометкой 2 – "приведенная" ортотропия и 3 – ортотропия достигает 23%. Для моментов такое расхождение составляет около 10%.

При «изгибном» локальном нагреве (при  $\mu_0 = 0$ ):

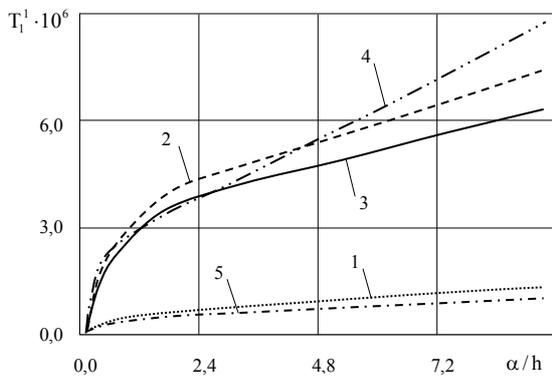


Рис. 4

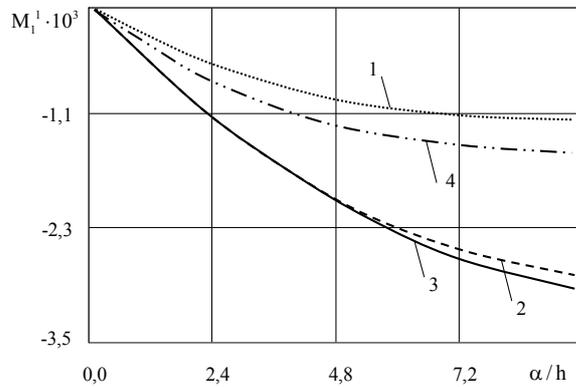


Рис. 5

Как видно из графиков (рис. 4) для усилий уже на расстоянии от  $\alpha/h = 0,7$  нельзя пользоваться моделью "приведенной" ортотропии, так как кривая с пометкой 2 – "приведенная" ортотропия и кривая с пометкой 3 – ортотропный материал, расположенные на значительном расстоянии друг от друга, расхождение между значениями усилия достигает от 5% до 14%. Для моментов (Рис.5) можно значительно упрощать расчеты, принимая коэффициент ортотропии равным нулю. Так как кривые в случае "приведенной" ортотропии и ортотропии очень близко расположены. Максимальное отклонение значений моментов составляет около 4%.

На следующих рисунках приведены числовые исследования поведения усилий в зависимости от кривизны оболочки из ортотропного материала (М3). Построенные зависимости усилия от кривизны оболочки  $\lambda$  для точек максимального и минимального воздействия кривизны на усилие. Здесь  $r = \alpha$ .

При локальном нагреве в случае  $\mu_1 = 0$  (рис.6) и при  $\mu_0 = 0$  (рис.7):

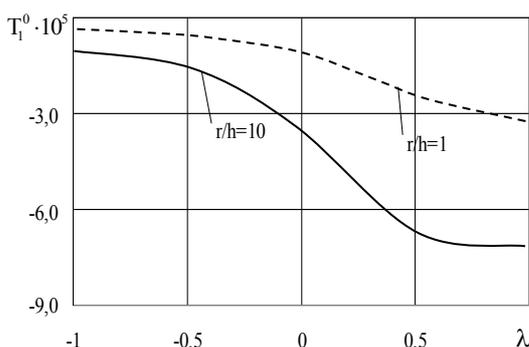


Рис. 6

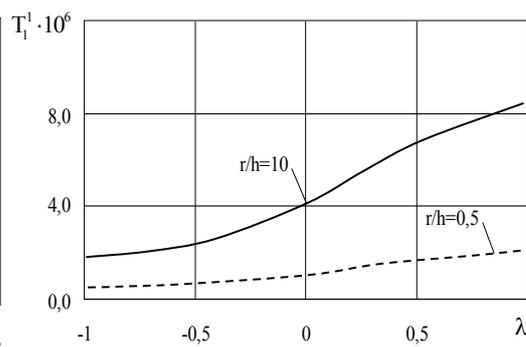


Рис. 7

Обобщая результаты, которые приведены на (рис. 6, 7) можно сделать вывод о том, что влияние геометрии оболочки на усилие значительно и расхождение в значениях при изменении коэффициента кривизны оболочки с шагом 0,5 составляет от 10 до 40%.

Для области вне зоны нагрева было проведено численное исследование для разных ортотропных материалов в зависимости от координаты  $r^* = r - R_0$  полярной системы координат с началом на расстоянии  $R_0$  от центра, то есть вдоль оси  $Ox$  ( $\varphi=0$ ) (рис. 8, 9).

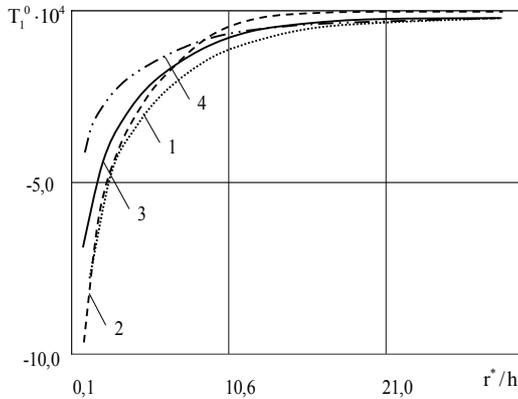


Рис. 8

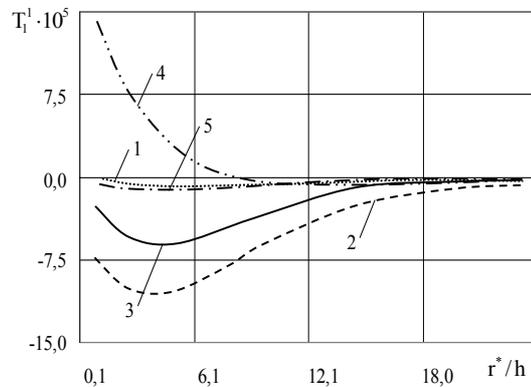


Рис. 9

На рис. 8 видим, что вне зоны нагрева, как и в случае зоны нагрева (рис. 2), ортотропия материала оболочки существенным образом влияет на значение усилий в случае "плоского" локального нагрева. Отклонения кривых в области до  $7h$  не превышает 5%. Применения модели "приведенной" ортотропии для расчетов усилий вне области нагрева возможно лишь на расстоянии до  $7h$  от зоны локального нагрева.

В случае "изгибного" нагрева (рис. 9), влияние ортотропии на усилие существенно. Максимальное отклонение кривых усилий составляет около 45% вблизи области нагрева. Применения модели "приведенной" ортотропии для расчета усилий вне области нагрева может привести к ошибочным результатам. На графике прослеживается интересный эффект для кривой 4. Если сравнить термомеханические параметры МЗ с остальными, можно увидеть, что в отличие от остальных материалов у материала МЗ значения коэффициентов линейного расширения вдоль оси  $Ox$  (вдоль исследуемой оси) является малой по сравнению с остальными материалами и меньше значения вдоль оси  $Oy$ . Если проанализировать аналитические формулы полученных решений (1), можно увидеть входящую в качестве множителя разность  $(\alpha_t^{(1)} \kappa^2 - \alpha_t^{(2)})$ , а также комбинации этой разности с упругими параметрами, именно она дает подобный качественный эффект, поскольку меняет знак в зависимости от значений коэффициентов линейного расширения. Для материала с отрицательным коэффициентом  $\mu$  (М4) из графика видно, что кривая расположена близко к изотропной кривой.

**Выводы.** В работе получено решение для усилий и моментов задачи о локальном нагреве ортотропной оболочки. Решение для усилий и моментов получено посредством использования формулы свертки для соответствующего фундаментального решения с функцией, которая описывает локальное распределение температуры [6,7]. Численно исследованы зависимости полученных решений от термомеханических и геометрических параметров ортотропных оболочек при локальном нагреве. В частности сделан вывод о том, что использование "приведенного" модуля сдвига возможно: в зоне нагрева – для момента в случае "изгибного" нагрева, в зоне около области нагрева - для усилия при "плоском" нагреве на расстоянии до  $7h$  от области нагрева. Также в работе проанализирован процент отклонения кривых в случае расчета усилий и моментов по формуле, учитывающей все термомеханические параметры и по упрощенной формуле. Рассмотрен случай оболочек отрицательной кривизны.

## РЕЗЮМЕ

Отримано розв'язок задачі про локальний тепловий нагрів ортотропної оболонки для зусиль і моментів. Виконано дослідження залежностей зусиль і моментів від термомеханічних і геометричних параметрів ортотропних оболонок. Розглянуто випадок оболонок негативної кривини. Для визначення локального термопружного стану використовувалася фундаментальний розв'язок рівняння термопружної рівноваги пластин і оболонок і формула згортки. Чисельне інтегрування отриманих аналітичних розв'язків проводилося методом Файлона.

*Ключові слова:* ортотропна оболонка, термопружний стан, локальний нагрів, фундаментальний розв'язок.

**SUMMARY**

Decisions of a problem on local thermal heating orthotropic shells for forces and the moments are received. Researches of dependences of forces and the moments from thermomechanical and geometrical parameters orthotropic shells are executed. The case of shells of negative curvature is considered. For definition local thermoelastic conditions the fundamental decision of the equation thermoelastic balance of plates and environments and the formula of convolution was used. Numerical integration of the received analytical decisions was carried out by method Filon's.

*Keywords:* orthotropic shell, thermoelastic conditions, the local heating, fundamental decisions.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Подстригач Я. С. Температурні напруження в оболонках / Я. С. Подстригач, С. Я. Ярема – К.: Изд-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
2. Ярема С. Я. Фундаментальное решение температурной задачи для цилиндрической оболочки/ С. Я. Ярема // Тепловые напряжения в элементах турбомашин. –1961. – Вып.1. – С. 70-76.
3. Ярема С. Я. Фундаментальний розв'язок рівнянь теплопровідності для пластин і пологих оболонок з внутрішніми джерелами тепла/ С. Я. Ярема // Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1967. – № 3. – С. 245-249.
4. Ярема С. Я. Фундаментальное решение приближённых уравнений стационарной задачи теплопроводности пологих оболочек / С. Я. Ярема // Вопр. механики реальн. твёрдого тела. – К.: Наук. думка, 1964. – Вып.3. – С. 88-94.
5. Ярема С. Я. Решение температурной задачи для пологой сферической оболочки в случае сосредоточенного нагрева/ С. Я. Ярема // Научн. зап. Ин.-та машиновед. и автом. Сер. машиновед. – 1964. – Вып.9. – С. 80-89.
6. Дергачева Н. В. Исследование термоупругого состояния ортотропных оболочек при локальном тепловом нагреве / Н. В. Дергачева // Теоретическая и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 180-186.
7. Шевченко В. П. Влияние геометрических параметров ортотропной оболочки на термоупругое состояние при локальном тепловом нагреве / В. П. Шевченко, Н. В. Дергачева // Пробл. обчислюв. механіки і міцності конструкцій. – 2009. – Вып.13. – С. 271-279.
8. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек/ В. П. Шевченко // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 159–196. – (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).
9. Шевченко В. П. Фундаментальные решения уравнений термоупругого равновесия пологих ортотропных оболочек / В. П. Шевченко, Н. В. Дергачева // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 160–166.
10. Справочник по композиционным материалам: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
11. Амбарцумян С. А. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки / С. А. Амбарцумян, С. М. Дургарьян// Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.– 1962. – № 3. – С. 120–127.

*Поступила в редакцию 06.04.2010 г.*