

УДК 539.3

## ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ БЕЗМЕЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ДВОЛАНКОВИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

К. В. Васільєв, Я. М. Пастернак, Г. Т. Сулим

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розроблена аналітико-чисельна, а також чисельна методика (на основі методу граничних елементів) розв'язування задач поздовжнього зсуву нескінченного ізотропного тіла з тонкими пружними включеннями за наявності кутових точок. Результати обчислень узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень для дволанкового пружного включення за навантаження на нескінченності, що обчислені за допомогою двох методів, відрізняються незначно, що підтверджує вірогідність отриманих результатів.

*Ключові слова:* дволанкове пружне включення, ламана тріщина, МГЕ, ССІР, УКІН, метод зосереджених чинників.

**Вступ.** Задачі лінійної теорії пружності тіл із тонкими неоднорідностями типу тріщин, пружних, чи абсолютно жорстких включень (АЖВ) при наявності зламів є набагато складнішими за випадок гладких неоднорідностей, зважаючи на потребу врахування некоренових особливостей у кутових точках. Основною проблемою таких задач є потреба розв'язування результуючих систем сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) з урахуванням особливості степеневого типу у точках зламу. На розв'язування таких задач спрямовані, зокрема, роботи [1-4].

Істотного спрощення під час дослідження задач для неоднорідностей з точками зламу найчастіше досягають завдяки припущенню, що коефіцієнти інтенсивності напружень ланок неоднорідності у точці зламу дорівнюють нулю, не враховуючи тим часом особливості у кутовій точці (див. напр. [5]).

На відміну від задач для тріщин [1-3] і АЖВ [5] з точками зламу, аналогічні задачі для тонких пружних неоднорідностей ще не вивчалися.

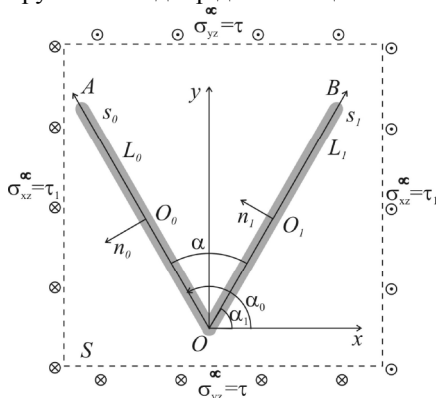


Рис. 1 Дволанкове включення у нескінченному просторі

Це дослідження стосується розробки та розвитку підходів до розв'язування задач поздовжнього зсуву тіл із тонкими пружними стрічковими неоднорідностями з точками зламу. Запропоновано два підходи розв'язування задачі про визначення напруженого стану безмежного ізотропного тіла із дволанковою тонкою пружною неоднорідністю за поздовжнього зсуву на нескінченності, а саме: 1) аналітично-числовий метод; 2) прямий числовий спосіб за схемою методу граничних елементів.

**Формулювання задачі.** У безмежному ізотропному тілі  $S$ , що перебуває в умовах поздовжнього зсуву під дією рівномірного поля напружень  $\tau$ ,  $\tau_1$  на нескінченності (рис. 1), розташоване тонке пружне включення  $L$ . Його ланки з осями  $L_0$ ,  $L_1$  є тонкими стрічковими неоднорідностями з однаковими модулями зсуву  $G_B$  (можуть бути і різні) завдовжки  $2a_0$ ,  $2a_1$ ,

що нахилені під кутами  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  відповідно до осі абсцис. Їхня товщина однакова і дорівнює  $2h$ . Відповідно до методу функцій стрибка [5] за принципом спряження континуумів різної вимірності включення як геометричний об'єкт вилучається із розгляду, а контактні напруження та переміщення переносяться на його серединну поверхню. Тобто вплив включення моделюється функціями стрибків векторів напружень і похідних переміщень на серединній поверхні неоднорідності.

**Розв'язування задачі методом додаткових зосереджених чинників.** Розглянемо пружне включення з кутовою точкою як сукупність двох ніби відокремлених стрічкових неоднорідностей, кожна з яких моделюється своїми функціями стрибків [5, 6] напружень  $f_{50}$ ,  $f_{51}$  і похідних від переміщень  $f_{60}$ ,  $f_{61}$ . Врахуємо, що за своєю фізичною суттю метод функцій стрибків у випадку антиплоскої деформації є моделюванням тонких неоднорідностей за допомогою розподілених уздовж осевих ліній включень зосереджених сил (стрибок вектора напружень) і гвинтових дислокацій (стрибок переміщень) наперед невідомої густини [6].

У точці  $O$  дотику включень функції стрибків для ланок  $L_0$  та  $L_1$ , очевидно, пов'язані між собою. Оскільки цей зв'язок заздалегідь невідомий, то спочатку для визначеності накладемо додаткові умови рівності нулю функцій стрибків у цій точці:

$$f_{50}(O) = f_{60}(O) = 0, \quad f_{51}(O) = f_{61}(O) = 0. \quad (1)$$

Через те, що у точці  $O$  первісної задачі існує певний, швидше всього ненульовий, стрибок напружень і похідних від переміщень, то для того, щоб підправити накладене формулою (1) обмеження, додатково розмістимо у цій точці невідомі за величиною зосереджену силу  $Q$  і гвинтову дислокацію  $b$ , які мають забезпечити згаданий стрибок. Таким чином, напружений стан модельованої задачі шукатимемо у вигляді суперпозиції розв'язків для двох включень та невідомих зосередженої сили і дислокації, що діють у точці  $O$  контакту неоднорідностей:

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + \frac{i}{2\pi} \sum_{p=0}^1 \int_{L'_p} \frac{f_{5p}(t) + iGf_{6p}(t)}{te^{i\alpha_p} - (z - z_{0p})} dt + (\sigma_{yz}^* + i\sigma_{xz}^*) \quad (2)$$

$$\sigma_{yz}^* + i\sigma_{xz}^* = -\frac{i}{2\pi} \frac{Q + iGb}{z - z^*}, \quad z_{0p} = x_{0p} + iy_{0p}, \quad z^* = x^* + iy^*.$$

Тут  $\sigma_{yz}^0, \sigma_{xz}^0$  – однорідний розв'язок задачі (тіла без включення із тим же заданим зовнішнім навантаженням);  $\sigma_{yz}^*, \sigma_{xz}^*$  – напруження від дії сили  $Q$  і дислокації  $b$  в точці  $O$  із координатами  $z^* = 0$  контакту неоднорідностей;  $z_{0p}$  – координати центру  $p$ -го включення;  $\alpha_p$  – кут його орієнтації (рис. 1).

Для визначення невідомих  $f_{5j}, f_{6j}$  ( $j=0,1$ ) за методом функцій стрибка необхідно скористатися умовами взаємодії матриці з включеннями. Для пружної тонкої плівки завдовжки  $2a_p$ , завтовшки  $2h$  з довільним сталим модулем зсуву  $G_B$  умови взаємодії можна подати у вигляді [5, 7]

$$\sigma_{sz}^{p+} + \sigma_{sz}^{p-} + \frac{G}{G_B h} \int_{-a_p}^{s_p} (\sigma_{nz}^{p+} - \sigma_{nz}^{p-}) dt = 2 \frac{G\sigma_{sz}^{pc}(-a_p)}{G_B}; \quad (3)$$

$$\sigma_{nz}^{p+} + \sigma_{nz}^{p-} - \frac{G_B}{hG} \int_{-a_p}^{s_p} (\sigma_{sz}^{p+} - \sigma_{sz}^{p-}) dt = \frac{w_p^*}{h}.$$

Тут  $\sigma_{sz}^{cp}(-a_p), w_p^*$  – певні торцьові сталі у лівій вершині неоднорідності, для визначення яких використовують апріорні залежності [5, 7]

$$\sigma_{sz}^{cp}(-a_p) = \sigma_{sz}^0(-a_p) \frac{G_B}{\max(G_B, G)}, \quad w_p^* = 2h(a_p)\sigma_{nz}^0(-a_p) \frac{\min(G_B, G)}{G}. \quad (4)$$

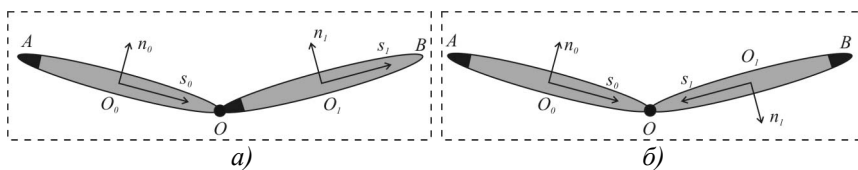


Рис. 2 Варіанти розташування включень

Оскільки суцільне включення розглядається як поєднання двох стрічкових, то для зображеного на рис. 2, а випадку (послідовне поєднання ланок), торцьові сталі для включення  $L_0$  запишуться у вигляді (4), а для включення  $L_1$  залежатимуть від функцій стрибків включення  $L_0$ , зосередженої сили  $Q$  і дислокації  $b$ . Проте для випадку дволанкового включення можна спростити побудову рівнянь, вибравши протилежну орієнтацію включення  $L_1$  (рис. 2, б), за якої формули (4) будуть слухними для обох неоднорідностей. Надалі розглядатимемо лише цей простіший випадок, зображений на рис. 2, б.

Перейдемо у (2) до локальної для  $p$ -го включення ( $p=0,1$ ) системи координат  $s_p O_p n_p$ :

$$\sigma_{nz}^p + i\sigma_{sz}^p = [\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}] \exp(i\alpha_p), \quad z = x + iy = \tilde{z}_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} = (s_p + in_p) \exp(i\alpha_p) + z_{0p}.$$

Застосувавши до результату такого перетворення формулу Сохоцького – Племелі [8], отримаємо вирази для залежності напружень і переміщень на верхньому і нижньому берегах стрічкових неоднорідностей від невідомих функцій стрибків  $f_{5j}, f_{6j}$  ( $j = 0,1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^{p\pm}(s_p) + i\sigma_{sz}^{p\pm}(s_p) &= \sigma_{nz}^{0p} + i\sigma_{sz}^{0p} \mp \frac{1}{2} \left[ f_{5p}(s_p) + iGf_{6p}(s_p) \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{5p}(t) + iGf_{6p}(t)}{t - s_p} dt + \left( \hat{\sigma}_{nz}^p + i\hat{\sigma}_{sz}^p \right) + \left( \sigma_{yz}^{p*} + i\sigma_{xz}^{p*} \right) \quad (p=0,1), \\ \hat{\sigma}_{nz}^p + i\hat{\sigma}_{sz}^p &= \frac{i}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq p}^1 \int_{L'_k} \frac{[f_{5k}(t) + iGf_{6k}(t)] \exp(i\alpha_p)}{t \exp(i\alpha_k) - (s_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} - z_{0k})} dt, \\ \sigma_{nz}^{0p} + i\sigma_{sz}^{0p} &= \left[ \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 \right] \exp(i\alpha_p), \quad \sigma_{nz}^{p*} + i\sigma_{sz}^{p*} = \left[ \sigma_{yz}^* + i\sigma_{xz}^* \right] \exp(i\alpha_p). \end{aligned} \tag{5}$$

Підставляючи (5) в умови взаємодії матриці з включенням (3), отримаємо чотири сингулярні інтегральні рівняння стосовно чотирьох невідомих функцій стрибків  $f_{5p}, f_{6p}$  ( $p=0,1$ ) та двох невідомих сталих  $Q$  і  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{5p}(t)}{t - s_p} dt - \frac{G}{G_B h} \int_{-a_p}^{s_p} f_{5p} dt + 2\hat{\sigma}_{sz}^p + 2\sigma_{sz}^{p*} &= 2 \frac{G\sigma_{sz}^{cp}(-a)}{G_B} - 2\sigma_{sz}^{0p}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{6p}(t)}{t - s_p} dt - \frac{G_B}{Gh} \int_{-a_p}^{s_p} f_{6p} dt - \frac{2}{G} \hat{\sigma}_{nz}^p - \frac{2}{G} \sigma_{nz}^{p*} &= -\frac{w_p^*}{Gh} + \frac{2}{G} \sigma_{nz}^{0p} \quad (p=0,1). \end{aligned} \tag{6}$$

Дві додаткові рівності задані умовами глобальної рівноваги дволанкового включення

$$\int_{-a_0}^{a_0} f_{50}(t) dt + \int_{-a_1}^{a_1} f_{51}(t) dt + Q = 0 \tag{7}$$

і умовами однозначності переміщень при обході навколо нього

$$\int_{-a_0}^{a_0} f_{60}(t) dt + \int_{-a_1}^{a_1} f_{61}(t) dt + b = 0. \tag{8}$$

Таким чином, отримано чотири сингулярні інтегральні рівняння (6) стосовно чотирьох невідомих функцій стрибків та двох невідомих сталих. Чотири умови (1) і дві умови (7), (8) дають можливість розв'язати отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язок (1), (6)-(8) шукатимемо на основі методу колокацій [5], вважаючи, як і у загальній схемі відокремлених включень, що функції стрибків мають кореневі особливості на кінцях  $L_0$  та  $L_1$ .

Основними характеристиками поля напружень біля вістря тонких неоднорідностей відповідно до [5] є узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН). Для дволанкового включення з урахуванням додатного напрямку руху по  $L_1$  (рис. 2б) формули обчислення УКІН [6] набувають вигляду

$$\begin{aligned} K_{32}^A - iK_{31}^A &= \left( p_5^A + iGp_6^A \right) \sqrt{\pi/2}, \quad p_j^A = \lim_{t \rightarrow -a_0} \left[ \sqrt{a_0 + t} f_{j0}(-a_0) \right], \\ K_{32}^B - iK_{31}^B &= -\left( p_5^B + iGp_6^B \right) \sqrt{\pi/2}, \quad p_j^B = \lim_{t \rightarrow -a_1} \left[ \sqrt{a_1 + t} f_{j1}(-a_1) \right] \quad (j=5,6). \end{aligned} \tag{9}$$

**Моделювання антиплоскої деформації тіл із тонкими стрічковими включеннями з точками зламу за схемою методу граничних елементів.** Розробимо числову процедуру розв'язування сформульованої задачі за схемою методу граничних елементів. Для цього розглянемо тонке стрічкове включення, що складається з двох ланок з осями  $L_0$  та  $L_1$  (рис. 1). За принципом спряження моделюватимемо його стрибками переміщень та напружень уздовж його серединної лінії (поверхні)

$\Gamma_C = L_0 \cup L_1$  (відповідно береги  $\Gamma_C^+$  та  $\Gamma_C^-$ ). Виходячи з тотожності Сомільяни [8] побудуємо таку систему дуальних інтегральних рівнянь задачі для безмежного тіла з тонким стрічковим включенням:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F^w(\Sigma t, \Delta w, \mathbf{y}) &= w^{\text{hom}}(\mathbf{y}) + \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} F^t(\Sigma t, \Delta w, \mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \sigma_{3j}^{\text{hom}}(\mathbf{y}) + \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\ &\quad \left. - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

де  $w, t$  – ненульові компоненти векторів переміщень  $(0, 0, w)$  та напружень  $(0, 0, t)$ ;  $\Delta w = w^+ - w^-$ ,  $\Delta t = t^+ - t^-$ ,  $\Sigma w = w^+ + w^-$ ,  $\Sigma t = t^+ + t^-$ ; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь  $\Gamma_C^+$  та  $\Gamma_C^-$ , утворених розрізом  $\Gamma_C$ ;  $n_j^+$  – компоненти вектора нормалі до поверхні  $\Gamma_C^+$ ; позначення RPV означає величину невластивого інтеграла (Riemann principal value); CPV – головне значення інтеграла (Cauchy principal value); HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value);  $w^{\text{hom}}(\mathbf{y})$ ,  $\sigma_{3j}^{\text{hom}}(\mathbf{y})$  – переміщення та напруження в однорідному тілі без включення;  $\Sigma w(\mathbf{y}) = F^w(\Sigma t, \Delta w, \mathbf{y})$ ,  $\Delta t(\mathbf{y}) = F^t(\Sigma t, \Delta w, \mathbf{y})$  – рівняння математичної моделі тонкого включення. Точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій ділянці розрізу  $\Gamma_C$ . Ядра інтегральних рівнянь для антиплоскої задачі теорії пружності ізотропних тіл мають вигляд

$$W(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{\ln r}{2\pi G}, \quad T(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi r^2} r_k n_k, \quad D_j = r_j / (2\pi r^2), \quad S_j = \mu [n_j r^2 - 2r_j (n_k r_k)] / (2\pi r^4). \quad (11)$$

Використавши підхід [9] та розглядаючи зсув тонкого включення у площині, дотичній до його серединної поверхні за моделлю пружної основи Вінклера, легко отримати друге рівняння моделі тонкого включення:

$$\Delta t(\mathbf{y}) = F^t(\Sigma t, \Delta w, \mathbf{y}) = -\Delta w(\mathbf{y}) G_B / h(\mathbf{y}), \quad (12)$$

де  $h(\mathbf{y})$  – півтовщина включення в точці  $\mathbf{y}$ .

Розглядаючи рівновагу деякої частини включення між точками  $\mathbf{y}_0$  та  $\mathbf{y}$ , отримаємо середнє значення напружень у деякому його перерізі  $\mathbf{y}$ :

$$\sigma_{\tau 3}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2h(\mathbf{y})} \left[ 2h(\mathbf{y}_0) \sigma_{\tau 3}(\mathbf{y}_0) + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \quad (13)$$

де  $\mathbf{y}_0$  – радіус-вектор лівого торця включення;  $\sigma_{\tau 3}(\mathbf{y}_0)$  – напруження на лівому торці включення. Пов'язавши середні значення деформацій із середніми значеннями напружень за допомогою закону Гука, отримаємо для перших таких вираз:

$$\varepsilon_{\tau 3}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2h(\mathbf{y}) G_B} \left[ 2h(\mathbf{y}_0) \sigma_{\tau 3}(\mathbf{y}_0) + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \quad \varepsilon_{\tau 3} = \frac{\partial w}{\partial x_\tau}. \quad (14)$$

У формулах (13) та (14) індекс « $\tau$ » вказує на напрям, дотичний до серединної поверхні стрічкового включення.

Інтегруючи (14) та враховуючи, що для тонкого включення величину  $\frac{1}{2} \Sigma w$  можна вважати середнім по товщині значенням його переміщень, отримаємо

$$\frac{1}{2} F^t(\Sigma t, \Delta w, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \Sigma w(\mathbf{y}) = w^0 + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{1}{2h(\mathbf{y}) G_B} \left[ 2h(\mathbf{y}_0) \sigma_{\tau 3}(\mathbf{y}_0) + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{y}), \quad (15)$$

де  $w^0$  – переміщення лівого торця включення, що визначаються із рівняння глобальної рівноваги останнього:

$$2h(\mathbf{y}_n)\sigma_{\tau 3}(\mathbf{y}_n) - 2h(\mathbf{y}_0)\sigma_{\tau 3}(\mathbf{y}_0) - \int_{\Gamma_C} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0. \quad (16)$$

Рівняння (10), (12), (15) та (16) є моделлю антиплоскої деформації безмежного пружного ізотропного середовища з тонким стрічковим включенням. Розв'язуватимемо їх за схемою методу граничних елементів [10]. Для цього криву  $\Gamma_C$  апроксимуємо за допомогою  $n$  прямолінійних відрізків – граничних елементів  $\Gamma_q$ . На кожному елементі виберемо по 3 вузлові точки: одну в центрі, а дві інші – на відстані  $1/3$  довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний граничний елемент). Тоді всі точки колокації утвореного внаслідок апроксимації контуру завжди відповідатимуть точкам на гладкій ділянці апроксимованого контуру. Крайові функції напружень  $\Sigma t$  та переміщень  $\Delta w$  на елементі апроксимуємо за їхніми вузловими значеннями:

$$[\Sigma t, \Delta w](\xi) \approx \sum_{p=1}^3 [\Sigma t^{q,p}, \Delta w^{q,p}] \phi^p(\xi), \quad (17)$$

де  $\xi$  – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку  $-1 \leq \xi \leq 1$  так:  $d\Gamma_q = \frac{L_q}{2} d\xi = J_q d\xi$ ,  $J_q$  – модуль якобіана заміни змінних на елементі  $\Gamma_q$ . Для прямолінійного розривного квадратичного елемента його вузлам  $\mathbf{x}^{q,p}$  ( $p=1, \dots, 3$ ) відповідають значення параметра  $\xi = \{-2/3; 0; 2/3\}$ . Тому інтерполяційні поліноми Лагранжа  $\phi^p(\xi)$  означені виразами

$$\phi^1 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi^2 = \left( 1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \phi^3 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right). \quad (18)$$

Таким чином система гіперсингулярних інтегральних рівнянь (10) зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень  $\Sigma t^{q,p}$ ,  $\Delta w^{q,p}$  крайових функцій  $\Sigma t$  та  $\Delta w$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F^w(\mathbf{x}^{s,r}) &= w^{\text{hom}}(\mathbf{x}^{s,r}) + \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 [\Sigma t^{q,p} \int_{-1}^1 W(\xi, \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - \\ &\quad - \Delta w^{q,p} \int_{-1}^1 T(\xi, \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi], \\ \frac{1}{2} F^t(\mathbf{x}^{s,r}) &= \sum_{j=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \sigma_{3j}^{\text{hom}}(\mathbf{x}^{s,r}) + \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \times \\ &\quad \times \left[ \Sigma t_k^{q,p} \int_{-1}^1 D_j(\xi, \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - \Delta w^{q,p} \int_{-1}^1 S_j(\xi, \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi \right] \end{aligned} \quad (19)$$

для  $3n$  точок колокації  $\mathbf{x}^{s,r}$  ( $s=1, \dots, n; r=1, 2, 3$ ). Граничноелементне подання моделі (12) та (15) тонкого включення сталі товщини  $2h$  має вигляд

$$\begin{aligned} F^t(\mathbf{x}^{k,r}) &= -\Delta w^{k,r} G_B / h; \\ \frac{1}{2} F^w(\mathbf{x}^{k,r}) &= w^0 + \frac{1}{2hG_B} \left[ \sum_{s=1}^{k-1} J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} \Sigma t^s(\zeta) d\zeta d\eta + \right. \\ &\quad \left. + J_k^2 \int_{-1}^{\xi_r} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta + 2 \sum_{m=1}^{k-1} J_m \left( 2h\sigma_{\tau 3}^0 + \sum_{s=1}^{m-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t^s(\xi) d\xi \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\xi_r + 1) J_k \left( 2h\sigma_{\tau 3}^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t^s(\xi) d\xi \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Відповідно до [5] крайові функції біля вершини дефекту можна подати у вигляді

$$\Delta w = K_{31} \sqrt{8r} / (\sqrt{\pi} G), \quad \Sigma t = -K_{32} \sqrt{2/(\pi r)}. \quad (21)$$

де  $r$  – відстань до вершини;  $K_{3i}$  – УКІН ( $K_{31}$  відповідає КІН  $K_3$  теорії тріщин). Для визначення УКІН використаємо значення функцій  $\Delta w$  та  $\Sigma t$  у вузлах 3-3' та 2-2' граничного елемента на кінці включення (рис. 3). Апроксимуючи функціями (21) вузлові значення розривів переміщень  $\Delta w$  та напружень  $\Sigma t$ , обчислені на основі розв'язку системи рівнянь (19) задачі, за допомогою методу найменших квадратів отримаємо прості розрахункові формули

$$K_{31} = \frac{\sqrt{\pi}G(3\Delta w^{2-2'} + \sqrt{15}\Delta w^{3-3'})}{16\sqrt{2J}}, \quad K_{32} = -\frac{\sqrt{2\pi}J(5\Sigma t^{2-2'} + \sqrt{15}\Sigma t^{3-3'})}{16}. \quad (22)$$

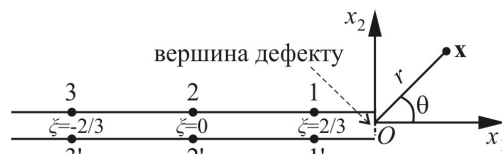


Рис. 3. Система вузлів на кінцевому граничному елементі

За розробленою схемою методу граничних елементів тонке дволанкове включення моделювалося рівномірно розподіленими уздовж ланок  $L_0$  та  $L_1$  граничними елементами. У числовій схемі методу особливість у точці зламу, як і на кінцях розрізу, окремо не виділялася. Узагальнені КІН обчислювалися за апроксимаційними формулами (22).

**Аналіз результатів.** Вивчимо двома розглянутими вище методами вплив геометричних та механічних параметрів неоднорідності на УКІН дволанкового включення за двох способів дії однорідного поля напружень на нескінченності.

**Приклад 1.** Розглянемо симетричну щодо осі  $y$  дволанкову неоднорідність півтовщини  $h = 0,01a$  з відносним модулем пружності  $k = G_B/G$ , кутом  $\alpha$  розхилу однакових за величиною  $a_0 = a_1 = a$  ланок за дії навантаження на нескінченності  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = 0$  (див. рис. 1). Під час розв'язування ССІР (6) з додатковими умовами (1), (7), (8) методом колокацій [5] бралось  $N = 40$  членів розвинення в ряд функцій стрибків, що забезпечило похибку обчислень УКІН у 0,1%.

Загальна кількість граничних елементів, використаних для моделювання задачі у методі за схемою граничних елементів, дорівнює 82 (по 41 елементу на кожен ланку).

У табл. 1 подано результати обчислення нормованих УКІН  $K_{31}^{0\tau} = K_{31}/(\tau\sqrt{\pi a})$  для лівої ( $A$ ) вершини податнішого за матрицю дволанкового включення (для жорсткіших цей УКІН близький до нуля), отримані методом впровадження додаткових зосереджених чинників і за схемою (19) методу граничних елементів.

Таблиця 1

Нормовані УКІН  $K_{31}^{0\tau}$  лівої ( $A$ ) вершини податнішого за матрицю дволанкового включення у нескінченному просторі

	Метод додаткових зосереджених чинників						Метод граничних елементів					
	30	60	90	120	150	180	30	60	90	120	150	180
0	0	0	0	0	0	0	0,009	0,017	0,025	0,030	0,034	0,035
-0,5	0,025	0,047	0,067	0,082	0,092	0,095	0,024	0,046	0,065	0,079	0,088	0,091
-1	0,058	0,112	0,158	0,194	0,216	0,224	0,053	0,103	0,146	0,178	0,199	0,206
-2	0,191	0,363	0,509	0,619	0,688	0,712	0,192	0,363	0,508	0,619	0,688	0,711
-3	0,414	0,705	0,939	1,113	1,222	1,258	0,426	0,722	0,960	1,137	1,247	1,284
-4	0,507	0,812	1,059	1,243	1,357	1,396	0,523	0,834	1,085	1,273	1,390	1,429
-7	0,521	0,827	1,075	1,260	1,375	1,414	0,538	0,850	1,102	1,291	1,408	1,448
Ф. (23)	0,521	0,827	1,075	1,260	1,375	1,414	0,521	0,827	1,075	1,260	1,375	1,414

У останньому рядку табл. 1 подано результати для дволанкової тріщини, обчислені за формулою (23).

У табл. 2 подано результати обчислення нормованих УКІН  $K_{32}^{0\tau} = K_{32}/(\tau\sqrt{\pi a})$  для лівої ( $A$ ) вершини жорсткішого за матрицю дволанкового включення. УКІН для лівої і правої вершин включення для податнішої за матрицю неоднорідності виявилися того ж, а для жорсткішої – протилежного знаку.

Спостерігаємо, що результати обчислення УКІН, отримані за допомогою методу додаткових зосереджених чинників, різняться не більше, як на 1–3 % від результатів, отриманих за схемою методу граничних елементів (див. табл. 1, 2). Розбіжність результатів пояснюється перш за все нехтуванням у

схемі (19) кореневою особливістю стрибків напружень на кінцях неоднорідності, обчисленням УКІН за апроксимаційними формулами (22), відмінністю моделей тонкого включення.

Таблиця 2

Нормовані УКІН  $K_{32}^{0\tau}$  лівої ( $A$ ) вершини жорсткішого за матрицю дволанкового включення у нескінченному просторі

	Метод додаткових зосереджених чинників						Метод граничних елементів					
	30	60	90	120	150	180	30	60	90	120	150	180
7	0,785	0,740	0,621	0,446	0,233	0	0,771	0,732	0,615	0,442	0,231	0
4	0,782	0,737	0,618	0,443	0,231	0	0,767	0,728	0,612	0,439	0,229	0
3	0,753	0,707	0,591	0,424	0,221	0	0,735	0,694	0,582	0,418	0,218	0
2	0,564	0,517	0,427	0,304	0,158	0	0,524	0,483	0,399	0,284	0,148	0
1	0,212	0,190	0,155	0,110	0,057	0	0,146	0,131	0,107	0,076	0,039	0
0,5	0,091	0,082	0,067	0,047	0,024	0	0,046	0,041	0,033	0,024	0,012	0
0	0	0	0	0	0	0	0,008	0,007	0,006	0,004	0,002	0

Достовірність отриманих результатів забезпечується також порівнянням УКІН для дуже податного включення ( $k = 10^{-7}$ ) з отриманими на основі формул [11] КІН  $K_3$  для дволанкової тріщини у просторі, зокрема: для навантаження  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = 0$  –

$$K_{31}^{0\tau} \sim K_3 = \sqrt{2} [m/(1-m)]^{1/2-m}; \quad (23)$$

для навантаження  $\sigma_{yz}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$  –

$$K_{31}^{0\tau_1} \sim K_3 = 1/\sqrt{2} (1-2m)m^{-m} (1-m)^{m-1}, \quad m = \alpha/(2\pi). \quad (24)$$

Результати обчислення УКІН за допомогою методу додаткових зосереджених чинників з похибкою менше 0,1% збігаються з отриманими на основі формул (23), (24). У випадку розв'язку за схемою методу граничних елементів похибка склала близько 2% через неврахування особливості.

Зазначимо також, що для навантаження у площині, перпендикулярній до площини навантаження попередньо розглянутого випадку, тобто  $\sigma_{yz}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ , і так само розташованого включення з відносним модулем пружності  $\tilde{k}$ , таким, що  $\lg \tilde{k} = -\lg k$ , УКІН  $K_{32}^{0\tau_1} = K_{32} / (\tau_1 \sqrt{\pi a})$  і  $K_{31}^{0\tau_1} = K_{31} / (\tau_1 \sqrt{\pi a})$  відрізнялися не більше, як на 0,1% від УКІН  $K_{31}^{0\tau}$  та  $K_{32}^{0\tau}$  відповідно, отриманих за навантаження  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = 0$  ( $K_{32}^{0\tau_1} \approx K_{31}^{0\tau}$ ,  $K_{31}^{0\tau_1} \approx K_{32}^{0\tau}$ ) при обчисленні методом додаткових зосереджених чинників і не більше 3% при обчисленні за схемою методу граничних елементів. Це впливає, зокрема, і з відповідності ССІР (6) двох задач.

**Приклад 2.** Розглянемо дволанкове включення відносної товщини  $h/a_0 = 0,01$  з ланками різної довжини за дії навантаження  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = 0$  (див. візку рис. 4). Проаналізуємо вплив відносної довжини  $c = a_1/a_0$  неоднорідностей, а також їхнього кута розхилу  $\alpha$  на нормовані УКІН  $K_{3i}^{0A,B} = K_{3i}^{A,B} / (\tau \sqrt{\pi a_0})$  ( $i=1,2$ ) лівої ( $A$ ) і правої ( $B$ ) вершини неоднорідності (рис. 4). Дослідимо випадки гострого  $\alpha = \pi/6$  (на рис. 4 – суцільна лінія), прямого  $\alpha = \pi/2$  (штрихова лінія) та тупого  $\alpha = 5\pi/6$  (пунктирна лінія) кутів розхилу  $\alpha = \alpha_0 - \alpha_1$ . Обчислення здійснені для  $c = 1; 0,8; 0,5; 0,3; 0,1$ .

Спостерігаємо, що зі зменшенням довжини ланки  $L_1$ , абсолютна величина нормованих УКІН для вершини  $A$  ланки  $L_0$  зменшується для податнішого за матрицю включення і зростає для жорсткішого. Екстремальні значення нормованих УКІН  $K_{3i}^{0A}$  ( $i=1,2$ ) отримуються для граничних випадків пружних властивостей включення – тріщини і АЖВ.

Зростання кута розхилу  $\alpha$  від нуля до  $\pi$  податнішої за матрицю неоднорідності спричиняє зростання нормованого УКІН лівої ( $A$ ) вершини, який за такого навантаження досягає свого максимуму

у разі плоскої стрічкової тріщини ( $\alpha = \pi$ ). У випадку жорсткішої за матрицю неоднорідності спостерігаємо протилежну ситуацію. Результати дослідження впливу малих кутів між ланками з огляду на обмежений обсяг публікації тут не подано. Це питання вимагає окремого докладного вивчення.

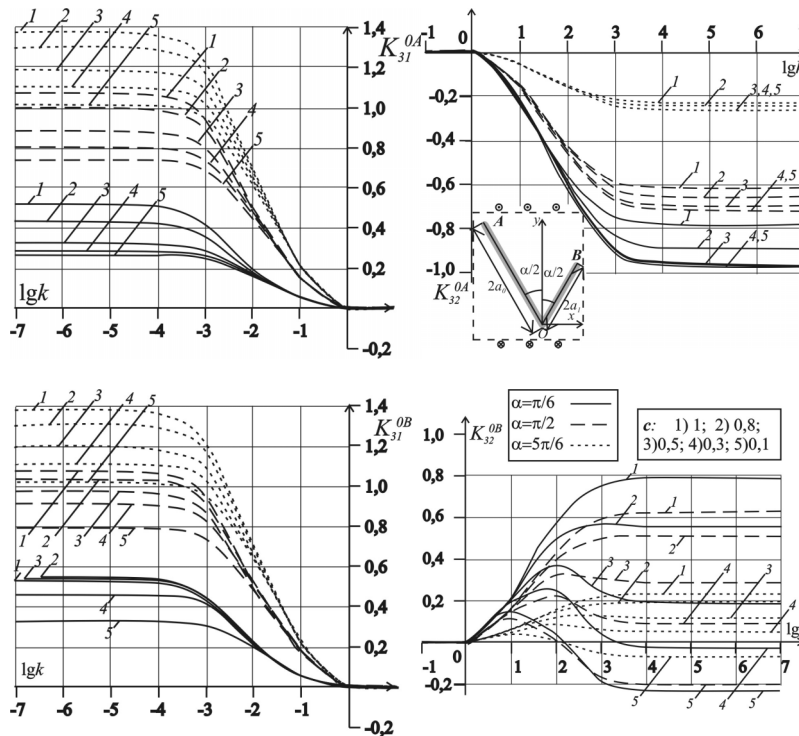


Рис. 4. Нормовані УКІН для несиметричного дволанкового включення

Для вершини  $B$  ланки  $L_1$  спостерігаємо дещо іншу ситуацію. Зокрема для гострого кута добре видно, що графіки залежностей УКІН  $K_{32}^{0B}$  від відносного модуля зсуву не є монотонними: зі зростанням  $k$  спочатку спостерігаємо зростання  $K_{32}^{0B}$ , досягнення ним певного максимального значення і подальше спадання, навіть, для малих значень  $c$ , з можливою для достатньо коротких і великих кутів зламу включення зміною знаку УКІН на протилежний. Пояснити ці неочевидні результати можна перш за все взаємодією вершини  $B$  неоднорідності з ланкою  $L_0$  включення  $L$ , яка посилюється зі зменшенням довжини ланки  $L_1$ . Близькість результатів, отриманих двома методами, дає підстави стверджувати їхню правильність.

**Висновки.** У роботі на основі методу функцій стрибків запропоновано прості способи достатньо точного визначення напружено-деформованого стану безмежного ізотропного середовища з дволанковою пружною тонкою неоднорідністю. Задача зводиться до визначення напружено-деформованого стану для двох пружних неоднорідностей за дії додаткової невідомої зосередженої сили і дислокації у точці поєднання між собою окремих фрагментів, та використанні певних додаткових умов. Також розроблено числовий підхід розв'язування задач антиплоскої деформації тіл із тонкими стрічковими включеннями довільної гладкої чи ламаної конфігурації за схемою методу граничних елементів. Обчислені для прикладів узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень збіглися з відомими розв'язками КІН для дволанкової тріщини. Взаємна верифікація результатів, отриманих двома розробленими методами, виявляє хорошу узгодженість, що свідчить про достовірність отриманих даних і у випадку дволанкового пружного включення.

## РЕЗЮМЕ

Разработана аналитико-численная, а также численная методика (на основе метода граничных элементов) решения задач продольного сдвига бесконечного изотропного тела с тонкими упругими включениями при наличии угловых точек. Результаты вычислений обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений для двухзвенного упругого включения при нагрузке на бесконечности, вычисленные с помощью двух методов, отличаются незначительно, что подтверждает правильность полученных результатов.

**Ключевые слова:** двухзвенное упругое включение, ломаная трещина, МГЭ, ССИУ, УКІН, метод сосредоточенных факторов.



**SUMMARY**

This paper develops analytic-numeric and numeric (basing on the boundary element method) approaches for study of out-of-plane shear of infinite solid containing thin elastic kinked inclusion. The values of generalized stress intensity factors obtained by both developed approaches for two-link elastic kinked inclusion are in a good agreement that verifies the correctness of the received results and also proves the efficiency of proposed techniques.

*Keywords:* two-link elastic inclusion, kinked crack, BEM, SSIE, SIF, method of concentrated factors

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Саврук М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
2. Саврук М. П. Визначення напруженого стану нескінченного тіла з ламаними тріщинами / Саврук М. П., Осечко А. М. // *Машинознавство*. – 2002. – № 9. – С. 21 – 25.
3. Саврук М. П. Поздовжній зсув безмежного тіла із системою ламаних тріщин / Саврук М. П., Осечко А. М. // *ФХММ*. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 49 – 58.
4. Chen YZ. Complex potentials and integral equations for curved crack and curved rigid line problems in plane elasticity / Chen YZ, Lin XY. // *Acta Mechanica*. – 2006. – P. 182:211–230.
5. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Сулим Г. Т. – Монографія. – Львів: дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
6. Божидарник В. В. Елементи теорії пружності / Божидарник В. В. Сулим Г. Т. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
7. Сулим Г. Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде / Сулим Г. Т. // *Прикл. матем. и механика*. – 1981. – Т. 45, № 2. – С. 308 – 318.
8. Божидарник В. В. Елементи теорії пластичності та міцності / Божидарник В. В. Сулим Г. Т. – Львів: Світ, 1994. – 948 с.
9. Панасюк В. В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями / Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
10. Portela A. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems / Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P. // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 1992. – Vol. 33. – P. 1269–1287.
11. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. / Саврук М. П. – К.: Наук. думка, 1988. – 618 с.

*Надійшла до редакції 01.03.2010 р.*