УДК 539.3:534.1

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ЖЕСТКИМИ ПЛОСКИМИ ГРАНЯМИ

Е. В. Алтухов, Е. В. Куцая, М. В. Фоменко

В трехмерной постановке рассмотрена задача о гармонических колебаниях упругой двухслойной пластины. Плоские грани пластины жестко защемлены. Слои находятся в условиях идеального контакта и являются изотропными. Полуобратным методом получены в виде суммы вихревого и потенциального состояний однородные решения систем уравнений движения в перемещениях. Исследованы дисперсионные уравнения вихревого и потенциального состояний. Проведен анализ характеристик волнового процесса.

Ключевые слова: двухслойная пластина, гармонические колебания, однородные решения, дисперсионные уравнения, критические частоты дисперсионных кривых, фазовые и групповые скорости.

Введение. Актуальным для науки и практических приложений является изучение волновых полей в слоистых средах на основе уравнений трехмерной теории упругости. Из библиографических указателей [1-3] и обзорных статей [4-11] можно получить достаточно полную информацию об исследованиях в области механики неоднородных тел. Следует отметить, что большинство научных результатов получено на основе приближенных теорий. В работах [12-14] на основе уравнений двумерной теории упругости исследованы зависимости характеристик нормальных волн в двухслойной изотропной среде от физических свойств и геометрических параметров слоев, проанализированы формы колебаний нормальных волн и особенности распределения энергии.

Важную роль в развитии аналитических методов исследования напряженного состояния однородных и поперечно-неоднородных плит сыграли однородные решения [15-21]. В работах [15,18] получены общие решения уравнений равновесия и установившихся колебаний однослойной пластины с жестко защемленными плоскими гранями. В трехмерной постановке [16] рассмотрена аналогичная задача упругого равновесия двухслойной пластины.

Настоящая работа развивает подход [16] на случай установившихся колебаний двухслойной пластины.

Постановка задачи и решение. Рассмотрим пластину с жестко защемленными плоскими гранями, составленную из двух изотропных слоев (рис. 1). Координатную плоскость $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ совмести с плоскостью их спая, ось $O\tilde{x}_3$ направим перпендикулярно к торцам. В дальнейшем величины, относящиеся к верхнему слою, будем обозначать индексом (1), к нижнему – индексом (2). Физико-механические характеристики материалов обозначим: $\tilde{G}_m$ – модуль сдвига, ν_m – коэффициент Пуассона (отношение деформаций), ρ_m – плотность материала, m – номер слоя.

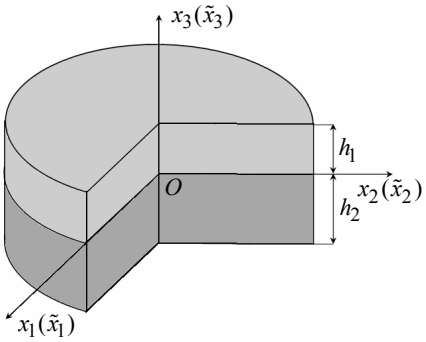

Рис. 1. Двухслойная изотропная пластина поперечно-неоднородного строения

Введем следующие безразмерные величины:

$$x_1 = \tilde{x}_1/R,\ x_2 = \tilde{x}_2/R,\ x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R),$$
$$\lambda = h/R,\quad h = h_1 + h_2,\quad \lambda_1 = h_1/h,\quad \lambda_2 = h_2/h,$$
$$u_{i(m)}(x_1,x_2,x_3) = \tilde{u}_{i(m)}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)/R,$$
$$\sigma_{ij(m)}(x_1,x_2,x_3) = \tilde{\sigma}_{ij(m)}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)/\left(2\tilde{G}_2\right)\quad \left(i,j=\overline{1,3}\right),$$
$$G_m = \tilde{G}_m/\tilde{G}_2,\ G_1 = G\quad (m=1,2), \tag{1}$$

где h – толщина пластины, λ – безразмерная толщина пластины, R – характерный линейный размер в серединной плоскости пластины, λ_m – относительные толщины слоев. За счет такого перехода сокращается число рассматриваемых в дальнейшем геометрических и физических параметров.

Введем обозначения операций дифференцирования, положив

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},\ \partial_1^2 = \partial_1\partial_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\ \partial_2^2 = \partial_2\partial_2,\ D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

где D^2 – двумерный оператор Лапласа.

С учетом введенных обозначений (1) задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений движения в перемещениях

 © Алтухов Е. В., Куцая Е. В., Фоменко М. В.

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-2}\partial_3^2 u_{1(m)} + \left(D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2\right) u_{1(m)} + \nu_{0(m)}\partial_1\theta_m = 0,\\
&\lambda^{-2}\partial_3^2 u_{2(m)} + \left(D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2\right) u_{2(m)} + \nu_{0(m)}\partial_2\theta_m = 0,\\
&\lambda^{-2}\partial_3^2 u_{3(m)} + \left(D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2\right) u_{3(m)} + \lambda^{-1}\nu_{0(m)}\partial_3\theta_m = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&u_{i(1)}(x_1, x_2, \lambda_1) = 0,\\
&u_{i(2)}(x_1, x_2, -\lambda_2) = 0,\\
&u_{i(1)}(x_1, x_2, 0) = u_{i(2)}(x_1, x_2, 0),\\
&\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, 0),
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\theta_m = \partial_1 u_{1(m)} + \partial_2 u_{2(m)} + \lambda^{-1}\partial_3 u_{3(m)},\ \nu_{0(m)} = 1/\left(1 - 2\nu_m\right),\ \Omega_m = \omega h / c_{S(m)},\ c_{S(m)} = \sqrt{\tilde{G}_m / \rho_m},$$

ω – круговая частота колебаний.

Представим однородные решения краевой задачи (2), (3) в виде суммы вихревого и потенциального состояний [17]

$$u_{i(m)}\left(x_1, x_2, x_3\right) = u_{i(m)B}\left(x_1, x_2, x_3\right) + u_{i(m)\Pi}\left(x_1, x_2, x_3\right) \quad \left(i = \overline{1,3},\ m = 1,2\right),$$

Вихревое решение. Перемещения вихревого состояния имеют вид

$$\begin{aligned}
&u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) = p_{(m)}(x_3)\partial_2 B(x_1, x_2),\\
&u_{2(m)B}(x_1, x_2, x_3) = -p_{(m)}(x_3)\partial_1 B(x_1, x_2),\\
&u_{3(m)B}(x_1, x_2, x_3) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Подставим (4) в краевую задачу (2), (3) . В результате получим уравнения для определения функций $B(x_1, x_2)$

$$D^2 B(x_1, x_2) - \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2 B(x_1, x_2) = 0 \tag{5}$$

и спектральную задачу для нахождения собственных функций $p_{(m)}(x_3)$ и параметра δ:

$$\begin{aligned}
&\partial_3^2 p_{(m)}\left(x_3\right) + l_{(m)}^2 p_{(m)}\left(x_3\right) = 0,\\
&p_{(1)}\left(\lambda_1\right) = 0,\ p_{(2)}\left(-\lambda_2\right) = 0,\ p_{(1)}\left(0\right) = p_{(2)}\left(0\right),\ G\partial_3 p_{(1)}\left(0\right) = \partial_3 p_{(2)}\left(0\right),
\end{aligned} \tag{6}$$

где $l_{(m)}^2 = \Omega_m^2 + \delta^2$.

Собственные функции спектральной задачи (6) получаются такими

$$\begin{aligned}
&p_{(1)k}(x_3) = \sin\left(\lambda_1 - x_3\right) l_{(1)k},\\
&p_{(2)k}(x_3) = \sin\left(l_{(1)k}\lambda_1\right)\cos\left(l_{(2)}x_3\right) - \frac{G l_{(1)}}{l_{(2)}}\cos\left(l_{(1)k}\lambda_1\right)\sin\left(l_{(2)}x_3\right),
\end{aligned} \tag{7}$$

а собственные значения δ находим из трансцендентного уравнения

$$G\, l_{(1)}\cos\left(l_{(1)}\lambda_1\right)\sin\left(l_{(2)}\lambda_2\right) + l_{(2)}\sin\left(l_{(1)}\lambda_1\right)\cos\left(l_{(2)}\lambda_2\right) = 0. \tag{8}$$

В результате однородные решения вихревого состояния примут вид

$$u_{1(m)B} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}\partial_2 B_k,\quad u_{2(m)B} = -\sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}\partial_1 B_k,\quad u_{3(m)B} = 0. \tag{9}$$

Полагая $\omega = 0$, уравнение (8) в преобразуется к виду

$$\left(G - 1\right)\sin\delta\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) + \left(G + 1\right)\sin\delta = 0$$

и совпадает с известным [16].

Когда $\lambda_2 = 0$, $G = 0$, уравнение (8) примет вид [15]

$$\sin l_{(1)} = 0 .$$

Потенциальное решение. Для построения потенциального решения полагаем

$$\begin{aligned} u_{1(m)\Pi}\left(x_1,x_2,x_3\right) &= n_{(m)}\left(x_3\right)\partial_1 C\left(x_1,x_2\right), \\ u_{2(m)\Pi}\left(x_1,x_2,x_3\right) &= n_{(m)}\left(x_3\right)\partial_2 C\left(x_1,x_2\right), \\ u_{3(m)\Pi}\left(x_1,x_2,x_3\right) &= q_{(m)}\left(x_3\right) C\left(x_1,x_2\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Из выражений (2), (3), (10) следует, что функция $C(x_1,x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$D^2 C(x_1,x_2) - \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 C\left(x_1,x_2\right) = 0 , \tag{11}$$

а для определения функций $n_{(m)}\left(x_3\right)$, $q_{(m)}\left(x_3\right)$ и параметра γ получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & n''_{(m)}\left(x_3\right) + \left[\Omega_m^2 + \gamma^2\left(1+\nu_{0(m)}\right)\right] n_{(m)}\left(x_3\right) + \lambda \nu_{0(m)} q'_{(m)}\left(x_3\right) = 0, \\ & q''_{(m)}\left(x_3\right) + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1+\nu_{0(m)}} q_{(m)}\left(x_3\right) + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda\left(1+\nu_{0(m)}\right)} n'_{(m)}\left(x_3\right) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered} n_{(1)}\left(\lambda_1\right) = 0 ,\ q_{(1)}\left(\lambda_1\right) = 0 ,\ n_{(2)}\left(-\lambda_2\right) = 0 ,\ q_{(2)}\left(-\lambda_2\right) = 0 , \\ n_{(1)}\left(0\right) = n_{(2)}\left(0\right),\ q_{(1)}\left(0\right) = q_{(2)}\left(0\right), \\ G\left(\lambda q_{(1)}\left(0\right) + n'_{(1)}\left(0\right)\right) = \lambda q_{(2)}\left(0\right) + n'_{(2)}\left(0\right), \\ G\left(\left(\nu_{0(m)} - 1\right)\gamma^2 n_{(1)}\left(0\right) + \lambda\left(1+\nu_{0(m)}\right) q'_{(1)}\left(0\right)\right) = \left(\nu_{0(m)} - 1\right)\gamma^2 n_{(2)}\left(0\right) + \lambda\left(1+\nu_{0(m)}\right) q'_{(2)}\left(0\right). \end{gathered} \tag{13}$$

Общее решение системы (13) имеет вид

$$\begin{aligned} n_{(m)}\left(x_3\right) &= H_{1(m)}\cos\gamma_{1(m)}x_3 + H_{2(m)}\sin\gamma_{1(m)}x_3 + H_{3(m)}\cos\gamma_{2(m)}x_3 + H_{4(m)}\sin\gamma_{2(m)}x_3, \\ q_{(m)}\left(x_3\right) &= Q_{1(m)}\sin\gamma_{1(m)}x_3 + Q_{2(m)}\cos\gamma_{1(m)}x_3 + Q_{3(m)}\sin\gamma_{2(m)}x_3 + Q_{4(m)}\cos\gamma_{2(m)}x_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\gamma_{1(m)} = \Omega_m^2 \Big/ \left(1+\nu_{0(m)}\right) + \gamma^2 ,\ \gamma_{2(m)} = \Omega_m^2 + \gamma^2 .$$

$$Q_{1(m)} = -\frac{\gamma_{1(m)}}{\lambda} H_{1(m)} ,\ Q_{2(m)} = \frac{\gamma_{1(m)}}{\lambda} H_{2(m)} ,\ Q_{3(m)} = -\frac{\gamma^2}{\lambda\gamma_{2(m)}} H_{3(m)} ,\ Q_{4(m)} = \frac{\gamma^2}{\lambda\gamma_{2(m)}} H_{4(m)} \tag{15}$$

Подставляя выражения (14) в граничные условия (13) с учетом (15), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $H_{i(m)}$ $\left(i = \overline{1,4}\right)$. Элементы определителя $\det\left\{A_{ij}\right\}$ $\left(i,j = \overline{1,8}\right)$ этой системы имеют вид

$$A_{11} = \cos\gamma_{1(1)}\lambda_1 ,\ A_{12} = \sin\gamma_{1(1)}\lambda_1 ,\ A_{13} = \cos\gamma_{2(1)}\lambda_1 ,\ A_{14} = \sin\gamma_{2(1)}\lambda_1 ,\ A_{15} = 0 ,\ A_{16} = 0 ,$$

$$A_{17} = 0 ,\ A_{18} = 0 ,\ A_{21} = -\gamma_{1(1)}\sin\gamma_{1(1)}\lambda_1 ,\ A_{22} = \gamma_{1(1)}\cos\gamma_{1(1)}\lambda_1 ,\ A_{23} = -\frac{\gamma^2}{\gamma_{2(1)}}\sin\gamma_{2(1)}\lambda_1 ,$$

$$A_{24} = \frac{\gamma^2}{\gamma_{2(1)}}\cos\gamma_{2(1)}\lambda_1 ,\ A_{25} = 0 ,\ A_{26} = 0 ,\ A_{27} = 0 ,\ A_{28} = 0 ,\ A_{31} = 1 ,\ A_{32} = 0 ,\ A_{33} = 1 ,\ A_{34} = 0 ,$$

$$A_{35} = -1 ,\ A_{36} = 0 ,\ A_{37} = -1 ,\ A_{38} = 0 ,\ A_{41} = 0 ,\ A_{42} = \gamma_{1(1)} ,\ A_{43} = 0 ,\ A_{44} = \frac{\gamma^2}{\gamma_{2(1)}} ,\ A_{45} = 0 ,$$

$$A_{46}=-\gamma_{1(2)},\ A_{47}=0,\ A_{48}=-\frac{\gamma^2}{\gamma_{2(2)}},\ A_{51}=0,\ A_{52}=2G\gamma_{1(1)},\ A_{53}=0,\ A_{54}=G\frac{\gamma^2+\gamma_{2(1)}^2}{\gamma_{2(1)}},\ A_{55}=0,$$

$$A_{56}=-2\gamma_{1(2)},\ A_{57}=0,\ A_{58}=-\frac{\gamma^2+\gamma_{2(2)}^2}{\gamma_{2(2)}},\ A_{61}=G\left(\left(\nu_{0(1)}-1\right)\gamma^2-\gamma_{1(1)}^2\left(1+\nu_{0(1)}\right)\right),\ A_{62}=0,$$

$$A_{63}=-2G\gamma^2,\ A_{64}=0,\ A_{65}=-\left(\nu_{0(2)}-1\right)\gamma^2+\gamma_{1(2)}^2\left(\nu_{0(2)}+1\right),\ A_{66}=0\ \ A_{67}=2\gamma^2,\ A_{68}=0,$$

$$A_{71}=0,\ A_{72}=0,\ A_{73}=0,\ A_{74}=0,\ A_{75}=\cos\gamma_{1(2)}\lambda_2,\ A_{76}=-\sin\gamma_{1(2)}\lambda_2,\ A_{77}=\cos\gamma_{2(2)}\lambda_2,$$

$$A_{78}=-\sin\gamma_{2(2)}\lambda_2,\ A_{81}=0,\ A_{82}=0,\ A_{83}=0,\ A_{84}=0,\ A_{85}=\gamma_{1(2)}\sin\gamma_{1(2)}\lambda_2,$$

$$A_{86}=\gamma_{1(2)}\cos\gamma_{1(2)}\lambda_2,\ A_{87}=\frac{\gamma^2}{\gamma_{2(2)}}\sin\gamma_{2(2)}\lambda_2,\ A_{88}=\frac{\gamma^2}{\gamma_{2(2)}}\cos\gamma_{2(2)}\lambda_2.$$

Из условия равенства нулю данного определителя получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{gathered}
r_1\left(d_1(G-1)^2+e_1(G-1)+f_1\right)C_{11}C_{21}C_{12}C_{22}+\ r_2\left(d_2(G-1)^2+e_2(G-1)+f_2\right)C_{11}C_{21}S_{12}S_{22}+\\
+r_3e_3G\,C_{11}S_{21}C_{12}S_{22}+r_4e_4G\,C_{11}S_{21}S_{12}C_{22}+\ r_5e_5G\,S_{11}C_{21}C_{12}S_{22}+r_6e_6G\,S_{11}C_{21}S_{12}C_{22}+\\
+r_7\left(d_7(G-1)^2+e_7(G-1)+f_7\right)S_{11}S_{21}C_{12}C_{22}+\ r_8\left(d_8(G-1)^2+e_8(G-1)+f_8\right)S_{11}S_{21}S_{12}S_{22}+\\
+r_9\left(d_9(G-1)^2+e_9(G-1)+f_9\right)C_{11}C_{21}+\ r_{10}\left(d_{10}(G-1)^2+e_{10}(G-1)+f_{10}\right)S_{11}S_{21}+\\
+r_{11}\left(d_{11}(G-1)^2+e_{11}(G-1)+f_{11}\right)C_{12}C_{22}+r_{12}\left(d_{12}(G-1)^2+e_{12}(G-1)+f_{12}\right)S_{12}S_{22}+\\
+r_{13}\left(d_{13}(G-1)^2+e_{13}(G-1)+f_{13}\right)=0.
\end{gathered}\tag{16}$$

Здесь

$$r_1=2\gamma^2\gamma_{1(1)}\gamma_{1(2)}\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}\right),\ d_1=\zeta_1^2+4\gamma^4,\ e_1=\Delta\left(4\gamma^2+\Omega_1^2\right)+\Omega_1^4,\ f_1=\Delta^2+\Omega_1^2\Omega_2^2,$$

$$r_2=\gamma_{1(1)}\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}^2\right),\ d_2=\xi_2\left(\zeta_2^2+4\gamma^4\right),\ e_2=2\zeta_1\xi_2\Omega_1^2-8\gamma^6\Omega_2^2-2\gamma^4\Omega_1^2\Omega_2^2,$$

$$f_2=\gamma^4\left(\Delta^2+\Omega_2^4\right)+\tau_2\Omega_1^4,\ r_3=-\gamma^2\gamma_{1(1)}\gamma_{1(2)}\Big/\left(\gamma_{2(1)}^2\gamma_{2(2)}^2\right),\ e_3=\Omega_1^2\Omega_2^2\left(\gamma_{2(1)}^2+\gamma_{2(2)}^2\right),$$

$$r_4=\gamma_{1(1)}\Big/\left(\gamma_{2(1)}^2\gamma_{2(2)}\right),\ e_4=\Omega_1^2\Omega_2^2\xi_{21},\ r_5=\gamma_{1(2)}\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}^2\right),\ e_5=\Omega_1^2\Omega_2^2\xi_{12},$$

$$r_6=-\gamma^2\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}\right),\ e_6=\Omega_1^2\Omega_2^2\left(\gamma_{1(1)}^2+\gamma_{1(2)}^2\right),\ r_7=\gamma_{1(2)}\Big/\left(\gamma_{2(1)}^2\gamma_{2(2)}\right),\ d_7=2\gamma^4\left(\zeta_1^2+4\tau_1\right),$$

$$e_7=2\gamma^2\left(2\gamma^2\zeta_1\Omega_1^2-2\xi_1\Omega_2^2-\gamma^2\Omega_1^2\Omega_2^2\right),\ f_7=\gamma^4\left(\Delta^2+\Omega_1^4\right)+\tau_1\Omega_2^4,\ r_8=\gamma^2\Big/\left(\gamma_{2(1)}^2\gamma_{2(2)}^2\right),$$

$$d_8=\xi_2\left(\zeta_1^2+4\tau_1\right),\ e_8=2\zeta_1\xi_2\Omega_1^2-4\gamma^2\xi_1\Omega_2^2-2\gamma^4\Omega_1^2\Omega_2^2,\ f_8=\gamma^4\Delta^2+\tau_2\Omega_1^4+\tau_1\Omega_2^4,$$

$$r_9=-2\gamma_{1(1)}\gamma_{1(2)}\gamma^2\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}\right),\ d_9=\zeta_1^2+4\gamma^4,\ e_9=\Delta\left(4\gamma^2+\Omega_1^2\right)+\Omega_1^4,\ f_9=\Omega_1^2\Delta,$$

$$r_{10}=-2\gamma_{1(2)}\gamma^2\Big/\left(\gamma_{2(1)}^2\gamma_{2(2)}\right),\ d_{10}=\gamma^2\left(\zeta_1^2+4\tau_1\right),\ e_{10}=2\gamma^2\zeta_1\Omega_1^2-2\xi_1\Omega_2^2-\gamma^2\Omega_1^2\Omega_2^2,$$

$$f_{10}=\gamma^2\Omega_1^2\Delta,\ r_{11}=-2\gamma_{1(1)}\gamma_{1(2)}\gamma^2\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}\right),\ d_{11}=4\gamma^2\zeta_1,\ e_{11}=4\gamma^2\Delta-\Omega_1^2\Omega_2^2,\ f_{11}=-\Delta\Omega_2^2,$$

$$r_{12}=-2\gamma_{1(1)}\gamma^2\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}^2\right),\ d_{12}=2\zeta_1\xi_2,\ e_{12}=2\xi_2\Omega_1^2-4\gamma^4\Omega_2^2-\gamma^2\Omega_1^2\Omega_2^2,\ f_{12}=-\gamma^2\Delta\Omega_2^2,$$

$$r_{13}=2\gamma_{1(1)}\gamma_{1(2)}\gamma^2\Big/\left(\gamma_{2(1)}\gamma_{2(2)}\right),\ d_{13}=4\gamma^2\zeta_1,\ e_{13}=4\gamma^2\Delta-\Omega_1^2\Omega_2^2,\ f_{13}=-\Omega_1^2\Omega_2^2;$$

$$\Delta=\Omega_1^2-\Omega_2^2,\ \zeta_1=\gamma^2+\gamma_{2(1)}^2,\ \tau_1=\gamma_{1(1)}^2\gamma_{2(1)}^2,\ \tau_2=\gamma_{1(2)}^2\gamma_{2(2)}^2,$$

$$\xi_1=\gamma^4+\gamma_{1(1)}^2\gamma_{2(1)}^2,\ \xi_2=\gamma^4+\gamma_{1(2)}^2\gamma_{2(2)}^2,\ \xi_{12}=\gamma^4+\gamma_{1(1)}^2\gamma_{2(2)}^2,\ \xi_{21}=\gamma^4+\gamma_{2(1)}^2\gamma_{1(2)}^2;$$

$$S_{jm}=\sin\gamma_{j(m)}\lambda_m,\ C_{jm}=\cos\gamma_{j(m)}\lambda_m\quad\left(j,m=1,2\right).$$

Если $\omega \to 0$, тогда уравнение (16) преобразуется к виду

$$E_1 r_1 r_2 s_1^2 s_2^2 - E_2 g_2^2 r_1 s_1^2 - E_3 g_1^2 r_2 s_2^2 + E_4\left(g_1^2 - r_1^2 s_1^2\right) +$$
$$+E_5\left(g_2^2 - r_2^2 s_2^2\right) + E_6\left(g_1 g_2 - r_1 r_2 s_1 c_1 s_2 c_2\right) + E_7 g_1^2 g_2^2 = 0 \ ,$$

где

$$E_1 = r_2 G^2 + 2k_1 k_2 G + r_1 \ , \ E_2 = (G-1)(G+r_1) \ , \ E_3 = -(G-1)(r_2 G + 1) \ ,$$
$$E_4 = (1+k_2)^2 \ , \ E_5 = G^2 (1+k_1)^2 \ , \ E_6 = 2G(1+k_1)(1+k_2) \ ; \ E_7 = -(G-1)^2 \ ;$$
$$k_m = 1 - 2\nu_m \ , \ r_m = 1 + 2k_m \ , \ g_m = \gamma\lambda_m \ , \ c_m = \cos g_m \ , \ s_m = \sin g_m \ .$$

и совпадает с известным [16].

Таким образом, потенциальное решение примет вид

$$u_{1(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{(m)p}(x_3)\partial_1 C_p(x_1, x_2)$$
$$u_{2(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{(m)p}(x_3)\partial_2 C_p(x_1, x_2)$$
$$u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} q_{(m)p}(x_3) C_p(x_1, x_2)$$

Для длинных волн при $\gamma = 0$ уравнение (16) принимает вид

$$F(\Omega) \equiv \left(G\Omega_1 c_{21} s_{22} + \Omega_2 s_{21} c_{22}\right)\left(G k_1^{-1} \Omega_1 c_{11} s_{12} + k_2^{-1} \Omega_2 s_{11} c_{12}\right) = 0 \ , \tag{17}$$

где

$$k_m = \sqrt{(1-2\nu_m)/(2-2\nu_m)} \ ;$$
$$s_{1m} = \sin(k_m \Omega_m \lambda_m) \ , \quad s_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m) \ ,$$
$$c_{1m} = \cos(k_m \Omega_m \lambda_m) \ , \quad c_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m) \quad (m = 1, 2) \ .$$

Трансцендентное уравнение (17) определяет две независимые системы критических частот:

$$G\Omega_1 c_{21} s_{22} + \Omega_2 s_{21} c_{22} = 0 \ , \tag{18}$$

$$G k_1^{-1} \Omega_1 c_{11} s_{12} + k_2^{-1} \Omega_2 s_{11} c_{12} = 0 \ . \tag{19}$$

Частоты, задаваемые уравнением (18), не зависят от значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2, в отличие от корней уравнения (19), образующих второе семейство критических частот. При некоторых ν_1, ν_2 частоты из соседних семейств могут совпадать.

Для исследования процесса переноса энергии основное значение имеют распространяющиеся моды, соответствующие мнимым участкам дисперсионных ветвей. Важнейшие характеристики распространяющихся мод – фазовая и групповая скорости. В каждой точке ветви кривой фазовая скорость представляется в виде $c_p = \omega / k = ic\Omega / \gamma$, где $\Omega = \omega h / c$, $k = -i\gamma / h$, $i = \sqrt{-1}$. Групповая скорость c_g распространяющихся мод согласно кинематическому определению задается равенством $c_g = d\omega / dk = ic\, d\Omega / d\gamma$ и представляет собой тангенс угла наклона касательной к мнимому участку ветви в данной точке.

Результаты численных исследований. Пусть верхний слой пластины изготовлен из алюминия и характеризуется параметрами среды $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}, $\tilde{G}_1 = 2{,}61 \cdot 10^{10}$ *Н/м*^{2}, $\nu_1 = 0{,}35$, $c_{S1} = 3110$ *м/с*, а нижний – из вольфрама: $\rho_2 = 18{,}7 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}, $\tilde{G}_2 = 15{,}3 \cdot 10^{10}$ *Н/м*^{2}, $\nu_2 = 0{,}29$, $c_{S2} = 2860$ *м/с*. Расчеты производились для таких вариантов:

1. $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 2/3$;
2. $\lambda_1 = 2/3$, $\lambda_2 = 1/3$;
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$.

При этом входящие в приведенное решение безразмерные частоты Ω_1, Ω_2, и нормирующая размерная скорость c выбирались следующими:

$$\Omega_1 = \Omega\, c_{S2} / c_{S1},\ \Omega_2 = \Omega,\ c = c_{S2}.$$

В табл. 1 приведены первые пятнадцать критических частот ($\delta = 0$ или $\gamma = 0$) дисперсионного уравнения (8) – столбцы 1-3, и дисперсионного уравнения (16) – столбцы 4-6. Столбцы 1, 4 соответствуют варианту 1; столбцы 2, 5 – варианту 2; столбцы 3, 6 – однослойной пластине из вольфрама.

Таблица 1

Номер частоты	Значение критических частот					
	1	2	3	4	5	6
1	2,58619	4,08457	3,14159	2,58619	4,08457	3,14159
2	6,92388	5,77598	6,28318	4,88420	5,77598	5,77656
3	10,0273	10,1787	9,42478	6,92388	7,79971	6,28319
4	12,1340	13,8066	12,5664	10,0273	10,1787	9,42478
5	16,4150	15,7779	15,7080	12,1340	11,6415	11,5531
6	19,9995	20,3493	18,8496	12,8350	13,8066	12,5664
7	21,7551	23,4455	21,9911	16,4150	15,7779	15,7080
8	25,8974	25,8724	25,1327	19,8207	20,3493	17,3297
9	29,8550	30,5001	28,2743	19,9995	20,8762	18,8496
10	31,5001	33,0560	31,4159	21,7551	23,4455	21,9911
11	35,3776	36,0156	34,5575	23,2039	25,8724	23,1062
12	39,5647	40,6101	37,6991	25,8974	26,1437	25,1327
13	41,3899	42,6832	40,8407	29,8550	30,5001	28,2743
14	44,8615	46,1826	43,9823	30,4406	32,2667	28,8828
15	49,1629	50,6403	47,1239	31,5001	33,0560	31,4159

В табл. 2 отражено влияние относительных толщин слоев на первые десять критических частот вихревого и потенциального решений.

Таблица 2

Влияние относительной толщины на критические частоты вихревого и потенциального состояний

Номер частоты	Значение критических частот							
	$\lambda_1 = 0,01$	$\lambda_1 = 0,1$	$\lambda_1 = 0,9$	$\lambda_1 = 0,99$	$\lambda_1 = 0,01$	$\lambda_1 = 0,1$	$\lambda_1 = 0,9$	$\lambda_1 = 0,99$
1	2,99758	2,41905	3,72034	3,44334	2,99758	2,41905	3,72034	3,44334
2	6,00447	5,54013	7,41597	6,88667	5,57876	4,65107	7,41597	6,88667
3	9,02737	8,88892	11,0197	10,3300	6,00447	5,54013	7,69986	7,16441
4	12,0694	12,2991	14,2062	13,7732	9,02737	8,88892	11,0197	10,3300
5	15,1305	15,7296	16,5052	17,2164	11,1662	10,3363	14,2062	13,7732
6	18,2090	19,1647	19,4324	20,6596	12,0694	12,2991	15,3115	14,3288
7	21,3023	22,5925	22,9762	24,1026	15,1305	15,7296	16,5052	17,2164
8	24,4081	25,9945	26,6569	27,5455	16,7695	16,4488	19,4324	20,6596
9	27,5239	29,3169	30,3735	30,9884	18,2090	19,1647	22,5402	21,4931
10	30,6481	32,3293	34,0958	34,4310	21,3023	22,5925	22,9762	24,1026

В табл. 3 приведены первые десять критических частот уравнения (17) для двухслойной пластины в зависимости от изменения коэффициента Пуассона ν_2 нижнего слоя. При этом значения параметров следующие: $G = 1$, $\rho_1 / \rho_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$, $\nu_1 = 0,3$.

Таблица 3

Влияние коэффициента Пуассона на критические частоты потенциального решения

Номер частоты	Значение частот запирания					
	$\nu_2 = 0,05$	$\nu_2 = 0,1$	$\nu_2 = 0,2$	$\nu_2 = 0,3$	$\nu_2 = 0,4$	$\nu_2 = 0,45$
1	3,14159	3,14159	3,14159	3,14159	3,14159	3,14159
2	5,21881	5,29359	5,50360	5,87738	6,28318	6,28318
3	6,28318	6,28318	6,28318	6,28318	6,78265	8,05807
4	9,42478	9,42478	9,42478	9,42478	9,42478	9,42478
5	10,1323	10,3458	10,9081	11,7548	12,5664	12,5664
6	12,5664	12,5664	12,5664	12,5664	13,1195	14,3589
7	15,6075	15,7080	15,7080	15,7080	15,7080	15,7080
8	15,7080	15,8513	16,5062	17,6321	18,8496	18,8496
9	18,8496	18,8496	18,8496	18,8496	20,2667	21,9911
10	20,3478	20,7434	21,8248	21,9911	21,9911	22,8545

Уравнения (8) и (16) определяют счетное множество дисперсионных кривых – зависимостей частоты Ω от параметра δ или γ. На рис. 2 и 3 соответственно для вариантов 1, 2 представлены спектральные кривые зависимостей параметра δ от частоты Ω, соответствующие дисперсионному уравнению вихревого состояния (8).

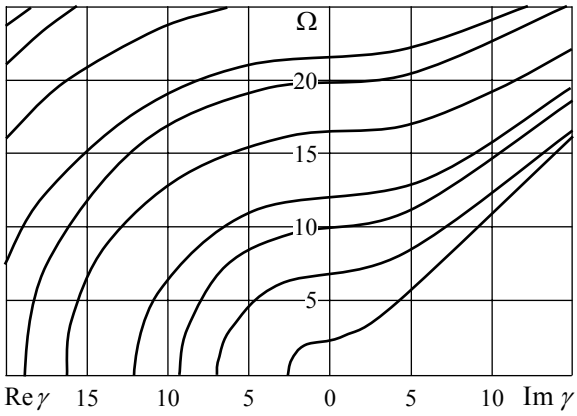

Рис. 2

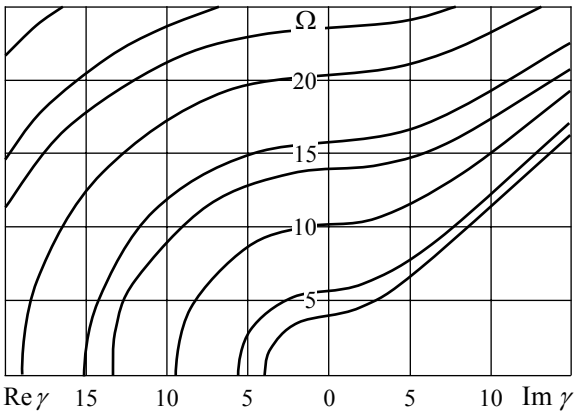

Рис. 3

На рис. 4 и 5 представлены спектральные кривые зависимостей частоты Ω от параметра γ, соответствующие дисперсионному уравнению потенциального состояния (16) для варианта 1 и варианта 2.

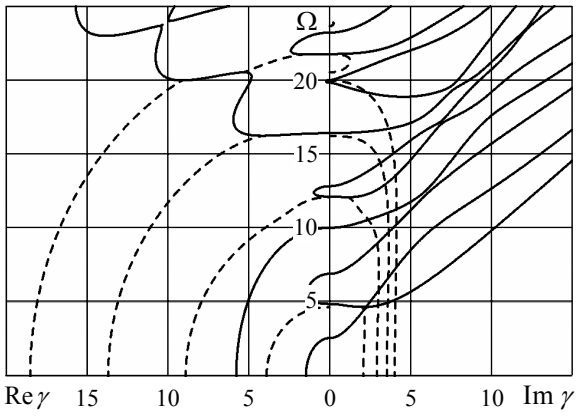

Рис. 4

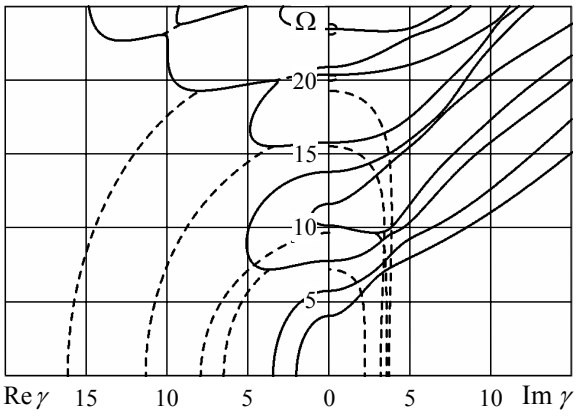

Рис. 5

На диаграммах дисперсионных кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных дисперсионных кривых на действительную ($\mathrm{Re}\gamma, \Omega$) и мнимую ($\mathrm{Im}\gamma, \Omega$) плоскости. Уравнение (16) при фиксированной частоте имеет конечное число действительных и чисто мнимых корней и счетное множество комплексных корней.

Для потенциального состояния на рис. 6 и 7 соответственно для варианта 1 и варианта 2 приведены графики изменения безразмерных фазовых $v_p = c_p / c$ (рис. 6, *а* и рис. 7, *а*) и групповых $v_g = c_g / c$ (рис. 6, *б* и рис. 7, *б*) скоростей первых трех распространяющихся мод.

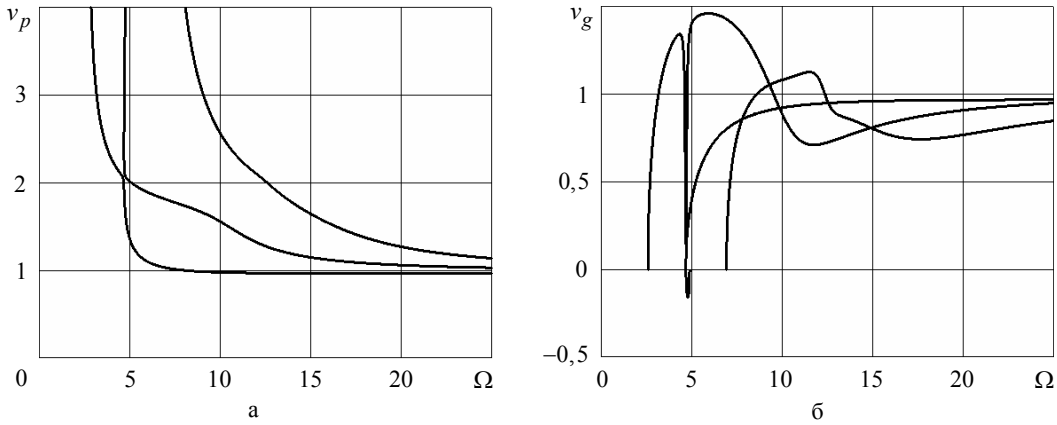

Рис. 6

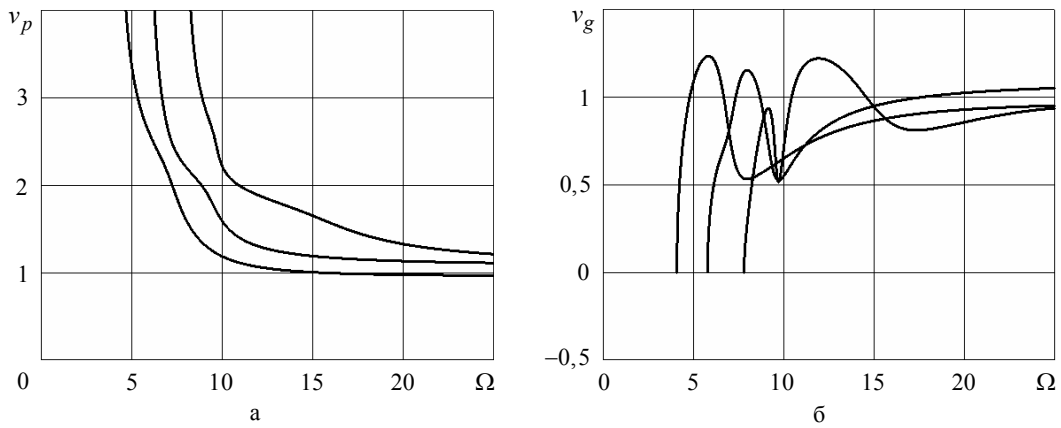

Рис. 7

На рис. 8 представлены графики изменения безразмерных фазовых и групповых скоростей первых двух мод для варианта 3 (сплошные линии), а также первой симметричной (штриховая линия) и антисимметричной (штрих-пунктирная линия) моды в однослойной пластине, изготовленной из материала второго слоя. Первая мода в двухслойной пластине вначале (при длинных волнах) приближается к пер-

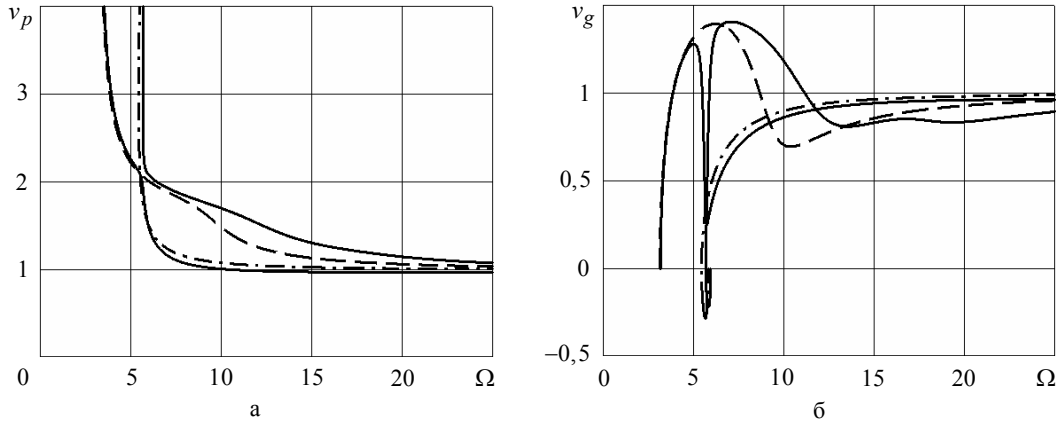

Рис. 8

вой симметричной моде, а затем к антисимметричной моде однослойной пластины. Поведение второй моды носит противоположный характер – приближается вначале к антисимметричной, затем к симметричной моде однослойной пластины.

Видно, что вблизи критических частот фазовая скорость $c_p \to \infty$, а групповая $c_g = 0$. Как для фазовой, так и для групповой скоростей наблюдается сильная зависимость их от величин λ_1, λ_2. В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды двухслойной пластины становятся бездисперсными, и значения групповой скорости моды мало отличается от значений фазовой скорости.

Выводы. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях для двухслойной пластины в случае жестко защемленных плоских граней и идеального контакта слоев. Однородные решения состоят из вихревого и потенциального состояний.

Собственные функции вихревого решения находится в явном виде. Для определения собственных значений вихревого и потенциального состояний получены дисперсионные уравнения в формах, приспособленных для численных исследований. Дисперсионные уравнения имеют, как и в случае упругого слоя, действительные, мнимые и комплексные корни.

Дисперсионное уравнение вихревого решения по форме совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в двумерной задаче о колебаниях пластины [12].

Получено трансцендентное уравнение для определения критических частот, множество которых состоит из двух независимых серий.

На основании численных исследований изучены изменения собственных значений вихревого и потенциального решений, фазовых и групповых скоростей от частоты колебаний. Показано влияние коэффициента Пуассона и относительной толщины на изменение критических частот. Построены диаграммы дисперсионных кривых и графики изменения фазовых и групповых скоростей бегущих мод.

Установлено, что в области низких частот появляются одновременно две действительные моды. Одна из них является аналогом низкочастотной симметричной действительной моды в однослойной изотропной пластине из материала первого слоя, а другая – второго слоя.

РЕЗЮМЕ

У тривимірній постановці розглянута задача про гармонійні коливання пружної двошарової пластини. Плоскі грані пластини жорстко затиснені. Шари знаходяться в умовах ідеального контакту і є ізотропними. Напівоберненим методом отримані у вигляді суми вихрового та потенційного станів однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Досліджені дисперсійні рівняння вихрового та потенційного станів. Проведено аналіз характеристик хвильового процесу.

Ключові слова: двошарова пластина, гармонійні коливання, однорідні розв'язки, дисперсійні рівняння, критичні частоти дисперсійних кривих, фазові та групові швидкості.

SUMMARY

In three-dimensional statement the problem of steady-state vibration of elastic two-layer plate is considered. Planar faces of the plate is rigidly clamped. Layers are in conditions of ideal contact and are isotropic. Homogeneous solutions of system of motion equations in displacements are constructed by semi-inverse method in sum of a vortical and potential states. The dispersion equation of vortical and potential states are investigated. The analysis of the characteristics of the wave process is carry out.

Key words: two-layer plate, harmonic vibration, homogeneous solutions, dispersion equations, cut-off frequencies of dispersion curves, phase and group velocities.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин Г. Б. Теория упругости неоднородных тел: Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы / Г. Б. Колчин, Э. А. Фаверман. – Кишинев: Штиница, 1972. – 248 с.
2. Колчин Г. Б. Теория упругости неоднородных тел: Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1970-1973 г. / Г. Б. Колчин, Э. А. Фаверман. – Кишинев: Штиница, 1977. – 146 с.
3. Колчин Г. Б. Теория упругости неоднородных тел: Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1974-1979 г. / Г. Б. Колчин, Э. А. Фаверман. – Кишинев: Штиница, 1987. – 167 с.
4. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем / В. Г. Пискунов // Мех. композитных материалов. – 2003. – Т. 39, № 1. – С. 3-24.
5. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В. Г. Пискунов, А. О. Рассказов // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
6. Шульга Н. А. Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах / Н. А. Шульга // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39,№ 7. – С. 15-56.
7. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review / H. Altenbach // Mechanics of composite materials. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243-252.
8. Birmon V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Applied machines veviews. – 2007. – Vol. 60, No 5. – P. 195-216.
9. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Applied mechanics reviews. – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287-308.
10. Carrera E. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates / E. Carrera, S. Brischetto // Applied mechanics reviews. – 2009. – Vol. 62, No 1. – P. 1-17.
11. Reddy J. N. Theories and computational models for composite laminates / J. N. Reddy, D. H. Jr. Robbins // Applied mechanics reviews. – 1994. – Vol. 47, No 6, pt.1. – P. 147-169.
12. Джонс Р. П. Распространение волн в двухслойной среде / Р. П. Джонс // Прикл. механика (Trans. ASME). Сер.Е. – 1964. – Т. 31, № 2 . – С. 62-70.
13. Жарков К. В. Групповые скорости сдвиговых нормальных волн в двухслойной среде / К. В. Жарков // Изв. Ленинградского электротехнического ин-та. – 1987. – Вып. 385. – С. 72-75.
14. Комиссарова Г. Л. Особенности распределения энергии в двухслойной среде при распространении нормальных волн / Г. Л. Комиссарова // Прикл. Механика. – 1995. – Т. 38, № 2. – С. 38-45.
15. Алтухов Е. В. Трехмерные задачи установившихся колебаний изотропных пластин / Е. В. Алтухов, Ю. В. Мысовский, Ю. В. Панченко // Теор. и прикл. механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 13-19.
16. Алтухов Е. В. Равновесие двухслойных пластин с жесткими торцами / Е. В. Алтухов, В. Н. Неспирный // Теор. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 43-47.
17. Ворович И. И. Напряженное состояние толстой плиты / И. И. Ворович, О. С. Малкина // Прикл. математика и механика. – 1967. – Т. 37, № 2. – С. 230-241.
18. Космодамианский А. С. Метод однородных решений в смешанных задачах теории упругости и термоупругости для толстых многосвязных пластин / А. С. Космодамианский, Е. В. Алтухов, В. А. Галич // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 11. – С. 62-65.
19. Лурье А. И. К теории толстых плит / А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2-3. – С. 151-168.
20. Устинов Ю. А. О полноте системы однородных решений теории плит / Ю. А. Устинов // Прикл. математика и механика. – 1976. – Т. 40, вып. 3. – С. 902-919.
21. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю. А. Устинов. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.

Поступила в редакцию 25.04.2010 г.