

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Е. В. Алтухов, А. В. Винник

На основании ранее полученных систем двумерных уравнений равновесия ортотропного слоя предложена методика построения однородных решений краевых задач для прямоугольника при различных комбинациях граничных условий на его противоположных сторонах. Полученные результаты использованы для нахождения точного аналитического решения задачи о напряженном состоянии ортотропной прямоугольной пластины.

*Ключевые слова:* ортотропная прямоугольная пластина, смешанные граничные условия, однородные решения, точное аналитическое решение.

**Введение.** Решение многих двумерных задач теории упругости изотропного тела сводится к интегрированию бигармонического уравнения. Бигармоническая краевая задача для прямоугольника и в настоящее время представляет интерес [1-3]. В монографиях [4-6] и обзорных статьях [1, 3] проведен анализ аналитических методов построения точных решений плоских задач о напряженном состоянии изотропной полосы, полуполосы и прямоугольника. Для данного класса граничных задач получили наибольшее распространение аналитические методы однородных решений, суперпозиции и начальных функций. Задача построения точных и обоснованных приближенных аналитических решений для анизотропных пластин значительно усложняется [7-10]. Применение метода начальных функций к решению плоской задачи теории упругости ортотропного тела отражено в работе [11]. В работах [12, 13] рассматривается построение решения задач о плоском напряженном состоянии и изгибе ортотропных прямоугольных пластин по методу однородных решений. Построению строгих аналитических решений трехмерных задач статики анизотропных пластин посвящены работы [14-16]. В работе [16] получены однородные решения системы уравнений равновесия в перемещениях в виде тригонометрических рядов по толщине координате. Предполагалось, что на плоских гранях пластины нормальная составляющая вектора перемещений и касательные напряжения равны нулю. Коэффициенты тригонометрических рядов определяются из систем уравнений в частных производных двумерной теории упругости.

В данной работе получены однородные решения системы, соответствующей слагаемому с номером ноль ряда Фурье [16], при различных комбинациях граничных условий на противоположных сторонах прямоугольника. Полученные результаты использованы для построения точного аналитического решения задачи о напряженном состоянии ортотропного прямоугольника в случае действия постоянной по толщине нагрузки.

**Постановка задачи и построение однородных решений.** Рассматривается прямоугольная ортотропная пластинка с размерами оснований  $2a \times 2b$  и толщиной  $2h$  (рис.1). Пластинка отнесена к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

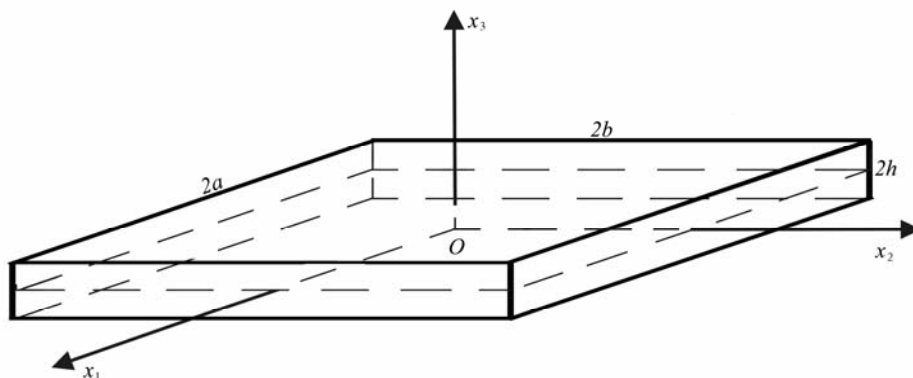


Рис. 1. Постановка задачи

Пусть на торцах пластины ( $x_3 = \pm h$ ) заданы смешанные граничные условия

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = 0, \sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm h) = 0 \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (1)$$

а на боковых гранях ( $x_2 = \pm b$ ) имеет место одно из следующих условий

$$u_1(x_1, \pm b, x_3) = 0, u_2(x_1, \pm b, x_3) = 0; \quad (2)$$

$$u_2(x_1, \pm b, x_3) = 0, \sigma_{12}(x_1, \pm b, x_3) = 0; \quad (3)$$

$$u_1(x_1, \pm b, x_3) = 0, \sigma_{22}(x_1, \pm b, x_3) = 0; \quad (4)$$

$$\sigma_{12}(x_1, \pm b, x_3) = 0, \sigma_{22}(x_1, \pm b, x_3) = 0. \quad (5)$$

Неоднородные граничные условия на оставшихся поверхностях пластины ( $x_1 = \pm a$ ) считаются произвольными и на этапе построения однородных решений во внимание не принимаются.

Уравнения равновесия в перемещениях в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} (L_{11} + A_{55}\partial_3^2)u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}\partial_3u_3 &= 0, \\ L_{21}u_1 + (L_{22} + A_{44}\partial_3^2)u_2 + L_{23}\partial_3u_3 &= 0, \\ L_{31}\partial_3u_1 + L_{32}\partial_3u_2 + (L_{33} + A_{33}\partial_3^2)u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$L_{11} = A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2, L_{12} = L_{21} = (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2, L_{13} = L_{31} = (A_{13} + A_{55})\partial_1,$$

$$L_{22} = A_{66}\partial_1^2 + A_{22}\partial_2^2, L_{23} = L_{32} = (A_{23} + A_{44})\partial_2, L_{33} = A_{55}\partial_1^2 + A_{44}\partial_2^2, \partial_i = \partial/\partial x_i;$$

$A_{ij}$  – модули упругости.

В случае симметричного деформирования относительно срединной плоскости пластины ( $x_3 = 0$ ) компоненты вектора перемещения представляются в виде [16]

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos(\delta_k x_3) \quad (i=1,2); \quad u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin(\delta_k x_3), \quad \delta_k = k\pi/h.$$

При этом граничные условия (1) будут удовлетворены, а из уравнений (6) при  $k=0$  следует

$$L_{11}u_{10} + L_{12}u_{20} = 0; \quad L_{21}u_{10} + L_{22}u_{20} = 0. \quad (7)$$

Для  $k \geq 1$  имеем систему уравнений в частных производных

$$\sum_{n=1}^3 D_{in}^{(k)} u_{nk} = 0 \quad (i = \overline{1,3}).$$

Здесь  $D_{in}^{(k)}$  – дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} D_{11}^{(k)} &= L_{11} - \delta_k^2 A_{55}; \quad D_{12}^{(k)} = L_{12}; \quad D_{13}^{(k)} = \delta_k L_{13}; \quad D_{21}^{(k)} = L_{12}; \quad D_{22}^{(k)} = L_{22} - \delta_k^2 A_{44}; \\ D_{23}^{(k)} &= \delta_k L_{23}; \quad D_{31}^{(k)} = -\delta_k L_{13}; \quad D_{32}^{(k)} = -\delta_k L_{23}; \quad D_{33}^{(k)} = L_{33} - \delta_k^2 A_{33}. \end{aligned}$$

**Решение системы уравнений (7).** Характеристики напряженно-деформированного состояния при  $k=0$  принимают вид

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i0}(x_1, x_2) \quad (i=1,2), \quad u_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) &= A_{11}u_{1,1} + A_{12}u_{2,2}, \quad \sigma_{22}(x_1, x_2, x_3) = A_{12}u_{1,1} + A_{22}u_{2,2}, \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) &= A_{13}u_{1,1} + A_{23}u_{2,2}, \quad \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) \equiv 0, \\ \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) &\equiv 0, \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = A_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Для построения однородных решений уравнений (7), удовлетворяющих одному из граничных условий (2)-(5), представим компоненты вектора перемещений в виде

$$u_{10}(x_1, x_2) = e^{\lambda x_1} f_{10}(x_2), \quad u_{20}(x_1, x_2) = e^{\lambda x_1} f_{20}(x_2), \quad (10)$$

где  $\lambda$  – параметр разделения переменных,  $f_{10}(x_2)$ ,  $f_{20}(x_2)$  – функции, подлежащие определению.

Тогда из уравнений (7) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_{10}''(x_2) + a_1 f_{10}(x_2) + a_2 f_{20}'(x_2) = 0, \quad f_{20}''(x_2) + a_3 f_{20}(x_2) + a_4 f_{10}'(x_2) = 0; \quad (11)$$

с коэффициентами

$$a_1 = \lambda^2 A_{11}/A_{66}, a_2 = \lambda(1 + A_{12}/A_{66}), a_3 = \lambda^2 A_{66}/A_{22}, a_4 = \lambda(A_{66} + A_{12})/A_{22}.$$

Из граничных условий (2)-(5) и соотношений (8), (9) следует

$$f_{10}(\pm b) = 0, f_{20}(\pm b) = 0; \tag{12}$$

$$f_{20}(\pm b) = 0, f'_{10}(\pm b) = 0; \tag{13}$$

$$f_{10}(\pm b) = 0, f'_{20}(\pm b) = 0; \tag{14}$$

$$f'_{10}(\pm b) + \lambda f_{20}(\pm b) = 0, A_{12}\lambda f_{10}(\pm b) + A_{22}f'_{20}(\pm b) = 0. \tag{15}$$

Таким образом, приходим к задаче о собственных значениях для системы уравнений (11) с учетом одного из граничных условий (12)-(15).

Частные решения системы (11) представим в виде

$$f_{10}(x_2) = He^{\mu x_2}, f_{20}(x_2) = Qe^{\mu x_2}, \tag{16}$$

где  $\mu, H, Q$  – неизвестные величины, подлежащие определению. Тогда из системы (11) с учетом (16) следует

$$(\mu^2 + a_1)H + a_2\mu Q = 0, a_4\mu H + (\mu^2 + a_3)Q = 0. \tag{17}$$

Приравнявая определитель системы (17) нулю, получаем характеристическое уравнение

$$\mu^4 + 2b_1\lambda^2\mu^2 + b_2\lambda^4 = 0, b_1 = (A_{11}A_{22} - 2A_{12}A_{66} - A_{12}^2)/(2A_{22}A_{66}), b_2 = A_{11}/A_{22}.$$

Параметры  $b_1, b_2$  зависят от характеристик материала ( $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}$ ), что влечет за собой различные формы записи решений системы (11). Все возможные сочетания значений  $b_1, b_2$  и соответствующие им решения представлены в табл.1.

Таблица 1

Собственные значения и собственные функции системы (11)

№	значения $b_1, b_2$	собственные значения $\mu$	собственные функции $f_{10}(x_2), f_{20}(x_2)$
1	$b_1 > 0$ и $b_1^2 - b_2 \neq 0$	$\mu_{1,2} = \pm i\lambda s_1, \mu_{3,4} = \pm i\lambda s_2$ $s_{1,2} = \sqrt{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b_2}}$ , где $s_m$ ( $m = 1, 2$ ) – действительные, если $b_1^2 > b_2$ , и комплексно-сопряженные, если $b_1^2 < b_2$ .	$f_{10}^+(x_2) = H_1^+ \cos(\lambda^+ s_1 x_2) + H_2^+ \cos(\lambda^+ s_2 x_2),$ $f_{20}^+(x_2) = Q_1^+ \sin(\lambda^+ s_1 x_2) + Q_2^+ \sin(\lambda^+ s_2 x_2),$ $f_{10}^-(x_2) = H_1^- \sin(\lambda^- s_1 x_2) + H_2^- \sin(\lambda^- s_2 x_2),$ $f_{20}^-(x_2) = Q_1^- \cos(\lambda^- s_1 x_2) + Q_2^- \cos(\lambda^- s_2 x_2).$
2	$b_1 > 0$ и $b_1^2 = b_2$	$\mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm i\lambda s_1, s_1 = \sqrt{b_1}$	$f_{10}^+(x_2) = H_1^+ \cos(\lambda^+ s_1 x_2) + H_2^+ x_2 \sin(\lambda^+ s_1 x_2),$ $f_{20}^+(x_2) = Q_1^+ \sin(\lambda^+ s_1 x_2) + Q_2^+ x_2 \cos(\lambda^+ s_1 x_2),$ $f_{10}^-(x_2) = H_1^- \sin(\lambda^- s_1 x_2) + H_2^- x_2 \cos(\lambda^- s_1 x_2),$ $f_{20}^-(x_2) = Q_1^- \cos(\lambda^- s_1 x_2) + Q_2^- x_2 \sin(\lambda^- s_1 x_2).$
3	$b_1 < 0$ и $b_1^2 - b_2 \neq 0$	$\mu_{1,2} = \pm \lambda s_1, \mu_{3,4} = \pm \lambda s_2,$ $s_{1,2} = \sqrt{ b_1  \pm \sqrt{b_1^2 - b_2}}$ , где $s_m$ ( $m = 1, 2$ ) – действительные, если $b_1^2 > b_2$ , и комплексно-сопряженные, если $b_1^2 < b_2$ .	$f_{10}^+(x_2) = H_1^+ \operatorname{ch}(\lambda^+ s_1 x_2) + H_2^+ \operatorname{ch}(\lambda^+ s_2 x_2),$ $f_{20}^+(x_2) = Q_1^+ \operatorname{sh}(\lambda^+ s_1 x_2) + Q_2^+ \operatorname{sh}(\lambda^+ s_2 x_2),$ $f_{10}^-(x_2) = H_1^- \operatorname{sh}(\lambda^- s_1 x_2) + H_2^- \operatorname{sh}(\lambda^- s_2 x_2),$ $f_{20}^-(x_2) = Q_1^- \operatorname{ch}(\lambda^- s_1 x_2) + Q_2^- \operatorname{ch}(\lambda^- s_2 x_2).$
4	$b_1 < 0$ и $b_1^2 = b_2$	$\mu_{1,2} = \mu_{3,4} = \pm \lambda s_1, s_1 = \sqrt{ b_1 }$	$f_{10}^+(x_2) = H_1^+ \operatorname{ch}(\lambda^+ s_1 x_2) + H_2^+ x_2 \operatorname{sh}(\lambda^+ s_1 x_2),$ $f_{20}^+(x_2) = Q_1^+ \operatorname{sh}(\lambda^+ s_1 x_2) + Q_2^+ x_2 \operatorname{ch}(\lambda^+ s_1 x_2),$ $f_{10}^-(x_2) = H_1^- \operatorname{sh}(\lambda^- s_1 x_2) + H_2^- x_2 \operatorname{ch}(\lambda^- s_1 x_2),$ $f_{20}^-(x_2) = Q_1^- \operatorname{ch}(\lambda^- s_1 x_2) + Q_2^- x_2 \operatorname{sh}(\lambda^- s_1 x_2).$

Последний столбец табл. 1 содержит общий вид собственных функций  $f_{10}(x_2)$ ,  $f_{20}(x_2)$  для симметричного и кососимметричного относительно оси  $x_2$  деформирования пластины (знак «+» и «-» соответственно). В случае симметричного деформирования функция  $u_1(x_1, x_2)$  – четная, а  $u_2(x_1, x_2)$  – нечетная по переменной  $x_2$ . В случае кососимметричного деформирования – наоборот. Как видно из табл. 1, результаты для случаев 3, 4 получаются из 1, 2 заменой  $s_1, s_2$  на  $is_1, is_2$ . Поэтому дальнейшие исследования проводятся только для двух первых случаев. Произвольные постоянные  $H_m^\pm, Q_m^\pm$  ( $m=1,2$ ) в собственных функциях выражаются друг через друга (табл. 2). В качестве независимых констант приняты  $H_m^\pm$ .

Таблица 2

Зависимость между коэффициентами  $H_m^\pm, Q_m^\pm$  ( $m=1,2$ )

№	значения $b_1, b_2$	зависимость между коэффициентами
1	$b_1 > 0$ и $b_1^2 - b_2 \neq 0$	$Q_m^+ = P_m^+ H_m^+, Q_m^- = -P_m^- H_m^-, P_m^\pm = \frac{a_4 \lambda^\pm s_m}{a_3 - (\lambda^\pm s_m)^2}$
2	$b_1 > 0$ и $b_1^2 = b_2$	$Q_1^\pm = \pm P_1^\pm H_1^\pm - P_1^\pm P_2^\pm H_2^\pm, Q_2^\pm = \mp P_1^\pm H_2^\pm, P_1^\pm = \frac{a_4 \lambda^\pm s_1}{a_3 - (\lambda^\pm s_1)^2}, P_2^\pm = \frac{1}{\lambda^\pm s_1} \cdot \frac{a_3 + (\lambda^\pm s_1)^2}{a_3 - (\lambda^\pm s_1)^2}$

Рассматривая каждый из случаев граничных условий на боковой поверхности ( $x_2 = \pm b$ ), приходим к трансцендентным уравнениям для определения  $\lambda$  (табл. 3).

Таблица 3

Трансцендентные уравнения для определения  $\lambda$

граничные условия	значения $b_1, b_2$	
	$b_1 > 0$ и $b_1^2 - b_2 \neq 0$	$b_1 > 0$ и $b_1^2 = b_2$
$f_{10}(\pm b) = 0, f_{20}(\pm b) = 0$	$\beta_1 \sin(2\alpha b \lambda^\pm) \pm \alpha_1 \sin(2\beta b \lambda^\pm) = 0$	$\sin(2\lambda^\pm s_1 b) \pm 2\lambda^\pm s_1 b \cdot t_1 = 0$
$f_{20}(\pm b) = 0, f'_{10}(\pm b) = 0$	$\sin(\lambda^+ b s_1) \sin(\lambda^+ b s_2) = 0,$ $\cos(\lambda^- b s_1) \cos(\lambda^- b s_2) = 0$	$\sin^2(\lambda^+ b s_1) = 0,$ $\cos^2(\lambda^- b s_1) = 0$
$f_{10}(\pm b) = 0, f'_{20}(\pm b) = 0$	$\cos(\lambda^+ b s_1) \cos(\lambda^+ b s_2) = 0,$ $\sin(\lambda^- b s_1) \sin(\lambda^- b s_2) = 0$	$\cos^2(\lambda^+ b s_1) = 0,$ $\sin^2(\lambda^- b s_1) = 0$
$f'_{10}(\pm b) + \lambda f_{20}(\pm b) = 0,$ $A_{12} \lambda f_{10}(\pm b) + A_{22} f'_{20}(\pm b) = 0$	$\beta \sin(2\alpha b \lambda^\pm) \pm \alpha \sin(2\beta b \lambda^\pm) = 0$	$\sin(2\lambda^\pm s_1 b) \pm 2\lambda^\pm s_1 b \cdot t_3 = 0$

Здесь

$$\alpha = \frac{s_1 - s_2}{2}, \beta = \frac{s_1 + s_2}{2}, \alpha_1 = \alpha \left[ a_3 + s_1 s_2 (\lambda^\pm)^2 \right], \beta_1 = \beta \left[ a_3 - s_1 s_2 (\lambda^\pm)^2 \right], t_1 = \frac{a_3 - (\lambda^\pm s_1)^2}{a_3 + (\lambda^\pm s_1)^2},$$

$$t_3 = (s_3 + s_4) / (s_3 + s_4 + s_5), s_3 = s_1^4 A_{22}^2 - A_{12} A_{66}, s_4 = s_1^2 A_{22} (A_{12} - A_{66}), s_5 = 2s_1^2 A_{22} (A_{12} + A_{66}).$$

Случай  $b_1^2 = b_2$  получается из случая  $b_1^2 - b_2 \neq 0$  предельным переходом от  $s_2$  к  $s_1$ . Поэтому дальнейшие исследования проводятся только для случая  $b_1^2 - b_2 \neq 0$ .

Собственные значения  $\lambda_p^\pm$  определяются из трансцендентных уравнений (табл. 3). Этим собст-

венным значениям соответствуют собственные функции  $f_{10p}^{\pm}(x_2)$ ,  $f_{20p}^{\pm}(x_2)$ , а также функции  $u_{10}^{(p)\pm}(x_1, x_2)$ ,  $u_{20}^{(p)\pm}(x_1, x_2)$ . Тогда перемещения можно представить в виде

$$u_{i0}^{\pm}(x_1, x_2) = u_{i0}^{(0)\pm}(x_1, x_2) + \sum_{p=-\infty}^{-1} u_{i0}^{(p)\pm}(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} u_{i0}^{(p)\pm}(x_1, x_2), \quad (i = \overline{1, 2}) \quad (18)$$

где  $u_{i0}^{(0)\pm}(x_1, x_2)$  соответствует случаю нулевого собственного значения ( $\lambda_0^{\pm} = 0$ ) и носит название элементарного решения. Элементарные решения для каждого вида граничных условий представлены в табл. 4.

Таблица 4

Общий вид перемещений в случае нулевого собственного значения

граничные условия	$u_{10}^{(0)+}(x_1, x_2) + u_{10}^{(0)-}(x_1, x_2)$	$u_{20}^{(0)+}(x_1, x_2) + u_{20}^{(0)-}(x_1, x_2)$
$u_{10}(x_1, \pm b) = 0, u_{20}(x_1, \pm b) = 0$	0	0
$u_{20}(x_1, \pm b) = 0, \sigma_{12}(x_1, \pm b) = 0$	$C_0 + C_1 x_1$	0
$u_{10}(x_1, \pm b) = 0, \sigma_{22}(x_1, \pm b) = 0$	0	$C_0 + C_1 x_1$
$\sigma_{12}(x_1, \pm b) = 0, \sigma_{22}(x_1, \pm b) = 0$	$(C_0 - C_0^* C_1 x_1) + (C_2 - 2C_0^* C_3 x_1 + 3C_1^* C_4 x_1^2) x_2 + C_4 x_2^3$	$(C_5 + (3b^2 C_2^* C_4 - C_4 - C_2) x_1 + C_0^* C_3 x_1^2 - C_1^* C_4 x_1^3) + C_1 x_2 + (C_3 - 3C_2^* C_4 x_1) x_2^2$

Здесь  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  – линейно независимые постоянные, а

$$C_0^* = A_{22}/A_{12}, \quad C_1^* = A_{22}A_{66}/\Delta, \quad C_2^* = A_{12}A_{66}/\Delta,$$

$$\Delta = A_{12}^2 + A_{12}A_{66} - A_{11}A_{22}.$$

В качестве примера рассмотрим задачу о напряженном состоянии прямоугольной пластинки, которая деформируется внешними усилиями, приложенными по боковой поверхности ( $x_1 = \pm a$ )

$$\sigma_{12}(\pm a, x_2) = 0, \quad \sigma_{11}(\pm a, x_2) = \cos(x_2 \pi / b). \quad (19)$$

При этом на плоских гранях пластины ( $x_3 = \pm h$ ) и на боковых поверхностях ( $x_2 = \pm b$ ) имеют место однородные граничные условия (1) и (3).

Задача в данной постановке соответствует случаю симметричного относительно оси  $x_2$  деформирования. Собственные значения в данном случае таковы:

$$\{\lambda_p^+\} = \{\lambda_{1p}^+, \lambda_{2p}^+\}, \quad \{\lambda_{1p}^+\} = \{\pi p / (bs_1)\}, \quad \{\lambda_{2p}^+\} = \{\pi p / (bs_2)\}, \quad p \in Z. \quad (20)$$

Исходя из четности собственных функций  $f_{10p}^{\pm}(x_2)$ ,  $f_{20p}^{\pm}(x_2)$  и выражений (18) перемещения можно представить в виде:

$$u_{10}^{\pm}(x_1, x_2) = u_{10}^{(0)\pm}(x_1, x_2) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} f_{10p}^{\pm}(x_2) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_p^+ x_1)}{\operatorname{sh}(\lambda_p^- x_1)},$$

$$u_{20}^{\pm}(x_1, x_2) = u_{20}^{(0)\pm}(x_1, x_2) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} f_{20p}^{\pm}(x_2) \frac{\operatorname{sh}(\lambda_p^+ x_1)}{\operatorname{ch}(\lambda_p^- x_1)} \quad (21)$$

Из (9), (10), (20) и (21) следуют представления характеристик напряженно-деформированного состояния:

$$u_{10}^+(x_1, x_2) = C_0 + C_1 x_1 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ H_{1p}^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi p}{s_1 b} x_1\right) + H_{2p}^+ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi p}{s_2 b} x_1\right) \right] \cos\left(\frac{\pi p}{b} x_2\right),$$

$$\begin{aligned}
 u_{20}^+(x_1, x_2) &= 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ H_{1p}^+ P_{1p}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi p}{s_1 b} x_1 \right) + H_{2p}^+ P_{2p}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi p}{s_2 b} x_1 \right) \right] \sin \left( \frac{\pi p}{b} x_2 \right); \\
 \sigma_{11}^+(x_1, x_2) &= A_{11} C_1 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{\pi p}{b} H_{ip}^+ B_{ip}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi p}{b s_i} x_1 \right) \cos \left( \frac{\pi p}{b} x_2 \right) \\
 \sigma_{22}^+(x_1, x_2) &= A_{12} C_1 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{\pi p}{b} H_{ip}^+ D_{ip}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi p}{b s_i} x_1 \right) \cos \left( \frac{\pi p}{b} x_2 \right), \\
 \sigma_{33}^+(x_1, x_2) &= A_{13} C_1 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{\pi p}{b} H_{ip}^+ E_{ip}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi p}{b s_i} x_1 \right) \cos \left( \frac{\pi p}{b} x_2 \right), \\
 \sigma_{12}^+(x_1, x_2) &= -2 A_{66} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{\pi p}{b} H_{ip}^+ K_{ip}^+ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi p}{b s_i} x_1 \right) \sin \left( \frac{\pi p}{b} x_2 \right). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$B_{ip}^+ = \left( A_{11}/s_i + A_{12} P_{ip}^+ \right), \quad D_{ip}^+ = \left( A_{12}/s_i + A_{22} P_{ip}^+ \right), \quad E_{ip}^+ = \left( A_{13}/s_i + A_{23} P_{ip}^+ \right), \quad K_{ip}^+ = \left( 1 - P_{ip}^+/s_i \right).$$

После подстановки выражений для  $\sigma_{11}^+$  и  $\sigma_{12}^+$  из (22) в граничные условия (19) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно  $H_{i1}$ ,  $C_0$ ,  $C_1$

$$\begin{cases}
 H_{11}^+ B_{11}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi a}{b s_1} \right) + H_{21}^+ B_{21}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi a}{b s_2} \right) = \frac{b}{2\pi}, \\
 H_{11}^+ K_{11}^+ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi a}{b s_1} \right) + H_{21}^+ K_{21}^+ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi a}{b s_2} \right) = 0, \\
 C_0 = C_1 = 0,
 \end{cases} \tag{23}$$

решение которой

$$H_{i1}^+ = \frac{b}{2\pi \Delta_1} \left[ \delta_i^1 K_{21}^+ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi a}{b s_2} \right) - \delta_i^2 K_{11}^+ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi a}{b s_1} \right) \right], \quad i = \overline{1, 2}.$$

Здесь  $\Delta_1 = B_{11}^+ K_{21}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi a}{b s_1} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\pi a}{b s_2} \right) - B_{21}^+ K_{11}^+ \operatorname{sh} \left( \frac{\pi a}{b s_2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\pi a}{b s_1} \right)$  – определитель системы (23),  $\delta_n^m$  –

символ Кронекера.

В результате получено точное аналитическое решение задачи.

**Результаты численных исследований.** Расчеты напряженного состояния в пластине проведены с использованием полученных выше аналитических решений задачи (22), (23) для материалов, представленных в табл. 5.

Таблица 5

Ортотропные материалы

$E_{ij}/E, G_{ij}/E, \nu_{ij}$	Материалы			
	M1	M2	M3	M4
$E_1/E$	13,200	14,370	4,552	4,544
$E_2/E$	1,080	7,555	4,574	4,574
$E_3/E$	1,080	8,199	8,755	8,755
$G_{12}/E$	0,565	2,135	1,330	1,397
$G_{23}/E$	0,338	2,060	0,675	0,675
$G_{31}/E$	0,565	1,280	1,395	1,395
$\nu_{12}$	0,240	0,231	0,634	0,634
$\nu_{23}$	0,490	0,195	0,350	0,350
$\nu_{31}$	0,240	-0,035	0,320	0,320
$s_1/s_2$	8,704	4,098	1,518	1,011

В табл. 5 приведенные технические упругие постоянные для некоторых ортотропных материалов:  $M_1$  (однонаправленный эпоксидный углепластик) [17],  $M_2$  (арагонит),  $M_3$  (сернокислый стронций или целестит) [18]. Псевдоортотропный материал  $M_4$  смоделирован на основе  $M_3$  таким образом, чтобы по своим свойствам быть близким к изотропному материалу. Об этом свидетельствует отношение  $s_1/s_2$ , примерно равное единице, приведенное последней строкой в табл.5. В расчетах использованы материалы  $M_1, M_2, M_4$ . В табл. 5 значения модулей упругости и модулей сдвига отнесены к величине  $E = 10^4 \text{ МПа}$ .

На рис. 2-4 изображены зависимости напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  от переменной  $x_1$  на границе пластины ( $x_2 = b$ ). При этом кривые 1-4 соответствуют значениям величины  $b$ , равным 1; 0,5; 0,1; 0,01. Значение  $a = 1$  всюду. Данные рис.2-4 отражают влияние размеров пластины и упругих свойств материала на напряженное состояние.

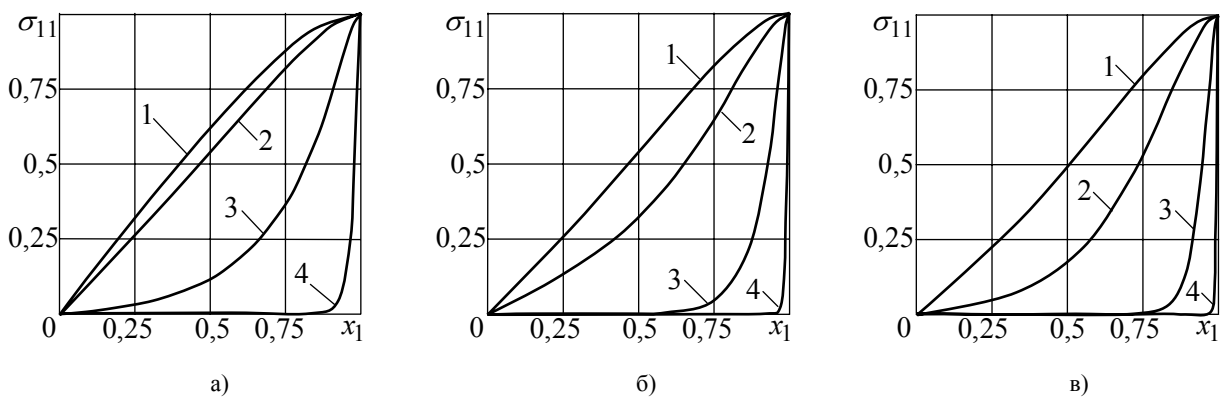


Рис. 2. Зависимость  $\sigma_{11}$  от  $x_1$  на границе пластины ( $x_2 = b$ ) для материалов: а)  $M_1$ ; б)  $M_2$ ; в)  $M_4$

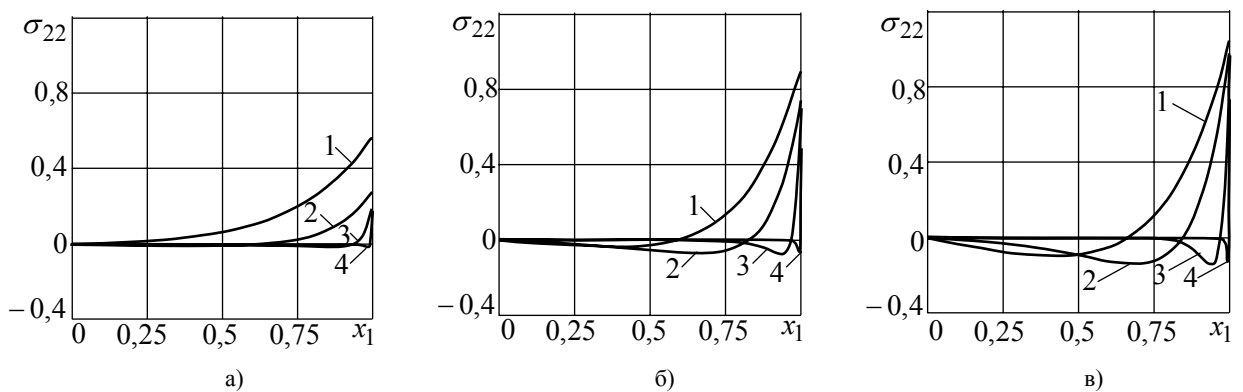


Рис. 3. Зависимость  $\sigma_{22}$  от  $x_1$  на границе пластины ( $x_2 = b$ ) для материалов: а)  $M_1$ ; б)  $M_2$ ; в)  $M_4$

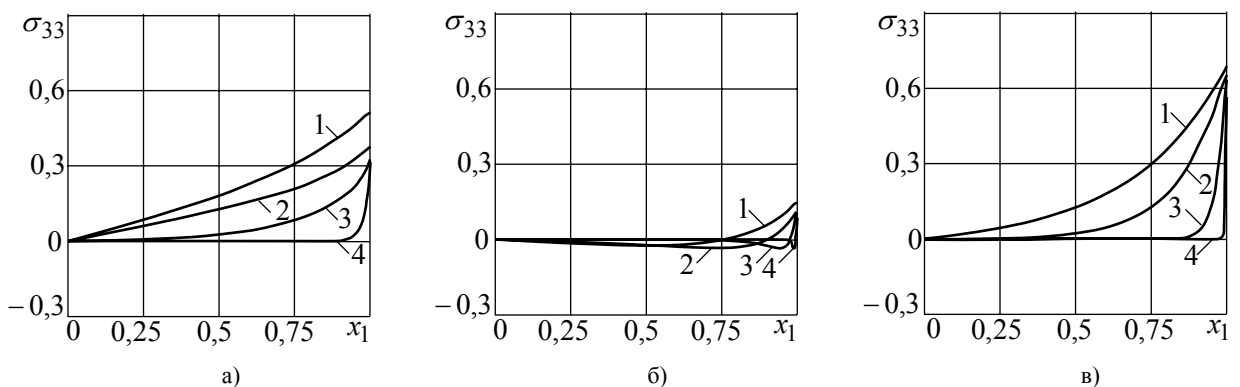


Рис. 4. Зависимость  $\sigma_{33}$  от  $x_1$  на границе пластины ( $x_2 = b$ ) для материалов: а)  $M_1$ ; б)  $M_2$ ; в)  $M_4$

На рис.5 показано изменение напряжения  $\sigma_{12}$  в сечении ( $x_2 = b/2$ ). Кривые 1-4 соответствуют значениям величины  $b$ , равным 1; 0,5; 0,1; 0,01.

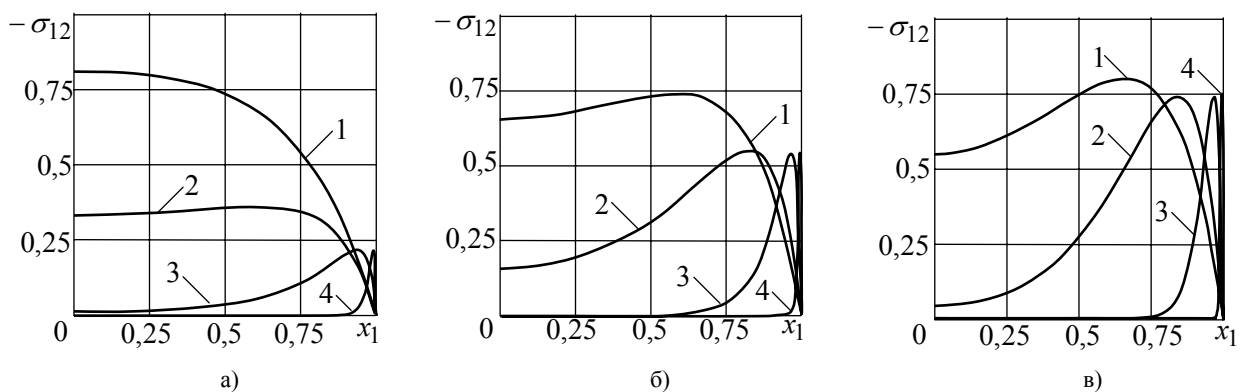


Рис. 5. Зависимость  $\sigma_{12}$  от  $x_1$  в сечении пластины ( $x_2 = b/2$ ) для материалов: а)  $M1$ ; б)  $M2$ ; в)  $M4$

Данные рис.6 иллюстрируют изменение напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  на границе  $x_1 = 1$  (кривая 1), в сечениях  $x_1 = 0,5$  (кривая 2) и  $x_1 = 0,25$  (кривая 3) в квадратной пластине ( $a = b = 1$ ) из материала  $M1$ . Следует отметить, что при отходе от границы в область происходит затухание напряжений.

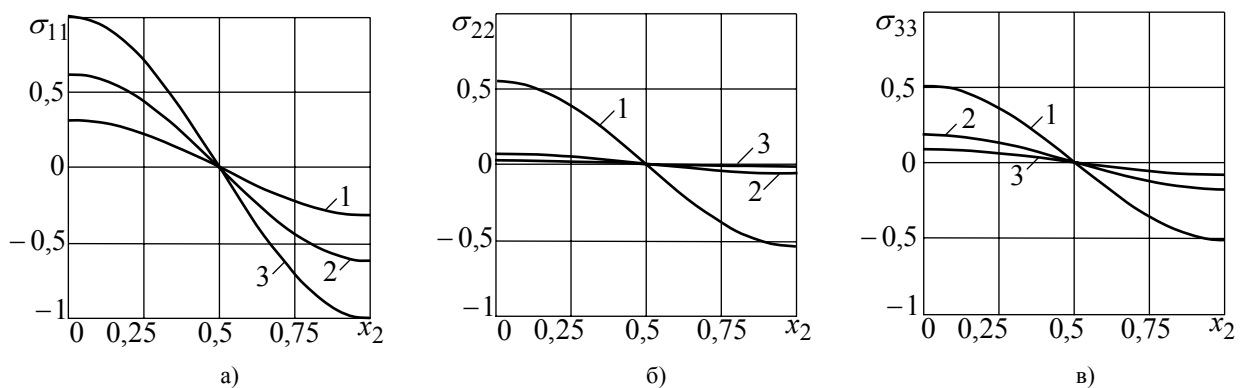


Рис. 6. Зависимости а)  $\sigma_{11}$ ; б)  $\sigma_{22}$ ; в)  $\sigma_{33}$  от переменной  $x_2$  на границе  $x_1 = 1$  и в сечениях пластины  $x_1 = 0,5$  и  $x_1 = 0,25$

**Выводы.** С помощью метода однородных решений получено точное аналитическое решение задачи о напряженном состоянии ортотропной пластины. Исследовано влияние изменения размеров и упругих свойств материала на напряженное состояние пластины. Установлено, что нормальные компоненты тензора напряжений достигают максимального значения в окрестности угловой точки пластины и с уменьшением одного из размеров пластины происходит их локализация у границы. Иной характер поведения имеет касательное напряжение, которое равно нулю на границе пластины и достигает максимального значения в области. Следует отметить, что в окрестности угловой точки нет особенностей в напряженном состоянии.

## РЕЗЮМЕ

На базі отриманої раніше системи двовірних рівнянь рівноваги ортотропного слою запропонована методика побудовання однорідних розв'язків крайових задач для прямокутника при різних комбінаціях граничних умов на його протилежних сторонах. Отримані результати використані для пошуку точного аналітичного розв'язку задачі про напружений стан ортотропної прямокутної пластины.

*Ключові слова:* ортотропна прямокутна пластина, змішані граничні умови, однорідні розв'язки, точний аналітичний розв'язок.

## SUMMARY

By means of the systems obtained earlier of two-dimensional equations of elastic equilibrium the technique are proposed for boundary problems homogeneous solutions construction for rectangle with different boundary conditions on its opposite edges. Obtained results are used for searching of the exact analytical solution for the problem on the stress state of the orthotropic rectangular plate.

*Keywords:* orthotropic rectangular plate, mixed boundary conditions, homogeneous solutions, exact analytical solution.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность / В. В. Мелешко // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С. 45-68.
2. Мелешко В. В. Метод суперпозиций в задач о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах / В. В. Мелешко // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 101-117.
3. Meleshko V. V. Biharmonic problem in a rectangle / V. V. Meleshko // Applied Scientific Research. – 1998. – Vol. 58. – P. 217-249.
4. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
5. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М.: Стройиздат, 1975. – 223 с.
6. Lurie S. A. The Biharmonic Problem in the Theory of Elasticity / S. A. Lurie, V. V. Vasiliev. – Luxembourg: Gordon and Breach, 1995. – 265 p.
7. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 464 с.
8. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
9. Немиш Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задач статики анизотропных тел (обзор) / Ю. Н. Немиш // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 2. – С. 3-38.
10. Космодамианский А. С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах / А. С. Космодамианский // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 21-48.
11. Елпатьевский А. Н. Применение метода начальных функций к плоской задаче теории упругости для тела с прямоугольной ортотропией / А. Н. Елпатьевский, Н. Н. Зимин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 5. – С. 94-101.
12. Лурье С. А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластинки, защемленной по контуру / С. А. Лурье // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 1. – С. 159-168.
13. Лурье С. А. Метод однородных решений в задач о плоском напряженном состоянии и изгибе ортотропных пластин / С. А. Лурье // Изв. АН Арм. ССР. – 1984. – Т. 37, № 6. – С. 27-38.
14. Алтухов Е. В. Однородные решения трехмерных задач равновесия ортотропных пластин с граничными условиями на торцах типа диафрагмы / Е. В. Алтухов, Н. М. Нескородев, Р. Н. Нескородев // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 139-145.
15. Шевченко В. П. Однородные решения задачи о равновесии анизотропных пластин с одной плоскостью упругой симметрии / В. П. Шевченко, Е. В. Алтухов, Р. Н. Нескородев // Доповіді НАН України – 2008. – № 2. – С. 73-79.
16. Altukhov E. V. Solving three-dimensional static problems for orthotropic plates with sliding edge conditions / E. V. Altukhov, R. N. Neskorojev // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, No 8. – P. 927-937.
17. Прикладная механика композитов: сб. статей / Ред.: А. Ю. Ишлинский, Г. Г. Черный – М.: Мир, 1989. – 358 с.
18. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов / Г. Хантингтон // Успехи физических наук. – 1961. – Вып. 3. – С. 461-520.

*Поступила в редакцию 30.04.2010 г.*