МАТЕМАТИКА

УДК 517.444

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ИСКАЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ

Вит. В. Волчков

Исследуется задача о возможности периодического в среднем продолжения решений искаженного уравнения свертки. Получено решение этой задачи для широкого класса уравнений свертки. Доказано, что условия в определении указанного класса являются необходимыми для возможности продолжения.

Ключевые слова: искаженное уравнение свертки, периодическое в среднем продолжение, группа Гейзенберга.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$. Обозначим $\mathscr{D}'(\mathscr{O})$ (соответственно $\mathscr{E}'(\mathscr{O})$) пространство распределений (соответственно распределений с компактным носителем) в области $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathscr{D}(\mathscr{O})$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathscr{O}$ функций. Пусть $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} T$ – носитель T, $\mathscr{O}^T = \{x \in \mathbb{R}^n : x - y \in \mathscr{O} \ \ \forall\, y \in \operatorname{supp}\, T\}$. Предположим, что $\mathscr{O}^T \neq \varnothing$. Тогда для всякого $f \in \mathscr{D}'(\mathscr{O})$ в $\mathscr{O}^T$ определена свертка $f * T$ (см. [1, гл. 4]). Распределения из класса $\mathscr{D}_T'(\mathscr{O}) = \{f \in \mathscr{D}'(\mathscr{O}) : f * T = 0 \ \text{ в } \ \mathscr{O}^T\}$ называются периодическими в среднем в области $\mathscr{O}$ относительно T. Если $\mathfrak{W}(\mathscr{O})$ – некоторое подмножество в $\mathscr{D}'(\mathscr{O})$, то для пересечения $\mathscr{D}_T'(\mathscr{O}) \cap \mathfrak{W}(\mathscr{O})$ будем использовать символ $\mathfrak{W}_T(\mathscr{O})$. Например, $C_T^\infty(\mathscr{O}) = \mathscr{D}_T'(\mathscr{O}) \cap C^\infty(\mathscr{O})$.

Общая проблема периодического в среднем продолжения формулируется следующим образом.

Проблема 1. (i) Пусть $f \in \mathfrak{W}_T(\mathscr{O})$ и область $\mathscr{O}_1$ содержит $\mathscr{O}$. При каких условиях существует $F \in \mathfrak{W}_T(\mathscr{O}_1)$, совпадающее с f на $\mathscr{O}$?

(ii) Если такое продолжение F существует, то будет ли оно единственным?

Даже одномерный случай проблемы 1 является весьма содержательным и имеет глубокие связи с различными разделами анализа. Он изучался в работах Ж. П. Кахана, В. Д. Головина, А. Ф. Леонтьева, А. М. Седлецкого и других (см. [2] и библиографию к этой работе). При этом ответ в проблеме 1 (ii) положителен для любого $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^1)$ в силу теоремы Титчмарша о носителях [1, теорема 4.3.3] (см. также [2, гл. 5, § 1], [3, часть 3, гл. 1, теорема 1.1]). В проблеме 1 (i) ответ существенно зависит от свойств T. В [2, гл. 5] установлен ряд результатов о возможности периодического в среднем продолжения функций классов C и L^p для распределений T вида

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-q}^{q} \varphi(t)\, d\varsigma(t), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1),$$

где ς – функция ограниченной вариации на $[-q, q]$, имеющая скачок в одной из точек $\pm q$. Наличие скачков у ς в точках $\pm q$ накладывает ряд ограничений на нули преобразования Фурье $\hat{T}$ распределения T. Среди них отметим такие (см., например, [2, лемма 5.1.1]): (а) все нули $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ функции $\hat{T}$ лежат в некоторой горизонтальной полосе; (б) последовательность кратностей $\{n_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ нулей $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ является ограниченной; (с) для любого $\delta > 0$ существует постоянная $c_\delta > 0$ такая, что вне кружков радиуса δ с центрами в λ_ν справедливо неравенство

$$\left|\hat{T}(z)\right| \geq c_\delta e^{q|\operatorname{Im} z|}.$$

В связи с этим представляет интерес следующая задача: для заданного класса $\mathfrak{W}_T(\mathscr{O})$ найти точные условия, выраженные только в терминах нулей $\hat{T}$, обеспечивающие продолжение в проблеме 1 (i).

В частности, как влияют степень удаленности λ_ν от вещественной оси и рост n_ν на возможность периодического в среднем продолжения? Ряд результатов по этой проблеме получен в [4].

Постановка задачи. В данной работе рассматривается задача периодического в среднем продолжения на комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$ для искаженного уравнения свертки вида

$$\langle f \times T, \psi\rangle = \left\langle f(z), \left\langle T(w), \psi(z+w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}<z,w>}\right\rangle\right\rangle = 0, \ \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n),$$

где $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{C}^n)$, $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{C}^n)$. Интерес к изучению уравнений такого вида объясняется тем, что они тесно связаны с группой Гейзенберга, которая широко используется в современных исследованиях по гармоническому анализу. Кроме того, до настоящего времени не было ни одного нетривиального результата по рассматриваемой проблеме для этого случая.

Построение решения задачи. Для целой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим $\mathscr{Z}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$. Если $f \neq 0$ и $\lambda \in \mathscr{Z}(f)$, обозначим через $n_\lambda(f)$ кратность нуля λ. Мы часто будем писать n_λ вместо $n_\lambda(f)$. Кроме того, положим

$$\sigma_\lambda(f) = \sum_{j=0}^{n_\lambda - 1} \left|a_{j,\lambda}(f)\right|,$$

где $a_{j,\lambda}(f) = \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{(z-\lambda)^{n_\lambda}}{f(z)}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=\lambda}$.

Пусть $\mathrm{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$, ρ и σ – полярные координаты точки $z \in \mathbb{C}^n$ ($\rho = |z|$, а если $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, то $\sigma = z/\rho$). Обозначим $\mathscr{H}^{n,p,q}$ – пространство сферических гармоник бистепени (p,q) на S^{2n-1}, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathrm{S}^{2n-1})$ (см. [5, гл. 12]), $d(n,p,q)$ – размерность $\mathscr{H}^{n,p,q}$, $\{Y_j^{p,q}\}$, $j \in \{1,\dots,d(n,p,q)\}$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathscr{H}^{n,p,q}$.

Пусть $0 < R \le \infty$, $B_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$, $L^{1,loc}(B_R)$ – класс локально суммируемых в B_R функций. Ряд Фурье функции $f \in L^{1,loc}(B_R)$ по биградуированным сферическим гармоникам имеет вид

$$f(z) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,p,q)} f_{p,q,j}(\rho) Y_j^{p,q}(\sigma), \ z \in B_R, \tag{1}$$

где $f_{p,q,j}(\rho) = \int_{\mathrm{S}^{2n-1}} f(\rho\sigma)\overline{Y_j^{p,q}(\sigma)}d\omega(\sigma)$ и $d\omega$ – элемент площади на S^{2n-1}. По теореме Фубини функции $f_{p,q,j}$ корректно определены для почти всех $\rho \in (0,R)$. Более того, функции $f^{p,q,j}(x) = f_{p,q,j}(\rho)Y_j^{p,q}(\sigma)$ принадлежат $L^{1,loc}(B_R)$. Отображение $f \to f^{p,q,j}$ и разложение (1) можно продолжить на распределения $f \in \mathscr{D}'(B_R)$ следующим образом:

$$\left\langle f^{p,q,j}, \psi\right\rangle = \left\langle f, \overline{\left(\overline{\psi}\right)_{p,q,j}(\rho)\overline{Y_j^{p,q}(\sigma)}}\right\rangle, \ \psi \in \mathscr{D}(B_R) \ \text{ и } \ f \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,p,q)} f^{p,q,j}. \tag{2}$$

Для любого $f \in \mathscr{D}'(B_R)$ (соответственно $f \in C^\infty(B_R)$) ряд в (2) сходится к f в $\mathscr{D}'(B_R)$ (соответственно $C^\infty(B_R)$).

Для всякого множества $\mathfrak{W}(B_R) \subset \mathscr{D}'(B_R)$ положим

$$\mathfrak{W}_{p,q,j}(B_R) = \{f \in \mathfrak{W}(B_R) : f = f^{p,q,j}\}.$$

Отметим, что $\mathfrak{W}_{0,0,1}(B_R)$ совпадает с множеством радиальных распределений из $\mathfrak{W}(B_R)$. В дальнейшем мы пишем $\mathfrak{W}_\natural(B_R)$ вместо $\mathfrak{W}_{0,0,1}(B_R)$.

Пусть $T \in \mathscr{E}'_{\natural}(\mathbb{C}^n)$, $\tilde{T}$ – сферическое преобразование распределения T, т.е.

$$\tilde{T}(\lambda) = \left\langle T, e^{-|z|^2/4} {}_1F_1((n-\lambda^2)/2; n; |z|^2/2) \right\rangle, \ \lambda \in \mathbb{C}$$

(${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера). Определим класс $\mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$ как совокупность всех радиальных распределений $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{C}^n)$ таких, что

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{Z}(\tilde{T})} \frac{|\operatorname{Im}\lambda| + n_\lambda(\tilde{T}) + \ln(1+\sigma_\lambda(\tilde{T}))}{\ln(2+|\lambda|)} < +\infty .$$

Для $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{C}^n)$ обозначим $r(T)$ – радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{C}^n$, содержащего $\operatorname{supp} T$. Далее символы $\mathscr{D}'_T$ и C_T^∞ имеют тот же смысл, что и в пространстве $\mathbb{R}^n$, но с заменой обычной свертки на искаженную.

Основные результаты работы формулируются следующим образом.

Теорема 1. Пусть $T \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$, $R > r(T)$, $p,q \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,...,d(n,p,q)\}$. Тогда для любого $f \in (\mathscr{D}'_T \cap \mathscr{D}'_{p,q,j})(B_R)$ существует единственное $F \in (\mathscr{D}'_T \cap \mathscr{D}'_{p,q,j})(\mathbb{C}^n)$, совпадающее с f в B_R.

Теорема 2. Пусть $p,q \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,...,d(n,p,q)\}$. Предположим, что $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{C}^n)$, $T \neq 0$, $R > r(T)$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{Z}(\tilde{T})} \frac{n_\lambda(\tilde{T}) + |\operatorname{Im}\lambda|}{\ln(2+|\lambda|)} = +\infty .$$

Тогда существует $f \in (C_T^\infty \cap \mathscr{D}'_{p,q,j})(B_R)$ такая, что $f \neq F|_{B_R}$, если $F \in \mathscr{D}'(B_{R+\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Анализ результатов. Из [6, теорема 8] и классической теоремы Пэли-Винера следует, что равенство

$$(\Lambda(T))^\wedge(\lambda) = \left\langle \Lambda(T), e^{-i\lambda t} \right\rangle = \tilde{T}(\lambda) \ , \ \lambda \in \mathbb{C} ,$$

корректно определяет распределение $\Lambda(T) \in \mathrm{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^1)$ и $r(\Lambda(T)) = r(T)$. В работе [6, п. 8] определены трансмутационные операторы $\mathfrak{U}_{p,q,j}$, обладающие следующими свойствами:

(i) если $f \in \mathcal{D}'_{p,q,j}(B_R)$, $r \in (0,R]$, то $f = 0$ в B_r тогда и только тогда, когда $\mathfrak{U}_{p,q,j}(f) = 0$ на $(-r,r)$;

(ii) отображение $\mathfrak{U}_{p,q,j}$ является непрерывным из $\mathcal{D}'_{p,q,j}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_{\natural}(-R,R)$ и из $C^\infty_{p,q,j}(B_R)$ в $C^\infty_{\natural}(-R,R)$;

(iii) если $f \in \mathcal{D}'_{p,q,j}(B_R)$, $T \in \mathscr{E}'_{\natural}(\mathbb{C}^n)$, $r(T) < R$, то

$$\mathfrak{U}_{p,q,j}(f \times T) = \mathfrak{U}_{p,q,j}(f) * \Lambda(T)$$

на интервале $(r(T)-R, R-r(T))$.

Далее, если $U \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} U \subset [-r(U), r(U)]$, $R > r(U)$ и $f \in \mathscr{D}'_U(-R,R)$, то существует единственное $\Phi \in \mathscr{D}'_U(-\infty,+\infty)$ такое, что $\Phi = f$ на $(-R,R)$ (см. [5, теорема 1]). Кроме того, если $V \in \mathscr{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^1)$, $R > r(V)$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{Z}(\hat{V})} \frac{n_\lambda + |\operatorname{Im}\lambda|}{\ln(2+|\lambda|)} = +\infty,$$

то существует четная $f \in C_V^\infty(-R,R)$ такая, что $f \neq \Phi|_{(-R,R)}$, если $\Phi \in \mathscr{D}'(-R, R+\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$ [5, теоремы 3,4]. Отсюда и из перечисленных выше свойств преобразований $\mathfrak{U}_{p,q,j}$ получаем утверждения теорем 1, 2.

Выводы. Получены точные результаты о продолжении решений искаженного уравнения свертки на комплексном евклидовом пространстве. Метод доказательства использует развитую автором технику трансмутационных операторов и может быть применен для изучения задач, связанных с уравнениями свертки на однородных пространствах.

РЕЗЮМЕ

Досліджується задача про можливість періодичного в середньому продовження розв’язків викривленого рівняння згортки. Одержано розв’язання цієї задачі для широкого класу рівнянь згортки. Доведено, що умови в означенні цього класу є необхідними для можливості продовження.

Ключові слова: викривлене рівняння згортки, періодичне в середньому продовження, група Гейзенберга.

SUMMARY

The problem on possibility of mean periodic continuation of solutions of twisted convolution equations is investigated. A solution of this problem for a broad class of convolution equations is obtained. We prove that the conditions in the definition of the indicated class are necessary for possibility of the continuation.

Keywords: twisted convolution equations, mean periodic continuation, the Heisenberg group.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными I / Л. Хермандер. – М.:Мир, 1986. – 462 с.
2. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
4. Волчков В. В. О проблеме периодического в среднем продолжения/ В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 427, № 4. – С. 442-446.
5. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ / У. Рудин. – М.:Мир, 1984. – 455 с.
6. Волчков В. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 8. – С. 29-60.

Поступила в редакцию 24.05.2010 г.