УДК 534.3+611:539

ГЕНЕРАЦІЯ ШУМУ ОБМЕЖЕНОЮ ОБЛАСТЮ ТУРБУЛЕНТНОЇ ТЕЧІЇ В ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ. ЧАСТИНА 2. ДОМІНУВАННЯ ВНЕСКУ КВАДРУПОЛІВ

А. О. Борисюк
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ

Розглядається частинний випадок теорії генерації шуму обмеженою областю турбулентної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. В ньому досліджується ситуація, коли у згенерованому акустичному полі домінує внесок об'ємних квадруполів. При цьому інтерес становлять такі потоки і форми локальних неоднорідностей геометрії каналів, при яких регіон турбулентної за неоднорідністю течії займають рівномірно розподілені великі або малі вихори. Для цих випадків одержано відповідні спрощені вирази для згенерованої акустичної енергії і проведено їхні оцінки для характерних масштабів в області турбулентності.

Ключові слова: шум, турбулентність, канал, квадруполі.

Вступ. Дослідження течій у каналах є актуальною задачею в машинобудуванні, нафто-газовій промисловості, архітектурі, комунальному господарстві, медицині тощо. Значний інтерес тут становлять турбулізація течій і поява акустичних ефектів у місцях локальних нерегулярностей геометрії каналів, таких як налипання на стінках, зварювальні шви, стенози тощо. Пояснюється він тим, що в цьому випадку акустичне поле містить дані про параметри конструкції і середовища в зоні виникнення шумів, а отже існує можливість розроблення неінвазивних методів знаходження таких місць за аналізом зазначеного поля [1-6].

Розроблення таких методів може вестись за наявності теорій, які, адекватно описуючи реологію, динаміку й акустику течій в околі геометричної неоднорідності каналу, встановлювали б кількісний зв'язок між характеристиками потоку і згенерованого акустичного поля.

У попередній роботі [7] було розроблено загальну теорію генерації шуму обмеженою областю турбулентної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. В рамках цієї теорії було встановлено кількісні зв'язки між характеристиками згенерованого акустичного поля та параметрами каналу і течії в ньому. Область турбулентної течії моделювалася розподіленими в ній квадрупольними і дипольними джерелами шуму (характеристики яких вважалися відомими), і було розглянуто випадки рівномірного та нерівномірного розподілу джерел.

У даному дослідженні розглядається частинний випадок цієї теорії. В ньому досліджується ситуація, коли у згенерованому акустичному полі домінує внесок квадруполів. При цьому інтерес становлять такі потоки і форми локальних нерегулярностей геометрії каналів, при яких регіон турбулентної за неоднорідністю течії займають рівномірно розподілені великомасштабні або дрібномасштабні вихорові утворення.

Постановка і загальний розв'язок задачі. Розглядається нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу радіусу a (рис.1), в якому з осередненою осьовою швидкістю U тече рідина густини ρ і кінематичної в'язкості ν. Течія характеризується малим числом Маха M ($M = U / c_0 << 1$, де c_0 – швидкість звуку в незбуреній рідині). У скінченному регіоні V_0 течія турбулентна, і цей регіон створює в каналі поле шуму. Необхідно знайти це поле і встановити кількісний зв'язок між його характеристиками та параметрами каналу і потоку.

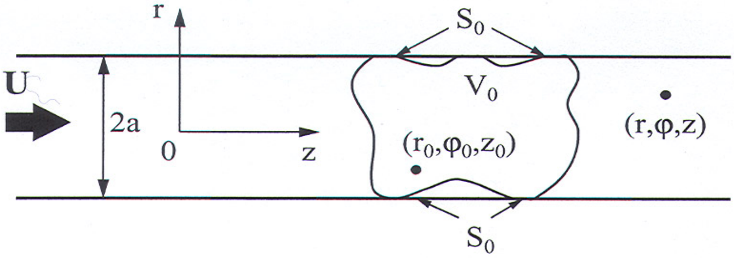

Рис. 1. Геометрія задачі

Шукане поле шуму описується рівнянням Лайтхіла, в якому права частина містить як об'ємні квадрупольні $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, так і зумовлені наявністю стінки каналу поверхневі дипольні $\partial F_i / \partial y_i$ джерела [7-9]:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \quad 0 < r < a, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad |z| < \infty . \tag{1}$$

Граничними умовами є рівність нулеві радіальної швидкості на стінці каналу:

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \tag{2}$$

і умова випромінювання у нескінченність.

У співвідношеннях (1) і (2) введено такі позначення: ρ_a і p_a – акустичні флуктуації густини й тиску (які зв'язані співвідношенням $p_a = c_0^2 \rho_a$ [7-9]); $T_{ij} \approx \rho u_i u_j$ та $F_i = n_j(\tau_{ij} + p\delta_{ij})$ – напруження Лайтхіла та i-та компонента прикладених до стінки каналу сил (T_{ij} та F_i зникають відповідно за межами об'єму V_0 і поверхні S_0, котра його обмежує), $\tau_{ij} = (2/3)\mu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 2\mu\varepsilon_{ij}$ – дотичні напруження; $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial y_j + \partial u_j / \partial y_i)$ - швидкості деформації; n_j - j-та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу; u_i - i-та компонента швидкості рідини; p - тиск; $\mu = \rho\nu$ – динамічна в'язкість рідини; а δ_{ij} – символ Кронекера. Крім цього, тут і надалі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

Гранична задача (1), (2) розв'язується в циліндричних координатах (r, ϕ, z) методом функцій Гріна [7, 9, 10], і загальний вираз для акустичної енергії $P(\omega)$, згенерованої на частоті ω нерівномірно розподіленими в об'ємі V_0 квадрупольними і на поверхні S_0 дипольними джерелами, має такий вигляд [7]:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm}\rho_0\omega} \left[\iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k^{/} \partial y_l^{/}} \times \right.$$

$$\times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(r_0^{/}, \phi_0^{/}) \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_{nm}(z_0^{/}-z_0)} dV_0(\vec{r}_0^{\,/}) + \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{oa}, \vec{r}_{oa}^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_k^{/}} \times$$

$$\times \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0^{/}) \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_{nm}(z_0^{/}-z_0)} dS_0(\vec{r}_{0a}^{\,/}) + 2\,\mathrm{Re}\left(\iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \times \right.$$

$$\left.\left. \times \iint_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}_{0a}^{\,/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k^{/}} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0^{/}) \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_{nm}(z_0^{/}-z_0)} dS_0(\vec{r}_{0a}^{\,/}) \right) \right]. \tag{3}$$

Тут $\vec{r} = (r, \phi, z)$ – радіус-вектор точки поля; $\vec{r}_0 = (r_0, \phi_0, z_0) \in V_0$ і $\vec{r}_0^{\,/} = (r_0^{/}, \phi_0^{/}, z_0^{/}) \in V_0$ – радіус-вектори розташованих в об'ємі V_0 квадрупольних джерел; $\vec{y} = (y_i)_{i=1}^3$ та $\vec{y}^{\,/} = (y_i^{/})_{i=1}^3$ – інші позначання векторів $\vec{r}_0$ та $\vec{r}_0^{\,/}$ відповідно; $\vec{r}_{0a} = \vec{r}_0 \big|_{r_0=a} = (a, \phi_0, z_0) \in S_0$ і $\vec{r}_{0a}^{\,/} = \vec{r}_0^{\,/} \big|_{r_0^{/}=a} = (a, \phi_0^{/}, z_0^{/}) \in S_0$ – радіус-вектори дипольних джерел на поверхні S_0; $dV_0(\vec{r}_0) = r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0$ і $dS_0(\vec{r}_{0a}) = a d\phi_0 dz_0$ – елементи об'єму та площі; $\Psi_{nm} = \left\{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\right\}$, $\Psi_{nm}^{(1)} = J_n(\alpha_{nm} r)\cos(n\phi)$, $\Psi_{nm}^{(2)} = J_n(\alpha_{nm} r)\sin(n\phi)$ – акустичні моди каналу, квадрати норм яких $\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2$ даються співвідношеннями

$$\left\|\Psi_{nm}^{(1)}\right\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a), n = 0, \\ (\pi a^2/2) J_n^2(\alpha_{nm} a)\left[1 - (n^2/\alpha_{nm}^2 a^2)\right], n \geq 1, \end{cases} \qquad \left\|\Psi_{nm}^{(2)}\right\|^2 = \begin{cases} 0, n = 0, \\ \left\|\Psi_{nm}^{(1)}\right\|^2, n \geq 1, \end{cases}$$

J_n – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm} / a$ – радіальні хвильові числа; ζ_{nm} – корені рівняння $J_n^{/}(\zeta_{nm}) = 0$, $m = 1,2,...$; $k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}$ осьові хвильові числа; а $k_0 = \omega / c_0$ – акустичне хвильове число. Крім цього, у співвідношенні (3) функції S_{ijkl}^T та S_{ik}^F є взаємними спектрами образів Фур'є відповідно напружень Лайтхіла T_{ij}:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{/}, \omega)\delta(\omega - \omega^{/}) = < \breve{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega)\breve{T}_{kl}(\vec{r}_0^{/}, \omega^{/}) >,$$

та сил F_k:

$$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}_{0a}^{/}, \omega)\delta(\omega - \omega^{/}) = < \breve{F}_i^*(\vec{r}_{0a}, \omega)\breve{F}_k(\vec{r}_{0a}^{/}, \omega^{/}) >,$$

S_{ijk}^{TF} – взаємним спектром образів Фур'є напружень T_{ij} і сил F_k:

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}_{0a}^{/}, \omega)\delta(\omega - \omega^{/}) = < \breve{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega)\breve{F}_k(\vec{r}_{0a}^{/}, \omega^{/}) >,$$

$\mathrm{Re}(...)$ означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини, а функція знаку $\mathrm{sign}(z - z_0)$ є позитивною, якщо оцінки енергії проводяться вниз за течією від розташованих у поперечному перерізі каналу $z = z_0$ джерел, і негативною, якщо вгору за течією від них. Положення ж частоти ω відносно критичних частот каналу:

$$\omega_{nm} = c_0 \alpha_{nm} \tag{4}$$

визначає (через хвильові числа k_{nm} в експоненті $\exp(-\mathrm{sign}(z - z_0)\mathrm{i}k_{nm}(z_0^{/} - z_0))$ випадки однорідних ($\omega \geq \omega_{nm}$) і неоднорідних ($0 < \omega < \omega_{nm}$) хвиль у формулі (3).

Якщо квадруполі і диполі розподілені *рівномірно* у займаних ними областях, формула (3) спрощується за рахунок спрощення виразів для спектрів S_{ijkl}^T, S_{ik}^F і S_{ijk}^{TF}, які стають функціями лише відстані між джерелами (відповідно $\vec{\xi} = \vec{r}_0^{/} - \vec{r}_0$, $\vec{\xi}_{aa} = \vec{r}_{oa}^{/} - \vec{r}_{oa}$ та $\vec{\xi}_a = \vec{r}_{0a}^{/} - \vec{r}_0$) і частоти [7,8]:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{/}, \omega) = S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega), \quad S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}_{0a}^{/}, \omega) = S_{ik}^F(\vec{\xi}_{aa}, \omega), \quad S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}_{0a}^{/}, \omega) = S_{ijk}^{TF}(\vec{\xi}_a, \omega). \tag{5}$$

Аналіз співвідношення (3) показує, що акустична енергія P дорівнює сумі енергій P_{nm} акустичних мод каналу Ψ_{nm}. Енергія ж окремої моди P_{nm} складається з трьох доданків. Перший являє собою акустичну енергію, згенеровану квадруполями $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, другий – енергію, випромінену диполями $\partial F_i / \partial y_i$, а третій доданок зумовлений взаємодією квадруполів і диполів.

Подальший аналіз формули (3) показує, що відносний внесок кожного доданку різний у різних областях значень числа Маха M. Справді, якщо M таке, що у полі шуму домінує внесок квадруполів, то у виразі для P_{nm} залишається лише перший доданок, і співвідношення (3) набуває такого вигляду:

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm}\rho_0\omega} \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}_0^{/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k^{/} \partial y_l^{/}} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \times$$

$$\times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0^{/}, \phi_0^{/}) \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z - z_0)\mathrm{i}k_{nm}(z_0^{/} - z_0)} dV_0(\vec{r}_0^{/}). \tag{6}$$

Коли число Маха попадає в діапазон, де домінують диполі, то визначальним у виразі для P_{nm} є другий доданок, і замість співвідношення (6) маємо

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm}\rho_0\omega} \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{oa}, \vec{r}_{oa}^{/}, \omega)}{\partial y_i \partial y_k^{/}} \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0) \times$$

$$\times \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0^{/}) \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z - z_0)\mathrm{i}k_{nm}(z_0^{/} - z_0)} dS_0(\vec{r}_{0a}^{/}). \tag{7}$$

Домінування внеску квадруполів. Розглянемо випадок домінування в акустичному полі внеску квадруполів. При цьому вважатимемо, що вони розташовані рівномірно в регіоні турбулентної течії V_0. На практиці така ситуація може виникнути за умов: значного перевищення числом Рейнольдса Re критичного значення Re_{cr} в регіоні турбулентної за локальним звуженням каналу течії ($\mathrm{Re} >> \mathrm{Re}_{cr}$, $M << 1$); осесиметричності незбуреної течії та параболічності профілю її швидкості перед звуженням каналу; наявності плавної осесиметричної форми звуження.

Перша умова забезпечує досягнення числом Маха значень, при яких домінуючим в акустичному полі у каналі є внесок квадруполів (як правило, вона виконується у легких рідинах, рухи яких зазвичай характеризуються значно більшими числами Маха порівняно з рухами важких рідин). Друга ж і третя умови сприяють рівномірному розподілу квадрупольних джерел в регіоні турбулентної за звуженням течії.

В окресленій ситуації вираз (3) зводиться до співвідношення (6), яке, у свою чергу, спрощується за рахунок спрощення виразів для спектрів S_{ijkl}^{T} (див. формули (5)):

$$P(\omega)=\sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^{2}k_{nm}\rho_{0}\omega}\iiint_{V_0}\Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)dV_0(\vec{r}_0)\int_{z_{0i}-z_0}^{z_{0e}-z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_{nm}\xi_z}d\xi_z\times$$

$$\times\int_{-r_0}^{a-r_0}(r_0+\xi_r)d\xi_r\int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0}\frac{\partial^4 S_{ijkl}^{T}(\vec{\xi},\omega)}{\partial\xi_i\partial\xi_j\partial\xi_k\partial\xi_l}\Psi_{nm}^{(q)}(r_0+\xi_r,\phi_0+\xi_\phi)d\xi_\phi \qquad (8)$$

(тут z_{0i} та z_{0e} – початкова та кінцева осові координати регіону V_0; $\xi_z=z_0^{/}-z_0$, $\xi_r=r_0^{/}-r_0$ і $\xi_\phi=\phi_0^{/}-\phi_0$ – осьова, радіальна й кутова відстані між квадрупольними джерелами відповідно).

Бачимо, що інтегрування по ξ_r, ξ_ϕ та ξ_z у формулі (8) залежить від координат джерела r_0, ϕ_0 та z_0, а відтак загалом тут не можна суттєво спростити вираз для енергії P. Проте існують випадки, коли інтеграли по $\vec{r}_0$ та $\vec{\xi}$ у співвідношенні (8) стають незалежними, що приводить до бажаного спрощення. Це відбувається при домінуванні в регіоні V_0 великих або малих вихорів, і зумовлюється відповідно великим або малим значенням відношення діаметрів локального звуження і каналу. Розглянемо окремо кожен з цих випадків.

Великі вихори. Нехай в регіоні турбулентної течії V_0 домінують великі вихори. При цьому вважатимемо їх настільки великими, що рух буде повністю корельованим у поперечному перерізі каналу. Це означає, що взаємні спектри напружень Лайтхіла S_{ijkl}^{T} не змінюватимуться у поперечному перерізі каналу і будуть функціями лише осьової відстані між джерелами ξ_z та частоти ω .За цієї умови серед всіх похідних функцій S_{ijkl}^{T} у (8) залишиться лише похідна функції S_{zzzz}^{T} по ξ_z, і (8) набуде такого вигляду:

$$P(\omega)=\sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^{2}k_{nm}\rho_{0}\omega}\iiint_{V_0}\Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)dV_0(\vec{r}_0)\int_{z_{0i}-z_0}^{z_{0e}-z_0}\frac{\partial^4 S_{zzzz}^{T}(\xi_z,\omega)}{\partial\xi_z^4}\times$$

$$\times\mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_{nm}\xi_z}d\xi_z\int_{-r_0}^{a-r_0}\int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0}\Psi_{nm}^{(q)}(r_0+\xi_r,\phi_0+\xi_\phi)(r_0+\xi_r)d\xi_r d\xi_\phi\,. \qquad (9)$$

Оскільки в одержаному виразі подвійний інтеграл по ξ_r та ξ_ϕ відмінний від нуля лише у випадку $(q,n,m)=(1{,}0{,}1)$ (тобто для першої акустичної моди каналу $\Psi_{01}^{(1)}=1$):

$$\int_{-r_0}^{a-r_0}\int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0}\Psi_{nm}^{(q)}(r_0+\xi_r,\phi_0+\xi_\phi)(r_0+\xi_r)d\xi_r d\xi_\phi=\begin{cases}\pi a^2,(q,n,m)=(1{,}0{,}1),\\ 0,(q,n,m)\neq(1{,}0{,}1),\end{cases}$$

то (9) значно спрощується, і згенерована квадруполями акустична енергія на частоті ω стає пропорційною об’ємові регіону турбулентної течії $|V_0|$ та одновимірному інтегралу від похідної взаємного спектра нормальних осьових напружень Лайтхіла T_{zz}:

$$P(\omega)=P_{01}^{(1)}(\omega)=\frac{|V_0|}{4k_0\rho_0\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^4 S_{zzzz}^{T}(\xi_z,\omega)}{\partial\xi_z^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_0\xi_z}d\xi_z \qquad (10)$$

(при одержанні формули (10) було враховано, що квадруполі зникають за межами регіону V_0; це дозволило перейти до нескінченних меж інтегрування по ξ_z).

Аналіз співвідношення (10) показує, що у випадку домінування в регіоні турбулентної течії великих вихорів шум генерують лише поздовжні квадруполі $\partial^2 T_{zz} / \partial z_0^2$, осі яких паралельні до осі каналу. При цьому згенерований ними шум поширюється в осьовому напрямку у вигляді плоскої хвилі зі швидкістю c_0.

Повна акустична енергія Π, випромінена цими джерелами, визначається інтегралом $\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega$, і після підстановки сюди співвідношення (10) набуває такого вигляду:

$$\Pi = \frac{|V_0|}{4\rho_0 c_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 K_{zzzz}^T(\xi_z, \tau)}{\partial \tau^2} d\xi_z \,, \tag{11}$$

де $K_{zzzz}^T(\xi_z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zzzz}^T(\xi_z, \omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} d\omega$ – кореляція напружень Лайтхіла T_{zz}, а $\tau = \xi_z / c_0$ – час проходження акустичною хвилею осьової відстані ξ_z між квадрупольними джерелами.

Введення в області турбулентної течії V_0 масштабів довжини

$$L_t = \alpha a \tag{12}$$

і частоти

$$f_t = \beta U / a \tag{13}$$

де α і β – відповідно коефіцієнти цих масштабів, а також відношення характерної швидкості турбулентної течії u_t до швидкості незбуреної течії U

$$\gamma_t = u_t / U \tag{14}$$

дозволяє одержати оцінку повної акустичної енергії (11)

$$\Pi \propto \frac{|V_0|}{4a} \rho_0 U^3 M^3 \alpha \beta^2 \gamma_t^4 \,, \quad \alpha \propto 1 \,, \quad \beta \propto 1 \,. \tag{15}$$

Бачимо, що у випадку великих вихорів інтенсивність акустичного випромінювання квадруполів у каналі пропорційна третьому степеневі числа Маха, а не п'ятому, як очікувалось би з теорії генерації шуму вільною турбулентністю [8, 9, 11]. Така зміна характеру випромінювання квадрупольних джерел пояснюється впливом стінок каналу.

Малі вихори. У цьому випадку вважаємо, що в регіоні турбулентної течії V_0 домінують вихори, малі порівняно з радіусом каналу a. Це означає, що довжини кореляцій λ_r в радіальному, λ_ϕ азимутальному і λ_z осьовому напрямках, а також масштаб довжини L_t в області V_0 значно менші від a:

$$\lambda_r \propto \lambda_\phi \propto \lambda_z \propto L_t = \alpha a << a \,, \quad \alpha << 1 \,. \tag{16}$$

Для таких малих довжин кореляцій можна перейти до нескінченних меж інтегрування по $\vec{\xi}$ у співвідношенні (8), знехтувавши при цьому граничними ефектами течії біля стінки каналу:

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \iiint_{V_0} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) dV_0(\vec{r}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \times$$
$$\times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0 + \xi_r, \phi_0 + \xi_\phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z - z_0) \mathrm{i} k_{nm} \xi_z} (r_0 + \xi_r) d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z \,. \tag{17}$$

Можливість такого нехтування зумовлена тим, що напруження Лайтхіла T_{ij} зникають на нерухомій жорсткій стінці каналу (внаслідок відсутності там будь-якого руху рідини), і всі вихори мають там нульову енергію. Крім цього, зайнятий вихорами об'єм $|V_1|$ біля стінки є малою величиною порівняно з об'ємом $|V_0|$ регіону турбулентної течії: $\dfrac{|V_1|}{|V_0|} = \dfrac{L_t 2\pi a (z_{0e} - z_{0i})}{\pi a^2 (z_{0e} - z_{0i})} = 2\alpha << 1$.

У співвідношенні (17) розглянемо випадки низьких та високих частот.

Низькі частоти. Під низькими розумітимемо частоти, нижчі за всі критичні частоти каналу (4), окрім першої ω_{01}. Оскільки для вибраного каналу ω_{01} дорівнює нулеві, то це – частоти, які задовольняють умову: $0 < \omega < \omega_{nm}$, $(n,m) \neq (0,1)$. За цієї умови всі акустичні моди, окрім першої $\Psi_{01}^{(1)} = 1$, будуть неоднорідними, і їхнім внеском в акустичне поле можна знехтувати. Це приводить до значного спрощення виразу (17):

$$P(\omega) = P_{01}^{(1)}(\omega) = \frac{|V_0|}{4\pi a^2 k_0 \rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi},\omega)}{\partial\xi_i \partial\xi_j \partial\xi_k \partial\xi_l} \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_0\xi_z} \xi_r d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z \,. \qquad (18)$$

Бачимо, що, як і при домінуванні в регіоні V_0 великих вихорів, у випадку малих вихорів і низьких частот шум генерується у вигляді плоскої хвилі, яка поширюється в осьовому напрямку зі швидкістю c_0. Проте, на відміну від формули (10), у співвідношенні (18) внесок в акустичне поле роблять всі, а не лише поздовжні осьові квадруполі.

Застосування теореми про середнє [12] до інтегралів по ξ_r та ξ_ϕ у (18) дає такий вираз для P:

$$P(\omega) = P_{01}^{(1)}(\omega) \approx \frac{|V_0|\alpha^2}{\pi k_0 \rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi},\omega)}{\partial\xi_i \partial\xi_j \partial\xi_k \partial\xi_l} \right|_{\xi_r=\xi_{r*},\xi_\phi=\xi_{\phi*}} \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_0\xi_z} d\xi_z \,, \quad \alpha << 1 \,, \qquad (19)$$

де ξ_{r*} і $\xi_{\phi*}$ – точки з відрізків $[0,\lambda_r]$ і $[0,\lambda_\phi]$ відповідно.

Співставлення виразів (10) і (19) показує, що згенерована малими вихорами в діапазоні низьких частот акустична енергія є малою величиною порядку α^2 ($\alpha << 1$) від акустичної енергії, згенерованої в тому ж діапазоні великомасштабними вихоровими утвореннями. Тоді доходимо висновку, що повна акустична енергія Π наближено даватиметься співвідношенням (11), помноженим на α^2, а її оцінка відрізнятиметься від оцінки (15) практично лише додатковим множником α^2:

$$\Pi \propto \frac{|V_0|}{\pi a} \rho_0 U^3 M^3 \alpha^3 \beta^2 \gamma_t^4 \,, \quad \alpha << 1 \,. \qquad (20)$$

Аналіз виразу (20) засвідчує, що, як і у випадку великих вихорів (див. оцінку (15)), згенерована малими вихорами на низьких частотах повна акустична енергія Π формально пропорційна третьому степеневі числа Маха ($M << 1$). Проте наявність у співвідношенні (20) додаткового порівняно з формулою (15) квадрату малого параметра α^2 фактично вказує на пропорційність енергії Π п'ятому степеневі числа M: $M^3\alpha^2 \propto M^5$ ($M << 1$, $\alpha << 1$), тобто на квадрупольний (а не дипольний) характер випромінювання малих вихорів у каналі. З іншого боку, практично однаковий характер випромінювання малих вихорів у вільному просторі і каналі вказує на відсутність істотного впливу стінки каналу на процес генерації шуму малими вихорами в ньому. Останній ефект підтверджується також і наведеними після формули (17) міркуваннями.

Високі частоти. Під високими розумітимемо такі частоти, для яких всі акустичні моди каналу Ψ_{nm} будуть однорідними: $\omega > \omega_{nm}$, $n \geq 0, m \geq 1$. Це означає, що всі вони братимуть участь у формуванні дальнього акустичного поля в каналі, і їх треба враховувати при подальшому аналізі виразу (17).

У такій ситуації доцільно виконати певні операції зі співвідношенням (17), які дозволять переписати його у прийнятнішому для подальшої роботи вигляді. Їх суть полягає у розписуванні косинусів $\cos n(\phi_0 + \xi_\phi)$, синусів $\sin n(\phi_0 + \xi_\phi)$ та функцій Бесселя $J_n(\alpha_{nm}(r_0 + \xi_r))$ з подальшим врахуванням ортогональності одержаних при цьому тригонометричних і циліндричних функцій, а також парності/непарності їхніх добутків на симетричному відносно початку координат відрізку.

Наслідком розписуванням косинуса та сінуса суми аргументів є спрощена форма запису співвідношення (17):

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z_{0e} - z_{0i})c_q}{4\left\|\Psi_{nm}^{(q)}\right\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \int_0^a J_n(\alpha_{nm} r_0) r_0 dr_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi},\omega)}{\partial\xi_i \partial\xi_j \partial\xi_k \partial\xi_l} \times$$

$$\times J_n(\alpha_{nm}(r_0 + \xi_r)) \cos(n\xi_\phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_{nm}\xi_z} (r_0 + \xi_r) d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z \,, \qquad (21)$$

де коефіцієнти c_q мають такий вигляд:

$$c_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2(n\phi_0)d\phi_0 = \begin{cases} 2\pi, n=0, \\ \pi, n \ge 1, \end{cases} \quad c_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(n\phi_0)d\phi_0 = \begin{cases} 0, n=0, \\ \pi, n \ge 1. \end{cases}$$

Застосування теореми додавання [13]

$$J_n(u+v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(u) J_k(v)$$

до функцій Бесселя $J_n(\alpha_{nm}(r_0 + \xi_r))$ у формулі (21) приводить до такого виразу для P:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V_0|}{2\pi a^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial\xi_i \partial\xi_j \partial\xi_k \partial\xi_l} J_0(\alpha_{nm}\xi_r) \cos(n\xi_\phi) \times$$
$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{sign}(z-z_0)\mathrm{i}k_{nm}\xi_z} \xi_r d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z . \tag{22}$$

Аналіз співвідношення (22) показує, що в разі домінування в регіоні турбулентної течії V_0 малих вихорів внесок у високочастотну область спектра P роблять всі квадруполі. При цьому участь у формуванні акустичного поля беруть всі акустичні моди каналу, а не лише його перша мода, як було у випадку великих вихорів (див. підрозділ 3.1) та малих вихорів і низьких частот (див. підрозділ 3.2.1).

Інтегрування співвідношення (22) по частоті і введення в одержаний вираз масштабів турбулентної течії (12)-(14) дає оцінку для акустичної енергії Π :

$$\Pi \propto \frac{|V_0|}{\pi a} \rho_0 U^3 M^5 \alpha^3 \beta^4 \gamma_t^4 , \quad \alpha << 1 . \tag{23}$$

Бачимо, що в разі малих вихорів і високих частот інтенсивність акустичного випромінювання квадруполів у каналі визначається п'ятим степенем числа Маха. Оскільки такий же степінь числа Маха характеризує і акустичне випромінювання квадруполів у вільному просторі [8,11], то ця обставина свідчить про незначний вплив стінки каналу на процес генерації шуму малими вихорами в ньому (аналогічний висновок було зроблено і в кінці підрозділу 3.2.1).

Співставлення оцінок (23) і (20), а також врахування наведеної після формули (20) пропорційності $M^3\alpha^2 \propto M^5$ ($M << 1$, $\alpha << 1$) показує, що при домінуванні в регіоні турбулентної течії V_0 малих вихорів згенерована квадруполями у діапазоні високих частот акустична енергія є малою величиною порядку $\alpha^2\beta^2$ від енергії, згенерованої цими ж квадруполями на низьких частотах.

Висновок. У даній статті розглянуто частинний випадок розробленої в роботі [7] теорії генерації шуму обмеженою областю турбулентної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. В ньому досліджено ситуацію, коли у згенерованому акустичному полі домінує внесок квадруполів. При цьому інтерес становили такі потоки і форми локальних неоднорідностей геометрії каналів, при яких регіон турбулентної за неоднорідністю течії займають рівномірно розподілені великі або малі вихори. Для цих випадків одержано відповідні спрощені вирази для згенерованої акустичної енергії і проведено їхні оцінки для характерних масштабів в області турбулентності.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается частный случай теории генерации шума ограниченной областью турбулентного течения в бесконечном прямом жесткостенном канале кругового поперечного сечения. В нем исследуется ситуация, когда в сгенерированном акустическом поле доминирует вклад объемных квадруполей. При этом интерес представляют такие потоки и формы локальных неоднородностей геометрии каналов, при которых регион турбулентного за неоднородностью течения занимают равномерно распределенные большие либо малые вихри. Для этих случаев получены соответствующие упрощенные выражения для генерируемой акустической энергии и проведены их оценки для характерных масштабов в области турбулентности.

Ключевые слова: шум, турбулентность, канал, квадруполи.

SUMMARY

A particular case of the theory of noise generation by a limited region of turbulent flow in an infinite straight rigid channel of a circular cross-section is considered. In this case, the situations are studied in which the generated acoustic field is dominated by the contribution made by volume quadrupoles. Those flows and shapes of the channel local geometrical inhomogeneities are of concern which result in occupation of a turbulent flow region behind the inhomogeneity by uniformly-distributed large or small eddies. For these cases the corresponding simplified expressions for the generated acoustic power are obtained, and their estimates are carried out for the characteristic scales in the turbulent flow region.

Keywords: noise, turbulence, channel, quadrupoles.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Lees R. S. Phonoangiography: a new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease / R. S. Lees, C. F. Dewey // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1970. – 67. – P. 935-942.
2. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis / D. F. Young // J. Biomech. Eng. – 1979. – 101. – P. 157-175.
3. Миролюбов С. Г. Гидродинамика стеноза / С. Г. Миролюбов // Современ. пробл. биомех. – 1983. – №. 1. – С. 73-136.
4. Berger S. A. Flows in stenotic vessels / S. A. Berger, L.-D. Jou // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2000. – 32. – P. 347-382.
5. Borisyuk A. O. Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel / A. O. Borisyuk // Flow, Turbulence and Combustion. – 1999. – Vol. 61. – P. 269-284.
6. Borisyuk A.O. Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis / A. O. Borisyuk // J. Sound Vibr. – 2002. – Vol. 256. – P. 475-498.
7. Борисюк А. О. Генерація шуму обмеженою областю турбулентної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу / А. О. Борисюк // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2010. – № 1. – С. 35-41.
8. Blake W. K. Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration / W. K. Blake. – New York: Acad. Press Inc., 1986. – Vol. 1,2. – 974 p.
9. Голдстейн М. Е. Аэроакустика / М. Е. Голдстейн. – М.: Машиностроение, 1981. – 294 с.
10. Morse P. M. Methods of Theoretical Physics / P. M. Morse, H. Feshbach. – New York: McGraw-Hill, 1953. – Vol. 1. – 997 p.
11. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. 1.General theory / M. J. Lighthill // Proc. Roy. Soc. London. – 1952. – A211. – P. 564-587.
12. Фіхтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фіхтенгольц. – М.:Физматгиз, 1962. – Т. 2. – 807 с.
13. Ямке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции / Е. Ямке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

Надійшла до редакції 27.05.2010 р.