

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 1 (58)

2017

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: В.И. Сторожев

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: С.А. Калоеров

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: Пачева М.Н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Анциферов А.В.

Белоусов В.В.

Болнокин В.Е.

Болонов Н.И.

Ватульян А.О.

Вовк Л.П.

Глазунов В.А.

Глухов А.А.

Гольцев А.С.

Горр Г.В.

Губанов В.В.

Дрибан В.А.

Ковалев А.М.

Коносевиц Б.И.

Левин В.М.

Муцанов В.Ф.

Недопекин Ф.В.

Петраков А.А.

Судаков С.Н.

Улитин Г.М.

Шалдырван В.А.

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 3029271
E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 1 (58) / 2017

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Теоретическая механика

- Горр Г.В., Илюхин А.А.* О редукции уравнений движения гиростата с неподвижной точкой в потенциальном силовом поле 3
- Gorr G.V., Amer T.S.* Comments on two papers by Ershkov: Archive of Applied Mechanics, 84 (2014) and 86 (2016) 16

Механика деформируемого твердого тела

- Номбре С.Б., Прийменко С.А., Сторожев С.В.* Оценки влияния нечеткости геометрических экзогенных параметров в модели растяжения ортотропной пластины с эллиптическим отверстием 19
- Моисеенко И.А., Прийменко С.А., Шалдырван В.А.* Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах 27
- Нескородев Р.Н.* Метод переменных коэффициентов упругости решения задач изгиба вязкоупругих изотропных плит в уточненной постановке 42

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Глухов А.А.* 2.5D Моделирование сейсмических колебаний в углепородном массиве..... 57
- Педченко С.В., Ягмур А.Б., Дроздова Н.А., Шевченко Е.Н., Педченко М.А.* Гидрогеомеханическое состояние водоразделяющих слоев диапирового купола Солотвинского месторождения каменной соли..... 65

Рева В.Н. Прогнозирование устойчивости кровли в окрестности горной выработки с позиции механики разрушения

74

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 531.38:531.39

©2017. Г.В. Горр, А.А. Илюхин

О РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

В статье рассмотрена задача о редукции уравнений движения тяжелого гиростата и уравнений движения гиростата в потенциальном силовом поле. Исследованы особые решения данных уравнений, которые имеют место при их интегрировании без учета уравнений Пуассона. Показано, что уравнения движения гиростата приводятся к системе четвертого порядка. Указан пример решения редуцированных уравнений.

Ключевые слова: редукция уравнений, гиригат, особые решения.

Введение. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата с неподвижной точкой в потенциальном силовом поле

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \quad (2)$$

которые допускают три первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad \mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad (3)$$

где k и E – произвольные постоянные. В (1)–(3) приняты следующие обозначения: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $a = (a_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) – гирационный тензор; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиригостатический момент; точка над переменными \mathbf{x} и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает дифференцирование по времени; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – силовая функция. На основании обозначений для \mathbf{x} и a компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$ будем обозначать через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Если функция $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ имеет вид

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)), \quad (4)$$

то уравнения (1), (2) описывают движение гиростата под действием силы тяжести.

Система (1), (2) в скалярном виде представляется шестью обыкновенными дифференциальными уравнениями. В силу теории Якоби при наличии четвертого дополнительного интеграла интегрирование уравнений (1), (2) можно получить в квадратурах. Поскольку в общем случае найти дополнительный интеграл затруднительно,

то для интегрирования уравнений (1), (2) применяются различные методы. Например, методы инвариантных соотношений Т. Леви–Чивиты [1], П.В. Харламова [2] используются при построении решений уравнений динамики в замкнутом виде. В [3] выполнен анализ публикаций, посвященных редукции уравнений Эйлера–Пуассона и построению их решений в замкнутом виде. Задача о движении тяжелого гиростата рассмотрена в книге [4]. Монография [5] посвящена исследованию редукции уравнений не только в указанных выше задачах, но и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гиристатических сил, которая описывается уравнениями Кирхгофа–Пуассона.

Преобразование уравнений (1), (2) с силовой функцией (4) условно можно характеризовать с помощью нескольких подходов. В первом подходе (В. Гесс [6], П.А. Шифф [7], П. Штекель [8]) редукция основана на использовании первых интегралов. В. Гесс, найдя компоненты вектора ν из первых интегралов, динамическое уравнение преобразовал к уравнению, которое содержит только компоненты кинетического момента. При этом уравнение Пуассона (2) не принималось во внимание. Сосредоточив основное внимание на особых решениях в предложенном им преобразовании, В. Гесс нашел новый случай интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона. Редуцированные уравнения П.А. Шиффа [7] только обозначениями отличаются от уравнений В. Гесса, а решение, которое он предлагает, не является полным, так как для него не получены зависимости компонент вектора угловой скорости от времени (на это обстоятельство обратил внимание Гамель [9]). П. Штекель [8], исследуя вопросы эквивалентности редуцированных уравнений, формулирует ряд теорем, в частности, он утверждает, что при постоянных значениях инвариантов Гесса компоненты кинетического момента тоже постоянны. В монографии [5] показано, что данное утверждение в общем случае не верно. Исчерпывающую оценку работ П.А. Шиффа и П. Штекеля дал Гамель, который показал, что исследования указанных авторов не полные. Исчерпывающее доказательство этого факта дано в статьях [10,11], в которых показано, что возникающие в процессе редукции уравнений движения тяжелого твердого тела особые решения играют важную роль, так как для этих решений уравнения Пуассона опускать нельзя.

Второй подход в редукции уравнений движения тяжелого гиростата применял П.В. Харламов [12]. Для получения новой формы уравнений движения он рассматривал два первых интеграла (интеграл моментов и интеграл энергии) и одно из скалярных динамических уравнений. Из этих уравнений определялись компоненты вектора вертикали и на их основе строились с привлечением других скалярных динамических уравнений и геометрического интеграла новые формы уравнений движения гиростата. Частным случаем первой формы уравнений П.В. Харламова являются уравнения Н. Ковалевского [13]. Эффективность уравнений [12] показана в [3,4,13]. Кроме этого подход П.В. Харламова был использован в получении интегродифференциального уравнения [14] в задаче о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку.

Уравнения А.И. Докшевича [15] можно отнести к редуцированным уравнениям, полученным в результате применения второго подхода, так как они содержат в

качестве основных переменных комбинации компонент кинетического момента.

Третий подход в преобразовании уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой применен в статье [16]. Отличительной особенностью его является использование в редуцированном уравнении компонент единичного вектора ν_1, ν_2, ν_3 . Уравнение [16] представляет собой иррациональное уравнение второго порядка относительно функций $\nu_2(\nu_1)$.

Четвертый подход основан на уравнениях Гамильтона, полученных в аналитической механике. Он использован во многих публикациях (приведем только статью А.Д. Билимовича [17] и обзорную книгу [3]). Указанный подход эффективен в задачах [18–20] и, как правило, основывается на переменных Андуайе–Депри [21].

В данной статье решается задача об исследовании особых решений в редукции уравнений движения гиростата под действием потенциальных сил. Предложена новая форма уравнений движения гиростата, которая обобщает уравнения [22].

1. Особые решения в задаче о движении тяжелого гиростата. Новая форма уравнений движения. Подставим функцию (4) в уравнения (1), (2) и интегралы (3)

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad \mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E. \quad (7)$$

В задачах редукции уравнений (5), (6), как было отмечено выше, используются интегралы (7), из которых можно определить вектор $\boldsymbol{\nu}$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{v - \rho^2} \left[(k - \mu\rho)(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) - (k\rho - \mu v)\mathbf{e} + N^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{e} \right], \quad (8)$$

где

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{s}}{s}, \quad \rho = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{e}, \quad v = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2, \quad \mu = \frac{1}{2s}(a\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2E), \quad (9)$$

$$N = (1 - \mu^2)(v - \rho^2) - (k - \mu\rho)^2.$$

Величины ρ, v, μ являются аналогами инвариантов Гесса [6]. Внесем $\boldsymbol{\nu}$ из (8) в (5)

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + \frac{s}{v - \rho^2} \left[(k - \mu\rho)(\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})) + N^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} - \rho\mathbf{e}) \right]. \quad (10)$$

Уравнение (10) является в силу (9) уравнениями на компоненты момента количества движения. При рассмотрении уравнения (10) уравнение Пуассона (6) опускается. Отметим, что обобщенный случай Гесса соответствует варианту

$$\rho = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (11)$$

В монографии [5] приведен пример решения, которое удовлетворяет уравнению (5), интегралам (7), а уравнению Пуассона не удовлетворяет. Такие решения в [10,11]

названы особыми решениями уравнений (5), (6). Частично условия существования особых решений уравнений (5), (6) рассмотрены в работе [6]. Полное исследование особых решений уравнений (5), (6) проведено в работах [10,11]. При изучении эквивалентности систем (5), (6) системе, состоящей из динамического уравнения (5) и интегралов (7) в [11] вычислены производные левых частей соотношений (7) в силу только уравнения (5)

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{e} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = 0,$$

и сделано заключение: если выполняется равенство

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}) = 0, \tag{12}$$

то опускать уравнение Пуассона нельзя. Решения уравнений (5), (6), которые удовлетворяют условию (12) и названы особыми. Очевидно, что при невыполнении условия (12) система (5), (6) эквивалентна системе (5), (7).

Особые решения уравнений (5), (6) можно охарактеризовать и условием

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 = c^2, \tag{13}$$

где c – постоянная. Равенство (13) получим путем скалярного умножения обеих частей (5) на вектор $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})$ и использования условия (12).

Поскольку особые решения, для которых выполняются равенства (12), (13) у уравнений (5), (6) полностью изучены, то теорию этих решений можно применить в задаче о редукции уравнений (5), (6).

Введем новую переменную

$$W = \boldsymbol{\nu} \cdot [\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})], \tag{14}$$

где $W \neq 0$. Разложим вектор $\boldsymbol{\nu}$ в базисе \mathbf{e} , $\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})$

$$\boldsymbol{\nu} = \sigma_1 \mathbf{e} + \sigma_2 (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) + \sigma_3 [\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})]. \tag{15}$$

На основании второго и третьего соотношения системы (7), соотношения (14) для вектора (15) получим

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{v - \rho^2} [(v\mu - k\rho)\mathbf{e} + (k - \rho\mu)(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) + W(\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}))], \tag{16}$$

где μ , ρ , v – инвариантны (9). Формула (16) позволяет выразить вектор $\boldsymbol{\nu}$ через вектор кинетического момента и переменную W . Подставим вектор (16) в уравнение (5)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{v - \rho^2} \cdot \{ & (v - \rho^2) [(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x}] + s(k - \rho\mu) [\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})] + \\ & + sW [\rho\mathbf{e} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})] \}. \end{aligned} \tag{17}$$

Используя (14), (5), (6), найдем производную от функции W

$$\begin{aligned} \dot{W} = \frac{1}{v - \rho^2} \{ (v\mu - k\rho) [a\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) - \rho(\mathbf{e} \cdot a\mathbf{x})] - \\ - s(1 - \mu^2)(v - \rho^2) - \rho W [a\mathbf{x} \cdot (\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}))] \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Итак, система (5), (6) редуцирована к системе (17), (18), которая в скалярном виде имеет четвертый порядок. В отличие от уравнений класса Гесса (10) эта система не имеет особенностей в виде радикала от инвариантов Гесса. В силу $v - \rho^2 = [\mathbf{e} \times (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})] \neq 0$ начальные значения вектора \mathbf{x} должны удовлетворять условию $v - \rho^2 \neq 0$.

Уравнения (17), (18) допускают интеграл

$$W^2 + k^2 + v(\mu^2 - 1) + \rho(\rho - 2k\mu) = 0. \quad (19)$$

Отличительным свойством уравнений (17), (18) является линейность правых частей от вспомогательной функции W . При $v - \rho^2 \neq 0$ система (17), (18) имеет единственное решение задачи Коши. В силу результатов [10,11] уравнение (6) на решениях системы (17), (18) обращается в тождество, то есть уравнение (6) можно опустить. Если внести значение W , найденное из (19), в уравнение (17), то получим обобщенное уравнение Гесса, которое будет иметь особенность при $W = 0$.

2. Особые решения уравнений (1), (2). При интегрировании уравнений (1), (2) с интегралами (3) при определенных условиях возникают особые решения, на которых уравнение (2) рассматривать обязательно. Для их исследования рассмотрим две задачи. Задачу 1 опишем дифференциальными уравнениями (1), (2), а задачу 2 опишем дифференциальным уравнением (1) и интегралами (3). Сформулируем проблемы: 1. Найти условие, при выполнении которого справедливо заключение

$$[\text{ур.}(1), (2)] \sim [\text{ур.}(1), (3)]. \quad (20)$$

2. Выполнить интегрирование уравнений (1), (2) на особых решениях (решениях, для которых утверждение (20) не выполняется).

При исследовании первой проблемы будем использовать метод [11]. Рассмотрим задачу 1, то есть будем рассматривать уравнение (1) и интегралы (3). Продифференцируем (3) в силу только уравнения (1)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = 0, \\ \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из уравнений (21) следует, что при выполнении условия

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left(\boldsymbol{\nu} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \neq 0 \quad (22)$$

имеет место уравнение Пуассона (2):

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times a\mathbf{x}. \quad (23)$$

В случае

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left(\mathbf{v} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0 \quad (24)$$

получить уравнение (23) из системы (21) невозможно. Полагая $\mathbf{v} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ (случай равенства приводит к решению Эйлера), из соотношения (24) имеем

$$\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} = \alpha(t)\mathbf{v} + \beta(t)\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}}, \quad (25)$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ – некоторые дифференцируемые функции t . Умножим скалярно уравнение (1) на вектор $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})$. Если выполнено условие (24) (либо в другой записи (25)), то из преобразованного уравнения следует

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 = c^2, \quad (26)$$

где c – постоянная. Следовательно, при $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 \neq c^2$ задача 1 эквивалентна задаче 2, то есть утверждение (20) верно. Когда выполняется равенство (26) в общем случае задача 1 не эквивалентна задаче 2. Особые решения уравнений (1), (2) характеризуются инвариантным соотношением (26).

Таким образом, проблему интегрирования уравнений (1), (2) с интегралами можно сформулировать в двух постановках. В первой постановке необходимо рассматривать уравнения

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 = c^2 : \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times a\mathbf{x}, \quad (27)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} = k, \quad \mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E. \quad (28)$$

Во второй постановке следует изучать систему

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 \neq c^2 : \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v}, \quad (29)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} = k, \quad \mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E. \quad (30)$$

Следовательно, в первой постановке привлечение уравнения Пуассона (2) обязательно, во второй постановке его можно не рассматривать.

Так как в обеих постановках исследование решений динамических уравнений обязательно, то рассмотрим задачу об интегрировании этого уравнения, например, в случае (27), (28). Будем полагать в (1) $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. Покажем, что в скалярном случае вместо трех динамических уравнений, вытекающих из (1), можно рассматривать первые интегралы и одно динамическое уравнение. Для этой цели введем базис $\mathbf{v}, a\mathbf{x}, \mathbf{v} \times a\mathbf{x}$ (он будет составлять систему независимых векторов, если исключить из

рассмотрения равномерные вращения тела). Методом дифференцирования интегралов (28) только в силу уравнения Пуассона из (27) можно показать, что проекции левой части динамического уравнения из (27) на векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $a\mathbf{x}$ преобразуются ко второму и третьему соотношениям из (28), а проекция на вектор $\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}$ дает уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = k(a\mathbf{x})^2 + (\boldsymbol{\nu} \cdot a\mathbf{x}) \left(\frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{\nu} - \right. \\ \left. - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + 2E \right) - a\mathbf{x} \cdot \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Данный подход целесообразно использовать в случае, когда уравнение Пуассона принимается во внимание при интегрировании исходных уравнений. Так, например, для варианта (27), (28) при $\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) \neq 0$ достаточно провести анализ уравнений (23), (31) и соотношений

$$\mathbf{x} = c^2, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad \mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad (32)$$

что в значительной степени упрощает изучение особых решений системы (1), (2).

3. Исследование системы (17), (18) в случае, когда центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат главной оси. Рассмотрим уравнения (1), (2) с интегралами (3) при выполнении условия (4). Пусть

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{s}}{s} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda, 0, 0), \quad a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3). \quad (33)$$

Тогда $a\mathbf{x} = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3) = \boldsymbol{\omega}$ (вектор угловой скорости гиростата). Уравнения движения (1), (2) при наличии равенств (33) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_3 - a_2)x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= (a_1 - a_3)x_1x_3 - a_3\lambda x_3 - \nu_3s, \\ \dot{x}_3 &= (a_2 - a_1)x_2x_1 + a_2\lambda x_2 + \nu_2s, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2. \quad (35)$$

Интегралы уравнений (34), (35) таковы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (x_1 + \lambda)\nu_1 + \nu_2x_2 + \nu_3x_3 = k, \quad (36)$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - 2s\nu_1 = 2E. \quad (37)$$

Переменная W из (14) в данном случае принимает значение

$$W = x_2\nu_3 - x_3\nu_2. \quad (38)$$

Случай, когда $W = 0$ (уравнения (34) допускают инвариантное соотношение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2$; x_0^2 – фиксированная постоянная), рассмотрен в статье [10]. Поэтому

в дальнейшем считаем $W \neq 0$. Из соотношений (36)–(38) определим компоненты вектора ν

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{1}{2s} (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 - 2E), \\ \nu_2 &= \frac{1}{x_2^2 + x_3^2} [kx_2 - x_2(x_1 + \lambda)\nu_1 - Wx_3], \\ \nu_3 &= \frac{1}{x_2^2 + x_3^2} [kx_3 - x_3(x_1 + \lambda)\nu_1 + Wx_2].\end{aligned}\quad (39)$$

В системе (34) перейдем к дифференцированию по x_1 . Используя первое уравнение этой системы (34), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (x_2^2(x_1))' &= \frac{1}{a_3 - a_2} \left[(a_1 - a_3)x_1 - a_3\lambda - \frac{s\nu_3}{x_3} \right], \\ \frac{1}{2} (x_3^2(x_1))' &= \frac{1}{a_3 - a_2} \left[(a_2 - a_1)x_1 + a_2\lambda + \frac{s\nu_2}{x_2} \right].\end{aligned}\quad (40)$$

Вместо $x_2^2(x_1)$, $x_3^2(x_1)$ введем новые переменные $R(x_1)$, $y(x_1)$

$$x_2^2(x_1) = R(x_1)(1 - y(x_1)), \quad x_3^2(x_1) = R(x_1)y(x_1), \quad (41)$$

где $x_2^2(x_1) + x_3^2(x_1) = R(x_1) > 0$. Запишем (39) в силу (41)

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{1}{2s} [(a_1 x_1^2 - 2E) + R(x_1)((a_3 - a_2)y + a_2)], \\ \nu_2 &= \frac{1}{\sqrt{R}} \left[(k - (x_1 + \lambda)\nu_1) \sqrt{1 - y} - W\sqrt{y} \right], \\ \nu_3 &= \frac{1}{\sqrt{R}} \left[(k - (x_1 + \lambda)\nu_1) \sqrt{y} + W\sqrt{1 - y} \right].\end{aligned}\quad (42)$$

Рассмотрим уравнения (40) при замене (41)

$$R'(x_1)(1 - y(x_1)) - R(x_1)y'(x_1) = \frac{2}{a_3 - a_2} \left[(a_1 - a_3)x_1 - a_3\lambda - \frac{s\nu_3}{x_3} \right], \quad (43)$$

$$R'(x_1)y(x_1) + R(x_1)y'(x_1) = \frac{2}{a_3 - a_2} \left[(a_2 - a_1)x_1 + a_2\lambda + \frac{s\nu_2}{x_2} \right]. \quad (44)$$

Из (43), (44) получим

$$R'(x_1) = -2(x_1 + \lambda) - \frac{2sW(x_1)}{(a_3 - a_2)R(x_1)\sqrt{y(x_1)(1 - y(x_1))}}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned}y'(x_1) &= \frac{1}{(a_3 - a_2)R^2(x_1)} \{ R(x_1)[(a_3 - a_2)(x_1 + \lambda)y(x_1) + \\ &+ (a_2 - 2a_1)x_1 + a_2\lambda] + 2ks - (x_1 + \lambda)(a_1 x_1^2 - 2E) \}.\end{aligned}\quad (46)$$

Распишем уравнение (18) при условиях (33) и замене (41)

$$W'(x_1) = \frac{1}{(a_3 - a_2)R(x_1)\sqrt{y(x_1)(1 - y(x_1))}} \left\{ -s(1 - \nu_1^2) - \right. \\ \left. -(x_1 + \lambda)[(a_3 - a_2)y + a_2][k - (x_1 + \lambda)\nu_1] + R(x_1)[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2]\nu_1 - \right. \\ \left. - W(x_1)(a_3 - a_2)(x_1 + \lambda)\sqrt{y(x_1)(1 - y(x_1))} \right\}, \quad (47)$$

где в силу (39), (41)

$$\nu_1 = \frac{1}{2s} [(a_1x_1^2 - 2E) + R(x_1)((a_3 - a_2)y(x_1) + a_2)]. \quad (48)$$

Интеграл (19) на основании (9), (33), (41), (45) преобразуется к виду

$$R^2(x_1)(a_3 - a_2)^2y(x_1)(1 - y(x_1)) \left[R'(x_1) + 2(x_1 + \lambda) \right]^2 + \\ + R^3(x_1) [(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2]^2 + R^2(x_1) [(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2] \cdot \\ \cdot [(a_3 - a_2)(x_1 + \lambda)^2y(x_1) + a_2(x_1 + \lambda)^2 + 2(a_1x_1^2 - 2E)] + \\ + R(x_1) \left\{ 2(a_3 - a_2)(x_1 + \lambda)y(x_1) [(x_1 + \lambda)(a_1x_1^2 - 2E) - 2sk] + \right. \\ \left. + (a_1x_1^2 - 2E)^2 - 4s^2 - 4ska_2(x_1 + \lambda) + 2a_2(x_1 + \lambda)^2(a_1x_1^2 - 2E) \right\} + \\ + 4s^2k^2 - 4sk(x_1 + \lambda)(a_1x_1^2 - 2E) + (x_1 + \lambda)^2(a_1x_1^2 - 2E)^2 = 0. \quad (49)$$

Уравнения (45)–(47) имеют следующие свойства: уравнение (45) линейно по $W(x_1)$; уравнение (46) не содержит функцию $W(x_1)$ и является линейным по $y(x_1)$; уравнение (47) линейно по $W(x_1)$. После исследования уравнений (45)–(49) зависимость $x_1(t)$ определяется из уравнения

$$x_1 = (a_3 - a_2)R(x_1)\sqrt{y(x_1)(1 - y(x_1))}. \quad (50)$$

Для нахождения переменных ν_i необходимо обратиться к формулам (42). Рассмотрим свойства переменных (41). Обозначим через \mathbf{c} проекцию вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ на плоскость, которая ортогональна барицентрической оси. В силу (41) $R(x_1) = |\mathbf{c}| = x_2^2(x_1) + x_3^2(x_1)$, а переменная $y(x_1)$ имеет значение

$$y(x_1) = \frac{x_3^2(x_1)}{x_2^2(x_1) + x_3^2(x_1)} = \sin^2 \psi(x_1),$$

где $\psi(x_1)$ – угол между второй координатной осью и вектором $\mathbf{c} = (x_2, x_3)$. Аналитическое свойство функции $W^2(x_1)$ следует из равенства (19)

$$W^2(x_1) = v(1 - \mu^2) - k^2 + \rho(2k\mu - \rho) = 0.$$

Если построение решения основано на уравнениях (46), (49), то значение функции $W(x_1)$ можно получить из (45)

$$W(x_1) = -\frac{1}{4s}(a_3 - a_2) (R(x_1) + x_1^2 + \lambda x_1)' \sin 2\psi(x_1).$$

Представляет интерес структура функций $R(x_1)$, $y(x_1)$ в полиномиальных решениях [12].

Решение П.В. Харламова [12], которое обобщает решение В.А. Стеклова, имеет вид

$$x_2^2(x_1) = g_0 + g_1x_1 + g_2x_1^2, \quad x_3^2(x_1) = h_0 + h_1x_1 + h_2x_1^2,$$

где $g_i (i = \overline{0, 2})$, $h_i (i = \overline{0, 2})$ – параметры. В силу принятых обозначений (41) получим

$$R(x_1) = (h_0 + g_0) + (h_1 + g_1)x_1 + (h_2 + g_2)x_1^2,$$

$$y(x_1) = \frac{h_0 + h_1x_1^2 + h_2x_1^2}{R(x_1)}.$$

Рассмотрим решение П.В. Харламова [12], обобщающее решение Н.К. Ковалевского

$$x_2^2(x_1) = \sum_{i=0}^2 g_i x_1^i, \quad x_3^2(x_1) = \sum_{j=0}^3 h_j x_1^j.$$

Тогда

$$R(x_1) = h_3 x_1^3 + (h_2 + g_2)x_1^2 + (h_1 + g_1)x_1 + (h_0 + g_0),$$

$$y(x_1) = \frac{1}{R(x_1)} \sum_{j=0}^3 h_j x_1^j.$$

Таким образом, полиномиальные решения [12] в переменных $R(x_1)$, $y(x_1)$ выражаются соответственно многочленами и рациональными функциями переменной x_1 .

Рассмотрим пример интегрирования уравнений (46), (49). Положим

$$R(x_1) = R_0 = const, \quad y(x_1) = p_2 x_1^2 + p_1 x_1 + p_0, \quad (51)$$

где p_0 , p_1 , p_2 – постоянные. Подставим (51) в уравнение (46) и потребуем, чтобы полученное соотношение было тождеством по x_1 . Тогда найдем следующие значения параметров решения (51)

$$p_0 = \frac{a_1}{R_0(a_3 - a_2)}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{R_0(a_3 - a_2)} [R_0(4a_1 - a_2) - 2E]. \quad (52)$$

При выполнении (52) параметры задачи удовлетворяют условию

$$\lambda = -\frac{ks}{2a_1 R_0}, \quad (53)$$

Для анализа решения (51) перейдем к новой переменной

$$z(x_1) = (a_3 - a_2)y(x_1) + a_2. \quad (54)$$

В силу (52) из (54) имеем

$$z(x_1) = \alpha_0 + \alpha_2 x_1^2, \quad (55)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{2(2a_1R_0 - E)}{R_0}, \quad \alpha_2 = \frac{a_1}{R_0}. \quad (56)$$

Запишем уравнение (49) при условии $R(x_1) = R_0$, введя переменную (54)

$$\begin{aligned} & 4R_0^2(z - a_2)(a_3 - z)(x_1 + \lambda)^2 + 4s^2(k^2 - R_0) + \\ & + [x_1^2 + 2x_1\lambda + (R_0 + \lambda^2)] [(a_1x_1^2 - 2E) + R_0z(x_1)]^2 - \\ & - 4sk(x_1 + \lambda) [(a_1x_1^2 - 2E) + R_0z(x_1)] = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Общий вид уравнения (57) на основании (55), (56) таков

$$b_6x_1^6 + b_5x_1^5 + b_4x_1^4 + b_3x_1^3 + b_2x_1^2 + b_1x_1 + b_0 = 0, \quad (58)$$

где $b_i (i = \overline{0,6})$ – параметры. Используя условия (56), в уравнении (58) имеем равенства $b_6 = 0$, $b_5 = 0$. Из равенства $b_4 = 0$ получим ограничение на параметры a_i

$$a_2 + a_3 = 3a_1. \quad (59)$$

Поскольку уравнение (58) должно быть тождеством по x_1 (в противном случае $x_1 = const$, что исключено из рассмотрения), то рассмотрим равенство $b_3 = 0$. В силу (54)–(57) следует

$$\lambda R_0(a_2 + a_3 - 4a_1) - sk = 0. \quad (60)$$

Принимая во внимание (59), из (60) найдем

$$\lambda = -\frac{ks}{a_1R_0}. \quad (61)$$

Условия (53), (61) совместны только в случаях: $k = 0$, $s = 0$. Для них из (61) следует $\lambda = 0$. То есть решение (51) уравнений (46), (48) возможно лишь при выполнении равенства $\lambda = 0$. Таким образом показано, что рассматриваемое решение имеет место только в задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку [22]. Интерес результата [22] состоит в том, что он характеризует частный случай решения В.А. Стеклова, который ранее в научных статьях по динамике тяжелого твердого тела не отмечался.

Закключение. В статье рассмотрена задача о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных сил. Исследованы особые решения уравнений движения гиростата. Найдены условия существования особых решений, для которых замена уравнений Пуассона первыми интегралами не допустима. Указана новая форма уравнений движений тяжелого гиростата, состоящая из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучен один случай решения редуцированных уравнений.

1. *Levi-Civita T. Lezioni di meccanica razionale / T. Levi-Civita, U. Amaldi. // Bologna: N. Zanichelli. –1952.– Vol. 2, P. 2.–671 p.*

2. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов. // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
3. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
4. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
5. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
6. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess. // Math. Ann. – 1890. – В. 37, Н. 2. – S. 153–181.
7. Шифф П.А. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / П.А. Шифф. // Матем. сборник кружка любителей мат. наук. – 1903. – Т. 24, № 2. – С. 169–177.
8. Stäckel P. Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels / P. Stäckel. // Math. Ann. – 1909. – 67. – S. 399–431.
9. Hamel G. Über den allgemeinen schweren Kreisel / G. Hamel. // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1947. – S. 5–6.
10. Горр Г.В. Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата / Г.В. Горр, А.А. Илюхин. // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
11. Горр Г.В. Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.А. Илюхин, Е.И. Харламова. // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 3–9.
12. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Ч. I. / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
13. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt / N. Kowalewski // Math. Ann. – 1908. – В. 65. – S. 528–537.
14. Харламова Е.И. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. / Е.И. Харламова, Г.В. Мозалевская. – Киев.: Наук. думка, 1986. – 296 с.
15. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. / А.И. Докшевич. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
16. Яхья Х.М. О сведении уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки к одному дифференциальному уравнению / Х.М. Яхья. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – N 4. – С. 64–67.
17. Билимович А.Д. Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / А.Д. Билимович. // Сборник статей, посвященный Г.К. Суслову. – К., 1911. – С. 23–74.
18. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. / В.В. Козлов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 232 с.
19. Козлов В.В. Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах / В.В. Козлов. // Теор. и прикл. механика. – Белград: Югославское об-во механики, 1982. – № 8. – С. 59–65.
20. Садов Ю.А. Переменные действия–угол в задаче Эйлера–Пуансо / Ю.А. Садов. // Прикл. математика и механика. – 1970. – 34, Вып 5. – С. 962–964.
21. Deprit A. Complete reduction of the Euler–Poincot problem / A. Deprit, A. Eliepe. // J. Astronaut. Sci. – 1993. – 41, № 4. – P. 603–628
22. Горр Г.В. Новая форма в моделировании движения тяжелого твердого тела / Г.В. Горр, Е.К. Щетинина. // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т.8, № 6. – С. 873–884.

G.V. Gorr, A.A. Plyukhin

On reduction of the equations of motion of a gyrostate with a fixed point in the potential force field.

Reduction problem is considered for equations of motion of a heavy gyrostate in the potential force field.

О редукции уравнений движения гиростата с неподвижной точкой

Special solutions of these equations are studied for the case of their integration without taking account of Poisson equations. It is shown that the equations of motion of a gyrostate can be transformed to a fourth order system. An example of solution of the reduced equations is presented.

Keywords: *reduction, gyrostate, special solutions.*

ГУ “Институт прикладной математики и механики”, Донецк
Таганрогский институт им. А.П. Чехова, Таганрог, Россия
gugorr@gmail.com, aleilyukhin@yandex.ru

Получено 01.03.17

UDK 531.38:531.39

©2017. G.V. Gorr, T.S. Amer

COMMENTS ON TWO PAPERS BY ERSHKOV: ARCHIVE OF APPLIED MECHANICS, 84 (2014) AND 86 (2016)

We show that the use of three integrals of motion instead of the Poisson equation to construct an exact solution of the classical problem of motion of a heavy rigid body about a fixed point can lead in some cases to erroneous results. The exact solution proposed recently by Ershkov is an example.

Keywords: *equations, Poisson, integrals.*

Introduction. The problem of the rotational motion of a rigid body about a fixed point in a uniform field is a central problem in classical mechanics. This problem, which attracted the interest of many researchers during the last two centuries, is governed by a system of six non-linear differential equations of the first order with three first integrals, the energy integral, the angular momentum integral (areas integral) and the geometric one, e.g. [1]. The research on this problem yielded three general integrable cases, one conditional (on the zero level of the areas integral) and a number of particular solutions, valid only for much restricted initial conditions of motion. Each of the known cases is checked and well documented. The current state of the problem is presented in detail in several sources. The most recent are [2]-[3].

Recently [4], Ershkov announced a new solution of the classical problem, which, as the author states, generalizes the famous case of motion by inertia, found originally by Euler. Some details were further treated in [5]. In there comment [6] on [4] Sanduleanu and Petrov showed inconsistency of this result. To satisfy all the equations of motion it reduces to a subcase of Euler's case.

In the present note we clarify the source of error in Ershkov's reasoning. To use the dynamical equations and the three integrals of motion is not always equivalent to the use of the full system of six Euler-Poisson's equations. We find out the conditions that this replacement leads to correct results and show that the solution described by Ershkov falls in the excluded set of solutions.

1. Analysis. The motion of a heavy rigid body is described by the system (e.g. [1])

$$I\dot{w} + w \times wI = Mg\gamma \times r_0, \text{ (Euler's dynamical equation)} \quad (1a)$$

$$\dot{\gamma} + w \times \gamma = 0, \text{ (Poisson's equation)} \quad (1b)$$

where w is the angular velocity of the body, γ is the unit vector directed vertically upwards, $I = \text{diag}(A, B, C)$ is the inertia matrix Mg is the weight of the body and r_0 is the position vector of its centre of mass, all vectors being referred to the coordinate system composed of principal axes of inertia of the body.

Equations (1) admit the three integrals

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} \cdot Iw + Mgr_0 \cdot \gamma, \quad (2a)$$

$$I_2 \equiv \gamma \cdot Iw, \quad (2b)$$

$$I_3 \equiv \gamma^2 = 1. \quad (2c)$$

In certain trials to construct exact solutions of (1), authors use the dynamical equations (1a) along with the three integrals (2) without verification of Poisson's equation. Some of those trials ended up unsuccessfully. The question arises, under which conditions the use of the three integrals is equivalent to the use of Poisson equation? In other words, under which conditions Poisson's equation (1b) follows from the knowledge of the three integrals (2) augmented by the dynamical equation (1a)?

Differentiating the geometric integral results in the equation

$$\gamma \cdot \dot{\gamma} = 0. \quad (3)$$

Let us now differentiate the energy integral ([1]) w.r. to time, we get

$$w \cdot I\dot{w} + Mgr_0 \cdot \dot{\gamma} = 0.$$

Substituting $I\dot{w}$ from (1a) this becomes

$$w \cdot [-w \times wI + Mg\gamma \times r_0] + Mgr_0 \cdot \dot{\gamma} = 0.$$

and can be written in the final form

$$r_0 \cdot (\dot{\gamma} + w \times \gamma) = 0. \quad (4)$$

This guarantees that the component of the vector $\dot{\gamma} + w \times \gamma$ vanishes in the direction from the fixed point to the centre of mass.

Now we differentiate the areas integral (2b). We obtain

$$\dot{\gamma} \cdot Iw + \gamma \cdot I\dot{w} = 0.$$

Using (1a) we get

$$\dot{\gamma} \cdot Iw + \gamma \cdot [-w \times Iw + Mg\gamma \times r_0] = 0,$$

or, in final form

$$(\dot{\gamma} + w \times \gamma) \cdot Iw = 0. \quad (5)$$

Let us now examine the solution proposed in [4]. This solution is characterized by the invariant relation

$$Iw = C_0\gamma. \quad (6)$$

Substituting this solution into (5), we obtain

$$\gamma \cdot \dot{\gamma} + (w \times \gamma) \cdot \gamma = 0, \quad (7)$$

which is identically satisfied and gives no condition at all on the vector $\dot{\gamma} + w \times \gamma$. Thus in the solution proposed by Ershakov Poisson's vector equation does not follow from the dynamical equation and the three integrals. It must be verified directly from the given form of solution. In fact, a direct check of the solution proposed in [4] shows that it satisfies only one of the three Poisson equations.

Remark. It is noteworthy that the integral in equation (3) in [4] is not elliptic as claimed after that equation. It is an elementary integral and can be evaluated in terms of trigonometric functions.

1. *Leimanis E.* The general problem of motion of coupled rigid bodies about a fixed point. / E. Leimanis. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1965. – 337 p.
2. *Gashenenko I.N.* Classical problems of rigid body dynamics. / I.N. Gashenenko, G.V. Gorr, A. M. Kovalev. – Kiev: Naukova Dumka, 2012. – 401 p.
3. *Borisov A.V.* Rigid body dynamics. / A.V. Borisov, I.S. Mamaev. – Izhevsk: NIC Regular and Chaotic Dynamics, 2001. – 384 p.
4. *Ershkov S.* New exact solution of Euler's equations (rigid body dynamics) in the case of rotation over the fixed point. /S. Ershkov. // Arch. Appl. Mech. – 2014. – Vol. 84, No. 3. – P. 385–389.
5. *Ershkov S.* On the invariant motions of rigid body rotation over the fixed point, via Euler's angles. / S. Ershkov. // Arch. Appl. Mech. – 2016. – Vol. 86, No. 11. – P. 1797–1804.
6. *Sanduleanu S.* Comment on "New exact solution of Euler's equations (rigid body dynamics) in the case of rotation over the fixed point". /S. Sanduleanu, A. Petrov. // Arch. Appl. Mech. – 2017. – Vol. 87, No. 1. – P. 41–43.

Г.В. Горр, Т.С. Амер

Замечания к двум статьям Ершкова: Архив прикладной механики, 84 (2014) и 86 (2016).

В статье доказано, что использование трех интегралов вместо уравнений Пуассона для построения точного решения классической задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки может в некоторых случаях привести к ошибочным результатам. В качестве примера рассмотрено решение, предложенное недавно Ершковым.

Ключевые слова: решение, уравнения Пуассона, интегралы.

*Mathematics Department, Donetsk national university, Donetsk
Mathematics Department, Faculty of science, Tanta university,
Tanta 31527, Egypt
vggorr@gmail.com, tarek.amer@science.tanta.edu.eg*

Received 12.03.17

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

©2017. С.Б. Номбре, С.А. Прийменко, С.В. Сторожев

ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ НЕЧЕТКОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ РАСТЯЖЕНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

На базе концепции применения модифицированного эвристического принципа обобщения теории нечетких множеств к моделям физико-механических процессов с неопределенными экзогенными параметрами предложен вариант методики получения нечетких оценок для показателей концентрации механических напряжений у контура эллиптических отверстий неконтрастного очертания в растягиваемых тонких ортотропных пластинах и описан ряд результатов ее реализации.

Ключевые слова: модели упругого деформирования, учет неопределенности в задании экзогенных параметров, нечеткие оценки концентрации механических напряжений у эллиптических отверстий неконтрастного очертания в тонких пластинах, использование модифицированного эвристического принципа обобщения, численные оценки показателей неопределенности.

1. Введение и формулировка целей исследования. Оценивание эффектов прогнозируемого разброса в количественных результатах исследования моделей механики деформируемого твердого тела с нечеткими экзогенными параметрами геометрической и физической природы, несмотря на разработку целого ряда приемов и методик [1 - 4], продолжает оставаться актуальной открытой по весьма широкому кругу аспектов многоплановой фундаментальной и прикладной научной проблемой. Доминирующим подходом к ее решению до последнего времени оставалось применение аппарата стохастического анализа, методов теории вероятностей и математической статистики, концентрированно описываемое и характеризующее в публикациях [5 - 18]. Вместе с тем, развитие методов теории нечетких множеств и аппарата нечеткой математики дает возможности развития альтернативного подхода к учету факторов неопределенности в моделях механики деформируемых сред, в рамках которого в определенном смысле смягчаются требования к природе и характеру неконтрастной исходной информации. В частности, это касается возможностей использования нечеткой информации, не имеющей строгого вероятностного типа, учета количественных оценок экспертной природы, а также параметров с качественными лингвистическими значениями [19 - 21].

Можно выделить несколько вариантов постановки проблемы учета факторов неопределенности в моделях механики деформируемого твердого тела с соответствующими методиками ее исследования на базе применения аппарата нечеткой

математики. В частности, специальный класс составляют модели, в которых экзогенные параметры геометрической и физико-механической природы входят в классические четкие аналитические расчетные соотношения для эндогенных характеристик. В этих случаях учет неопределенности может основываться на нечетко-множественной интерпретации экзогенных параметров моделей, не имеющих контрастного описания, и применении эвристического принципа обобщения (принципа расширения) в рамках приема замены части переменных в функциональных описаниях эндогенных характеристик аргументами нечетко-множественного типа [19 - 21].

В контексте приведенных соображений, целью настоящей работы является описание применения методов нечеткой математики для учета неопределенности экзогенных параметров геометрической природы при исследовании представляющей интерес для прочностных расчетов модели нечеткого оценивания показателя концентрации напряжений у контура эллиптического отверстия в растягиваемой анизотропной пластине с учетом факторов разброса эксцентриситета его контура.

2. Постановка задачи и аналитическое решение ее четкого классического варианта. Рассматривается задача определения характеристик локализованного поля механических напряжений в прямолинейно-ортотропной тонкой пластине с модулями жесткости $\{s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}\}$ в окрестности находящегося в равномерном поле растягивающих напряжений эллиптического отверстия со свободным контуром. Полагается, что деформирование пластины описывается моделью обобщенного плоского напряженного состояния; в срединной плоскости пластины введена система прямоугольных координат Ox_1x_2 , а контур Γ эллиптического отверстия с полуосями a и b имеет параметрическое описание $(x_1)_\Gamma = a \cdot \cos \theta$, $(x_2)_\Gamma = b \cdot \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Согласно [22 - 23], в случае равномерного растяжения пластины вдоль оси Ox_1 усилиями интенсивности p на основе применения методов теории функций обобщенных комплексных переменных для показателя концентрации механических напряжений $\sigma_{ks} = (\sigma_s/p)_\Gamma$ в точках контура отверстия может быть получено аналитическое представление вида

$$\sigma_{ks} = F(a, b, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta) = 1 + \sum_{j=1}^2 [b(1 - \beta_j^2)(\cos 2\theta - m_j) \cdot (R_j(-1)^j(\beta_2 - \beta_1)(1 - 2m_j \cos 2\theta + m_j^2)^{-1}], \quad (1)$$

где

$$m_j = [(1 - \beta_j \cdot (b/a))/(1 + \beta_j \cdot (b/a))], \quad R_j = [a(1 + \beta_j \cdot (b/a))/2],$$

$$\beta_j = [((2s_{12} + s_{66}) + (-1)^{j+1}((2s_{12} + s_{66})^2 - 4s_{11}s_{22})^{1/2})/(2s_{11})]^{1/2}, \quad (2)$$

$$(j = \overline{1, 2}).$$

Описанная модель анализа показателя концентрации напряжений у контура отверстия подлежит исследованию в рамках предположений о нечеткости задания ее геометрических параметров, которая обусловлена технологическими факторами, разбросами данных экспериментальных замеров и т.д. При этом разрабатываемый вариант методики получения искомых оценок разброса в значениях показателя концентрации напряжений для различных точек контура отверстия базируется

на предположениях о нечеткости величин полуосей эллиптического отверстия a , b при точных значениях модулей жесткости материала пластины, а также о задании соответствующих неконтрастных значений геометрических параметров a и b в рассматриваемой модели нечеткими трапецидальными интервалами \tilde{a} , \tilde{b} с кортежами реперных точек (a_1, a_2, a_3, a_4) , (b_1, b_2, b_3, b_4) и с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{a}}(a)$, $\mu_{\tilde{b}}(b)$.

3. Методика и результаты исследования модели. Развиваемый подход к исследованию модели основан на применении эвристического принципа обобщения (принципа расширения) к представлению (1), в котором по соответствующим подмножествам аргументов реализуется переход к их нечетко-интервальным значениям.

При рассмотрении варианта задачи, в котором подлежат учету нечеткости величин полуосей эллиптического отверстия a и b , а значения модулей жесткости материала пластины полагаются точными четко заданными величинами, для нечетко-интервальных характеристик \tilde{a} и \tilde{b} вводятся представления в виде разложений по множествам α -срезов

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{a}}_\alpha, \overline{\tilde{a}}_\alpha], & \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{b}}_\alpha, \overline{\tilde{b}}_\alpha]; \\ \underline{\tilde{a}}_\alpha &= (1 - \alpha)m_1 + \alpha m_2, & \overline{\tilde{a}}_\alpha &= \alpha m_3 + (1 - \alpha)m_4; \\ \underline{\tilde{b}}_\alpha &= (1 - \alpha)m_1 + \alpha m_2, & \overline{\tilde{b}}_\alpha &= \alpha m_3 + (1 - \alpha)m_4.\end{aligned}\quad (3)$$

Соотношения (1), (2) преобразуются с ведением характеристики $\eta = b/a$

$$\begin{aligned}(\sigma_\theta/p)_\Gamma &= F(\eta, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta) = 1 + \sum_{j=1}^2 [(1 - \beta_j^2)(\cos 2\theta - m_j) \cdot \\ &\cdot ((-1)^j (\beta_2 - \beta_1)(1 + \beta_j \eta) (1 - 2m_j \cos 2\theta + m_j^2) / (2\eta))^{-1}], \\ m_j &= [(1 - \beta_j \eta) / (1 + \beta_j \eta)],\end{aligned}\quad (4)$$

которая далее рассматривается в модели как нечетко-интервальная величина $\tilde{\eta}$ с кортежем реперных точек $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, $\eta_1 = b_1/a_4$, $\eta_2 = b_2/a_3$, $\eta_3 = b_3/a_2$, $\eta_4 = b_4/a_1$ и представляется в виде разложения по множествам α -срезов

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{\eta}}_\alpha, \overline{\tilde{\eta}}_\alpha], \\ \underline{\tilde{\eta}}_\alpha &= (1 - \alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, & \overline{\tilde{\eta}}_\alpha &= \alpha\eta_3 + (1 - \alpha)\eta_4.\end{aligned}\quad (5)$$

Соответственно, при применении эвристического принципа расширения для получения нечеткой оценки показателя концентрации контурных напряжений $\tilde{\sigma}_{ks}$ в данном случае может быть записано представление

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ks} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{F}}_\alpha, \overline{\tilde{F}}_\alpha], \\ \underline{\tilde{F}}_\alpha &= \inf_{\eta_\alpha \in [(1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, (1-\alpha)\eta_4 + \alpha\eta_3]} F(\eta_\alpha, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta), \\ \overline{\tilde{F}}_\alpha &= \sup_{\eta_\alpha \in [(1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, (1-\alpha)\eta_4 + \alpha\eta_3]} F(\eta_\alpha, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta).\end{aligned}\quad (6)$$

В качестве примера реализации данного варианта методики получения нечетких оценок для показателя концентрации контурных напряжений $\tilde{\sigma}_{ks}$ рассмотрен случай растяжения ортотропной пластины из волокнистого стеклопластика со значениями модулей жесткости $s_{11} = 0.0412 \cdot s_*$, $s_{22} = 0.1001 \cdot s_*$, $s_{12} = -0.0170 \cdot s_*$, $s_{66} = 0.3393 \cdot s_*$, $s_* = 10^{-9}$ Па. Приведенной совокупности s_{ij} соответствуют определяемые по формуле (2) значения $\beta_1 = 2.6575$, $\beta_2 = 0.5864$.

В рассматриваемой пластине имеется эллиптическое отверстие с неконтрастными пропорциями полуосей, описываемых нечетко-интервальными экзогенными параметрами модели

$$\tilde{a} = (1.85, 1.95, 2.1, 2.2), \quad \tilde{b} = (0.85, 1.0, 1.1, 1.15).$$

Соответствующие профили функций принадлежности для нечетких характеристик $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\eta}$ представлены на рис. 1 – 3.

Определяемые соотношениями (6) нечеткие оценки для показателя концентрации напряжений в случае $\tilde{\sigma}_{ks} p = s_*^{-1}$ при нескольких значениях углового параметра $\theta \{5^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$ представлены на рис. 4 – 7.

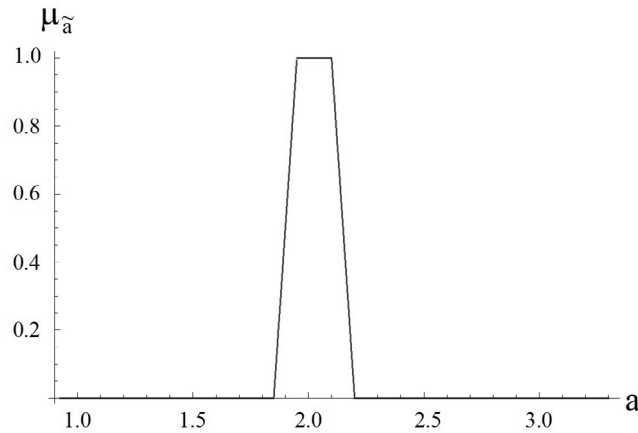


Рис. 1. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики \tilde{a} .

Полученные оценки, в частности, позволяют сделать вывод об увеличении степени разброса показателя концентрации в зоне действия растягивающих контурных напряжений для точек участка границы отверстия, лежащих на ортогональном направлению растяжения координатной оси Ox_2 , в случае, когда эллиптический контур вытянут вдоль направления растяжения. Напротив, степень нечеткости показателя концентрации в контурных точках отверстия при их приближении к точке пересечения контура с осью Ox_1 снижается и разброс его значений полностью отсутствует для положения $\theta = 0^\circ$.

Выводы. В работе представлены результаты исследований по проблеме учета нечеткости геометрических экзогенных характеристик модели получения оценок для показателей концентрации механических напряжений у эллиптических отвер-

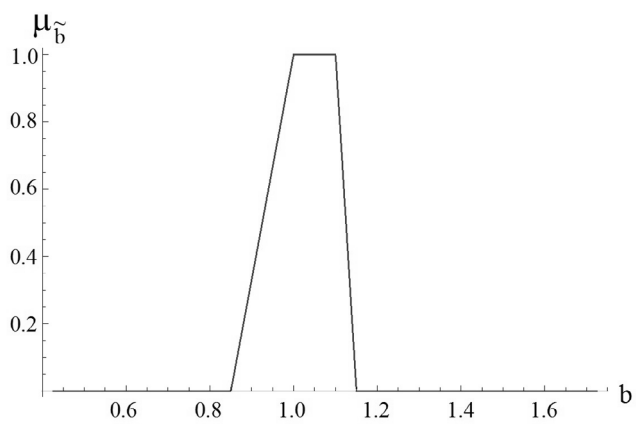


Рис. 2. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики \tilde{b} .

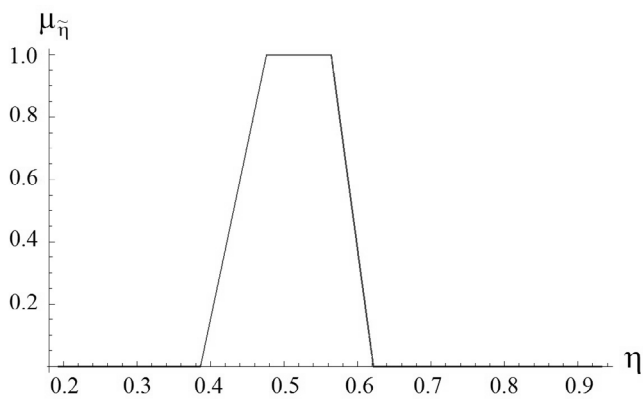


Рис. 3. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\eta}$.

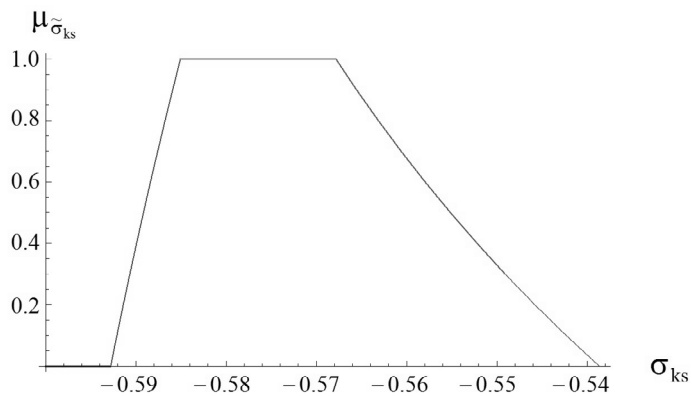


Рис. 4. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\sigma}_{ks}$ для значения параметра $\theta = 5^\circ$

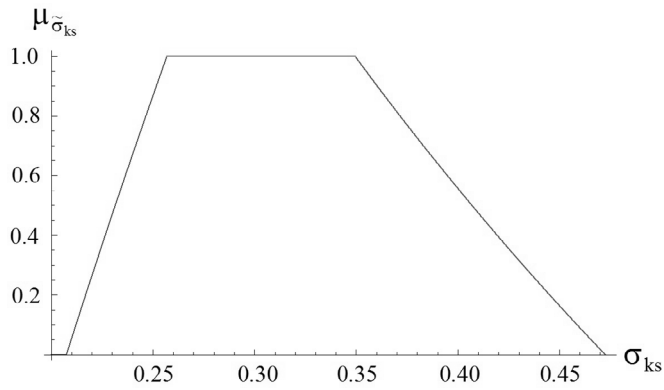


Рис. 5. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\sigma}_{ks}$ для значения параметра $\theta = 30^\circ$

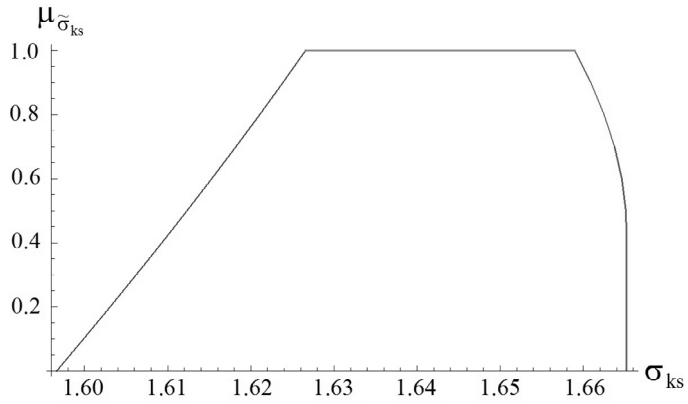


Рис. 6. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\sigma}_{ks}$ для значения параметра $\theta = 60^\circ$

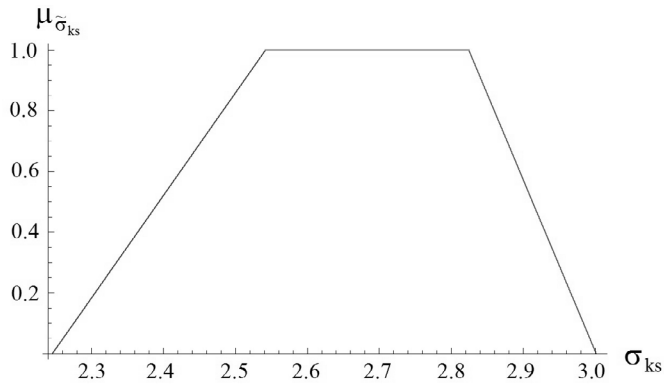


Рис. 7. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\sigma}_{ks}$ для значения параметра $\theta = 90^\circ$

ствий нечеткого очертания в растягиваемых тонких ортотропных пластинах. Получены аналитические представления для расчета функции принадлежности нечеткого множества, описывающего характер и величину разброса показателя концентрации для различных характеризуемых угловым параметром точек контура отверстия. Получены и проиллюстрированы результаты численной реализации разработанной методики для частного варианта задания нечетких геометрических параметров рассматриваемой задачи. Результаты работы могут быть использованы при определении запасов прочности обладающих конструкционной анизотропией орторомбической системы тонкостенных многосвязных плоских элементов с отверстиями.

1. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов. / С.А. Прохоров. – Самара: СГАУ, 2001. – 329 с.
2. Пугачев В.С. Теория вероятности и математическая статистика. / В.С. Пугачев. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.
3. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. / А.А. Свешников. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
4. Schueller G.I. Computational stochastic mechanics recent advances / G.I. Schueller. // Comput. and Struct. – 2001. – Vol. 79, no. 22-25. – P. 2225–2234.
5. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. / В.В. Болотин. – М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965. – 208 с.
6. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1982. – 352 с.
7. Болотин В.В. Применение метода статистического моделирования для оценки сейсмического риска конструкций / В.В. Болотин, В.П. Радин, В.П. Чирков. // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 1997. – № 6. – С. 168–175.
8. Волков С.Д. Статистическая теория прочности. / С.Д. Волков. – М.: Машгиз, 1960. – 173 с.
9. Волков С.Д. Статистическая механика композитных материалов. / С.Д. Волков, В.П. Ставров. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 208 с.
10. Гончаренко В.Н. Вариационная формулировка линейных стохастических краевых задач теории упругости / В.Н. Гончаренко. // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 6. – С. 10–14.
11. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. / И.А. Кунин. – М.: Наука, 1975. – 415 с.
12. Лавренюк В.И. Распределение напряжений около кругового отверстия в плоскости из стохастически неоднородного материала / В.И. Лавренюк. // Прикладная механика. – 1973. – Т. IX, Вып. 4. – С. 128–132.
13. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. / В.А. Ломакин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
14. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. / Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1981. – 142 с.
15. Марасанов А.И. К вопросу о стохастическом анализе упругих систем / А.И. Марасанов. // Вестник МИИТ. – 2003. – № 9. – С. 121–125.
16. Попов Н.Н. Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием / Н.Н. Попов. // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ. мат. науки. – 2008. – № 2(17). – С. 126–132.
17. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. / Т.Д. Шермергор. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
18. Radu V. Stochastic Modeling of Thermal Fatigue Crack Growth – Springer: Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2015. – XIV, ISBN 978-3-319-12876-4, ISBN 978-3-319-12877-1 (eBook) – (Applied Condition Monitoring, Vol. 1). – 90 p.
19. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.

20. Диллигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. / Н.В. Диллигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: «Издательство Машиностроение - 1», 2004. – 397 с.
21. Ротштейн А.П. Нечеткая надежность алгоритмических процессов. / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба. – Винница: Континент-ПРИМ, 1997. – 142 с.
22. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. / А.С. Космодамианский. – К.: Вища школа, 1976. – 200 с.
23. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г.Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1968. – 887 с.

S.B. Nombre, S.A. Priyenko, S.V. Storozhev

Estimations of influence of uncertainty of geometric exogenous parameters in model of stretching of orthotropic plate with elliptic hole.

On the basis of the concept of application of the modified heuristic principle of generalization of the theory of fuzzy sets to models of physicommechanical processes with uncertainty exogenous parameters, a variant of the method for obtaining fuzzy estimates for the stress concentration indices for the contour of elliptical holes in a non-contrasting outline in stretch thin orthotropic plates is proposed and a number of results of its realization are described.

Keywords: *models of elastic deformation, uncertainty of exogenous parameters, fuzzy estimates of the concentration of mechanical stresses in elliptical openings with non-contrasting outline in thin plates, use of the modified heuristic generalization principle, numerical estimates of uncertainty indicators..*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
Sergey5@i.ua

Получено 19.03.17

УДК 539.3:534.1

©2017. И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ

Волновое движение описывается на основе полной системы уравнений линейной динамической теории упругости. Модули упругости и плотность материала цилиндра задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Общее решение системы дифференциальных уравнений модели построено для произвольного окружного волнового числа в матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решения в равномерно и по норме сходящиеся ряды по обобщенной кольцевой координате. Получены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник неосесимметричных нормальных волн для случаев свободного или жестко закрепленного цилиндра. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы; полый цилиндр; распространение волн; цилиндрически-ортотропный; дисперсионные кривые, фазовые скорости, групповые скорости.

1. Введение. При решении задачи о распространении нормальных упругих волн в цилиндрически-ортотропном сплошном или полом цилиндре вопрос сводится к построению общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В классическом случае однородного изотропного или трансверсально-изотропного материала эти уравнения разрешимы через цилиндрические функции, что становится невозможным при понижении степени анизотропии упругих свойств материала либо переходе к рассмотрению нового поколения функционально-градиентных материалов. Для цилиндрически ортотропного однородного цилиндра плодотворным оказался подход, основанный на привлечении в случае сплошного цилиндра аппарата обобщенных рядов [1], а в случае полого цилиндра – рядов по обобщенной радиальной координате [2, 3]. Указанные подходы получили обобщение на случай неоднородных цилиндров, обеспечив возможность построения общих аналитических решений указанной системы дифференциальных уравнений при задании специального вида функционального закона радиального изменения физико-механических характеристик материала волновода. Таким способом построены в аналитическом виде общие решения модели и исследования эффектов влияния фактора радиальной неоднородности материала на топологию дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн в полых трансверсально-изотропных цилиндрах [4-7] и сплошных цилиндрически ортотропных цилиндрах [8]. В данной работе методика построения общих решений модели, описывающей распространение нормальных упругих волн вдоль протяженных цилиндров кольцевого сечения, изготовленных из радиально

неоднородных трансверсально изотропных материалов, распространена на случай цилиндрически ортотропного материала волновода.

2. Постановка задачи. Рассматривается волновод в форме протяженного цилиндра концентрического кольцевого сечения с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 . Область волновода занимает в отнесенных к нормирующему параметру R_* ($R_1 \leq R_* \leq R_2$) безразмерных цилиндрических координатах $Or\theta z$ область

$$V = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*]; \theta \in [0, 2\pi]; z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Вводится безразмерный параметр $h = \max\{1 - R_1/R_*, R_2/R_* - 1\}$ ($0 < h < 1$) такой, что

$$V \subseteq \{r \in [1 - h, 1 + h]; \theta \in [0, 2\pi]; z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Ось симметрии цилиндрически-ортотропного материала волновода совпадает с осью цилиндра.

Задача анализа спектров и свойств нормальных упругих волн вдоль рассматриваемого волновода формулируется в системе нормированных безразмерных цилиндрических координат с использованием соотношений пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами, которые включают систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

определяющие соотношения обобщенного линейного закона Гука для случая цилиндрически-ортотропного материала

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \varepsilon_{rr} + c_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \varepsilon_{rr} + c_{22} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{23} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \varepsilon_{rr} + c_{23} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44} \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = c_{55} \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = c_{66} \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (2)$$

уравнения связи между отнесенными к нормирующему параметру R_* проекциями на оси цилиндрической системы координат безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений (u_r, u_θ, u_z) и компонентами тензора малых деформаций $(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta})$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1} u_r + r^{-1} \partial_\theta u_\theta, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1} \partial_\theta u_z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z, \\ \varepsilon_{r\theta} &= r^{-1} \partial_\theta u_r + (\partial_r - r^{-1}) u_\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Представленная модель включает граничные условия на внутренней Γ_1 и внешней Γ_2 поверхностях волновода, которые в случае жестко закрепленного или свободного цилиндра соответственно имеют вид

$$u_r|_{(r,\theta,z)\in\Gamma_j} = u_\theta|_{(r,\theta,z)\in\Gamma_j} = u_z|_{(r,\theta,z)\in\Gamma_j} = 0 \quad (j = \overline{1,2}); \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}|_{(r,\theta,z)\in\Gamma_j} = \sigma_{r\theta}|_{(r,\theta,z)\in\Gamma_j} = \sigma_{rz}|_{(r,\theta,z)\in\Gamma_j} = 0 \quad (j = \overline{1,2}). \quad (5)$$

Во введенных представлениях $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})$ - отнесенные к нормирующему параметру c_* безразмерные характеристики напряженно-деформированного состояния на основных площадках цилиндрической координатной системы; $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ - отнесенные к нормирующему параметру c_* модули упругости цилиндрически-ортотропного материала волновода; ρ - плотность материала волновода; t - время; $\partial_j = \partial/\partial j$ ($j = r, \theta, z, t$);

$$\Gamma_j = \{r = R_j/R_*; \theta \in [0, 2\pi]; z \in (-\infty, \infty)\} \quad (j = \overline{1,2}).$$

Полагается, что материал цилиндра является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность и нормированные модули упругости соответственно описываются представлениями

$$\begin{aligned} \rho &= \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \\ c_j &= \tilde{c}_j \exp(f_{\lambda,q}(r)) \quad (j \in \{11, 12, 13, 22, 23, 33, 44, 55, 66\}), \\ f_{\lambda,q}(r) &= \lambda((r-1)/h)^q. \end{aligned} \quad (6)$$

Параметры λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) и q ($q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) характеризуют соответственно относительный максимальный уровень и форму локализации в теле волновода функциональной неоднородности материала.

3. Интегрирование уравнений волнового деформирования. В исследуемых нормальных волнах с круговой частотой ω , окружным волновым числом n и нормированным параметром R_* продольным волновым числом \tilde{k} , следуя методу разделения переменных, вводятся комплексные представления

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_r^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z), \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= i\tilde{u}_\theta^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z), \\ u_z(r, \theta, z, t) &= i\tilde{u}_z^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda,q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z). \end{aligned} \quad (7)$$

Последовательная подстановка представлений (6), (7) в соотношения модели (3), (2), (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих компонент безраз-

мерного вектора динамических упругих волновых перемещений $(\tilde{u}_r^{(n)}, \tilde{u}_\theta^{(n)}, \tilde{u}_z^{(n)})$

$$\begin{aligned}
 & \left(\tilde{c}_{11} (r^2 d_r^2 + r d_r) - \tilde{c}_{22} - n^2 \tilde{c}_{66} + \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55} \right) r^2 + \right. \\
 & \left. + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left((1 - q r - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2) \tilde{c}_{11} / 2 + (r-1) \tilde{c}_{12} \right) \right) \tilde{u}_r^{(n)} - \\
 & - n \left((\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / 2 - (\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}) \right) \tilde{u}_\theta^{(n)} - \\
 & - \tilde{k} r \left((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / 2 + \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23} \right) \tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\
 & n \left((\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r - \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / 2 + \tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66} \right) \tilde{u}_r^{(n)} + \\
 & + \left(\tilde{c}_{66} (r^2 d_r^2 + r d_r - 1) - n^2 \tilde{c}_{22} + \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right) r^2 + \right. \\
 & \left. + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} (3 - (q+2)r - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2) \tilde{c}_{66} / 2 \right) \tilde{u}_\theta^{(n)} - \\
 & - \tilde{k} n (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) r \tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\
 & \tilde{k} r \left((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) r d_r + \tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{55} - \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / 2 \right) \tilde{u}_r^{(n)} - \\
 & - \tilde{k} n (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) r \tilde{u}_\theta^{(n)} + \left(\tilde{c}_{55} (r^2 d_r^2 + r d_r) - n^2 \tilde{c}_{44} + \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} \right) r^2 + \right. \\
 & \left. + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} (1 - q r - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2) \tilde{c}_{55} / 2 \right) \tilde{u}_z^{(n)} = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\Omega^2 = \tilde{\rho} R_*^2 \omega^2 / c_*$, $d_r = d/dr$. Базисные решения уравнений (8) после введения замены переменных

$$\begin{aligned}
 r &= hx + 1, \quad x \in [x_0, x_1], \\
 x_0 &= -(1 - R_1/R_*)/h \geq -1, \quad x_1 = (R_2/R_* - 1)/h \leq 1
 \end{aligned} \tag{9}$$

строится в виде рядов по обобщенной кольцевой координате [2, 6]. С учетом свойств физической составляющей модели рассматриваемой задачи для искомых решений вводятся представления

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_r^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\delta}, \quad \tilde{u}_\theta^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m+\delta}, \\
 \tilde{u}_z^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^{m+\delta} \quad (|a_0| + |b_0| + |d_0| \neq 0)
 \end{aligned} \tag{10}$$

в которых на значения параметра δ накладываются ограничения: $\delta \in \{0, 1\}$ либо $\text{Re}(\delta) > 1$. После подстановки разложений (10) в уравнения (8) получается система рекуррентных уравнений относительно коэффициентов разложений (10). Для каждого окружного волнового числа n указанная система рекуррентных уравнений имеет шесть различных решений, порождающих соответственно шесть независимых базисных решений уравнений (8), допускающих в свою очередь объединение в два независимые матричные базисные решения следующего вида:

$$\mathbf{U}^{(n, \delta)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+\delta} \mathbf{X}_m^{(n, \delta)} \quad (\delta = \overline{0, 1}), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_0^{(n,0)} &= \mathbf{X}_0^{(n,1)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{X}_1^{(n,0)} = \mathbf{O}, \\
 \mathbf{X}_1^{(n,1)} &= \begin{bmatrix} -h/2 & nh(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/2\tilde{c}_{11} & \tilde{k}h(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})/2\tilde{c}_{11} \\ -nh(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/2\tilde{c}_{66} & -h/2 & 0 \\ -\tilde{k}h(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})/2\tilde{c}_{55} & 0 & -h/2 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{X}_m^{(n,\delta)} &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)} \cdot \mathbf{X}_{m-j}^{(n,\delta)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(n,\delta)} \cdot \mathbf{X}_{m-q-j}^{(n,\delta)} + \\
 &+ \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(n,\delta)} \cdot \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(n,\delta)} \quad (m = 2, 3, \dots), \quad (\delta = \overline{0, 1}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь использованы обозначения для квадратных матричных объектов размерности 3: \mathbf{E} – единичная матрица; \mathbf{O} – нулевая матрица; $\mathbf{X}_j^{(n,\delta)} = \mathbf{O}$ ($\delta = \overline{0, 1}$; $j = \overline{-\max(2, 2q), -1}$); $\mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)}$ ($\delta = \overline{0, 1}$; $m = \overline{2, \infty}$; $j = \overline{1, 11}$) – матрицы, ненулевые элементы которых имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)}]_{1,1} &= [\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)}]_{2,2} = [\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)}]_{3,3} = -h(2m + 2\delta - 3)/(m + \delta), \\
 [\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)}]_{1,2} &= nh(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/((m + \delta)\tilde{c}_{11}), \\
 [\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)}]_{2,1} &= -nh(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/((m + \delta)\tilde{c}_{66}), \\
 [\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)}]_{1,3} &= \tilde{k}h(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})/((m + \delta)\tilde{c}_{11}), \\
 [\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)}]_{3,1} &= -\tilde{k}h(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})/((m + \delta)\tilde{c}_{55}), \\
 [\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)}]_{1,1} &= -h^2 \left((m + \delta - 2)^2 \tilde{c}_{11} + \Omega^2 - \tilde{c}_{22} - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55} - n^2 \tilde{c}_{66} \right) / \\
 &\quad / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{11}), \\
 [\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)}]_{2,2} &= -h^2 \left((m + \delta - 3)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{66} + \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} - n^2 \tilde{c}_{22} \right) / \\
 &\quad / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{66}), \\
 [\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)}]_{3,3} &= -h^2 \left((m + \delta - 2)^2 \tilde{c}_{55} + \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} - n^2 \tilde{c}_{44} \right) / \\
 &\quad / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{55}), \\
 [\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)}]_{1,2} &= nh^2 \left((m + \delta - 2)\tilde{c}_{12} + (m + \delta - 3)\tilde{c}_{66} - \tilde{c}_{22} \right) / \\
 &\quad / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{11}), \\
 [\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)}]_{2,1} &= -nh^2 \left((m + \delta - 2)\tilde{c}_{12} + (m + \delta - 1)\tilde{c}_{66} + \tilde{c}_{22} \right) /
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & /((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \tilde{k}h^2 ((2m + 2\delta - 3)\tilde{c}_{13} + 2(m + \delta - 2)\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{23}) / \\
 & /((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -\tilde{k}h^2 (2(m + \delta - 2)\tilde{c}_{13} + (2m + 2\delta - 3)\tilde{c}_{55} + \tilde{c}_{23}) / \\
 & /((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{2,3} &= \tilde{k}nh^2 (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,2} &= \tilde{k}nh^2 (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -2h^3 (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{55}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -2h^3 (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -2h^3 (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{33}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \tilde{k}h^3 ((m + \delta - 2)\tilde{c}_{13} + (m + \delta - 3)\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{23}) / \\
 & /((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -\tilde{k}h^3 ((m + \delta - 3)\tilde{c}_{13} + (m + \delta - 2)\tilde{c}_{55} + \tilde{c}_{23}) / \\
 & /((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{2,3} &= \tilde{k}nh^3 (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,2} &= \tilde{k}nh^3 (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -h^4 (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{55}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -h^4 (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{44}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -h^4 (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{33}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = -\lambda q(q - 1) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \lambda qh ((2q - 1)\tilde{c}_{11} - 2\tilde{c}_{12}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1)\tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= \lambda qh (2q + 1) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= \lambda q h (2q - 1) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tilde{k} h (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= \lambda q \tilde{k} h (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q \tilde{k} h (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q \tilde{k} h (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \lambda q h^2 (q \tilde{c}_{11} - 2 \tilde{c}_{12}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= \lambda q h^2 (q + 2) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= \lambda q^2 h^2 / (2(m + \delta)(m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= \lambda q n h^2 (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= \lambda q n h^2 (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{66}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q \tilde{k} h^2 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q \tilde{k} h^2 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / ((m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,8}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q \tilde{k} h^3 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{11}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,8}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q \tilde{k} h^3 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{55}) / (2(m + \delta)(m + \delta - 1) \tilde{c}_{55}), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 / (4(m + \delta)(m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 h / (2(m + \delta)(m + \delta - 1)), \\
 \left[\mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[\mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 h^2 / (4(m + \delta)(m + \delta - 1)).
 \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнений (8) с использованием двух базисных решений (11) записывается в виде

$$\left[\tilde{u}_r^{(n)}(x), \tilde{u}_\theta^{(n)}(x), \tilde{u}_z^{(n)}(x) \right]^T = \mathbf{U}^{(n,0)}(x) \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{U}^{(n,1)}(x) \cdot \mathbf{P}_2, \quad (13)$$

где $\mathbf{P}_1 = [p_1, p_2, p_3]^T$, $\mathbf{P}_2 = [p_4, p_5, p_6]^T$, p_j ($j = \overline{1,6}$) произвольные постоянные.

По аналогии с (7) вводятся представления

$$\begin{aligned}\sigma_j(r, \theta, z, t) &= \tilde{\sigma}_j^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda, q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z) \\ &\quad (j = rr, \theta\theta, zz, \theta z), \\ \sigma_j(r, \theta, z, t) &= i\tilde{\sigma}_j^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda, q}(r)/2) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z) \\ &\quad (j = rz, r\theta)\end{aligned}\tag{14}$$

и на основании (2), (3), (7), (11), (13) с учетом замены переменных (9) определяются два базисных матричных решения

$$\mathbf{S}^{(n, \delta)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+\delta} \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \cdot \mathbf{X}_m^{(n, \delta)} \quad (\delta = 0, 1)\tag{15}$$

для представления амплитудных составляющих компонент безразмерного тензора напряжений

$$\begin{aligned}\left[\tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(x) \right]^T = \\ = \mathbf{S}^{(n, 0)}(x) \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{S}^{(n, 1)}(x) \cdot \mathbf{P}_2.\end{aligned}$$

В (15) $\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x)$ - матричные функции размерности 6×3 , элементы которых имеют вид

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{1,1} &= ((m + \delta)/x - \lambda q x^{q-1}/2) \tilde{c}_{11}/h + \tilde{c}_{12}/(hx + 1), \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{1,2} &= -n\tilde{c}_{12}/(hx + 1), \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{1,3} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{13}, \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{2,1} &= ((m + \delta)/x - \lambda q x^{q-1}/2) \tilde{c}_{12}/h + \tilde{c}_{22}/(hx + 1), \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{2,2} &= -n\tilde{c}_{22}/(hx + 1), \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{2,3} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{23}, \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{3,1} &= ((m + \delta)/x - \lambda q x^{q-1}/2) \tilde{c}_{13}/h + \tilde{c}_{23}/(hx + 1), \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{3,2} &= -n\tilde{c}_{23}/(hx + 1), \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{3,3} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{33}, \\ \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{4,1} &= 0, \quad \left[\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{4,2} = -\tilde{k}\tilde{c}_{44},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{4,3} &= -n\tilde{c}_{44}/(hx+1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{5,1} &= \tilde{k}\tilde{c}_{55}, \quad \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{5,2} = 0, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{5,3} &= ((m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2) \tilde{c}_{55}/h, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{6,1} &= n\tilde{c}_{66}/(hx+1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{6,2} &= ((m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2) \tilde{c}_{66}/h - \tilde{c}_{66}/(hx+1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(n,\delta)}(x) \right]_{6,3} &= 0.
 \end{aligned}$$

Специальный вид представлений для функций нормированных упругих перемещений в форме (7) обуславливает при $m \rightarrow \infty$ справедливость асимптотических оценок для матричных коэффициентов рекуррентных уравнений (11)

$$\begin{aligned}
 \left\| \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} + 2h\mathbf{E} \right\| &\leq \kappa_1/m, \quad \left\| \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} + h^2\mathbf{E} \right\| \leq \kappa_2/m, \quad \left\| \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right\| \leq \kappa_3/m, \\
 \left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)} \right\| &\leq \kappa_j/m^2 \quad (j = \overline{4, 11}),
 \end{aligned}$$

непосредственным следствием которых является асимптотическое представление для рекуррентных соотношений (12) в виде

$$\mathbf{X}_m^{(n,\delta)} = -2h\mathbf{X}_{m-1}^{(n,\delta)} - h^2\mathbf{X}_{m-2}^{(n,\delta)}. \quad (16)$$

Характеристическое уравнение для (16) $\zeta^2 + 2h\zeta + h^2 = 0$ имеет кратный корень $\zeta = -h$, определяющий для разложений (11), (15) радиус сходимости $h^{-1} > 1$, следовательно, указанные разложения на отрезке $x \in [-1, 1]$ сходятся равномерно и по норме [9].

4. Дисперсионные соотношения. С целью построения дисперсионных соотношений для амплитудных составляющих компонент безразмерного тензора напряжений на площадках цилиндрических граничных поверхностей волновода вводится представление

$$\left[\tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(x) \right]^T = \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,0)}(x) \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,1)}(x) \cdot \mathbf{P}_2, \quad (17)$$

где $\mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,\delta)}(x)$ - квадратные матричные функции размерности 3, составленные из соответствующих строк базисных матричных решений $\mathbf{S}^{(n,\delta)}(x)$. Подстановка представлений (7), (11), (13) или (14), (15), (17) в граничные условия соответственно (4) или (5) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений шестого порядка относительно произвольных постоянных p_j ($j = \overline{1, 6}$), порождающей искомые дисперсионные уравнения, соответственно для жестко закрепленного

$$F_U(\Omega, \tilde{k}) = \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(n,0)}(x_0) & \mathbf{U}^{(n,1)}(x_0) \\ \mathbf{U}^{(n,0)}(x_1) & \mathbf{U}^{(n,1)}(x_1) \end{bmatrix} \right) = 0$$

или свободного

$$F_S(\Omega, \tilde{k}) = \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,0)}(x_0) & \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,1)}(x_0) \\ \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,0)}(x_1) & \mathbf{S}_{(cyl)}^{(n,1)}(x_1) \end{bmatrix} \right) = 0$$

цилиндра.

5. Анализ результатов численного эксперимента. В качестве объекта для численного исследования факторов влияния параметров радиальной неоднородности (λ, q) и значений окружного волнового числа n на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн был выбран полый свободный цилиндр, толщина стенок которого составляет треть его внутреннего радиуса, изготовленный из радиально неоднородного цилиндрически-ортотропного материала, базовые нормированные модули упругости $\{\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{13}, \tilde{c}_{22}, \tilde{c}_{23}, \tilde{c}_{33}, \tilde{c}_{44}, \tilde{c}_{55}, \tilde{c}_{66}\}$ в представлениях (6) для которого соответствуют однородному цилиндрически-ортотропному материалу с нормированными характеристиками [10] $\tilde{E}_1 = 43/24$, $\tilde{E}_2 = 179/24$, $\tilde{E}_3 = 131/24$, $\tilde{G}_{23} = 28/24$, $\tilde{G}_{13} = 1$, $\tilde{G}_{12} = 1$, $\nu_{23} = 0.15$, $\nu_{12} = 0.08$, $\nu_{13} = 0.102$.

Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных волн в полом свободном цилиндре проводился для окружного волнового числа $n = 1$ в диапазонах изменения нормализованной частоты $\omega a/c_t \in [0; 30]$ и нормализованного продольного волнового числа $ka \in [0; 40]$ ($a = R_2$) для случаев однородного $(\lambda, q) = (0, 0)$ и неоднородного $(\lambda, q) \in \{(-\ln(2), 6), (\ln(3/2), 6)\}$ материала цилиндра со свободными граничными поверхностями. Нормирующий параметр c_t с размерностью скорости для всех рисунков представленного исследования имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты (мода с порядковым номером в спектре 2) в случае однородного материала волновода $(\Omega_{0,0}^{(2)}(0) \approx 1.2385$ при $R_* = R_2)$. Для исследования влияния на спектральную картину характера локализации в теле цилиндра неоднородности материала численный эксперимент проводился для случаев: $R_* = R_1$ ($r \in [1, 4/3]$, $h = 1/3$, $x \in [0, 1]$), характеризующегося зоной локализации неоднородности у внешней поверхности цилиндра; $R_* = R_2$ ($r \in [3/4, 1]$, $h = 1/4$, $x \in [-1, 0]$), характеризующегося зоной локализации неоднородности у внутренней поверхности цилиндра. При этом для $\lambda = -\ln(2)$ в зоне локализации имело место уменьшение на 50% физико-механических характеристик материала, а для $\lambda = \ln(3/2)$ - на те же 50% увеличение.

Ниже представлены спектры распространяющихся нормальных волн для неоднородных волноводов с параметрами неоднородности $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ и $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ в случаях локализации неоднородности у внешней (соответственно рис. 1 и рис. 2) и внутренней (соответственно рис. 3 и рис. 4) поверхностей цилиндра.

Сравнительный анализ представленных спектров показывает относительную стабильность общей качественной топологической картины мод распространяющихся волн, при этом отмечается локальное количественное влияние на характер поведения отдельных мод, в большей мере зависящее от относительного максимального уровня локализации (рис. 1 – рис. 2 и рис. 3 – рис. 4), чем от зоны локализации (рис. 1

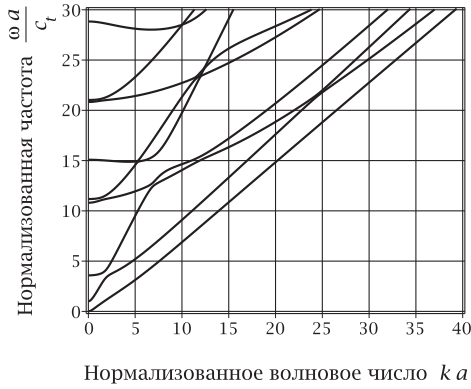


Рис. 1.

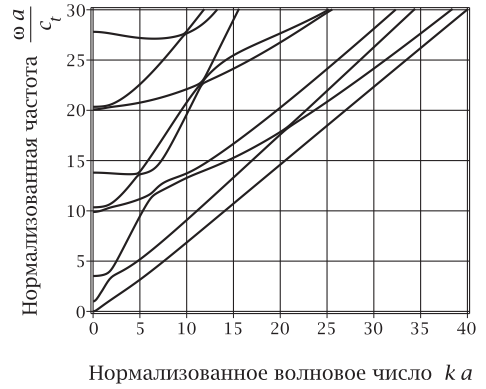


Рис. 2.

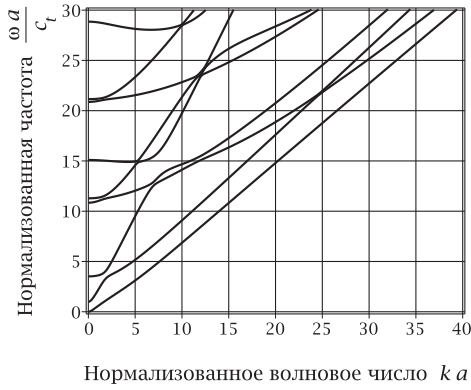


Рис. 3.

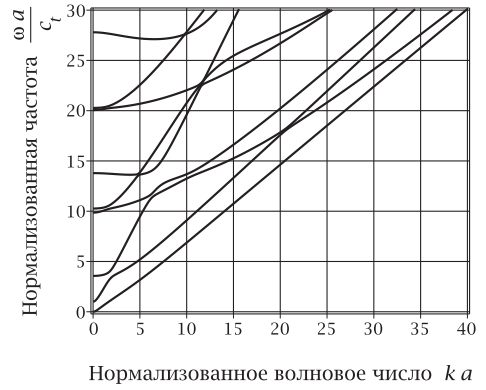


Рис. 4.

– рис. 3 и рис. 2 – рис. 4). Для анализа указанных количественных различий полученных спектров используется функция сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод $\Delta\Omega(k) = (\omega_{\lambda,q}(k) - \omega_{0,0}(k)) a/c_t$. Результаты для участвующих в сравнении пар волноводов "однородный – неоднородный цилиндр" представлены для пяти нижших мод, порядковый номер сопоставляемых мод визуализировался уникальным в рамках рисунка типом линии. Ниже приведены результаты сравнений для пар волноводов, когда неоднородный материал цилиндра в соответствующей паре задавался параметрами $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ и $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ в случаях локализации неоднородности у внешней (соответственно рис. 5 и рис. 6) и внутренней (соответственно рис. 7 и рис. 8) поверхностей цилиндра. Представлены также графики нормализованных фазовых (рис. 9 и рис. 10) и групповых (рис. 11 и рис. 12) скоростей бегущих нормальных волн в неоднородных цилиндрах с параметрами неоднородности соответственно $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ и $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ для случая локализации неоднородности у внутренней поверхности волновода.

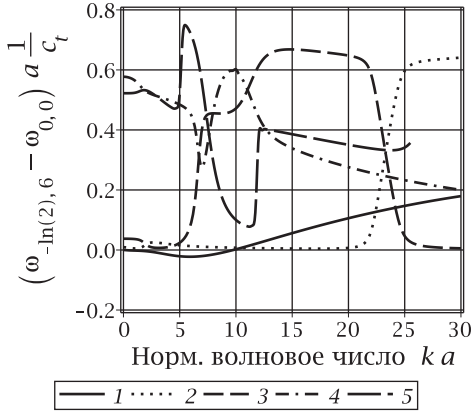


Рис. 5.

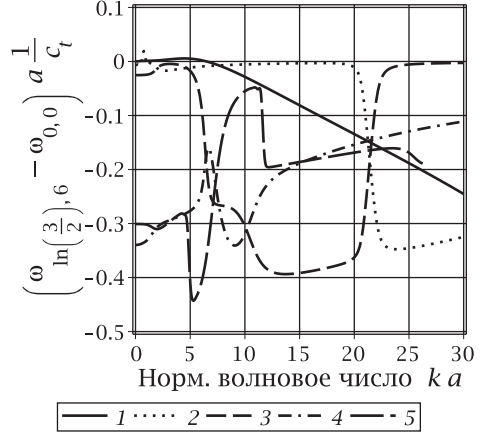


Рис. 6.

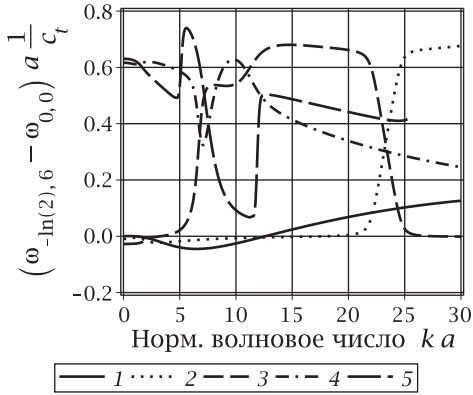


Рис. 7.

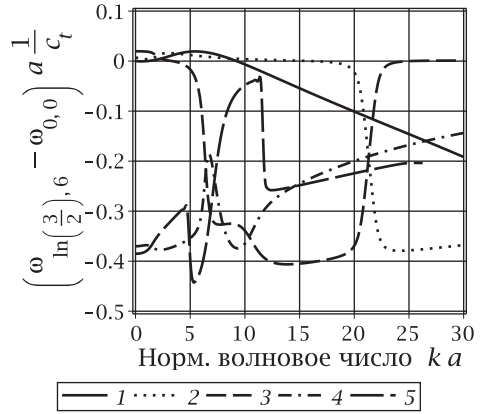


Рис. 8.

В качестве основных результатов отмечается, что изменение, как относительного максимального уровня локализации ($\lambda = 0$, $\lambda = -\ln(2)$, $\lambda = \ln(3/2)$), так и зоны локализации ($R_* = R_1$, $R_* = R_2$) практически не сказались на поведении трех низших мод в длинноволновом диапазоне $ka \in [0; 5]$, при этом диапазон изменения нормализованного волнового числа, в котором различий в поведении двух низших мод практически не наблюдалось, оказался зависимым от указанных факторов: $ka \in [0; 10]$ для $\lambda = -\ln(2)$, $R_* = R_1$ и $\lambda = \ln(3/2)$, $R_* = R_2$; $ka \in [0; 8]$ для $\lambda = \ln(3/2)$, $R_* = R_1$; $ka \in [0; 12]$ для $\lambda = -\ln(2)$, $R_* = R_2$. На старшие моды влияние указанных факторов существенным образом сказались на всем исследованном диапазоне изменения нормализованного волнового числа, и проявилось это в первую очередь в системном смещении указанных мод в область меньших

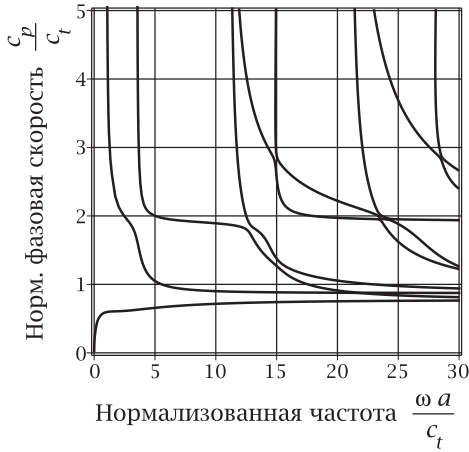


Рис. 9.

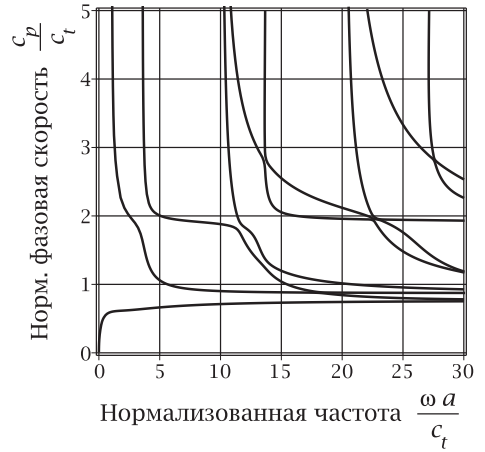


Рис. 10.

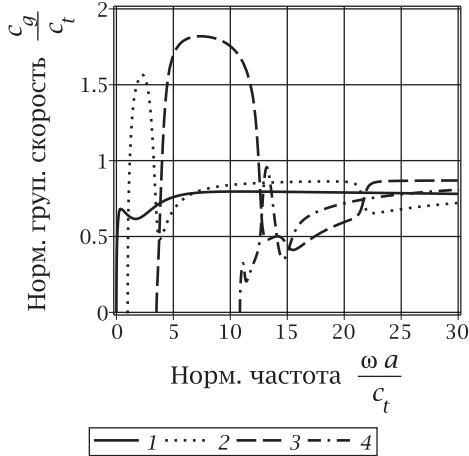


Рис. 11.

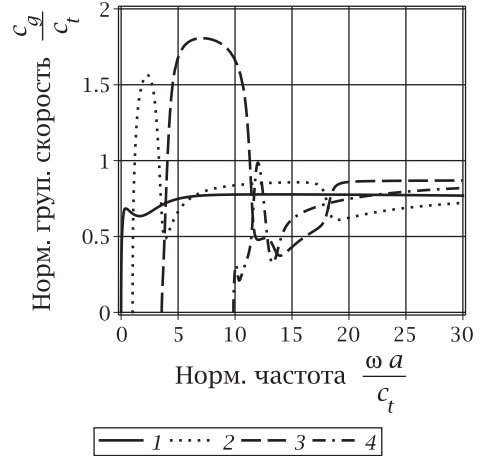


Рис. 12.

частот при локальном увеличении физико-механических характеристик материала ($\lambda = \ln(3/2)$) и соответственно в область больших частот при локальном уменьшении физико-механических характеристик материала ($\lambda = -\ln(2)$). Наибольшее влияние параметров радиальной неоднородности на картину распределения нормализованных фазовых и групповых скоростей выявлено для мод начиная с третьей в среднем частотном диапазоне изменения нормализованной частоты $\omega a/c_t \in [10; 25]$.

Выводы. В форме равномерно и по норме сходящихся степенных рядов с определяемыми из явных рекуррентных соотношений матричными коэффициентами построено общее решение системы дифференциальных уравнений модели, описываю-

щей неосесимметричные нормальные волны в протяженных полых цилиндрах концентрического кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью физико-механических параметров цилиндрически-ортотропного материала, получены дисперсионные соотношения, определяющие спектры указанных волн для случаев свободного и жестко закрепленного цилиндра. Изучены эффекты влияния характера размещения зоны локализации неоднородности и относительного максимального уровня неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой диагностики, акустоэлектроника.

1. *Новицкий Д.Л.* Распространение продольных волн в стержне, обладающем цилиндрической ортотропией / Д.Л. Новицкий // Конструирование и технологии машиностроения. – 1967. – № 3. – С. 33–38.
2. *Шульга Н.А.* Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 9. – С. 14–18.
3. *Рамская Е.И.* Распространение неосесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Е.И. Рамская, Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 9–13.
4. *Моисеенко И.А.* Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132–139.
5. *Моисеенко И.А.* Спектры продольных волн в функционально-градиентных трансверсально-изотропных цилиндрах с жидкостным заполнением / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 17–28.
6. *Моисеенко И.А.* Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально-изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 106–118.
7. *Моисеенко И.А.* Распространение нормальных волн в трансверсально-изотропном радиально-неоднородном полом цилиндре с секторным вырезом / И.А. Моисеенко, Вит.В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 4. – С. 31–45.
8. *Моисеенко И.А.* Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
10. *Шульга Н.А.* Распространение неосесимметричных упругих волн в анизотропном полом цилиндре. / Н.А. Шульга, А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова. // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22. – № 8. – С. 118–121.

I.A. Moiseyenko, S.A. Priymenko, V.A. Shaldyrvan

Non-axisymmetric normal elastic waves in functionally graded orthotropic hollow cylinders.

The wave motion is described on the basis of a complete system of linear dynamical equations of elasticity theory. The elastic modules and density of the cylinder material are taken as an exponentially-power function of the radial coordinate. The general solution of a system of differential equations of the model is constructed for an arbitrary wavenumber circular in the matrix forms as a expansions of radial

components of the solution in matrix series, that converges a uniformly and at the norm. Dispersion relations describing the harmonic spectra of non-axisymmetric normal waves for cases of free or rigidly fixed cylinder are obtained. The effect of radial non-homogeneity ratios on the topology of the dispersion spectrums, distribution of the phase and group velocities of normal propagating waves studied.

Keywords: *FGMs; cylindrically orthotropic; hollow cylinder; wave propagation; dispersion curves; phase velocities; group velocities.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
mian@i.ua

Получено 19.09.16

УДК 539.3

©2017. Р.Н. Нескорюдев

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ВЯЗКОУПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В работе предложено решение задач изгиба вязкоупругих изотропных плит в уточненной постановке. Метод решения основан на преобразовании интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к временным уравнениям закона Гука. Проведены численные исследования напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптическим отверстием.

Ключевые слова: вязкоупругость, изгиб, плита, эллиптическая полость.

1. Введение. В работах [1-4] предложен метод решения задач теории вязкоупругости для пластин, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Метод основан на построении матриц коэффициентов уравнений закона Гука исходя из интегральных уравнений состояния. Элементы этих матриц зависят от времени, что позволяет решать задачи вязкоупругости в любой заданный момент времени как обычные задачи теории упругости.

В работах [5, 6] предложен метод решения упругих задач теории изгиба изотропных плит с отверстиями в уточненной постановке. Предположения, на основе которых строится эта теория, основаны на сравнении выражений для поперечных усилий, полученных интегрированием напряжений σ_4 и σ_5 , заданных различными соотношениями. Строится решение бигармонического и метагармонического уравнений уточненной теории изгиба изотропных плит. Решение выражено через произвольные функции обобщенных комплексных переменных [7,8]. Это позволяет проводить численные исследования для изотропных и анизотропных тел по одним и тем же алгоритмам. Точное решение метагармонического уравнения представляется через модифицированные функции Бесселя и является пригодным для исследования краевых задач с границами, близкими к круговым.

В настоящей работе указанный метод решения задач вязкоупругости предлагается использовать для решения задач уточненной теории изгиба изотропных плит с отверстиями близкими к круговым при длительном воздействии внешних усилий.

2. Уравнения состояния. Функции ползучести и релаксации. Рассмотрим упругое равновесие анизотропного тела, отнесенного к системе координат $Ox_1x_2x_3$. Для определения перемещений, напряжений и деформаций, возникающих в теле при его длительном нагружении внешними усилиями, используются интегральные уравнения состояния, учитывающие свойства материала деформироваться во времени. Эти уравнения преобразованы к виду [4]

$$s_m(t) = \bar{A}_{mn} e_n(t) = A_{mn} (1 - r_{mn}^*) e_n, \quad r_{mn}^* e_n = - \int_0^t \frac{dr_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_n(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$e_m(t) = \bar{a}_{mn} s_n(t) = a_{mn} (1 + p_{mn}^*) s_n, \quad p_{mn}^* s_n = \int_0^t \frac{dp_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_n(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь принято: $s_m = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6] = \mathbf{s}(t)$, $e_n = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6] = \mathbf{e}(t)$ – векторы напряжений и деформаций в произвольный момент времени t ; $A_{mn} r_{mn}(t) = R_{mn}(t) = \mathbf{R}(t)$ и $a_{mn} p_{mn}(t) = P_{mn}(t) = \mathbf{P}(t)$ ($m, n = \overline{1,6}$) – регулярные части матриц функций релаксации и ползучести. Они характеризуют вязкоупругий материал так же, как их упругие аналоги, матрицы модулей упругости $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A} = A_{mn}$ и коэффициентов деформации $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a} = a_{mn}$ – характеризуют свойства упругого материала.

Уравнения состояния (1) и (2) имеют такой же вид, что и обычный закон Гука, только матрицы упругих постоянных A_{mn} и a_{mn} заменены упругими операторами \bar{A}_{mn} и \bar{a}_{mn} , которые зависят от времени.

Функции $\mathbf{P}(t) = a_{mn} p_{mn}(t)$ и $\mathbf{R}(t) = A_{mn} r_{mn}(t)$ определяются из эксперимента. Опыты на ползучесть и релаксацию осуществляются при одноосном растяжении, сжатии, изгибе или сдвиге. Они являются базовыми экспериментами, которые необходимы для определения ядер ползучести и релаксации. В одномерном случае при одноосном усилии матричное уравнение распадается на отдельные элементы $p_{mn}(t)$ и $r_{mn}(t)$. В задаче эксперимента входит определение этих элементов.

Отметим, что экспериментально найденные данные задаются таблично, дискретным набором значений, соответствующим некоторым фиксированным временам. При использовании таких данных в вычислениях, для обеспечения точности расчетов необходимо осуществить математическую обработку табличных данных. Такая обработка включает в себя сглаживание кривых ползучести или релаксации и восполнение табличных данных путем увеличения числа точек разбиения временного отрезка $[0, t]$. Эти вопросы рассмотрены в работе [3].

Связь между матрицами $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ установлена в работах [1,2]. Имеют место соотношения

$$\mathbf{R}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_{k-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right) \mathbf{A} \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_{k-i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}) \right) \mathbf{a} \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (4)$$

Отметим, что такие же соотношения имеют место и для отдельных элементов матриц $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$.

В представлениях (3) и (4) принято: \mathbf{I} – единичная матрица, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(t_i)$, $\mathbf{P}_{k-i} = \mathbf{P}(t_k - t_i)$, $\mathbf{R}_{k-i} = \mathbf{R}(t_k - t_i)$ – значения функций ползучести и релаксации в соответствующие моменты времени.

С помощью представлений (3) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находим функции релаксации, а с помощью (4) – наоборот.

Опытные данные по ползучести и релаксации, которые позволили бы определить все элементы матриц, входящие в соотношения для $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$, в литературе отсутствуют. Поэтому, для уменьшения числа параметров, находящихся из экспериментов, при решении конкретных задач применяются различные допущения относительно реологического поведения материала. Симметрия матриц $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ показывает, что должны выполняться равенства $P_{ik} = P_{ki}$, $R_{ik} = R_{ki}$. Отсюда следует, что не все параметры должны определяться из эксперимента. В случае изотропно-го материала часто используется допущение об упруго сжимаемом материале. Это позволяет, используя соотношение

$$(1 - 2\nu) / E = (1 - 2\bar{\nu}) / \bar{E}, \quad (5)$$

по заданному интегральному оператору $\bar{\nu}$ определять оператор \bar{E} и наоборот [9].

В работе [4] установлена связь между значениями интегральных операторов p_{mn}^* и r_{mn}^* и функциями ползучести и релаксации $p_{mn}(t)$, $r_{mn}(t)$ соответственно

$$p_{mn}^* = p_{mn}(t) - 1, \quad r_{mn}^* = 1 - r_{mn}(t).$$

Рассмотрим случай, когда из эксперимента на ползучесть определена матрица функций ползучести $P_{mn}(t) = a_{mn}p_{mn}(t)$. Тогда уравнения состояния (2) и (1) принимают вид

$$\begin{aligned} e_m(t) &= \bar{a}_{mn}s_n(t) = a_{mn}(1 + p_{mn}^*)s_n(t) = a_{mn}p_{mn}(t)s_n(t), \\ s_m(t) &= [a_{mn}p_{mn}(t)]^{-1}e_n(t). \end{aligned}$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда из эксперимента на релаксацию определена матрица функций релаксации $R_{mn}(t) = A_{mn}r_{mn}(t)$. В этом случае уравнения состояния (1) и (2) будут такими

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \bar{A}_{mn}e_n(t) = A_{mn}(1 - r_{mn}^*)e_n(t) = A_{mn}r_{mn}(t)e_n(t), \\ e_m(t) &= [A_{mn}r_{mn}(t)]^{-1}s_n(t). \end{aligned}$$

Дальнейшее решение задач теории вязкоупругости в любой заданный момент времени ничем не отличается от решения задач теории упругости.

3. Основные соотношения уточненной теории изгиба изотропных упругих плит. Представим соотношения для напряжений, перемещений, моментов и перерезывающих сил, а также систему дифференциальных уравнений теории изгиба плит, предложенные в работах [5, 6]. Рассмотрим изотропную плиту, имеющую толщину h и отнесенную к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Оси Ox_1 и Ox_2 расположены в срединной плоскости плиты, а Ox_3 нормальна к этой плоскости. Представления для перемещений выбираем в виде

$$u_1 = -x_3 [\partial_1 \varphi(x_1, x_2) - \partial_2 \psi(x_1, x_2)],$$

Метод переменных коэффициентов упругости решения задач изгиба

$$u_2 = -x_3 [\partial_2 \varphi(x_1, x_2) + \partial_1 \psi(x_1, x_2)], \quad u_3 = w(x_1, x_2). \quad (6)$$

Для построения уточненной теории изгиба плит используются уравнения закона Гука в форме [5]

$$\sigma_1 = E_\nu (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = E_\nu (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad \sigma_6 = G \varepsilon_6, \quad \sigma_5 = G \varepsilon_5, \quad \sigma_4 = G \varepsilon_4; \quad (7)$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_2 = \partial_2 u_2, \quad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1, \quad \varepsilon_5 = \partial_3 u_1 + \partial_1 w, \quad \varepsilon_4 = \partial_3 u_2 + \partial_2 w; \quad (8)$$

трехмерные уравнения равновесия без учета объемных сил

$$\partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_6 + \partial_3 \sigma_5 = 0, \quad \partial_1 \sigma_6 + \partial_2 \sigma_2 + \partial_3 \sigma_4 = 0, \quad \partial_1 \sigma_5 + \partial_2 \sigma_4 + \partial_3 \sigma_3 = 0, \quad (9)$$

где $\partial_i = \partial / \partial x_i$, $(i = \overline{1, 3})$, $E_\nu = E / (1 - \nu^2)$, $G = E / [2(1 + \nu)]$.

Заметим, что к первым трем уравнениям закона Гука, являющимся уравнениями классической теории Кирхгофа, здесь добавлены еще два уравнения.

Из соотношений (6) – (9) найдены выражения для напряжений

$$\sigma_1 = x_3 S_1, \quad \sigma_2 = x_3 S_2, \quad \sigma_6 = x_3 S_6, \quad (10)$$

$$\sigma_5 = \frac{h^2}{8} \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) S_5, \quad \sigma_4 = \frac{h^2}{8} \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) S_4, \quad (11)$$

$$\sigma_3 = -\frac{h^2}{8} \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2} + \frac{h}{3} \right) (\partial_1 S_5 + \partial_2 S_4), \quad (12)$$

$$S_1 = -E_\nu [(\partial_1^2 + \nu \partial_2^2) \varphi - (1 - \nu) \partial_1 \partial_2 \psi], \quad S_2 = -E_\nu [(\partial_2^2 + \nu \partial_1^2) \varphi + (1 - \nu) \partial_1 \partial_2 \psi],$$

$$S_6 = -E_\nu (1 - \nu) \left(\partial_1 \partial_2 \varphi + \frac{1}{2} (\partial_1^2 - \partial_2^2) \psi \right), \quad (13)$$

$$S_5 = \partial_1 S_1 + \partial_2 S_6, \quad S_4 = \partial_1 S_6 + \partial_2 S_2.$$

Напряжения статически эквивалентны моментам M_1, M_2, M_6 и перерезывающим силам Q_5 и Q_4

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 x_3 dx_3 = \frac{h^3}{12} S_1, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 x_3 dx_3 = \frac{h^3}{12} S_2, \quad M_6 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 x_3 dx_3 = \frac{h^3}{12} S_6,$$

$$Q_5 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5 dx_3 = \frac{h^3}{12} S_5, \quad Q_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4 dx_3 = \frac{h^3}{12} S_4. \quad (14)$$

Отметим, что представления для напряжений (11) и (12) удовлетворяют граничным условиям на плоских гранях плиты

$$\sigma_5 = \sigma_4 = 0, \quad \sigma_3 = Q \quad \text{при } x_3 = h/2, \quad \text{и} \quad \sigma_5 = \sigma_4 = \sigma_3 = 0 \quad \text{при } x_3 = -h/2,$$

если

$$\partial_1 Q_5 + \partial_2 Q_4 = -Q. \quad (15)$$

Здесь Q – нормальное давление, действующее на пластину.

Касательные напряжения σ_5 и σ_4 через функции перемещений могут быть получены также из уравнений закона Гука (7). С учетом соотношений (6) и (8), находим

$$\sigma_5 = G\varepsilon_5 = G(\partial_1 w - \partial_1 \varphi + \partial_2 \psi), \quad \sigma_4 = G\varepsilon_4 = G(\partial_2 w - \partial_2 \varphi + \partial_1 \psi).$$

Эти соотношения входят в противоречие с представлениями (11). Корректный результат можно получить для поперечных усилий

$$Q_5 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5 dx_3 = Gh(\partial_1 w - \partial_1 \varphi + \partial_2 \psi),$$

$$Q_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4 dx_3 = Gh(\partial_2 w - \partial_2 \varphi - \partial_1 \psi). \quad (16)$$

Таким образом, для определения функций φ , ψ и w имеем уравнения (14), (15) и (16). Подставляя Q_5 и Q_4 из (14) в (15), с учетом (13) получим

$$D\Delta\Delta\varphi = Q, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad D = E_\nu h^3/12. \quad (17)$$

Сравнивая правые части соотношений для Q_5 и Q_4 из (14) и (16), с учетом (13) найдем

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2hG}{D(1-\nu)} = \frac{12}{h^2}, \quad w = \varphi - \frac{D}{C}\Delta\varphi, \quad C = Gh. \quad (18)$$

Таким образом, получена система уравнений изгиба плит (17), (18), имеющая шестой порядок. Это позволяет удовлетворить трем граничным условиям на боковой поверхности, имеющим место в теории изгиба плит.

4. Построение решений дифференциальных уравнений теории пластин. Для построения решения дифференциальных уравнений (17) и (18) используются функции обобщенных комплексных переменных.

4.1. Бигармоническое уравнение. Введем в операторы $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ дополнительные слагаемые так, чтобы они приняли вид $\Delta_1 = (1+\varepsilon)^2\partial_1^2 + \partial_2^2$, $\Delta_2 = (1-\varepsilon)^2\partial_1^2 + \partial_2^2$, где ε – малый параметр [8]. Тогда бигармонический оператор $\Delta\Delta$ превращается в обобщенный бигармонический $\Delta_1\Delta_2$. Корни характеристического уравнения теперь

не являются кратными и имеют вид $\mu_1 = (1 + \varepsilon)i$, $\mu_2 = (1 - \varepsilon)i$, $\bar{\mu}_1 = -(1 + \varepsilon)i$, $\bar{\mu}_2 = -(1 - \varepsilon)i$.

Общее действительное решение однородного уравнения (17) через произвольные функции обобщенных комплексных переменных можно представить так [7]

$$\varphi = 2 \operatorname{Re} [\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)], \quad z_j = x_1 + \mu_j x_2 = x_{1j} + i x_{2j}.$$

Функции φ_j определены в областях S_j , которые получаются из области S , занимаемой срединной плоскостью плиты, аффинными преобразованиями $x_{1j} = x_1$, $x_{2j} = (1 \pm \varepsilon)x_2$ [7].

4.2. Уравнение Гельмгольца. Рассмотрим способ решения уравнения (18) для усложненного оператора $\Delta = \alpha^2 \partial_1^2 + \partial_2^2$, где α – вещественное число. Преобразуем уравнение к виду

$$[k^2 - (\partial_2 - \mu \partial_1)(\partial_2 - \bar{\mu} \partial_1)] \psi = 0. \quad \mu = i\alpha, \quad \bar{\mu} = -i\alpha. \quad (19)$$

Для интегрирования уравнения (19) введем обобщенную комплексную переменную $z = x_1 + \mu x_2$ и сопряженную ей величину $\bar{z} = x_1 + \bar{\mu} x_2$. Это позволяет ввести операторы

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (20)$$

Подставляя соотношения (20) в уравнение (19), получим

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - q^2 \right] \psi(x_1, x_2) = 0, \quad q^2 = -k^2 / (\mu - \bar{\mu})^2. \quad (21)$$

Функцию $\psi(x_1, x_2)$ представим в виде произведения функций различных аргументов

$$\psi = \omega(\tau) \eta(s), \quad (22)$$

где $\tau = 2qr$, $r = (z\bar{z})^{(1/2)}$, $s = (z/\bar{z})^{(1/2)}$.

Подставим представление (22) в уравнение (21). Разделяя функции, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $\omega(\tau)$ и $\eta(s)$:

$$\tau^2 \omega'' + \tau \omega' - \tau^2 \omega = c\omega; \quad (23)$$

$$s^2 \eta'' + s \eta' - c \eta = 0. \quad (24)$$

Уравнению (24) удовлетворяют функции $c_n s^n$ при значениях разделительного параметра $c = n^2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответственно. Уравнение (23) получится таким

$$\tau^2 \omega''_n(\tau) + \tau \omega'_n(\tau) - (\tau^2 + n^2) \omega_n(\tau) = 0. \quad (25)$$

Общее решение уравнения (25) при целых значениях величины n имеет вид [10]

$$\omega(\tau) = e_n I_n(\tau) + f_n K_n(\tau),$$

где $I_n(\tau)$, $K_n(\tau)$ – модифицированные функции Бесселя; e_n , f_n – произвольные постоянные.

Соотношения (22) с учетом найденных решений запишутся так:

$$\psi_n = c_n (e_n I_n(\tau) + f_n K_n(\tau)) s^n. \quad (26)$$

Общее решение уравнения (19) представляется в виде суперпозиции функций (26):

$$\psi(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n I_n(\tau) + F_n K_n(\tau)] s^n, \quad (27)$$

где E_n и F_n – произвольные комплексные постоянные.

При рассмотрении задач для неограниченных областей в представлении (27) следует выбрать убывающую на бесконечности ветвь. Соответствующее решение примет вид

$$\psi(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n K_n(\tau) s^n = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \psi_n. \quad (28)$$

В представлении для перемещений, напряжений, моментов и перерезывающих сил входят производные от функции ψ . Производные от функций $\psi_n = K_n(\tau) s^n$ найдены путем использования соотношений, связывающих функции Бесселя с различными индексами [10]:

$$\begin{aligned} \psi_n &= K_n(\tau) s^n, & \psi_{1n} &= \partial_1 \psi_n = -q (K_{n-1} s^{n-1} + K_{n+1} s^{n+1}), \\ \psi_{2n} &= \partial_2 \psi_n = -q (\mu K_{n-1} s^{n-1} + \bar{\mu} K_{n+1} s^{n+1}), \\ \psi_{11n} &= \partial_1^2 \psi_n = q^2 (K_{n-2} s^{n-2} + 2K_n s^n + K_{n+2} s^{n+2}), \\ \psi_{22n} &= \partial_2^2 \psi_n = q^2 (\mu^2 K_{n-2} s^{n-2} + 2\mu\bar{\mu} K_n s^n + \bar{\mu}^2 K_{n+2} s^{n+2}), \\ \psi_{12n} &= \partial_1 \partial_2 \psi_n = q^2 (\mu K_{n-2} s^{n-2} + (\mu + \bar{\mu}) K_n s^n + \bar{\mu} K_{n+2} s^{n+2}). \end{aligned} \quad (29)$$

5. Граничные условия на боковой поверхности. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние плиты, ослабленной криволинейной полостью, боковая поверхность которой представляет собой цилиндр с образующими, нормальными плоским граням. Граничные условия для криволинейного края с нормалью \bar{n} определяются способом закрепления и нагружения поверхности. Пусть $P(x_1, x_2, x_3)$ – нормальная, а $T(x_1, x_2, x_3)$ и $N(x_1, x_2, x_3)$ – касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то край считается свободным от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивности $\sigma_1^0 = p_1 x_3$, $\sigma_2^0 = p_2 x_3$ и $\sigma_6^0 = p_6 x_3$. Полагаем, что внешний контур находится вдали от полости и их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на боковой поверхности полости примут вид

$$\begin{aligned} n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 &= n_1 (P - p_1 x_3) - n_2 (T + p_6 x_3), \\ n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 &= n_1 (T - p_6 x_3) + n_2 (P - p_2 x_3), & n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 &= N. \end{aligned} \quad (30)$$

Направляющие косинусы при параметрическом задании контура будут такими

$$n_1 = \cos(n, x_1) = dx_2/dl, \quad n_2 = \cos(n, x_2) = -dx_1/dl, \quad dl = \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2)}. \quad (31)$$

Рассмотрим случай, когда внешние усилия представлены в форме

$$P = x_3 P_1(x_1, x_2), \quad T = x_3 T_1(x_1, x_2), \quad N = \frac{h^2}{8} \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2}\right) N_1(x_1, x_2).$$

Тогда в соответствии с представлениями (10) – (11), условия (30) запишутся так:

$$\begin{aligned} n_1 S_1 + n_2 S_6 &= n_1 (P_1 - p_1) - n_2 (T_1 + p_6), \\ n_1 S_6 + n_2 S_2 &= n_1 (T_1 - p_6) + n_2 (P_1 - p_2), \quad n_1 S_5 + n_2 S_4 = N_1. \end{aligned} \quad (32)$$

Подстановка представлений (13) в (32) дает уравнения для определения функций φ и ψ :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{1j} + n_2 r_{6j}) \varphi_j'' + [n_1 r_{13} \partial_1 \partial_2 + n_2 r_{63} (\partial_2^2 - \partial_1^2)] \psi &= \\ &= n_1 (P_1 - p_1) - n_2 (T_1 + p_6), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{6j} + n_2 r_{2j}) \varphi_j'' + [n_2 r_{23} \partial_1 \partial_2 + n_1 r_{63} (\partial_2^2 - \partial_1^2)] \psi &= \\ &= n_1 (T_1 - p_6) + n_2 (P_1 - p_2), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{5j} + n_2 r_{4j}) \varphi_j''' + \frac{6}{h^2} (n_1 r_{53} \partial_2 + n_2 r_{43} \partial_1) \psi &= N_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\varphi_j'' = \partial^2 \varphi_j / \partial z_j^2, \quad \varphi_j''' = \partial^3 \varphi_j / \partial z_j^3, \quad r_{1j} = -E_\nu (1 + \nu \mu_j^2), \quad r_{6j} = -\frac{E \mu_j}{1 + \nu},$$

$$r_{2j} = -E_\nu (\mu_j^2 + \nu), \quad r_{5j} = -E_\nu (1 + \mu_j^2), \quad r_{4j} = \mu_j r_{5j}, \quad (j = 1, 2),$$

$$r_{13} = r_{53} = \frac{E}{1 + \nu}, \quad r_{23} = -r_{13}, \quad r_{63} = r_{13}/2, \quad r_{43} = -r_{53}.$$

Интегрирование граничных условий (32) с учетом однородного уравнения (15), а также соотношений (31) дает

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \frac{r_{1j}}{\mu_j} \varphi_j' + E_\nu (1 - \nu) \partial_1 \psi = (p_6 x_1 - p_1 x_2) + \int_0^l (P_1 dx_2 + T_1 dx_1 + N_i dx_1) + c_3 x_1 + c_1,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 r_{2j} \varphi_j' - E_\nu (1 - \nu) \partial_2 \psi = (p_6 x_2 - p_2 x_1) - \int_0^l (T_1 dx_2 - P_1 dx_1 + N_i dx_2) - c_3 x_2 + c_2,$$

$$2 \operatorname{Re} E_\nu [\mu_1 (1 + \mu_1^2) \varphi_1'' + \mu_2 (1 + \mu_2^2) \varphi_2''] + E_\nu \frac{6(1 - \nu)}{h^2} \psi = N_i + c_3, \quad (34)$$

где $N_i = \int_0^l N_1 dl$.

Таким образом, граничные условия (32) для определения функций $\varphi_j(z_j)$ и ψ можно использовать в формах (33) или (34).

6. Представление решения для плиты с эллиптической полостью. Пусть плита ослаблена полостью в виде цилиндра эллиптического сечения с образующими, нормальными плоским граням. В сечении срединной плоскости Ox_1x_2 имеем область S в виде плоскости с эллиптическим вырезом. Главные оси эллипса направлены по осям Ox_1 и Ox_2 . В этом случае уравнение эллиптического контура в параметрической форме можно записать так

$$x_1 = a \cos \theta = \frac{a}{2} (\sigma + 1/\sigma), \quad x_2 = b \sin \theta = -\frac{bi}{2} (\sigma - 1/\sigma).$$

Здесь $\sigma = \cos \theta + i \sin \theta$, a и b – полуоси эллипса, θ – полярный угол. Уравнения контуров в областях S_j , где определены функции $\varphi_j(z_j)$, будут такими

$$t_j = x_1 + \mu_j x_2 = R_j \sigma + \frac{m_j}{\sigma}, \quad R_j = (a - i\mu_j b)/2, \quad m_j = (a + i\mu_j b)/2. \quad (35)$$

Уравнение контура (35) позволяет записать функцию, конформно отображающую внешность единичного круга на внешность эллипса в области S_j :

$$z_j = x_1 + \mu_j x_2 = R_j \varsigma_j + \frac{m_j}{\varsigma_j}, \quad \varsigma_j = r_j \sigma, \quad r_j \geq 1.$$

Функции $\varphi_j'(z_j)$ будем искать в виде ряда

$$\varphi_j'(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nj} / \varsigma_j^n. \quad (36)$$

Отметим, что на граничном контуре $r_j = 1$ имеет место равенство $\varsigma_j = \sigma$.

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (36) и (28) функции, входящие в условия (34), необходимо разложить в ряды по степеням переменной σ . Представления функций φ_j' и φ_j'' на граничном контуре будут такими

$$\varphi_j'(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nj}}{\sigma^n}, \quad \varphi_j''(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nj} \frac{-n}{\sigma^{n-1} (R_j \sigma^2 - m_j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^N \alpha_{nj} \frac{a_{jkn}}{\sigma^k}; \quad (37)$$

$$a_{jkn} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \left[\frac{-n}{\sigma_p^{n-1} (R_j \sigma_p^2 - m_j)} \sigma_p^k \right], \quad L \geq 2N + 1. \quad (38)$$

Здесь $\sigma_p = \exp(i\theta_p)$, а θ_p - равноотстоящие узлы, расположенные на интервале $(0, 2\pi]$: $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_L = 2\pi$.

Преобразование представлений (29) продемонстрируем на примере функции (28). Она может быть записана так

$$\psi(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \psi_n = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sum_{k=0}^N \left[A_{n+1, k+1}^{00} \sigma^k + B_{n+1, k+1}^{00} \sigma^{-k} \right]. \quad (39)$$

Для вычисления коэффициентов матриц использованы формулы

$$A_{n+1, k+1}^{00} = \frac{\alpha_k}{L} \sum_{p=1}^L w_n(\theta_p) / \sigma_p^k, \quad B_{n+1, k+1}^{00} = \frac{\alpha_k}{L} \sum_{p=1}^L w_n(\theta_p) \sigma_p^k.$$

Здесь, как и в случае вычисления по формуле (38), введены равноотстоящие узлы θ_p ; $\alpha_k = 2$, если $k = 0$; $\alpha_k = 1$, если $k > 0$ [11]. Аналогичным образом строятся разложения других функций (29).

Подставим в граничные условия (34) функции (37) и разложения функций (29) в форме (39). Выделяя выражения при одинаковых степенях переменной σ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (36) и (28). При этом коэффициенты функций (28) выбирались в форме $F_n = \alpha_{n3} / K_n$, где $K_n = \max(K_n(2qr^*))$, а r^* принадлежит граничному контуру. Полученное решение (39) может быть использовано при исследовании краевых задач для областей с границами, близкими к круговым для произвольных толщин плиты.

7. Формирование матриц уравнений состояния, меняющихся во времени. Рассмотрим задачу определения значений интегральных операторов, входящих в уравнения состояния для случая изгиба изотропной плиты. Из упругих постоянных матриц a_{mn} или A_{mn} формируются матрицы интегральных операторов \bar{a}_{mn} или \bar{A}_{mn} . Наиболее предпочтительной для формирования является матрица a_{mn} изотропного материала с элементами, отличными от нуля

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1/E, \quad a_{44} = a_{55} = a_{66} = 1/G = 2(1 + \nu)/E, \\ a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = -\nu/E. \end{aligned} \quad (40)$$

Отметим, что из экспериментов на ползучесть или релаксацию определяются операторы именно технических упругих постоянных. Из упругих постоянных матрицы a_{mn} формируется матрица интегральных операторов \bar{a}_{mn} . Это осуществляется путем замены модуля Юнга E , коэффициента Пуассона ν , модуля сдвига G , входящих в соотношения (40), линейными интегральными операторами \bar{E} , $\bar{\nu}$, и \bar{G} .

Элементы обратной матрицы A_{mn} более сложным образом зависят от технических упругих постоянных. Поэтому для определения элементов матрицы \bar{A}_{mn} можно воспользоваться соотношениями (3).

В работе [9] приведены опытные данные об изменении коэффициента Пуассона во времени в медных образцах. Оператор $\bar{\nu}$ аппроксимировался с помощью дробно-экспоненциального оператора с ядром Работнова

$$\bar{\nu} = \nu [1 + \lambda_\nu \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_\nu)]. \quad (41)$$

Упругие и реологические характеристики для меди приведены ниже:

$$G = 4.5126 \times 10^4 \text{ МПа}, \quad E = 2(1 + \nu)G, \quad \lambda_\nu = 6.65 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)},$$

$$\beta_\nu = 9.2 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)}, \quad \nu = 0.25, \quad \alpha = -0.5. \quad (42)$$

На примере данных для приведенного материала покажем два способа построения матриц уравнений состояния \bar{a}_{mn} . Первый способ основан на использовании интегральных операторов с дробно экспоненциальным ядром Работнова. Свойства этих функций делает возможным построение резольвенты по заданному ядру. Однако точное описание вязкоупругих свойств реальных материалов приводит к ядрам более сложной природы. Для таких операторов построение резольвенты в аналитической форме наталкивается на непреодолимые трудности. В работе В.Г. Громова [12] показано, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким либо их специальным видом и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Это обстоятельство делает возможным реализацию решений граничных задач вязкоупругости во времени проводить алгебраическими методами. Решение может быть осуществлено с использованием произвольных операторов и выражено через значения этих операторов, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных. Использование произвольных операторов и составляет второй способ построения уравнений состояния.

Исходный оператор (41), а также реологические данные (42) дают возможность определить экспериментальную кривую ползучести $p_\nu(t)$, то есть,

$$\bar{v} = \nu [1 + \lambda_\nu \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_\nu)] = \nu p_\nu(t).$$

Кривая ползучести $p_\nu(t)$ является исходным материалом для построения элементов матрицы состояния \bar{a}_{mn} .

7.1. *Первый способ построения элементов матрицы состояния.* Приведенные в работе [9] опытные данные не содержат информации для определения операторов \bar{E} или \bar{G} . Используем предположение об упруго сжимаемом материале. Тогда, на основании равенства (5), соотношений алгебры операторов, а также известной зависимости $1/\bar{G} = 2(1 + \bar{\nu})/\bar{E}$, последовательно найдем

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E} [1 + \lambda_e \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_e)], \quad \lambda_e = 2\nu\lambda_\nu / (1 - 2\nu), \quad \beta_e = \beta_\nu - \lambda_e,$$

$$\frac{1}{\bar{G}} = \frac{1}{G} [1 + \lambda_g \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_e)], \quad \lambda_g = \frac{3\lambda_\nu\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad (43)$$

$$\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{\nu}{E} [1 + \lambda_{\nu e} \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_e)], \quad \lambda_{\nu e} = \frac{\lambda_\nu}{1 - 2\nu}.$$

Операторы (43) могут восполнить недостающие данные для представленного выше материала.

7.2. Второй способ построения элементов матрицы состояния. Вместо оператора $\lambda_\nu \mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta_\nu)$ с дробно-экспоненциальным ядром Ю.Н. Работнова введем произвольный оператор p_ν^* . Тогда значение этого оператора через экспериментальную кривую выразится так

$$p_\nu^* = p_\nu(t) - 1.$$

Далее из равенства (5), используя значение оператора p_ν^* , определим функцию релаксации $r_e(t)$

$$\bar{E} = E \left[1 - \frac{2\nu}{1-2\nu} p_\nu^* \right] = E r_e(t). \quad (44)$$

Оператор, обратный к оператору (44) будет таким

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E} \left[1 + \frac{2\nu}{1-2\nu} p_\nu^* \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \right) \right] = \frac{1}{E} p_e(t). \quad (45)$$

Для определения оператора $p_\nu^* \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \right)$ надо вначале найти функцию ползучести $p_e(t)$. Эту функцию найдем через функцию релаксации $r_e(t)$ по формуле (4), которая для элементов матрицы будет такой

$$p_e(t_k) = \left(1 - \sum_{i=1}^k p_e(t_{k-i}) [r_e(t_i) - r_e(t_{i-1})] \right) p_e(t_0) \quad (n = 0, 1, \dots, N).$$

После нахождения функции ползучести $p_e(t)$ из формулы (45) находим значение оператора через эту функцию

$$p_\nu^* \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \right) = [p_e(t) - 1] (1 - 2\nu) / (2\nu).$$

Далее определяем операторы

$$\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{\nu}{E} \left[1 + \frac{1}{1-2\nu} p_\nu^* \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \right) \right], \quad \frac{1}{\bar{G}} = 2 \left[\frac{1}{\bar{E}} + \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \right].$$

Таким образом, по известным из экспериментов функциям ползучести двумя способами определены значения матрицы состояния \bar{a}_{mn} . При этом, второй способ не требует построения ядер специального вида, а использует непосредственно таблицу экспериментальных данных. Для определения матрицы \bar{A}_{mn} уравнений состояния (1) следует воспользоваться соотношениями (3), где в качестве исходных данных используется матрица

$$\bar{a}_{mn} = a_{mn} (1 + p_{mn}^*) = a_{mn} p_{mn}(t) = P_{mn}(t) = \mathbf{P}(t).$$

Временные матрицы позволяют решать задачи вязкоупругости в любой момент времени как обычные задачи теории упругости. Таким образом, решение граничных задач вязкоупругости сводится к решению задач теории упругости в произвольный

момент времени. При этом уравнения закона Гука заменяются уравнениями состояния (1) - (2).

8. Численные исследования. При численном исследовании напряженно-деформированного состояния плиты с эллиптической полостью будем использовать безразмерные величины. Они получаются делением линейных величин – координат x_1, x_2 , полуосей эллипса a и b , толщины плиты h , перемещений u_α – на характерный линейный параметр. В качестве такого параметра будем использовать величину $R = \max(a, b)$. Безразмерная координата x_3 получается делением исходной координаты x_3 на полутолщину плиты. Тогда переменная x_3 будет изменяться на отрезке $[-1, 1]$.

Деформация осуществляется изгибающими усилиями $\sigma_1^0 = x_3 p_1$, действующими на бесконечности. Напряжения

$$\begin{aligned} S_r &= n_1^2 S_1 + 2n_1 n_2 S_6 + n_2^2 S_2, \\ S_{r3} &= (n_1 S_5 + n_2 S_4), \\ S_{r\theta} &= (S_2 - S_1) n_1 n_2 + S_6 (n_1^2 - n_2^2) \end{aligned}$$

на свободном от усилий граничном контуре, как следует из условий (32), равны нулю. Наибольший интерес представляют величины, определяющие концентрацию напряжений на контуре полости

$$\begin{aligned} S_\theta &= n_2^2 S_1 - 2n_1 n_2 S_6 + n_1^2 S_2, \\ S_{3\theta} &= (-n_2 S_5 + n_1 S_4) h^2 / 8. \end{aligned} \tag{46}$$

Своего максимального значения величины S_θ/p_1 достигают на контуре при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, а минимального при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Величины $|S_{3\theta}/p|$ для кругового контура максимального значения достигают при $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm3\pi/4$. Для эллиптического контура этот максимум сдвигается в сторону вершины с большей кривизной.

В табл. 1 приведены результаты численных исследований для плиты с круговой и эллиптическими полостями. Исследования проведены для различных относительных толщин плиты h в моменты времени $t = 0$ ч. (упругое состояние) и $t = 300$ ч., когда установилось стационарное состояние [9]. Для каждого значения времени t приведены две строки данных. В верхней строке отражены максимальные, а в нижней – минимальные значения концентрации напряжений.

Анализ численных исследований и данных табл. 1 позволяет сформулировать следующие результаты:

- значения максимальных напряжения S_θ/p_1 в упругом и стационарном состояниях мало отличаются друг от друга;
- напряжения $S_{3\theta}$ с увеличением толщины плиты стремятся к нулю;
- напряжения S_θ/p_1 , возникающие при изгибе плиты с полостью, в зависимости от толщины плиты лежат в границах между решениями задач изгиба в рамках теории Кирхгофа и решениями соответствующих задач плоской теории упругости.

Таблица 1

h	0.1		1		10	
	S_{θ}/p_1	$S_{3\theta}/p_1$	S_{θ}/p_1	$S_{3\theta}/p_1$	S_{θ}/p_1	$S_{3\theta}/p_1$
$a = b = 1$						
$t = 0$	1.796	0.529	2.017	0.484	2.781	0.197
	0.204	-0.592	-0.017	-0.484	-0.781	-0.197
$t = 300$	1.858	0.502	2.080	0.453	2.805	0.176
	0.142	-0.502	-0.080	-0.453	-0.805	-0.176
$a = 0.75, b = 1$						
$t = 0$	2.078	0.615	2.441	0.549	3.425	0.204
	0.205	-0.615	-0.018	-0.549	-0.810	-0.204
$t = 300$	2.159	0.584	2.526	0.513	3.451	0.182
	0.144	-0.584	-0.082	-0.513	-0.831	-0.182
$a = 1, b = 0.75$						
$t = 0$	1.596	0.462	1.764	0.412	2.358	0.153
	0.192	-0.462	-0.083	-0.412	-0.818	-0.153
$t = 300$	1.642	0.438	1.811	0.385	2.373	0.136
	0.130	-0.438	-0.144	-0.385	-0.838	-0.136

Действительно, для тонкой плиты из изотропного материала с круговым отверстием путем использования теории Кирхгофа получены соотношения [7]

$$\max(S_{\theta}/p_1) = (5 + 3\nu) / (3 + \nu), \quad \min(S_{\theta}/p_1) = (1 - \nu) / (3 + \nu). \quad (47)$$

В работе [7] при определении плоского напряженного состояния для пластины с эллиптическим отверстием получены соотношения, которые для изотропного материала имеют вид

$$\max(S_{\theta}/p_1) = 1 + 2b/a, \quad \min(S_{\theta}/p_1) = -1. \quad (48)$$

Сравнение результатов, полученных по формулам (47) и (48) с данными табл. 1 при $h = 0.1$ и $h = 10$ соответственно, подтверждает сформулированный выше вывод.

Выводы. При помощи преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к временным уравнениям закона Гука в работе получено решение задач изгиба вязкоупругих изотропных плит в уточненной постановке. Предложена методика получения решений бигармонического и метагармонического уравнений уточненной теории изгиба пластин, учитывающей деформации поперечного сдвига. Методика основана на использовании функций обобщенных комплексных переменных. Проведены численные исследования напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. Дан анализ полученных результатов.

1. Нескородев Р.Н. О новом численно-аналитическом методе решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред / Р.Н. Нескородев // Вісник Донецького національного університету. Сер.А: Природн. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 7–15.
2. Шевченко В.П. Новый метод решения задач вязкоупругости анизотропных сред / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіди НАН України. – 2010. – № 11. – С. 51–58.

3. Шевченко В.П. Численно-аналитический метод решения задач линейной теории вязкоупругости / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Прикладная механика. – 2014. – № 3. – С. 42–53.
4. Нескородев Р.Н. Метод переменных коэффициентов упругости решения задач вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды ИПММ МОН ДНР. – 2015. – Т. 29. – С. 114–126.
5. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ / В.В. Васильев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46–58.
6. Нескородев Р.Н. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит / Р.Н. Нескородев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 65–73.
7. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. / С.Г. Лехницкий – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
8. Kosmodamianskii A.S. The Relation Between the Equations of the Two-dimensional Theory of Elasticity for Anisotropic and Isotropic Bodies / A.S. Kosmodamianskii, N.M. Neskorojev // J. Appl. Maths Mechs. – 1998. – Vol. 62, № 2. – P. 319–321.
9. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин – Киев: Наук. думка, 1968. – 887 с.
10. Никифоров А.Ф. Специальные функции математической физики / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров – М.: Наука, 1978. – 319 с.
11. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 632 с.
12. Громов В.Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости / В.Г. Громов // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 182, № 1. – С. 56–59.

R.N. Neskorojev

Method variable coefficient of elasticity solution to problems of bending viscoelastic isotropic plate refined formulation.

The paper propose a solution to problems of bending of viscoelastic isotropic plates in a refined formulation. The method of solution is based on the transformation of integral equations state of viscoelasticity tasks to the time the equations of Hooke's law. Numerical study the stress state of infinite plate with an elliptic hole.

Keywords: *viscoelasticity, bend, plate, an elliptical hole.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
nromt@i.ua

Получено 09.01.17

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 550.834:622.12

©2017. А.А. Глухов

2.5D МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В УГЛЕПОРОДНОМ МАССИВЕ

В настоящей статье рассмотрен адаптированный для задач шахтной пластовой сейсморазведки алгоритм 2,5D моделирования процесса распространения сейсмических колебаний в углепородном массиве. Показано, что применение 2.5D подхода позволяет в сравнении с 2D решением более точно моделировать характеристики волновых полей, в частности – амплитуды каналовых волн, используемых для прогноза геологических нарушений угольных пластов.

Ключевые слова: метод пластовой сейсморазведки, каналовые волны, 2,5D модели.

1. Введение. Шахтная пластовая сейсморазведка базируется на свойствах угольного пласта, залегающего в более плотных породах, каналировать колебательную энергию. Возбуждая внутри пласта сейсмоакустические колебания, регистрируя и анализируя отразившийся от геологической аномалии (либо пересекший ее) сигнал, мы имеем возможность оценить её параметры). Методики шахтного сейсмического прогноза геологических нарушений угольных пластов опираются на результаты математического моделирования процесса распространения акустических колебаний в углепородном массиве. В настоящее время широко используются явные конечно-разностные схемы второго порядка, в основе которых лежит двумерная модель среды [1,2]. Плоскость моделирования располагается перпендикулярно напластованию горных пород. Результат такого подхода охватывает далеко не весь комплекс волн, распространяющихся в реальной трехмерной среде.

Полное трехмерное моделирование не представляет математической сложности, однако требует огромных ресурсов машинного времени и объема оперативной памяти. Поэтому его можно практически реализовать только на суперкомпьютерах. Компромиссным решением является использование модели среды, параметры которой не изменяются вдоль некоторого направления (2.5D - моделирование).

В настоящей статье кратко изложен алгоритм 2,5D моделирования, разработанный в РАНИМИ специально для задач шахтной пластовой сейсморазведки.

2. Математическая модель. Алгоритм 2.5D моделирования процесса распространения сейсмических колебаний в среде, параметры которой не изменяются

вдоль заданного направления базируются на использовании системы уравнений в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \ddot{u} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \ddot{v} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \ddot{w} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{array} \right. \quad (1)$$

где u, v, w – компоненты смещений волнового поля вдоль направлений x, y и z , соответственно, λ, μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность среды. Информация о величинах μ и λ априори практически всегда отсутствует. Поэтому при создании модели оперируют величинами V_s и V_p (скорости распространения волн сдвига и сжатия в упругой среде), которые могут быть определены непосредственно в ходе сейсмических наблюдений и связаны с коэффициентами Ламе соотношениями:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2)$$

Источник колебаний моделируется последовательным набором значений $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$, описывающие x, y и z компоненты смещений среды в заданной точке.

Рассмотрим модель геологической среды, структура и характеристики пород которой не изменяются вдоль заданного направления (см рис. 1). В данном случае ось z выбрана перпендикулярно плоскости напластования пород, инвариантное направление выбрано вдоль оси y .

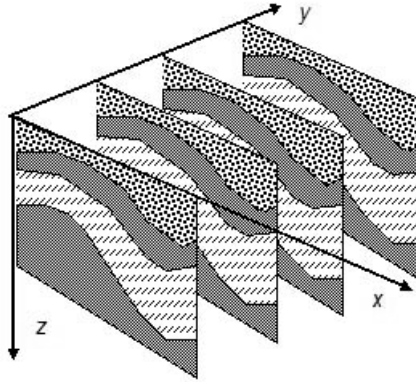


Рис. 1. Модель среды, структура и характеристики пород которой не изменяются вдоль заданного направления.

К уравнениям системы применяется преобразование Фурье по схеме

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iky} dy = U, \\ \frac{\hat{\partial} u}{\partial y} &= ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iky} dy = ikU, \\ \frac{\hat{\partial}^2 u}{\partial y^2} &= -k^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iky} dy = -k^2 U,\end{aligned}\quad (3)$$

где $k \equiv k_y$ - волновое число вдоль направления y . Вещественную часть получаемой в результате преобразований системы уравнений можно записать в виде

$$\left\{ \begin{aligned}\rho \ddot{U} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} + \mu \left(-k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \\ \rho \ddot{V} &= -k^2 (\lambda + 2\mu) V + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right), \\ \rho \ddot{W} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k^2 W \right).\end{aligned}\right.\quad (4)$$

Пусть m - номер ячейки по оси x , n - номер ячейки по оси z , p - номер шага по времени. Тогда, если использовать следующую систему обозначений

$$\begin{aligned}A_{m n} &= \frac{(\lambda_{m n} + 2\mu_{m n}) \tau^2}{\rho_{m n} h^2}, \\ B_{m n} &= \frac{\mu_{m n} \tau^2}{\rho_{m n} h^2}, \\ C_{m n} &= \frac{1}{4} \frac{(\lambda_{m n} + \mu_{m n}) \tau^2}{\rho_{m n} h^2}, \\ D_{m n} &= \frac{\mu_{m n} k^2 \tau^2}{\rho_{m n}}, \\ E_{m n} &= \frac{(\lambda_{m n} + 2\mu_{m n}) k^2 \tau^2}{\rho_{m n}}, \\ F_{m n} &= 2(1 - 2B_{m n}) - E_{m n}, \\ G_{m n} &= 2(1 - A_{m n} - B_{m n} - D_{m n}),\end{aligned}\quad (5)$$

уравнения системы (4) можно переписать в конечно-разностном виде

$$U_{m n}^{p+1} = G_{m n} U_{m n}^p - U_{m n}^{p-1} + A_{m n} (U_{m+1 n}^p + U_{m-1 n}^p) +$$

$$\begin{aligned}
 &+B_{m n} (U_{m n+1}^p + U_{m n-1}^p) + C_{m n} (W_{m+1 n+1}^p - W_{m-1 n+1}^p - W_{m+1 n-1}^p + W_{m-1 n-1}^p), \\
 &W_{m n}^{p+1} = G_{m n} W_{m n}^p - W_{m n}^{p-1} + A_{m n} (W_{m n+1}^p + W_{m n-1}^p) + \\
 &+B_{m n} (W_{m+1 n}^p + W_{m-1 n}^p) + C_{m n} (U_{m+1 n+1}^p - U_{m-1 n+1}^p - U_{m+1 n-1}^p + U_{m-1 n-1}^p), \\
 &V_{m n}^{p+1} = B_{m n} (V_{m+1 n}^p + V_{m-1 n}^p + V_{m n+1}^p + V_{m n-1}^p) + F_{m n} V_{m n}^p - V_{m n}^{p-1}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Проблемой при использовании конечно-разностных методов на ЭВМ является то, что границы решетки порождают «паразитическую» часть решения, эквивалентную отраженной от свободной границы волне. Для подавления данного эффекта вводится зона поглощения колебаний у границ решетки. При этом предполагается, что компоненты вектора перемещений можно представить в следующем виде:

$$u = ue^{-\alpha_x t}, \quad v = ve^{-\alpha_y t}, \quad w = we^{-\alpha_z t}, \tag{7}$$

где α_i – коэффициенты затухания соответствующих компонент смещения во времени. Принимая коэффициент затухания α одинаковым для всех компонент волнового поля, имеем:

$$\begin{aligned}
 U_{m n}^{p+1} &= G'_{m n} U_{m n}^p - \beta U_{m n}^{p-1} + A_{m n} (U_{m+1 n}^p + U_{m-1 n}^p) + B_{m n} (U_{m n+1}^p + U_{m n-1}^p) + \\
 &+ C_{m n} (W_{m+1 n+1}^p - W_{m-1 n+1}^p - W_{m+1 n-1}^p + W_{m-1 n-1}^p), \\
 W_{m n}^{p+1} &= G'_{m n} W_{m n}^p - \beta W_{m n}^{p-1} + A_{m n} (W_{m n+1}^p + W_{m n-1}^p) + \\
 &+ B_{m n} (W_{m+1 n}^p + W_{m-1 n}^p) + C_{m n} (U_{m+1 n+1}^p - U_{m-1 n+1}^p - U_{m+1 n-1}^p + U_{m-1 n-1}^p), \\
 V_{m n}^{p+1} &= B_{m n} (V_{m+1 n}^p + V_{m-1 n}^p + V_{m n+1}^p + V_{m n-1}^p) + F'_{m n} V_{m n}^p - \beta V_{m n}^{p-1}
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\beta = 1 + \alpha\tau$,

$$F'_{m n} = 2(1 - 2B_{m n}) - E_{m n} + \alpha\tau - (\alpha\tau)^2,$$

$$G'_{m n} = 2(1 - A_{m n} - B_{m n} - D_{m n}) + \alpha\tau - (\alpha\tau)^2. \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что система соотношений (8) для $k=0$ представляет собой конечно разностную схему решения 2D задачи в плоскости $y=0$. Далее для ограниченной заданным периодом времени последовательности моментов времени p вычисляем соотношения (8) для дискретного набора равномерно распределённых $k_j = j\Delta k$ и получаем решение при $y=0$ по формуле

$$u(x, 0, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk U(x, k, z, t) e^{ik \cdot 0} \approx \frac{\Delta k}{\pi} \sum_{j=0}^j U(x, k_j, z, t). \quad (10)$$

Поскольку $U(x, k, z, t)$ это чётная функция k , поле $u(x, 0, z, t)$ можно получить, суммируя вклады для всех положительных k_j . При практической практических целей мы должны использовать конечное число волновых чисел, ограниченное предельным значением k_{max} , которое определяется по условию Найквиста ($k_{max} \leq \pi/h$). Величина дискретизации для волнового числа определяется из свойства дискретного преобразования Фурье: $\Delta k = \pi/(y_{max} - y_{min})$. Программные модули реализующие 2.5D моделирование процесса распространения сейсмических колебаний в среде, параметры которой не изменяются вдоль заданного направления базируются на разработанном в РАНИМИ программном комплексе моделирования сейсмических колебаний в углепородном массиве [3].

На первом этапе для каждой ячейки счетной решетки согласно (5) и (9) вычисляются коэффициенты соотношений (8).

На втором этапе итерационно производится расчет последовательных стадий процесса распространения волнового поля:

- для каждого k_j по соотношениям (8) вычисляются значения $U^{p+1}, V^{p+1}, W^{p+1}$ для каждого узла расчетной решетки;
- по формуле (10) путем суммирования решений для каждого k_j вычисляются поля смещений волнового поля вдоль направлений x, y и z в плоскости $y=0$ (См. рис. 2).

Основные затраты ресурсов памяти ЭВМ необходимы для хранения массивов переменных, описывающих три слоя значений смещений и значения коэффициентов уравнений.

Максимальное время расчета 1000 итераций для модели $500 \times 500 \times 100$ – 4 часа 15 минут.

3. Результаты расчетов. На рис.3 для сравнения представлены результаты 2D и 2.5D расчета процесса распространения сейсмоакустических колебаний для модели, представляющей собой упругий слой, расположенный параллельно плоскости (xy) в более плотных упругих полупространствах. Ось z выбрана перпендикулярно слою, инвариантное направление выбрано вдоль оси y . Толщина слоя равна 1.5м. Параметры слоя: $V_{p1}=1900$ м/с, $V_{s1}=900$ м/с, $\rho_1=1800$ кг/м³. Параметры для полупространств: $V_{p2}=3500$ м/с, $V_{s2}=1900$ м/с, $\rho_1=2700$ кг/м³. Параметры слоев соответствуют условиям залегания угольного пласта в алевролите, что типично для углей марки Ж в условиях Донецкого угольного бассейна [1].

На рисунках четко различимы несколько типов волн. Две волны имеют фронты в виде концентрических окружностей. Это классические волны сжатия и сдвига, распространяющиеся со скоростями V_p и V_s волн во вмещающей породе, соответ-

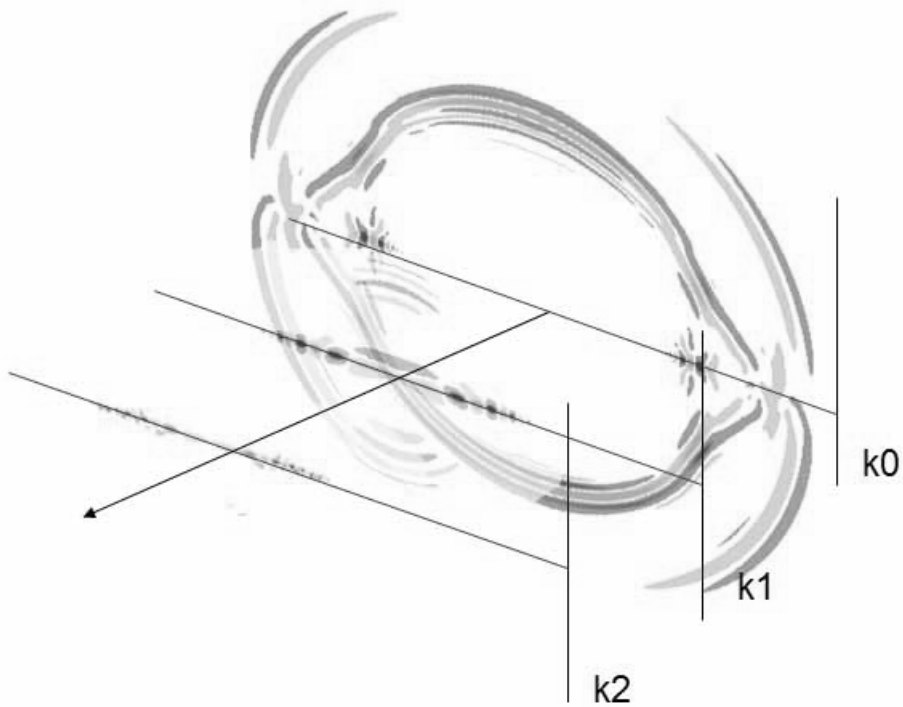


Рис. 2. Поля смещений волнового поля вдоль направлений x , y и z в плоскости $y=0$ вычисляются по формуле (10) путем суммирования решений для каждого k_j .

ственно. Поскольку они преломляются в угольный пласт, их наблюдают при проведении экспериментов и успешно используют в качестве источника информации о его строении. В терминах шахтной сейсморазведки такие волны носят название боковых [1]. На границах раздела между углем и породой волной сжатия образуются обменные волны сдвига, распространяющиеся по обе стороны пласта в породу. Эти волны имеют линейный фронт. Приемниками колебаний внутри угольного пласта такие волны не регистрируются.

Сравнение результатов расчета для 2D и 2.5D модели (см. рис. 3) показывает, что перечисленные типы волн на качественном уровне практически не различаются.

Оба результата содержат и цуги нормальных волн. Они образуются в слое-волноводе в результате интерференции колебаний, многократно отраженных от границ раздела сред. В шахтной сейсморазведке такие волны называют каналовыми и широко используются. В случае 2D модели цуг имеет скорость распространения около 1700 м/с. Классических колебаний, которые должны в пласте такой мощности распространяться со скоростью близкой к значению V_{s1} не наблюдается. Строго говоря, каналовая волна присутствует, но амплитуда составляет около 10% от максимальной по области расчета, что мало для проявления в этом режиме показа. В случае 2.5D модели начальная часть цуга располагается там же, однако четко про-

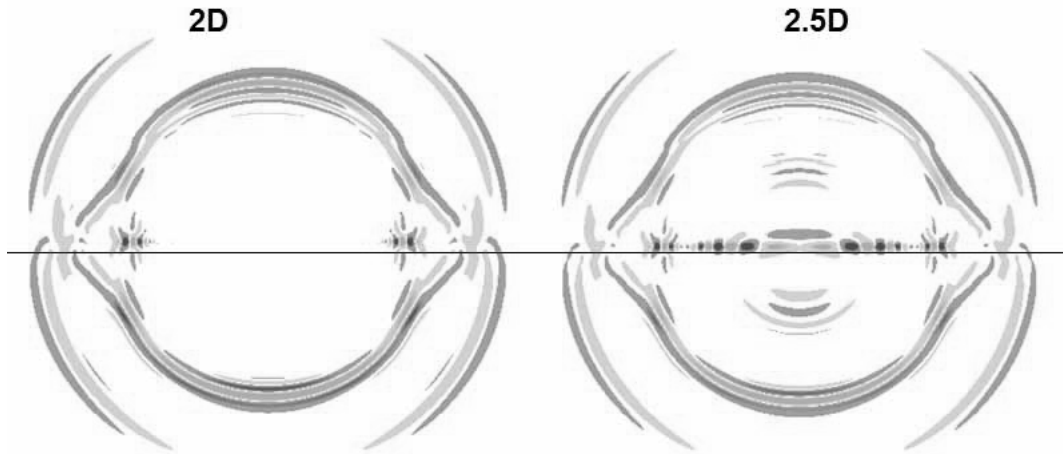


Рис. 3. Результаты 2D и 2.5D расчета процесса распространения сейсмоакустических колебаний для упругого слоя в более плотных упругих полупространствах.

является и теоретически ожидаемая низкоскоростная составляющая. Для данных параметров угольного пласта преимущество использования 2.5 D модели очевидно.

Следует отметить, что в практике моделирования было отмечено, что 2D решение достаточно точно передает структуру поля в угольных пластах в плане числа волновых пакетов, скоростей их распространения. В то же время соотношения амплитуд различных волновых пакетов всегда вызывали вопросы [1,2]. Возможно, использование 2.5D моделирования позволит решить эту проблему.

На данном этапе работы расчеты были проведены на 12 различных моделях. Варьировались параметры угля и вмещающих пород в диапазоне значений, характерных для условий Донбасса. Во всех случаях, когда мощность пласта составляла 1.5м и более, при 2.5D моделировании проявлялись высокоамплитудные каналовые волны. Этот факт соответствует реалиям шахтной сейсморазведки [1]. В то же время, амплитуда каналовой волны при 2D моделирование не превышала 50% амплитуды сигнала в целом.

4. Заключение. Таким образом, применение 2.5D подхода позволяет в сравнении с 2D решением более точно моделировать характеристики волновых полей, в частности – амплитуды каналовых волн, используемых в шахтной пластовой сейсморазведке для прогноза геологических нарушений. Это важный в методическом плане результат, поскольку на анализе амплитудных характеристик базируется ряд прогнозных методик, в частности, сейсмическая томография [1].

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В Анциферов. – Донецк: ООО “Алан”, 2002. – 312 с.
2. Анциферов А.В. Математическое моделирование в шахтной сейсморазведке / А.В Анциферов., А.А. Глухов – Киев: Наук. думка, 2012. – 255 с.
3. Глухов А.А. О программном комплексе моделирования распространения сейсмических колебаний в угленосной толще / А.А. Глухов // Наукові праці Донецького національного технічно-

А.А. Глухов

го університету. Сер. Обчислювальна техніка та автоматизація. – Донецьк: ДонНТУ, 2005. – Вип. 88. – С. 106–113.

Glukhov A.A.

2.5-D Seismic Velocity Modeling in Coal-Rock Mass.

The article deals with 2.5-D modeling scheme for seismic-wave propagation in coal-rock mass adapted for the problems of in-seam seismic survey in mines. It is shown that in comparison with 2-D solution the employment of 2.5-D approach enables to simulate wave field attributes more precisely, including channel wave amplitudes used to predict geologic faults in coal seams.

Keywords: *in-seam seismic method, channel waves, 2,5D models..*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
Glukhov1964@yandex.ru

Получено 26.12.16

УДК 550.8.05:556.332.46:622.83

©2017. С.В. Педченко, А.Б. Ягмур, Н.А. Дроздова, Е.Н. Шевченко, М.А. Педченко

ГИДРОГЕОМЕХАНИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ВОДРАЗДЕЛЯЮЩИХ СЛОЕВ ДИАПИРОВОГО КУПОЛА СОЛОТВИНСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КАМЕННОЙ СОЛИ

В статье дается общая характеристика ситуации, сложившейся на территории Солотвинского соле-рудника. Выполнена оценка существующего гидродинамического режима на основании результатов гидрогеомеханических исследований.

Ключевые слова: солерудник, водоприток, воронка, провал, суффозные процессы, карстообразование, гидрогеологическая ситуация.

1. Введение. Солотвинское месторождение каменной соли представляет собой соляной диапир, который прорывает тортонские осадочно-вулканогенные породы и поднимается под четвертичные отложения, местами выходя на поверхность.

За длительный срок существования, до интенсивной, промышленной разработки соли, этот диапир не был серьезно поврежден карстовыми процессами, благодаря пластичности соли, быстро заживающей периодически образующиеся трещины в слоях плотных слабопроницаемых глин, подстилающих обводненные четвертичные отложения.

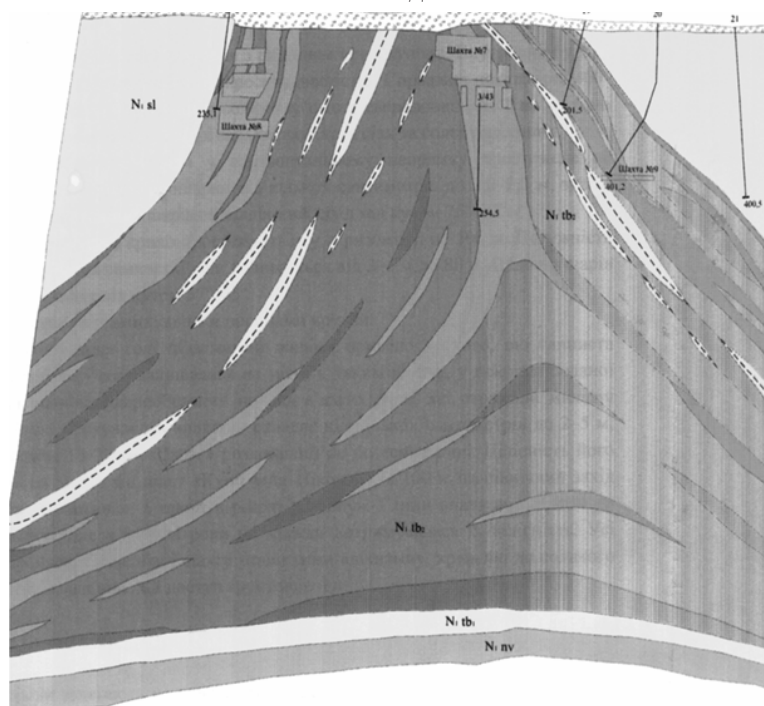
В современном рельефе поверхности земли над диапиром существуют древние впадины, образовавшиеся вследствие обрушений сводов карстовых полостей в соли и превратившиеся впоследствии в болота и озера с заиленным дном. Это свидетельствует о том, что в связи с тектоническими подвижками в теле диапира происходили разрывы, по которым циркулировала вода с околосолевого тортонского и надсолевого четвертичного комплексов, как показано на рисунке 1.

2. Моделирование процессов водообмена в диапировом куполе, нарушении горными работами. В результате длительного периода изучения, исследования и анализа геолого-гидрогеологических условий водообмена Солотвинского соляного диапира методом численного гидродинамического моделирования, были приняты следующие предпосылки для усредненных характеристик топографии купола соляной залежи, а также водоносных и водоупорных слоев.

Средняя мощность четвертичного водоносного комплекса составляет 15 м, средняя мощность глинистого водоупора в почве четвертичного водоносного комплекса – 10 м, средняя мощность закарстованной верхней части соляного диапира близка к нулю. В естественных условиях топография поверхности купола соляного диапира хорошо коррелирует с поверхностью четвертичного водоносного горизонта.

На этом этапе в модель вводилась система закарстованных тектонических разрывов на теле практически непроницаемой ($km = 0,1 \text{ м}^3/\text{сут}$) центральной и восточной части месторождения. Разрывы были ориентированы вдоль основного направления

С.В. Педченко, А.Б. Ягмур, Н.А. Дроздова, Е.Н. Шевченко,
М.А. Педченко



Условные обозначения:

Q sl	Аллювиальный галечник с песчано-глинистым наполнителем	Соль чистая пищевая (до 0,85% нерастворимого)
N. tr	Тересвинская свита. Аргиллиты, алевролиты, песчаники	Соль слабо загрязненная (0,85 - 2,5 % НР)
N. sl	Солотвинская свита. Аргиллиты, алевролиты, песчаники, горизонты туфа	Соль сильно загрязненная (больше 2,5 % НР)
N. tb1	Верхнереббинская подсвита. Соль каменная с прослоями аргиллита	Прослой аргиллита
N. tb2	Нижнереббинская подсвита. Аргиллиты, алевролиты, песчаники с линзами и прожилками аргиллита	Разрывные нарушения
N. nv	Новоселицкая свита. Туф липарит-дацитовый	

Рис. 1. Геологический разрез Солотвинского месторождения.

потока подземных вод с востока и северо-востока, на запад и юго-запад.

При моделировании безтрещиновато-карстового водоносного горизонта Солотвинский диапир рассматривался как тело, изначально совершенно непроницаемое для воды. Потоки тортонских околосолевых вод обтекают его, а четвертичные надсолевые воды, которые протекают над ним, не проникают вглубь диапира.

Модель для безтрещиновато-карстовых водоносных горизонтов разрабатывалась для двух водоносных слоев, залегающих один над другим, разделенных водоупором.

Водоносные слои модели образуют горизонтальное движение подземных вод в четвертичном и тортонском водоносных комплексах, за исключением соляного диапира, где горизонтальное движение подземных вод в тортонской соли отсутствует из-за нулевой мощности трещиновато-карстового горизонта.

Латеральная непроницаемость тела диапира для околосолевых тортонских вод

моделировалась оконтуриванием диапира неактивными расчетными блоками, которые исключают горизонтальный подземный водообмен.

Гидравлическое взаимодействие между четвертичным и тортонским комплексами за пределами диапира осуществлялось с помощью вертикального перетекания подземных вод через слой четвертичной глины, а в пределах шахтных полей современных рудников Солотвинского месторождения каменной соли – через объединенный слой глины и соли над шахтными полями. За пределами этих площадей, но в границах диапира, удельная проницаемость объединенного слоя глины и соли задавалась достаточно малой ($\leq 10^{-7}$ д⁻¹), чтобы вертикальным движением воды в этом слое можно было пренебречь.

Схема подземного водообмена в пределах Солотвинского месторождения без учета горизонта трициновато-карстовых вод демонстрируется на рисунке 2.

Результаты имитационного моделирования показали, что уровни подземных вод четвертичного комплекса в пределах соляного диапира в наибольшей степени реагируют на изменение водопроницаемости пород четвертичного водоносного комплекса и инфильтрационного питания подземных вод. Так, в процессе подбора водопроницаемости четвертичного аллювия над диапиром при интенсивности инфильтрационного питания подземных вод 200 мм/год ее исходное распределение претерпело изменение в сторону снижения значений с запада на восток от 100 м³/сут на 1-й террасе и до 3 м³/сут на 2-й террасе (рис. 3, 4). Результаты оценок представлены в таблицах 1 и 2, из которых видно, что разработка соли в 1,5 – 2,5 раза увеличивает обводненность месторождения, несмотря на дренажные штольни. Из двух рассмотренных рудников более обводненным является рудник №8.

Таблица 1 – Обводненность Солотвинского месторождения в естественных условиях по данным моделирования при $W = 200$ мм/год (м³/сут)

Боковой приток за границей моделирования	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь месторождения	Боковой приток в район шахтного поля рудника №9	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь шахтного поля рудника №9	Боковой приток в район шахтного поля рудника №8	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь шахтного поля рудника №8
1049	1103	252	107	284	62
Итого: 2152		Итого: 359		Итого: 346	

На рис.2 введены следующие обозначения: 1 – четвертичный водоносный комплекс; 2 – глинистый относительный водоупор; 3 – продуктивная часть солевого диапира; 4 – горизонтальное движение подземных вод в водоносном слое; 5 – ин-

С.В. Педченко, А.Б. Ягмур, Н.А. Дроздова, Е.Н. Шевченко,
М.А. Педченко

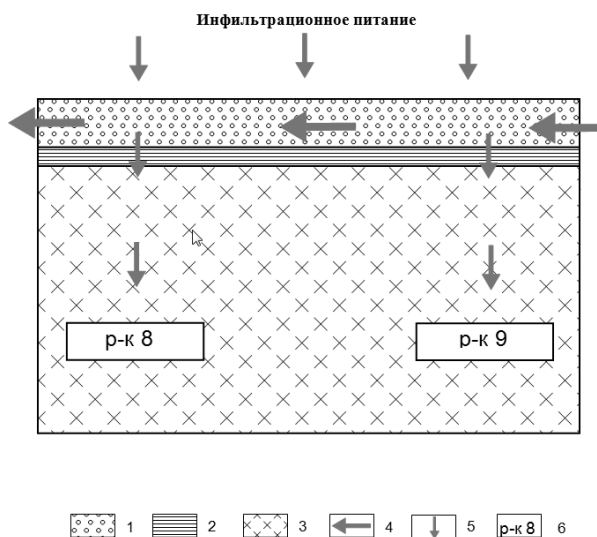


Рис. 2. Модельная схема водообмена в пределах Солотвинского соляного диапира в условиях его подземной разработки

фильтрационное насыщение подземных вод и их вертикальное движение через относительно водоупорные породы; 6 – горные выработки рудников.

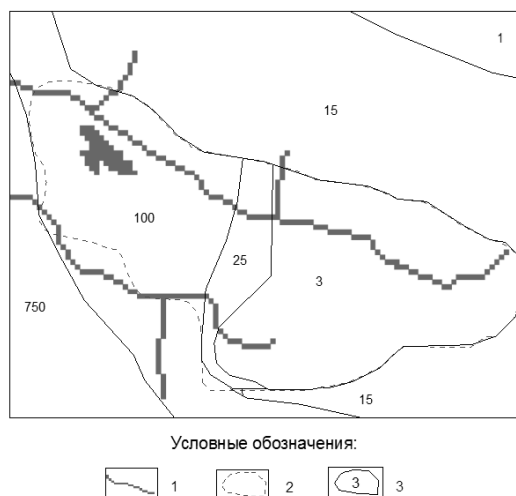


Рис. 3. Модельная схема водопроницаемости пород четвертичного водоносного комплекса в пределах купола Солотвинского соляного диапира, полученная по результатам моделирования

На рис.3 введены следующие обозначения: 1 – модельная гидрографическая сеть; 2 – контур соляного диапира; 3 – граница района с указанной средней водопроницаемостью пород, м³/сут.

Таблица 2 – Обводненность Солотвинского месторождения в условиях добычи каменной соли рудниками №8 и №9 по данным моделирования при $W = 200$ мм/год (в м³/сут)

Боковой приток через границы месторождения	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь месторождения	Боковой приток в район шахтного поля рудника №9	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь шахтного поля рудника №9	Боковой приток в район шахтного поля рудника №8	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь шахтного поля рудника №8
1167	1103	411	107	681	62
Итого: 2270		Итого: 518		Итого: 743	

Таблица 3 – Обводненность Солотвинского месторождения в условиях добычи каменной соли рудниками №8 и №9 по данным моделирования при $W = 300$ мм/год (в м³/сут)

Боковой приток через границы месторождения	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь месторождения	Боковой приток в район шахтного поля рудника №9	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь шахтного поля рудника №9	Боковой приток в район шахтного поля рудника №8	Инфильтрация атмосферных осадков на площадь шахтного поля рудника №8
1581	1655	550	161	697	93
Итого: 3236		Итого: 711		Итого: 790	

При моделировании с учетом трещиновато-карстового водоносного горизонта Солотвинский диапир рассматривался как тело, непроницаемое для воды, за исключением его тонкого слоя, залегающего непосредственно под четвертичной глиной. Латеральная проницаемость солевого тела здесь обусловлена промытостью и закарстованностью верхней части тектонических разрывов.

Схема водообмена в солевом диапире при наличии трещиновато-карстового горизонта показана на рисунке 5.

Согласно результатам моделирования с учетом трещиновато-карстового горизонта в гидрогеологических условиях, сложившихся к 2000 году на Солотвинском месторождении каменной соли, около половины ресурсов подземных вод четвертич-

ного и тортонского комплексов в пределах шахтного поля рудника №8 поступало в его горные выработки. В пределах шахтного поля рудника № 9 только 10% ресурсов этих комплексов поступало в его горные выработки.

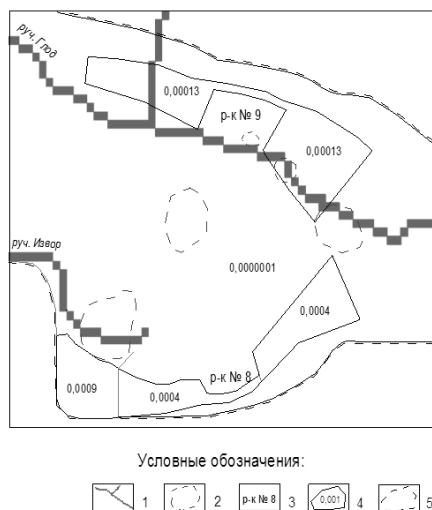


Рис. 4. Схема удельной проницаемости пород объединенной толщи глины и соли в районе расположения рудников №8 и №9

На рис.4 введены следующие обозначения: 1 – модельная гидрографическая сеть; 2 – граница карстовой воронки; 3 – рудники; 4 – границы участков водоупора с указанным значением удельной проницаемости, м³/сут; 5 – граница купола солевого диапира.

В периоды длительных дождей или интенсивного снеготаяния обводненность месторождения и, в частности, площади над шахтными полями может увеличиваться на 10 – 20%. При этом приток в горные выработки вырастет лишь на 5 – 8%, если не произойдет резкого увеличения пропускной способности карстовых каналов за счет интенсификации выщелачивания соли.

Определенный интерес имеет влияние на обводненность территории над шахтными полями рудников №8 и №9 отдельных тектонических разрывов, выделенных на модели.

Поблочный расчет потоков подземных вод на участках границ шахтных полей в местах пересечения их разрывами показал, что закарстованный разрыв соли 1-1 (рис. 6) приносит в район восточной группы камер рудника №8 четверть водных ресурсов всей территории, расположенной непосредственно над шахтным полем этого рудника.

Два разрыва 3-3 и 5-5 приносят в район западной группы камер рудника №8 четверть водных ресурсов всей территории, расположенной над шахтным полем рудника №8. Из этого следует, что тектонические разрывы в сумме обеспечивают 50% обводненности шахтного поля рудника.

Разрыв 6-6 приносит в район восточной группы камер рудника №9 восьмую часть

водных ресурсов всей территории над шахтным полем рудника, а два разрыва 2-2 и 3-3 приносят в район западной группы камер рудника №9 пятую часть водных ресурсов территории, расположенной над шахтным полем рудника. Из этого следует, что тектонические разрывы обеспечивают 35% обводненности шахтного поля рудника №9.

Из приведенных оценок следует, что на обводненности шахтных полей рудников №8 и №9 существенное влияние оказывает разломная тектоника, которая способствует увеличению площадей водосборов и темпам поступления воды.

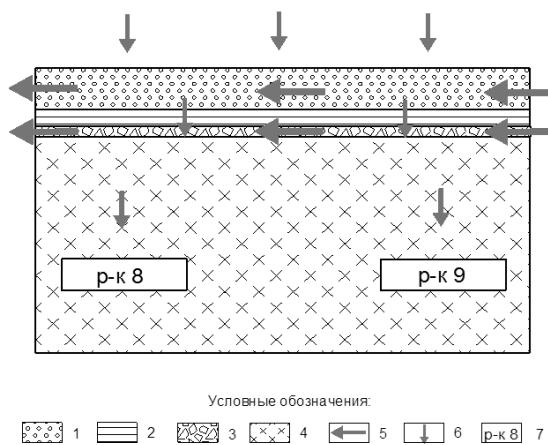


Рис. 5. Модельная схема водообмена в пределах Солотвинского соляного диапира в условиях его подземной разработки при наличии трещиновато-карстового водоносного горизонта под слоем четвертичной глины

На рис.5 введены следующие обозначения: 1 – четвертичный водоносный комплекс; 2 – глинистый относительный водоупор; 3 – карстовый водоносный горизонт в верхней части соляного диапира; 4 – продуктивная часть соляного диапира; 5 – горизонтальное движение подземных вод в водоносном слое; 6 – инфильтрационное питание подземных вод и их вертикальное движение через относительно водоупорные породы; 7 – горные выработки рудников.

Относительно замедленное движение рассолов повышенной плотности компенсируется увеличивающимися размерами во времени проводных каналов в процессе выщелачивания соли. Поэтому на стадии имитационного моделирования ни тот, ни другой фактор не учитывались в связи с предусмотренной их взаимной компенсацией.

В 2001 году появился приток воды в количестве $10 \div 20 \text{ м}^3/\text{ч}$ в восточных камерах №№ 3 – 5 рудника №9.

Приток рассола имел тенденцию к увеличению. В 2010 году он достиг уровня $3000 \text{ м}^3/\text{сут.}$ Для воспроизведения этих условий на модели была увеличена удельная проницаемость слоя соли над восточными камерами рудника №9 до $0,1 \text{ д}^{-1}$, что с точки зрения практической гидрогеологии означает отсутствие водоупора над этой частью шахтного поля.

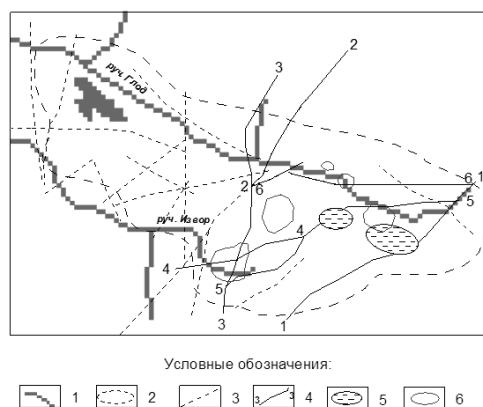


Рис. 6. Схема дизъюнктивных нарушений тела Солотвинского соляного диапира, выявленных по данным геофизических исследований (вид сверху)

На рис.6 введены следующие обозначения: 1 – модельная гидрографическая сеть; 2 – контур соляного диапира; 3 – дизъюнктивное нарушение; 4 – дизъюнктивное нарушение, учтено в модели; 5 – болото; 6 – активная провальная карстовая воронка.

Модельные схемы гидроизогипс четвертичного и гидроизопьез тортонского водоносных комплексов при достижении суммарного притока рассола в горные выработки рудника №9 равного 3212 м³/сут, из них только в восточные камеры – 3070 м³/сут.

Суммарный приток в рудник №8 составил 760 м³/сут.

Резкое повышение проницаемости соли над восточными камерами рудника №9 привело к снижению уровня грунтовых вод на этом участке на 15–20 м, а над рудником №8 на 5–10 м, что говорит об осушении четвертичного аллювия.

Аналогичная ситуация сложилась и в горизонте, залегающем ниже карстовых вод. Это явление наблюдалось на Солотвинском месторождении и в 2010 году, но в более широком масштабе, чем получено в результате моделирования.

3. Выводы. Выполненные исследования позволили установить существенные особенности развития и активизации сдвигов массива вокруг солевых шахт под действием обводнения контакта солевого купола с вышележащими породами. Главная особенность заключается в том, что начало процесса разрушения протекает не от земной поверхности, а начинается в глубине массива, затем он выходит на земную поверхность. Сам процесс активизации сопровождается резкой быстрой эволюцией кластерной мозаики и меняет свое поведение от несогласованного до согласованным и наоборот. Именно этот механизм способствует, во-первых, разрушению, во-вторых, разделению массива на отдельные составляющие, в третьих, противоположному движению этих составляющих друг относительно друга, и в четвертых зарождению и развитию провалов земной поверхности.

Аналитическими методами и моделированием определены количественные соотношения между кинетическими, геомеханическими и тектоническими факторами, влияющими на гидрогеомеханическую устойчивость водоразделяющих слоев диа-

пира соленосной структуры, и определена доминантная роль дизъюнктивов в формировании водопритока в выработки.

1. Коростошовец И.П. Гидрогеологические условия Солотвинского месторождения каменной соли в Закарпатской области УССР / И.П. Коростошовец – Киев, 1957. – 52 с.
2. Никитин А.А. Карта фактических материалов. Схема рациональной разработки Солотвинского месторождения каменной соли / А.А. Никитин – ВНПОСП, 1990. – 46 с.
3. Отработка шахтных полей и камер на соляных шахтах. // Совершенствование технологии и механизации горных работ на соляных шахтах: Сб. науч. тр. – Киев: УкрНИИТИ, 1968. – С. 76–82.
4. Педченко И.И. Анализ гидрогеологической обстановки на Солотвинском солеруднике / И.И. Педченко – Берегово: ЗГЭ, 1999. – 27 с.
5. Хронология аварийных водопритоков на шахте № 9 за период с 2001 по 2006 г.г. – Солотвино, 2006. – 3 с.

S.V. Pedchenko, A.B. Yagmur, N.A. Drozdova, Ye.N. Shevchenko, M.A. Pedchenko
Hydrogeomechanical condition of water-parting layers in Solotvino mine salt occurrence diaoiric dome.

The article gives general description of the situation as it has developed within the territory of Solotvino Salt Mine. Evaluation of the current hydrodynamical behavior based on the results of hydrogeomechanical survey is made.

Keywords: salt mine, water inflow, subsidence crater, gap, suffosion processes, karstification, hydrogeological situation..

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
ledy.sv@yandex.ua

Получено 26.12.16

УДК 539.3:622.84

©2017. В.Н. Ревва

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРОВЛИ В ОКРЕСТНОСТИ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ С ПОЗИЦИИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Предложен и обоснован новый подход к оценке устойчивости кровли горных выработок, где впервые учитывается трещиностойкость горных пород.

Ключевые слова: *устойчивость, горная выработка, разрушение, трещиностойкость, предельный пролет, кровля.*

1. Введение. Устойчивость кровли в призабойном пространстве очистных забоев является определяющим фактором при выборе способа управления горным давлением, типа выемочного оборудования, характеристики, схемы расположения и передвижки крепи. Как отмечалось ранее, существующие к настоящему моменту классификации кровель [1-3] не учитывают многих влияющих факторов. Наиболее существенным из них, на наш взгляд, являются неравнокомпонентность объемного напряженного состояния и дефектность горных пород.

2. Критерий устойчивости кровли. С позиции механики разрушения горных пород предлагается новый подход к оценке устойчивости кровли в окрестности горной выработки. Рассмотрим предельный, в смысле устойчивости кровли, случай. Горный массив принимаем упругим. В породах, обладающих свойствами пластичности, со временем напряжения могут релаксировать.

Учитывая сложность проблемы, ограничимся рассмотрением плоской задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого горного массива в окрестности протяженной горизонтальной выработки кругового поперечного сечения, подверженного действию гидростатического напряжения γH . Согласно [4] напряжения в окрестности выработки определяются по формулам (1).

$$\begin{aligned}\sigma_r^P &= \gamma H + \frac{(P-\gamma H)a^2}{r^2}; \\ \sigma_o^P &= \gamma H - \frac{(P-\gamma H)a^2}{r^2},\end{aligned}\tag{1}$$

где a - радиус выработки, P - реактивное сопротивление крепи. Касательные напряжения равны нулю.

Известно из механики разрушения Гриффитса, что процесс разрушения горных пород начинается с развития дефектов структуры, т.е. трещин различных размеров и ориентации.

В кровле выработки рассмотрим эффективную прямолинейную трещину длины $2l$, интегрально учитывающую множество реальных трещин в массиве и ориентированную под углом ψ к направлению действия σ_r . По берегам трещины равномерно распределены напряжения. Q - давление флюида (воды, газа) на стенки трещины.

Согласно [5] коэффициенты интенсивности напряжений k_I и k_{II} , характеризующие локальное поле упругих напряжений у тупиковой части трещин соответственно нормального отрыва и поперечного сдвига, определяются по формулам (2).

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{\pi l} [Q - \sigma_r \sin^2 \psi - \sigma_0 \cos^2 \psi]; \\ K_{II} &= \sqrt{\pi l} [\sigma_r - \sigma_0] \sin^2 2\psi. \end{aligned} \quad (2)$$

После подстановки (1) в (2) получим

$$\begin{aligned} & \left[Q - \left(\gamma H + \frac{P-\gamma}{\rho^2} \right) \sin^2 \psi - \left(\gamma H - \frac{P-\gamma H}{\rho^2} \right) \cos^2 \psi \right] + \\ & + \left[\frac{P-\gamma H}{\rho^2} \right] \sin^2 2\psi = \frac{2E\Gamma}{\pi l(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В результате, получено критериальное соотношение, описывающее предельное состояние породного массива в окрестности горной выработки, учитывающее многие влияющие факторы, в том числе и трещиностойкость кровли. Критерий (3) может стать основой для оценки устойчивости кровли. Рассмотрим случай, когда в кровле выработки находится песчаник, трещиностойкость которого изменяется в пределах от 5 до 100 Дж/м², коэффициент Пуассона $\nu=0,1-0,15$, модуль Юнга $E=(2,5-4,0) \cdot 10^3$ МПа, $H=800$ м, $\gamma H=20$ МПа, $Q=0,7 \gamma H$, размер эффективной трещины $l=(0,5-5,0) \times 10^3$ м. Тогда из (3) получим зависимость реактивного сопротивления крепи в зависимости от уровня трещиностойкости пород кровли (рис. 1). Отсюда следует, что трещиностойкость пород кровли естественно влияет на предельное состояние в окрестности горной выработки, определяет необходимый уровень реактивного сопротивления крепи, причем, чем выше уровень трещиностойкости пород кровли, тем необходимо меньшее значение реактивного сопротивления крепи, т.е. тем устойчивее выработка и ее кровля.

Таким образом, установлено, что эффективную поверхностную энергию, интегрально характеризующую сопротивляемость горных пород развитию в них трещин (трещиностойкость), необходимо использовать для оценки устойчивости кровли, как один из главных параметров.

Конечно, рассмотренная выше модель, позволяющая получить очень важный качественный результат, является несколько упрощенной. Реальная кровля представляет собой неоднородную (слоистую) среду. А, учитывая, то, что неоднородность упругих свойств горных пород существенно уменьшает их трещиностойкость [5], в развитие вышеуказанного подхода предлагается использовать условия локального разрушения для эффективной трещины, находящейся в границе раздела различных упругих сред (границе слоев), в виде [6]:

$$\frac{(\mu_1 + \mu_2 \chi_1)(\mu_2 + \mu_{12} \chi_{21})}{\mu_1 \mu_2 [\mu_2 (\chi_1 + 1) + \mu_1 (\chi_{21} + 1)]} [k_1^2 + k_{II}^2] = 8\Gamma, \quad (4)$$

где $\mu_i = E_i / (2(1 + \nu_i))$; $\chi_i = 3 - 4\nu_i$; E_i – модуль Юнга i -го слоя; ν_i – коэффициент

Пуассона i -го слоя; Γ – эффективная поверхностная энергия менее трещиностойкого слоя.

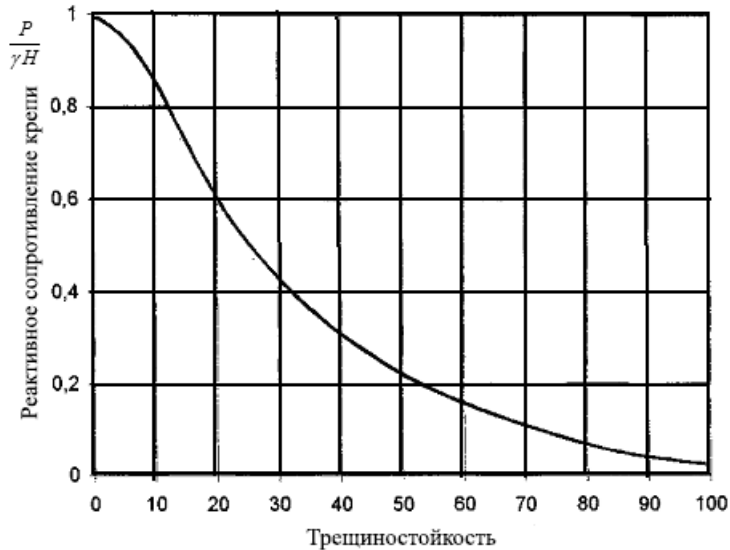


Рис. 1. Зависимость реактивного сопротивления крепи от трещиностойкости окружающих пород.

Располагая аналитическим решением соответствующей задачи о напряженно-деформированном состоянии в окрестности горной выработки, определяем коэффициенты интенсивности напряжений и подставляем в (5). В результате получаем условие предельного состояния горных пород, которое может быть принято за основу разработки критерия устойчивости кровли в окрестности горной выработки. Нам представляется перспективным и принципиально новым указанный подход к проблеме устойчивости кровли в окрестности горных выработок.

3. Предельный пролет. Доказав необходимость использования параметра трещиностойкости при оценке устойчивости пород кровли постараемся его ввести в известные геомеханические соотношения. Согласно А.А.Борисову [7] наиболее важной для условий подземной разработки пластовых месторождений является работа основной кровли. Он установил закономерность справедливую для всех горных выработок, в том числе и для режима установившегося движения основной кровли и покрывающей толщи, а также и естественных полостей в литосфере. Заключается она в следующем: квадрат предельного пролета кровли в любой плоскости поперечного сечения выработки прямо пропорционален произведению квадрата ее мощности на предел прочности при растяжении и обратно пропорционален интенсивности действующей на нее нагрузки.

Величина несущей способности кровли - величина ее предельного пролета L_{pred} - определяется согласно [7] по формуле:

$$L_{pred}^2 = \frac{k_1^2 \phi^2 h^2 |\sigma_p|}{q} \quad (5)$$

где k_1 – расчетный безразмерный коэффициент;
 φ – коэффициент интенсивности защемления кровли на опорах;
 h – мощность кровли;
 $|\sigma|$ – предел прочности кровли на растяжение;
 q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки, действующей на кровлю.

Согласно критерия, вытекающего из уравнения Гриффитса-Орвана для условий плоской деформации [8], разрушающее напряжение

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\Gamma}{\pi(1-\nu^2)l}}, \quad (6)$$

где l – критическая длина трещины.

Полагаем $\sigma_p = \sigma_f$ и подставляем (6) в (5), получим

$$L_{pred}^2 = \frac{k_1^2 \phi^2 h^2}{q} \sqrt{\frac{2E\Gamma}{\pi(1-\nu^2)l}}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что с увеличением уровня трещиностойкости пород будет увеличиваться величина предельного пролета, а, следовательно, повышаться устойчивость кровли. Сделаем обозначение

$$L_{pred}^* = \frac{L_{pred}}{k_1 \phi h}$$

Из (7) рассчитаем L_{pred}^* при различных Γ , при этом полагаем $E = 2 \times 10^3$ МПа, $\nu = 0,1$, $l = 5 \times 10^{-3}$ м, $H = 800$ м.

На рис. 2 представлена графическая зависимость L_{pred}^* от уровня трещиностойкости пород кровли.

Из графической зависимости следует, что можно выделить три области изменения Γ :

- $\Gamma < 10$ Дж/м²;
- $10 \leq \Gamma < 50$ Дж/м² – незначительное изменение L_{pred}^* от Γ ;
- $\Gamma \geq 50$ Дж/м² – L_{pred}^* почти не изменяется.

Таким образом, данный результат, с привлечением анализа влияния мощности и состояния кровли на ее устойчивость, может быть использован для создания классификации кровель.

4. Заключение. В результате предложен и обоснован новый подход в оценке устойчивости кровли горных выработок, отличающийся тем, что впервые учитывается важнейшая характеристика горных пород – их трещиностойкость (эффективная поверхностная энергия).

Получен критерий несущей способности крепи, учитывающий мощность кровли, горное давление, физико-механические свойства окружающих пород и их трещиностойкость. Установлено, что наиболее неустойчивой кровлей следует считать ту, у

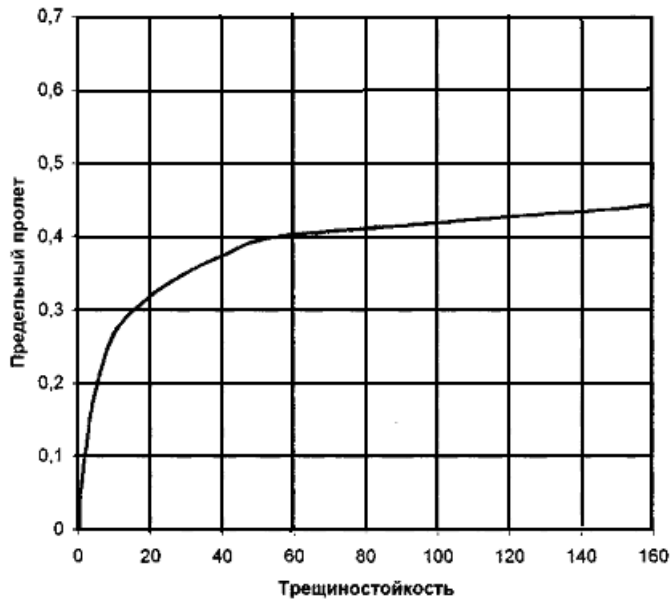


Рис. 2. Зависимость $L_{pred}^* = \frac{L_{pred}}{k_1 \phi h}$ от уровня трещиноватости пород кровли Г .

которой породы имеют трещиностойкость менее 10 Дж/м². Если же породы кровли имеют трещиностойкость более 50 Дж/м², она будет устойчивой.

Результаты исследований также могут быть использованы при разработке новых моделей сдвижения горных пород и земной поверхности.

1. Мухин Е.П. Управление кровлей и крепление очистных забоев с индивидуальной крепью / Е.П. Мухин, Е.П. Захаров, Е.Д. Дубов – К.: Техника, 1994. – 190 с.
2. Указания по управлению горным давлением в очистных забоях угольных шахт – Л.: ВНИМИ, 1988. – 280 с.
3. Аносов О.С. Управление горным давлением при разработке угольных пластов / О.С. Аносов, Н.С. Кузьменко, Г.В. Кудравец – Донецк: Донбасс, 1990. – 303 с.
4. Баклашов И.В. Деформирование и разрушение породных массивов / И.В. Баклашов – Москва: Недра, 1988. – 273 с.
5. Алексеев А.Д. Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений / А.Д. Алексеев, В.Н. Ревва, Н.А. Рязанцев – Киев: Наукова думка, 1989. – 168 с.
6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
7. Борисов А.А. Основы геомеханики горных массивов / А.А. Борисов – Л.: ЛГИ, 1989. – 294 с.
8. Хеккель К. Техническое применение механики разрушения / К. Хеккель – М.: Металлургия, 1974. – 64 с.

Revva V.N.

Prediction of roof stability in vicinity of mine working based on fracture mechanics.

A fresh approach to evaluation of roof stability is proposed and validated where we are the first to take

Прогнозирование устойчивости кровли в окрестности горной выработки

into consideration crack growth resistance of rocks.

Keywords: *stability, mine working, rock failure, crack growth resistance, limiting span, roof.*

Республиканский академический научно-исследовательский и
проектно-конструкторский институт горной геологии,
геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
revva_vn@ukr.net

Получено 26.12.16

ГОУ ВПО
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ЖУРНАЛ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ**

Научный журнал

Основан в 1970 г

№ 1(58) / 2017

Подписано в печать 30.06.2017

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24;
тел.: технический редактор: 302 92 71,
тел.: ответственный секретарь: 302 92 71,
e-mail: jtam_donnu@mail.ru)

Формат 60x84 1/8. Усл. печ. лист. 5,85.
Печать лазерная. Зак № 1753. Тираж 150 экз.

Напечатано в ТОВ «Цифровая типография»
Адрес: г. Донецк, ул. Челюскинцев, 291а, тел.: (062) 388 07 30, -31