

ISSN 2415-7058

**Вестник  
Донецкого  
национального  
университета**



НАУЧНЫЙ  
ЖУРНАЛ  
*Основан  
в 1997 году*

---

*Серия А*  
**Естественные  
науки**

---

**2/2017**

---

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»**

**Главный редактор** – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

**Зам. главного редактора** – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

**Ответственные секретари:** канд. физ.-мат. наук, доц. **Е.В. Алтухов**; канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

**Члены редколлегии:** д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; д-р биол. наук, проф. **М.И. Бойко**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюриня**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences”**

**The Editor-in-Chief** – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**

**The Deputy of the Editor-in-Chief** – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

**Executive Secretaries:** Cand. of phys. and math., docent **E.V. Altukhov**, Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

**The Members of the Editorial Board:** Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr. of biol., prof. **M.I. Boyko**; Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

**Адрес редакции:** ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

ул. Университетская, 24  
283001, г. Донецк

**Тел:** (062) 302-92-56, 302-92-93

**E-mail:** [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)

**URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – Математика; 01.02.00 – Механика; 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки; 03.02.00 – Общая биология.

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Протокол № 8 от 21.11.2017 г.*

# Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 2

Донецк 2017

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Математика*

- Бондарев Б.В., Щепетнева А.В.* Оптимальное управление пакетами акций в случае не склонного к риску инвестора 3
- Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Трансмутационные операторы в евклидовых пространствах 13
- Иванов А.Ю.* Применение отображения типа Гаусса к задаче внешнего освещения 35
- Лиманский Д.В.* О подчиненности одного дифференциального оператора тензорному произведению других в пространстве  $C(\mathbb{R}^n)$  41
- Машаров П.А.* Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве 50

### *Механика*

- Кодак Н.И., Ложкин В.Н.* Циклически симметричное упругопластическое состояние изотропной плоскости с круговыми вырезами в случае идеальной пластичности 61
- Нескородев Р.Н.* Об одном варианте построения уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит 68
- Павлыш В.Н., Тарабаева И.В.* Исследование процесса напорной фильтрации жидкости в анизотропной среде методом математического моделирования (на примере увлажнения угольного пласта) 75

### *Физика*

- Галинский М.К.* Распределенное фокусирование лазерного излучения 83
- Сирюк Ю.А., Безус А.В., Бондарь Е.Д., Смирнов В.В.* Особенности доменных границ при спин-переориентационном фазовом переходе второго рода в равновесной и неравновесной доменных структурах феррит-гранатовой пленки 91
- Третьяков И.А., Данилов В.В.* Функции сложности для выделения и распознавания характерных участков экспериментальных кривых 101

# Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

*Series A. Natural Sciences*

No 2

Donetsk 2017

---

## CONTENTS

### *Mathematics*

- Bondarev B.V., Shchepetneva A.V.* Optimal management of share holdings in case of an investor not prone to risk 3
- Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Transmutation operators in Euclidean spaces 13
- Ivanov A. Yu.* Application of a Gauss-type mapping to an external illumination problem 35
- Limanskii D.V.* On subordination of one differential operator to the tensor product of others in the space  $C(\mathbb{R}^N)$  41
- Masharov P.A.* The local Pompeiu problem for the square in three-dimensional space 50

### *Mechanics*

- Kodak N.I., Lozhkin V.N.* Cyclic symmetrical elastoplastic state of an isotropic plane with circular cut outs in the case of an ideal plasticity 61
- Neskorodev R.N.* A variant for constructing equations of the improved theory of bending orthotropic plates 68
- Pavlysh V.N., Tarabayeva I.V.* The investigation of press liquid filtration process in anisotropy surroundings by mathematic modeling (using coal stratum example) 75

### *Physics*

- Halinskyy M.K.* Distributed focusing of laser radiation 83
- Siryuk Ju.A., Bezus A.V., Bondar E.D., Smirnov V.V.* The peculiarities of domain boundaries at second order spin-reorientation phase transition in equilibrium and nonequilibrium domain structures of ferrite-garnet film 91
- Tretyakov I.A., Danilov V.V.* Functions of complexity for allocation and recognition of characteristic sites of experimental curves 101

УДК 519.21

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПАКЕТАМИ АКЦИЙ В СЛУЧАЕ НЕ СКЛОННОГО К РИСКУ ИНВЕСТОРА

© 2017. *Б. В. Бондарев, А. В. Щепетнева*

Представлено решение задачи Р. Мертона. В качестве основного процесса в соответствующей обобщённой модели П. Самуэльсона, описывающей эволюцию во времени цены стоимости всего рискованного набора, будет процесс, описываемый значениями взвешенной суммы винеровских полей, зависящих от двух параметров- времени и размера пакета акций.

**Ключевые слова:** задача Р. Мертона, уравнение Р. Беллмана, формула Ито, модель П. Самуэльсона, оптимальное управление.

**Введение и вспомогательные результаты.** Среди современных исследователей портфельного анализа инвестора до сих пор большой популярностью пользуется задача Р. Мертона [1, 2] суть которой состоит в следующем: некий инвестор имеет возможность вложить имеющиеся у него средства положив долю  $0 \leq 1 - u \leq 1$  от имеющихся у него капитала на банковский счёт под процентную ставку  $0 < r < +\infty$ , образовавшийся остаток в виде доли  $0 \leq u \leq 1$  от имеющихся средств отводит на покупку акций (целого числа либо части) одного вида. Предполагается, что  $S(t), t \geq 0$  – эволюция цены акции, которая описывается моделью П. Самуэльсона [3]

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\},$$

где  $0 < \mu < +\infty$  – коэффициент локальной доходности,  $0 < \sigma < +\infty$  – так называемый коэффициент волатильности, случайный процесс  $W(t), t \geq 0$  называют основным процессом. В модели П. Самуэльсона  $W(t), t \geq 0$  – стандартный винеровский процесс. Предполагается также, что инвестором осуществляется постоянное потребление капитала компании со скоростью  $u_1(s, x)$  в момент времени  $0 \leq s \leq T$ ,  $x$  – значение капитала в момент времени  $s$ .

В задаче Р. Мертона инвестор, варьируя долей  $0 \leq u \leq 1$  (долей программного управления вложением в рискованный актив), пытается обеспечить максимум некоторому функционалу потребления

$$V(t, x) = M \int_t^T e^{-\rho s} [u_1(s, X_x(s, u, u_1))]^\gamma ds, \quad X_x(t, u, u_1) \equiv x > 0,$$

здесь  $x$  – начальный капитал инвестора,  $X_x(s, u, u_1), t \leq s \leq T$  – эволюция капитала инвестора при конкретном заданном программном управлении  $0 \leq u \leq 1$ , потребления  $u_1, 0 \leq t$  – начальный момент времени деятельности инвестора, то есть начало инвестирования,  $0 \leq t < T < +\infty$  – конец времени инвестирования,  $0 < \rho < +\infty$  – коэффициент непрерывного дисконтирования. Смысл коэффициента  $0 < \gamma < +\infty$  состоит в следующем: если  $u_1(s, x)$  – скорость функции потребления, то случай  $0 < \gamma < 1$  характеризует поведение несклонного к риску инвестора; случай  $\gamma = 1$  характерен для инвестора, безразличного к риску.

В данной работе поставлена следующая задача: найти программное управление, то есть  $(1 - u)$  постоянную долю вложения в безрисковый актив (остаток средств тратится на покупку  $m$  видов пакетов акций,  $i$ -й пакет состоит из  $b_i$ , акций  $i$ -го вида,  $1 \leq i \leq m$ ), и программную скорость потребления  $u_1$  такие, чтобы достигался максимум среднего дисконтированного потребления, причём следует также оптимизировать пакеты по их набору, то есть по разнообразию, а также по внутреннему количественному составу. Основным процессом в соответствующей обобщённой модели П. Самуэльсона, описывающей эволюцию во времени цены стоимости всего рискованного набора, будет процесс, описываемый значениями взвешенной суммы винеровских полей, зависящих от времени и размера пакета акций.

**Безарбитражность предложенной модели рискованного актива.** В данной работе будем рассматривать изменённую модель П. Самуэльсона, разработанную для описания эволюции цены суммы пакетов из  $b_i$  акций вида  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , из  $b_i$  штук, общее представление которой [4]:

$$S(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = S(0, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \mu_i b_i - \frac{b_i \sigma_i^2}{2} \right) t + \sum_{i=1}^m \sigma_i W_i(t, b_i) \right\}, \quad (1)$$

где  $W_i(t, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  – значение  $i$ -того винеровского поля в  $(t, b_i)$ . Так как

$$\Delta W_i(0, 0) = W_i(t, b_i) - W_i(t, 0) + W_i(0, 0) - W_i(0, b_i) = W_i(t, b_i),$$

то есть приращение поля  $W_i(x, y)$  на прямоугольнике  $[0, t] \times [0, b_i]$  совпадает с  $W_i(t, b_i)$ . Подчиненные потоку неубывающих  $\sigma$ - алгебр  $\mathfrak{S}_0^t$ ,  $t \geq 0$  ( $\mathfrak{S}_0^t < \mathfrak{S}$ ) поля  $W_i(t, b_i)$ ,  $W_j(t, b_j)$ ,  $i \neq j$  независимы между собой,  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  – волатильности  $i$ -го пакета из  $b_i$  акций,  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  – локальная доходность,  $S(0, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})$  – начальная цена акции.

Как известно из [5], классическая модель П. Самуэльсона, описывающая цену акции, является безарбитражной, т.е. наблюдается невозможность получить безрисковый доход.

**Теорема 1.** *Предложенная измененная модель Самуэльсона обладает свойством безарбитражности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства безарбитражности [6] модели рискованного актива достаточно найти плотность перехода от меры  $P$  к мере  $\tilde{P}$ , по которой эта эволюция цены уже будет являться мартингалом. Если такая плотность существует, то модель безарбитражна. Плотность естественно должна удовлетворять следующим условиям:

$$1) \rho(t) > 0; 2) M\rho(t) = 1; 3) M\{\rho(t)/\mathfrak{S}_0^s\} = \rho(s).$$

Рассмотрим процесс

$$\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\sigma_i} W_i(t, b_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right)^2 b_i t \right\}.$$

Покажем, что  $\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})$  – плотность, то есть проверим условия

- 1)  $\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \geq 0$ , т.к. плотность выражается экспоненциальной функцией;
- 2)  $M \left\{ \rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) / \mathfrak{S}_0^\tau \right\} = \rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})$ ,  $0 \leq \tau \leq t$  – мартингал;

3)  $M\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \equiv 1, 0 \leq t < +\infty$ .

Приступим к проверке условия 2). Проверим, что  $W_i(t, b_i), 1 \leq i \leq m$ -винеровский процесс. Действительно  $W_i(t, b_i)$  имеет нормальное  $N(0, tb_i)$  распределение,  $W_i(t, b_i), W_i(t+s, b_i) - W_i(t, b_i), s \geq 0, t \geq 0$  – независимые между собой, так как  $W_i(t, b_i) = \Delta W_i(0, 0) = W_i(t, b_i) - W_i(t, 0) + W_i(0, 0) - W_i(0, b_i)$  приращение на  $[0, t] \times [0, b_i]$  и приращение

$$\begin{aligned} W_i(t+s, b_i) - W_i(t, b_i) &= W_i(t+s, b_i) - W_i(0, b_i) + W_i(0, 0) - W_i(t+s, 0) - \\ &- W_i(t, b_i) + W_i(t, 0) - W_i(0, b_i) + W_i(0, 0) = \\ W_i(t+s, b_i) - W_i(t, b_i) + W_i(t, 0) - W_i(t+s, 0) &= \Delta W_i(t, 0) \end{aligned}$$

есть приращение на  $[t, t+s] \times [0, b_i]$ , то есть приращения на непересекающихся прямоугольниках- независимые величины;  $W_i(t+s, b_i) - W_i(t, b_i)$  распределение нормальное  $N(0, sb_i)$ .

Величины  $W_i(t, b_i), W_j(t, b_j), i \neq j$  независимые между собой по определению. Далее при  $0 < s < t$  справедливо

$$M \left\{ \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\sigma_i} W_i(t-s, b_i) \right\} / \mathfrak{S}_0^s \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right)^2 b_i(t-s) \right\}.$$

Тогда при  $0 \leq \tau \leq t$

$$\begin{aligned} M\{\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) / \mathfrak{S}_0^t\} &= M\{\rho(\tau+t-\tau, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) / \mathfrak{S}_0^t\} = \\ &= M\{[\rho(\tau, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})] / \mathfrak{S}_0^\tau\} \times M\{[\rho(t-\tau, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})] / \mathfrak{S}_0^\tau\} = \rho(\tau, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \end{aligned}$$

Таким образом второе свойство имеет место.

Покажем 3). Так как из 2) следует

$$\begin{aligned} M\{\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) / \mathfrak{S}_0^t\} &= \rho(\tau, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \rightarrow M\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = M\rho(\tau, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \rightarrow \\ &\rightarrow M\rho(0, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = M\rho(0, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = 1, \end{aligned}$$

то 3) также имеет место, то есть  $\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})$  – плотность.

Докажем безарбитражность цены. Для этого достаточно показать, что по эквивалентной мере  $\tilde{P}$  процесс  $S(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})$  будет мартингалом, что эквивалентно тому, что процесс  $S(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})$  будет мартингалом. Действительно,

$$\begin{aligned} S(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})\rho(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) &= S(0, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \mu_i b_i - \frac{b_i \sigma_i^2}{2} \right) t + \sum_{i=1}^m \sigma_i W_i(t, b_i) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\sigma_i} W_i(t, b_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right)^2 b_i t \right\} = \\ &= S(0, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \sigma_i - \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right) W_i(t, b_i) - \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{2} \left( \sigma_i - \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right)^2 t \right\}. \end{aligned}$$

Можно показать, что при  $0 < \tau < t < +\infty$

$$M \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \sigma_i - \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right) [W_i(t, b_i) - W_i(\tau, b_i)] - \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{2} \left( \sigma_i - \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right)^2 [t - \tau] \right\} = 1,$$

то арбитраж отсутствует. Теорема 1 доказана.  $\square$

**Дифференциал и формула Ито. Вывод балансового уравнения эволюции капитала инвестора. Задача Р. Мертона.** Выше установлено, что процесс вида  $W(t, b), t \geq 0, b > 0$ , как функция времени  $t \geq 0$ , где параметры  $t \geq 0, b > 0$  – неслучайные величины, а  $W(t, s)$  – винеровское поле [7], обладает всеми свойствами винеровского процесса с временным параметром  $t \geq 0$  и дисперсией  $b > 0$  то есть  $W(t, b) \sim N(0, bt)$ . Сформулируем результаты Ито применительно к нашему случаю.

Пусть  $(\xi_t, \mathfrak{S}_0^t)$ - случайный процесс, имеющий стохастический дифференциал

$$d\xi_t = \sum_{i=1}^m \left( \mu_i b_i - \frac{b_i \sigma_i^2}{2} \right) dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i dW_i(t, b_i), \xi_0 = 0, \quad (2)$$

Пусть функция  $f(t, x)$  непрерывна и имеет непрерывные производные  $f'_t(t, x), f'_x(t, x), f''_{xx}(t, x)$ , тогда процесс  $f(t, \xi_t)$  также имеет стохастический дифференциал

$$df(t, \xi_t) = [f'_t(t, \xi_t)dt + f'_x(t, \xi_t) \sum_{i=1}^m \left( \mu_i b_i - \frac{b_i \sigma_i^2}{2} \right) dt + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, \xi_t) \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 dt + f'_x(t, \xi_t) \sum_{i=1}^m \sigma_i dW_i(t, b_i)].$$

Формула (4) будет называться формулой (замены переменных) Ито. Доказательство аналогично доказательству классической формулы Ито, см. например [8]. Также, если справедливо утверждение (2), то

$$dS(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = S(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i dW(t, b_i) \right], \quad (3)$$

Из (3) в частности следует, что с точностью до бесконечно малых высшего порядка от разбиения можно считать, что новая цена всего рискованного пакета на момент времени  $t + \Delta t$  составит величину

$$S(t + \Delta t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = S(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) \left[ 1 + \sum_{i=1}^m \mu_i b_i d\Delta t + \sum_{i=1}^m \sigma_i [W(t + \Delta t, b_i) - W(t, b_i)] \right] \quad (4)$$

Выведем балансовое уравнение для капитала инвестора, работающего по нашей схеме. Пусть имеет место (2), цена всего рискованного актива описывается формулой (1). Пусть  $X_{t,x}(s)$  – капитал, который имеет инвестор в момент времени  $s, 0 \leq t \leq s \leq T, X_{t,x}(t) = x; r > 0$  – процентная ставка, под которую инвестор вкладывает на банковский счёт часть капитала  $(1 - u)X_{t,x}(s), (0 \leq u \leq 1)$ ;  $X_{t,x}(s)$  – оставшаяся часть капитала, на которую инвестор закупает пакет акций цена каждого из которых на момент времени составляет величину  $S(s, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}), \mu > r; u_1(s, x)$  – скорость потребления капитала в каждый момент времени  $t$  при наличии капитала  $x$ .

На момент времени  $s + \Delta s$  будем иметь за счёт пакета акций:

$$\begin{aligned} & \frac{uX_{t,x}(s)}{S(s, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma})} S(s + \Delta s, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = \\ & = uX_{t,x}(s) \left( 1 + \sum_{i=1}^m \mu_i b_i d\Delta s + \sum_{i=1}^m \sigma_i [W(s + \Delta s, b_i) - W(s, b_i)] \right), \end{aligned}$$

где  $(uX_{t,x}(s))/(S(t, \vec{b}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}))$  – число купленных инвестором в момент времени  $s$ , а  $uX_{t,x}(s)$  – отведённая на покупку сумма. В тоже время инвестор будет иметь на банковском счету:

$$(1 - u)X_{t,x}(s)(1 + r\Delta s).$$

Заметим, что балансовое уравнение Р. Мертона с потреблением (скорость потребления  $u_1(t, x)$ , если в момент времени  $t$  капитал компании  $x$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} dX_{t,x}(s) = (1 - u)rX_{t,x}(s)ds + uX_{t,x}(s) \sum_{i=1}^m \mu_i b_i dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i dW_i(t, b_i) - \\ - u_1(s, X_{t,x}(s))ds, \quad 0 \leq t \leq s \leq T, X_{t,x}(t) = x. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее следует из соотношения:

$$\begin{aligned} X_{t,x}(s + \Delta s) = uX_{t,x}(s) \left( 1 + \sum_{i=1}^m \mu_i b_i d\Delta s + \sum_{i=1}^m \sigma_i [W(s + \Delta s, b_i) - W(s, b_i)] \right) + \\ + (1 - u)X_{t,x}(s)(1 + r\Delta s) - u_1(s, X_{t,x}(s))\Delta s. \end{aligned}$$

Найдем доли вложения  $\bar{u}_1(t, x)$  в рисковый и безрисковый активы, потребление максимизирующее среднее значение суммарного дисконтированного потребления инвестора, не склонного к риску

$$J(u, u_1) = M \int_t^T e^{-\rho s} [u_1(s, X_{t,x}(s))]^\gamma ds, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (6)$$

где  $J(u, u_1)$  – функционал качества,  $\rho > 0$  – степень дисконтирования,  $\xi_{t,x}(t) = x$  – стоимость портфеля в начальный момент времени  $t$ .

Запишем уравнение Р. Беллмана [6] для функционала качества (6), найдём оптимальные управления  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}_1(t, x)$  и цену управления  $V(t, x) = V(t, x, \bar{u}, \bar{u}_1)$ .

Платежная функция (функционал качества) в нашем случае имеет вид:

$$K(t, x, u) = M \left( \left[ \int_t^T e^{-\rho s} [u_1(s, X_{t,x}^u(s), u)]^\gamma ds \right] / X_{t,x}(t) = x \right), \quad (7)$$

где  $X_{t,x}(s)$  – марковский процесс, являющийся решением (5),  $u \in U$  – управление,  $U$  – область допустимых управлений, которая состоит из функций, при которых уравнение (5) имеет слабое решение.

Необходимо найти управление  $\bar{u} \in U$ , чтобы функционал качества (7) принимал максимальное значение:

$$V(t, x) = \max_{u \in U, u_1} K(t, x, u, u_1) = K(t, x, \bar{u}, \bar{u}_1)$$

Необходимо получить уравнение, определяющее связь оптимального управления  $\bar{u}$  с платой при оптимальном управлении  $V(t, x)$ :

$$V(t, x) = \max_{u \in U, u_1} K(t, x, u, u_1).$$

По свойству марковского процесса имеем

$$\begin{aligned} M[F(X_{t,x}(T))/X_{t,x}(s), 0 \leq s \leq \tau] &= [F(X_{t,x}(T))/X_{t,x}(\tau)]; 0 \leq t \leq s \leq \tau < T \\ V(\bar{t}, x) = K(t, x, \bar{u}, \bar{u}_1) &= \\ &= M \left( \left[ \int_{t+\Delta t}^T e^{-\rho s} [\bar{u}_1(s, X_{t,x}^{\bar{u}}(s))]^\gamma ds + \int_T^{t+\Delta t} e^{-\rho s} [\bar{u}_1(s, X_{t,x}^{\bar{u}}(s))]^\gamma ds \right] / \mathfrak{S}_0^t \right) = \\ &= M \left( \left[ M \left\{ \int_{t+\Delta t}^T e^{-\rho s} [\bar{u}_1(s, X_{t,x}^{\bar{u}}(s))]^\gamma ds \mathfrak{S}_0^{t+\Delta t} \right\} + \int_T^{t+\Delta t} e^{-\rho s} [\bar{u}_1(s, X_{t,x}^{\bar{u}}(s))]^\gamma ds \right] \mathfrak{S}_0^t \right) = \\ &= M \{ \bar{V}(t + \Delta t, x + \Delta x) / \mathfrak{S}_0^t \} + e^{-\rho t} [u_1(t, x, \bar{u})]^\gamma \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Используем свойство условного математического ожидания, получим

$$\begin{aligned} 0 &= M \{ [\bar{V}(t + \Delta t, X_{t,x}^{\bar{u}}(t + \Delta t)) - \bar{V}(t, x)] / \mathfrak{S}_0^t \} + e^{-\rho t} [\bar{u}_1(t, x)^\gamma \Delta t + o(\Delta t)] \rightarrow \\ &\rightarrow M \{ [\bar{V}(t + \Delta t, X_{t,x}^{\bar{u}}(t + \Delta t)) - X_{t,x}^{\bar{u}}(t + x) - \bar{V}(t, x)] / \mathfrak{S}_0^t \} + e^{-\rho t} [\bar{u}_1(t, x)^\gamma \Delta t + o(\Delta t)], \\ X_{t,x}^{\bar{u}}(t + \Delta t) - X_{t,x}^{\bar{u}}(t) &\approx \\ &\approx \left( \left[ \bar{u}x \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - (1 - u)xr \right] \Delta t + \sum_{i=1}^m \sigma_i [W(t + \Delta t, b_i) - W(t, b_i)] \right) - \bar{u}_1(t, x) \Delta t. \end{aligned}$$

Откуда имеем:

$$-\frac{\partial \bar{V}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \left[ \bar{u}x \sum_{i=1}^m \mu_i b_i + (1 - \bar{u})xr - \bar{u}_1(t, x) \right] + e^{-\rho t} [\bar{u}_1(t, x)^\gamma] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} \bar{u}^2 x^2 \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2. \tag{8}$$

**Анализ случая**  $0 < \gamma < 1$ . Уравнение Р. Беллмана в этом случае примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (b_i \sigma_i^2 x^2) \bar{u}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left[ \bar{u}y \sum_{i=1}^m \mu_i b_i + (1 - \bar{u})ry - \bar{u}_1(s, x) \right] \frac{\partial V}{\partial x} + e^{-\rho s} [\bar{u}_1(s, x)]^\gamma = 0,$$

$$V(T, x) = 0, 0 < \gamma < 1.$$

Взяв производные в уравнении Р. Беллмана, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 x \bar{u} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right] \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \frac{\partial V}{\partial x} = e^{-\rho s} \gamma [\bar{u}_1]^\gamma, \\ \bar{u} &= - \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right] \frac{\partial V}{\partial x}}{\sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}, \bar{u}_1 = \left[ \frac{\frac{\partial V}{\partial x} e^{\rho s}}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Будем искать цену  $V(s, x)$  в виде  $V(s, x) = g(s)x^\gamma, 0 < \gamma < 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \gamma x^{\gamma-1} g(s), \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma(\gamma - 1) x^{\gamma-2} g(s), \frac{\partial V}{\partial s} = y^\gamma \frac{dg(s)}{ds}, \\ \bar{u} &= \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right] \frac{\partial V}{\partial x}}{\sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}} = - \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right] \gamma x^{\gamma-1} g(s)}{\sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 x \gamma(\gamma - 1) x^{\gamma-2} g(s)} = \frac{\left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right]}{\sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 (1 - \gamma)}, \end{aligned}$$

если  $\bar{u} < 1$ , то

$$\bar{u}_1 = 1,$$

когда  $\bar{u} \geq 1$ , имеем

$$\bar{u}_1 = \left[ \frac{\frac{\partial V}{\partial x}(s, x)e^{\rho s}}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = [g(s)e^{\rho s}]^{\frac{1}{\gamma-1}} x.$$

Рассмотрим случай, когда  $\bar{u} < 1$ . Подставляя найденные управления в уравнение Р. Беллмана (8), получим:

$$\frac{dg(s)}{ds} + \left[ r + \frac{1}{2}\Lambda \right] \gamma g(s) + (1 - \gamma)e^{\frac{\rho s}{\gamma-1}} [g(s)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0, \quad g(T) = 0,$$

где

$$\Lambda = \left( \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right)^2 / \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 (1 - \gamma)$$

Сделаем замену, положим:

$$h(s) = [e^{\rho s} g(s)]^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad e^{\rho s} g(s) = [h(s)]^{1-\gamma}, \quad g(s) = [h(s)]^{1-\gamma} e^{-\rho s},$$

$$\frac{dg(s)}{ds} = (1 - \gamma)e^{-\rho s} [h(s)]^{-\gamma} \frac{dh(s)}{ds} - \rho [h(s)]^{1-\gamma} e^{-\rho s}.$$

Тогда получим:

$$\frac{dh(s)}{ds} + \left[ r + \frac{1}{2}\Lambda - \frac{\rho}{\gamma} \right] \frac{\gamma}{1 - \gamma} h(s) + 1 = 0, \quad h(T) = 0.$$

Пусть

$$A = \left[ r + \frac{1}{2}\Lambda - \frac{\rho}{\gamma} \right] \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

тогда

$$\frac{dh(s)}{ds} + Ah(s) + 1 = 0, \quad h(T) = 0.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$h(s) = \frac{e^{A(T-s)} - 1}{A}, \quad g(s) = \left[ \frac{\exp((T-s)A - 1)}{A} \right]^{1-\gamma} e^{-\rho s}.$$

Значит цена управления имеет вид

$$V(t, x) = x^\gamma g(t) = x^\gamma g(s)$$

и оптимальными управлениями будут

$$\bar{u} = \left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right] / \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 (1 - \gamma), \quad \bar{u}_1(t, x) = xg(s)^{-1}$$

Рассмотрим случай, когда  $\bar{u} \geq 1$ . Подставляя найденные  $\bar{u} = 1$ ,  $\bar{u}_1(s, x) = [g(s)e^{\rho s}]^{\frac{1}{\gamma-1}} x$  в уравнение Р.Беллмана (8), получим:

$$-\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \left[ x \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - [g(s)e^{\rho s}]^{\frac{1}{\gamma-1}} x \right] + e^{-\rho t} [g(s)e^{\rho s}]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} x^\gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} x^2 \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 \quad (9)$$

$$V(T, x) = 0, 0 < \gamma < 1.$$

Опять ищем цену в виде  $V(s, x) = x^\gamma g(s)$ . Подставляя в (9), получим:

$$\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 \gamma (\gamma - 1) g(s) + \left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - [g(s)e^{\rho s}]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \gamma g(s) + e^{-\rho s} [g(s)e^{\rho s}]^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0$$

$$g(T) = 0, 0 < \gamma < 1. \quad (10)$$

Сделаем замену

$$h(s) = [g(s)e^{\rho s}]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad g(s)e^{\rho s} = [h(s)]^{1-\gamma}, \quad g(s) = [h(s)]^{1-\gamma} e^{-\rho s},$$

$$\frac{dg(s)}{ds} = (1 - \gamma) [h(s)]^{1-\gamma} e^{-\rho s} \frac{dh(s)}{ds} - \rho [h(s)]^{1-\gamma} e^{-\rho s}.$$

Подставляя в (10), получим линейное уравнение

$$\frac{dh(s)}{ds} + h(s) \left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i \gamma - \frac{\rho}{1 - \gamma} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 \gamma \right] + 1 - \gamma,$$

$$h(T) = 0.$$

Пусть

$$B = \sum_{i=1}^m \mu_i b_i \gamma - \frac{\rho}{1 - \gamma} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 \gamma, \quad (11)$$

тогда

$$\frac{dh(s)}{ds} + Bh(s) + 1 - \gamma = 0, h(T) = 0.$$

Умножая последнее уравнение на  $e^{Bs}$ , получим:

$$\left[ \frac{dh(s)}{ds} + Bh(s) \right] e^{Bs} = (\gamma - 1) e^{Bs},$$

откуда

$$\frac{d}{ds} [h(s)e^{Bs}] = (\gamma - 1) e^{Bs}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение на интервале  $[t, T]$ , имеем

$$h(s) = (1 - \gamma) e^{-Bs} \int_s^T e^{Bt} dt = (1 - \gamma) \frac{e^{B(T-s)} - 1}{B},$$

$$g(s) = [h(s)]^{1-\gamma} e^{-\rho s} = e^{-\rho s} \left[ (1 - \gamma) \frac{e^{B(T-s)} - 1}{B} \right]^{1-\gamma}, \quad (12)$$

Подставив теперь (11) в (12), получим:

$$h(s) = \frac{(1 - \gamma) [\exp(B(T - s)) - 1]}{B}, \quad g(s) = [h(s)]^{1-\gamma} e^{-\rho s}.$$

Значит, управление будет иметь вид

$$\bar{u}_1(s, x) = g(s)^{-1}x.$$

И цена такого управления составит:

$$V(t, x) = x^\gamma g(t) = x^\gamma g(s),$$

и оптимальные управления

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{u}_1(t, x) = xg(s)^{-1}.$$

Подводя итоги, результат сформулируем в виде теорем.

**Теорема 2.** В случае  $0 < \gamma < 1$ , если  $\bar{u} < 1$ , то оптимальные управления будут иметь вид

$$\bar{u} = \left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right] / \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 (1 - \gamma), \quad \bar{u}_1(t, x) = xg(s)^{-1},$$

а цена такого управления составит

$$V(t, x) = x^\gamma \left[ \frac{\exp((T - s)A - 1)}{A} \right]^{1-\gamma} e^{-\rho s}$$

**Теорема 3.** В случае  $0 < \gamma < 1$ , если  $\left[ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i - r \right] / \sum_{i=1}^m b_i \sigma_i^2 (1 - \gamma) \geq 1$ , то оптимальные управления будут иметь вид

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{u}_1(t, x) = xg(s)^{-1},$$

а цена такого управления составит

$$V(t, x) = x^\gamma \left[ \frac{(1 - \gamma) [\exp(B(T - s)) - 1]}{B} \right]^{1-\gamma} e^{-\rho s}.$$

**Заключение.** В отличие от классической задачи Р. Мертона, которая используется для оптимизации портфеля инвестора для случая набора рисков активов одного вида, в данной работе описывается оптимизация не только акций, но и пакетов по их набору и внутреннему количественному составу, что улучшает деятельность инвестора. Найдено программное управление для измененной обобщенной модели Самуэльсона.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merton R. K. Consumption and Investment with Bankruptcy / R. K. Merton // Industrial Management Review. – 1965. – Vol. 6. – P. 41–49

2. Merton R. K. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous– time model / R. K. Merton // Journal of Economics Theory. – 1971. – Vol. 3. – P. 373–413
3. Samuelson P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly / P. A. Samuelson // Industrial Management Review. – 1965. – Vol. 6. – P. 41–49.
4. Cairoli R Walsh J. B. CStochastic integrals in the plane / R. Cairoli, J. B. Walsh // Acta Math.– 1975. – P. 111–183
5. Ross S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing / S. A. Ross // Journal of Economic Theory. – 1979. – Vol. 13. – P. 341–360
6. Стохастическая финансовая математика. Сб. статей под ред. А.Н. Ширяева. – М.: Наука, 2002.
7. Халл Джон К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Джон К. Халл. – М.: ООО "И.Д.Вильямс 2007. – 396 с.
8. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, В. И. Скороход. – К.: Наукова думка. – 1968. – 354 с.
9. Мицель А. А. Методы оптимизации / А. А. Мицель. – Томск: ТУСУР, 2016. – 68 с.

*Поступила в редакцию 28.03.2016 г.*

## OPTIMAL MANAGEMENT OF SHARE HOLDINGS IN CASE OF AN INVESTOR NOT PRONE TO RISK

*B. V. Bondarev, A. V. Shchepetneva*

A solution of the Merton's problem is presented. As the main process in the corresponding generalized P. Samuelson model describing the evolution in time of the price of the value of the entire risk set, there will be a process described by the values of the weighted sum of the Wiener fields, depending on two parameters—the time and size of the share packet.

**Keywords:** R. Merton's problem, Bellman's equation, Ito formula, model P. Samuelson, optimal control.

### **Бондарев Борис Владимирович**

доктор физико–математических наук, профессор  
Донецкий национальный университет (г. Донецк),  
кафедра теории вероятностей и математической  
статистики

bondarev.mart@gmail.com

+38-050-6260732

### **Bondarev Boris Vladimirovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Donetsk National University, Donetsk

### **Щепетнева Александра Владимировна**

Донецкий национальный университет (г. Донецк),  
аспирантка кафедры теории вероятностей и мате-  
матической статистики

### **Shchepetnova Aleksandra Vladimirovna**

Donetsk National University, Donetsk  
Postgraduate student at the Department of  
probability theory and mathematical statistics

УДК 517.444

## ТРАНСМУТАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2017. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Изучаются трансмутационные операторы, связанные с разложениями по собственным функциям лапласиана в евклидовых пространствах. Для этих операторов исследуется обобщенное свойство гомоморфизма относительно соответствующих сверточных алгебр, трансмутационное свойство относительно подходящих дифференциальных операторов, связь между носителями образа и прообраза, свойство гомеоморфизма между соответствующими пространствами распределений. Кроме того, установлены явные формулы обращения, неравенства нормативного типа, а также найдены образы определенных специальных функций и связь с двойственным преобразованием Абеля.

**Ключевые слова:** сферические средние, функции Бесселя, трансмутационные операторы.

**Введение.** Пусть  $\mathbb{R}^n$  – вещественное евклидово пространство размерности  $n$ ,  $\mathcal{M}(n)$  – группа евклидовых движений  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{K}$  – компактное множество в  $\mathbb{R}^n$  положительной лебеговой меры. Рассмотрим следующую задачу [1–2]: описать класс локально суммируемых функций  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  таких, что

$$\int_{g\mathcal{K}} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

для любого  $g \in \mathcal{M}(n)$ . Эта задача допускает различные обобщения и модификации. Например, вместо одного компакта  $\mathcal{K}$  можно рассматривать семейство компактов, а вместо уравнения (1) изучать решения системы уравнений свёртки с заданными распределениями.

Первые работы по этой теме были выполнены в 1929 году и принадлежат румынскому математику Д. Помпейю, который изучал существование ненулевых функций с условием (1) для некоторых  $\mathcal{K}$ . Как отмечено в [2], он ошибочно предполагал, что в случае, когда  $\mathcal{K}$  – шар, уравнение (1) имеет только нулевое решение. Далее Ф. Джон установил, что функция  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса  $r$  однозначно определяется своими значениями в шаре  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}$ . Позже, в исследованиях Ф. Джона, Д. Дельсарта, Л. Хермандера, Л. Зальцмана, К.А. Беренстейна и др., обнаружились глубокие связи указанных вопросов со многими разделам современной математики и приложениями (см. обзоры [1–5] с обширной библиографией).

В последние годы значительное внимание уделяется локальным вариантам сформулированной задачи, то есть, когда функция  $f$  задана на ограниченной области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  и равенство (1) выполнено для  $g \in \mathcal{M}(n): g\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ . При переходе от глобальной ситуации к локальной трудности существенно возрастают. Это связано с нарушением групповой структуры, действующей на множестве решений уравнения (1). Среди первых результатов в этом направлении отметим аппроксимационную теорему Л. Хермандера для решений уравнения свертки на выпуклых областях в  $\mathbb{R}^n$ , а также локальную теорему о двух радиусах, полученную К.А. Беренстейном и Р. Гэем

в 1986 году (см., например, [1]). Мощный аппарат для полного решения многих задач такого типа, позволивший, в частности, снять абсолютно все лишние ограничения, имеющиеся в работах предшественников, был создан в работах В.В. Волчкова в конце прошлого века. Он основан на представлении решений широкого класса уравнений свёртки в виде рядов по специальным функциям. Результаты этой методики подытожены в монографии [6], где поставлено более пятидесяти новых проблем, рассчитанных на продвижение данного направления. В частности, многообещающей программой исследований представлялось развить технику из [6] для различных классов однородных пространств с инвариантной мерой. Однако здесь возникли серьёзные препятствия (например, в случае компактных двухточечно-однородных пространств, симметрических пространств высоких рангов и группы Гейзенберга).

Ряд этих трудностей был преодолён в результате создания нового метода, разработанного авторами данной работы [7–11]. Он основан на построении и изучении семейства трансмутационных операторов, устанавливающих гомеоморфизм между пространством однородных функций заданной степени на том или ином пространстве и пространством чётных функций на вещественной оси. В некотором обобщённом смысле эти операторы коммутируют с оператором обобщённой свёртки, что позволяет произвести редукцию ряда задач интегральной геометрии и уравнений свёртки на однородном пространстве к одномерному случаю, который хорошо изучен. Отметим, что реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщённых сферических функций и соответствующих сферических преобразований.

В данной работе мы продолжаем дальнейшее исследование трансмутационных операторов, связанных с разложениями по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами. Рассматривается случай евклидова пространства и изучаются следующие свойства трансмутационных операторов: обобщённое свойство гомоморфизма относительно соответствующих сверточных алгебр, трансмутационное свойство относительно подходящих дифференциальных операторов, связь между носителями образа и прообраза, гомеоморфизм между соответствующими пространствами распределений, явные формулы обращения, образы определенных специальных функций, неравенства нормативного типа, а также связь с двойственным преобразованием Абеля. Основные результаты работы уточняют некоторые теоремы, установленные ранее в [7–10].

**Обозначения и вспомогательные сведения.** Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_+$ ,  $\mathbb{N}$  – соответственно множества целых, целых неотрицательных и натуральных чисел;  $[\lambda]$  – целая часть числа  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;  $\binom{j}{k}$  – биномиальные коэффициенты;  $\Gamma$  – гамма функция;  $\mathbb{Z}_+^n$  – множество мультииндексов  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $1 \leq j \leq n$ ;  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  – длина мультииндекса  $\alpha$ ,  

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Для вектора  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  полагаем  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ . Пусть  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ ,  $\dot{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$ ,  $\dot{B}_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq |x| \leq R\}$ .

Пусть  $\mathcal{O}$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  – пространство финитных бесконечно дифференцируемых в  $\mathcal{O}$  функций и  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$  – соответствующее пространство распределений в  $\mathcal{O}$ . Обозначим через  $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$  множество всех распределений из  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$  с компактными носителями.

Для распределения  $T \in \mathcal{E}'(\mathcal{O})$  символами  $\text{supp } T$  и  $\text{ord } T$  соответственно обозначаются носитель и порядок  $T$ . Положим

$$r_0(T) = \inf \{r > 0 : \text{supp } T \subset B_r\}.$$

Кроме того, обозначим через  $r(T)$  точную нижнюю грань радиусов открытых шаров, содержащих носитель  $T$ .

Преобразование Фурье  $\widehat{T}$  распределения  $T$  определяется равенством

$$\widehat{T}(\zeta) = \langle T(x), e^{-i(x_1\zeta_1 + \dots + x_n\zeta_n)} \rangle, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Символом  $*$  обозначается свертка распределений в  $\mathbb{R}^n$  для тех случаев, когда она существует.

Пусть  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  и  $\omega_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$  – площадь сферы  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Пусть также  $SO(n)$  – группа вращений  $\mathbb{R}^n$ ,  $\rho$  и  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  – полярные координаты точки  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $\rho = |x|$ , а если  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , то  $\sigma = x/\rho$ ).

Далее нам потребуются некоторые вспомогательные сведения из теории бesselевых функций. Символом  $J_\nu$  обозначим функцию Бесселя первого рода с индексом  $\nu$ . Имеют место равенства

$$\frac{d}{dz} (z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (2)$$

Если  $\nu > -\frac{1}{2}$ , то выполнена интегральная формула Пуассона

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt. \quad (3)$$

Из асимптотических разложений бesselевых функций следует, что при  $\nu \geq 0$  и всех достаточно больших по модулю  $z \in \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Re } \zeta \geq 0\}$  имеет место оценка

$$|J_\nu(z)| < \gamma_1 e^{|\text{Im } z|} |z|^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

с постоянной  $\gamma_1 > 0$ , не зависящей от  $z$ .

Далее, при  $\nu > -1$  функция  $J_\nu(z)z^{-\nu}$  имеет бесконечно много нулей. Более того, все эти нули вещественные, простые и расположены симметрично относительно точки  $z = 0$ . Если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  – последовательность всех положительных нулей функции  $J_\nu(z)z^{-\nu}$ , занумерованных в порядке возрастания, то выполнено соотношение ортогональности

$$\int_0^1 t J_\nu(\lambda_k t) J_\nu(\lambda_m t) dt = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(\lambda_m), & \text{если } k = m. \end{cases} \quad (5)$$

**Разложения по сферическим гармоникам.** Обозначим через  $\mathcal{H}_{n,k}$  множество всех однородных гармонических многочленов на  $\mathbb{R}^n$  степени  $k$ . Сферической гармоникой степени  $k$  называется сужение на  $\mathbb{S}^{n-1}$  некоторого многочлена из  $\mathcal{H}_{n,k}$ . Множество всех сферических гармоник степени  $k$  далее обозначается символом  $\mathcal{H}^{n,k} =$

$\mathcal{H}^{n,k}(\mathbb{S}^{n-1})$ . Отметим, что  $\mathcal{H}_{n,k}$  и  $\mathcal{H}^{n,k}$  являются инвариантными относительно вращений комплексными векторными пространствами. Пусть  $d(n, k)$  – размерность  $\mathcal{H}^{n,k}$ . Простые вычисления показывают, что  $d(n, 0) = 1$ ,  $d(n, 1) = n$  и

$$d(n, k) = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2} \quad \text{при} \quad k \geq 2$$

(см. [12, гл. 4]). Всюду в дальнейшем  $\mathcal{H}^{n,k}$  будет рассматриваться как подпространство  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ . Как известно (см. [12, гл. 4]),

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_1(\sigma) \overline{h_2(\sigma)} d\omega(\sigma) = 0$$

для любых  $h_1 \in \mathcal{H}^{n,k_1}$ ,  $h_2 \in \mathcal{H}^{n,k_2}$ ,  $k_1 \neq k_2$ , где  $d\omega$  – элемент площади на  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Это означает, что  $\mathcal{H}^{n,k_1}$  ортогонально  $\mathcal{H}^{n,k_2}$  при  $k_1 \neq k_2$ .

Пусть  $Y_j^k$  ( $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ ) – фиксированный ортонормированный базис в  $\mathcal{H}^{n,k}$ . Для  $k = 0$  имеем  $Y_1^k(\sigma) = 1/\sqrt{\omega_{n-1}}$  для всех  $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ . При  $n = 2$  и  $k \geq 1$  далее будет использоваться следующий базис в  $\mathcal{H}^{n,k}$ :

$$Y_1^k(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad Y_2^k(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma_1 - i\sigma_2)^k. \quad (6)$$

Положим  $Y_j^k(x) = \rho^k Y_j^k(\sigma)$  при  $x = \rho\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и любых  $n \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Используя это соотношение, продолжим  $Y_j^k$  до многочлена на  $\mathbb{C}^n$ .

Пусть  $T(\tau)$ ,  $\tau \in SO(n)$  – квазирегулярное представление группы  $SO(n)$  в пространстве  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ , то есть  $(T(\tau)f)(\sigma) = f(\tau^{-1}\sigma)$  для всех  $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Как известно,  $T(\tau)$  является прямой суммой попарно неэквивалентных унитарных представлений  $T^k(\tau)$ , действующих в пространствах  $\mathcal{H}^{n,k}(\mathbb{S}^{n-1})$ . Кроме того, представления  $T^k(\tau)$  неприводимы при  $n \geq 3$ . Пусть  $\{t_{i,p}^k(\tau)\}$  – матрица представления  $T^k(\tau)$ , то есть

$$Y_j^k(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{i=1}^{d(n,k)} t_{i,j}^k(\tau) Y_i^k(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}. \quad (7)$$

Если  $k = 0$ , имеем  $t_{1,1}^k(\tau) = 1$  для любого  $\tau \in SO(n)$ . При  $n = 2$  и  $k \geq 1$  из определения  $t_{i,j}^k(\tau)$  получаем, что  $t_{1,1}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$ ,  $t_{2,2}^k(\tau) = e^{ik\theta}$ , где  $\theta$  – поворот на угол  $\theta$  в  $\mathbb{R}^2$ , соответствующий вращению  $\tau \in SO(2)$ . Кроме того,  $t_{1,2}^k(\tau) = t_{2,1}^k(\tau) = 0$  для любого  $\tau \in SO(2)$  (см. (6) и (7)). При  $n \geq 3$  функции  $t_{l,p}^k$  удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности

$$\begin{cases} \int_{SO(n)} t_{l,p}^k(\tau) \overline{t_{l',p'}^k(\tau)} d\tau = 0, & \text{если } (k, l, p) \neq (k', l', p'), \\ \int_{SO(n)} |t_{l,p}^k(\tau)|^2 d\tau = 1/d(n, k), \end{cases} \quad (8)$$

где  $d\tau$  – мера Хаара на  $SO(n)$ , нормированная соотношением (см. [13, гл. 9])

$$\int_{SO(n)} d\tau = 1.$$

Пусть  $\mathcal{O}$  – непустое открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  такое, что

$$\tau\mathcal{O} = \mathcal{O} \quad \text{для любого} \quad \tau \in SO(n). \quad (9)$$

Как обычно, обозначим  $L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$  – класс функций, локально суммируемых в  $\mathcal{O}$ . Ряд Фурье функции  $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$  по сферическим гармоникам имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma), \quad x \in \mathcal{O}, \quad (10)$$

где

$$f_{k,j}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_j^k(\sigma)} d\omega(\sigma). \quad (11)$$

По теореме Фубини функции  $f_{k,j}$  корректно определены для почти всех  $\rho \in \{r > 0 : S_r \subset \mathcal{O}\}$ , где  $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ . Для таких  $\rho$  имеет место оценка

$$|f_{k,j}(\rho)| \leq \gamma \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(\rho\sigma)| d\omega(\sigma) \quad (12)$$

с постоянной  $\gamma > 0$ , не зависящей от  $f$ . Кроме того, функции  $f^{k,j}(x) = f_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma)$  принадлежат  $L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ . Если  $n = 2$ , из (11) получаем, что

$$f^{k,j}(x) = \int_{SO(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{j,j}^k(\tau)} d\tau. \quad (13)$$

Пусть  $n \geq 3$ . Полагая

$$f_{k,l,p}(x) = f_{k,l}(\rho) Y_p^k(\sigma), \quad (14)$$

для  $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  получаем

$$\begin{aligned} f(\tau^{-1}x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,k)} f_{k,l}(\rho) T^k(\tau) Y_l^k(\sigma) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,k)} f_{k,l}(\rho) Y_p^k(\sigma) t_{l,p}^k(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) следует соотношение

$$f_{k,l,p}(x) = d(n,k) \int_{SO(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{l,p}^k(\tau)} d\tau \quad (15)$$

для всех  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, p \in \{1, \dots, d(n,k)\}$ . Поскольку для каждого компактного множества  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ , удовлетворяющего условию (9) пространство  $L^2(\mathcal{U})$  плотно в  $L(\mathcal{U})$ , из (11) вытекает, что равенство (15) справедливо для любой функции  $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ .

Если  $f \in C^2(\mathcal{O})$ , то для любых  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, d(n,k)\}$  выполнено соотношение

$$(\Delta f)_{k,j}(\rho) = f''_{k,j}(\rho) + \frac{n-1}{\rho} f_{k,j}(\rho) - \frac{k(n+k-2)}{\rho^2} f_{k,j}(\rho), \quad (16)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^n$  (см. [6, часть 1, формула (5.20)]).

Далее нам потребуются некоторые свойства коэффициентов Фурье  $f_{k,j}$  для гладких функций  $f$ .

**Лемма 1.** Пусть  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ ,  $\nu = \frac{n}{2} + k - 1$  и  $f \in L^\infty(B_R)$ . Тогда

$$\left| \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right| \leq \gamma \frac{e^{R|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|z|}} \|f\|_{L^\infty(B_R)}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad (17)$$

где постоянная  $\gamma > 0$  не зависит от  $z$  и  $f$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Не ограничивая общности, можно считать, что число  $|z|$  является достаточно большим. Полагая

$$A = \left| \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,l}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|, \quad (18)$$

имеем

$$A \leq \left| \int_0^{R/\sqrt{|z|}} \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,l}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right| + \left| \int_{R/\sqrt{|z|}}^R \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,l}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|. \quad (19)$$

Используя оценку (12), получаем

$$|f_{k,l}(\rho)| \leq \gamma_1 \|f\|_{L^\infty(B_R)}, \quad \rho \in (0, R), \quad (20)$$

где  $\gamma_1 > 0$  не зависит от  $f$  и  $\rho$ . Кроме того, при больших  $|z|$  и  $R/\sqrt{|z|} \leq \rho \leq R$  из (4) имеем

$$|J_\nu(z\rho)| \leq \gamma_2 \frac{e^{R|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{(1+|z|)\rho}}. \quad (21)$$

Из оценок (4), (19), (20) и (21) находим

$$A \leq \gamma_3 \|f\|_{L^\infty(B_R)} e^{R|\operatorname{Im} z|} \int_0^{R/\sqrt{|z|}} \rho^{\frac{n}{2}} d\rho + \gamma_4 \|f\|_{L^\infty(B_R)} \frac{e^{R|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|z|}} \int_{R/\sqrt{|z|}}^R \rho^{\frac{n-1}{2}} d\rho,$$

где постоянные  $\gamma_3, \gamma_4 > 0$  не зависят от  $z$  и  $f$ . Из последнего неравенства следует (17) и лемма доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ ,  $\nu = \frac{n}{2} + k - 1$  и  $f \in C^{2m}(\dot{B}_R)$ . Тогда

$$\left| \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right| \leq \gamma \frac{e^{R|\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^{2m+\frac{1}{2}}} \|\Delta^m f\|_{C(\dot{B}_R)}, \quad (22)$$

где  $\operatorname{Re} z \geq 0$  и  $\gamma > 0$  не зависит от  $z$  и  $f$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Используя (18), с помощью интегрирования по частям и (2), (16) при  $z \neq 0$  получаем

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{1}{z} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} \left( f'_{k,j}(\rho) - k \frac{f_{k,j}(\rho)}{\rho} \right) J_{\nu+1}(z\rho) d\rho \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z^2} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} \left( f''_{k,j}(\rho) + (n-1) \frac{f'_{k,j}(\rho)}{\rho} - k(n+k-2) \frac{f_{k,j}(\rho)}{\rho^2} \right) J_\nu(z\rho) d\rho \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z^2} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} (\Delta f)_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|. \end{aligned}$$

Повторяя этот процесс  $m$  раз, приходим к равенству

$$A = \left| \frac{1}{z^{2m}} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} (\Delta^m f)_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем оценку (22).  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ ,  $\nu = \frac{n}{2} + k - 1$  и  $f \in C^{2m-1}(\dot{B}_R)$ . Тогда

$$\left| \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right| \leq \gamma \frac{e^{R|\operatorname{Im} z|}}{(1 + |z|)^{2m-\frac{1}{2}}} \sum_{l=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_l} \Delta^{m-1} f \right\|_{C(\dot{B}_R)}, \quad (23)$$

где  $\operatorname{Re} z \geq 0$  и  $\gamma > 0$  не зависит от  $z$  и  $f$ .

**Доказательство.** Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2, при  $z \neq 0$  имеем равенства

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{1}{z^{2m-2}} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z^{2m-1}} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} \left( (\Delta^{m-1} f)'_{k,j}(\rho) - \frac{k}{\rho} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) \right) J_{\nu+1}(z\rho) d\rho \right|. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, для  $l \in \{1, \dots, n\}$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) &= \rho^{-1} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) V(\sigma) + \\ &+ \left( (\Delta^{m-1} f)'_{k,j}(\rho) - \frac{k}{\rho} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) \right) \sigma_l Y_j^k(\sigma), \end{aligned}$$

где  $V(\sigma) = 0$  при  $k = 0$  и  $V(\sigma) = \rho^{1-k} \frac{\partial}{\partial x_l} (Y_j^k(x))$  при  $k \geq 1$ . Если  $k = 0$ , то, очевидно,  $\sigma_l Y_j^k(\sigma) \in \mathcal{H}^{n,1}$ . В случае  $k \geq 1$  получаем, что  $\sigma_l Y_j^k(\sigma) = V_1(\sigma) + V_2(\sigma)$ , где  $V_1 \in \mathcal{H}^{n,k-1}$ ,  $V_2 \in \mathcal{H}^{n,k+1}$  (см. [12, гл. 4]). Разлагая  $V_2$  по базису в пространстве  $\mathcal{H}^{n,k+1}$ , приходим к выводу, что существует  $p = p(l) \in \{1, \dots, d(n, k+1)\}$  такое, что при  $\rho \in (0, R)$

$$\begin{aligned} (\Delta^{m-1} f)'_{k,j}(\rho) - \frac{k}{\rho} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) &= \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \left( (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right)_{k+1,p}(\rho). \end{aligned} \quad (25)$$

Используя теперь оценку (20) находим, что при таких  $\rho$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_l} \left( (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right| \leq \gamma_1 \left\| \frac{\partial}{\partial x_l} \left( (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right\|_{C(\dot{B}_R)},$$

где  $\gamma_1 > 0$  не зависит от  $f$  и  $\rho$ . Из этой оценки и равенств (13) и (15) заключаем, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_l} \left( (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right\|_{C(\dot{B}_R)} \leq \gamma_2 \sum_{l=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_l} (\Delta^{m-1} f) \right\|_{C(\dot{B}_R)},$$

где  $\gamma_2 > 0$  не зависит от  $f$ . Применяя лемму 1, отсюда, из (25) и второго равенства в (24), получаем требуемое утверждение.  $\square$

Отображение  $f \rightarrow f^{k,j}$  и разложение (10) можно продолжить на распределения  $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$  следующим образом:

$$\langle f^{k,j}, \psi \rangle = \left\langle f, d(n,k) \int_{SO(n)} \psi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^k(\tau) d\tau \right\rangle = \left\langle f, \overline{(\overline{\psi})_{k,j}(\rho)} \overline{Y_j^k(\sigma)} \right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \quad (26)$$

и

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f^{k,j} \quad (27)$$

(см. [6, часть 1, раздел 5.2]). Отметим, что для любого  $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$  (соответственно,  $f \in C^\infty(\mathcal{O})$ ) ряд в правой части (27) сходится к  $f$  в  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$  (соответственно  $C^\infty(\mathcal{O})$ ).

Для всякого множества  $\mathfrak{W}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$  положим

$$\mathfrak{W}_{k,j}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{k,j}\}.$$

Отметим, что  $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O})$  совпадает с множеством радиальных распределений из  $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$ . В дальнейшем мы пишем  $\mathfrak{W}_{\natural}(\mathcal{O})$  вместо  $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O})$ .

Пусть  $R \in (0, +\infty]$ . Для любого класса  $\mathfrak{W}(-R, R)$  распределений на интервале  $(-R, R) \subset \mathbb{R}^1$  символом  $\mathfrak{W}_{\natural}(-R, R)$  обозначается множество всех четных распределений из  $\mathfrak{W}(-R, R)$ .

Если  $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ ,  $r(T) < R \leq +\infty$  и  $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ , то из (26) следует, что

$$(f * T)^{k,j} = f^{k,j} * T \quad \text{в } B_{R-r(T)}. \quad (28)$$

**Собственные функции оператора Лапласа.** Для  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\eta \in \mathbb{Z}_+$  определим

$$\Phi_{\lambda,\eta,k,j}(x) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} Y_j^k(x) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\varkappa} \left(\frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}(z|x|)}{(z|x|)^{n/2+k-1}}\right) \Big|_{z=\lambda}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

где

$$\varkappa = \eta, \quad \text{если } \lambda \neq 0 \quad \text{и} \quad \varkappa = 2\eta, \quad \text{если } \lambda = 0. \quad (30)$$

Нетрудно проверить, что

$$(\Delta + \lambda^2)^{\eta+1} \Phi_{\lambda,\eta,k,j} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n \quad (31)$$

(см. [6, часть 1, раздел 5.3]).

Далее нас будут в основном интересовать свойства функций  $\Phi_{\lambda,0,k,j}$ , которые, согласно (31), являются собственными функциями оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ .

Из (29), (30) и интегрального представления Пуассона для функций Бесселя (см. (3)) находим

$$\Phi_{\lambda,0,k,j}(x) = \frac{2^{1-k} \Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2} + k)} Y_j^k(x) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+k} \cos(\lambda|x|t) dt. \quad (32)$$

Далее, если  $N \in \mathbb{Z}_+$ ,  $R \in (0, +\infty)$ , то

$$\|\Phi_{\lambda,0,k,j}\|_{C^N(\dot{B}_R)} \leq c(1 + |\lambda|)^{N-k} e^{R|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad (33)$$

где константа  $c > 0$  не зависит от  $\lambda, R$  (см. [6, часть 1, формула (5.30)]).

**Лемма 4.** Пусть  $0 < r < R$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $|\arg \lambda| \leq \pi/2$  и  $|\lambda| > 2/r$ . Тогда

$$\|\Phi_{\lambda,0,k,j}\|_{C^q(\dot{B}_{r,R})} \leq \gamma |\lambda|^{q - \frac{n-1}{2} - k} e^{R|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad (34)$$

где постоянная  $\gamma > 0$  не зависит от  $\lambda$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Оценка (34) есть частный случай предложения 9.5 из монографии [9].  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $E$  – бесконечное ограниченное подмножество  $\mathbb{C}$  и пусть  $A(E, k, j)$  – множество всех конечных линейных комбинаций функций  $\Phi_{\lambda,0,k,j}$ , где  $\lambda \in E$ . Тогда для любого  $R > 0$  множество  $A(E, k, j)$  плотно в пространстве  $C_{k,j}^\infty(B_R)$  с топологией, индуцированной из  $C^\infty(B_R)$ .

Доказательство леммы 5 содержится в [9, предложение 9.9].

**Обобщенное сферическое преобразование.** Пусть  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ . Для  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  введем обобщенное сферическое преобразование  $\mathcal{F}_j^k(f)$  по формуле

$$\mathcal{F}_j^k(f)(z) = \langle f, \overline{\Phi_{z,0,k,j}} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если  $k = 0$ , то  $j = 1$  и функция  $\tilde{f}(z) = \mathcal{F}_1^0(f)(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  называется сферическим преобразованием распределения  $f \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R}^n)$ . Из определения следует, что обобщенное сферическое преобразование является четной целой функцией переменного  $z \in \mathbb{C}$ .

Пусть  $T \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R}^n)$ . Тогда

$$\Phi_{\lambda,0,k,j} * T = \tilde{T}(\lambda) \Phi_{\lambda,0,k,j}$$

по теореме о среднем для собственных функций оператора  $\Delta$  (см. (31)). Отсюда получаем

$$\mathcal{F}_j^k(f * T) = \mathcal{F}_j^k(f) \tilde{T} \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n), T \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R}^n). \quad (35)$$

В частности,

$$\mathcal{F}_j^k(p(\Delta)f)(z) = p(-z^2) \mathcal{F}_j^k(f)(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

для любого многочлена  $p$ . Отметим также, что

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{2\pi^{n/2}}{i^k \Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}} Y_j^k(\zeta) \mathcal{F}_j^k(f) \left( \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n \quad (36)$$

(см. [6, часть 1, раздел 6.2]).

Следующий результат уточняет теорему 3.1, полученную в работе [8] (см. также [6, гл. 1.6], [9, гл. 9]).

**Теорема 1.** (i) Если  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ , то

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_1 (1 + |z|)^{\gamma_2} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (37)$$

где  $\gamma_2 = \operatorname{ord} f - k$  и  $\gamma_1 > 0$  не зависит от  $z$ .

(ii) Если  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  и  $0 \notin \operatorname{supp} f$ , то оценка (37) выполнена при  $\gamma_2 = \operatorname{ord} f - k - \frac{n-1}{2}$ .

(iii) Если  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$ , то

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_2(1 + |z|)^{-k - \frac{n-1}{2}} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где постоянная  $\gamma_2 > 0$  не зависит от  $z$  и  $f$ .

(iv) Если  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^{2m})(\mathbb{R}^n)$  при некотором  $m \in \mathbb{Z}_+$ , то

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_3(1 + |z|)^{-2m-k - \frac{n-1}{2}} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|} \|\Delta^m f\|_{C(\mathbb{R}^n)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где постоянная  $\gamma_3 > 0$  не зависит от  $z$  и  $f$ .

(v) Если  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^{2m-1})(\mathbb{R}^n)$  при некотором  $m \in \mathbb{N}$ , то для любого  $l \in \{1, \dots, n\}$  имеет место оценка

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_4(1 + |z|)^{-2m-k - \frac{n-3}{2}} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|} \sum_{l=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_l} \Delta^{m-1} f \right\|_{C(\mathbb{R}^n)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где постоянная  $\gamma_4 > 0$  не зависит от  $z$  и  $f$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим  $K = \operatorname{supp} f$  и  $q = \operatorname{ord} f$ . Для  $\delta > 0$  положим  $K_\delta = \{x+y \in \mathbb{R}^n : x \in K, |y| \leq \delta\}$ . Как известно (см. [14, формула (1.4.2)]), существует функция  $\chi_\delta \in \mathcal{D}(K_\delta)$  такая, что  $\chi_\delta = 1$  на  $K_{\delta/2}$  и  $|D^\alpha \chi_\delta| < C\delta^{-|\alpha|}$ , где  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  и постоянная  $C$  не зависит от  $\delta$ . Далее имеем

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| = |\langle f, \chi_\delta \overline{\Phi_{z,0,k,j}} \rangle| \leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq q} \sup |D^\alpha (\chi_\delta \overline{\Phi_{z,0,k,j}})|. \quad (38)$$

Используя (33) и формулу Лейбница, получаем, что последнее выражение не превосходит

$$c_2 e^{(r(f)+\delta)|\operatorname{Im} z|} \sum_{|\alpha| \leq q} \delta^{-|\alpha|} (1 + |z|)^{q-k-|\alpha|}.$$

Полагая  $\delta = 1/(1 + |z|)$ , отсюда получаем (i).

Утверждение (ii) следует из (38) аналогичным образом, если вместо оценки (33) использовать (34). Докажем (iii). Согласно (29), имеем

$$\mathcal{F}_j^k(f)(z) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} \int_K f(x) \overline{Y_j^k(x)} \frac{\overline{J_\nu(\overline{z|x})}}{(z|x)^\nu} dx,$$

где  $\nu = \frac{n}{2} + k - 1$ . Переходя в последнем интеграле к полярным координатам и используя (11), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j^k(f)(z) &= 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{Y_j^k(\sigma)} \int_0^{r(f)} \rho^{\frac{n}{2}} f(\rho\sigma) \overline{J_\nu(\overline{z\rho})} d\rho d\omega(\sigma) z^{1-\frac{n}{2}-k} = \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} \left( \int_0^{r(f)} \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,j}(\rho) \overline{J_\nu(\overline{z\rho})} d\rho \right) z^{1-\frac{n}{2}-k}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 получаем утверждение (iii).

Утверждения (iv) и (v) доказываются аналогично, только вместо леммы 1 нужно использовать леммы 2 и 3 соответственно.  $\square$

Следующая теорема уточняет соответствующий результат из работы [8].

**Теорема 2.** Пусть  $w$  – четная целая функция, удовлетворяющая условию

$$|w(z)| \leq \gamma_1(1 + |z|)^{\gamma_2} e^{R|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (39)$$

где постоянные  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ ,  $R \geq 0$  не зависят от  $z$ . Тогда существует и единственно распределение  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  такое, что  $\mathcal{F}_j^k(f) = w$ . Кроме того,  $r(f) \leq R$  и

$$\operatorname{ord} f \leq \max \{0, \gamma_2 + k + n/2 + 1\}. \quad (40)$$

Если  $\operatorname{ord} f$  является нечетным числом, то

$$\operatorname{ord} f \leq 2 \left\lceil \frac{1}{2}(\gamma_2 + k + n/2) \right\rceil + 1. \quad (41)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ . По неравенству Шварца

$$\left| \operatorname{Im} \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right|^2 \leq \sum_{m=1}^n (\operatorname{Im} \zeta_m)^2. \quad (42)$$

Из условий (39), (42) и [14, теорема 7.3.1] следует, что существует и единственно распределение  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  такое, что

$$\widehat{f}(\zeta) = w \left( \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right) Y_j^k(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Кроме того,  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  и  $r(f) \leq R$  (см. (36), (39) и [8, теорема 3.1(ii)]). Докажем оценку (40). Сначала рассмотрим случай, когда  $\operatorname{supp} f = \{0\}$ . В этом случае

$$f = p \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \delta_0,$$

где  $p$  – многочлен и  $\delta_0$  – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в нуле (см. [9, следствие 6.2(iii)]). Тогда степень многочлена  $p$  равна порядку распределения  $f$  и не превосходит величины  $\gamma_2 + k$  согласно формуле (36). Поэтому оценки (40) и (41) для данного случая очевидны и далее можно считать, что существует  $x_0 \in (\operatorname{supp} f) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Отметим, что если  $2(\gamma_2 + k) + n < 0$ , то согласно формуле (36) и оценке (39) распределение  $f$  принадлежит  $L^2(\mathbb{R}^n)$  и оценка (40) выполнена. Поэтому далее будем предполагать, что  $2(\gamma_2 + k) + n > 0$ . Положим  $d = 1 + \left\lceil \frac{1}{2}(\gamma_2 + k + \frac{n}{2}) \right\rceil$ , тогда  $d \in \mathbb{N}$ . Докажем, что при сделанных предположениях целая функция  $w$  имеет бесконечно много нулей. Действительно, в противном случае из оценки (39) и теоремы Адамара о факторизации (см. [6, гл. 1.2]) следует, что  $w(z) = e^{\alpha z} q(z)$  для некоторого многочлена  $q$  и некоторого  $\alpha \in \mathbb{C}$ . В силу четности  $w$  отсюда заключаем, что  $w$  является четным многочленом, а это противоречит предположению относительно носителя  $f$  (см. [9, следствие 6.2(iii)]). Следовательно, существует многочлен  $p$  степени  $d$  такой, что функция  $w(z)/p(-z^2)$  является целой. Это означает, что уравнение  $p(\Delta)F = f$  имеет решение  $F \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  и при этом

$$\mathcal{F}_j^k(f)(z) = \mathcal{F}_j^k(F)(z)p(-z^2).$$

Из определения  $d$  и условия (39) получаем, что  $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$  (см. (36)) и тогда  $\operatorname{ord} f \leq 2d$ . Если  $\operatorname{ord} f$  является нечетным числом, отсюда следует, что  $\operatorname{ord} f \leq 2d - 1$

и, тем самым, выполнено (41). В противном случае вместо  $f$  нужно рассмотреть распределение  $f_1$ , у которого

$$\widehat{f}_1(\zeta) = w \left( \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right) \zeta_1 Y_j^k(\zeta),$$

и повторить для него рассуждение с многочленом  $p$ . Учитывая, что  $\text{ord } f_1 = \text{ord } f + 1$ , отсюда получаем утверждение теоремы 2 в полном объеме.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $w$  – четная целая функция, удовлетворяющая (39) и пусть  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  такое, что  $\mathcal{F}_j^k(f) = w$ . Тогда выполнены следующие утверждения.

(i) Если  $\gamma_2 < -n - k - l$  для некоторого  $l \in \mathbb{Z}_+$ , то  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^l)(\mathbb{R}^n)$  и

$$f(x) = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-1} \Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \Phi_{\lambda,0,k,j}(x) \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) d\lambda. \quad (43)$$

(ii) Если  $\gamma_2 < -n - k$  и  $\gamma_2 < -n - k + \frac{n-1}{2} - l$  для некоторого  $l \in \mathbb{Z}_+$ , то  $f \in C^l(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\gamma_2 < -n - k$ , тогда  $\widehat{f} \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$  согласно (37) и (36). Поэтому  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  и выполнена формула обращения

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta = \\ &= \frac{2^{n-1}}{i^k \pi^{n/2} \Gamma(n/2) \omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_j^k(f) \left( \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right) Y_j^k(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta. \end{aligned} \quad (44)$$

Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, получаем, что он равен

$$\int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i(x,\lambda\sigma)} Y_j^k(\sigma) d\omega(\sigma) d\lambda.$$

Используя формулу Бохнера (см. [6, формула (1.5.29)]), отсюда и из (65) имеем формулу (43). Далее, если  $\gamma_2 < -n - k - l$ ,  $l \in \mathbb{Z}_+$ , из (43) и оценки (33) заключаем, что  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^l)(\mathbb{R}^n)$ . Этим доказано утверждение (i). Для доказательства (ii) достаточно воспользоваться утверждением (i) для  $l = 0$  и неравенством (34). Таким образом, теорема 3 доказана.  $\square$

**Отображение  $\Lambda^{k,j}$ .** Для  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$  положим

$$\text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)) = \{f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) : \bar{f} \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Пусть  $T \in \text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$ . Согласно теореме Пэли-Винера для одномерного преобразования Фурье и теореме 1(i) существует и единственно распределение  $\Lambda^{k,j}(T) \in \mathcal{E}'_q(\mathbb{R}^1)$  такое, что

$$\widehat{\Lambda^{k,j}(T)}(z) = \overline{\mathcal{F}_j^k(\bar{T})(\bar{z})} = \langle T, \Phi_{z,0,k,j} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (45)$$

Более того, отображение  $\Lambda^{k,j} : T \rightarrow \Lambda^{k,j}(T)$  является биекцией между пространствами  $\text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$  и  $\mathcal{E}'_q(\mathbb{R}^1)$ . Рассмотрим основные свойства  $\Lambda^{k,j}$ .

**Теорема 4.** *Выполнены следующие утверждения.*

- (i)  $\text{ord } \Lambda^{k,j}(T) \leq \max \{0, \text{ord } T - k + 1\}$  и  $r(\Lambda^{k,j}(T)) = r(T)$ .
- (ii) Если  $\text{ord } T < k - 1 - l$  для некоторого  $l \in \mathbb{Z}_+$ , то  $\Lambda^{k,j}(T) \in C_{\mathbb{H}}^l(\mathbb{R}^1)$ .
- (iii) Если  $0 \notin \text{supp } T$  и  $\text{ord } T < k + \frac{n-3}{2} - l$  для некоторого  $l \in \mathbb{Z}_+$ , то  $\Lambda^{k,j}(T) \in C_{\mathbb{H}}^l(\mathbb{R}^1)$ .
- (iv) Если  $T \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^m)(\mathbb{R}^n)$  при некотором  $m \in \mathbb{Z}_+$  и  $m + k + \frac{n-1}{2} > 1$ , то  $\Lambda^{k,j}(T) \in C_{\mathbb{H}}^l(\mathbb{R}^1)$  при  $l = m + k - 1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение (i) следует из теоремы 1(i) и [9, теорема 6.3]. Далее, из теоремы 1(i) следует, что оценка (37) выполнена при  $\gamma_2 = \text{ord } T - k$ . Отсюда и из (45) получаем, что

$$|\widehat{\Lambda^{k,j}(T)}(z)| \leq \gamma_1(1 + |z|)^{\gamma_2} e^{r(T)|\text{Im } z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (46)$$

При условиях утверждения (ii) имеем  $\gamma_2 = -l - 1$  и утверждение (ii) следует из оценки (46). Утверждения (iii) и (iv) доказываются аналогично, нужно лишь использовать второе и третье утверждения теоремы 1.  $\square$

Всюду в дальнейшем отображение  $\Lambda^{0,1} : \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^1)$  будет обозначаться символом  $\Lambda$ .

В заключение этого параграфа рассмотрим один пример, важный для дальнейшего. Пусть  $\delta > -1$ . Определим  $T \in C_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n)$  по формуле

$$T(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \delta + 1)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1 + \delta)} (1 - |x|^2)^\delta, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (47)$$

Используя [6, часть 1, раздел 6.1], находим

$$\widehat{T}(\zeta) = 2^{\frac{n}{2} + \delta} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \delta + 1\right) \frac{J_{\frac{n}{2} + \delta}\left(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2}\right)}{\left(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \delta}}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (48)$$

Согласно интегральному представлению Пуассона (см. [6, формула (1.4.49)]), отсюда имеем

$$\widehat{T}(\zeta) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \delta + 1\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \delta + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2} + \delta} e^{it\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2}} dt. \quad (49)$$

С другой стороны, из формулы (36) видно, что

$$\widehat{T}(\zeta) = \widetilde{T}\left(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2}\right). \quad (50)$$

Сопоставляя равенства (50) и (49), получаем, что

$$\Lambda(T)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \delta + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2} + \delta + 1)} (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2} + \delta}, & \text{если } |t| < 1, \\ 0, & \text{если } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (51)$$

Отметим также, что  $T(x) \geq 0$  и  $\Lambda(t) \geq 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ . Кроме того, из (48) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(x) dx = \widehat{T}(0) = 1 = \widetilde{T}(0) = \widehat{\Lambda(T)}(0) = \int_{\mathbb{R}^1} \Lambda(T)(t) dt. \quad (52)$$

Используя данные свойства, можно показать, что существует последовательность функций  $\{T_m\} \in C_{\natural}(\mathbb{R}^n)$  с носителями, стягивающимися в точку 0, такие, что  $f * T_m \rightarrow f$  при  $m \rightarrow \infty$  локально равномерно для любой  $f \in C(\mathbb{R}^n)$  и при этом  $g * \Lambda(T_m) \rightarrow g$  при  $m \rightarrow \infty$  локально равномерно для любой  $g \in C(\mathbb{R}^1)$ .

**Трансмутационные отображения.** В этом разделе мы определим и изучим трансмутационные операторы  $\mathfrak{A}_{k,j} : \mathcal{D}'_{k,j}(B_R) \rightarrow \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ , которые позволяют свести решение ряда проблем, связанных с оператором свертки в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , к одномерному случаю.

Для  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  и  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  положим

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \int_{\mathbb{R}^1} \psi(t) \cos(\lambda t) dt d\lambda. \quad (53)$$

Нетрудно убедиться, что  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{R}^1)$ . Рассмотрим основные свойства отображения  $f \rightarrow \mathfrak{A}_{k,j}(f)$ .

Пусть  $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ . Учитывая соотношение

$$\widehat{\Lambda(T)} = \widetilde{T},$$

которое является следствием (45), и используя (35) и (53), получаем обобщенное трансмутационное свойство

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f * T) = \mathfrak{A}_{k,j}(f) * \Lambda(T), \quad (54)$$

выполненное для любых  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ .

**Лемма 6.** Пусть  $m = N + k + \left[\frac{n+3}{2}\right]$  при некотором  $N \in \mathbb{Z}$ . Тогда, если  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^m)(\mathbb{R}^n)$ , то  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\natural}^N(\mathbb{R}^1)$  и

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f)(t) = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda. \quad (55)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме 1 (ii) имеем

$$\lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) = O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}+k-m}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (56)$$

Далее, из определения  $m$  следует, что

$$\frac{n-1}{2} + k - m = -N - 2 + \frac{n-1}{2} - \left[\frac{n-1}{2}\right] \leq -N - \frac{3}{2}.$$

Отсюда и из (56) получаем, что  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\natural}^N(\mathbb{R}^1)$  и выполнено равенство (55).  $\square$

**Лемма 7.** Пусть  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C)(\mathbb{R}^n)$  и  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\natural}(\mathbb{R}^1)$ . Тогда

$$f_{k,j}(\varrho) = \frac{2^{1-k}\Gamma(n/2)\sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2}+k)} \int_0^\varrho \mathfrak{A}_{k,j}(f)(t) \frac{(\varrho^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}+k}}{\varrho^{n+k-2}} dt. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность функций

$$T_m(x) = m^n T(mx), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где функция  $T$  определяется равенством (47). Тогда для любого  $\zeta \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_m(\zeta) &= \widetilde{T}_m \left( \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right) = \widehat{\Lambda(T_m)} (\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2) = \\ &= \widehat{T} \left( \frac{\zeta}{m} \right) = \widetilde{T} \left( \frac{1}{m} \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right) = \widehat{\Lambda(T)} \left( \frac{1}{m} \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Таким образом,  $\Lambda(T_m)(t) = m\Lambda(T)(mt)$ . При  $\zeta = 0$  из равенств (58) и (52) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_m(x) dx = 1 = \int_{\mathbb{R}^1} \Lambda(T_m)(t) dt.$$

Учитывая, что  $T_m \geq 0$  и  $\Lambda(T_m) \geq 0$ , отсюда получаем, что  $f * T_m \rightarrow f$  при  $m \rightarrow \infty$  локально равномерно в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) * \Lambda(T_m) \rightarrow \mathfrak{A}_{k,j}(f)$  при  $m \rightarrow \infty$  локально равномерно в  $\mathbb{R}^1$ . Кроме того, из равенств (47) и (51) следует, что  $T_m \in C_{\mathfrak{h}}^\nu(\mathbb{R}^n)$  при  $\nu = [\delta] - 1$ ,  $\delta \geq 1$ , а также  $\Lambda(T_m) \in C_{\mathfrak{h}}^\nu(\mathbb{R}^1)$  при  $\nu = \left[\frac{n-1}{2} + \delta\right] - 1$ ,  $\delta \geq \frac{3-n}{2}$ . Далее, при  $\delta \geq 1 + k + \left[\frac{n+3}{2}\right]$  из доказательства леммы 6 находим

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f * T_m)(t) = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f * T_m)(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Отсюда при достаточно больших  $\delta$  с использованием формулы (32), формулы обращения для преобразования Фурье, теоремы 1(iii) и теоремы 3(i) имеем равенство

$$\begin{aligned} (f * T_m)_{k,j}(\varrho) &= \frac{2^{1-k}\Gamma(n/2)\sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2} + k)} \int_0^\varrho \mathfrak{A}_{k,j}(f * T_m)(t) \frac{(\varrho^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}+k}}{\varrho^{n+k-2}} dt = \\ &= \frac{2^{1-k}\Gamma(n/2)\sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2} + k)} \int_0^\varrho (\mathfrak{A}_{k,j}(f) * \Lambda(T_m))(t) \frac{(\varrho^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}+k}}{\varrho^{n+k-2}} dt. \end{aligned}$$

Учитывая доказанные ранее свойства последовательностей  $\{T_m\}$  и  $\{\Lambda(T_m)\}$ , из последнего соотношения получаем требуемое представление.  $\square$

**Замечание 1.** Если  $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C)(\mathbb{R}^n)$  и  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$ , то равенство (57) можно переписать в виде

$$f^{k,j}(x) = \frac{2^{1-k}\Gamma(n/2)\sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2} + k)} Y_j^k(x) \int_0^1 \mathfrak{A}_{k,j}(f)(\rho u) (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}+k} du.$$

**Лемма 8.** Пусть  $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ ,  $r \in (0, +\infty]$ . Тогда  $f = 0$  на  $B_r$  в том и только том случае, когда  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$  на  $(-r, r)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что  $f$  принадлежит классу  $(\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^\nu)(\mathbb{R}^n)$  при достаточно большом  $\nu \in \mathbb{N}$  (см. доказательство леммы 8 и (54)). Но для данного случая требуемое утверждение сразу следует из (57) и формулы для решения интегральных уравнений абелевского типа (см. [6, часть 1, лемма 8.1]).  $\square$

**Замечание 2.** Положив в (54)  $T = \Delta^\nu \delta_0$ , находим

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Delta^\nu f) = (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2\nu)}. \quad (59)$$

Таким образом, оператор  $\mathfrak{A}_{k,j}$  обладает трансмутационным свойством (см., например, [15, формула (2.31)]).

Утверждение леммы 8 позволяет продолжить  $\mathfrak{A}_{k,j}$  на пространство  $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ ,  $R \in (0, +\infty]$ , по формуле

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \langle \mathfrak{A}_{k,j}(f\eta), \psi \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R), \psi \in \mathcal{D}(-R, R), \quad (60)$$

где  $\eta \in \mathcal{D}_\natural(B_R)$  выбирается так, что  $\eta = 1$  в  $B_{r_0(\psi)+\varepsilon}$  для некоторого  $\varepsilon \in (0, R - r_0(\psi))$ . Тогда  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_{k,j}(-R, R)$  и  $\mathfrak{A}_{k,j}(f)|_{B_r} = \mathfrak{A}_{k,j}(f)|_{(-r,r)}$  для всех  $r \in (0, R]$ .

**Теорема 5.** При  $R \in (0, +\infty]$  имеют место следующие утверждения.

- (i) Если  $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ ,  $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$  и  $r(T) < R$ , то (54) выполнено на интервале  $(r(T) - R, R - r(T))$ . В частности, для  $\mathfrak{A}_{k,j}$  выполнено трансмутационное свойство (см. замечание 2).
- (ii) Пусть  $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ ,  $r \in (0, R]$ . Тогда  $f = 0$  в  $B_r$  в том и только том случае, когда  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$  на  $(-r, r)$ .
- (iii) Оператор  $\mathfrak{A}_{k,j}$  устанавливает гомеоморфизм между пространствами  $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$  и  $\mathcal{D}'_{k,j}(-R, R)$ , а также между пространствами  $C^\infty_{k,j}(B_R)$  и  $C^\infty_{k,j}(-R, R)$ .
- (iv) Если  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $\mu \in \mathbb{Z}_+$ , то

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,\mu,k,j}) = u_{\lambda,\mu},$$

где

$$u_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} ((it)^\mu e^{i\lambda t} + (-it)^\mu e^{-i\lambda t}), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ (-1)^\mu t^{2\mu}, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждения (i) и (ii) следуют непосредственно из леммы 8 и определения оператора  $\mathfrak{A}_{k,j}$  на пространстве  $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ . Доказательство утверждений (iii) и (iv) содержится, например, в [9].  $\square$

**Теорема 6.** При  $R \in (0, +\infty]$  выполнены следующие утверждения.

- (i) Если  $f \in (\mathcal{D}'_{k,j} \cap C^m)(B_R)$  при некотором целом  $m \geq k + \lceil \frac{n+3}{2} \rceil$ , то  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C^N_{\natural}(\mathbb{R}^1)$  при  $N = m - k - \lceil \frac{n+3}{2} \rceil$ .
- (ii) Если  $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$  и  $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_\natural(\mathbb{R}^1)$ , то  $f \in C_{k,j}(B_R)$  и выполнено равенство (57) при  $\rho \in (0, R)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение теоремы следует из леммы 6 и определения  $\mathfrak{A}_{k,j}$ . Для доказательства (ii) рассмотрим радиальную функцию  $\eta \in \mathcal{D}(B_R)$ , равную единице в  $B_{R-\varepsilon}$  при некотором  $\varepsilon \in (0, R/2)$ . Повторяя для функции  $f\eta$  рассуждения из доказательства леммы 8, получим, что равенство (57) выполнено при  $\rho \in (0, R - 2\varepsilon)$  и что  $f \in C_{k,j}(B_{R-2\varepsilon})$ . В силу произвольности  $\varepsilon \in (0, R/2)$  отсюда следует утверждение (ii).  $\square$

**Теорема 7.** Пусть  $R \in (0, +\infty]$ ,  $m = N + k + \left[\frac{n+3}{2}\right]$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда отображение  $\mathfrak{A}_{k,j}$  непрерывно из  $C_{k,j}^m(B_R)$  в  $C_{\natural}^N(-R, R)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим последовательность функций  $f_q \in C_{k,j}^m(B_R)$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , такую, что  $f_q \rightarrow 0$  в  $C^m(B_R)$ . Зафиксируем  $r \in (0, R)$  и выберем  $\eta \in \mathcal{D}_{\natural}(B_R)$  такую, что  $\eta = 1$  в  $B_{r+\varepsilon}$  при некотором  $\varepsilon \in (0, R - r)$ . Используя лемму 6, имеем

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f_q \eta)(t) = \frac{\omega_{n-1}^{-1}}{2^{n-2} \Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f_q \eta)(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda$$

при любом  $t \in \mathbb{R}^1$ . Отсюда при  $t \in [-r, r]$  и любом  $\nu \in \{0, \dots, N\}$  находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{k,j}(f_q)^{(\nu)}(t) &= \mathfrak{A}_{k,j}(f_q \eta)^{(\nu)}(t) = \\ &= \frac{\omega_{n-1}^{-1}}{2^{n-1} \Gamma^2(n/2)} \int_{-\infty}^\infty |\lambda|^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f_q \eta)(|\lambda|) (i\lambda)^\nu e^{i\lambda t} d\lambda. \end{aligned} \quad (61)$$

Полагая  $E = \text{supp } \eta$ , из (61) получаем

$$\|\mathfrak{A}_{k,j}(\eta f_q)\|_{C^N([-r,r])} \leq c \int_{-\infty}^\infty (1 + |\lambda|)^{n+2k-1+N} |\mathcal{F}_j^k(f_q \eta)(|\lambda|)| d\lambda,$$

где  $c > 0$  не зависит от  $q$ . Используя оценку (61), отсюда имеем

$$\|\mathfrak{A}_{k,j}(f_q)\|_{C^N([-r,r])} \leq c_1 \|\eta f_q\|_{C^m(E)},$$

где  $c_1 > 0$  не зависит от  $q$ . Из последнего неравенства видно, что

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \|\mathfrak{A}_{k,j}(f_q)\|_{C^N([-r,r])} = 0.$$

Таким образом,  $\mathfrak{A}_{k,j}(f_q) \rightarrow 0$  в  $C^N(-R, R)$  и теорема 7 доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $R \in (0, +\infty]$ ,  $m = N + k + \left[\frac{n+3}{2}\right]$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$  и все производные функции  $f \in C_{k,j}^m(B_R)$  порядка не выше  $m$  в точке  $x = 0$  равны нулю. Тогда

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f)^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0, \dots, N.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение следует из теоремы 7 и теоремы 5 (ii) с помощью [16, гл. 2, лемма 1.3].  $\square$

**Теорема 8.** Пусть  $T \in \text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$ ,  $r(T) < R$  и  $f \in C_{k,j}^s(B_R)$ , где

$$s = \max \left\{ k + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, \text{ord } T + 1 + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \right\}.$$

Тогда

$$\langle T, f \rangle = \langle \Lambda^{k,j}(T), \mathfrak{A}_{k,j}(f) \rangle.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Используя (45) и теорему 5(iv), имеем

$$\begin{aligned} \langle T, \Phi_{\lambda,0,k,j} \rangle &= \langle \Lambda^{k,j}(T), e^{-i\lambda t} \rangle = \\ &= \langle \Lambda^{k,j}(T), \cos \lambda t \rangle = \langle \Lambda^{k,j}(T), \mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,0,k,j}) \rangle \end{aligned} \quad (62)$$

при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Далее, согласно лемме 2, функцию  $f$  можно аппроксимировать с любой точностью в пространстве  $C^s(B_R)$  линейными комбинациями функций  $\Phi_{\lambda,0,k,j}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Учитывая теорему 7 и теорему 4(i), из равенства (62) получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 9.** Пусть  $R \in (0, +\infty]$  и  $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ . Тогда

$$\text{ord } \mathfrak{A}_{k,j}(f) \leq n + k + 1 + \text{ord } f. \quad (63)$$

Если, кроме того,  $0 \notin \text{supp } f$ , то

$$\text{ord } \mathfrak{A}_{k,j}(f) \leq \frac{n+1}{2} + k + 1 + \text{ord } f. \quad (64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$  и  $\eta \in \mathcal{D}_\natural(B_R)$ ,  $\eta = 1$  в  $B_{r_0(\psi)+\varepsilon}$  для некоторого  $\varepsilon \in (0, R - r_0(\psi))$ . Положим

$$\eta_\lambda(x) = \overline{\Phi_{\lambda,0,k,j}(x)}\eta(x), \quad \lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда имеем

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \frac{\omega_{n-1}^{-1}}{2^{n-2}\gamma(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \int_{-R}^R \psi(t) \cos(\lambda t) dt \langle f, \eta_\lambda \rangle d\lambda. \quad (65)$$

Используя оценку (33), получаем

$$|\langle f, \eta_\lambda \rangle| \leq c(1 + \lambda)^{\text{ord } f - k}, \quad (66)$$

где постоянная  $c > 0$  не зависит от  $\lambda$ . Кроме того,

$$\int_{-R}^R \psi(t) \cos(\lambda t) dt \leq \frac{1}{\lambda^\nu} \int_{-R}^R |\psi^{(\nu)}(t)| dt, \quad \lambda > 0, \quad (67)$$

при любом  $\nu \in \mathbb{Z}_+$ . Полагая  $\nu = \text{ord } f + n + k + 1$ , из (65), (66) и (67) имеем

$$|\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle| \leq c_1 \int_{-R}^R |\psi^{(n+k+1+\text{ord } f)}(t)| dt,$$

где  $c_1$  не зависит от  $\psi$ . Из последнего неравенства следует (63). Для получения неравенства (64) достаточно повторить данные рассуждения с использованием оценки (34) вместо (33).  $\square$

Далее, пусть  $r \in (0, +\infty)$ ,  $N, k \in \mathbb{Z}_+$  и  $m = N + k + \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ . Если  $f \in C_{k,j}^m(\dot{B}_r)$ , то существует  $f_1 \in C_{k,j}^m(\mathbb{R}^n)$  такая, что

$$f_1|_{\dot{B}_r} = f. \quad (68)$$

Более того, если  $f_2 \in C_{k,j}^m(\mathbb{R}^n)$  и равенство (68) выполнено для функции  $f_2$  вместо  $f_1$ , то отсюда и из (68) следует, что  $\mathfrak{A}_{k,j}(f_1) = \mathfrak{A}_{k,j}(f_2)$  на  $[-r, r]$  (см. теорему 5(ii)).

Это означает, что можно корректно определить  $\mathfrak{A}_{k,j}$  как отображение из  $C_{k,j}^m(\dot{B}_r)$  в  $C_{k,j}^N([-r, r])$ , полагая

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f) = \mathfrak{A}_{k,j}(f_1)|_{[-r,r]}, \quad f \in C_{k,j}^m(\dot{B}_r). \quad (69)$$

Отметим, что так определенное отображение будет непрерывным отображением из пространства  $C_{k,j}^m(\dot{B}_r)$  в пространство  $C_{k,j}^N([-r, r])$ . Действительно, если последовательность функций  $f_l \in C_{k,j}^m(\dot{B}_r)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , сходится к нулю в  $C_{k,j}^m(\dot{B}_r)$ , то каждую из этих функций можно продолжить на  $\mathbb{R}^n$  так, чтобы для любого  $R > r$  соответствующая последовательность продолжений сходилась в  $C_{k,j}^m(B_R)$ . Для этого достаточно использовать функции вида  $p_l(\rho)Y_j^k(\sigma)$  при подходящих многочленах  $p_l$ . Используя равенство (69) и теорему 7, получаем, что  $\mathfrak{A}_{k,j}(f_l) \rightarrow 0$  в  $C_{k,j}^N([-r, r])$ .

**Теорема 10.** Пусть  $r \in (0, +\infty)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ . Тогда существует постоянная  $c > 0$ , такая, что

$$\int_{-r}^r \left| (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(M)}(t) \right| dt \leq c \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor + 1} \int_{B_r} \left| \left( \Delta^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor + i} f \right)(x) \right| dx \quad (70)$$

для всех  $M \in \mathbb{Z}_+$  и  $f \in C_{k,j}^{\mu}(\dot{B}_r)$ , где  $\mu = 2 \lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor + 2 \lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor + 2$ .

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай, когда  $f \in C_{k,j}^{\infty}(\dot{B}_r)$  и  $M = 2N$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$ . Положим  $h = (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}$  и определим функцию

$$g(t) = \begin{cases} e^{-i \arg h(t)}, & \text{если } t \in [-r, r] \text{ и } h(t) \neq 0 \\ 1, & \text{если } t \in [-r, r] \text{ и } h(t) = 0 \\ 0, & \text{если } |t| > r. \end{cases} \quad (71)$$

Тогда

$$|\widehat{g}(\lambda)| \leq 2r e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (72)$$

а также

$$\int_{-r}^r |h(t)| dt = \int_{-r}^r h(t) g(t) dt. \quad (73)$$

В соответствии с теоремой 4 заключаем, что существует  $T \in \operatorname{con} j(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$ , такое, что

$$g = \Lambda^{k,j}(T) \quad \text{и} \quad r(T) = r. \quad (74)$$

Кроме того, из (74), (45) и теоремы 2 следует, что  $\operatorname{ord} T \leq 1 + k + \frac{n}{2}$ . Используя теорему 8, равенство (73) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r |h(t)| dt &= \int_{-r}^r (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}(t) (\Lambda^{k,j}(T))(t) dt = \\ &= \int_{-r}^r \mathfrak{A}_{k,j}(\Delta^N f)(t) \Lambda^{k,j}(T)(t) dt = \langle T, \Delta^N f \rangle. \end{aligned}$$

(см. теорему 5(i)). Далее, пусть

$$\alpha_i = \frac{\omega_{n-1} \lambda_i^{n+2k-2} \widehat{g}(\lambda_i)}{2^{n-1} \pi^n r^2 J_{\frac{n}{2}+k}^2(\lambda_i r)}, \quad i = 1, \dots, \lfloor (n+k)/2 \rfloor + 1,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  – последовательность всех положительных нулей функции  $J_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda r)$ , перенумерованных в порядке возрастания. Рассмотрим функцию

$$w(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\lfloor (n+k)/2 \rfloor + 1} \alpha_i \overline{\Phi_{\lambda_i, 0, k, j}(x)}, & \text{если } x \in B_r, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_r. \end{cases} \quad (75)$$

Из соотношений ортогональности для функций Бесселя (см. (5)) получаем, что

$$\mathcal{F}_j^k(\overline{T})(\lambda_i) = \mathcal{F}_j^k(\overline{w})(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, \lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor + 1. \quad (76)$$

Кроме того, из (75) видно, что выполнено неравенство

$$|w(x)| \leq c_1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (77)$$

в котором константа  $c_1$  зависит только от  $n, k$  и  $r$ . Положим

$$P(-\lambda^2) = \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor + 1} (\lambda_i^2 - \lambda^2).$$

Согласно (76), функция

$$u(\lambda) = \frac{\mathcal{F}_j^k(\bar{T})(\lambda) - \mathcal{F}_j^k(\bar{w})(\lambda)}{P(-\lambda^2)}$$

является целой и четной. Пусть  $R = 2\lambda_l$ , где  $l = \lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor + 1$ . Тогда при  $\lambda \geq R$  имеем

$$|P(-\lambda^2)| > c_2(1 + |\lambda|)^{2\lfloor (n+k)/2 \rfloor + 2},$$

где постоянная  $c_2 > 0$  зависит только от  $n, k, r$ . Следовательно, при таких  $\lambda$

$$|u(\lambda)| \leq c_2^{-1} (1 + |\lambda|)^{-2\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor - 2} (|\mathcal{F}_j^k(\bar{T})(\lambda)| + |\mathcal{F}_j^k(\bar{w})(\lambda)|).$$

Принимая во внимание оценку (72), получаем

$$|\mathcal{F}_j^k(\bar{T})(\lambda)| = \left| \widehat{\Lambda^{k,j}(T)}(\bar{\lambda}) \right| = |\widehat{g}(\bar{\lambda})| \leq 2re^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, из (33) и (77) следует, что

$$|\mathcal{F}_j^k(\bar{w})(\lambda)| = |\langle \bar{w}, \Phi_{\bar{\lambda}, 0, k, j} \rangle| \leq c_3 e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где  $c_3 > 0$  зависит только от  $n, k, r$ . Таким образом, выполнено неравенство

$$|u(\lambda)| \leq c_4 (1 + |\lambda|)^{-2\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor - 1} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

с константой  $c_4 > 0$ , зависящей только от  $n, k, r$ . Тогда по теореме 3 существует функция  $T_1 \in C_{k,j}(\mathbb{R}^n)$  такая, что  $\operatorname{supp} T_1 \subset \overset{\circ}{B}_r$  и  $\mathcal{F}_j^k(T_1) = u$ . Из определения  $u$  имеем

$$T - w = \overline{P(\Delta)T_1}, \quad (78)$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r |h(t)| dt &= \overline{\langle T_1, P(\Delta)\Delta^N f \rangle} + \langle w, \Delta^N f \rangle \leq \\ &\leq \int_{B_r} |T_1(x) (P(\Delta)\Delta^N f)(x)| dx + \int_{B_r} |\omega(x)\Delta^N f(x)| dx. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$|T_1(x)| \leq c_5,$$

где константа  $c_5 > 0$  зависит только от  $n, k, r$ , и используя оценку (77), приходим к неравенству (71) в рассматриваемом случае. Предположим теперь, что  $f \in C_{k,j}^\infty(\dot{B}_r)$  и  $M = 2N - 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Учитывая, что

$$(\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N-1)}(t) = \int_0^t (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}(u) du,$$

получаем

$$\int_{-r}^r |(\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N-1)}(t)| dt \leq r \int_{-r}^r |(\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}(t)| dt.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, получим неравенство (71) и для нечетных  $M$ . Рассмотрим теперь общий случай. Пусть  $f \in C_{k,j}^\mu(\dot{B}_r)$ . Тогда существует последовательность  $f_l \in C_{k,j}^\infty(\dot{B}_r)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , такая, что  $f_l \rightarrow f$  в пространстве  $C_{k,j}^\mu(\dot{B}_r)$ . Из определения  $\mu$  видно, что  $\mu \geq M + k + \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ , поэтому последовательность  $\mathfrak{A}_{k,j}(f_l)$  сходится в  $C^M([-r, r])$  к  $\mathfrak{A}_{k,j}(f)$ . Кроме того,  $\Delta^\nu f_l \rightarrow \Delta^\nu f$  в  $C(\dot{B}_r)$  при любом  $\nu = 0, 1, \dots, \mu/2$ . Используя неравенство (71), доказанное для  $f_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , и переходя в нем к пределу при  $l \rightarrow \infty$ , получаем требуемое неравенство для  $f$ . Тем самым, теорема 10 полностью доказана.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беренштейн К. А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. / К. А. Беренштейн, Д. Струппа. – ВИНТИ. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111.
2. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. P. 185–194.
3. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
4. Netuka I. Mean value property and harmonic functions / I. Netuka, J. Vesely. // Classical and modern potential theory and applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1994. – P. 359–398.
5. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
6. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
7. Волчков В. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 8. – С. 29–60.
8. Volchkov V. V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on the phase space associated to the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. // D’Analyse Math. – 2008. – Т. 105. – P. 43–123.
9. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
10. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
11. Волчков В. В. Спектральный анализ на группе конформных автоморфизмов единичного круга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 7. P. 57–80.
12. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
13. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
14. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1 / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 340 с.

15. Koornwinder Т. Н. Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications. /R. A. Askey, Т. Н. Koornwinder, W. Schempp (Eds.). – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984. – P. 1 – 85.
16. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1987. – 735 с.

*Поступила в редакцию 14.05.2017 г.*

## TRANSMUTATION OPERATORS IN EUCLIDEAN SPACES

*V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov*

We study transmutation operators related to eigenfunctions expansions of the Laplacian in Euclidean spaces. For these operators we investigate the generalized homomorphism property with respect to suitable convolution algebras, the transmutation property with respect to suitable differential operators, support properties, and the homeomorphism property with respect to suitable distribution spaces. In addition, explicit inversion formulas and normative type estimates are established as well the images of certain special functions and connections with the dual Abel transform are founded.

**Keywords:** spherical means, Bessel functions, transmutation operators.

**Волчков Валерий Владимирович**

доктор физико-математических наук, профессор  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений  
valeriyvolchkov@gmail.com  
+38-050-5653907

**Volchkov Valery Vladimirovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Full Professor  
Donetsk National University, Donetsk

**Волчков Виталий Владимирович**

доктор физико-математических наук, профессор  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений  
volna936@gmail.com  
+38-050-5653907

**Volchkov Vitaly Vladimirovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Full Professor  
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.5

## ПРИМЕНЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТИПА ГАУССА К ЗАДАЧЕ ВНЕШНЕГО ОСВЕЩЕНИЯ

© 2017. А. Ю. Иванов

В статье автор распространяет технику отображений типа Гаусса разработанную для уточнения класса множеств Борсука на проблему внешнего освещения.

**Ключевые слова:** Задача внешнего освещения, выпуклое множество, множество постоянной ширины, сферические отображения типа Гаусса, направление освещения.

**Введение** Будем говорить, что направление, заданное прямой  $l = \{\lambda y | \lambda \in \mathbb{R}\}$ , освещает границу множества  $F$  в точке  $x \in \partial F$ , если существует такое положительное значение  $\lambda$ , что  $x + \lambda y$  является внутренней точкой множества  $F$ .

Одной из центральных задач комбинаторной геометрии является, так называемая, задача внешнего освещения при помощи параллельных пучков. Данная задача была поставлена В. Г. Болтянским в 1960 г. [1] и заключается в нахождении минимального числа направлений необходимых для освещения границы всего множества. Это наименьшее число обозначим через  $c(F)$ .

Следует также отметить родственную задачу — задачу внешнего освещения при помощи точечных источников. Пусть точка  $x \in \mathbb{R}^n$  лежащая вне множества  $F$  является источником освещения, тогда точка  $y \in \partial F$  называется освещенной извне источником  $x$ , если луч выпущенный из точки  $x$  в направлении точки  $y$  проходит через некоторую внутреннюю точку множества  $F$ , не принадлежащую отрезку соединяющему точки  $x$  и  $y$ . Задача состоит в нахождении наименьшего количества источников освещения необходимых для освещения каждой точки границы множества  $F$ . Это наименьшее число будем обозначать  $c'(F)$  [2].

Нетрудно видеть, что величины  $c(F)$  и  $c'(F)$  могут принимать как конечные так и бесконечные значения (в некоторых случаях неограниченных множеств), при этом для замкнутых выпуклых множеств имеет место неравенство  $c(F) \leq c'(F)$  [3]. Если же на множество наложены дополнительные условия ограниченности, то последнее неравенство становится равенством [1].

**Теорема 1.** Для любого замкнутого ограниченного выпуклого тела  $F \subset \mathbb{R}^n$  справедливо равенство  $c(F) = c'(F)$ .

В работе [1] также удалось связать с проблемой внешнего освещения проблему Борсука о разбиении множества на части меньшего диаметра.

**Теорема 2.** Для любого ограниченного тела  $F \subset \mathbb{R}^n$  справедливо неравенство  $a(F) \leq c(F)$ .

Здесь  $a(F)$  минимальное количество частей множества  $F$ , диаметр которых строго меньше диаметра самого множества  $F$ , необходимых для покрытия всего множества  $F$ .

Следует также отметить, что если  $F$  является ограниченным выпуклым телом из  $\mathbb{R}^n$  которое имеет не более  $n$  нерегулярных граничных точек, то  $c(F) = n + 1$  [2].

Этот результат в совокупности с неравенством из теоремы 2 позволяет надеяться на возможность распространения техник применяемых для изучения проблемы Борсука на случай задачи внешнего освещения.

В данной статье при помощи отображения типа Гаусса построенного в [4] и связанной с ним техники распространяется результат работы автора [5] на случай задачи внешнего освещения.

**Основной результат** Для формулировки основного результата статьи нам потребуется ввести конструкцию отображения типа Гаусса и несколько дополнительных обозначений.

Построим сферическое отображение типа Гаусса  $\zeta : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial G$ , где  $\mathbb{S}^{n-1}$  – сфера в  $\mathbb{R}^n$  радиуса 1,  $G$  – фигура постоянной ширины, следующим образом. Для  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  положим

$$\zeta(\theta) = x, \text{ где } x, y \in \partial G, |x - y| = \text{diam}G \text{ и } x - y = \theta \text{diam}G, \quad (1)$$

т.е.  $x, y$  – диаметрально противоположные точки  $G$  в направлении  $\theta$ .

Также нам необходимо ввести функцию  $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ , где  $\mathbb{Z}_+$  – множество неотрицательных целых чисел,  $G$  – множество постоянной ширины, следующим образом. Для  $x \in G$  положим  $\chi(x)$  равной количеству диаметров множества  $G$ , проходящих через точку  $x$ . Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать  $\chi(x) = \infty$ .

Будем обозначать множество точек нерегулярности границы множества  $G$  через  $EP(G)$ , таким образом,  $EP(G) = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$ . Введем также множество  $\Theta = \{\theta | \zeta(\theta) \in EP(G)\}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  – множество постоянной ширины. Тогда, если существует подпространство  $U$  размерности  $n - 1$  такое, что  $\Theta \cap U = \emptyset$ , то  $c(G) = n + 1$ .

Данное утверждение позволяет определить количество направлений освещения необходимых для множеств постоянной ширины множество нерегулярности которых отвечает определенным условиям. Следует отметить, что утверждение Теоремы 3 в виду результата Теоремы 1 можно переформулировать в терминах  $c(G)$  и т.п.

**Вспомогательные утверждения** Далее нами будут использованы следующие стандартные обозначения. Для  $a, b \in \mathbb{R}^n$  символ  $(a, b)$  обозначает скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ . Пусть  $F$  – множество из  $\mathbb{R}^n$ , тогда его замыкание, множество его внутренних точек, множество его относительной внутренней и его границу будем обозначать  $cl(F)$ ,  $int(F)$ ,  $ri(F)$  и  $\partial F$ , соответственно.

Рассмотрим некоторые вспомогательные результаты необходимые для доказательства Теоремы 3.

Для определенности будем полагать, что  $F$  является множеством постоянной ширины 1. Приведем основные свойства функции  $\zeta(\theta) : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial F$ , введенной в (1), полученные в работах автора [4-5].

**Свойство 1.** Для любого  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  существует единственное  $x \in \partial F$  такое, что  $\zeta(\theta) = x$ .

**Свойство 2.** Для любого  $x \in \partial F$  существует  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  такое, что  $\zeta(\theta) = x$ .

**Свойство 3.**  $\zeta$  – непрерывна на  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Свойство 4.** Пусть  $M$  – компакт из  $\mathbb{S}^{n-1}$ , тогда  $\zeta(M)$  – компакт из  $\partial F$ .

Также нам понадобятся несколько утверждений характеризующие свойства множеств постоянной ширины в терминах отображения типа Гаусса, с доказательствами которых можно ознакомиться в работах автора [4-5].

Введем функцию  $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ , такую, что

$$\chi^*(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\zeta(\theta)), \quad (2)$$

где функция  $\chi : F \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$  определена в начале параграфа.

**Лемма 1.** Пусть  $F \subset \mathbb{R}^n$  – множество постоянной ширины 1, тогда для всех  $x \in F$  выполняется неравенство  $\chi(x) \geq 1$ .

**Определение 1.** Пусть  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ , будем называть дугой  $\overset{\circ}{\theta_1\theta_2}$  – криволинейный отрезок наименьшей длины, соединяющий точки  $\theta_1, \theta_2$  по  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$  такие, что  $\zeta(\theta_1) = \zeta(\theta_2)$ , тогда для любого  $\theta \in \overset{\circ}{\theta_1\theta_2}$  выполняется  $\zeta(\theta) = \zeta(\theta_1)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $F \subset \mathbb{R}^n$  – множество постоянной ширины 1, тогда для любого  $x \in \partial F$ , либо  $\chi(x) = 1$ , либо  $\chi(x) = \infty$ .

**Лемма 3.** Пусть  $F \subset \mathbb{R}^n$  – множество постоянной ширины 1,  $\zeta : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial F$  и  $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$  – функции, заданные в (1) и (2). Пусть также  $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$  – компактное множество, такое, что  $\text{diam} X < 2$  и для любого  $\alpha \in \partial X$  выполняется  $\chi^*(\alpha) = 1$ . Тогда существует направление  $l$  освещающее каждую точку множества  $\zeta(X) = \{x | x = \zeta(\alpha), \alpha \in X\} \subset \partial F$ .

**Доказательство.** Так как  $\text{diam} X < 2$ , то существует такая гиперплоскость  $\Delta$  проходящая через начало координат, что множество  $X$  полностью содержится в одном из порожденных  $\Delta$  открытых полупространств.

Положим теперь вектор  $l \in \mathbb{S}^{n-1}$ , такой что  $l \perp \Delta$  и  $(l, \alpha) < 0$  для всех  $\alpha \in X$ .

Рассмотрим точку  $x \in \zeta(X)$  и покажем, что она освещается направлением  $l$ .

Пусть  $x = \zeta(\alpha)$ , где  $\alpha \in \partial X$ , тогда по условию леммы  $\chi^*(\alpha) = 1$ , т.е.  $x$  является регулярной точкой границы множества  $F$ . Проведем опорную гиперплоскость  $\Gamma$  множества  $F$  через точку  $x$  (она единственна, так как  $x$  является точкой регулярности  $\partial F$ ). Из определения функции  $\zeta$  следует, что гиперплоскость  $\Gamma'$  параллельная к  $\Gamma$  является опорной гиперплоскостью к  $\mathbb{S}^{n-1}$  в точке  $\alpha$ , при этом  $\alpha$  является опорным вектором к  $\Gamma'$ , а значит и к  $\Gamma$ .

Рассмотрим теперь прямую  $\gamma = \{x + \lambda l | \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Положим  $y_1 = x - l$ , заметим что  $y_1 \in \gamma$ , а соответствующее ему значение  $\lambda = -1$ . Так как скалярное произведение вектора  $y_1 - x = -l$  и опорного вектора  $\alpha$  к опорной гиперплоскости  $\Gamma$  положительно

$$(-l, x) = (l, x) > 0,$$

то точка  $y_1$  лежит по другую сторону от  $\Gamma$ , чем множество  $F$ . Значит прямая  $\gamma$  входит в замкнутое полупространство  $\Pi$ , содержащее множество  $F$ , с граничной гиперплоскостью  $\Gamma$  в точке  $x$  (при  $\lambda = 0$ ) и находится в нем при  $\lambda > 0$ . Осталось отметить, что замкнутое полупространство  $\Pi$  является опорным конусом множества  $F$  в точке  $x$  (поскольку  $x$  регулярная точка  $\partial F$ ), а значит прямая  $\gamma$  проходит через внутренние точки множества  $F$ .

Таким образом, существует такое  $\lambda > 0$ , что  $(x + \lambda l) \in \text{int}(F)$ , что и означает, что точка  $x$  освещается направлением  $l$ .

Пусть  $x = \zeta(\alpha)$ , где  $\alpha \in \text{int}(X)$ . Возьмем произвольную точку  $y = \zeta(\beta)$ , где  $\beta \in \partial X$ , тогда из свойств функции  $\zeta$  имеем, что  $y \in \partial\zeta(X)$ . Построим произвольную гиперплоскость  $\Upsilon$  проходящую через точки  $x, y$  и  $x-l$ . Заметим, что прямая  $\gamma = \{x + \lambda l | \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \Upsilon$ . Ранее было показано, что точка  $y \in \partial\zeta(X)$  освещается направлением  $l$ , значит существует точка  $z \in \text{int}(F) \cap \mu = \{y + \lambda l | \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Так как  $\mu$  параллельно  $\gamma$  и  $y, x \in \Upsilon$ , то  $z \in \Upsilon$ . Отсюда следует, что сечение  $D$  множества  $F$  гиперплоскостью  $\Upsilon$  является плоским выпуклым телом. Так как  $y, x \in \zeta(X) \cap \Gamma$ , то  $y, x \in \zeta(X) \cap D$ , значит  $\zeta(X) \cap D \neq \emptyset$ , тогда существует  $t \in \partial\zeta(X) \cap D$ .

Рассмотрим отрезок  $\omega$  соединяющий точки  $t$  и  $y$ .  $ri(\omega) \subset \text{int}(D) \subset \text{int}(F)$ , таким образом, так как  $D$  – выпуклое множество, то  $\gamma \cap ri(D) \neq \emptyset$ . Это и означает, что точка  $x$  освещается направлением  $l$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Доказательство теоремы 3.** В случае, если  $\Theta = \emptyset$ , то множество  $G$  обладает гладкой границей, а значит может быть освещено ровно  $n + 1$  направлением света согласно теореме Хадвигера для тел с гладкой границей.

Допустим, что  $\Theta \neq \emptyset$ .

Не теряя общности, будем считать, что диаметр рассматриваемого множества  $G \subset \mathbb{R}^n$  равен единице.

Пусть  $\theta_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$  будет ортогонально к подпространству  $U$ , то есть для всех  $\alpha \in U$  выполняется соотношение  $(\alpha, \theta) = 0$ . Так как по условию теоремы  $\Theta \cap U = \emptyset$ , то для всех  $\theta \in U \cap \mathbb{S}^{n-1}$ , согласно следствию 1, верно  $\chi^*(\theta) = 1$ .

Построим систему векторов  $\theta_i \in \mathbb{S}^{n-1}, i = \overline{2, n}$  так, что для всех  $1 \leq i, j \leq n$  выполняется  $(\theta_i, \theta_j) = 0$ , тогда, ввиду того, что подпространство  $U$  имеет размерность  $n - 1$ , получаем, что  $\theta_i \in U, i = \overline{2, n}$ , а значит  $\chi^*(\theta_i) = 1$ . Введем декартову систему координат с направляющими ортами  $\theta_i, i = \overline{1, n}$ . Это возможно, так как данная система векторов является нормальной ортогональной системой векторов. Положим

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{1}{2} \inf_{\alpha \in \Theta, \theta \in U \cap \mathbb{S}^{n-1}} |\alpha - \theta|, \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Обозначим множество  $X(\theta_1, G, \varepsilon_1) = \{\alpha \in \mathbb{S}^{n-1} | (\alpha, \theta_1) \geq \varepsilon_1\}$ . Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$ , тогда  $\alpha_1 \geq \varepsilon_1, \beta_1 \geq \varepsilon_1$ .  $|\alpha - \beta|^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = 2 - 2(\alpha_1, \beta_1) - 2 \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \leq 2 - 2\varepsilon_1^2 + 2 = 4 - 2\varepsilon_1^2$ , последнее неравенство сразу следует из того, что для произвольных  $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^{n-1}$  имеет место соотношение  $-1 \leq (\alpha, \beta) \leq 1$ . Из полученного неравенства следует, что  $\text{diam} X(\theta_1, G, \varepsilon_1) < 2$ . Из выбора постоянной  $\varepsilon_1$  и следствия 1 следует, что для всех  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$  таких, что  $-\varepsilon_1 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_1$  выполняется  $\chi^*(\beta) = 1$ . Так как для любого  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \partial X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$  верно  $\beta_1 = \varepsilon_1$ , значит  $\chi^*(\beta) = 1$ . Используя по отношению к множеству  $X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$  лемму 3, получаем, что  $\zeta(X(\theta_1, G, \varepsilon_1))$  можно осветить одним направлением, которое будем обозначать  $l_1$ .

Пусть, также,  $X(\theta_i, G, \varepsilon_1) = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{S}^{n-1} | \alpha_i \geq \varepsilon_1, \alpha_1 \leq \varepsilon_1\}$ . Таким образом,  $X(\theta_i, G, \varepsilon_1) \cap X(\theta_1, G, \varepsilon_1) \subseteq \partial X(\theta_1, G, \varepsilon_1), i = \overline{2, n}$ .

Аналогично множеству  $X(\theta_1, G, \varepsilon_1)$  диаметр  $\text{diam} X(\theta_i, G, \varepsilon_1) < 2, i = \overline{2, n}$ . Рассмотрим теперь значение функции  $\chi^*$  на множестве точек  $\partial X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$ . Если для всех  $\alpha \in \partial X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$  функция  $\chi^*(\alpha) = 1$ , то, используя лемму 3, получаем, что

существует направление  $l_i$  при помощи которого можно осветить  $\varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1))$ . Допустим, теперь, что это не так, то есть что существует такое  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \partial X(\theta_i, G, \varepsilon_1) : \chi^*(\alpha) = \infty$ , тогда из определения множества  $X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$  и правила выбора постоянной  $\varepsilon_1$  следует, что  $\alpha_1 < -\varepsilon_1$ . Так как  $\chi^*(\alpha) = \infty$ , то существует такая компонента связности  $V$  множества  $\Theta$  множества  $G$ , что  $\alpha \in V$ . Пусть  $x \in \partial G$  такой, что  $\varsigma(\alpha) = x$ , тогда для всех  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in V$  получаем  $\varsigma(\beta) = x$ . Рассмотрим множество  $Y = \{y \in \partial G \mid |x - y| = \text{diam}G\}$  и покажем, что  $Y \cap \varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) = \emptyset$ . Пробразом множества  $Y$  функции  $\varsigma$  является множество  $\{-\beta \mid \beta \in V\}$ , а так как  $-\beta = (-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_n)$  и  $\beta \in X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$ , что означает  $\beta_1 \leq \varepsilon_1$ , к тому же ввиду выбора постоянной  $\varepsilon_1$  получаем  $\{\beta \mid -\varepsilon_1 \leq \beta_1 \leq \varepsilon_1\} \cap \Theta = \emptyset$ , то  $-\beta_1 > \varepsilon_1$ . Таким образом,  $\varsigma\{-\beta \mid \beta \in V\} \cap \varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) = \emptyset$ , что и означает искомое утверждение. Значит множество  $X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$  не содержат в себе пар диаметральных точек множества  $\mathbb{S}^{n-1}$ , более того объединив множество  $X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$  с соответствующими компонентами связности  $V$  вместе с их  $\varepsilon_0$  окрестностью на  $\mathbb{S}^{n-1}$ , где постоянная  $\varepsilon_0$  выбирается так, чтобы полученное множество не имело в границе точек принадлежащих  $\Theta$ , получим множество удовлетворяющее условиям Леммы 3. Таким образом, каждое множество  $X(\theta_i, G, \varepsilon_1), i = \overline{2, n}$  можно осветить одним направлением, которое мы будем обозначать  $l_i$ .

Наконец рассмотрим множество  $X_0 = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^n X(\theta_i, G, \varepsilon_1)$ . Таким образом,  $X_0 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \alpha_i \leq \varepsilon_1, i = \overline{1, n}\}$ .

Покажем, что множество  $X_0$  можно осветить одним направлением. Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in X_0$ , такие что  $|\alpha - \beta| = 2$ , тогда, так как  $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^{n-1}$ , получаем  $\alpha = -\beta$ . Из определения множества  $X_0$  следует:

$$\begin{cases} \alpha_i = -\beta_i \leq \varepsilon_1 \\ \beta_i = -\alpha_i \leq \varepsilon_1, \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

то есть  $-\varepsilon_1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq \varepsilon_1$ , учитывая, что  $|\alpha| = 1$  и определение  $\varepsilon_1$ :

$$|\alpha|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_1^2 = n\varepsilon_1^2 \leq \frac{n}{(n+1)^2} < 1.$$

Получили противоречие, значит действительно  $\text{diam}X_0 < 2$ .

Рассматривая значения функции  $\chi^*$  на множестве точек  $\partial X_0$  аналогично множествам  $X(\theta_i, G, \varepsilon_1), i = \overline{2, n}$  можно показать, что множество  $\varepsilon(X_0)$  можно осветить одним направлением, которое мы будем обозначать  $l_0$ .

Таким образом, построена система множеств  $X_0 \bigcup_{i=1}^n X(\theta_i, G, \varepsilon_1) = \mathbb{S}^{n-1}$ , тогда из первого и второго свойств отображения  $\varsigma$  следует, что  $\varsigma(X_0) \bigcup_{i=1}^n \varsigma(X(\theta_i, G, \varepsilon_1)) = \partial G$ . Значит удалось разбить границу множества на  $n+1$  часть, каждая из которых освещается одним направлением. Это означает, что  $c(G) \leq n+1$ , а учитывая что  $c(G) \geq a(G) = n+1$  согласно теореме 2 и результата статьи автора [5] получаем искомый результат теоремы  $c(G) = n+1$ .  $\square$

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Болтянский В.Г. Задача об освещении границы выпуклого тела/ Болтянский В.Г.// Изв. АН Молд. ССР. – 1960 – Т. 10, № 76. – С. 77-84.
2. Болтянский В.Г. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств / В. Г. Болтянский, П. С. Солтан. – Кишинев: Штиинца, 1978. – 280 с.
3. Солтан П.С. Об отношениях между задачами покрытия и освещения выпуклых тел / П. С. Солтан // Изв. АН Молд. ССР, сер. физ.-техн. и мат.наук – 1966. – №4. – С. 91-93.
4. Иванов А. Ю. Решение проблемы Борсука для некоторых множеств с нерегулярной границей / А. Ю. Иванов // Труды Ин-та прикл. матем. и механики. – 2011. – Т. 23. – С. 110-119.
5. Иванов А. Ю. Новые достаточные условия принадлежности множества классу Борсука / А. Ю. Иванов // Труды Ин-та прикл. матем. и механики. – 2012. – Т. 25. – С. 100-106.

*Поступила в редакцию 14.05.2017 г.*

**APPLICATION OF A GAUSS-TYPE MAPPING TO AN EXTERNAL ILLUMINATION PROBLEM**

***A. Yu. Ivanov***

In the article the author extends the technique of Gauss type mapping developed to refine the class of Borsuk sets to the problem of external illumination.

***Keywords:*** external illumination problem, convex set, a constant width's set, spherical Gauss type mappings, direction of illumination.

**Иванов Александр Юрьевич**

кандидат физико-математических наук  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений  
Ivanov.Alexander.Iurievich@gmail.com  
+38-095-5312025

**Ivanov Alexandr Jurievich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.9

## О ПОДЧИНЕННОСТИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТЕНЗОРНОМУ ПРОИЗВЕДЕНИЮ ДРУГИХ В ПРОСТРАНСТВЕ $C(\mathbb{R}^N)$

© 2017. Д. В. Лиманский

В статье получено описание линейного пространства минимальных дифференциальных операторов  $Q(D)$ , подчиненных в  $C(\mathbb{R}^2)$ -норме тензорному произведению  $P(D) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$  двух обыкновенных дифференциальных полиномов произвольного порядка, символы  $p_1(\xi_1)$  и  $p_2(\xi_2)$  которых не содержат кратных вещественных нулей. При доказательстве используются методы гармонического анализа, а также техника многоугольника Ньютона.

**Ключевые слова:** дифференциальный полином, мультипликатор, многоугольник Ньютона, тензорное произведение.

**Введение.** Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Рассматривается задача об описании линейного пространства  $\mathcal{L}_{p,\Omega}^0(P)$  минимальных дифференциальных операторов  $Q(D)$ , подчиненных данному дифференциальному полиному  $P(D)$  в  $L^p(\Omega)$ -норме, т. е. пространство операторов  $Q(D)$ , удовлетворяющих априорной оценке

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|P(D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1)$$

с некоторыми постоянными  $C_1, C_2 > 0$ , не зависящими от выбора  $f$ .

Эта задача была исчерпывающе решена Л. Хёрмандером [1, теорема 2.2] в случае  $p = 2$  и ограниченной области  $\Omega$ . Применяя этот критерий, Хёрмандер доказал [1, теорема 2.5], что для *тензорного произведения*  $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$  двух дифференциальных операторов  $P_1(D)$  и  $P_2(D)$ , действующих по различным группам переменных, пространство  $\mathcal{L}_{2,\Omega}^0(P)$  совпадает с линейной оболочкой произведений операторов из  $\mathcal{L}_{2,\Omega}^0(P_k)$ ,  $k = 1, 2$ , т. е. равно тензорному произведению этих линейных пространств,  $\mathcal{L}_{2,\Omega}^0(P) = \mathcal{L}_{2,\Omega}^0(P_1) \otimes \mathcal{L}_{2,\Omega}^0(P_2)$ .

Далее рассмотрим случай  $p = \infty$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Пространство  $\mathcal{L}_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P)$  будем далее обозначать  $\mathcal{L}(P)$ , а вместо  $L^\infty(\Omega)$  будем писать  $C(\Omega)$ , так как нормы этих пространств одинаковые и в оценках рассматриваются лишь гладкие функции. Из результатов М. М. Маламуда [2] (см. также [3]) вытекает, что для эллиптического оператора  $P(D)$  порядка  $l$  базис пространства  $\mathcal{L}(P)$  образуют  $P(D)$  и дифференциальные мономы  $\{D^\alpha\}_{|\alpha| < l}$ .

Будем называть полином  $P(\xi)$  *невырожденным*, если он не имеет вещественных нулей, т. е.  $P(\xi) \neq 0$  при  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . В связи с вышеприведенным результатом Хёрмандера возникает задача об описании пространства  $\mathcal{L}(P)$  для операторов вида  $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$ . В [3, предложение 3.13] автором и М. М. Маламудом получено утверждение для эллиптических операторов  $P_1(D)$  и  $P_2(D)$ , полные символы  $P_1(\xi)$  и  $P_2(\xi)$  которых невырождены. В этом случае пространство  $\mathcal{L}(P)$  будет таким же, как и у Хёрмандера, т. е.  $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(P_1) \otimes \mathcal{L}(P_2)$ . Но в случае, если сомножители эллиптичны и однородны, размерность пространства  $\mathcal{L}(P)$  минимальна, т. е.

$\dim \mathcal{L}(P) = 2$ , хотя размерность каждого из пространств  $\mathcal{L}(P_1)$  и  $\mathcal{L}(P_2)$  максимально возможная (см. [4, теорема 1]).

Рассмотрим случай  $n = 2$ , т. е. тензорного произведения двух обыкновенных дифференциальных полиномов:

$$P(D_1, D_2) := p_1(D_1) \otimes p_2(D_2). \quad (2)$$

В работе автора [5, теорема 1] было получено описание пространства  $\mathcal{L}(P)$  для случая, когда символ первого сомножителя  $p_1(\xi_1)$  имеет специальный вид (все его нули вещественные и простые). Оказалось, что в этом случае размерность пространства  $\mathcal{L}(P)$  тем меньше, чем больше вещественных нулей (с учетом их кратности) имеет символ второго сомножителя  $p_2(\xi_2)$ . В частности, было доказано, что  $\dim \mathcal{L}(P)$  максимальна, когда полином  $p_2(\xi_2)$  невырожден, и минимальна, если все нули полинома  $p_2(\xi_2)$  вещественны. Продолжая исследования из [5], в работе [6] пространство  $\mathcal{L}(P)$ , где  $P(D)$  имеет вид (2), было описано еще для ряда случаев: например, когда символ  $p_1(\xi_1)$  первого сомножителя — дифференциальный моном, а символ второго сомножителя  $p_2(\xi_2)$  невырожден.

В настоящей работе мы описываем пространство  $\mathcal{L}(P)$  для дифференциальных полиномов  $P(D)$  вида (2), символы которых не имеют кратных вещественных нулей. Основным результатом статьи является теорема 1. Как и в работе [6], при доказательстве этого результата используются методы гармонического анализа, а также техника многоугольника Ньютона (см. [7]).

**Вспомогательные понятия и утверждения.** В этом параграфе мы приведем ряд обозначений, понятий и утверждений, необходимых в дальнейшем.

*Обозначения.* Пусть  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  — поля соответственно вещественных и комплексных чисел;  $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$  ( $n$  сомножителей). Далее,  $D_k := -i\partial/\partial x_k$ ,  $D = (D_1, \dots, D_n)$ ; для мультииндекса  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  положим  $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$ ,  $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$  и  $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ , где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ . Кроме того, пусть  $|x| := (\sum_1^n x_k^2)^{1/2}$  и  $\langle x, y \rangle := \sum_1^n x_k y_k$  для  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Для дифференциального полинома  $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha D^\alpha$  порядка  $l$  обозначим через  $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \xi^\alpha$  его символ, через  $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \xi^\alpha$  — его главный символ. Через  $\deg P$  будет обозначаться степень полинома  $P(\xi)$ , через  $\deg_{\xi_k} P$  — его степень по переменной  $\xi_k$ .

Через  $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$  будет обозначаться алгебра мультипликаторов в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ ; через  $\hat{f}$  ( $\hat{\mu}$ ) — преобразование Фурье (Фурье – Стильтеса) функции  $f$  (меры  $\mu$ ); через  $\delta$  — дельта-мера Дирака, а через  $\chi(t)$  — функция Хевисайда в  $\mathbb{R}$ . Через  $C^\infty(\Omega)$  обозначается множество функций, бесконечно дифференцируемых в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , а через  $C_0^\infty(\Omega)$  — его подмножество функций, финитных в  $\Omega$ .

Обозначим через  $\text{ch}(K)$  выпуклую оболочку плоского множества  $K \subset \mathbb{R}^2$ , т. е. наименьшее выпуклое множество, содержащее множество  $K$  в качестве своего подмножества. Если  $K$  — конечное множество, то  $\text{ch}(K)$  — выпуклый замкнутый многоугольник. Через  $\mathcal{N}(P)$  будет обозначаться многоугольник Ньютона полинома  $P(\xi)$ .

**Определение 1.** [8, гл. IV, §3] Пусть  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье в  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{f} := \mathcal{F}f$ . Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  называют *мультипликатором* в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , если оператор свертки  $f \rightarrow T_\Phi f := \mathcal{F}^{-1}\Phi\mathcal{F}f$  отображает  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  и ограничен в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Мультипликаторы в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  образуют алгебру  $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ . Очевидно, финитные функции являются мультипликаторами, т. е.  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Известно полное описание алгебры  $\mathcal{M}_p$  при  $p = 1, 2, \infty$ . Нас интересует описание алгебры  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$ , обозначаемой далее  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  или просто  $\mathcal{M}$ .

**Утверждение 1.** [8, гл. IV, §3] *Алгебра  $\mathcal{M}$  есть множество образов конечных борелевских мер в  $\mathbb{R}^n$  относительно преобразования Фурье – Стилтъяеса:*

$$\Phi \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty \iff \Phi(\xi) = \widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (3)$$

Из утверждения 1 следует, что все функции  $\Phi \in \mathcal{M}$  ограничены и равномерно непрерывны в  $\mathbb{R}^n$ . Кроме того, из свойств преобразования Фурье вытекает, что алгебра мультипликаторов  $\mathcal{M}$  инвариантна относительно отражений  $\Phi(x) \mapsto \Phi(-x)$ , сдвигов  $\Phi(x) \mapsto \Phi(x - h)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  и растяжений  $\Phi(x) \mapsto \Phi(rx)$ ,  $r > 0$ . Наконец, отметим, что  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  при  $m < n$  (см. [8]).

Утверждение 1 также дает возможность указать примеры мультипликаторов в  $C(\mathbb{R})$ , для которых порождающая их мера  $\mu$  строится явно. Так, функция  $\frac{1}{\xi_1 + i} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , поскольку является преобразованием Фурье – Стилтъяеса конечной меры  $\mu(t)$  с плотностью  $d\mu(t) = -i\chi(t)e^{-t} dt$ , где  $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$  – функция Хевисайда:

$$\widehat{\mu}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 t} d\mu(t) = -i \int_0^{+\infty} e^{it\xi_1} e^{-t} dt = -\frac{-i}{i\xi_1 - 1} = \frac{1}{\xi_1 + i}.$$

Далее, для  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  функция  $\frac{1}{\xi_1 + \omega}$  получается из  $\frac{1}{\xi_1 + i}$  суперпозицией сдвига, растяжения и отражения и, следовательно,  $\frac{1}{\xi_1 + \omega} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ . Наконец,  $\frac{\xi_1}{\xi_1 + \omega} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  как разность мультипликаторов  $1 = \widehat{\delta}$  и  $\frac{\omega}{\xi_1 + \omega}$  (здесь  $\delta$  – дельта-мера Дирака).

Приведем теперь критерий, характерный для априорных оценок в  $C(\mathbb{R}^n)$ .

**Утверждение 2.** [3, 9] *Пусть  $Q(D)$  и  $P(D)$  – дифференциальные полиномы. Тогда включение  $Q \in \mathcal{L}(P)$  эквивалентно алгебраическому тождеству*

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где  $M(\cdot)$  и  $N(\cdot)$  – мультипликаторы в  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 2.** [3] Дифференциальный полином  $P(D)$  порядка  $l$  называется *эллиптическим*, если его главная часть  $P^l(\xi)$  не обращается в нуль при  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

В частности, все обыкновенные дифференциальные операторы (от одной переменной) можно считать эллиптическими.

В работе [10] были получены достаточные условия принадлежности функции  $\Phi(\cdot)$  алгебре мультипликаторов  $\mathcal{M}$ . Там же, в [10], из этого результата выведено

**Утверждение 3.** [5, 10] *Пусть  $P(D)$  – эллиптический дифференциальный полином порядка  $l$  от  $n$  переменных,  $n \geq 1$ . Тогда функции*

$$\Phi(\xi) := \chi(\xi) \frac{Q(\xi)}{P(\xi)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad (5)$$

для любого оператора  $Q(D)$  порядка  $< l$ . Здесь  $\chi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  – срезающая функция,  $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$ ,  $\chi(\xi) = 0$  при  $|\xi| \leq r$  и  $\chi(\xi) = 1$  при  $|\xi| > R$ , где  $0 \leq r < R$ .

Срезающая функция  $\chi(\cdot)$  в утверждении 3 определена корректно, так как множество нулей  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : P(\xi) = 0\}$  эллиптического полинома  $P(\xi)$  компактно (см. [3]). Если полином  $P(\xi)$  невырожден, можно положить  $\chi(\xi) \equiv 1$ .

Отметим, что утверждение 3 справедливо при  $n = 1$  для произвольного полинома  $P(\xi_1)$  степени  $l$ .

Ясно также, что из включения  $\Phi \in \mathcal{M}$  вида (5) для некоторых операторов  $Q(D)$  и  $P(D)$  вытекает включение  $Q \in \mathcal{L}(P)$ . В самом деле, функция  $\Psi(\xi) := (1 - \chi(\xi))Q(\xi)$  финитна, поэтому  $\Psi \in \mathcal{M}$  и

$$Q(\xi) = \chi(\xi) \frac{Q(\xi)}{P(\xi)} \cdot P(\xi) + (1 - \chi(\xi))Q(\xi) = \Phi(\xi)P(\xi) + \Psi(\xi), \quad \text{где } \Phi, \Psi \in \mathcal{M}.$$

Осталось применить утверждение 2.

Пусть  $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$  – полином от двух переменных с комплексными коэффициентами. Его можно представить в виде

$$P(\xi) = \sum_{\alpha \in I_P} a_\alpha \xi^\alpha,$$

где  $I_P$  – конечное множество индексов  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ .

**Определение 3.** [6, 7] Многоугольником Ньютона  $\mathcal{N}(P)$  полинома  $P(\xi)$  будем называть выпуклую оболочку множества индексов  $I_P$ , соответствующих входящим в него мономам, и индекса  $0 = (0, 0)$ , т. е.

$$\mathcal{N}(P) := \text{ch}\{I_P \cup 0\}.$$

Следующий результат из [6] представляет собой необходимое условие включения  $Q \in \mathcal{L}(P)$  в случае  $n = 2$  в терминах многоугольника Ньютона (см. также [9]).

**Утверждение 4.** [6] Пусть  $Q \in \mathcal{L}(P)$  и  $Q(\xi) = \sum_{\alpha \in I_Q} b_\alpha \xi^\alpha$ . Тогда  $I_Q \subset \mathcal{N}(P)$ .

Из утверждения 4 следует [6], что если  $Q \in \mathcal{L}(P)$ , то  $\deg_{\xi_k} Q \leq \deg_{\xi_k} P$ ,  $k = 1, 2$ .

**Тензорное произведение дифференциальных полиномов.** Рассмотрим задачу об описании пространства  $\mathcal{L}(P)$  дифференциальных полиномов  $Q(D)$ , подчиненных в  $C(\mathbb{R}^2)$  тензорному произведению  $P(D) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$  двух обыкновенных дифференциальных операторов, символы которых имеют либо простые вещественные, либо невещественные нули. Другими словами, символ  $P(\xi)$  имеет вид

$$P(\xi_1, \xi_2) = p_1(\xi_1) \cdot p_2(\xi_2) := p_{11}(\xi_1)p_{12}(\xi_1) \cdot p_{21}(\xi_2)p_{22}(\xi_2),$$

где  $\deg p_1 = l$ ,  $\deg p_2 = m$ ,

$$p_{11}(\xi_1) := (\xi_1 - \lambda_1)(\xi_1 - \lambda_2) \dots (\xi_1 - \lambda_p), \quad p_{21}(\xi_2) := (\xi_2 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2) \dots (\xi_2 - \mu_q),$$

причем числа  $\{\lambda_i\}_1^p$  и  $\{\mu_j\}_1^q$  вещественны и попарно различны (внутри каждого из наборов), а полиномы  $p_{12}(\xi_1)$  и  $p_{22}(\xi_2)$  степеней  $l - p$  и  $m - q$  соответственно невырождены, т. е.  $p_{12}(\xi_1) \neq 0$  и  $p_{22}(\xi_2) \neq 0$  при всех вещественных  $\xi_1, \xi_2$  ( $0 \leq p \leq l$ ,  $0 \leq q \leq m$ ). Если  $p = 0$  или  $q = 0$ , полагаем  $p_{11}(\xi_1) \equiv 1$  или  $p_{21}(\xi_2) \equiv 1$  соответственно.

Итак, пусть  $Q \in \mathcal{L}(P)$  для некоторого оператора  $Q(D)$ , где символ  $P(\xi)$  оператора  $P(D)$  имеет описанный выше вид. Нашей задачей является определить возможный вид символа  $Q(\xi)$ .

В случае  $p = q = 0$  эта задача была решена в статье [6, предложение 4.1]. В этом случае символы  $p_1(\xi_1)$  и  $p_2(\xi_2)$  невырождены, поэтому

$$Q(\xi) = \sum_{\alpha_1 \leq l, \alpha_2 \leq m} a_\alpha \xi^\alpha,$$

где  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  – произвольные числа.

Пусть теперь  $p^2 + q^2 > 0$ . Не ограничивая общности, считаем, что  $p > 0$ . Тогда символ  $p_1(\xi_1)$  имеет ровно  $p$  простых вещественных нулей  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . При этом символ второго сомножителя  $p_2(\xi_2)$  может как иметь вещественные нули (при  $q > 0$ ), так и быть невырожденным (при  $q = 0$ ). Ниже мы рассмотрим эти случаи отдельно.

**Лемма 1.** *Если полином  $P(\xi)$  имеет вид  $P(\xi) = (\xi_1 - \lambda)\tilde{P}(\xi)$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) и  $Q \in \mathcal{L}(P)$ , то  $Q(\xi)$  имеет вид  $Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda)\tilde{Q}(\xi) + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Здесь  $\tilde{P}(\xi)$  и  $\tilde{Q}(\xi)$  – полиномы,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Не нарушая общности, можно считать, что  $\lambda = 0$ . Действительно, совершая сдвиг  $\xi_1 - \lambda = \xi'_1$ ,  $\xi_2 = \xi'_2$  в тождестве (4), равносильном включению  $Q \in \mathcal{L}(P)$  (утверждение 2), приходим к аналогичному тождеству, в котором  $P(\xi'_1, \xi'_2)$  делится на  $\xi'_1$ , а  $M(\xi')$  и  $N(\xi')$  останутся мультипликаторами, так как алгебра  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$  инвариантна относительно сдвигов (см. §2).

Если  $P(\xi) = \xi_1 \tilde{P}(\xi)$ , то  $P(\xi)$  не содержит мономов  $\xi_1^\mu$ ,  $\mu > 0$ . И, значит, их не содержит и многоугольник Ньютона  $\mathcal{N}(P)$ . Так как  $I_Q \subset \mathcal{N}(P)$  в силу утверждения 4, то таких мономов не содержит и  $Q(\xi)$ . А это и означает, что все мономы (кроме константы), входящие в  $Q(\xi)$ , содержат множитель  $\xi_1$ .  $\square$

Из леммы 1 вытекает эквивалентное ей утверждение.

**Следствие 1.** *Если  $n = 2$ ,  $P(\xi)$  делится на  $\xi_1 - \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) и  $Q \in \mathcal{L}(P)$ , то*

$$Q|_{\xi_1=\lambda} = Q(\lambda, \xi_2) \equiv \text{const}.$$

Если  $Q \in \mathcal{L}(P)$ , то  $\deg_{\xi_1} Q \leq l$  и  $\deg_{\xi_2} Q \leq m$  (см. §2). Поскольку  $P(\xi)$  делится на  $\xi_1 - \lambda_1$ , то, по лемме 1,  $Q(\xi)$  имеет вид

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1)Q_1(\xi) + c, \quad \text{где} \quad \deg_{\xi_1} Q_1 \leq l - 1. \quad (6)$$

Если  $p = 1$ , то рассуждение завершено.

Пусть  $p > 1$ . Разлагая  $Q_1(\xi)$  по степеням  $\xi_1 - \lambda_2$ , получим

$$Q_1(\xi) = (\xi_1 - \lambda_2)Q_2(\xi) + q_1(\xi_2), \quad \text{где} \quad \deg_{\xi_1} Q_2 \leq l - 2, \quad \deg q_1 \leq m. \quad (7)$$

Подставим (7) в (6). Получим

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1)(\xi_1 - \lambda_2)Q_2(\xi) + (\xi_1 - \lambda_1)q_1(\xi_2) + c, \quad \deg_{\xi_1} Q_2 \leq l - 2, \quad \deg q_1 \leq m. \quad (8)$$

По следствию 1,  $Q(\lambda_2, \xi_2) \equiv \text{const}$ . Тогда подставляя  $\xi_1 := \lambda_2$  в (8), получим

$$Q(\lambda_2, \xi_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)q_1(\xi_2) + c \equiv \text{const},$$

откуда в силу  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  имеем  $q_1(\xi_2) \equiv c_1 = \text{const}$ . Тогда представление (8) примет вид

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1)(\xi_1 - \lambda_2)Q_2(\xi) + c_1(\xi_1 - \lambda_1) + c, \quad \deg_{\xi_1} Q_2 \leq l - 2. \quad (9)$$

Если  $p = 2$ , то рассуждение завершено. Если  $p > 2$ , разложим полином  $Q_2(\xi)$  по степеням  $\xi_1 - \lambda_3$  и подставим в (8). И т. д. Рассуждая далее таким же образом, на  $p$ -м шаге получим представление полинома  $Q(\xi)$  в виде

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \tilde{Q}(\xi) + r(\xi_1) + c, \quad (10)$$

где  $\deg_{\xi_1} \tilde{Q} \leq l - p$ ,  $\deg_{\xi_2} \tilde{Q} \leq m$  и

$$r(\xi_1) := \sum_{k=1}^{p-1} c_k (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_k), \quad c_k \in \mathbb{C} \quad (11)$$

(при  $p = 1$  полагаем  $r(\xi_1) \equiv 0$ ).

Проведем теперь анализ структуры полинома  $Q(\xi)$  относительно второй переменной  $\xi_2$ . Если  $q = 0$ , т. е. полином  $p_2(\xi_2)$  невырожден, то рассуждение завершено.

Пусть  $q > 0$ . Тогда  $P(\xi)$  делится на  $\xi_2 - \mu_1$  и, значит, по следствию 1,  $Q(\xi_1, \mu_1) \equiv \tilde{c} \equiv \text{const}$ . Учитывая это, подставим  $\xi_2 := \mu_1$  в равенство (10). Получим

$$Q(\xi_1, \mu_1) = (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \tilde{Q}(\xi_1, \mu_1) + r(\xi_1) + c \equiv \tilde{c}.$$

Так как  $r(\xi_1)$  делится на  $\xi_1 - \lambda_1$ , отсюда получаем  $c = \tilde{c}$  и

$$r(\xi_1) \equiv -(\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \tilde{Q}(\xi_1, \mu_1).$$

Подставляя последнее тождество в (10) и группируя, получим

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \left[ \tilde{Q}(\xi_1, \xi_2) - \tilde{Q}(\xi_1, \mu_1) \right] + c. \quad (12)$$

Очевидно, разность  $\tilde{Q}(\xi_1, \xi_2) - \tilde{Q}(\xi_1, \mu_1)$  делится без остатка на  $\xi_2 - \mu_1$ , т. е.

$$\tilde{Q}(\xi_1, \xi_2) - \tilde{Q}(\xi_1, \mu_1) = (\xi_2 - \mu_1)Q_3(\xi_1, \xi_2), \quad \deg_{\xi_2} Q_3 \leq m - 1, \quad \deg_{\xi_1} Q_3 \leq l - p.$$

Подставляя это равенство в (12), получим

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \cdot (\xi_2 - \mu_1)Q_3(\xi_1, \xi_2) + c. \quad (13)$$

Если  $q = 1$ , рассуждение завершено. Пусть  $q > 1$ . Тогда  $P(\xi)$  делится на  $\xi_2 - \mu_2$  и, значит, по следствию 1,  $Q(\xi_1, \mu_2) \equiv \hat{c} \equiv \text{const}$ . Подставляя  $\xi_2 := \mu_2$  в (13), получим

$$(\mu_2 - \mu_1) \cdot (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) Q_3(\xi_1, \mu_2) + c \equiv \hat{c}.$$

Так как  $\mu_2 \neq \mu_1$ , отсюда получаем  $c = \hat{c}$  и  $Q_3(\xi_1, \mu_2) \equiv 0$ , т. е.

$$Q_3(\xi_1, \mu_2) = (\xi_2 - \mu_2)Q_4(\xi_1, \xi_2), \quad \deg_{\xi_2} Q_4 \leq m - 2, \quad \deg_{\xi_1} Q_4 \leq l - p. \quad (14)$$

Подставим (14) в (12), получим представление

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \cdot (\xi_2 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)Q_4(\xi_1, \xi_2) + c, \quad (15)$$

в котором  $\deg_{\xi_2} Q_4 \leq m - 2$  и  $\deg_{\xi_1} Q_4 \leq l - p$ .

Если  $q = 2$ , то рассуждение завершено. Если  $q > 2$ , то рассмотрим нуль  $\xi_2 = \mu_3$  полинома  $P(\xi)$ . И т. д. Рассуждая далее таким же образом, придем к представлению

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \cdot (\xi_2 - \mu_1) \dots (\xi_2 - \mu_q) \widehat{Q}(\xi) + c, \quad (16)$$

где  $c$  — константа,  $\deg_{\xi_1} \widehat{Q} \leq l - p$  и  $\deg_{\xi_2} \widehat{Q} \leq m - q$ .

Убедимся теперь, что для представлений вида (10) (при  $q = 0$ ) и (16) (при  $q > 0$ ) выполняется включение  $Q \in \mathcal{L}(P)$ . После этого описание пространства  $\mathcal{L}(P)$  будет полностью завершено.

1. Пусть  $p > 0$  и  $q = 0$ , тогда полином  $Q(\xi)$  имеет представление (10), в котором  $c$  — константа,  $\deg r \leq p - 1$ ,  $\deg_{\xi_1} \widetilde{Q} \leq l - p$  и  $\deg_{\xi_2} \widetilde{Q} \leq m$ .

Сумма  $r(\xi_1) + c$ , где  $r(\cdot)$  — полином вида (11), после раскрытия скобок и переобозначения коэффициентов эквивалентна произвольному полиному степени  $\leq p - 1$ . Обозначим его также через  $r(\cdot)$  и покажем, что  $r \in \mathcal{L}(P)$ . Составим отношение

$$\chi(\xi_1) \frac{r(\xi_1)}{P(\xi)} = \chi(\xi_1) \frac{r(\xi_1)}{p_1(\xi_1)p_2(\xi_2)} = \chi(\xi_1) \frac{r(\xi_1)}{(\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p)p_{12}(\xi_1)} \cdot \frac{1}{p_2(\xi_2)}, \quad (17)$$

где  $\chi(\xi_1) \in C^\infty(\mathbb{R})$  — срезающая функция, равная нулю на множестве нулей  $\{\lambda_k\}_{k=1}^p$  полинома  $p_1(\xi_1)$ , единице в окрестности бесконечности и  $\chi(\xi_1) \in [0, 1]$  для всех  $\xi_1 \in \mathbb{R}$ . Эта дробь является мультипликатором в  $C(\mathbb{R}^2)$  как произведение двух мультипликаторов. В самом деле, так как  $\deg r \leq p - 1 < l$ , то  $\chi(\xi_1) \frac{r(\xi_1)}{p_1(\xi_1)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$  в

силу утверждения 3. Отношение же  $\frac{1}{p_2(\xi_2)}$  — произведение мультипликаторов в  $C(\mathbb{R})$

вида  $\frac{1}{\xi_2 - \omega_2}$  (и константы), где  $\omega_2$  — не вещественные нули невырожденного полинома  $p_2(\xi_2)$  (см. §2). Следовательно, отношение (17) принадлежит  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ , откуда в силу утверждения 2 следует, что  $r \in \mathcal{L}(P)$ .

Наконец, покажем, что  $(\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \widetilde{Q}(\xi) \in \mathcal{L}(P)$ . Пусть

$$\widetilde{Q}(\xi) = \sum_{\gamma_1 \leq l-p, \gamma_2 \leq m} c_\gamma \xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2}.$$

В силу линейности пространства  $\mathcal{L}(P)$ , достаточно показать, что

$$r_\gamma(\xi) := (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2} \in \mathcal{L}(P)$$

для всех указанных  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ . Составим отношение

$$\frac{r_\gamma(\xi)}{P(\xi)} = \frac{(\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2}}{(\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) p_{12}(\xi_1) p_2(\xi_2)} = \frac{\xi_1^{\gamma_1}}{p_{12}(\xi_1)} \cdot \frac{\xi_2^{\gamma_2}}{p_2(\xi_2)}.$$

Оно принадлежит  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$  как произведение двух мультипликаторов. Обоснование этого совершенно аналогично данному выше для отношения (17). Отсюда  $r_\gamma \in \mathcal{L}(P)$  для всех указанных выше  $\gamma$  и, следовательно, полином вида (10) принадлежит  $\mathcal{L}(P)$ .

2. Пусть теперь  $p > 0$  и  $q > 0$ . Тогда полином  $Q(\xi)$  имеет представление (16), в котором  $c$  – константа,  $\deg_{\xi_1} \widehat{Q} \leq l - p$  и  $\deg_{\xi_2} \widehat{Q} \leq m - q$ . Ясно, что  $c \in \mathcal{L}(P)$ . Покажем, что  $Q - c \in \mathcal{L}(P)$ . Представим  $\widehat{Q}(\xi)$  в виде

$$\widehat{Q}(\xi) = \sum_{\gamma_1 \leq l-p, \gamma_2 \leq m-q} c_\gamma \xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2}.$$

В силу линейности пространства  $\mathcal{L}(P)$ , достаточно показать, что

$$r_\gamma(\xi) := (\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \cdot (\xi_2 - \mu_1) \dots (\xi_2 - \mu_q) \xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2} \in \mathcal{L}(P)$$

для всех указанных  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ . Составим отношение

$$\frac{r_\gamma(\xi)}{P(\xi)} = \frac{(\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) \cdot (\xi_2 - \mu_1) \dots (\xi_2 - \mu_q) \xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2}}{(\xi_1 - \lambda_1) \dots (\xi_1 - \lambda_p) p_{12}(\xi_1) \cdot (\xi_2 - \mu_1) \dots (\xi_2 - \mu_q) p_{22}(\xi_2)} = \frac{\xi_1^{\gamma_1}}{p_{12}(\xi_1)} \cdot \frac{\xi_2^{\gamma_2}}{p_{22}(\xi_2)}.$$

Две последние дроби имеют невырожденные знаменатели степеней  $\deg p_{12} = l - p$  и  $\deg p_{22} = m - q$ , а степени числителей этих дробей не превышают указанные величины. Следовательно, обе эти дроби принадлежат  $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$  и, значит, конечная сумма таких произведений также является мультипликатором в  $C(\mathbb{R}^2)$ . Отсюда  $Q - c \in \mathcal{L}(P)$  в силу утверждения 3.

Резюмируем полученные результаты в виде основной теоремы данной работы.

**Теорема 1.** Пусть  $P(D) = P(D_1, D_2)$  – дифференциальный оператор с символом  $P(\xi) = p_1(\xi_1)p_2(\xi_2)$ , сомножители которого имеют степени  $\deg p_1 = l$  и  $\deg p_2 = m$  и не имеют кратных вещественных нулей, т. е.

$$p_1(\xi_1) = \prod_{k=1}^p (\xi_1 - \lambda_k) \cdot p_{12}(\xi_1), \quad p_{12}(\xi_1) \neq 0 \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

$$p_2(\xi_2) = \prod_{k=1}^q (\xi_2 - \mu_k) \cdot p_{22}(\xi_2), \quad p_{22}(\xi_2) \neq 0 \quad \forall \xi_2 \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

где числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  и  $\mu_1, \dots, \mu_q$  вещественны и попарно различны внутри каждого из наборов,  $0 \leq p \leq l$ ,  $0 \leq q \leq m$  (при  $p = 0$  или  $q = 0$  полагаем  $p_{12}(\xi_1) := p_1(\xi_1)$  или  $p_{22}(\xi_2) := p_2(\xi_2)$  соответственно).

Тогда включение  $Q \in \mathcal{L}(P)$  справедливо тогда и только тогда, когда:

1) в случае  $p = q = 0$   $Q(\xi)$  – произвольный полином степени  $\leq l$  по переменной  $\xi_1$  и степени  $\leq m$  по переменной  $\xi_2$ ;

2) в случае  $p > 0$  и  $q = 0$  имеем

$$Q(\xi) = \prod_{k=1}^p (\xi_1 - \lambda_k) \cdot \widehat{Q}(\xi) + r(\xi_1),$$

где  $r(\xi_1)$  – произвольный полином степени  $\leq p - 1$ ,  $\widehat{Q}(\xi)$  – произвольный полином степени  $\leq l - p$  по переменной  $\xi_1$  и степени  $\leq m$  по переменной  $\xi_2$ ;

3) в случае  $p > 0$  и  $q > 0$  имеем

$$Q(\xi) = \prod_{k=1}^p (\xi_1 - \lambda_k) \cdot \prod_{j=1}^q (\xi_2 - \mu_j) \cdot \widehat{Q}(\xi) + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная, а  $\widehat{Q}(\xi)$  – произвольный полином степени  $\leq l - p$  по переменной  $\xi_1$  и степени  $\leq m - q$  по переменной  $\xi_2$ .

Интересно подсчитать размерность пространства  $\mathcal{L}(P)$  для каждого из трех случаев, описанных в теореме 1. Она совпадает с максимальным количеством произвольных постоянных, входящих в запись полинома  $Q(\xi)$ . Примем во внимание, что количество коэффициентов полинома степени  $s$  от одной переменной есть  $s + 1$ , а полинома от двух переменных, степени которого равны  $s$  и  $t$  по каждой из них, есть  $(s + 1)(t + 1)$ . Поэтому в первом случае (при  $p = q = 0$ )  $\dim \mathcal{L}(P) = (l + 1)(m + 1)$ , во втором случае (при  $p > 0, q = 0$ )  $\dim \mathcal{L}(P) = (l - p + 1)(m + 1) + p$  и в третьем случае (при  $p > 0, q > 0$ )  $\dim \mathcal{L}(P) = (l - p + 1)(m - q + 1) + 1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хермандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
2. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в  $L_p(\Omega)$  / М. М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т. 56. – С. 206–261.
3. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75–112.
4. Лиманский Д. В. Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов / Д. В. Лиманский // Укр. матем. вісник. – 2011. – Т. 8, № 1. – С. 101–111.
5. Лиманський Д. В. Умови підпорядкованості для тензорного добутку двох звичайних диференціальних операторів / Д. В. Лиманський // Доповіді НАН України. – 2012. – № 4. – С. 25–29.
6. Лиманский Д. В. Многоугольник Ньютона и априорные оценки для дифференциальных полиномов на плоскости / Д. В. Лиманский // Вестник Донецк. нац. ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 67–79.
7. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
8. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
9. Boman J. Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables / J. Boman // Illinois J. Math. 1972. – Vol. 16, № 2. – P. 203–216.
10. Belinsky E. S. Multipliers in  $L_1$  and estimates for systems of differential operators / E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrjn, M. M. Malamud // Russian Journal of Math. Phys. – 2005. – Vol. 12, № 1. – P. 6–16.

Поступила в редакцию 28.05.2017 г.

## ON SUBORDINATION OF ONE DIFFERENTIAL OPERATOR TO THE TENSOR PRODUCT OF OTHERS IN THE SPACE $C(\mathbb{R}^N)$

*D. V. Limanskii*

In the paper we obtain a description of the linear space of minimal differential operators  $Q(D)$  subordinated in the  $C(\mathbb{R}^2)$  norm to the tensor product  $P(D) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$  of two ordinary differential polynomials of arbitrary orders which symbols  $p_1(\xi_1)$  and  $p_2(\xi_2)$  contain no multiple real zeros. The proof uses methods of harmonic analysis as well as the Newton polygon technique.

**Keywords:** differential polynomial, multiplier, Newton polygon, tensor product.

**Лиманский Дмитрий Владимирович**

кандидат физико-математических наук, доцент  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк),  
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений  
4125aa@gmail.com  
+38-099-1504465

**Limanskii Dmitrii Vladimirovich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent,  
Donetsk National University, Donetsk

## ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ КВАДРАТА В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2017. П. А. Машаров

Рассматривается задача о нахождении наименьшего радиуса трёхмерного шара, в котором данное множество является множеством Помпейю. Получено искомое значение радиуса шара для плоского квадрата.

**Ключевые слова:** проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю для квадрата, локальный вариант проблемы Помпейю.

**Введение.** В работе исследуются аналоги проблемы Помпейю и их приложения в различных областях анализа. Проблема Помпейю в евклидовом случае может быть сформулирована следующим образом.

Пусть  $\mathbb{R}^n$  — вещественное евклидово пространство размерности  $n \geq 2$  с евклидовой нормой  $|\cdot|$ ,  $\mathbf{M}(n)$  — группа движений  $\mathbb{R}^n$ . Компактное множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

при всех  $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ , равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  таких множеств  $A$ . В этой постановке указанная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  получили румынский математик Помпейю в 1929 году [1, 2] и другие [3–5].

Легко видеть, что даже на плоскости  $\mathbb{R}^2$  не каждое множество имеет свойство Помпейю. В самом деле, пусть  $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < R\}$ ,  $R > 0$  — фиксировано и  $f(x_1, x_2) = e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)}$ . Тогда, поскольку  $\lambda \mathbb{B}_R^2$  является кругом радиуса  $R$  с центром в точке  $y \in \mathbb{R}^2$ , координаты которой зависят только от  $\lambda \in \mathbf{M}(2)$ , интеграл (1) сводится к

$$\int_{|x-y| \leq R} e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)} dx = \frac{2\pi R}{|\alpha|} J_1(R|\alpha|) e^{i(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2)},$$

где  $J_1$  — функция Бесселя первого рода,  $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ . Отсюда делаем вывод, что круг не является множеством Помпейю в  $\mathbb{R}^2$ , поскольку всякий раз, когда  $R|\alpha|$  — нуль функции Бесселя  $J_1$ , получаем, что существует ненулевая функция  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющая (1) для любого  $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ .

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, имеет ли множество  $A$  свойство Помпейю или нет [6–9]. Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [10].

Пусть  $A$  — открытое ограниченное подмножество  $\mathbb{R}^n$  с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если  $\bar{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , то граница  $A$  является вещественно-аналитическим подмногообразием в  $\mathbb{R}^n$ .

Этот результат, в частности, показывает, что многие множества  $A$  с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . В случае множества  $A$  с вещественно–аналитической границей ситуация сложнее. Примерами множеств  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  для любого  $n \geq 2$  являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [11].

Относительно недавно были получены примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева [12]. Одним из таких множеств является «снежинка Кох».

В случае, когда некоторое множество не обладает свойством Помпейю, наличие ненулевой функции с условием (1) дает возможность получить нетривиальные оценки плотности укладки произвольного компакта в  $\mathbb{R}^n$  множествами вида  $\lambda A$ ,  $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ . Такие оценки получил Б. Д. Котляр [13]. Если же  $A$  имеет свойство Помпейю, то в силу теоремы Винера возможна аппроксимация в  $L_1(\mathbb{R}^n)$  линейными комбинациями индикаторов множеств вида  $\lambda A$ ,  $\lambda \in \mathbf{M}(n)$  [14].

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки  $(\mathbb{R}^n, \mathbf{M}(n), dx)$  тройкой  $(X, \mathcal{Z}, d\mu)$ , где  $X$  — многообразие,  $\mathcal{Z}$  — группа Ли, действующая транзитивно на  $X$ ,  $d\mu$  — инвариантная относительно  $\mathcal{Z}$  мера на  $X$ . Одним из наиболее интересных примеров является случай, когда  $X$  — единичный круг в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и  $\mathcal{Z}$  — группа конформных автоморфизмов  $X$  [15, 16].

Другие обобщения проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Упомянув о методике решения указанных задач, следует отметить, что наиболее сильные результаты из цитированных выше работ получены с помощью аппарата преобразования Фурье и других элементов гармонического анализа. Несмотря на достигнутые успехи, в ряде случаев такой подход является либо неприменимым, либо недостаточно тонким (например, при изучении локальных вариантов проблемы Помпейю). Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы.

**Постановка задачи.** Пусть функция  $f$  локально суммируема в шаре  $\mathbb{B}_R^n$  и равенство (1) выполняется при всех  $\lambda \in \mathbf{M}(n)$  таких, что  $\lambda A \subset \mathbb{B}_R^n$ . Если из этого условия следует, что  $f = 0$  п.в. в  $\mathbb{B}_R^n$ , будем говорить, что  $A$  является множеством Помпейю на шаре  $\mathbb{B}_R^n$  и обозначать  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ . Если  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , то для достаточно большого по сравнению с размерами множества  $A$  радиуса  $R$  выполняется  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$  [17–19].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{ R > 0 : A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества  $A$ .

В [19] поставлена следующая

**Проблема 1.** Для данного компактного  $A \subset \mathbb{R}^n$  найти значение  $\mathcal{R}(A)$ .

Если точное значение  $\mathcal{R}(A)$  найти не удаётся, то возникает

**Проблема 2.** Для данного компактного множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  получить оценки величины  $\mathcal{R}(A)$ , уточняющие известные ранее.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины  $\mathcal{R}(A)$ , получены К. А. Беренштейном и Р. Гэем [17, 18], а также В. В. Волчковым ([19], Глава 4, §1–2). Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [19–24].

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество  $A$  имеет такую же размерность, что и пространство. Пусть теперь размерность множества  $A$  равна  $m \leq n$ , интеграл в (1) понимается как  $m$ -кратный, определение множества Помпейю в  $\mathbb{B}_R^n$  оставим прежним. Будем рассматривать совокупность  $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)$  всех  $m$ -мерных множеств Помпейю в  $\mathbb{B}_R^n$  и величину

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Аналогом проблемы 1 является следующая

**Проблема 3.** Для данного компактного  $A \subset \mathbb{R}^m$  найти значение  $\mathcal{R}_{m,n}(A)$ .

Локальный вариант проблемы Помпейю для множеств положительной коразмерности напоминает теорему Мореры, в которой из нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции. В [25] рассмотрена проблема Помпейю для шаров и сфер положительной коразмерности.

Рассмотрим некоторые примеры множеств  $A$ , для которых известно точное значение  $\mathcal{R}_{n,n}(A)$ .

1. Пусть  $A$  — правильный треугольник со стороной  $a$ . Тогда  $\mathcal{R}_{2,2}(A) = a\sqrt{3}/2$  ([26], В. В. Волчков, 1996).

2. Пусть  $A$  — правильный  $s$ -угольник со стороной длины  $l$ . Тогда

$$\mathcal{R}_{n,n}(A) = \begin{cases} l \operatorname{ctg}(\pi/2s)/2, & \text{если } s \text{ — нечетно;} \\ l\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2(\pi/s)}/2 & \text{если } s \text{ — четно} \end{cases}$$

([19], В. В. Волчков, 2000–2003).

3. Пусть  $A$  — треугольник Рело ширины 1 в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда  $\mathcal{R}_{2,2}(A) = 1$  ([27], П. А. Машаров, 2001).

4. Пусть  $A$  — куб в  $\mathbb{R}^n$  с ребром длины 1. Тогда  $\mathcal{R}_{n,n}(A) = \sqrt{n+3}/2$  ([28], В. В. Волчков, 1996).

5. Пусть  $A$  — полушар в  $\mathbb{R}^n$  радиуса 1. Тогда  $\mathcal{R}_{n,n}(A) = \sqrt{5}/2$  ([19], В. В. Волчков, 1996).

6. Пусть  $A(h)$  — сегмент шара единичного радиуса высоты  $h$  в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\mathcal{R}_{n,n}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h - 3h^2}/2, & 1 < h \leq 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

([29], П. А. Машаров, 2011).

7. Пусть  $A(h)$  — невыпуклый четырёхугольник с вершинами в точках  $(0; 0)$ ,  $(\sqrt{3}/2; -1/2)$ ,  $(\sqrt{3}/2 - h; 0)$ ,  $(\sqrt{3}/2; 1/2)$ ,  $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ . Тогда

$$\mathcal{R}_{2,2}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0; \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2) \end{cases}$$

([30], Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров, 2014).

Известны также значения величины  $\mathcal{R}_{n,n}(A)$  для случаев, когда  $A$  — круговой сектор ([31], П. А. Машаров, 2000), параллелепипед в  $\mathbb{R}^n$  ([28], В. В. Волчков, 1998–2000), эллипсоид в  $\mathbb{R}^n$  ([19], В. В. Волчков, 2001), половина кругового конуса в  $\mathbb{R}^3$  ([32], Л. В. Елец, П. А. Машаров, 2009), замыкание разности двух квадратов ([33], П. А. Машаров, 2016).

Рассмотрим  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  — плоский квадрат со стороной 2. Основным результатом является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Имеет место равенство  $\mathcal{R}_{2,3}(K) = \sqrt{41}/4$ .*

Заметим, что  $\mathcal{R}_{2,2}(K) = \sqrt{5} \approx 2,24$ , а  $\mathcal{R}_{2,3}(K) \approx 1,60$ .

**Вспомогательные обозначения и утверждения.** Далее будем рассматривать действительное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n \geq 2$  с евклидовой нормой  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Элементы пространства  $\mathbb{R}^n$  будем обозначать строчными буквами латинского алфавита (например,  $x, y, z, t$ ), а их координаты — соответствующими буквами с нижними индексами  $(x_1, \dots, x_n)$ . Если будет рассматриваться пространство  $\mathbb{R}^2$ , то его элементы будем обозначать прописными латинскими или строчными греческими буквами ( $A_1, B_2, \zeta$ ) или парами вида  $(x, y)$ , где  $x, y$  — координаты точки. В некоторых случаях точки  $(x, y)$  пространства  $\mathbb{R}^2$  отождествляются с комплексными числами  $\zeta = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ , где  $\rho = |\zeta|$ ,  $\varphi = \arg \zeta$ .

Для непустых множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  положим  $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n): \lambda A \subset B\}$ .

Для непустого открытого множества  $B \subset \mathbb{R}^n$  под  $L_{loc}(B)$  будем понимать класс локально интегрируемых на  $B$  функций, то есть таких функций  $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ , для которых интеграл по любому компактному подмножеству из  $B$  конечен. Так как интегрирование будет вестись по множествам вида  $\lambda A$ , а множество  $A$  рассматривается  $m$ -мерным, то здесь и далее под  $dx$  понимается  $m$ -мерная мера Лебега. Если  $p \in [1, +\infty)$ , обозначение  $L_p(B)$  будем использовать для функций, для которых  $\|f\|_{L_p(B)} = \left( \int_B |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$ . Для  $k \in \mathbb{N}$  и открытого непустого множества  $B$  под  $C^k(B)$  будем понимать класс функций, все частные производные порядка  $k$  которых (включая смешанные) непрерывны в  $B$ ,  $C(B)$  — класс непрерывных на  $B$  функций,  $C^\infty(B) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(B)$ .

Далее, под  $\mathfrak{F}(A, B)$  будем понимать класс функций из  $L_{loc}(B)$ , для которых равенство (1) верно для всех  $\lambda \in \text{Mot}(\overline{A}, B)$ . Добавляя гладкость, получим классы функций  $\mathfrak{F}^k(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C^k(B)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{F}^\infty(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C^\infty(B)$ ;  $\mathfrak{F}_0^\infty(A, B)$  — класс радиальных функций из  $\mathfrak{F}^\infty(A, B)$ , то есть таких, что для любых  $x, y \in B$ , для которых  $\|x\| = \|y\|$ , выполняется  $f(x) = f(y)$ . Частные производные по переменным  $x, y$  будем обозначать  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ . Символ  $\Delta$  обозначает оператор Лапласа, для функций двух переменных:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Заметим, что из линейности пространств гладких и интегрируемых функций следует линейность пространств  $\mathfrak{F}^k(A, B)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

Для произвольного непустого  $B \subset \mathbb{R}^n$ , фиксированного числа  $\varepsilon > 0$  и вектора  $t \in \mathbb{R}^n$  положим  $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - y\| < \varepsilon, y \in B\}$ ,  $B + t = \{x + t \in \mathbb{R}^n: x \in B\}$ .

**Лемма 1.** *Пусть  $A$  — компакт,  $B$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , числа  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  и  $\varepsilon > 0$  фиксированы, функция  $\varphi_\varepsilon \in C^k(B_\varepsilon)$  имеет носитель  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon^n$ , а функция  $f \in \mathfrak{F}(A, B_\varepsilon)$ . Тогда свёртка  $f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{F}^k(A, B)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению свёртки, имеем  $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y) dy$ . При этом функция  $\psi(x)$  определена корректно в области  $B$ . Так как  $\varphi_\varepsilon \in C^k(B)$ , то для любого набора  $\{j_1, \dots, j_n\}$ ,  $j_\nu \in \{0, 1, \dots, k\}$ ,  $j_1 + \dots + j_n \leq k$  существует

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}\psi(x)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}\varphi_\varepsilon(x-y)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} dy.$$

Таким образом,  $\psi \in C^k(B)$ . Осталось доказать, что эта функция имеет нулевые интегралы по всем множествам  $\lambda A \subset B$ .

Зафиксируем произвольное  $\lambda \in \text{Mot}(A, B)$  и рассмотрим

$$I = \int_{\lambda A} \psi(x) dx = \int_{\lambda A} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y) dy.$$

Сделав замену  $t = x - y$ , имеем  $I = \int_{\lambda A} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t) dt \int_{\lambda A} f(x-t) dx$ . После замены  $z = x - t$ ,  $I = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t) dt \int_{\lambda A-t} f(z) dz$ . Так как  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon^n$ , то во внешнем интеграле интегрирование на самом деле ведётся по  $\mathbb{B}_\varepsilon^n$ , то есть  $t \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ . Отсюда следует, что  $\lambda A - t \subset B$ , и, значит, внутренний интеграл по условию леммы равен нулю. Следовательно, и весь интеграл равен нулю, что завершает доказательство леммы.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $A$  – компакт в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathfrak{d}$  – один из следующих дифференциальных операторов:  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ , для некоторого открытого множества  $B$ , для которого  $\text{Mot}(A, B) \neq \emptyset$ , выполнено  $f \in \mathfrak{F}^\infty(A, B)$ . Тогда  $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{F}^\infty(A, B)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что если  $m \in \mathbb{N}$ , то в условиях леммы из  $f \in \mathfrak{F}^m(A, B)$  следует  $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{F}^{m-1}(A, B)$ .

Уменьшение гладкости функции  $\mathfrak{d}f$  по сравнению с  $f$  на единицу связано с тем, что  $\mathfrak{d}$  является дифференциальным оператором первого порядка. Докажем теперь, что если функция  $f$  имеет нулевые интегралы, то и  $\mathfrak{d}f$  также имеет нулевые интегралы по соответствующим множествам.

Так как  $\text{Mot}(A, B) \neq \emptyset$  и  $f \in \mathfrak{F}^m(A, B)$ , то найдётся  $\lambda \in \text{Mot}(A, B)$ , для которого верно (1). Тогда для  $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  с достаточно малой нормой множество  $\lambda A + \zeta \subset B$ . Поэтому имеет место равенство

$$0 = \int_{\lambda A + \zeta} f(x, y) dx dy = \int_{\lambda A} f(x + \xi, y + \eta) dx dy.$$

Дифференцируя его по  $\xi$ ,  $\eta$ , получаем  $\int_{\lambda A} f'_1(x + \xi, y + \eta) dx dy = 0$ ,  $\int_{\lambda A} f'_2(x + \xi, y + \eta) dx dy = 0$ , где  $f'_1, f'_2$  обозначают производные по первой и второй переменным соответственно, то есть  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ . Полагая в этих равенствах  $\xi = \eta = 0$ , получаем  $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y \in \mathfrak{F}^{m-1}(A, B)$ .

Учитывая определение класса  $\mathfrak{F}^\infty(A, B)$ , получаем утверждение леммы.  $\square$

Для произвольного непустого компакта или ограниченной области  $A$  из  $\mathbb{R}^n$  через  $r^*(A)$  обозначим радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего  $\bar{A}$ . То есть  $r^*(A) = \inf\{R > 0: \exists \lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, \mathbb{B}_R^n)\}$ . Отметим, что из определений  $r^*(A)$  и  $\text{Mot}(A, B)$  следует, что для произвольного компакта  $A$  множество  $\text{Mot}(A, \mathbb{B}_R^n) \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $R > r^*(A)$ , а для открытого ограниченного множества – когда  $R \geq r^*(A)$ .

Для рассматриваемого в настоящей работе множества  $K$  значение  $r^*(K)$  равно радиусу описанной окружности,  $r^*(K) = \sqrt{2} \approx 1,41$ . Отсюда следует тривиальная оценка снизу радиуса Помпейю:  $\mathcal{R}_{2,n}(K) \geq \sqrt{2}$  для любого  $n \geq 2$ .

Обозначим вершины квадрата  $K$  буквами:  $\zeta_1(1; 1)$ ,  $\zeta_2(-1; 1)$ ,  $\zeta_3(-1; -1)$ ,  $\zeta_4(1; -1)$ . Когда будет рассматриваться квадрат  $\lambda K$  ( $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ ), его вершины будем обозначать соответственно  $\lambda\zeta_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

**Лемма 3.** Пусть для некоторого  $\varepsilon > 0$  функция  $f \in C^2(K_\varepsilon)$ . Тогда имеют место равенства

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{-1}^1 (f(x; 1) - f(x; -1)) dx, \quad (2)$$

$$\int_K \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy = f(\zeta_1) - f(\zeta_2) - f(\zeta_4) + f(\zeta_3). \quad (3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Переходя к повторному интегралу, имеем  $\int_K (\partial f / \partial y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (\partial f / \partial y) dy = \int_{-1}^1 (f(x; 1) - f(x; -1)) dx$ . Заменив в полученном равенстве  $f$  на  $\partial f / \partial x$ , получаем  $\int_K \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy = \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial f(x, 1)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, -1)}{\partial x} \right) dx = f(\zeta_1) - f(\zeta_2) - f(\zeta_4) + f(\zeta_3)$ .  $\square$

Для доказательства основного результата воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в [19]. Перед его формулировкой введем используемые в нём обозначения. Для набора точек  $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$ , где  $v_i \neq v_j$  для  $1 \leq i, j \leq k$ ,  $i \neq j$ , числа  $\varepsilon > 0$  положим  $\Omega_{\nu, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|v_\nu\| - \varepsilon < \|x\| < \|v_\nu\| + \varepsilon\}$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ . Для открытого непустого множества  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  под  $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$  понимается класс радиальных локально суммируемых в  $\mathcal{U}$  распределений.  $\vec{\partial} = (\partial / \partial x_1, \dots, \partial / \partial x_n)$ .

**Утверждение 1** (Теорема 3.2 из [19, Глава 4]). Пусть  $F_\nu \in \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu, \varepsilon})$  для  $\nu = 1, \dots, k$  и существуют многочлены  $P_\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  такие, что для любого  $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$  выполняется  $\sum_{\nu=1}^k (P_\nu(\vec{\partial})F_\nu)(x + v_\nu) = 0$ , которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен  $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $P(\Delta)F_\nu = 0$  в  $\Omega_{\nu, \varepsilon}$ .

Для  $R > \sqrt{2}$  будем рассматривать различные положения квадрата  $\lambda K$  внутри шара  $\mathbb{B}_R^3$ . Обозначим  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  — расстояния от начала координат до вершины  $\lambda\zeta_1$ , до отрезка  $\lambda(\zeta_1\zeta_2)$ , до плоскости квадрата  $\lambda K$  соответственно. Для каждого  $j = 0, 1, 2$  положим  $\min_j = \inf\{\rho_j : \lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R^3)\}$  и  $\max_j = \sup\{\rho_j : \lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R^3)\}$ , для  $0 < a < b$  шаровой слой в  $\mathbb{R}^3$  обозначим  $\mathbb{B}(a; b) = \{x \in \mathbb{R}^3 : a < \|x\| < b\}$ .

**Лемма 4.** Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \min_0 &= \sqrt{4 - 4\sqrt{R^2 - 1} + R^2}, & \min_1 &= 2 - \sqrt{R^2 - 1}, & \min_2 &= 0, \\ \max_0 &= R, & \max_1 &= \sqrt{R^2 - 1}, & \max_2 &= \sqrt{R^2 - 2}. \end{aligned} \quad (4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для удобства будем рассматривать расположения  $\lambda K$ , где  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R^3)$ . Так как для вычисления расстояний используется теорема Пифагора, величина  $\min_0$  достигается при таком же движении  $\lambda$ , при котором достигаются  $\min_1$ , а значит и  $\min_2$ , то есть начало координат должно лежать в плоскости  $\lambda K$ , а

две вершины квадрата — на сфере. Учитывая симметрию квадрата, при таком же его положении достигаются  $\max_0$  и  $\max_1$ . Отсюда  $\min_2 = 0$ ,  $\max_0 = R$ . Далее последовательно вычисляем  $\max_1 = \sqrt{R^2 - 1}$ ,  $\min_1 = 2 - \sqrt{R^2 - 1}$ ,  $\min_0 = \sqrt{(2 - \sqrt{R^2 - 1})^2 + 1}$ .

Осталось заметить, что  $\max_2$  достигается, когда все вершины квадрата лежат на сфере. В таком случае  $\max_2$  — то расстояние от начала координат до центра квадрата, откуда по теореме Пифагора  $\max_2 = \sqrt{R^2 - (\sqrt{2})^2}$ .  $\square$

**Замечание 1.** Решениями неравенств  $\min_0 < \max_1$  и  $\min_1 < \max_2$  является  $R > \sqrt{41}/4$ . Действительно, сделав в первом случае замену  $t = \sqrt{R^2 - 1}$ , получаем  $4 - 4t + t^2 + 1 < t^2$ ;  $t > 5/4$ , откуда  $R^2 > 41/16$ ;  $R > \sqrt{41}/4$ . Во втором случае имеем  $4 - 4\sqrt{R^2 - 1} + R^2 - 1 < R^2 - 2$ , откуда снова  $\sqrt{R^2 - 1} > 5/4$ ;  $R > \sqrt{41}/4$ .

**Лемма 5.** Пусть  $R > \sqrt{2}$  и  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3)$ . Тогда существует ненулевой многочлен  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $q(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}(\sqrt{4 - 4\sqrt{R^2 - 1} + R^2}; R)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Применив утверждение 1 к  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3) \subset \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu, \varepsilon})$  для набора точек  $v_\nu = \zeta_\nu$  ( $\nu = \overline{1, 4}$ ), учитывая равенство (3), левая часть которого в данном случае по лемме 2 обратится в нуль, получаем, что существует нетривиальный многочлен  $q: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $q(\Delta)f = 0$  в  $\Omega_{\nu, \varepsilon}$ . Так как функция  $f$  общая для всех точек  $\zeta_\nu$ , то  $\Omega_{\nu, \varepsilon}$  представляет из себя множество точек из  $\mathbb{B}_R^3$ , в которые можно попасть вершинами квадрата  $\lambda K$ ,  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R^3)$ . Таким образом,  $\Omega_{\nu, \varepsilon} = \mathbb{B}(\min_0; \max_0)$ , что, с учетом леммы 4, завершает доказательство.  $\square$

Для формулировки следующего утверждения рассмотрим преобразование Радона. Пусть  $n \geq 2$ ;  $\xi(\omega, d)$  — гиперплоскость с расстоянием  $d$  до начала координат, нормалью которой является вектор  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Преобразование Радона вводится для  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  по формуле

$$\mathbf{R}f(\omega, d) = \int_{\xi(\omega, d)} f(x) dx,$$

где в данном случае  $dx$  —  $(n - 1)$ -мерная мера.

**Утверждение 2** (Следствие 8.4 из [19, Глава 1]). Пусть  $r \geq 0$ ,  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет  $\mathbf{R}f(\omega, d) = 0$  для всех  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$  и почти всех  $d \in (r, +\infty)$ . Если существует множество  $\Omega \subset (r, +\infty)$  положительной меры такое, что  $f(x) = 0$  в  $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| \in \Omega\}$ , тогда  $f = 0$  в  $\mathbb{B}(r; +\infty)$ .

**Лемма 6.** Пусть  $R > \sqrt{41}/4$  и  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3)$ . Тогда существует ненулевой многочлен  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $q(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_R^3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим многочлен  $q$  из леммы 5, для которого выполняется  $q(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}(\min_0; \max_0)$ , и функцию  $F = q(\Delta)f$ . По лемме 2, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной,  $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3)$ . Применив лемму 2 к функции  $F$ , получаем, что разность интегралов от  $F$  по двум противоположным сторонам любого квадрата  $\lambda K \subset \mathbb{B}_R^3$  равна нулю. Отсюда, расположив одну из сторон в области нулей  $F$  (это возможно, так как для рассматриваемых  $R$  выполняется  $\max_1 > \min_0$ ) и поворачивая квадрат вокруг первой стороны, получаем нулевые интегралы от  $F$  по всем отрезкам, расстояние от которых до начала координат лежит в пределах от  $\min_1$  до  $\max_1$ . Доопределив  $F$  нулем вне  $\mathbb{B}_R^3$ , имеем нулевые интегралы от  $F$  по всем прямым, расстояние от которых до начала координат больше  $\min_1$ . Отсюда интегралы по всем плоскостям, расстояние до которых от

начала координат больше  $\min_1$  равны нулю, что по утверждению 2 означает  $F = 0$  в  $\mathbb{B}(\min_1, R)$ .

По определению класса  $\mathfrak{F}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R)$ , учитывая  $\max_2 > \min_1$  и  $\min_2 = 0$ , имеем нулевые интегралы от  $F$  по всем плоскостям, откуда по утверждению 2 получаем  $F = 0$  в  $\mathbb{B}_R^3$ .  $\square$

Приведём одно довольно общее утверждение, доказательство которого можно найти в [19], предварительно пояснив смысл входящих в него обозначений.

Пусть  $\mathcal{U}$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Под  $\mathcal{D}(\mathcal{U})$  понимается класс функций из  $C^\infty(\mathcal{U})$  с компактным носителем в  $\mathcal{U}$ ;  $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$  — пространство распределений на  $\mathcal{U}$ ;  $SO(n)$  — группа евклидовых вращений пространства  $\mathbb{R}^n$ ; для распределения  $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$  и  $\lambda \in \mathbf{M}(n)$  распределение  $\lambda\varphi$  определяется на  $\mathcal{D}'(\lambda^{-1}\mathcal{U})$  формулой  $\langle \lambda\varphi, f(x) \rangle = \langle \varphi, f(\lambda^{-1}x) \rangle$ , где  $f \in \mathcal{D}(\lambda^{-1}\mathcal{U})$ ,  $\langle \varphi, f \rangle$  обозначает значение  $\varphi$  на элементе  $f$ ;  $\mathcal{D}'_\varphi(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}) : f * \varphi = 0 \text{ в области определения}\}$ ;  $C_\varphi^m(\mathcal{U}) = (\mathcal{D}'_\varphi \cap C^m)(\mathcal{U})$ , где  $m \in \mathbb{Z}_+$  или  $m = \infty$ ;  $A_\varphi^m(\mathcal{U}) = \bigcap_{\tau \in SO(n)} C_{\tau\varphi}^m(\mathcal{U})$ .

**Утверждение 3** (Предложение 5.9 из [19, Глава 1]). Пусть  $\mathcal{U} = \mathbb{B}_R^n$  и  $A_\varphi^\infty(\mathcal{U}) \neq \{0\}$ . Тогда  $A_\varphi^\infty(\mathcal{U})$  содержит радиальную функцию, отличную от нуля.

Взяв  $\varphi = \chi_K$  — индикатор множества  $K$ , получаем

**Следствие 1.** Пусть для некоторого  $R > 0$  выполняется  $\mathfrak{F}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$ . Тогда  $\mathfrak{F}^\infty(K, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$ .

**Лемма 7.** Пусть  $R > \sqrt{2}$ , для некоторой функции  $f \in \mathfrak{F}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3)$  и для некоторого многочлена  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  выполняется  $q(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_R^3$ . Тогда  $f = 0$  в  $\mathbb{B}_R^3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть разложение на линейные множители многочлена  $q(b)$  имеет вид  $q(b) = b_0(b - b_1) \cdot \dots \cdot (b - b_m)$ . Рассмотрим  $g = (\Delta - b_2) \cdot \dots \cdot (\Delta - b_m)f$ ,  $g \in \mathfrak{F}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3)$ . Для неё имеем дифференциальное уравнение  $(\Delta - b_1)g = 0$  в  $\mathbb{B}_R^3$ , общим решением которого при  $b_1 \neq 0$  является  $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho) + C_2 N_0(\sqrt{b_1}\rho)$ , при  $b_1 = 0$   $g(\rho) = C_3 + C_4 \ln \rho$ , где  $J_0, N_0$  — функции Бесселя и Неймана соответственно. Учитывая, что  $N_0(\sqrt{b_1}\rho)$  и  $\ln |\rho|$  имеют особенности в нуле, а  $g(\rho)$  непрерывна, то  $C_2 = C_4 = 0$ . Значит  $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho)$  или  $g(\rho) = C_3$  в  $\mathbb{B}_R^3$ . Продолжая её в  $\mathbb{R}^3$  этими же функциями, получаем, что вещественно-аналитическая  $g \in \mathfrak{F}_0^\infty(K, \mathbb{R}^3)$ . А так как  $K$  является множеством Помпейю в  $\mathbb{R}^2$ , то  $g = 0$ . Рассуждая аналогично для  $(\Delta - b_3) \cdot \dots \cdot (\Delta - b_m)f, \dots, f$ , приходим к утверждению леммы.  $\square$

Приведём ещё одно утверждение, которое необходимо будет для доказательства основного утверждения.

**Утверждение 4** (Следствие 8.2 из [19, Глава 1]). Пусть чётная функция  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ . Тогда существует  $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ , что  $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$  для всех  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $d \in \mathbb{R}^1$ .

**Построение решения задачи.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** Рассмотрим сначала случай  $R \in (\sqrt{2}; \sqrt{41}/4)$ . Исходя из леммы 4 и замечания 1, для указанного  $R$  выполняется неравенство  $\max_2 < \min_1$ . Рассмотрим функцию

$$g(d) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |d| \leq \max_2; \\ e^{1/((|d| - \max_2)(\min_1 - |d|))}, & \max_2 < |d| < \min_1; \\ 0, & |d| \geq \min_1. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условиям утверждения 4, поэтому существует такая  $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^3)$ , что  $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$  для всех  $\omega \in \mathbb{S}^2$ ,  $d \in \mathbb{R}^1$ . Это означает, что интегралы от  $f$  по всем плоскостям, расстояние от которых до начала координат меньше  $\max_2$  или больше  $\min_1$  равны нулю. Исходя из утверждение 2,  $f(\rho) = 0$ , если  $\rho \geq \min_1$ , причем не верно, что  $f = 0$  п.в., поскольку иначе выполнялось бы  $\mathbf{R}f(\omega, d) = 0$  всюду.

По определению величин  $\max_2$  и  $\min_1$ , для любого  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R^3)$  плоскость квадрата  $\lambda K$  удалена от начала координат не дальше, чем на  $\max_2$ , при этом пересечение  $\lambda K \cap \mathbb{B}_{\min_1}^3 \subset \lambda K$ , поскольку  $\lambda(\zeta_1 \zeta_2)$  находится на расстоянии большем, чем  $\min_1$ . Следовательно, ненулевая функция  $f \in \mathfrak{P}(K, \mathbb{B}_R^3)$ , что доказывает оценку  $\mathcal{R}_{2,3}(K) > R$ , откуда  $\mathcal{R}_{2,3}(K) \geq \sqrt{41}/4$ .

Пусть теперь  $R > \sqrt{41}/4$ . Рассмотрим произвольную  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3)$ . По лемме 6 существует ненулевой многочлен  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $q(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_R^3$ . Отсюда по лемме 7  $f = 0$  в  $\mathbb{B}_R^3$ , что означает  $\mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$ . Применение следствия 1 завершает доказательство теоремы 1.  $\square$

**Применения** Решение локального варианта проблемы Помпейю имеет приложения к различным областям математики. Покажем применение к теории приближений.

Для произвольного фиксированного  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R^3)$  рассмотрим строго убывающую к нулю последовательность положительных чисел  $\{\varepsilon_j^\lambda\}_{j=1}^\infty$  такую, что для параллелепипеда  $K(\varepsilon) = K \times [-\varepsilon/2; \varepsilon/2] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq \varepsilon/2\}$  выполняется условие  $\lambda K(\varepsilon_1^\lambda) \subset \mathbb{B}_R^3$ .

**Теорема 2.** Для фиксированных  $p: 1 \leq p < \infty$ ,  $R > \sqrt{41}/4$  любую функцию  $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$  можно аппроксимировать с любой точностью в  $L_p(\mathbb{B}_R)$  линейными комбинациями индикаторов множеств  $\lambda K(\varepsilon_j^\lambda)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть существует функция  $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$ , которую нельзя аппроксимировать с произвольной точностью линейными комбинациями указанных в формулировке теоремы индикаторов множеств. Тогда эта функция ортогональна всем таким индикаторам. То есть для любых  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R)$  и  $j = 1, 2, \dots$  верно равенство

$$\int_{\mathbb{B}_R} f(x, y, z) \cdot \chi_{\lambda K(\varepsilon_j^\lambda)}(x, y, z) dx dy dz = \int_{\lambda K(\varepsilon_j^\lambda)} f(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменных  $(x', y', z') = \lambda^{-1}(x, y, z)$  и разделим его на  $\varepsilon_j^\lambda$ . Учитывая, что якобиан перехода равен 1, имеем

$$\frac{1}{\varepsilon_j^\lambda} \iint_K dx' dy' \int_{-\varepsilon_j^\lambda/2}^{\varepsilon_j^\lambda/2} f(x', y', z') dz' = 0.$$

Переходя к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , по теореме о среднем получаем, что для любого  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R)$  выполняется равенство

$$\int_{\lambda K} f(x, y, z) d\mu = \iint_K f(x', y', 0) dx' dy' = 0,$$

где  $d\mu$  — плоская мера на  $\lambda K$ .

Отсюда, применяя теорему 1, получаем  $f = 0$  в  $\mathbb{B}_R$ , а такую функцию можно приблизить линейными комбинациями каких угодно функций, то есть предположение не верно, что доказывает теорему.  $\square$

**Выводы.** В работе впервые решена задача о нахождении экстремального радиуса Помпейю для множества положительной коразмерности, отмечено отличие найденной величины от подобной для двумерного случая, показано возможное применение полученного результата. Разработанная здесь методика может быть использована для дальнейших исследований в этой области, нахождения экстремального радиуса Помпейю для других плоских множеств в пространствах размерности 3 и выше, а также для кубов размерности  $m$  в пространствах размерности  $n < m$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. – 1929. – Vol. 188. – P. 1138–1139.
2. Pompeiu D. Sur une propriete de fonctions continues dependes de deux variables reelles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1929. – Vol. 15, № 5. – P. 265–269.
3. Nicolesco M. Sur un theoreme de Pompeiu / M. Nicolesco // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1930. – Vol. 16, № 5. – P. 817–822.
4. Пиефф Л. Sur un probleme de Pompeiu / L. Pieff // Ann. Univ. Sofia Fac. Phys., Livre 1. – 1949. – Vol. 45. – P. 111–114.
5. Christov C. Sur laquation integrale generalisee de Pompeiu / C. Christov // Ann. Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1. – 1949. – Vol. 45. – P. 167–178.
6. Произволов В. В. Об интегралах, постоянных на конгруэнтных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21, №2. – С. 183–186.
7. Заставный В. П. Теорема о нулях преобразования Фурье индикатора и ее применение / В. П. Заставный // Новосибирск: Ред. «Сиб. мат. журн.». – 1986. – 18 с. Деп. в ВИНТИ 29.10.87: № 701-в. 87.
8. Ebenfalt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfalt // Ann. Acad. Sci. Ser. A. J. Math. – 1993. – Vol. 24. – P. 16–31.
9. Garofalo N. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. – 1991. – Vol. 56. – P. 1–28.
10. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – Vol. 223. – P. 183–190.
11. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 352. – P. 2723–2736.
12. Volchkov V. V. New result in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Israel Mathematical Conference Proceedings "Complex Analysis and Dynamical Systems II". – 2003. – Vol. 16. – P. 417–426.
13. Котляр Б. Д. Плотности укладок ограниченных множеств / Б. Д. Котляр // Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР. – 1987. – Т. 126, №3. – С. 469–472.
14. Sitaram A. On an analogue of the Wiener Tauberian theorem for symmetric spaces of the non-compact type / A. Sitaram // Pacific J. Math. – 1988. – Vol. 133. – P. 197–208.
15. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on  $SV(1, 1)$  / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourirer (Grenoble). – 1992. – Vol. 42. – P. 671–694.
16. Agranovsky M. L. Fourier transform on  $SL_2(\mathbb{R})$  and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – Vol. 19. – P. 1522–1525.
17. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – Vol. 52. – P. 133–166.
18. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 55. – P. 267–288.
19. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
20. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al. – 1992. – P. 185–194.

21. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
22. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
23. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
24. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
25. Chang D. C. The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group / D. C. Chang, W. Eby // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 12. – P. 2619–2640.
26. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры / В. В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.
27. Машаров П. А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело / П. А. Машаров // Вісник дніпропетровського університету. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 72–81.
28. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю / В. В. Волчков // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 3–22.
29. Машаров П. А. Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 163–171.
30. Иванисенко Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника / Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 76–83.
31. Машаров П. А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю / П. А. Машаров // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
32. Елец Л. В. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю / Л. В. Елец, П. А. Машаров // Украинский математический журнал. – 2009. – Т. 61. – С. 61–72.
33. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.

*Поступила в редакцию 10.10.2017 г.*

## THE LOCAL POMPEIU PROBLEM FOR THE SQUARE IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

*P. A. Masharov*

The problem of finding the smallest radius of the ball in which the given set is a Pompeiu set is considered. The finding radius of the ball for the plain square is obtained.

**Keywords:** the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius for the square, the local Pompeiu problem.

**Машаров Павел Анатольевич**

кандидат физико-математических наук  
 ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений  
 pavelmasharov@gmail.com  
 +38-050-5653907

**Masharov Pavlo Anatoliyovych**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
 Donetsk National University, Donetsk

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

ЦИКЛИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ  
ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ В СЛУЧАЕ  
ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2017. *Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин*

Методом последовательных конформных отображений изучено циклически симметричное упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с круговыми вырезами в случае идеальной пластичности. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. Напряжения на неизвестных границах раздела упругой и пластических областей являются непрерывными.

Найдены неизвестные границы раздела упругой и пластических областей. Определены условия, при которых имеет место начальный пластический охват контуров вырезов и при которых возможно наибольшее сближение пластических областей. При слиянии пластических областей формируется изолированная упругая область.

**Ключевые слова:** циклическая симметрия, неограниченная изотропная плоскость, упругопластическое состояние, начальный пластический охват, неизвестная граница раздела, конформное отображение, коллокация.

В случае плоской деформации или обобщенного плоского состояния многие упругопластические задачи для изотропных сред с круговыми вырезами при различных условиях возникновения неупругих напряжений были решены с помощью аналитических функций.

Коэффициенты разложений аналитических функций находились методом малого параметра из условия непрерывности упругих и неупругих напряжений на подлежащих определению границах их раздела. В основном использовался метод малого параметра. Этот метод позволил получить приемлемые результаты в случаях, когда внешние границы неупругих областей достаточно удалены друг от друга [1, 2].

В работах [3–6] предложен и использован метод последовательных конформных отображений для изучения возникновения и развития неупругих областей в изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми (эллиптическими) вырезами от начального неупругого охвата их контуров до практического соприкосновения неупругих областей для различных условий пластичности.

В предлагаемой работе методом последовательных конформных отображений изучено возникновение и развитие неупругих областей в плоскости с одинаковыми круговыми вырезами, равномерно расположенными на окружности, от начального неупругого охвата их контуров при равностороннем внешнем сжатии в случае идеальной пластичности.

**Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченную изотропную плоскость с  $s \geq 3$  одинаковыми круговыми вырезами радиуса  $R$ , равномерно расположенными на окружности радиуса  $lR$ . Плоскость равносторонне сжимается усилиями  $q$ , при которых сплошная плоскость остается упругой. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий.

Рассматриваются такие расстояния  $hR$  между центрами вырезов и внешние усилия  $q$ , при которых в плоскости возле вырезов возникают пластические области. Они полностью охватывают контуры вырезов, не соприкасаются и их внешние границы находятся на расстоянии  $h_0R$  друг от друга (рис. 1).

Между линейными параметрами  $l, h$  и углом периодичности  $\alpha_s$  существует зависимость

$$l = 2h \sin(\alpha_s / 2), \quad \alpha_s = 2\pi / s. \quad (1)$$

Интенсивность усилий  $q$  увеличивается так, что последующие пластические области полностью охватывают предыдущие. Геометрическая и силовая симметрия равновесия плоскости позволяет исследовать возникновение и развитие неупругой области от начального пластического охвата выреза с касанием его контура около одного – правого выреза.

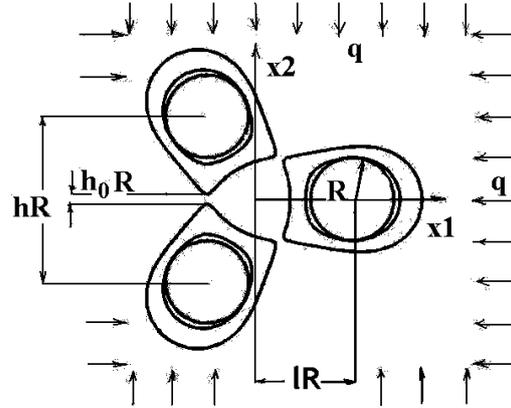


Рис. 1

Введем безразмерные координаты

$$z = \xi_1 + i\xi_2 = R^{-1}(x_1 + ix_2), \quad z - l = r \exp(i\theta). \quad (2)$$

Напряжения в правой пластической области удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению идеальной пластичности и условиям на контуре выреза [2]

$$\begin{aligned} r\partial\sigma_r^p / \partial r + \sigma_r^p - \sigma_\theta^p + \partial\tau_{r\theta}^p / \partial\theta = 0, \quad r\partial\tau_{r\theta}^p / \partial r + 2\tau_{r\theta}^p + \partial\sigma_\theta^p / \partial\theta = 0; \\ (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p)^2 + (2\tau_{r\theta}^p)^2 = 4k^2; \quad |z - l| = r = 1: \quad \sigma_r^p = \tau_{r\theta}^p = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $k$  – постоянная, имеющая размерность напряжений.

Упругие напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению совместности и условиям внешнего нагружения [7]

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{11}^e / \partial\xi_1 + \partial\tau_{12}^e / \partial\xi_2 = 0, \quad \partial\tau_{12}^e / \partial\xi_1 + \partial\sigma_{22}^e / \partial\xi_2 = 0; \\ (\partial^2 / \partial\xi_1^2 + \partial^2 / \partial\xi_2^2)(\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e) = 0; \quad |z| \rightarrow \infty: \sigma_{11}^e = \sigma_{22}^e = -q, \quad \tau_{12}^e = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На подлежащей определению границе раздела упругой и пластической областей напряжения принимаются непрерывными.

В условиях задачи (3), (4) равносторонне сжимаемая сплошная плоскость остается в упругом состоянии при любой интенсивности внешних усилий.

**Аналитическое решение задачи.** Решение задачи (3) имеет вид [2]

$$\sigma_r^p = -2k \ln r, \quad \sigma_\theta^p = -2k(1 + \ln r), \quad \tau_{r\theta}^p = 0. \quad (5)$$

Напряженное состояние упругой части плоскости описывается функциями  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , являющимися решением задачи (4). С учетом геометрической и силовой симметрии задачи их можно представить так [1]

$$\Phi(z) = -\alpha / 2 + \sum_{n=1} a_n \Phi_n(z), \quad \Psi(z) = \sum_{n=1} b_n \Psi_n(z); \quad \alpha = k^{-1}q. \quad (6)$$

$$\Phi_n(z) = \zeta^{-(n+1)}(z-l) + \sum_{k=1}^{s-1} \zeta_k^{-(n+1)}(z-l\sigma_s^k).$$

$$\Psi_n(z) = \zeta^{-(n+1)}(z-l) + \sum_{k=1}^{s-1} \sigma_s^{-2k} \zeta_k^{-(n+1)}(z-l\sigma_s^k); \quad \sigma_s = \exp(i\alpha_s).$$

Значения  $\zeta(z-l)$  и  $\zeta_k(z-l\sigma_s^k)$  находятся из равенств

$$\begin{aligned} z-l &= r_0\omega(\zeta); \quad z-l\sigma_s^k = r_0\sigma_s^k\omega(\zeta_k), \quad k = \overline{1, s-1}; \\ \omega(\zeta) &= \sum_{n=-1} c_{n+2}\zeta^{-n}, \quad c_1 = 1; \quad \zeta = \rho \exp(i\varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь функции  $z-l = r_0\omega(\zeta)$  и  $z-l\sigma_s^k = r_0\sigma_s^k\omega(\zeta_k)$  конформно отображают внешности единичных окружностей  $|\zeta|=1$  и  $|\zeta_k|=1$  на внешности соответствующих пластических областей.

Для упругих напряжений справедливы равенства [1]

$$\sigma_{22}^e - \sigma_{11}^e + 2i\tau_{12}^e = 2k[\bar{z}\Phi'_z(z) + \Psi(z)], \quad \sigma_{22}^e + \sigma_{11}^e = 4k \operatorname{Re} \Phi(z). \quad (8)$$

Возле правой пластической области функции (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= -\alpha/2 + \sum_{n=1} a_n \Phi_n(\zeta), \quad \Phi_n(\zeta) = \zeta^{-(n+1)} + \sum_{k=1}^{s-1} \zeta_k^{-(n+1)}(\zeta), \\ \Psi(\zeta) &= \sum_{n=1} b_n \Psi_n(\zeta); \quad \Psi_n(\zeta) = \zeta^{-(n+1)} + \sum_{k=1}^{s-1} \sigma_s^{-2k} \zeta_k^{-(n+1)}(\zeta), \end{aligned} \quad (9)$$

где значения  $\zeta_k(\zeta)$  находятся из равенств

$$\zeta_k = \sigma_s^{-k} r_0^{-1} z - r_0^{-1} l - \sum_{n=0} c_{n+2} \zeta_k^{-n}, \quad z = l + r_0\omega(\zeta). \quad (10)$$

Соотношения (8) переписутся так

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - i\tau_{\rho\varphi}^e &= k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta})\Phi'_\zeta(\zeta) - \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta})\Psi(\zeta)], \\ \sigma_\rho^e + \sigma_\varphi^e &= 2k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Напряжения (5) на внешней границе правой пластической области  $z-l = r_0\omega(\sigma)$  принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p - i\tau_{\rho\varphi}^p &= -k[1 + 2 \ln r_0 + \ln |\omega(\sigma)|^2 - \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \\ \sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p &= -2k[1 + 2 \ln r_0 + \ln |\omega(\sigma)|^2]. \end{aligned} \quad (12)$$

В равенствах (11), (12) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta[r_0^{-1}l + \overline{\omega(\zeta)}] / \bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}, \quad \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta\omega'(\zeta) / \bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}, \\ \Omega_3(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} / \bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)\omega(\zeta)}; \quad \sigma = \exp(i\varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты  $r_0, c_n, a_n, b_n$  разложений (7), (8) находятся из условий непрерывности упругих (11) и пластических (12) напряжений

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\Phi'_\zeta(\sigma) - \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\Psi(\sigma) = -1 - 2 \ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2 - \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}), \quad (14)$$

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} = -1 - 2 \ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2. \quad (15)$$

**Численное решение задачи.** Решение поставленной задачи строится методом последовательных конформных отображений [3–6]. Для фиксированного количества вырезов  $s$  и расстояния  $l$  между их центрами подбирается исходное отображение и значение параметра  $\alpha_n$ , при котором возможен пластический охват правого выреза, когда внешняя граница неупругой области касается его контура.

Строится упругое решение для полученного отображения. Из условия (14) методом коллокации находятся коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  разложений (9). Для этого распишем его так

$$\sum_{n=1} \{a_n [2 \operatorname{Re} \Phi_n(\sigma) - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\Phi'_n(\sigma)] - b_n \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\Psi_n(\sigma)\} = f(\sigma, \bar{\sigma}), \quad (16)$$

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = \alpha - 1 - 2 \ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2 + \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}).$$

Первое отображение (7) представим в виде

$$r_0 \omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_h(\zeta); \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{n=-1} t_{n+2} \zeta^{-n}, \quad t_n = r_0 c_n; \quad \omega_h(\zeta) = \sum_{n=-1} h_{n+2} \zeta^{-n}. \quad (17)$$

Тогда условие (15) можно переписать так

$$2 \sum_{n=-1} h_{n+2} [\operatorname{Re} \omega_0(\sigma) \cos n\varphi - \operatorname{Im} \omega_0(\sigma) \sin n\varphi] = s(\varphi), \quad (18)$$

$$s(\varphi) = \mu^{-1} |\omega_0(\sigma)|^2 [g(\varphi) - \ln |\omega_0(\sigma)|^2], \quad g(\varphi) = \alpha - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \Phi_n(\sigma).$$

Из него методом коллокации найдем постоянные  $h_n$ .

Новые коэффициенты  $r_0$  и  $c_n$  определяются равенствами

$$r_0 = t_1 + h_1, \quad c_n = (t_1 + h_1)^{-1} (t_n + h_n). \quad (19)$$

Точки коллокации ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) рекомендуется выбирать на контуре  $z - l = r_0 \omega(\sigma)$  несимметрично относительно прямой  $\xi_1 = l$ . Значения  $\zeta_k(\zeta)$  вычисляются из уравнения (10) методом Вегстейна с начальным приближением

$$\zeta_k^{(1)} = \sigma_s^{-k} r_0^{-1} z - r_0^{-1} l - c_2, \quad \zeta_k^{(2)} = \zeta_k^{(1)} - c_3 / \zeta_k^{(1)}. \quad (20)$$

Сходимость приближений обеспечивается выбором произвольной постоянной  $\mu$ , входящей в условие (18).

Построение приближений заканчивается при совпадении двух последних внешних границ правой пластической области с принятой точностью. Затем параметр  $\alpha$  увеличивается на заданный шаг. В качестве начального отображения берется

отображение, полученное на предыдущем шаге. Определяющим критерием точности решения задачи является погрешность выполнения условий непрерывности напряжений (11), (12) на границе их раздела

$$z - l = r_0 \omega(\sigma): \sigma_\rho^e = \sigma_\rho^p, \sigma_\varphi^e = \sigma_\varphi^p, \tau_{\rho\varphi}^e = \tau_{\rho\varphi}^p. \quad (21)$$

Итерационный процесс заканчивается максимальным сближением внешних границ пластических областей.

**Анализ численных результатов.** Результаты вычислений проиллюстрированы ниже приведенными графиками (рис. 2–9). На них в безразмерных координатах  $\xi_1, \xi_2$  для различных значений  $s, h, \alpha_n, \alpha_k$  изображены внешние границы правых пластических областей. Здесь  $\alpha_n$  – значение параметра  $\alpha = k^{-1}q$ , при котором имеет место начальный пластический охват контура выреза,  $\alpha_k$  – значение, до которого предложенный метод позволил довести вычисления.

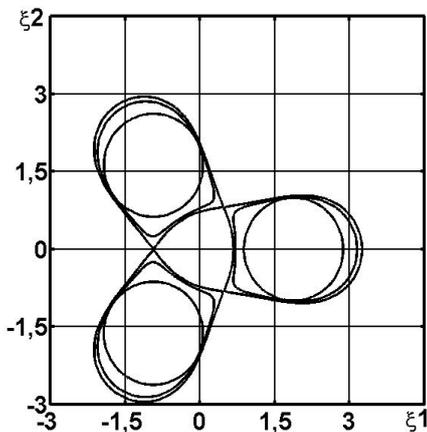


Рис. 2.  $s = 3, h = 3.25, \alpha_n = 1.300, \alpha_k = 1.422.$

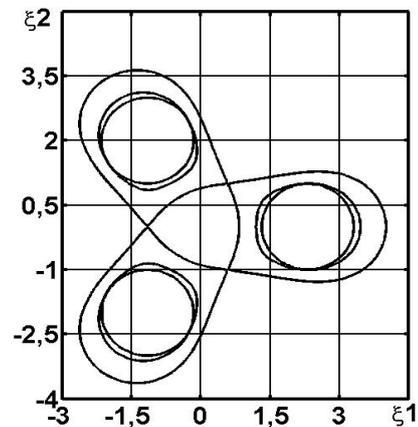


Рис. 3.  $s = 3, h = 4.0, \alpha_n = 1.160, \alpha_k = 1.837.$

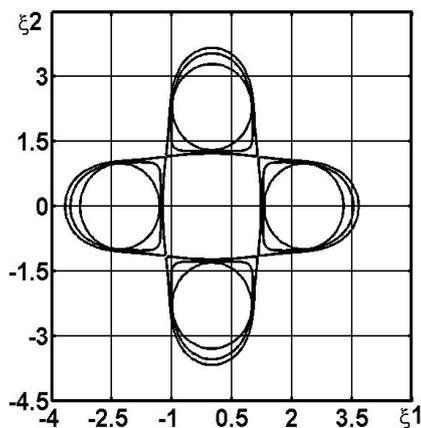


Рис. 4.  $s = 4, h = 3.25, \alpha_n = 1.260, \alpha_k = 1.422.$

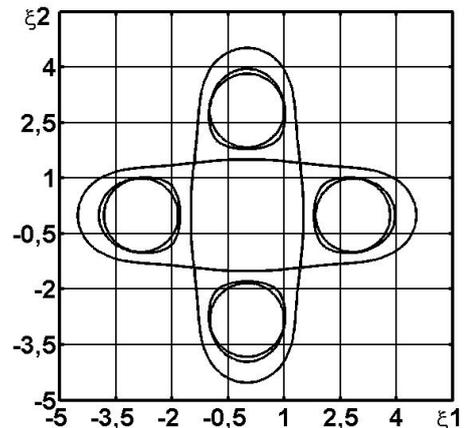


Рис. 5.  $s = 4, h = 4.0, \alpha_n = 1.150, \alpha_k = 1.838.$

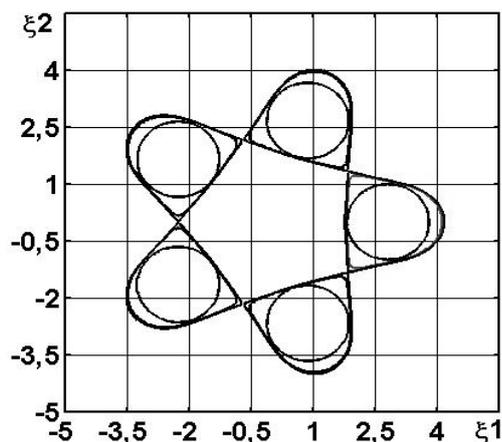


Рис. 6.  $s=5$ ,  $h=3.3$   $\alpha_n=1.370$ ,  $\alpha_k=1.422$ .

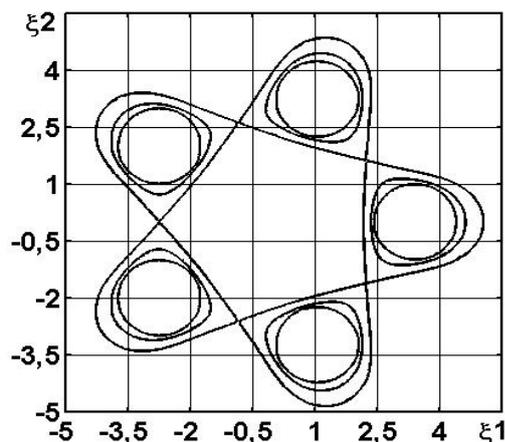


Рис. 7.  $s=5$ ,  $h=4.0$ ,  $\alpha_n=1.310$ ,  $\alpha_k=1.810$ .

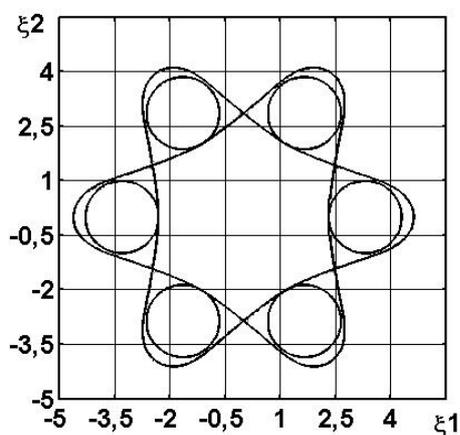


Рис. 8.  $s=6$ ,  $h=3.3$   $\alpha_n=1.370$ ,  $\alpha_k=1.392$ .

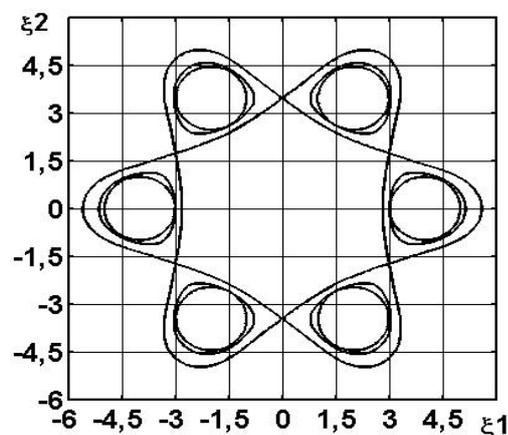


Рис. 9.  $s=6$ ,  $h=4.0$   $\alpha_n=1.210$ ,  $\alpha_k=1.778$ .

Внешние границы пластических областей сближены до пяти сотых радиуса вырезов. Относительная погрешность удовлетворения условиям непрерывности пластических и упругих напряжений (21) доведена до  $10^{-3}$ .

Из анализа приведенных результатов следует, что начальный пластический охват контуров вырезов возможен, когда параметр  $h$  удовлетворяет неравенству:  $h \geq 3.25$ .

Сближение внешних границ пластических областей проходит по линиям, соединяющим центры соседних вырезов. При соприкосновении этих границ остается упругое ядро внутри нового пластического образования.

**Выводы.** Метод последовательных конформных отображений позволил исследовать возникновение и развитие неупругих областей в плоскости с одинаковыми круговыми вырезами, равномерно расположенными на окружности, при равностороннем сжатии с учетом сдвиговых деформаций.

Определены наименьшие расстояния между центрами соседних вырезов, при которых возможен начальный пластический охват.

Установлено, что при образовании единой пластической области внутри нее сохраняется упругое ядро, выпуклое при  $s=3,4$  и вогнутое при  $s=5,6$ .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами / А.С. Космодамианский. – Киев: Вища школа, 1975. – 227 с.
2. Аннин Б.Д. Упругопластическая задача / Б.Д. Аннин, Г.П. Черепанов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
3. Кодак Н.И. Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами при двустороннем сжатии / Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин // Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2012. – № 1. – С. 73-78.
4. Кодак Н.И. Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя эллиптическими вырезами / Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин // Труды Ин-та прикл. матем. и механики. – 2012. – Т. 24. – С. 147-156.
5. Кодак Н.И. Изотропная плоскость с двумя круговыми вырезами в случае экспоненциальной пластичности / Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин // Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2013. – № 1. – С. 49-54.
6. Кодак Н.И. Предельное равновесие изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами / Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин // Труды Ин-та прикл. матем. и механики. – 2014. – № 28. – С. 102-110.
7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – Киев: Наук. думка, 1968. – 887 с.

*Поступила в редакцию 15.06.2017 г.*

**CYCLIC SYMMETRICAL ELASTOPLASTIC STATE OF AN ISOTROPIC PLANE WITH CIRCULAR CUT OUTS IN THE CASE OF AN IDEAL PLASTICITY**

*N.I. Kodak, V.N. Lozhkin*

By method of successive conformal mapping and by method of collocation cyclic symmetrical elastoplastic state of an infinite isotropic plane is studied. Contours of the cut outs from external force are free. Stress is on an unknown border of separating of the elastic end plastic domains are continuous.

An unknown borders of separating of the elastic end plastic domains has been found. Efforts, at which the initial plastic inclusion of contours of the cut outs take place and at which maximum convergence of plastic domains is possible are determined. By amalgamation of plastic domains inner isolated plastic domain is formed.

**Keywords:** cyclical symmetry, infinite isotropic plane, circular cut outs, elastoplastic state, initial plastic inclusion, elastic end plastic domains, unknown border separating, conformal mapping, collocation.

**Кодак Наталья Ивановна**

ГУ «Институт прикладной математики и механики» (г. Донецк), отдел аналитических методов механики горных пород, мл. науч. сотр.

**Kodak Natalia Ivanovna**

State Institute of Applied Mathematics and Mechanics, (Donetsk), Department of Analytical Methods of Mechanics of Rocks, Junior Scientific Worker

**Ложкин Владимир Николаевич**

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,  
ГУ «Институт прикладной математики и механики» (г. Донецк), отдел аналитических методов механики горных пород, ст. науч. сотр.  
283114 г. Донецк, ул. Розы Люксембург 74  
e-mail: math@iamm.su

**Lozhkin Vladimir Nikolaevich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Scientific Worker,  
State Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk  
Department of Analytical Methods of Mechanics of Rocks, Senior Scientific Worker

УДК 539.3

## ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ

© 2017. Р.Н. Нескородев

Предложена методика построения системы дифференциальных уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит, удовлетворяющая однородным условиям на торцах плиты. Даны примеры получения коэффициентов обобщенных метагармонических уравнений системы для различных материалов.

*Ключевые слова:* изгиб, ортотропная плита, уточненная теория.

**Введение.** Вопросам построения различных вариантов уточненных теорий изгиба плит посвящен ряд монографий [1–3]. В этих работах развиваются теории изгиба пластин, учитывающие влияния поперечных сдвигов и нормального напряжения  $\sigma_z$ . В статье [4] предложен один из способов получения уточненных теорий изгиба трансропных плит, базирующийся на использовании однородных решений. В работе [5] в качестве классической теории изгиба изотропных плит предлагается признать теорию, приводящую к дифференциальным уравнениям шестого порядка. В виде одного из вариантов в этой работе выводится система уравнений, имеющая шестой порядок, и формулируются соответствующие краевые задачи. Предположения, на основе которых строится эта теория, основаны на сравнении выражений для поперечных усилий, полученных в результате интегрирования напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , заданных различными соотношениями. В статьях [6, 7] на основе указанных предположений получены системы дифференциальных уравнений теории изгиба изотропных и трансропных плит, позволяющие удовлетворить всем трем граничным условиям на боковой поверхности, имеющим место в теории изгиба плит.

В настоящей статье предлагается один из способов получения системы разрешающих уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит, базирующийся на непосредственном сравнении напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\sigma_z$ , заданных различными соотношениями. Система содержит обобщенные бигармоническое и два метагармонических уравнения.

**Основные соотношения уточненной теории ортотропных плит.** Рассмотрим задачу изгиба ортотропной плиты постоянной толщины  $2h$ , отнесенную к декартовой системе координат  $Oxyz$ . Оси  $Ox$  и  $Oy$  расположены в срединной плоскости плиты, а ось  $Oz$  – нормальна к этой плоскости. К боковой поверхности плиты приложены нагрузки, приводящие ее к изгибу.

В дальнейшем вместо общепринятых обозначений для перемещений и напряжений будем использовать следующие:  $u_1, u_2, u_3$  для  $u_x, u_y, u_z$  и  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  для  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  соответственно.

Краевая задача, решение которой позволит определить напряженно-деформированное состояние, формулируется следующим образом. Найти функции перемещений  $u_k(x, y, z)$  ( $k=1,2,3$ ), удовлетворяющие уравнениям теории упругости ортотропного тела и однородным граничным условиям на плоских гранях плиты

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (1)$$

Исходные представления для перемещений будем искать в виде

$$u_i(x, y, z) = z \sum_{n=0}^N \frac{\omega^n(z)}{n!} u_{in}(x, y) \quad (i = 1, 2), \quad u_3(x, y, z) = \sum_{n=0}^N \frac{\omega^n(z)}{n!} u_{3n}(x, y).$$

Здесь

$$\omega(z) = \frac{h^2 - z^2}{2h}, \quad \omega(\pm h) = 0. \quad (2)$$

Производные по переменной  $z$  от перемещений получим такими

$$u'_i = \sum_{n=0}^N \frac{\omega^n}{n!} [(2n+1)u_{in} - hu_{i,n+1}] \quad (i = 1, 2), \quad u'_3 = -\frac{z}{h} \sum_{n=0}^N \frac{\omega^n}{n!} u_{3,n+1}. \quad (3)$$

При выводе уравнений (3) использовалась формула  $z\omega' = 2\omega - h$ , которая следует из представлений (2), а также равенства

$$\omega' = -z/h, \quad \left( z \frac{\omega^n}{n!} \right)' = \frac{\omega^n}{n!} + z\omega' \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = (2n+1) \frac{\omega^n}{n!} - h \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \geq 1).$$

Напряжения находим из уравнений закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_k(x, y, z) &= z \sum_{n=0}^M \frac{\omega^n(z)}{n!} \sigma_{kn}(x, y) \quad (k = 1, 2, 3, 6), \\ \sigma_k(x, y, z) &= \sum_{n=0}^M \frac{\omega^n(z)}{n!} \sigma_{kn}(x, y) \quad (k = 4, 5). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{kn} &= A_{k1} \partial_1 u_{1n} + A_{k2} \partial_2 u_{2n} - A_{k3} u_{3,n+1} / h \quad (k = 1, 2, 3), \quad \sigma_{6n} = A_{66} (\partial_1 u_{2n} + \partial_2 u_{1n}), \\ \sigma_{4n} &= A_{44} [\partial_2 u_{3n} + (2n+1)u_{2n} - h u_{2,n+1}], \quad \sigma_{5n} = A_{55} [\partial_1 u_{3n} + (2n+1)u_{1n} - h u_{1,n+1}], \quad (5) \\ &(n = 0, 1, \dots), \quad A_{ki} - \text{модули упругости; } \partial_1 = \partial / \partial x, \quad \partial_2 = \partial / \partial y. \end{aligned}$$

Производные по переменной  $z$  от напряжений будут такими

$$\sigma'_k = \sum_{n=0}^M \frac{\omega^n}{n!} [(2n+1)\sigma_{kn} - h\sigma_{k,n+1}] \quad (k = 1, 2, 3, 6), \quad \sigma'_k = -\frac{z}{h} \sum_{n=1}^M \frac{\omega^n}{n!} \sigma_{k,n+1} \quad (k = 4, 5). \quad (6)$$

Из условий (1), с учетом соотношений (5), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{50} &= A_{55} [\partial_1 u_{30} + u_{10} - h u_{11}] = 0, \quad \sigma_{40} = A_{44} [\partial_2 u_{30} + u_{20} - h u_{21}] = 0, \\ \sigma_{30} &= A_{31} \partial_1 u_{10} + A_{32} \partial_2 u_{20} - A_{33} u_{31} / h = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя представления (4) и (6) в уравнения равновесия и приравнивая нулю выражения при одинаковых функциях переменной  $z$ , найдем:

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{1n} + \partial_2 \sigma_{6n} - \sigma_{5,n+1} / h &= 0, \quad \partial_1 \sigma_{6n} + \partial_2 \sigma_{2n} - \sigma_{4,n+1} / h = 0, \\ \partial_1 \sigma_{5n} + \partial_2 \sigma_{4n} + (2n+1)\sigma_{3,n} - h\sigma_{3,n+1} &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим решение системы (8), когда в разложениях (4) оставлены слагаемые  $\sigma_{10}$ ,  $\sigma_{20}$ ,  $\sigma_{60}$ ,  $\sigma_{51}$ ,  $\sigma_{41}$ ,  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$ . В этом случае, с учетом соотношений (7), имеем

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{10} + \partial_2 \sigma_{60} - \sigma_{51} / h = 0, \quad \partial_1 \sigma_{60} + \partial_2 \sigma_{20} - \sigma_{41} / h = 0, \quad \partial_1 \sigma_{51} + \partial_2 \sigma_{41} - h \sigma_{32} = 0; \quad (9) \\ \sigma_{31} = A_{31} \partial_1 u_{11} + A_{32} \partial_2 u_{21} - A_{33} u_{32} / h = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Разрешая уравнения (9) и учитывая соотношения (5), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{51} = h (\partial_1 \sigma_{10} + \partial_2 \sigma_{60}) = A_{55} (\partial_1 u_{31} + 3u_{11} - h u_{12}), \\ \sigma_{41} = h (\partial_1 \sigma_{60} + \partial_2 \sigma_{20}) = A_{44} (\partial_2 u_{31} + 3u_{21} - h u_{22}), \\ \sigma_{32} = (\partial_1 \sigma_{51} + \partial_2 \sigma_{41}) / h = A_{31} \partial_1 u_{12} + A_{32} \partial_2 u_{22}. \quad (11) \end{aligned}$$

Из соотношений (7) и (10) находим представления для перемещений

$$\begin{aligned} u_{11} = (\partial_1 u_{30} + u_{10}) / h, \quad u_{21} = (\partial_2 u_{30} + u_{20}) / h, \quad u_{31} = h (\alpha_{31} \partial_1 u_{10} + \alpha_{32} \partial_2 u_{20}), \\ u_{32} = h (\alpha_{31} \partial_1 u_{11} + \alpha_{32} \partial_2 u_{21}), \quad \alpha_{3i} = A_{3i} / A_{33}. \quad (12) \end{aligned}$$

Представления для напряжений через компоненты перемещений  $u_{10}$ ,  $u_{20}$ ,  $u_{30}$  и их производные найдем из соотношений (5) и (11) с учетом зависимостей (12)

$$\begin{aligned} \sigma_{10} = B_{11} \partial_1 u_{10} + B_{12} \partial_2 u_{20}, \quad \sigma_{20} = B_{21} \partial_1 u_{10} + B_{22} \partial_2 u_{20}, \quad \sigma_{60} = A_{66} (\partial_2 u_{10} + \partial_1 u_{20}); \quad (13) \\ \sigma_{51} = h (L_{11} u_{10} + L_{12} u_{20}) = A_{55} \left[ h (\alpha_{31} \partial_1^2 u_{10} + \alpha_{32} \partial_1 \partial_2 u_{20}) + 3 (\partial_1 u_{30} + u_{10}) / h - h u_{12} \right], \\ \sigma_{41} = h (L_{21} u_{10} + L_{22} u_{20}) = A_{44} \left[ h (\alpha_{31} \partial_1 \partial_2 u_{10} + \alpha_{32} \partial_2^2 u_{20}) + 3 (\partial_2 u_{30} + u_{20}) / h - h u_{22} \right], \\ \sigma_{32} = (L_{11} \partial_1 + L_{12} \partial_2) u_{10} + (L_{21} \partial_1 + L_{22} \partial_2) u_{20} = A_{31} \partial_1 u_{12} + A_{32} \partial_2 u_{22}. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11} = B_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2, \quad L_{12} = L_{21} = (B_{12} + A_{66}) \partial_1 \partial_2, \quad L_{22} = A_{66} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2, \\ B_{11} = A_{11} - A_{13} \alpha_{31}, \quad B_{22} = A_{22} - A_{23} \alpha_{32}, \quad B_{12} = B_{21} = A_{12} - A_{13} \alpha_{32}. \end{aligned}$$

Удовлетворяя равенствам в правых частях напряжений (14), находим решение задачи изгиба ортотропных плит. Рассмотрим два варианта определения компонент перемещений и напряжений, при которых указанные равенства будут выполнены.

**Получение обобщенного бигармонического уравнения.** Как и в классической теории Кирхгофа полагаем  $u_{10} = -\partial_1 u_{30}$ ,  $u_{20} = -\partial_2 u_{30}$ . Тогда из равенств (12) и первых двух соотношений (14) находим

$$\begin{aligned} u_{11} = u_{21} = u_{32} = 0, \quad u_{12} = \frac{1}{A_{55}} (L_{11} \partial_1 + L_{12} \partial_2) u_{30} - \partial_1 D_2 u_{30}, \\ u_{31} = -h D_2 u_{30}, \quad u_{22} = \frac{1}{A_{44}} (L_{21} \partial_1 + L_{22} \partial_2) u_{30} - \partial_2 D_2 u_{30}, \quad (15) \end{aligned}$$

где  $D_2 = \alpha_{31} \partial_1^2 + \alpha_{32} \partial_2^2$ .

Уравнение для определения функции  $u_{30}$  получим, удовлетворяя равенству в правой части напряжений  $\sigma_{32}$  соотношений (14)

$$\left[ A_{33}D_2D_2 - r_{31}\left(L_{11}\partial_1^2 + L_{12}\partial_1\partial_2\right) - r_{32}\left(L_{12}\partial_1\partial_2 + L_{22}\partial_2^2\right) \right] u_{30} = 0. \quad (16)$$

Здесь  $r_{31} = 1 + A_{31} / A_{55}$ ,  $r_{32} = 1 + A_{32} / A_{44}$ .

Представления для компонент функций напряжений через функцию  $u_{30}$  получим из соотношений (13)–(14)

$$\begin{aligned} \sigma_{10} &= -\left(B_{11}\partial_1^2 + B_{12}\partial_2^2\right)u_{30}, \quad \sigma_{20} = -\left(B_{12}\partial_1^2 + B_{22}\partial_2^2\right)u_{30}, \quad \sigma_{60} = -2A_{66}\partial_1\partial_2u_{30}, \\ \sigma_{51} &= -h\left(L_{11}\partial_1 + L_{12}\partial_2\right)u_{30}, \quad \sigma_{41} = -h\left(L_{12}\partial_1 + L_{22}\partial_2\right)u_{30}, \\ \sigma_{32} &= -\left(L_{11}\partial_1^2 + 2L_{12}\partial_1\partial_2 + L_{22}\partial_2^2\right)u_{30}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, компоненты перемещений и напряжений выражаются через функцию  $u_{30}$  по формулам (15) и (17), а функция  $u_{30}$  определяется из уравнения четвертого порядка (16). Указанное уравнение имеет вид

$$\left(c_2\partial_2^4 + c_1\partial_1^2\partial_2^2 + c_0\partial_1^4\right)u_{30} = 0, \quad (18)$$

где  $c_2 = r_{32}B_{22} - A_{33}\alpha_{32}^2$ ,  $c_0 = r_{31}B_{11} - A_{33}\alpha_{31}^2$ ,  $c_1 = (r_{31} + r_{32})(B_{12} + 2A_{66}) - 2A_{33}\alpha_{31}\alpha_{32}$ .

**Получение метагармонических уравнений.** Полагаем

$$u_{10} = \gamma_1\partial_2\Psi, \quad u_{20} = \gamma_2\partial_1\Psi, \quad u_{30} = -\frac{h^2}{3}\gamma_{12}\partial_1\partial_2\Psi, \quad u_{12} = \frac{3}{h^2}\gamma_3\partial_2\Psi, \quad u_{22} = \frac{3}{h^2}\gamma_4\partial_1\Psi,$$

где  $\gamma_{12} = \alpha_{31}\gamma_1 + \alpha_{32}\gamma_2$ ,  $\gamma_i$  – постоянные величины.

Тогда равенства (14) для напряжений  $\sigma_{51}$  и  $\sigma_{41}$  через функцию  $\psi$  примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{51} &= h\left[\left(B_{11}\gamma_1 + b_{11}\gamma_2\right)\partial_1^2 + A_{66}\gamma_1\partial_2^2\right]\partial_2\Psi = \frac{3}{h}A_{55}(\gamma_1 - \gamma_3)\partial_2\Psi, \\ \sigma_{41} &= h\left[A_{66}\gamma_2\partial_1^2 + \left(b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2\right)\partial_2^2\right]\partial_1\Psi = \frac{3}{h}A_{44}(\gamma_2 - \gamma_4)\partial_1\Psi. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $b_{11} = B_{12} + A_{66}$ .

Из равенств (19) получим уравнения для определения функции  $\psi$ . Они будут такими

$$\begin{aligned} \partial_2\left[\frac{B_{11}\gamma_1 + b_{11}\gamma_2}{A_{66}\gamma_1}\partial_1^2 + \partial_2^2 - \frac{3}{h^2}\frac{A_{55}(\gamma_1 - \gamma_3)}{A_{66}\gamma_1}\right]\Psi &= 0, \\ \partial_1\left[\frac{A_{66}\gamma_2}{b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2}\partial_1^2 + \partial_2^2 - \frac{3}{h^2}\frac{A_{44}(\gamma_2 - \gamma_4)}{b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2}\right]\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Операторы в квадратных скобках уравнений (20) будут одинаковыми, если выполняются равенства

$$\beta^2 = \frac{B_{11}\gamma_1 + b_{11}\gamma_2}{A_{66}\gamma_1} = \frac{A_{66}\gamma_2}{b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2}, \quad k^2 = \frac{3}{h^2}\frac{A_{55}(\gamma_1 - \gamma_3)}{A_{66}\gamma_1} = \frac{3}{h^2}\frac{A_{44}(\gamma_2 - \gamma_4)}{b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2}. \quad (21)$$

Равенство (14) для напряжений  $\sigma_{32}$  через функцию  $\psi$  примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{32} &= \partial_1 \partial_2 \left[ (B_{11}\gamma_1 + b_{11}\gamma_2) \partial_1^2 + A_{66}\gamma_1 \partial_2^2 + A_{66}\gamma_2 \partial_1^2 + (b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2) \partial_2^2 \right] \psi = \\ &= \frac{3}{h^2} A_{33} (\alpha_{31}\gamma_3 + \alpha_{32}\gamma_4) \partial_1 \partial_2 \psi. \end{aligned}$$

Из последнего равенства, с учетом соотношений (19) получим уравнение

$$(A_{55} + A_{33}\alpha_{31})\gamma_3 + (A_{44} + A_{33}\alpha_{32})\gamma_4 - A_{55}\gamma_1 - A_{44}\gamma_2 = 0. \quad (22)$$

Разрешая уравнения (21) и (22) найдем значения величин  $\gamma_i$ . Из первого равенства соотношений (21) находим

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \bar{e} = [e_1, e_2] = \frac{-\left(B_{11}B_{22} + b_{11}^2 - A_{66}^2\right) \pm \sqrt{\left(B_{11}B_{22} + b_{11}^2 - A_{66}^2\right)^2 - 4B_{11}B_{22}b_{11}^2}}{2B_{11}b_{11}}. \quad (23)$$

После определения величин  $e_1$  и  $e_2$  по формулам (23), получим две пары решений для величин  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{21} = 1/e_1; \quad \gamma_{12} = e_2, \quad \gamma_{22} = 1.$$

Второе соотношение равенств (21) приводит к уравнению

$$(b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2) A_{55}\gamma_3 - A_{66}\gamma_1 A_{44}\gamma_4 = (b_{11}\gamma_1 + B_{22}\gamma_2) A_{55}\gamma_1 - A_{66}A_{44}\gamma_1\gamma_2. \quad (24)$$

Решение уравнений (22) и (24) дает значения величин  $\gamma_{31}$ ,  $\gamma_{41}$  и  $\gamma_{32}$ ,  $\gamma_{42}$ , которые соответствуют величинам  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{21}$  и  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{22}$ .

Таким образом, задача определения функции  $\psi$  приведена к решению обобщенных метагармонических уравнений

$$\left(\partial_2^2 + \beta_i^2 \partial_1^2 - k_i^2\right) \psi_i = 0 \quad (i=1,2), \quad (25)$$

относительно функций  $\psi_i$ . В уравнениях (25) введены обозначения

$$\beta_i^2 = \frac{B_{11}\gamma_{1i} + b_{11}\gamma_{2i}}{A_{66}\gamma_{1i}} = \frac{A_{66}\gamma_{2i}}{b_{11}\gamma_{1i} + B_{22}\gamma_{2i}}, \quad k_i^2 = \frac{3}{h^2} \frac{A_{55}(\gamma_{1i} - \gamma_{3i})}{A_{66}\gamma_{1i}} = \frac{3}{h^2} \frac{A_{44}(\gamma_{2i} - \gamma_{4i})}{b_{11}\gamma_{1i} + B_{22}\gamma_{2i}}.$$

Представления для компонент функций напряжений через функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  получим из соотношений (13)–(14)

$$\begin{aligned} \sigma_{10} &= q_{11}\partial_1\partial_2\psi_1 + q_{12}\partial_1\partial_2\psi_2, \quad \sigma_{20} = q_{21}\partial_1\partial_2\psi_1 + q_{22}\partial_1\partial_2\psi_2, \\ \sigma_{32} &= q_{31}\partial_1\partial_2\psi_1 + q_{32}\partial_1\partial_2\psi_2, \quad \sigma_{41} = q_{41}\partial_1\psi_1 + q_{42}\partial_1\psi_2, \\ \sigma_{51} &= q_{51}\partial_2\psi_1 + q_{52}\partial_2\psi_2, \quad \sigma_{60} = A_{66} \left[ (\gamma_{11}\partial_2^2 + \gamma_{21}\partial_1^2) \psi_1 + (\gamma_{12}\partial_2^2 + \gamma_{22}\partial_1^2) \psi_2 \right], \end{aligned}$$

где

$$q_{1i} = B_{11}\gamma_{1i} + B_{12}\gamma_{2i}, \quad q_{2i} = B_{12}\gamma_{1i} + B_{22}\gamma_{2i}, \quad q_{3i} = \frac{3}{h^2} A_{33} (\alpha_{31}\gamma_{3i} + \alpha_{32}\gamma_{4i}),$$

$$q_{4i} = \frac{3}{h} A_{44} (\gamma_{2i} - \gamma_{4i}), \quad q_{5i} = \frac{3}{h} A_{55} (\gamma_{1i} - \gamma_{3i}).$$

**Примеры коэффициентов уравнений.** В качестве примера рассмотрим вычисление значений коэффициентов уравнений (25) для двух ортотропных материалов со следующими техническими постоянными [8]

1) стеклопластик ТЖС-0,7:

$$E_1 = 3.59 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E_2 = 2.93 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E_3 = 1.83 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 0.76 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \\ G_{23} = 0.63 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_{31} = 0.66 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu_{12} = 0.177, \quad \nu_{23} = 0.371, \quad \nu_{31} = 0.157;$$

2) стеклопластик Т-11:

$$E_1 = 1.90 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E_2 = 1.20 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E_3 = 0.45 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 0.30 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \\ G_{23} = 0.23 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_{31} = 0.23 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu_{12} = 0.150, \quad \nu_{23} = 0.300, \quad \nu_{31} = 0.070$$

и для трансверсально-изотропного полимерного композита [9]

$$3) \quad E_1 = E_2 = 1.74 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E_3 = 1.23 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu_{12} = 0.115, \quad \nu_{23} = \nu_{31} = 0.099, \\ G_{12} = E_1 / 2 / (1 + \nu_{12}) = 0.780 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_{23} = G_{31} = 0.599 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

В таблице даны коэффициенты обобщенных метагармонических уравнений (25) для указанных выше материалов.

Таблица

Материал	$\beta_1$	$k_1^2 h^2 / 3$	$\beta_2$	$k_2^2 h^2 / 3$
1	0,301	0,110	4,069	0,271
2	0,275	0,068	5,785	0,208
3	1	1	0,768	0,768

Как показали исследования, система метагармонических уравнений для трансотропных и изотропных материалов вырождается в одно уравнение, которое полностью совпадает с уравнениями, полученными по другой методике [6, 7].

**Выводы.** В работе предложена методика построения системы дифференциальных уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит, удовлетворяющая однородным условиям на торцах плиты. Методика базируется на непосредственном сравнении напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\sigma_z$ , заданных различными соотношениями. Полученная система содержит обобщенное бигармоническое и два метагармонических уравнения. Даны примеры коэффициентов обобщенных метагармонических уравнений системы для различных материалов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин / Б.Л. Пелех. – Киев: Наук. думка, 1977. – 182 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания) / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1967. – 268 с.
4. Шалдырван В.А. Об одном варианте построения уточненных теорий изгиба трансотропных плит / В.А. Шалдырван // Известия академии наук Армянской ССР. – 1980. – № 2. – С. 55-63.
5. Васильев В. В. Классическая теория пластин – история и современный анализ / В.В. Васильев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46-58.

6. Нескородев Р.Н. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит / Р.Н. Нескородев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 65-73.
7. Шевченко В.П. Об одном варианте уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 50-57.
8. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
9. Каминский А.А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами / А.А. Каминский, Д.А. Гаврилов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.

*Поступила в редакцию 21.09.2017 г.*

#### **A VARIANT FOR CONSTRUCTING EQUATIONS OF THE IMPROVED THEORY OF BENDING ORTHOTROPIC PLATES**

***R.N. Neskoro dev***

A method is proposed for constructing a system of differential equations for the improved theory of bending of orthotropic plates, which satisfies homogeneous conditions at the ends of the plate. Examples are given of obtaining the coefficients of generalized metaharmonic equations of the system for various materials.

***Keywords:*** bending, orthotropic plate, improved theory.

**Нескородев Роман Николаевич**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк.

E-mail: nromn@i.ua

Тел.+38 (050) 284-87-08

**Neskoro dev Roman Nikolaevich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Docent,  
Donetsk national university, Donetsk

УДК 622.01:519.87

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ  
В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ (НА ПРИМЕРЕ УВЛАЖНЕНИЯ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА)**

© 2017. *В.Н. Павлыш, И.В. Тарабаева*

---

Исследуется процесс гидравлической обработки угольного пласта как способ снижения проявлений его опасных свойств при подземной угледобыче. Угольный пласт рассматривается как сильно сцементированная трещиновато-пористая сплошная среда, в которую осуществляется внедрение жидкости под давлением в режиме фильтрации. Эффективность воздействия определяется степенью равномерного насыщения жидкостью обрабатываемой области. Негативное влияние на эффективность обработки оказывает анизотропия структурных и фильтрационных характеристик пласта. Исследование процесса методом математического моделирования позволяет определить характер изменения параметров потока и обосновать способ преодоления отрицательного влияния анизотропии за счёт совершенствования технологии нагнетания.

**Ключевые слова:** процесс; параметр; анизотропия; математическая модель; фильтрация; скорость; вектор.

---

**Введение.** Предварительная обработка угольных пластов жидкостями в различных режимах является важным средством решения проблемы борьбы с опасными явлениями в шахтах. Одно из основных преимуществ этого способа – заблаговременное и необратимое изменение состояния и свойств угольного массива, позволяющее предупредить возникновение опасных явлений при ведении горных работ к которым, по определению академика А.А.Скочинского, относятся: пылеобразование, газовыделение, внезапные выбросы угля и газа, эндогенные пожары.

Исследованиями в области создания и совершенствования способов и средств нагнетания жидкостей в угольный пласт занимались многие ученые и научно-исследовательские организации [1–3]. Результаты научно-исследовательских и проектно-конструкторских разработок легли в основу соответствующих разделов нормативных документов, регламентирующих необходимость и порядок применения предварительного увлажнения для борьбы с пылеобразованием и газодинамическими явлениями в угольных шахтах [4].

Применяемые и предложенные к настоящему времени способы нагнетания жидкостей в угольный пласт дают принципиальную возможность предотвращения опасных явлений в шахтах.

Вместе с тем эффективность применяемых способов во многих случаях не удовлетворяет требованиям практики [5–7]. В этой связи актуальной задачей является совершенствования способов воздействия на пласт.

Цель работы – определение способов повышения эффективности применяемых схем нагнетания на основе результатов исследования процесса методом математического моделирования.

**Основная часть.** Основной схемой гидравлической обработки пласта, наиболее широко применяемой на шахтах, является внедрение жидкости через напорную скважину при наличии отточной (контрольной).

Анализ существующих способов нагнетания жидкостей в угольный пласт с целью борьбы с основными опасностями показывает, что необходимым условием высокой эффективности воздействия является равномерность гидравлической обработки

угольного массива. К одной из основных причин недостаточно высокой эффективности предварительного увлажнения через одиночную скважину относится неравномерность распределения влаги в массиве, вызванная преимущественным движением жидкости по крупным трещинам и приводящая к недостаточному повышению влажности больших блоков угля, тогда как на других участках пласта прирост влажности может превышать требуемое значение [8, 9].

Единственной причиной неравномерности распространения жидкости при нагнетании является анизотропия фильтрационных и коллекторских свойств пласта, выражающаяся в изменчивости значений коэффициента проницаемости и эффективной пористости по всем направлениям [10]. Анизотропия определяется как природными факторами – наличием систем трещин с различной проницаемостью, сложным строением пластов, тектонической нарушенностью, так и горнотехническими – возникновением в результате ведения горных работ зон опорного давления, повышенного горного давления, разгрузки [11].

Значительное влияние на эффективность гидравлического воздействия на угольный пласт в режиме фильтрации оказывает глубина пропитки угля жидкостью. Степень проникновения жидкости в тонкопористую структуру угля определяется как физико-химическими свойствами угля и жидкости, так и равномерностью обработки массива в целом. Величина насыщения массива, равномерность распределения жидкости и глубина пропитки угля совместно определяют качество обработки пласта. Повышение качества обработки является важным путем повышения эффективности гидравлического воздействия. Основной путь решения этой задачи – совершенствование технологии нагнетания, что требует всесторонних исследований процесса.

**Постановка задачи.** Физической основой совершенствования схем нагнетания жидкости в угольный пласт является создание на границах слабопроницаемых областей высокого давления жидкости, близкого по величине к давлению на скважинах. В силу невозможности проведения необходимых наблюдений в глубине массива, проверка этого предположения и установление возможности насыщения участков с низкой проницаемостью могут быть осуществлены только с помощью математического моделирования.

В основу математической модели положено уравнение нелинейно-упругой фильтрации несжимаемой жидкости в сильно сцементированной трещиновато-пористой среде [9].

Поставленная задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ [1 + \alpha(P - P_0)] \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\} \quad (1)$$

с учетом начальных  $P(x_i, t)|_{t=0} = P_0$  и граничных условий: на скважине давление  $P(x_i, t)|_{x_i=x_i^c} = P_C(t)$  или темп нагнетания  $P(x_i, t)|_{x_i=x_i^c} = P_C(t)$ ; на границе области фильтрации задается давление  $P(x_i, t)|_{\Gamma} = P_{\Gamma}$  или условие непроницаемости  $\frac{\partial P(x_i, t)}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ . Здесь  $\chi = \frac{k_0}{\mu_0(n_{\Sigma 0} a_{\rho} + a_m)}$  – коэффициент пьезопроводности;  $\alpha = a_k + a_{\rho} - a_{\mu}$ ,  $a_k, a_n, a_{\mu}, a_{\rho}$  – соответственно коэффициенты изменения проницаемости, пористости, вязкости и плотности;  $x_i$  – оси координат;  $a_0 = k(1 - n_{\Sigma 0})$  – коэффициент гидравлического сопротивления среды, пропорциональный

проницаемости;  $k$  – проницаемость («стационарная, начальная» проницаемость);  $n_{\text{э}}$  – пористость ( $n_{\text{э}0}$  – «начальная» пористость);  $P$  – давление фильтрующейся жидкости;  $P_0$  – давление газа в пласте;  $t$  – время;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости ( $\mu_0$  – «начальная» вязкость);  $\rho_j$  – плотность  $j$ -той фазы ( $\rho_0$  – «начальная» плотность);  $P_C(t)$  – давление на скважине;  $x_i^C$  – координаты скважины;  $G_C$  – контур скважины;  $c$  – коэффициент, зависящий от размерности;  $q(t)$  – темп нагнетания;  $\Gamma$  – граница области фильтрации;  $P_{\Gamma}$  – давление на границе области.

Для численного решения применяется метод конечных разностей. Обозначим  $P = P - P_0$ . Тогда исходное уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(P) \frac{\partial P}{\partial x} \right].$$

Рассматривая плоское сечение пласта, вводим систему координат  $(x, y)$ , где  $x$  – ось вдоль напластования,  $y$  – вкрест напластования. Уравнение процесса принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi_x \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 + \alpha(P - P_0)) \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \chi_y \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1 + \alpha(P - P_0)) \frac{\partial P}{\partial y} \right] \quad (2)$$

Начальные и граничные условия формулируются так же, как и в предыдущем случае.

Задача решается методом конечных разностей (методом сеток). Поскольку исследуется двумерная фильтрация, применяется схема продольно-поперечных направлений (схема Дугласа) [12].

Уравнение представляется в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(P) \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k(P) \frac{\partial P}{\partial y} \right] \quad (3)$$

Область определения функции  $P(x, y, t)$  покрывается сеткой

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad y_j = j \cdot \Delta y, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m; \quad t_k = k \cdot \Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим  $P(x_i, y_j, t_k) = P_{i,j}^k$ . Каждый шаг по времени (переход от  $P_{i,j}^k$  к  $P_{i,j}^{k+1}$ ) осуществляется в два приема.

1. Переход на полшага по времени со смещением по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{P_{i,j}^{k+0,5} - P_{i,j}^k}{0,5 \cdot \Delta t} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left( k_{i+0,5,j}^{k+0,5} P_{i+1,j}^{k+0,5} - (k_{i+0,5,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5}) P_{i,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} P_{i-1,j}^{k+0,5} \right) + \\ &+ \frac{1}{\Delta y^2} \left( k_{i,j+0,5}^k P_{i,j+1}^k - (k_{i,j+0,5}^k + k_{i,j-0,5}^k) P_{i,j}^k + k_{i,j-0,5}^k P_{i,j-1}^k \right). \end{aligned}$$

2. Переход на следующие полшага по времени со смещением по  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{P_{i,j}^{k+1} - P_{i,j}^{k+0,5}}{0,5 \cdot \Delta t} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left( k_{i+0,5,j}^{k+0,5} P_{i+1,j}^{k+0,5} - (k_{i+0,5,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5}) P_{i,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} P_{i-1,j}^{k+0,5} \right) + \\ &+ \frac{1}{\Delta y^2} \left( k_{i,j+0,5}^{k+1} P_{i,j+1}^{k+1} - (k_{i,j+0,5}^{k+1} + k_{i,j-0,5}^{k+1}) P_{i,j}^{k+1} + k_{i,j-0,5}^{k+1} P_{i,j-1}^{k+1} \right). \end{aligned}$$

Во избежание превалирования смещения по одной оси над смещением по другой следующий шаг начинается с перехода на полшага со смещением по  $y$ .

Результатом численного решения является распределение давления жидкости в узлах сетки, представляющей дискретную модель области фильтрации  $(x, y)$ , в каждый дискретный момент времени. Графически результаты изображаются в виде линий равного давления.

Исследования проводились для плоскопараллельного и радиального потоков жидкости. С целью исключения влияния случайных изменений давления жидкости на скважинах и разброса значений проницаемости были приняты режим постоянного давления и постоянная проницаемость угольного массива, за исключением слабопроницаемых областей с заданными коэффициентом проницаемости, площадью и расположением.

**Анализ результатов.** Величинами, оказывающими влияние на характеристики фильтрационного потока, согласно уравнению (3) являются: давление жидкости и его градиент, коэффициент проницаемости и пористость пласта, вязкость жидкости, расстояние и время движения. Равномерность распределения жидкости по пласту предполагает равенство скоростей движения ее фронта в каждой точке в один и тот же момент времени.

Очевидно, что для достижения этого равенства в условиях анизотропного пласта при неизменном режиме работы скважин необходимо добиться уменьшения объемной скорости в направлении высокой проницаемости и соответственно ее увеличения в слабопроницаемых областях.

В качестве способа решения данной задачи предлагается совершенствование технологии, заключающееся в нагнетании одновременно через 2 (и более) соседние скважины в режиме, обеспечивающем эффективное взаимодействие потоков. Предложено назвать такое усовершенствование «каскадной схемой».

Другими словами, при каскадной обработке количество жидкости, движущееся в направлении высокой проницаемости, должно быть существенно ниже, а в направлении низкой проницаемости – выше, чем при нагнетании через одиночную скважину. Установление этого факта будет свидетельствовать о принципиальной возможности повышения равномерности обработки при применении каскадного способа. Количественные оценки указанных изменений дадут возможность предварительно судить о степени повышения эффективности воздействия.

При исследовании возможности преодоления фильтрационной анизотропии пористость пласта, вязкость жидкости и ее давление на скважинах предполагались постоянными, варьировались площадь, коэффициент проницаемости и расположение слабопроницаемых областей.

На рис. 1 и 2 показаны линии равного давления жидкости (в долях давления на скважинах) для плоскопараллельного и радиального потоков при нагнетании через одиночную скважину и каскад в момент, соответствующий началу взаимодействия потоков при каскадной обработке. Пунктиром на рисунках отмечены границы слабопроницаемой области.

Видно, что давление жидкости в плоскопараллельном потоке вблизи границ слабопроницаемой области при каскадном нагнетании в 2–3 раза выше и приближается по величине к давлению на скважинах; это соответствует предполагаемой физической картине движения и взаимодействия потоков при каскадной обработке. Для радиального потока разница давлений не так существенна (рис. 2).

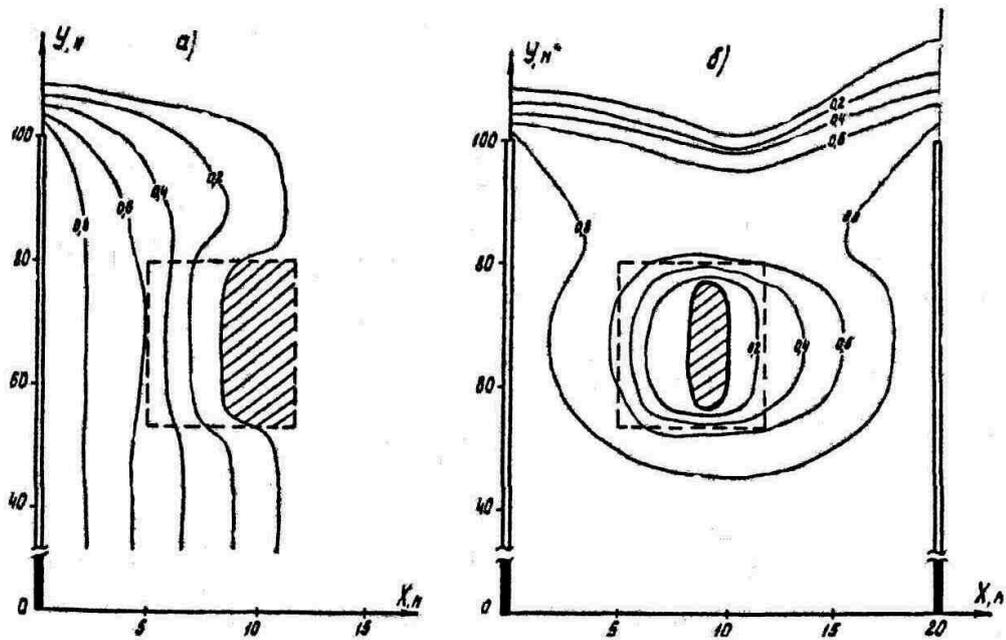


Рис. 1. Распределение относительного давления жидкости в плоскопараллельном потоке в окрестности слабопроницаемой области  
а) одиночная скважина; б) каскад скважин

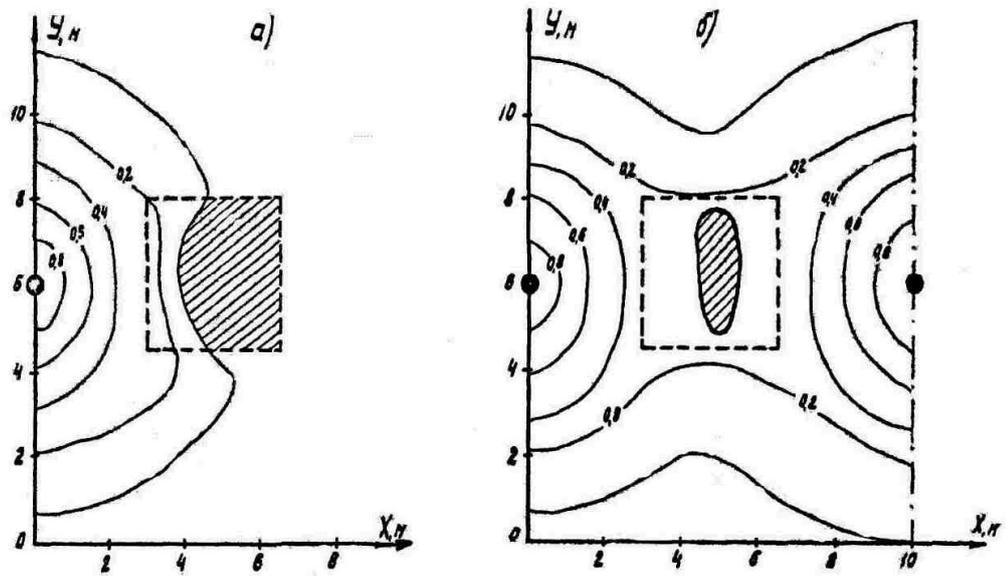


Рис. 2. Распределение относительного давления жидкости в радиальном потоке в окрестности слабопроницаемой области  
а) одиночная скважина; б) каскад скважин

Это объясняется тем, что при плоскопараллельном движении жидкости, во-первых, больше площадь взаимодействия потоков, во-вторых, потоки движутся навстречу друг другу, а не под углом, что обуславливает их более эффективное взаимодействие.

Расчет скоростей движения фронта фильтрующейся жидкости в различных точках показал изменение направлений их векторов в сторону слабопроницаемой области и

увеличение модулей этих векторов, что способствует более быстрому насыщению участков с низкой проницаемостью.

Данные математического моделирования с учетом фильтрационной неоднородности пласта (рис. 1, а, 2, а) подтверждают предположение о том, что жидкость при нагнетании распространяется преимущественно по путям с повышенной проницаемостью и обтекает слабопроницаемые зоны.

Приведенные результаты позволяют сформулировать первое предположение.

Процесс увлажнения угольного пласта при гидравлическом воздействии через одиночную скважину обуславливает высокий уровень вариации прироста влажности в обрабатываемом массиве; повышение равномерности увлажнения обеспечивается учетом коэффициента проницаемости пласта как переменной величины стохастического характера.

Для определения физической сущности выдвинутого предположения о возможности преодоления фильтрационной анизотропии путем одновременного нагнетания через соседние скважины проведено моделирование с определением векторов скорости нагнетания жидкости.

На рис. 3 показаны контуры потока жидкости (соответствующего рис. 1) в окрестности слабопроницаемой области и векторы скоростей в различных точках при нагнетании через одиночную скважину и каскад. Расчетные значения объемной скорости движения жидкости к центру слабопроницаемой области, отнесенной к единице ее поверхности, для каскадной обработки в 2 раза превышают соответствующие значения для одиночной скважины. Скорость фильтрации в направлении высокой проницаемости в окрестности слабопроницаемой области практически равна нулю (рис. 3, б).

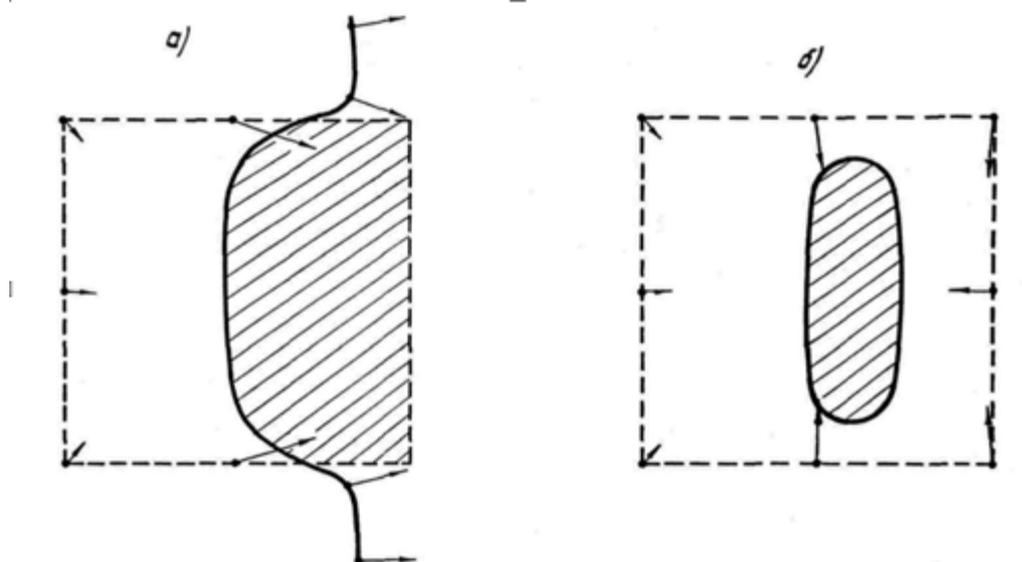


Рис. 3. Векторы скоростей потока жидкости в окрестности слабопроницаемой области  
а) одиночная скважина; б) каскад скважин

Наблюдаемые изменения позволяют сделать вывод о том, что возникающее при взаимодействии потоков жидкости от соседних скважин гидравлическое противодействие способствует принудительному насыщению областей с низкой проницаемостью за счет хорошо проницаемых участков, лежащих вне зоны

обработки. Следствием этого является повышение равномерности распределения жидкости по пласту при нагнетании через каскад скважин. Таким образом, можно считать установленным, что взаимодействие потоков жидкости, движущихся от соседних одновременно работающих скважин, приводит к преодолению фильтрационной анизотропии угольного массива. Повышение равномерности обработки при каскадном нагнетании происходит только за счет уменьшения количества жидкости, уходящей за пределы проектной зоны.

Полученные результаты, представленные на рис 1б, 2б, 3, позволяют сформулировать второе предположение. При гидравлическом воздействии на угольный пласт через каскад скважин за счет взаимодействия встречных потоков происходит возрастание локального давления жидкости в окрестности слабопроницаемых зон пласта до величины 0,6...0,8 от давления на скважине, что обеспечивает изменение направления векторов скорости фильтрующейся жидкости в сторону слабопроницаемых зон и более качественное их увлажнение.

Предварительные количественные оценки степени повышения равномерности обработки могут быть сделаны путем сравнения времени, требуемого для насыщения слабопроницаемой области при нагнетании через одиночную скважину и каскад. Результаты моделирования показывают, что это время при каскадной обработке в среднем в 1,5–2 раза меньше, чем при существующем способе. Разница во времени тем больше, чем ближе находится слабопроницаемая область к середине межскважинной зоны, меньше ее проницаемость и больше площадь. Последнее обстоятельство позволяет ожидать значительного эффекта от применения каскадного нагнетания на тех пластах, где фильтрационная анизотропия проявляется в наличии участков тектонического нарушения и выбросоопасных зон.

Уменьшение времени насыщения слабопроницаемых областей при каскадном нагнетании позволяет ожидать соответствующего повышения равномерности обработки, если общее время нагнетания через каскад скважин будет не меньше, чем через одиночную скважину.

**Выводы.** Исследование динамики распространения жидкости в анизотропном угольном массиве подтверждает справедливость положений, определяющих физическую сущность каскадной обработки как способа преодоления фильтрационной анизотропии пласта. Показано, что взаимодействие потоков от двух, одновременно работающих скважин приводит к значительному повышению давления жидкости на границах слабопроницаемых областей, достигающего значений, близких к давлению нагнетания, изменению направлений векторов скорости фильтрации в сторону низкой проницаемости и увеличению их относительных значений в 2 раза. Следствием этого является уменьшение времени насыщения слабопроницаемых областей в 1,5–2 раза по сравнению с нагнетанием через одиночную скважину. Полученные результаты позволяют сделать вывод о принципиальной возможности преодоления фильтрационной анизотропии и повышении равномерности обработки массива при каскадном нагнетании.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прогрессивные технологические решения по комплексному освоению ресурсного потенциала угольных месторождений: монография / В.В. Мельник, В.Н. Павлыш, С.С. Гребенкин и др.; под ред. В.В. Мельника и В.Н. Павлыша. – Донецк: ВИК, 2015. – 340 с.
2. Павлыш В.Н. Перспективы развития теории и технологии процессов комплексного гидропневматического воздействия на угольный пласт / В.Н. Павлыш, С.С. Гребенкин, В.В. Стеблин // Проблемы горного дела и экологии горного производства: Материалы VIII междунар. науч.-практ. конф. (25-26 апреля 2013 г., г. Антрацит). – Донецк: Світ книги, 2013. – С. 25-29.

3. Теория и практика проектирования систем угольных шахт, процессов подземных горных работ и забойного оборудования с применением математического моделирования: монография / С.С. Гребенкин, В.Н. Павлыш, В.Д. Рябичев и др.; под общ. ред. Гребенкина С.С. и Павлыша В.Н. – Донецк: ВИК, 2011. – 390 с.
4. Безопасное ведение горных работ на пластах, склонных к газодинамическим явлениям / А.М. Брюханов, А.М. Агафонов, А.Д. Алексеев [и др.] – К.: Минтопэнерго Украины, 2006. – 288 с.
5. Павлыш В.Н. Математическое моделирование процесса увлажнения угольного пласта / В.Н. Павлыш // "ICAMC'98 - 13th – ASRTP - 13th", World Mining Congress. – High Tatras, Slovak Republic. – 1998. – С. 219-222.
6. Геоэкологические и экономико-математические аспекты обеспечения безопасных технологий угольных комплексов: монография / С.С. Гребенкин, В.Н. Павлыш, В.Д. Рябичев и др.; под общ. ред. С.С. Гребенкина и В.Н. Павлыша. – Луганск: Изд-во «Ноулидж», 2016. – 340 с.
7. Гребенкин С.С. Сравнительная оценка эффективности технологических схем гидравлического воздействия на угольные пласты / С.С. Гребенкин, В.Н. Павлыш, Э.В. Кукуяшный // Матер. V междунар. науч.-практ. конф. «Проблемы горного дела и экологии горного производства» (14-15 мая 2010 г., г. Антрацит). – Донецк: Вебер (Донецкое отделение), 2010. – С. 31-36.
8. Предварительное увлажнение угольных пластов / под ред. П.Н. Торского. – М.: Недра, 1974. – 208 с.
9. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 336 с.
10. Павлыш В.Н. Технологические схемы и механическое оборудование гидрообработки угольного пласта / В.Н. Павлыш, В.Д.Иващенко // Известия Донецкого горного института. – 2001. – № 1. – С. 21-23.
11. Becker H. Kohlenstosstränkung //Ergebnisse von Untersuchungen auf dem Gebiet der Staub und Silikosebekämpfung im Steinkohlenbergbau. – Essen:Verlag Glückauf, 1977. – В. 11. – S. 15-22.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

*Поступила в редакцию 22.09.2017 г.*

#### THE INVESTIGATION OF PRESS LIQUID FILTRATION PROCESS IN ANISOTROPY SURROUNDINGS BY MATHEMATIC MODELING (USING COAL STRATUM EXAMPLE)

*V.N. Pavlysh, I.V. Tarabayeva*

The process of coal stratum hydraulic treatment as the way of its dangerous properties reducing during underground coal mining is investigated. The coal stratum is considered as strongly condensed crack-pore solid surrounding, in which the liquid entering by press with filtration regime is carried out. The effectiveness of treatment is defined by uniform degree of treated zone liquid saturation. The structure and filtration properties anisotropy has negative influence on treatment effectiveness. The investigation of process by mathematical modeling permits to find the mode of stream parameters variation and base the way of anisotropy negative influence overcoming due to entering technology perfection.

**Keywords:** process; parameter; anisotropy; mathematical model; filtration; speed; vector.

**Павлыш Владимир Николаевич**

доктор технических наук, профессор,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», зав. кафедрой прикладной математики;  
E-mail: pavlyshvn@mail.ru  
Тел.: 050-514-26-00

**Pavlysh Vladimir N.**

Doctor of engineering sciences, Full Professor,  
Donetsk National Technical University,  
Head of the Department of Department of applied mathematics

**Тарабаева Инна Викторовна**

кандидат технических наук,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», доцент кафедры прикладной математики;  
E-mail: inkatar1@yandex.ru  
Тел.: 050-278-95-50

**Tarabayeva Inna V.**

Candidate of engineering sciences,  
Donetsk National Technical University,  
Associate Professor at the Department of applied mathematics

## Ф И З И К А

УДК 535.3+681.7

### РАСПРЕДЕЛЕННОЕ ФОКУСИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2017. М.К. Галинский

В работе обоснована возможность создания распределённого фокусированного лазерного излучения для практических применений, например, в хирургии, в частности, для создания лазерного хирургического инструмента.

*Ключевые слова:* распределенное фокусирование лазерного излучения; луч Гаусса; луч Бесселя; линза Френеля; оптическая неоднородность; градиентная линза; асферическая линза; аксиконическая линза.

**Введение.** В экспериментальной и прикладной физике существует ряд задач, решение которых требуют использования распределенного лазерного излучения (калибровка измерителей мощности и энергии источников лазерного излучения, визуализация тепловых и акустических полей, расширители лазерного луча и т.д.). В связи с бурным развитием лазерных технологий в медицине, например, в хирургии, особенно актуальным стало получение распределенного фокусированного лазерного излучения для создания лазерного хирургического инструмента, использующего на данный момент лазерный пучок либо нефокусированный вообще, либо сфокусированный в точку [1].

Устройство, предназначенное для фокусирования лазерного излучения в бесконечное множество точек на прямолинейном отрезке, предлагается назвать устройством распределенного фокусированного лазерного излучения, для применений, например, в качестве лазерного хирургического инструмента.

Частным случаем такого устройства является аксиконус — хорошо известный специализированный тип линзы, у которых одна из сторон имеет коническую форму (рис. 1, а). Такая геометрия линзы, создающая распределенное фокусирование, может быть использована для преобразования луча Гаусса в приближении к лучу Бесселя. Диаграмма распределения энергии луча на выходе из аксиконической линзы хорошо известна и показана на рис. 1, б. Такой тип линз нашел применение в лазерных пинцетах.

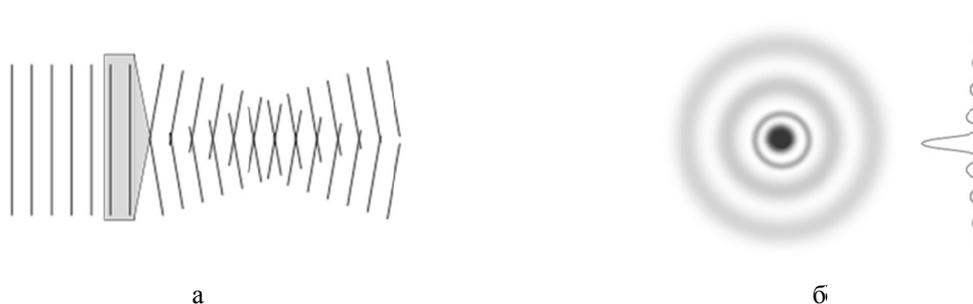


Рис. 1

Целью настоящей работы является создание физических основ проектирования устройств распределенного фокусированного лазерного излучения, например, на основе конструкций линзы Френеля, асферических и градиентных линз.

Устройства распределенного фокусированного лазерного излучения, рассмотренные в данной работе, обозначены как аналоги своих предшественников, так как таковыми подразумеваются линзы, фокусирующие свет в точку, а устройства распределенного фокусированного лазерного излучения таковыми не являются и, следовательно, не могут так называться.

**Общий подход.** В устройствах, использующих линзы с распределенным фокусированием, фокусное расстояние каждого радиального сегмента зависит от радиуса этого сегмента. Пусть  $x_0$  и  $x_1$  – концы отрезка, на котором фокусируется лазерный луч («лезвие»),  $L = x_1 - x_0$  – длина «лезвия»,  $P_0$  – мощность падающего на линзу луча,  $dP$  – мощность излучения, падающего на участок «лезвия»  $dx$ ,  $R$  – радиус линзы и падающего на нее луча,  $d$  – толщина линзы (рис. 2). Пусть  $f(x)$  – функция распределения мощности на «лезвии»  $f(x) = P'(x)$  (используются линзы с одной плоской стороной). Луч лазера падает нормально на плоскую сторону. Выберем систему координат с осью  $OX$ , направленной нормально к плоской поверхности линзы и по главной оптической оси, а ось  $OY$  пусть лежит в плоскости плоской поверхности линзы. Выделим на этой линзе кольцевой элемент поверхности с радиусом  $y$  и шириной  $dy$ . Тогда, поток энергии, проходящий через этот кольцевой сегмент линзы фокусируется на расстоянии  $x$  на отрезке  $[x, x + dx]$ . Следовательно, имеем:

$$f(x) = \pm 2\pi W(y) y y'(x), \quad (1)$$

где  $W(y)$  – функция распределения плотности потока энергии, падающего на линзу, в предположении, что профиль интенсивности падающего перпендикулярно на линзу луча, радиально симметричный.

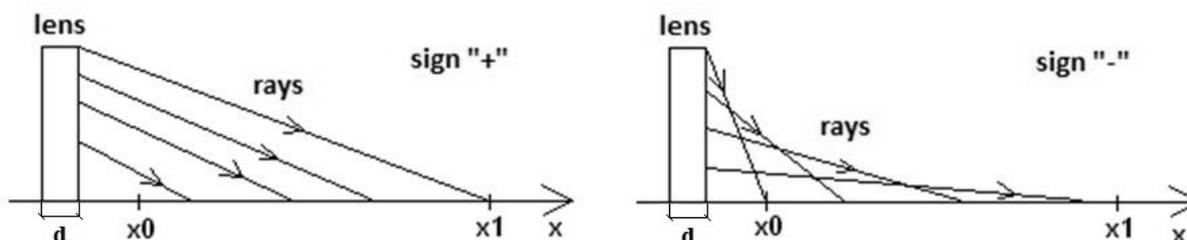


Рис. 2

Как говорилось ранее, фокусное расстояние линз, фокусирующих свет в «лезвие», не одинаково для различных участков этих линз. Рассматриваемые линзы обладают цилиндрической симметрией и разные элементарные кольца имеют разные фокусные расстояния. Знак в уравнении (1) характеризует увеличение или уменьшение фокусного расстояния элементарного кольца линзы при увеличении его радиуса. При увеличении фокусного расстояния элементарного кольца с увеличением его радиуса знак положительный (рис. 2), иначе отрицательный, так как функции  $W(y)$  и  $f(x)$  не могут принимать отрицательных значений.

Результатом решения уравнения (1) является функция  $x(y) = \Psi(y)$ . Эта функция описывает зависимость фокусного расстояния элементарного кольца от его радиуса. Следовательно, при падении луча на линзу с плоским профилем интенсивности уравнение (1) примет вид:

$$f(x) = \pm 2P_0 R^{-2} y y'(x) \quad (2)$$

При равномерном распределении мощности на лезвии, функция  $\Psi(y)$  в случае знака «+» и в случае знака «-» примет вид показанных ниже  $\psi^+(y)$  и  $\psi^-(y)$  соответственно:

$$\psi^+(y) = L(y/R)^2 + x_0, \quad \psi^-(y) = L(1 - (y/R)^2) + x_0.$$

Далее в рассмотрении частных случаев, распределение мощности излучения на «лезвии» равномерное, профиль интенсивности падающего на линзу луча плоский, длина «лезвия» порядка 30 см (как у металлического скальпеля, увеличенного в 10 раз), радиус линзы  $R=0,5$  см. Значения  $x_0$  и  $x_1$  уточняются в каждом случае отдельно. Распределенное фокусирование с нулевой длиной «лезвия» – точечное фокусирование. Его можно описать, записав функцию распределения мощности на лезвии как  $f(x) = P_0 \delta(x - a)$ , где  $\delta$  – дельта-функция Дирака, а  $a$  – фокусное расстояние.

**Аналог линзы Френеля.** Чтобы исключить необходимость рассматривать дифракцию света, проходящего через линзу Френеля, необходимо, чтобы ширина её колец на выходе линзы была намного больше, чем длина волны света, проходящего сквозь линзу. Аналог линзы Френеля, фокусирующий свет в «лезвие», тоже подчиняется приведенному условию. Выбор соответствующей системы координат, осуществлен как указанный выше (рис.3). Рассмотрим один выходной сегмент линзы (рис. 4).

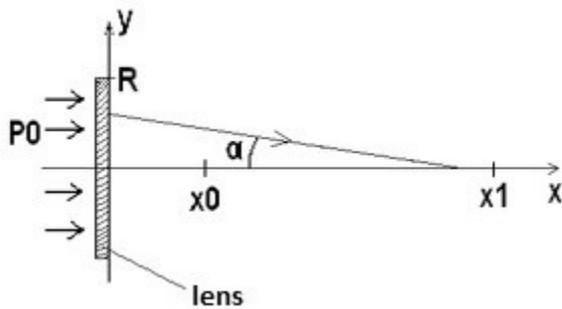


Рис. 3

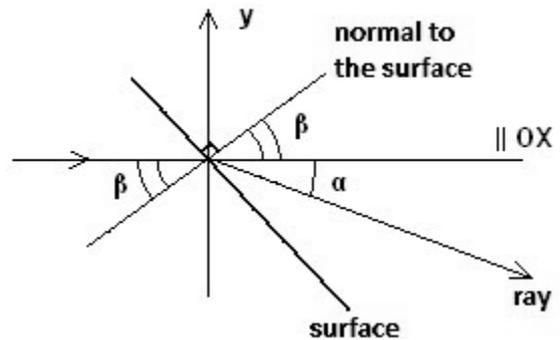


Рис. 4

Как видно из рис. 4:

$$n = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta)} \quad (3)$$

Используя функцию  $\Psi(y)$ , имеем:

$$\beta(y) = \text{arccctg} \left( n \sqrt{1 + (\Psi(y)/y)^2} - (\Psi(y)/y) \right) \quad (4)$$

Это уравнение описывает зависимость угла между нормалью к поверхности кольцевого сегмента аналога линзы Френеля и осью OX. Для реальной линзы функция  $\beta(y)$  будет не гладкой, а кусочно-гладкой.

Существуют ограничения для значений  $x_0$  и  $x_1$ , так как для любого материала существует максимальный угол, на который может быть отклонен луч.

Из рис. 3 видно, что фокусное расстояние кольцевого сегмента линзы с радиусом  $y$  можно рассчитать, используя угол  $\alpha$ . При этом  $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi/2$ .

Углы  $\alpha$  и  $\beta$  связаны уравнением (3), поэтому минимальное фокусное расстояние кольцевого сегмента с радиусом  $y$  можно определить через  $\max(\alpha)$ , где  $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi/2$ . Тогда для знака «+» в уравнении (1) и конечном радиусе линзы существует минимально возможное значение  $x_1$ , а для знака «-» существует минимально возможное значение величины  $x_0$ .

Рассмотрим частный случай такой линзы. Материалом линзы пусть будет флинт, для которого  $n = 1,6128$ . Тогда, в случае знака «+» пусть  $x_0 = 0$  см,  $x_1 = 30$  см. Тогда, используя поученную ранее функцию  $\psi^+(y)$  имеем:

$$\beta^+(y) = \operatorname{arccctg} \left( n \sqrt{1 + (Ly/R^2)^2} - (Ly/R^2) \right). \quad (5)$$

Угол между оптической осью и падающим на неё лучом в точке  $x_1$  приблизительно равен 0,016 радиан, а максимально возможный угол отклонения луча при данных параметрах равен 0,94 радиан, т.е. ограничение по углам соблюдено.

Теперь рассмотрим случай знака «-» в уравнении (2).

Необходимо удостовериться, что угол между оптической осью и падающим на неё лучом в точке  $x_0$  больше минимально возможного. Пусть  $x_0 = 32$  см, тогда ограничение точно соблюдено. Пусть  $x_0 = 32$  см, а  $x_1 = 62$  см. Тогда, используя поученную ранее функцию  $\psi^-(y)$  имеем

$$\beta^-(y) = \operatorname{arccctg} \left( n \sqrt{1 + \left( \frac{L}{y} \left( 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right) + \frac{x_0}{y} \right)^2} - \frac{L}{y} \left( 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right) - \frac{x_0}{y} \right). \quad (6)$$

Графики зависимостей угла между нормалью к поверхности линзы и главной оптической осью от координаты  $y$  в случае знака «+» и знака «-» в уравнении (2) изображены на рис. 5  $\beta^+$  и  $\beta^-$  соответственно. Углы обозначены в радианах, а длина в сантиметрах.

**Аналог градиентной линзы (оптически неоднородная пластинка).** Система координат аналогична представленной на рис. 3. Сначала, несколько упростим задачу. Пусть лазерный луч падает нормально на пластинку и выходит из неё под углом  $\alpha$  к нормали (рис. 6).

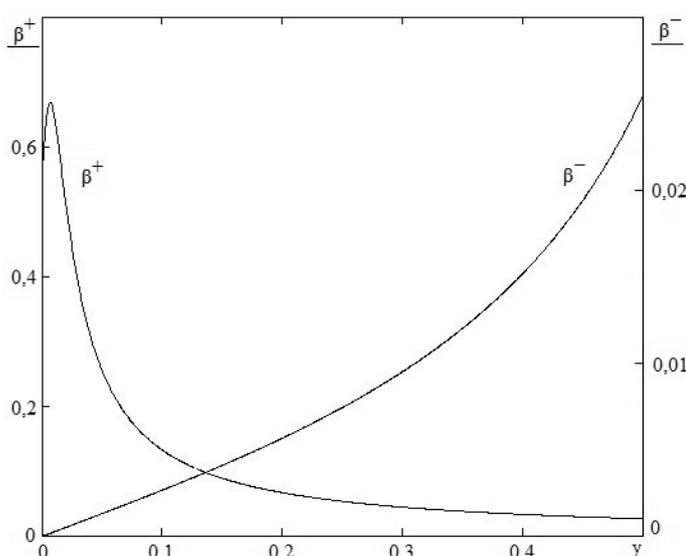


Рис. 5

Фазы световой волны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в точках касания соответствующих фазовых поверхностей с поверхностью пластинки в координатах  $y_1$  и  $y_2$  соответственно,  $\lambda$  – длина волны падающего и выходящего света. Согласно рис. 6 видно, что:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi d}{\lambda} n(y_1) + \varphi_0, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda} n(y_2) + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  – фаза на левой стороне поверхности линзы (не обозначена на рисунке),  $n(y)$  – зависимость коэффициента преломления от координаты  $y$ .

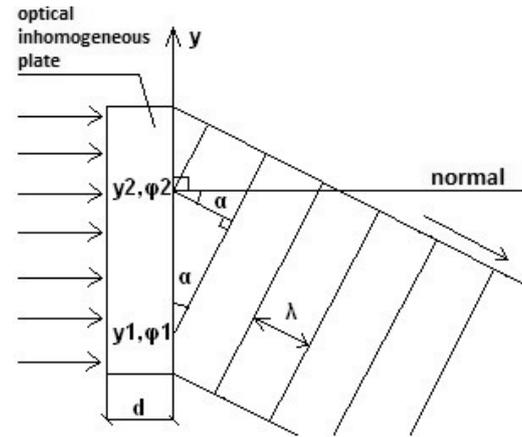


Рис. 6

Необходимо, чтобы толщина пластинки  $d$  была достаточно большой. В этом случае достаточно небольшой разности коэффициента преломления, которую можно осуществить на практике, чтобы обеспечить достаточную оптическую разность хода. Соединяя это утверждение с тем, что оно выполнено для отрезка  $[y_1, y_2]$ , можно искать функцию  $n(y)$  как непрерывную монотонную функцию. Следовательно, можно записать,  $n'(y) = \frac{-\sin(\alpha)}{d}$ . Получив это уравнение, вернемся к описанию устройства расфокусированного лазерного излучения, на основе градиентной линзы.

Используя функцию  $\Psi(y)$ , имеем соответственно:

$$n'(y) = \frac{-y}{d\sqrt{\Psi^2(y) + y^2}}, \tag{7}$$

$$n(y) = n_0 + \int_{y_1}^y \frac{-y_2}{d\sqrt{\Psi^2(y_2) + y_2^2}} dy_2. \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) имеют некоторые ограничения. Во время численного расчета можно получить значения показателя преломления, которые невозможно достичь на практике в данный момент. Например, может получиться значение показателя преломления, которое невозможно осуществить изменением концентраций примесей в материале линзы или даже величина, которую невозможно произвести при нынешних технологиях. В этом случае необходимо создать линзу такой, чтобы функция  $n(y)$  имела разрывы первого рода, которые расположены там, где функция  $n(y)$  достигает критического значения. Например, если  $n(y)$  с ростом  $y$  приближается к минимальной величине, которую мы можем изготовить. Перед этим критическим значением необходимо расположить разрыв 1-го рода, а за этим разрывом значение показателя преломления должно принимать максимальное значение, от которого можно снова начинать его уменьшение. Это можно осуществить лишь в идеальной модели. В реальности линзы можно изготовить с очень высоким градиентом показателя преломления в области, содержащей этот «разрыв». В этих областях, которые тоже имеют форму колец, свет будет отклоняться в сторону от «лезвия». Чем шире эти области, тем меньше мощность излучения, фокусирующегося в «лезвие».

Рассмотрим частный случай такой линзы. Пусть  $x_0 = 0$  см,  $x_1 = 30$  см,  $d = 1$  см. Тогда, в случае знака «+» в уравнении (2) имеем:

$$n = n_0 - \frac{R^2}{Ld} \ln \left( \frac{L}{R} \left( \frac{y}{R} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2} \right) \right). \quad (9)$$

В случае знака «-» в уравнении (2):

$$n = n_0 - \frac{R^2}{2Ld} \ln \left( \frac{2L}{R^2} \sqrt{\frac{L^2}{R^4} y^4 + \left(1 - 2\left(\frac{L}{R}\right)^2\right) y^2 + L^2} + 2\frac{L^2}{R^4} y^2 + 1 - 2\left(\frac{L}{R}\right)^2 \right). \quad (10)$$

Графики зависимостей показателя преломления от координаты  $y$  в случае знака «+» и «-» в уравнении (2) изображены на рис. 7 sign «+» и sign «-» соответственно. В качестве константы интегрирования выбран показатель преломления (флинт)  $n_0 = 1,6128$ .

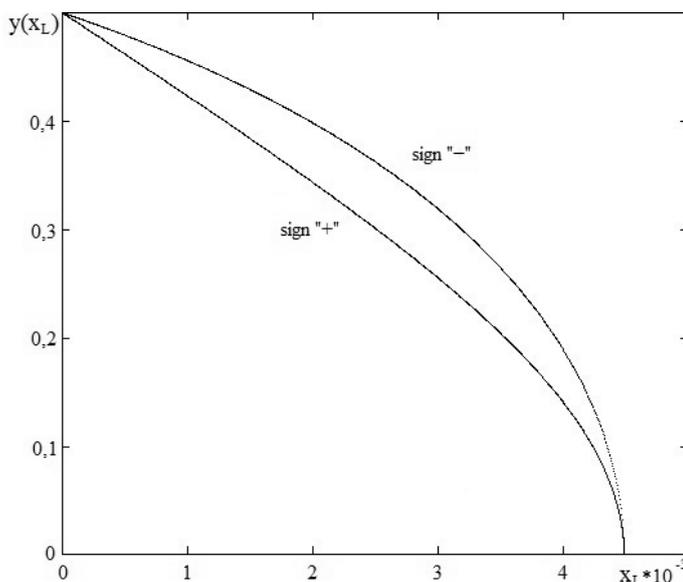


Рис. 7

**Аналог асферической линзы.** Схематическое изображение этой линзы нельзя сделать аналогичным предыдущим двум случаям, так как теперь «пластинка» имеет различную толщину при разных радиусах  $y$  (рис. 8).

Из рис. 8 видно, что, как и для аналога линзы Френеля, выполняется уравнение (3).

Для асферической линзы необходимо найти функцию, описывающую форму её поверхности – функцию  $y(x_L)$ . Для обоих типов распределенного фокусирования при заданной функции  $f(x)$  существует по одной такой функции, так как в этой работе аналоги асферических линз рассматриваются только как плоско-выпуклые, а луч лазера падает нормально на плоскую поверхность этих линз. Следовательно, можно записать:

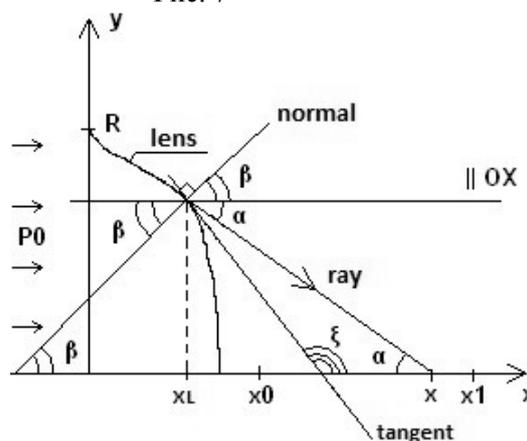


Рис. 8

$$y'(x_L) = \frac{\psi(y) - x_L}{y} - n \sqrt{1 + \left(\frac{\psi(y) - x_L}{y}\right)^2}. \quad (11)$$

Вычислив интеграл, найдем форму линзы. Рассмотрим частный случай такой линзы. Пусть  $x_0 = 32$  см,  $x_1 = 62$  см, а  $n = 1,6128$ . Тогда в случае знака «+» в уравнении

(2) имеем:  $y'(x_L) = \frac{Ly}{R^2} + \frac{x_0 - x_L}{y} - n \sqrt{1 + \left( \frac{Ly}{R^2} + \frac{x_0 - x_L}{y} \right)^2}$ . В случае знака «-» в уравне-

нии (2):  $y'(x_L) = \frac{L}{y} \left( 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right) + \frac{x_0 - x_L}{y} - n \sqrt{1 + \left( \frac{L}{y} \left( 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right) + \frac{x_0 - x_L}{y} \right)^2}$ .

Графики функций, описывающих форму асферической линзы в случае знака «+» и «-» в уравнении (2) изображены на рис. 9, sign “+” и sign “-” соответственно.

**Выводы.** В работе изложены физические основы проектирования устройств распределенного фокусированного лазерного излучения, где основным элементом может выступать одна из разновидностей линз, в частности, аналог линзы Френеля, асферической или градиентной линзы.

Оригинальными являются впервые полученные уравнение (1) и для произвольного профиля интенсивности падающего на линзу луча и любого распределения мощности на «лезвии», соответственно выражения (4), (7), (8), (11). При этом уравнения для частных случаев (5), (6), (9) и (10) получены в явном виде.

Результаты настоящей работы, как физические основы проектирования устройств распределённого фокусирования лазерного излучения, например, аналоги линз Френеля, асферических и градиентных линз, могут найти применение не только в хирургии, при создании лазерного хирургического инструмента, но и в лазерной резке материалов, гравировке, информационных технологиях и при создании лазерно-индуцированных плазменных каналов [2–5].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sliney D.H. Medical laser and their safe use / D.H. Sliney, S.L. Trokel. – New York: Springer-Verlag Inc., 1993. – 230 p.
2. Robert H.T. Manufacturing processes reference guide / H.T. Robert, K.A. Dell, A. Leo. – New York: Industrial Press Inc., 1994 – 188 p.
3. Real-time Observation of Laser Cutting Fronts by X-ray Transssmition / H. Ozaki, M Quang, H. Kawakami, et al. // Journal of Materials Processing Technology. – 2016 – Vol. 237. – P. 181–187.
4. Laser cutting of various materials: Kerf width size analysis and life cycle assessment of cutting process / B.S. Yilbas, M.M. Shaukat, F. Ashraf // Optics and Laser Technology. – 2017. – Vol. 93. – P. 67-73.
5. Пятницкий Л.Н. Волновые пучки с компенсированной дифракцией и протяженные плазменные каналы на их основе / Пятницкий Л.Н., Коробкин В.В. // Труды института общей физики. – 2000. – Т. 57 – С. 59–114.

Поступила в редакцию 04.05.2017 г.

**DISTRIBUTED FOCUSING OF LASER RADIATION**

***M.K. Halinsky***

In this work is shown the possibility of creating distributed focusing of laser radiation for practical uses, for example, in surgery for creating of laser surgery tools.

**Keywords:** distributed focusing of laser radiation; Gauss beam; Bessel beam; Fresnel lens; gradient lens; aspherical lens; axicon.

**Галинский Михаил Константинович**  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк,  
бакалавр физики, студент 1-го курса магистратуры  
E-mail: [fenix102030405@gmail.com](mailto:fenix102030405@gmail.com)

**Halinsky Mykhaylo Kostyantynovich**  
Donetsk National University, Donetsk,  
Bachelor of physics, 1-st year master student  
E-mail: [fenix102030405@gmail.com](mailto:fenix102030405@gmail.com)

УДК 537.611.3+537.622+538.221+539.216.2

**ОСОБЕННОСТИ ДОМЕННЫХ ГРАНИЦ ПРИ СПИН-  
ПЕРЕОРИЕНТАЦИОННОМ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ВТОРОГО РОДА  
В РАВНОВЕСНОЙ И НЕРАВНОВЕСНОЙ ДОМЕННЫХ СТРУКТУРАХ  
ФЕРРИТ-ГРАНАТОВОЙ ПЛЕНКИ**

© 2017. Ю.А Сирюк, А.В. Безус, Е.Д. Бондарь, В.В. Смирнов

Экспериментально изучены особенности равновесной и неравновесной доменных структур феррит-гранатовой пленки со слабой одноосной анизотропией в температурном интервале 90-450 К. Обнаружено два вида спин-переориентационных фазовых переходов, происходящих по разные стороны от температуры магнитной компенсации. Исследовано изменение структуры доменных границ при спин-переориентационном фазовом переходе второго рода. Предложены соответствующие эксперименту модели доменной структуры.

**Ключевые слова:** доменная структура, спин-переориентационный фазовый переход, доменная граница.

**Введение.** Феррит-гранатовые пленки обладают смешанной анизотропией: наряду с кристаллографической кубической ( $K_1$ ) существует одноосная ростовая анизотропия ( $K_u$ ). Ось ростовой одноосной анизотропии  $\langle 111 \rangle$  ориентирована перпендикулярно плоскости пленки. Три оси кристаллографической анизотропии типа  $\langle 111 \rangle$  ориентированы под углом к плоскости пленки. Отношение констант одноосной и кубической анизотропии и намагниченность насыщения зависят от температуры:  $K_u/K_1(T)$  и  $M_S(T)$ . При температуре магнитной компенсации  $T_K$  и температуре Нееля  $T_N$  намагниченность насыщения равна нулю. Влияние смешанной анизотропии на поведение доменной структуры (ДС) изучено еще недостаточно. ДС очень чувствительна к изменению магнитных характеристик пленок и отражает все изменения анизотропии и намагниченности. Поэтому поведение ДС вблизи критической температуры, где равны магнитные моменты подрешеток ( $T_K$ ) или изменяется анизотропия ( $T$  спиновой переориентации), вызывает особый интерес исследователей. Благодаря оптической прозрачности эпитаксиальных пленок ДС можно визуально наблюдать с помощью эффекта Фарадея, а при спиновой переориентации применять метод цветовой регистрации. Поэтому пленки ферритов-гранатов могут служить модельным объектом для изучения фазовых переходов (ФП) и спин-переориентационных фазовых переходов (СПФП).

Как для фундаментальной науки, так и для прикладной очень важно знать, что происходит с ДС при изменении анизотропии, как изменяется доменная граница (ДГ). Это актуальные исследования. Во-первых, СПФП можно использовать при термомагнитной записи в точке спиновой переориентации [1]. Во-вторых, вблизи СПФП многие физические величины (теплоемкость, магнитная восприимчивость, модуль Юнга, коэффициент затухания и т.д.) испытывают аномалии [2]. Поэтому такой магнитный материал может ограничивать диапазон работы технического устройства. Цель данной работы – изучить механизм спин-переориентационного фазового перехода.

**Описание результатов исследования.** Исследования проведены на пленке состава  $(YBi)_3(FeGa)_5O_{12}$ . Пленка выращена методом жидкофазной эпитаксии на гадолиний-галлиевой подложке; развитая поверхность  $\langle 111 \rangle$ ,  $T_N = 421K$ ,  $T_K = 223K$ , намагниченность насыщения при комнатной температуре  $4\pi M_S = 11 \cdot 10^{-3} Tл$ . ДС наблюда-

лась благодаря эффекту Фарадея на магнитооптической установке, методом цветовой регистрации определялась спиновая переориентация. На рис. 1 представлены температурные зависимости поля коллапса и периода ДС пленки.

Если ДС сформировать импульсным магнитным полем, перпендикулярным плоскости пленки, т.е. параллельным кристаллографической оси  $\langle 111 \rangle$ , а затем выключить поле, то такая ДС является равновесной при  $T$  формирования [3]. Ей соответствует минимум энергии. Она сохраняется неограниченное время при сохранении условий формирования. Если же изменить температуру пленки, то в исследуемом температурном интервале эта ДС является неравновесной [4, 5]. В данной работе СПФП наблюдали как на равновесной, так и на неравновесной ДС, т.е. без действия магнитного поля. Исследование неравновесной ДС позволяет непосредственно «увидеть» механизм СПФП, т.к. спиновая переориентация вызвана одним лишь температурным изменением  $K_u/K_1$ , без дополнительной энергии магнитного поля.

**Равновесная доменная структура.** В интервале температур  $T_1 - T_2$  (см. рис. 1) импульсным полем формируется решетка ЦМД (рис. 2, А), затем магнитное поле выключается. На оранжевом поле наблюдаются темно-зеленые ЦМД. Формирование ЦМД свидетельствует о наличии в этой области температур осевой фазы. При  $T_2$  изменяется цвет решетки ЦМД: формируются зеленые домены на желтом фоне. Доменная граница узкая, темная. Изменение цвета указывает на изменение ориентации вектора намагниченности, т.е. появляется угловая фаза.

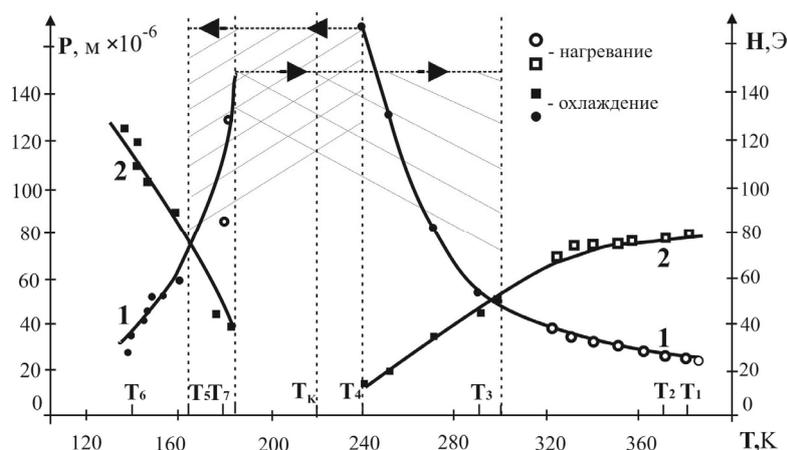


Рис. 1. Температурные зависимости характеристик пленки  $(YBi)_3(FeGa)_5O_{12}$ : 1– поле коллапса  $H_K$ ; 2– период ДС  $P$

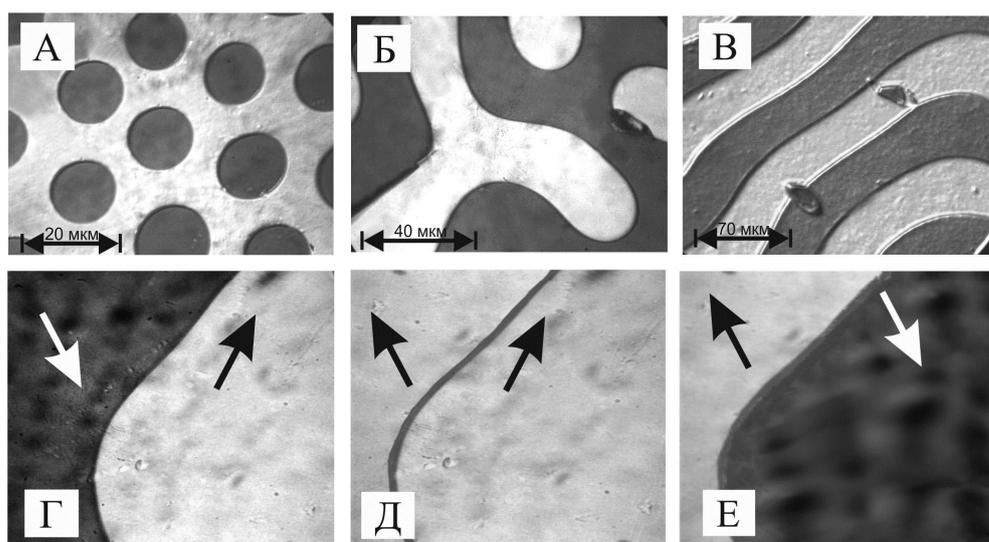


Рис. 2. Виды ДС пленки при изменении  $T$ : А – решетка ЦМД при 370 К; Б – 300 К; В – 260 К; Г, Д, Е – стрелками показана проекция намагниченности внутри домена на плоскость пленки при 173 К (Г), 176 К (Д), 178 К (Е)

Таким образом, происходит спин-переориентационный фазовый переход из осевой фазы в угловую фазу. При дальнейшем понижении температуры ЦМД не формируются. Сформированная ранее решетка при понижении температуры деформируется.

В интервале температур  $T_2 - T_3$  импульсным полем создаются желтые и зеленые домены с отростками, направленными вдоль трех проекций оси  $\langle 111 \rangle$  на плоскость пленки (рис. 2, Б). С понижением температуры форма доменов изменяется, отростки исчезают. Вблизи  $T_4$  наблюдается два вида доменных границ: узкая и широкая (рис. 2, В).

Рельеф этой ДС четко виден на рис. 3, полученном после компьютерной обработки. При  $T_4$  исчезают желтые домены, и появляется монодоменность зеленого цвета, которая сохраняется в интервале температур  $T_4 - T_K$ . Цвет монодоменности скачком изменяется с зеленого на желтый при  $T_K$ . Это можно объяснить тем, что достигнута температура магнитной компенсации  $T_K$ , вследствие чего при  $T \leq T_K$  знак магнитного момента изменился. Монодоменность желтого цвета наблюдается до  $T_5$ , а затем на желтом фоне появляются зеленые домены с четкой коричнево-красной ДГ. С понижением температуры период зеленых доменов уменьшается, а величина поля коллапса растет (рис. 1). При  $T_6$  резко изменяется ширина коричневой ДГ, а вместо зеленых доменов наблюдаются желтые домены (скачком произошло изменение цвета доменов), т.е. произошел СПФП из одной угловой фазы в другую угловую фазу. Теперь с понижением температуры уменьшается период желтых доменов.

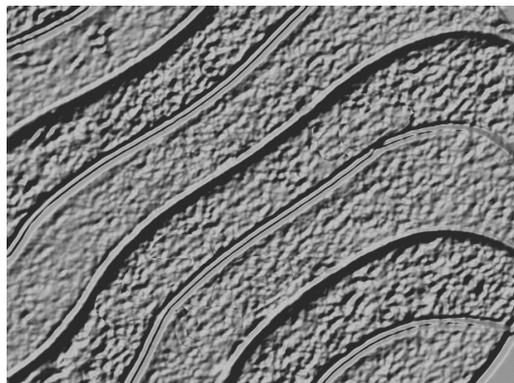


Рис. 3. Доменная структура при 260 К (компьютерная обработка).

Обобщим экспериментальные результаты, полученные при охлаждении пленки. В области высоких температур имеется осевая фаза. При  $T_2$  происходит спин-переориентационный фазовый переход из осевой фазы в угловую фазу. В узком интервале температур, близком к точке магнитной компенсации, наблюдается два вида границ. Вблизи  $T_K$  пленка находится в монодоменном состоянии. При удалении от точки компенсации (охлаждение пленки, температура  $T_6$ ) наблюдается спин-переориентационный фазовый переход из одной угловой фазы в другую угловую фазу.

**Модели доменной структуры.** Для объяснения экспериментальных результатов нами предложены модели доменных структур.

При охлаждении пленки в интервале  $T_1 - T_2$  (см. рис. 1) наблюдались две осевые фазы  $\Phi_1^{ocb}$  (оранжевая) и  $\bar{\Phi}_1^{ocb}$  (темно-зеленая), разделенные тонкой 180-градусной ДГ, плоскость которой параллельна оси  $\langle 111 \rangle$  (рис. 4, А). В этом интервале температур импульсным полем формируется решетка ЦМД (рис. 2, А). При  $T_2$  под влиянием кубической анизотропии вектор намагниченности  $\vec{M}_S$  отклоняется от  $\langle 111 \rangle$  в одно из трех равновесных положений, соответствующих кубической симметрии, т.е. происходит СПФП от осевых фаз к угловым фазам  $\Phi_1$  (желтой) и  $\bar{\Phi}_1$  (зеленой). При этом происходит изменение структуры и вида ДГ, т.е. в доменной границе происходит фазовый переход (рис. 4, Б).

Доменная граница в этом случае остается 180-градусной, но плоскость ее направлена под углом к оси  $\langle 111 \rangle$ . Ширина такой ДГ  $\Delta_{180}$  значительно больше ширины

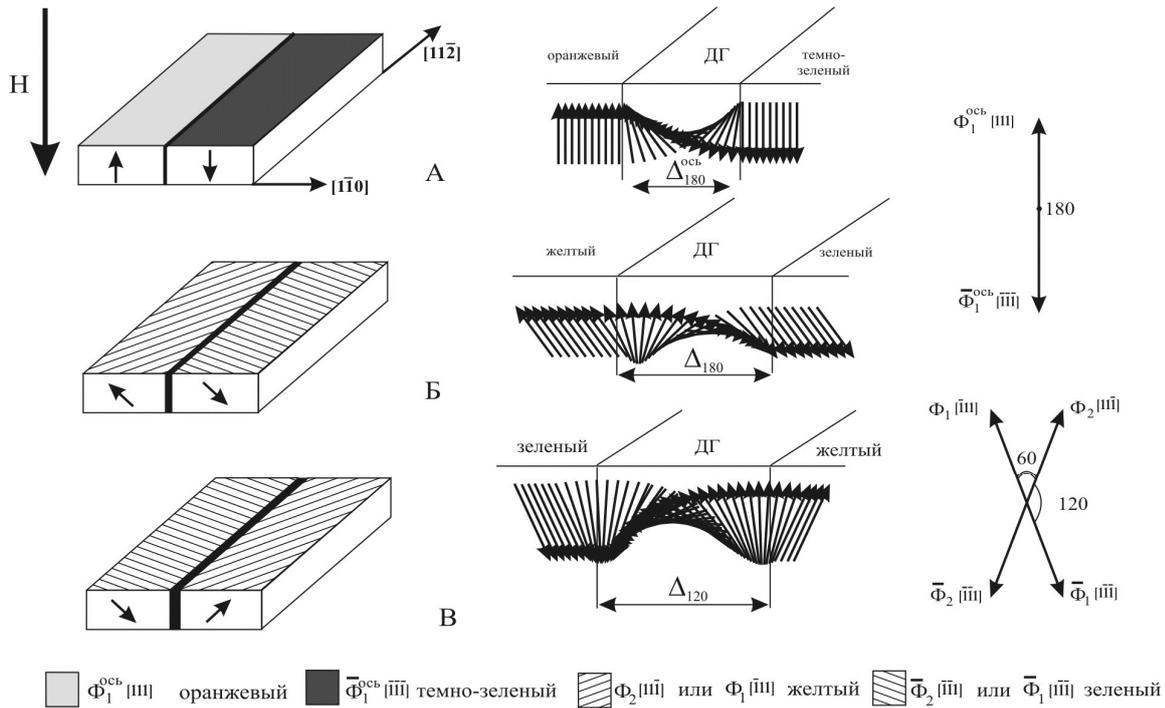


Рис. 4. Модели ДС и распределение намагниченности в доменной стенке: А – 180° осевая, Б – 180° угловая, В – 120°;  $\Delta$  – ширина ДГ

180-градусной границы  $\Delta_{180}^{ось}$ , плоскость которой параллельна ОЛН. Особенностью в этом случае является то, что 180-градусный поворот вектора намагниченности совершается в необычно широкой границе (рис.4Б). Объяснить это можно следующим образом. Равновесному состоянию ферромагнетика соответствует минимум энергии. Согласно [6], энергия ферромагнетика в магнитном поле  $H$  может быть представлена в виде суммы:

$$W = W_A + W_H + W_M + W_K + W_w, \quad (1)$$

где  $W_A$  – энергия обменного взаимодействия между магнитными моментами соседних атомов,  $W_H$  – энергия магнетика во внешнем поле,  $W_M$  – магнитостатическая энергия полей рассеяния,  $W_K$  – энергия магнитной анизотропии и  $W_w$  – энергия доменных стенок.

При высокой температуре образец имеет слабую осевую анизотропию, которая уменьшается при понижении температуры. Обменная энергия границ обратно пропорциональна ее толщине [7]. Толщина переходного слоя и его энергия для 180-градусной ДГ определяются равновесием между силами обмена и силами анизотропии: первые стремятся увеличить толщину слоя, а вторые – уменьшить ее. Следовательно, уширение 180-градусной ДГ связано с ростом влияния сил обменного взаимодействия.

Блоховские границы выгоднее при малой магнитостатической энергии. В тонких пленках величина отношения  $S/V$  ( $S$  – площадь поверхности,  $V$  – объем) для доменов перестает быть пренебрежимо малой, поэтому вклад магнитостатической энергии в блоховской границе возрастает [8]. Согласно [8] поверхностная плотность энергии доменных стенок:

$$\sigma_0^{Блох} = \frac{\pi \Delta^2}{(\Delta + h)} M_S^2, \quad \sigma_0^{Неель} = \frac{\pi h \Delta}{(\Delta + h)} M_S^2, \quad (2)$$

где  $\Delta$  – ширина ДГ,  $h$  – толщина пленки и  $M_s$  – намагниченность насыщения. Видно, что при  $h < \Delta$  плотность энергии неелевской границы меньше блоховской. При температуре  $T_2$   $h > \Delta$ , поэтому неелевская граница не может реализоваться. Плоскость ДГ поворачивается под углом к  $\langle 111 \rangle$ , но ДГ остается 180-градусной.

В интервале  $T_2 - T_3$  пленка имеет псевдоодноосную доменную структуру: на зеленом фоне наблюдаются желтые полосовые домены неправильной формы (фазы  $\Phi_1$  и  $\bar{\Phi}_1$  соответственно), с отростками, направленными вдоль трех проекций  $\langle 111 \rangle$  на плоскость пленки (рис. 1, рис. 2, Б). Доменная граница остается 180-градусной.

По мере приближения к точке компенсации  $\Delta$  растет, но не достигает величины  $h$ , и поэтому неелевские ДГ не реализуются. В [9] было показано, что тонкая 180-градусная ДГ обладает наибольшей энергией во всем интервале значений параметра  $\nu = K_u/K_1$ , характеризующего относительное влияние одноосной ( $K_u$ ) и кристаллографической кубической ( $K_1$ ) анизотропии и являющегося функцией температуры. Поэтому существование такой ДГ в интервале температур  $T_2 - T_3$  обусловлено воздействием на пленку внешних магнитных полей, как импульсного, так и поля смещения, которое происходит при формировании равновесной ДС. Поля вносили в энергию ДС слагаемое  $W_H$ . В роли подмагничивающего поля они обеспечивали образец необходимой энергией для поддержания высокоэнергетичной границы.

В интервале  $T_3 - T_4$  (рис. 1) наиболее вероятно существование доменной границы скрученного типа [8]. На рис. 5 представлена структура такой ДГ. Начало координат совпадает с серединой толщины пленки.

Тогда вблизи поверхностей пленки будут находиться участки ДГ неелевского типа. По мере приближения к началу координат ДГ преобразуется в границу блоховского типа. Такое строение границ возможно, если учесть, что в окрестности линии пересечения ДГ с поверхностью пленки возникают большие тангенциальные составляющие магнитных полей. Вектор намагниченности в центре ДГ под действием

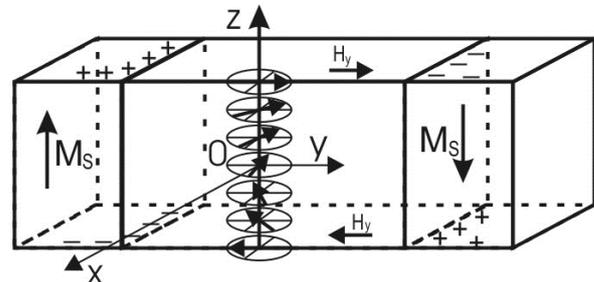


Рис. 5. Схематическое изображение модели скрученной ДГ, реализующейся в магнитоодносных пластинах [10]

размагничивающего поля, создаваемого магнитными “зарядами”, разворачивается на 180 градусов вдоль оси  $z$  (рис. 5). Влияние внешнего поля на структуру ДГ зависит от его направления. Если компонента размагничивающего поля  $H_y$  направлена параллельно  $\vec{M}_s$  в центре пластины, то при увеличении  $H_y$  структура ДГ стремится к блоховской. При антипараллельной ориентации поле  $H_y$  еще более закручивает спины на поверхности пластинки. Согласно [10], намагниченность в ДГ стремится ориентироваться вблизи поверхности пленки перпендикулярно плоскости границы, т.е. вдоль большого тангенциального поля. При этом возникают два участка неелевских границ с противоположным направлением вращения  $\vec{M}_s$  в них. В глубине пленки тангенциальная составляющая магнитного поля ослабевает, поэтому границе энергетически невыгодно иметь неелевскую структуру. В середине пленки размагничивающее поле равно нулю, и граница приобретает блоховскую структуру. На остальных участках граница имеет промежуточную структуру между неелевской и блоховской.

Наше предположение о существовании скрученной ДГ в интервале температур  $T_3 - T_4$  согласуется с экспериментальным наблюдением. Было обнаружено, что при действии на ДС небольшого внешнего поля между фазами  $\Phi_1$  и  $\bar{\Phi}_1$  через период домена исчезает широкая ДГ, а вместо нее появляется узкая темная 180-градусная ДГ (рис. 2, В, рис. 3). Как было сказано, структура ДГ зависит от направления внешнего поля. В нашем случае направления поля смещения и вектора намагниченности фазы  $\bar{\Phi}_1$  (зеленая) близки по направлению, поэтому под влиянием поля граница становится узкой блоховской, а не скрученной. Узкая 180-градусная ДГ наблюдается в очень малом температурном интервале.

С понижением температуры площадь доменов желтого цвета уменьшается (фаза  $\Phi_1$  невыгодна), ширина ДГ увеличивается. Увеличение ширины ДГ объясняется тем, что с понижением температуры уменьшается энергия анизотропии  $W_K$  (1), а, следовательно, возрастает влияние сил обменного взаимодействия, стремящихся расширить границу. Вблизи  $T_4$  ДГ становятся широкими, практически неелевского типа (ширина границы уже близка к толщине пленки:  $\Delta \approx h$ ).

При температуре  $T_4$  исчезает фаза  $\Phi_1$  (желтая), и появляется монодоменность зеленого цвета – фаза  $\bar{\Phi}_1$ , которая наблюдается до точки магнитной компенсации. При  $T_K$  цвет монодоменности скачком изменяется с зеленого на желтый, т.е. происходит смена фазы  $\bar{\Phi}_1$  на фазу  $\Phi_2$ . Фаза  $\Phi_2$  существует до температуры  $T_5$ , при которой появляются домены фазы  $\bar{\Phi}_2$  (зеленые) с широкими 180-градусными ДГ. Появление доменов обратной намагниченности свидетельствует о том, что происходит рост магнито-статической энергии пленки  $W_M$ , основной вклад в которую дает намагниченность одной из железных подрешеток. Чтобы уменьшить эту энергию, образец вновь разбивается на домены, разделенные 180-градусной скрученной ДГ. При дальнейшем понижении температуры наблюдается уменьшение периода доменной структуры (рис. 1), в результате чего увеличивается энергия и число доменных границ. Ширина ДГ уменьшается, что и наблюдается экспериментально. При температуре  $T_6$  происходит спин-переориентационный фазовый переход, сопровождающийся сменой фаз и изменением доменных границ. Фаза  $\Phi_2$  переходит в фазу  $\bar{\Phi}_2$ , затем  $\bar{\Phi}_2$  переходит в фазу  $\Phi_1$ . Таким образом, после СПФП наблюдаются две доменные фазы:  $\bar{\Phi}_2$  (зеленая) и  $\Phi_1$  (желтая), разделенные широкой темно-коричневой ДГ. Под действием  $H_{cm}$  теперь коллапсируют желтые домены. В доменной границе происходит фазовый переход, 180-градусная скрученная доменная граница превращается в 120-градусную ДГ, ширина которой  $\Delta_{120}$  больше ширины 180-градусной ДГ –  $\Delta_{180}$ . Как было показано в [9], такое преобразование структуры доменной границы энергетически выгодно.

**Неравновесная доменная структура.** Для неравновесной доменной структуры с понижением температуры, по мере приближения к  $T_K$ , доменная структура оказывается неустойчивой. Некоторые ЦМД уменьшаются в размере, и затем, как ртутные капли, сливаются с большими ЦМД. Большие ЦМД тоже перемещаются, при этом неравномерно изменяется ширина ДГ. Движение происходит вдоль проекций ОЛН на плоскость пленки. В этих направлениях ДГ оказывается более широкой. Вблизи  $T_4$  ЦМД теряют свою форму и превращаются в полосовые домены.

В области температуры магнитной компенсации, в отличие от равновесной ДС, т.е. при действии магнитных полей, монодоменность не наблюдается, т.к. образец многодоменный.

Вблизи температуры  $T_7$  (173–178K) (рис. 1) наблюдается интересный цветовой обмен. Изменился цвет доменной границы, резко увеличилась ее ширина. Зеленые домены приобрели желтый цвет окружающего поля, и на сплошном желтом поле видна только широкая коричневая ДГ. Потом те домены, что раньше были желтыми, приобрели зеленый цвет (рис. 2, Г, Д, Е). Таким образом, произошел спин-переориентационный фазовый переход. Без действия магнитного поля СПФП происходит медленно, в интервале температур 173–178K. При нагревании пленки он повторяется при тех же температурах в обратном порядке, т.е. СПФП является безгистерезисным и обратимым.

Подведем итоги эксперимента. В результате изучения поведения неравновесной ДС при изменении температуры пленки обнаружено два спин-переориентационных фазовых перехода, происходящие по обе стороны от  $T_K$ . В области высоких температур ( $T_1 - T_2$ , рис. 1) существует одноосная фаза, СПФП наблюдается на решетке ЦМД. Вблизи  $T_2$  происходит спин-переориентационный фазовый переход из осевой фазы в угловую фазу.

В области низких температур ( $T_7$ , 173–178K) происходит СПФП из одной угловой фазы в другую угловую фазу. Он происходит без зародышеобразования, путем поворота вектора намагниченности  $\vec{M}_S$  всего домена в энергетически более выгодное состояние. Этот СПФП является обратимым и безгистерезисным. Одновременно происходит фазовый переход в доменной границе.

Изучение поведения ДС при изменении  $T$  пленки позволяет сделать вывод: фазовый переход в доменной границе вызывает спин-переориентационный фазовый переход как в области низких температур, так и в области высоких температур.

**Модели неравновесной доменной структуры.** Предложены модели доменной структуры, объясняющие экспериментально изученные особенности неравновесной ДС в температурном интервале 400–120K.

В области высоких температур  $T_1 - T_2$  (рис. 1) наблюдаются осевые фазы  $\Phi_1^{ocb} <111>$  и  $\bar{\Phi}_1^{ocb} <\bar{1}\bar{1}\bar{1}>$ . Доменная граница 180-градусная блоховская (рис. 6, А). При понижении температуры до  $T_2$  уменьшается величина одноосной анизотропии. Под влиянием кубической анизотропии на некоторых участках круглых границ ЦМД изменяется ориентация спинов. Это приводит к изменению ориентации спинов в прилежащих к доменной границе областях, т.е. наблюдается изменение цвета поля (от оранжевого к желтому) и ЦМД (от темно-зеленого к зеленому). Появляются угловые фазы  $\Phi_1 <\bar{1}11>$  (желтая) и  $\bar{\Phi}_1 <1\bar{1}\bar{1}>$  (зеленая). Таким образом, под влиянием кубической анизотропии происходит фазовый переход в доменной границе, который в свою очередь вызывает спин-переориентационный фазовый переход из осевой фазы в угловую фазу.

В этом случае доменная граница исходной осевой фазы выступает зародышем новой, угловой фазы, т.е. СПФП из осевой фазы в угловую фазу происходит путем зародышеобразования. Поскольку поворот спинов вызван только температурным изменением  $K_u/K_1$ , без действия магнитного поля, то переход происходит медленно. Имеется температурный интервал сосуществования осевой и угловой фазы в 15 градусов.

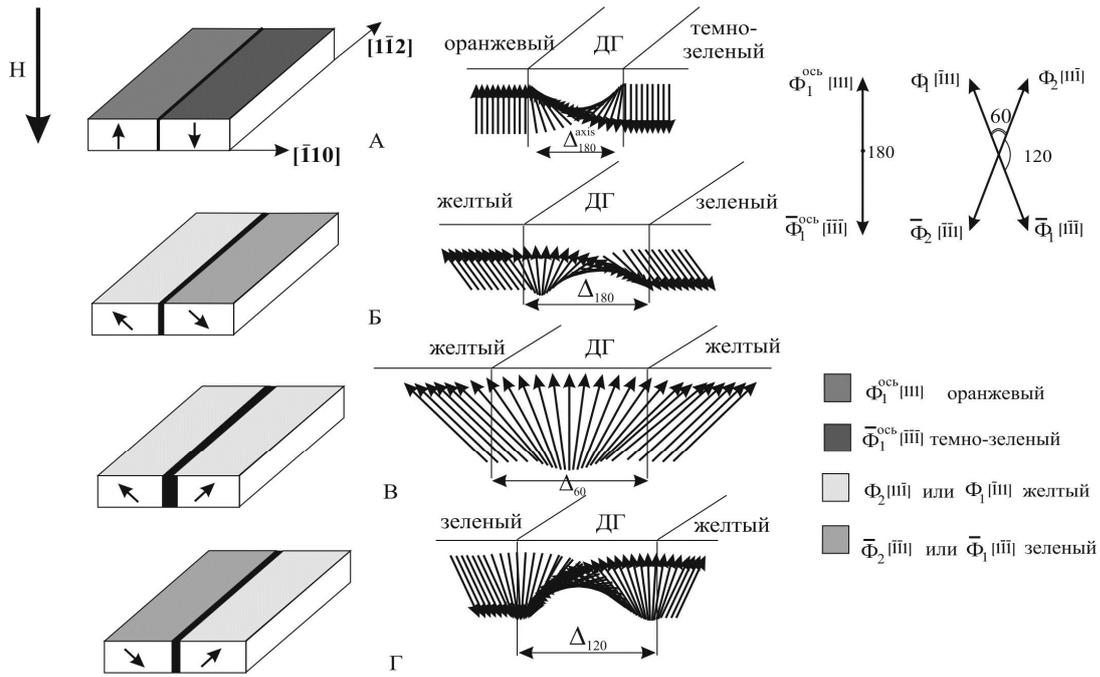


Рис. 6. Модели доменных структур и распределение намагниченности в доменной стенке:  
 А – 180° осевая; Б – 180° угловая; В – 60°; Г – 120° ( $\Delta$  – ширина ДГ)

Как показано в работах [11, 12], спин-переориентационный фазовый переход, происходящий путем зародышеобразования из осевой фазы в угловую фазу, является фазовым переходом первого рода.

После фазового перехода доменная граница осталась 180-градусной, но ее плоскость ориентирована под углом к оси  $\langle 111 \rangle$ . В этом случае разворот спинов на 180 градусов происходит в более широкой доменной границе (рис. 6, Б). Такой переход в доменной границе соответствует минимуму ее энергии.

В температурном интервале  $T_2 - T_7$  (рис. 1) сохраняются угловые фазы  $\Phi_1 \langle 111 \rangle$  и  $\bar{\Phi}_1 \langle 111 \rangle$  и разделяющая их 180-градусная доменная граница.

При наблюдении неравновесной ДС в области  $T_K$  пленка находится в многодоменном состоянии. Для образца с малой осевой анизотропией монодоменное состояние невыгодно, т.к. это приводит к увеличению размагничивающего поля. Чтобы перевести образец в монодоменное состояние, необходима добавочная энергия подмагничивающего поля (как в равновесной ДС).

В процессе понижения температуры изменяется величина  $K_u/K_1$ , что приводит к изменению энергии доменной границы, и, как следствие, к изменению ориентации спинов внутри границы. При  $T_7$  спины разворачиваются на 60 градусов внутри более широкой ДГ (рис. 6, В). Это приводит к изменению ориентации намагниченности всего домена: угловая фаза  $\bar{\Phi}_1 \langle 111 \rangle$  переходит в угловую фазу  $\Phi_2 \langle 111 \rangle$ . Теперь имеются две угловые фазы  $\Phi_1 \langle 111 \rangle$  и  $\Phi_2 \langle 111 \rangle$ , разделенные широкой 60-градусной доменной границей. Визуально наблюдается широкая коричневая ДГ на желтом поле.

Образование 60-градусной доменной границы схематически изображено на рис. 4 поворотом вектора намагниченности от одного домена фазы  $\bar{\Phi}_1 \langle 111 \rangle$  (зеленая) к другому домену фазы  $\Phi_2 \langle 111 \rangle$  (желтая).

При дальнейшем понижении  $T$  изменение ориентации спинов внутри доменной границы продолжается, и при  $T < T_7$  спины теперь разворачиваются на 120 градусов внутри более узкой ДГ (рис. 6, Г). Это приводит к изменению ориентации вектора намагниченности в другом домене: фаза  $\Phi_1 < \bar{1}\bar{1}1 >$  заменяется фазой  $\bar{\Phi}_1 < \bar{1}\bar{1}\bar{1} >$ . В результате цветового обмена снова наблюдаются домены желтого (фаза  $\Phi_2 < \bar{1}\bar{1}\bar{1} >$ ) и зеленого (фаза  $\bar{\Phi}_1 < \bar{1}\bar{1}\bar{1} >$ ) цвета, разделенные 120-градусной ДГ. Таким образом, в результате температурного изменения анизотропии в интервале температур 173–178K происходит поэтапно фазовый переход в доменной границе из 180-градусной в 60-градусную, а затем в 120-градусную границу. Визуально граница как бы «дышит». Фазовый переход в доменной границе вызывает спин-переориентационный фазовый переход из одной угловой фазы в другую угловую фазу. Как было показано в работах [9, 13, 14], СПФП из одной угловой фазы в другую угловую фазу, наблюдаемый вблизи  $T_7$  на неравновесной ДС (и вблизи  $T_6$  на равновесной) является фазовым переходом второго рода.

**Выводы.** Существуют отличия в поведении равновесной и неравновесной ДС при изменении  $T$ , которые обусловлены наличием дополнительной энергии магнитного поля, полученной равновесной ДС при ее формировании. Во-первых, при изучении особенностей равновесной ДС вблизи температуры компенсации наблюдается монодоменное состояние. Во-вторых, СПФП происходит при более низкой температуре ( $T_6$ ) и является необратимым [13].

Особенности неравновесной ДС, наблюдаемые при изменении температуры образца, обусловлены только температурным изменением констант анизотропии, поэтому они позволяют определить механизм спин-переориентационного фазового перехода и его связь с фазовым переходом в доменной границе. Стало очевидным, что доменная граница более чувствительна к изменению  $K_u/K_1 = f(T)$ , т.к. в доменной границе существует большой набор спинов разной ориентации. При определенной температуре (т.е. при определенной величине  $K_u/K_1$ ) соответствующая ориентация спинов в ДГ оказывается энергетически наиболее выгодной, что и вызывает процесс перестройки в доменной границе, т.е. фазовый переход. Изменение ориентации спинов в доменной границе вызывает изменение фаз в доменах, т.е. спин-переориентационный фазовый переход.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балбашов А.М. Магнитные материалы для микроэлектроники / А.М. Балбашов, А.Я. Червоненкис. – М.: Энергия, 1979. – 216 с.
2. Белов К.П. Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках / К.П. Белов, А.К. Звездин, А.М. Кадомцева, Р.З. Левитин. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. Мамалуй Ю.А., Сирюк Ю.А., Ярош Г.С.. Способ формирования решетки цилиндрических магнитных доменов в магнитоодноосной пленке. А.С.1341681 (СССР), опубл. в Б.И. №36, (1987).
4. Термодинамический анализ фазовых переходов в решетке ЦМД / В.Г. Барьяхтар, Э.А. Завадский, Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк // ФТТ. – 1984. – Т. 26, № 8. – С. 2381-2386.
5. Мамалуй Ю.А., Сирюк Ю.А. Препринт ДонФТИ АН УССР №2 (110), 43, Донецк (1986).
6. Барьяхтар В.Г. Цилиндрические магнитные домены и их решетки / В.Г. Барьяхтар, Ю.И. Горобец. – К.: Наукова Думка, 1988. – 168 с.
7. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
8. Кандаурова Г.С. Доменная структура магнетиков. Основные вопросы / Г.С.Кандаурова, Л.Г.Онопrienко. – Свердловск: УрГУ, 1986. – 136 с.
9. Доменные границы в пленках с угловой доменной структурой / Я.И. Грановский, А.А. Леонов, Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк // Известия РАН, серия физическая. – 2006. – Т. 70, № 7. – С. 956-958.
10. Малоземов А. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами / А. Малоземов, Дж. Слонзуски. – М.: Мир, 1982. – 384 с.

11. Расчет фазовой диаграммы спиновой переориентации вектора намагниченности в феррит-гранатовых магнитных пленках / А.В. Безус, А.А. Леонов, Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк // Порядок, беспорядок и свойства оксидов: междунар. симпозиум (ODPO-2003) (сентябрь, 2003 г.): сб. трудов. – 2003. – С. 182-183.
12. Фазовые переходы в ЦМД-структурах при спиновой переориентации в феррит-гранатовых пленках / Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк, А.В. Безус, А.А. Леонов // ФТТ. – 2004. – Т. 46, № 2. – С. 277-281.
13. Грановский Я.И. Доменные границы в пленках с угловой доменной структурой / Я.И. Грановский, А.А. Леонов, Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк // Фазовые превращения в твердых растворах и сплавах: VIII междунар. симпозиум (ОМА-2005) (сентябрь 2005 г.): сб. трудов. – 2005. – Ч. 1. – С. 223-225.
14. Леонов А.А. Исследование структуры доменной границы в пленке со смешанной анизотропией в области спин-переориентационного фазового перехода / А.А. Леонов, Ю.А. Мамалуй, Ю.А. Сирюк // Известия РАН, серия физическая. – 2005. – Т. 69, № 7. – С. 1011-1014.

Поступила в редакцию 03.07.2017 г.

#### THE PECULIARITIES OF DOMAIN BOUNDARIES AT SECOND ORDER SPIN-REORIENTATION PHASE TRANSITION IN EQUILIBRIUM AND NONEQUILIBRIUM DOMAIN STRUCTURES OF FERRITE-GARNET FILM

*Ju.A. Siryuk, A.V. Bezus, E.D. Bondar, V.V. Smirnov*

The peculiarities of an equilibrium and nonequilibrium domain structures in ferrite-garnet film with low uniaxial anisotropy have been experimentally studied in the 90-450K temperature range. Two types of spin-reorientation phase transition are founded from the both sides of magnetic compensation point. The structural changes of domain boundaries at second order spin-reorientation phase transitions have been investigated. The domain structure models which corresponded to the experimental data are offered.

**Keywords:** domain structure, spin-reorientation phase transition, domain boundary.

**Сирюк Юлия Андреевна**

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк)  
Тел.: (0622) 93-30-28.  
E-mail: [juliasiryuk@gmail.com](mailto:juliasiryuk@gmail.com)

**Siryuk Julia Andreevna**

Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher  
Donetsk National University  
E-mail: [juliasiryuk@gmail.com](mailto:juliasiryuk@gmail.com)

**Безус Алексей Викторович**

кандидат физико-математических наук  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк)  
Тел.: (0622) 93-30-28.  
E-mail: [coyote\\_mobile@mail.ru](mailto:coyote_mobile@mail.ru)

**Bezus Aleksey Victorovich**

Candidate of Physics and Mathematics sciences  
Donetsk National University  
E-mail: [coyote\\_mobile@mail.ru](mailto:coyote_mobile@mail.ru)

**Бондарь Елена Дмитриевна**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк),  
Тел.: (0622) 93-30-28.  
E-mail: [newexog@i.ua](mailto:newexog@i.ua)

**Bondar Elena Dmitrievna**

Donetsk National University  
E-mail: [newexog@i.ua](mailto:newexog@i.ua)

**Смирнов Виталий Валерьевич**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк),  
Тел.: (0622) 93-30-28.  
E-mail: [newexog@i.ua](mailto:newexog@i.ua)

**Smirnov Vitalii Valerievich**

Donetsk National University  
E-mail: [newexog@i.ua](mailto:newexog@i.ua)

УДК 537.86

## ФУНКЦИИ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ И РАСПОЗНАВАНИЯ ХАРАКТЕРНЫХ УЧАСТКОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КРИВЫХ

© 2017. *И.А. Третьяков, В.В. Данилов*

---

В настоящей работе описан этап идентификация участков, которые содержат информацию на кривой, рассмотрена методика сегментации для обработки экспериментальных кривых, предложены несколько видов функции сложности.

**Ключевые слова:** функция сложности; сегментация; экспериментальные кривые; лингвистический подход.

---

**Введение.** При проведении исследований различных физических явлений, например, в информационных технологиях, возникает необходимость анализа экспериментальных кривых, имеющая своей целью косвенное изучение последовательностей событий, локализованных во времени и недоступных для непосредственного наблюдения физических явлений.

Формой представления информации, содержащейся в таких кривых, является последовательность символов, каждый из которых соответствует определенному типу характерных участков кривой. Сокращенное описание такой кривой в виде последовательности символов, восстанавливающей последовательность элементарных событий в исходном процессе, фактически представляет собой фразу некоторого языка. Такая методика обработки экспериментальной кривой с целью извлечения информации о структуре изучаемого процесса получила название лингвистического подхода к анализу экспериментальных кривых [1]. Такой подход к анализу кривых в настоящее время широко распространен и успешно применялся для анализа кривых вариации интенсивности космических лучей [2], изучения связи кривой скорости выгорания углерода с ходом конверторной плавки [3], исследования кривой шума дизеля с целью акустической диагностики его состояния [4], изучения кривых алгоритмов распознавания речи [5, 6].

В лингвистическом подходе к анализу экспериментальных кривых выделяется последовательность реализации трех основных этапов обработки кривой:

- выделения и распознавания характерных участков;
- присвоения выделенным участкам символов некоторого алфавита, соответствующих определенным типам поведения кривой;
- анализа полученных последовательностей символов.

Из этих трех основных этапов наиболее специфичен этап выделения и распознавания участков, которые можно интерпретировать как «элементарные события». Такой этап получил название сегментация. В [7] этот этап рассматривался для случаев, в которых каждое событие принадлежит к одному из конечного множества классов, и участки кривой представляются как отрезки реализаций стационарных случайных процессов. В [8] дается краткое изложение таких исследований для применения в распознавании изображений. Данная статья будет продолжением этих исследований, целью которых является разработка алгоритмов для анализа экспериментальных кривых.

**Постановка задачи.** Экспериментальные кривые – один из способов представления результатов научной работы. Таким образом изображают, например,

результаты каротажа в геофизике, электрокардиограммы в медицине, спектры колебаний молекул в спектроскопии.

Анализ экспериментальных кривых требует идентификации относительно малых участков, в которых содержится информация, изучения их свойств и нахождения закономерностей. В работе [9] вводится специальная функция, которая оценивает степень «изменчивости и сложности» участков кривой. В настоящей работе предлагается несколько видов функции, оценивающей «сложность» участков экспериментальных кривых.

**Этап сегментации.** Сегментация экспериментальных кривых или идентификация участков, которые содержат информацию на кривой, является первым этапом в создании языка для описания массива кривых. Выделяется два типа кривых, которые требуют лингвистического подхода к их анализу.

К первому типу относятся кривые, описывающие несколько процессов, данные о которых содержатся на участках кривой. Стыки участков кривых интерпретируются как изменение процесса. Целью сегментации является нахождение точек, которые и представляют эти изменения. Для этого следует разделять кривую на ряд смежных участков, отличающихся формой кривой.

Для кривых второго типа предполагается, что исследуемый процесс находится, в основном, в неизменном состоянии, из которого он иногда выходит в результате кратковременных возмущений. Такие возмущения, на фоне в целом равномерного процесса, рассматриваются как участки кривой, содержащие единицы данных. Для таких кривых сегментацией следует выделить только отдельные участки, которые считаются информативными, а остальные (неизменные) не учитываются.

Кривые обоих типов являются дискретно упорядоченными последовательностями событий, а их анализ является описанием этих событий. Таким образом, сегментация, которая делит кривую на участки – не только первый, но и самый важный этап лингвистического анализа.

В методике сегментации, предложенной в данной статье, переходы от одного события к другому в процессе, который представляет структурную форму сигнала, рассматриваются как быстрые изменения его формы. Благодаря этому, приведенное описание таких экспериментальных кривых сохраняет данные о структуре и может быть получено путем идентификации участков, в которых форма существенно отличается от граничащих участков и рассматривается как пики, рывки, резкие изменения и т.д. Эти участки называются переходными или сложными, в отличие от однородных простых, у которых форма не изменяется и которые разделены сложными участками.

Введение понятия «сложности» участков при сегментации кривых двух указанных выше типов и не требует предварительной информации о том, к какому типу относится кривая. Таким образом, сложные участки могут быть интерпретированы как изменения состояния процесса, как фоновые возмущения некоторого постоянного состояния, или, наконец, как кратковременные возмущения, которые переводят процесс из одного состояния в другое.

**Методика для сегментации экспериментальных кривых, состоящих из регулярных участков.** Пусть  $\omega = (t_1, t_2)$  некоторый участок области определения экспериментальной кривой  $f(t)$  и задана реальная функция  $\phi(f, \omega)$ , которая зависит от формы кривой на участке  $\omega$  и является представлением о ее изменчивости в течение этого интервала. Таким образом, величина  $\phi(f, \omega)$  постоянна, если кривая  $f(t)$  однородна, и изменяется, если ее форма быстро изменяется в течение этого интервала. Значение этой функции может быть интерпретировано как степень изменчивости формы кривой. Назовем ее, для определенности, функцией сложности.

Пусть в интервале  $\omega^*$  находится точка соединения двух однородных участков экспериментальной кривой, которые отличаются по форме или отображают аномалию на однородном фоне, тогда, с небольшими сдвигами интервала  $\omega$  фиксированной длины справа и слева от  $\omega^*$ , значение функции сложности уменьшается или увеличивается в зависимости от ее конкретной формы. То есть функция  $\phi(f, \omega)$  имеет локальный экстремум при  $\omega = \omega^*$ . Таким образом, в зависимости от выбора функции сложности (ФС), сложные участки могут быть локальными экстремумами или участками, которые являются "более сложными", чем граничащие с ними. Учитывая сказанное, методика сегментации для обработки экспериментальной кривой, должна содержать следующее:

- делим экспериментальную кривую  $f(t)$  на ряд элементарных участков  $\omega_j, j = 1, \dots, N$  одинаковой длины  $l$ , которые следуют с определенным шагом  $\Delta$  вдоль оси изменения аргумента (рис. 1) (шаг  $\Delta \leq l$ );

- выбираем определенную функцию сложности  $\phi(f, \omega)$ , при этом каждый элементарный участок  $\omega_j$  связан с реальной величиной в виде  $\phi_j = \phi(\omega_j)$ ;

- выделяем участки с локально экстремальными значениями  $\phi_j$ .

Практическое вычисление локального экстремума нуждается в дополнительном уточнении, поскольку условия  $\phi_j > \phi_{j+1}$  (для случая определения максимумов функции сложности) не являются надежными и продуцируют слишком много ложных экстремумов. Поэтому в данной работе используем следующие дополнительные условия:

-  $\phi_j > h$  – малые значения функции сложности интерпретируем как индексы, обозначающие, что состояние процесса "поддерживается" и что связанный с ним локальный экстремум является "незначительным";

- для идентификации огибающей функции сложности последовательно выбираем экстремумы  $\phi_{j_i}, \phi_{j_{i+1}}, \dots, \phi_{j_{i+k}}$ , для которых максимально  $\{(j_{s+1} - j_s), i \leq s \leq i+k\} \leq \tau$ , и один локальный экстремум выбирается в точке  $j_i$ ;

- используя  $\phi_j > \phi_{j_{\pm 1}} > \dots > \phi_{j_{\pm k}}$  выбираем участки кривой, в которых процесс изменяет свое состояние плавно (используем отдельно от предыдущего).

Таким образом, предложен ряд наборов функций сложности, каждая из которых использует некоторый определенный набор признаков формы кривой. Все они необходимы для сегментации экспериментальных кривых, состоящих из регулярных участков.

**Функции сложности для идентификации участков кривой, наиболее отличающиеся от граничащих.** Пусть экспериментальная кривая будет определена как последовательность значений ее ординат  $f_1, f_2, \dots$  в виде дискретного ряда, и пусть каждый элементарный участок  $\omega_j$  содержит  $l$  точек. Тогда,  $f^j = (f_1^j, \dots, f_l^j)$  будет

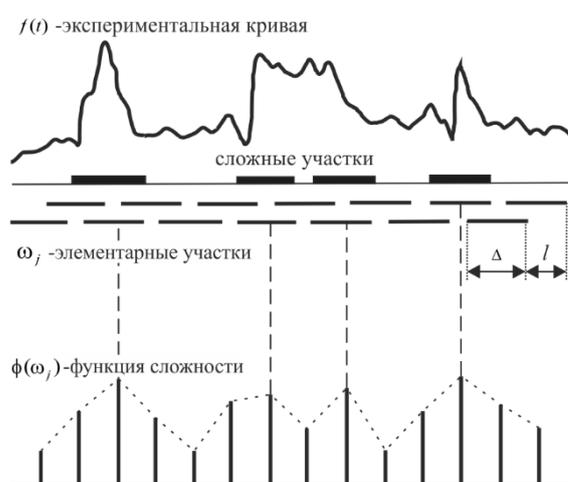


Рис. 1

вектором значения ординат экспериментальной кривой на участке  $\omega_j$ . Введем для оценки формы кривой функцию сложности (ФС)  $\phi(\omega_j)$ , оценивающую степень изменчивости поведения кривой на данном участке. Построим вектор  $k$ , характеристики  $g^j = (g_1^j, \dots, g_k^j)$  которого будут рассматриваться как описание формы кривой на участке  $\omega_j$  ( $k$  не обязательно равна  $l$ ). Тогда ФС  $\phi(\omega_j)$  будет простейшей функцией подобия между вектором  $g^j$  и граничащими векторами  $g^{j-1}$ ,  $g^{j+1}$ , и представляет собой среднее значение произведения с граничащей величиной:  $\phi(\omega_j) = \left[ (g^j, g^{j-1}) + (g^j, g^{j+1}) \right] / 2$ , где  $(g^j, g^{j-1})$  и  $(g^j, g^{j+1})$  – скалярные произведения центрированного и нормированного вектора отсчетов кривой на данном участке  $\omega_j$  и соответствующего вектора на граничащих участках слева и справа от него. Обозначаем среднее значение произведения граничащих участков через величину  $x^j = (g^{j-1}, g^{j+1}) / 2$ , которая характеризует степень постоянства формы кривой на данном участке. Тогда ФС для идентификации участков, наиболее отличающихся от граничащих, принимает вид:

$$\phi(\omega_j) = (x^j, g^j) \quad (1) \quad \text{или} \quad \phi(\omega_j) = (y^j, f^j), \quad (2)$$

где  $y^j = (f^{j-1} + f^{j+1}) / 2$  соответственно. В этом случае необходимо сначала центрировать и нормализовать вектор  $f^j$  или выбрать в качестве его характеристик величины  $g_s^j = (f_s^j - \bar{f}^j) / \|f^j\|$ , где  $s = 1, \dots, l$  является порядковым номером точки на данном участке, а  $\bar{f}^j$  и  $\|f^j\|$  равны:  $\bar{f}^j = \frac{1}{l} \sum_{s=1}^l f_s^j$ ,  $\|f^j\| = \sqrt{\sum_{s=1}^l (f_s^j - \bar{f}^j)^2}$ .

Другими характеристиками, используемыми при описании участков кривой  $\omega_j$ , могут быть статистические моменты, вычисленные из компонент вектора  $f^j$ :

$$g_1^j = \bar{f}^j, \quad g_2^j = \frac{1}{l} \sqrt{\sum_{s=1}^l (f_s^j - \bar{f}^j)^2}, \dots, \quad g_k^j = \frac{1}{l} \sqrt{\sum_{s=1}^l (f_s^j - \bar{f}^j)^k}.$$

Данный набор ФС применим в сегментации как детерминированных, так и случайных кривых, и позволяет сравнивать участки кривой различной длины.

Вне зависимости от способов, используемых для определения вектора  $g^j$ , в качестве сложных участков будут выделяться участки с локально минимальными значениями  $\phi(\omega_j)$ . Величина  $\phi(\omega_j)$  уменьшается с увеличением изменчивости формы кривой на участке  $\omega_j$  и его усредненной формы на участках  $\omega_{j-1}$  и  $\omega_{j+1}$ . Таким образом, данная функция сложности идентифицирует участки, наиболее отличающиеся от граничащих.

**Функции сложности для определения качества аппроксимации кривой.** Как и ранее, пусть  $f^j = (f_1^j, \dots, f_l^j)$  вектор значений ординат экспериментальной кривой на элементарном участке  $\omega_j$ . Задаем множество  $l$ -мерных ортонормированных векторов  $\psi^i = (\psi_1^i, \dots, \psi_l^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , зависящих от дискретных значений ординат

некоторых элементарных функций. Для каждого элементарного участка  $\omega_j$ , или для каждого вектора  $f^j$ , коэффициенты многочлена его наилучшей среднеквадратичной аппроксимации в системе векторов  $\psi^i, i = 1, \dots, n$  вычисляются как скалярные произведения:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^l f_s^j \psi_s^j.$$

Функция сложности каждого элементарного участка  $\omega_j$  имеет вид:

$$\phi(\omega_j) = \sqrt{\sum_{s=1}^l \left( f_s^j - \sum_{i=1}^n c_{ij} \psi_s^j \right)^2}. \quad (3)$$

Сложными участками будут являться те участки, на которых  $\phi(\omega_j)$  будет иметь локально максимальное значение.

Если кривая изменяется случайным образом, то стоит предположить, что участки, где ее поведение изменяется не значительно, являются реализацией определенного случайного стационарного процесса. Такие процессы должны быть смоделированы как совокупность стохастических уравнений авторегрессии

$$y_t = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i y_{t-i} + b \xi_t. \quad (4)$$

Здесь  $c_i, i = 0, \dots, n$  – коэффициенты авторегрессии;  $n$  является порядком авторегрессии;  $\xi_t$  представляет собой последовательность независимых нормальных случайных величин с нулевой средней и унитарной дисперсией, а коэффициент  $b$  определяет среднеквадратичное отклонение возмущающего белого шума  $b \xi_t$ .

Пусть экспериментальная кривая определяется на конечном интервале или на конечном множестве точек  $T = \{1, \dots, N\}$ . Разделим это множество на  $M$  непересекающихся элементарных участков  $\omega_j, j = 0, \dots, M$ , каждый из которых содержит  $l$  точек (в отличие от предыдущего случая, важно, что элементарные участки не перекрываются):  $\bigcup_{j=1}^M \omega_j = T, \quad N = Ml$ .

Предположим также, что число точек  $l$  в каждом участке превышает порядок авторегрессии  $n$ . Тогда, на множестве элементарных участков  $\omega_j$ , стохастическая функция сложности может быть представлена в виде:

$$\phi(\omega_j) = \min_c \sum_{s=n+1}^l \left( f_s^j - c_0 - \sum_{i=1}^n c_i f_{s-i}^j \right)^2, \quad (5)$$

где минимум берется по всевозможным  $(n+1)$ -мерным векторам  $c = (c_0, \dots, c_n)$ . Значение этой ФС характеризует качество аппроксимации экспериментальной кривой по участкам с помощью авторегрессионной модели  $n$ -го порядка (4). Чем ниже это значение, тем вероятнее, что кривая на этом участке является реализацией случайного стационарного процесса. Поэтому сложными участками будут участки с локальными максимумами  $\phi(\omega_j)$ . Аналогичные процедуры используются в телеметрии для сжатия данных [10].

**Функции сложности для определения экстраполяционных свойств кривой.**

Пусть экспериментальная кривая на элементарном участке  $\omega_j$  аппроксимируется как

отрезок степенного ряда  $\sum_{i=0}^n c_i s^i$ , где  $s$  является порядковым номером точки на данном участке. Тогда полученный полином распространяется вправо за границы участка (правая экстраполяция), а число точек (длина правого интервала)  $k_r$  находится таким образом, что ошибка экстраполяции не должна превышать заданное значение  $\varepsilon$ :

$$\sum_{s=l+1}^{k_r} \left( f_s - \sum_{i=0}^n c_i s^i \right)^2 \leq \varepsilon.$$

Длина левого интервала  $k_l$  определяется таким же образом. Значение ФС считается равным наименьшему из интервалов экстраполяции:

$$\phi(\omega_j) = \min(k_r, k_l). \quad (6)$$

Сложные участки являются элементарными участками с локальными минимумами  $\phi(\omega_j)$ . Эта функция сложности формализует представление об изменчивости формы кривой, проверяя, сохраняет ли она свое основное направление в некоторой области текущего элементарного участка. Данная функция может быть использована и для анализа экстраполяционных свойств случайной кривой.

Пусть, как и в функции (5), участок  $\omega_j$  описывается моделью с  $n$ -ым порядком авторегрессии (4) с коэффициентами  $(c, b)$ . Параметры его вектора получим методом наименьших квадратов на участке  $\omega_j$ . Определим для  $t > jl$  величины:

$$s_t(\omega_j) = \sum_{s=l+1}^{k_r} \left[ \frac{1}{b} \left( f_s - c_0 - \sum_{i=1}^n c_i f_{s-i} \right)^2 \right] - (t - jl).$$

В постоянной части значения  $g_s(\omega_j) = \frac{1}{b} \left( f_s - c_0 - \sum_{i=1}^n c_i f_{s-i} \right)^2$  совпадают с квадратом стандартного белого шума  $\xi_s^2$  и в среднем их значения близки к единице, а значение суммы  $s_t(\omega_j)$  приблизительно равно нулю. После изменения параметров  $(c, b)$ , возникают систематические различия  $g_s(\omega_j) - 1$ , что приводит к монотонному дрейфу  $s_t(\omega_j)$  от нуля.

Введем пороговое значение  $\varepsilon$  и найдем минимальное значение  $\phi(\omega_j)$ , при котором величина  $|s_t(\omega_j)|$  превышает пороговое значение  $|s_t(\omega_j)| \geq \varepsilon$ . В этом случае значение функции сложности будет равно:

$$\phi(\omega_j) = t_0(\omega_j) \quad (7)$$

и сложными участками будут являться участки с локальными минимумами  $\phi(\omega_j)$ . Данная функция (7) отличается от (6) тем, что она оценивает экстраполяционные свойства участка  $\omega_j$  только в одном направлении.

**Выводы.** В данной работе рассмотрена методика для выделения и распознавания характерных участков экспериментальных кривых, предложены дополнительные условия для уменьшения ложных экстремумов при вычислениях. Представлены несколько видов функции сложности, в частности:

- идентифицирующие участки, наиболее отличающиеся от граничащих (1, 2);

- характеризующие качество аппроксимации экспериментальной кривой (3, 5);
- анализирующие экстраполяционные свойства экспериментальной кривой (6, 7).

Разработка алгоритмов для сегментации экспериментальных кривых – цель авторов в дальнейшем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моттль В.В. Лингвистический анализ экспериментальных кривых / В.В. Моттль, И.Б. Мучник // ТИИЭР. – 1979. – Т. 69. – № 5. – С. 12-39.
2. Мучник Р.Б. Алгоритмы выделения и анализа характерных участков кривых и их взаимного расположения / Р.Б. Мучник // В кн.: Техническая кибернетика. Материалы юбилейной литовской республиканской XX науч.-техн. конф. Каунас: Изд. Каунасского политехи, ин-та. – 1970. – С. 196-204.
3. Применение структурного анализа кривых к задаче исследования конверторного процесса / Л.С. Бейтельман, И.Б. Мучник, Р.Б. Мучник, Р.А. Симсарьян // Изв. вузов, Черная металлургия. – 1971. – № 12. – С. 149–155.
4. Мучник Р.Б. Сокращение описания временных сигналов / Р.Б. Мучник // В кн.: Актуальные вопросы технической кибернетики. – М.: Наука, 1972. – С. 206-212.
5. Аграновский А. В. Теоретические аспекты алгоритмов обработки и классификации речевых сигналов / А. В. Аграновский, Д. А. Леднов. – М.: Радио и связь, 2007. – 164 с.
6. Потапова Р. К. Лингвистические знания и новые технологии / Р. К. Потапова // Сборник трудов XI сессии Российского акустического общества. – М., 2007. – Т. 3. – С. 4-13.
7. Моттль В.В. Оптимальная сегментация экспериментальных кривых / В.В. Моттль, И.Б. Мучник, В.Г. Яковлев // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 8. – С. 83-94,
8. Завалишин Н.В. Модели зрительного восприятия и алгоритмы анализа изображений / Н.В. Завалишин, И.Б. Мучник. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
9. Мучник И.Б. Моделирование процесса формирования языка для описания и анализа формы изображений / И.Б. Мучник // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 8. – С. 61–70.
10. Ольховцев Ю.Б. Сжатие данных при телеизмерениях / Ю.Б. Ольховцев, О.Н. Новоселов, А.П. Мановцев. – М.: Советское радио, 1971. – 180 с.

*Поступила в редакцию 10.07.2017 г.*

### FUNCTIONS OF COMPLEXITY FOR ALLOCATION AND RECOGNITION OF CHARACTERISTIC SITES OF EXPERIMENTAL CURVES

*I. Tretyakov, V. Danilov*

In the paper the stage of identification of sites which contain information on a curve is described, the segmentation technique for processing of experimental curves is considered, several types of function of complexity are offered.

**Keywords:** complexity function; segmentation; experimental curves; linguistic approach.

**Третьяков Игорь Александрович**  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк  
E-mail: es75i@mail.ru  
Тел.: +38 066 605 67 62

**Tretyakov Igor**  
Assistant Lecturer of Donetsk National University,  
Donetsk

**Данилов Владимир Васильевич**  
доктор технических наук, профессор  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк;  
E-mail: ut5iv@mail.ru

**Danilov Vladimir**  
Vice-Rector of Research and Innovation Activity  
Doctor of Engineering Sciences, Full Professor,  
Donetsk National University, Donetsk

*Научное издание*

**Вестник Донецкого национального университета.  
Серия А: Естественные науки**

**2017. – № 2**

Редактор: *Е.В. Алтухов*  
Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о регистрации СМИ № 000077 от 21.11.2016 г.

---

Адрес редакции:  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
ул. Университетская, 24,  
283001, г. Донецк  
Тел: (062) 302-92-56, 302-92-93  
E-mail: [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)  
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

---

Подписано в печать 22.11.2017 г.  
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.  
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 12,48.  
Тираж 100 экз. Заказ. № 17-Ноя16

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.  
Тел.: (062) 302-92-27.

Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности  
в Государственный реестр  
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.