

ISSN 2415-7058

**Вестник  
Донецкого  
национального  
университета**



НАУЧНЫЙ  
ЖУРНАЛ  
*Основан  
в 1997 году*

---

*Серия А*  
**Естественные  
науки**

---

**3/2017**

---

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»**

**Главный редактор** – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

**Зам. главного редактора** – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

**Ответственные секретари:** канд. физ.-мат. наук, доц. **Е.В. Алтухов**; канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

**Члены редколлегии:** д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; д-р биол. наук, проф. **М.И. Бойко**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences”**

**The Editor-in-Chief** – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bepalova**

**The Deputy of the Editor-in-Chief** – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

**Executive Secretaries:** Cand. of phys. and math., docent **E.V. Altukhov**, Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

**The Members of the Editorial Board:** Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr. of biol., prof. **M.I. Boyko**; Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

**Адрес редакции:** ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 283001

**Тел:** (062) 302-92-56, 302-92-93

**E-mail:** [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)

**URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – Математика; 01.02.00 – Механика; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки; 03.02.00 – Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Протокол № 8 от 21.11.2017 г.*

© ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2017

# Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 3

Донецк 2017

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Математика*

- Бондарев Б.В., Курилина Ю.А.* Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом при внутреннем и внешнем зашумлении 3
- Бондарев Б.В., Майорова С.А.* Усреднение в краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае быстрых случайных осцилляций 12
- Волчкова Н.П.* Асимптотические свойства сферических функций на симметрических пространствах некомпактного типа 22

### *Механика*

- Алтухов Е.В., Фоменко М.В.* Однородные решения краевых задач трехмерной теории упругости изотропных тел. Однородные плиты 34
- Занько А.И.* Изгиб многосвязной анизотропной плиты под действием усилий по основанию 80
- Игнатова Е.А.* О равномерных вращениях относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона 90
- Ткаченко Д.Н.* Об одном классе полиномиальных решений уравнений Эйлера-Пуассона 98

### *Физика*

- Ефимович А.П., Третьяков И.А., Мазаев Г.В., Данилов В.В.* Повышение КПД усилителя класса  $F_3$  с учетом влияния выходной емкости активного элемента и активных потерь в нагрузочной цепи 106
- Тихий А.А., Николаенко Ю.М., Бадекин М.Ю., Саятин В.Н., Иваницын Н.П., Жихарев И.В.* Учёт сложной структуры поверхности при интерпретации результатов эллипсометрических измерений тонких прозрачных плёнок на примере оксида индия (III) 112

# Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

*Series A. Natural Sciences*

No 3

Donetsk 2017

---

## CONTENTS

### *Mathematics*

- Bondarev B.V., Kurilina Y.O.* Estimation of the unknown parameter in systems with a weak signal with internal and external noises 3
- Bondarev B.V., Maiorova S.A.* The average of the boundary-value problem for an ordinary second-order differential equation under the effects of the rapid random oscillations 12
- Volchkova N.P.* Asymptotic properties of spherical functions on symmetric spaces of the non-compact type 22

### *Mechanics*

- Altukhov E.V., Fomenko M.V.* Homogeneous solutions of boundary-value problems of the three-dimensional elasticity theory of isotropic bodies. Homogeneous plates 34
- Zan`ko A.I.* Bending of multiconnected anisotropic plate under the influence on the base 80
- Ignatova E.A.* About uniform rotations relative to inclined axis in the problem of motion of gyrostat in a magnetic field with account of the Barnett-London effect 90
- Tkachenko D.N.* About one class of polynomial solutions of Euler-Poisson equations 98

### *Physics*

- Yefymovych A., Tretyakov I., Mazaev G., Danilov V.* Increasing the efficiency of class-F3 amplifier with regard to the impact of the output capacity of the active element and active losses in the load circuit 106
- Tikhii A.A., Nikolaenko Yu.M., Badekin M.Yu., Sayapin V.N., Ivanitsin N.P., Zhikharev I.V.* Accounting complex structure of the surface at interpretation of the results of ellipsometric measurements of thin transparent films on the example of indium oxide(III) 112

УДК 519.21

## ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В СИСТЕМАХ СО СЛАБЫМ СИГНАЛОМ ПРИ ВНУТРЕННЕМ И ВНЕШНЕМ ЗАШУМЛЕНИЯХ

© 2017. *Б. В. Бондарев, Ю. О. Курилина*

Наблюдения над зашумлённым параметрическим семейством функций происходят с диффузионными погрешностями. А внутренние зашумления моделируются с помощью процесса Орнштейна-Уленбека. Построен доверительный интервал для неизвестного параметра с заданной наперёд гарантией надёжности.

**Ключевые слова:** оценка параметра, метод максимального правдоподобия, плотность мер, интервал накрытия.

**Введение.** Вопросом оценки неизвестных параметров в сносе стохастического дифференциального уравнения посвящено значительное число исследований: достаточно назвать монографию [1], К.Ито, монографии [2-3], в которых изучается случай вхождения неизвестного параметра в снос стохастического дифференциального уравнения, монографию [4], в которой аналогичные задачи рассмотрены для случайных полей, также ряда статей [5-7]. В работе [7] рассмотрена задача оценки неизвестного параметра в периодическом коэффициенте сноса в условиях «слабого сигнала», то есть когда при коэффициенте сноса стоит малый параметр. В данной работе решается аналогичная задача, коэффициент сноса не является периодической функцией, но "зашумлён" нестационарным процессом Орнштейна-Уленбека со скачками. Наблюдения подвержены воздействию внешних помех диффузионного вида.

**Постановка задачи.** Рассматривается следующая задача: наблюдается  $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T/\varepsilon^2} = \{\varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) : 0 \leq t \leq T/\varepsilon^2\}$ , где  $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t)$  — траектория решения стохастического дифференциального уравнения с малым параметром при коэффициенте сноса

$$d\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) = \varepsilon A(\theta_0, \eta(t))dt + B(\eta(t))dW_1(t), \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(0) = \xi_0, \quad (1)$$

где  $W_1(s)$  — стандартный винеровский процесс. Внутренние возмущения описываются процессом  $\eta(t), t \geq 0$ , то есть  $\eta(t), t \geq 0$  — нестационарное решение однородного стохастического дифференциального уравнения со скачками [8]

$$d\eta(t) = -\mu\eta(t)dt + dZ(t) + \sigma dW(t), \quad (2)$$

где  $W(t)$  — стандартный винеровский процесс,  $Z(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \eta_k$  — сложный процесс Пуассона;  $\eta_1, \eta_2, \dots$  — последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с функцией распределения  $P\{\eta_k < x\} = F_{\eta}(x)$ , однородный пуассоновский процесс  $v(t)$  такой, что  $Mv(t) = \lambda t, \lambda > 0$ . Предполагается, что величины  $\eta_k, W(t), v(t)$  — взаимно независимые,  $\mu > 0, M\eta_k = a$ .

Характеристические функции процесса  $\eta(t)$ , и соответствующего ему эргодического распределения определяются следующими соотношениями [8]:

$$\phi_t(z) = \exp\{xe^{-\mu t}\} \exp\left\{\lambda \int_0^t [\phi_\eta(ze^{-\mu s}) - 1] ds\right\} \exp\left\{-\frac{z^2\sigma^2}{4\mu}[1 - e^{-\mu t}]\right\} \quad (3)$$

$$\phi(z) = \exp\left\{\lambda \int_0^\infty [\phi_\eta(ze^{-\mu s}) - 1] ds\right\} \exp\left\{-\frac{z^2\sigma^2}{4\mu}\right\} = \phi_\chi(z)\phi_\xi(z), \quad (4)$$

где  $\phi_\eta(z)$  – характеристическая функция величины  $\eta_k$ .

Эргодическое распределение процесса  $\eta(t)$  существует и является свёрткой распределений независимых случайных величин  $\xi$  и  $\chi$ , то есть

$$\psi(y) = F_{\xi+\chi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\mu-\infty}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{z-y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2/2\mu}} dx \right) dF_\chi(y),$$

откуда следует, что

$$|(F_{\xi+\chi}(z))'_z| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\mu}}} = C. \quad (5)$$

В работе [9] изучалась оценка скорости сближения функции распределения процесса  $\eta(t) : F_t(y) = P\{\eta(t) < y\}$  к функции эргодического распределения  $\psi(y)$ , установлено, что

$$\sup_y |F_t(y) - \psi(y)| \leq C_1 e^{-C_2 t}, \quad (6)$$

$$C_1 = \left[ b \left( 1 + e^{\frac{\sigma^2}{2\mu}} + \frac{2\lambda\sigma}{\mu} \exp\left\{\frac{\lambda\sigma}{\mu}\right\} \right) + bh(b) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sigma^2} \right], C_2 = \frac{\mu}{2},$$

где  $h(b)$  является корнем уравнения

$$\int_0^{\frac{h(b)}{4}} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8b}.$$

Далее  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, коэффициент сноса  $A(\theta_0, x)$  естественно интерпретировать как сигнал,  $\theta_0$  – неизвестный параметр, т.е. наблюдается "слабый" сигнал, "зашумлённый" как внутренне так и внешне диффузионным шумом. Будем предполагать, что неизвестный параметр  $\theta_0 \in Q$ , где  $Q$  – некоторое заданное параметрическое множество. Поставлена следующая задача: неизвестный параметр  $\theta_0$  надлежит оценить по  $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T/\varepsilon^2}$  – наблюдаемой на промежутке времени  $[0, T/\varepsilon^2]$  траектории решения уравнения (1), построить доверительный интервал  $\theta_\varepsilon - \delta_\varepsilon < \theta_0 < \theta_\varepsilon + \delta_\varepsilon$ , который покрывает неизвестный параметр  $\theta_0$  с вероятностью  $1 - \gamma_\varepsilon$ , где  $\delta_\varepsilon \rightarrow 0, \gamma_\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  должны быть выписаны в явном виде. Здесь  $\tilde{\theta}_\varepsilon^T$  – некоторая построенная по  $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T/\varepsilon^2}$  оценка неизвестного параметра.

Идея построения  $\tilde{\theta}_\varepsilon^T$  — оценки неизвестного параметра  $\theta_0$  и построения интервала накрытия базируется на том, что при наложенных ниже условиях случайный процесс  $\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2), 0 \leq t \leq T$ , где  $\xi_{\theta_0}^\varepsilon(t)$  — решение задачи (1) "близок" в смысле метрики

$$\rho(X, Y) = \left( \sup_{0 \leq t \leq T} M |X(t) - Y(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

к процессу

$$d\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(t) = \bar{A}(\theta_0)dt + \bar{B}d\widetilde{W}_\varepsilon(t), \bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(0) = 0, \quad (7)$$

где  $\bar{A}(\theta), \bar{B}$  — коэффициенты выражаются через  $A(\theta, x), B(x)$  коэффициенты уравнения следующим образом

$$\bar{A}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\theta, x)d\psi(x), \bar{B}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(x)d\psi(x), \quad (8)$$

Здесь  $\widetilde{W}_\varepsilon(t)$  — семейство стандартных винеровских процессов.

**Оценка скорости сближения решения.** Сформируем полученные результаты в виде теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия: функции  $A(\theta, x), B(x)$  непрерывны и ограничены

$$\sup_y |F_t(y) - \psi(y)| \leq C_1 e^{-C_2 t}, \quad \bar{A}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\theta, x)d\psi(x), \quad \bar{B}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(x)d\psi(x),$$

и  $|A(\theta, x)| \leq C < +\infty, |B^2(x)| \leq C < +\infty$ , тогда справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)]d\tau \right| \leq \varepsilon \left( \frac{8C^2 T C_1}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\begin{aligned} & M \left( \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)]d\tau \right)^2 = \\ & = 2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_s^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)]d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)]ds \end{aligned} \quad (10).$$

В правой части (10) возьмём условное математическое ожидание и снова воспользуемся (2)

$$2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_s^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)]d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)]ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= M2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} \{M[A(\theta_0, \eta_x(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)]/x = \eta(s)\} d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)] ds \leq \\
 &\leq 8C\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} M\{|MA(\theta_0, \eta_x(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)|/x = \eta(s)\} d\tau ds \leq \\
 &\leq 8C^2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} C_1 \exp\{-C_2[\tau - s]\} d\tau ds \leq \\
 &\leq \varepsilon^2 8C^2 TC_1 \int_0^{t/\varepsilon^2} \exp\{-C_2\alpha\} d\alpha \leq \frac{\varepsilon^2 8C^2 TC_1}{C_2}.
 \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (9), а вместе с тем и теорема 1 доказаны.  $\square$

Известен следующий результат [9].

**Теорема 2.** [9] Пусть  $\{\mu_t, \mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$  – непрерывный локальный мартингал, такой что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} [\mu, \mu]_t = \infty$ , а  $\tau_t = \inf\{s > 0 : [\mu, \mu]_s \geq \beta^2 t\}$  – конечный марковский момент для каждого  $t > 0$ . Тогда найдётся стандартный винеровский процесс  $W_t$ , такой, что выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M|\varepsilon\mu_{t/\varepsilon^2} - \beta\varepsilon W_{t/\varepsilon^2}|^2 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} M|\varepsilon^2 \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon^2} - \beta^2 t|. \quad (11)$$

В настоящем разделе в качестве  $\mu_t^\varepsilon$  будет взят процесс

$$\mu_t^\varepsilon = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} B(\eta(\tau)) dW(\tau), \text{ т.ч. } \varepsilon^2 \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon^2} = \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} B^2(\eta(\tau)) d\tau.$$

**Лемма 1.** Предположим, что

$$B^2(x) \leq C < +\infty, \bar{B}^2 = \int_0^1 B^2(x) d\psi(x), \bar{B} = \sqrt{\bar{B}^2}$$

справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}
 &\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} B((s)) dW_1(s) - \tilde{B}W_\varepsilon(t) \right|^2 \leq \\
 &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} B^2(\eta(s)) ds - t\bar{B}^2 \right| \leq \varepsilon \left( \frac{8C^2 TC_1}{C_2} \right)^{1/2} \quad (12).
 \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Применяя к левой части части формулу (11) из Теоремы 1, получим:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} B((s)) dW(s) - \tilde{B}W_\varepsilon(t) \right|^2 \leq$$

$$\leq \left( \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} B^2(\eta(s)) ds - t \overline{B^2} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \left( \frac{8C^2TC_1}{C_2} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Последнее неравенство доказывается аналогично (11).  $\square$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\mu - \infty}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{z-y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2/2\mu}} dx \right) dF_\chi(y),$$

$$|A(\theta, x)| \leq C < +\infty, B^2(x) \leq C < +\infty, \quad \overline{B^2} = \int_0^1 B^2(x) d\psi(x), \overline{B} = \sqrt{\overline{B^2}},$$

$$\overline{A}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\theta, x) d\psi(x), M|\xi_0|^2 \leq C < +\infty,$$

тогда справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M |\overline{\xi_{\theta_0}^\varepsilon}(t) - \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2)| \leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{TC_3}, \quad (14)$$

где

$$\sqrt{3} \left( C + \frac{8C^2C_1}{C_2} + \left( \frac{8C^2C_1}{C_2} \right)^{1/2} \right) = C_3. \quad (15)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Не нарушая общности будем считать  $T \geq 1, \varepsilon < 1$ .  
Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} M |\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \overline{\xi_{\theta_0}^\varepsilon}(t)|^2 &\leq 3M\varepsilon |\xi_0|^2 + 3 \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} A(\theta_0, \eta(s)) ds - t \overline{A}(\theta_0) \right|^2 + \\ &+ 3 \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} B(\eta(s)) dW(s) - \widetilde{B}W_\varepsilon(t) \right|^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M |\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \overline{\xi_{\theta_0}^\varepsilon}(t)|^2 \leq 3\varepsilon C + 3\varepsilon^2 \frac{8C^2TC_1}{C_2} + \varepsilon \left( \frac{8C^2TC_1}{C_2} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Отсюда следует утверждение теоремы 3.  $\square$

**Построение и свойства оценки квазимаксимального правдоподобия.**

Пусть  $(G_T, \mathfrak{R}_T)$  — измеримое пространство непрерывных функций  $\{x_t, 0 \leq t \leq T\}$  на  $[0, T]$  с  $\sigma$  — алгеброй  $\mathfrak{R}_T$ . Обозначим через  $\mu_\theta^T$  вероятностную меру на  $(G_T, \mathfrak{R}_T)$ , порождённую процессом  $\xi_\theta^\varepsilon(t) : 0 \leq t \leq T$ , где

$$d\overline{\xi_\theta^\varepsilon}(t) = \overline{A}(\theta) dt + \overline{B} d\widetilde{W}_\varepsilon(t), \overline{\xi_\theta^\varepsilon}(0) = 0.$$

Предположим сначала, что наблюдается  $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T} = \{\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) : 0 \leq t \leq T\}$  траектория решения (2) на промежутке времени  $[0, T]$ . Известно (см., например, [1]), что при  $\theta \in Q, \theta_0 \in Q$  логарифм отношения правдоподобия имеет вид:

$$\Lambda_T(\theta, \theta_0, \bar{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon, T}) = \ln \frac{d\mu_{\theta}^T}{d\mu_{\theta_0}^T}(\bar{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon, T}) = \int_0^T \frac{\bar{A}(\theta) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}} d\widetilde{W}_{\varepsilon}^{\varepsilon}(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \frac{\bar{A}(\theta) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}} \right]^2 dt,$$

где

$$d\widetilde{W}_{\varepsilon}^{\varepsilon}(t) = \frac{d\bar{\xi}_{\theta}^{\varepsilon}(t) - \bar{A}(\theta_0)dt}{\bar{B}},$$

$$\Lambda_T(\theta, \theta_0, \bar{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon, T}) = \frac{\bar{A}(\theta) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \bar{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon}(T) + \frac{\bar{A}^2(\theta_0)}{2\bar{B}^2} T - \frac{\bar{A}^2(\theta)}{2\bar{B}^2} T. \quad (18)$$

Отметим, что присутствующая в (18) величина  $\bar{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon}(T)$  не наблюдается, зато наблюдается близкая к ней величина  $\varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2)$ . Пусть  $\tilde{\theta}_{\varepsilon}^T$  — оценка квазиказимального правдоподобия, достигающая максимум функции

$$\Lambda(\theta, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2)) = \frac{\bar{A}(\theta) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2) + \frac{\bar{A}^2(\theta_0)}{2\bar{B}^2} T - \frac{\bar{A}^2(\theta)}{2\bar{B}^2} T,$$

$$\Lambda(\tilde{\theta}_{\varepsilon}^T, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2)) = \max_{\theta \in Q} \Lambda(\theta, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2)).$$

Подводя итоги, сформулируем теорему.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия теоремы 3 и к тому же для  $\bar{A}(\theta)$  справедливо неравенство

$$\inf_{|x| \geq r > 0} |\bar{A}(\theta_0 + x) - \bar{A}(\theta_0)| \geq \tilde{C}|r|^{\delta}, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad \tilde{C} > 0, \quad \theta_0 \in Q, \quad (\theta_0 + x) \in Q, \quad (19)$$

тогда для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  будем иметь

$$P\{\sqrt{T}|\tilde{\theta}_{\varepsilon}^T - \theta_0| > R\} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\varepsilon}C_3}{\gamma(\varepsilon)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\sqrt{K}}{\tilde{C}R^{\delta}T^{(1-\delta)/2} - 2\gamma(\varepsilon)} \exp \left\{ - \frac{[\tilde{C}R^{\delta}T^{(1-\delta)/2} - 2\gamma(\varepsilon)]^2}{8K} \right\}, \quad (20)$$

где  $C_3$  определено в (15),  $\tilde{C}R^{\delta}T^{(1-\delta)/2} - 2\gamma(\varepsilon) \geq 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\sqrt{T}(\tilde{\theta}_{\varepsilon}^T - \theta_0) = u$ , т.е.  $\theta_{\varepsilon}^T = \theta_0 + u/\sqrt{T}$ , тогда

$$P\{\sqrt{T}|\theta_{\varepsilon}^T - \theta_0| > R\} \leq$$

$$\leq P\left\{ \max_{|u| \geq R} \Lambda(\theta_0 + u/\sqrt{T}, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2)) \geq \Lambda(\theta_0, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2)) \right\} =$$

$$= P\left\{ \max_{|u| \geq R} \Lambda(\theta_0 + u/\sqrt{T}, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(T/\varepsilon^2)) \geq 0 \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq P \left\{ \sup_{|u| \geq R} \left| \frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \right| \left| \varepsilon \bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2) - \bar{\xi}_\theta^\varepsilon(T) \right| + \right. \\
 &+ \left. \sup_{|u| \geq R} \left( \frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T) + \frac{\bar{A}^2(\theta_0)}{2\bar{B}^2} T - \frac{\bar{A}^2(\theta_0 + u/\sqrt{T})}{2\bar{B}^2} T \right) \geq 0 \right\} \leq \\
 &\leq P \left\{ |\xi| \geq \frac{\tilde{C}|R/\sqrt{T}|^\delta \sqrt{T} - 2\gamma(\varepsilon)}{2\sqrt{K}} \right\} + \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\xi \sim N(0, 1)$  распределённая случайная величина. Отсюда с учётом элементарного неравенства для модуля гауссовской величины имеем неравенство (20). Теорема 4 доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Выбирая в (20)

$$\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0, R = R(\varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad T = T(\varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad \frac{R(\varepsilon)}{\sqrt{T(\varepsilon)}} \rightarrow 0, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\gamma(\varepsilon)} \rightarrow 0,$$

$$\tilde{C}R^\delta(\varepsilon)T^{(1-\delta)/2}(\varepsilon) - 2\gamma(\varepsilon) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда для произвольных достаточно малых  $\chi, \gamma$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  сможем добиться, что:

$$\frac{R(\varepsilon)}{\sqrt{T(\varepsilon)}} \leq \gamma, \quad \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\sqrt{K}}{\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{[\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)]^2}{8K} \right\} \leq \chi.$$

Отсюда следует:  $P\{|\theta_\varepsilon^T(\varepsilon) - \theta_0| \leq \gamma\} \geq 1 - \chi$ . Интеграл накрытия построен.

**Замечание.** Справедливости ради отметим, что в случае, если  $\bar{A}(\theta_0)$  — постоянная, доверительный интервал можно построить значительно проще. Действительно, пусть выполняются условия Теоремы 3 и к тому же для  $\bar{A}(\theta_0)$  справедливо неравенство (19), тогда если справедливо  $\tilde{C}R^\delta T^{(1-\delta)/2} - \gamma(\varepsilon) \geq 1$ , для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  будем иметь

$$\begin{aligned}
 &P\{\sqrt{T}|\theta_\varepsilon^T - \theta_0| > R\} \leq \\
 &\leq \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{[\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)]^2}{8K} \right\}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где  $C_3$  определено в (15),  $\tilde{\theta}_\varepsilon^T$  — оценка квазимаксимального правдоподобия.

Действительно, заметим, что процесс  $\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(t)$  будет гауссовским со средним  $\bar{A}(\theta_0)t$  и дисперсией  $M\bar{B}^2 \tilde{W}_\varepsilon^2(t) = \bar{B}^2 t$ , откуда

$$\sqrt{T} \left[ \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - A(\theta_0) \right] \frac{1}{\bar{B}} = \xi \sim N(0, 1), \theta_\varepsilon^T = \arg \min_{\theta \in Q} \left[ \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - A(\theta) \right]^2 -$$

оценка максимального правдоподобия, очевидно, что

$$\theta_\varepsilon^T = \arg \max_{\theta \in Q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sqrt{T} \left[ \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - \bar{A}(\theta_0) \right] \frac{1}{B} \right]^2 \right\} = \arg \min_{\theta \in Q} \left[ \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - A(\theta) \right]^2.$$

Пусть  $\tilde{\theta}_\varepsilon^T$  — оценка квазimaxимального правдоподобия, которая находится из условия:

$$\tilde{\theta}_\varepsilon^T = \arg \min_{\theta \in Q} \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - A(\theta) \right|,$$

Тогда так как с вероятностью 1 справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - A(\tilde{\theta}_\varepsilon^T) \right| &\leq \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - A(\theta_0) \right|, \\ \left| \left[ \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} \right] + \left[ \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - A(\theta_0) \right] - [A(\tilde{\theta}_\varepsilon^T) - A(\theta_0)] \right| &\leq \\ &\leq \left| \left[ \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} \right] + \left[ \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - A(\theta_0) \right] \right|, \\ |A(\tilde{\theta}_\varepsilon^T) - A(\theta_0)| - \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} \right| - \left| \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - A(\theta_0) \right| &\leq \\ &\leq \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} \right| + \left| \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} - A(\theta_0) \right|, \\ |A(\tilde{\theta}_\varepsilon^T) - A(\theta_0)| &\leq 2 \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} \right| + 2 \frac{|\xi| |\bar{B}|}{\sqrt{T}}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} P\{|\tilde{\theta}_\varepsilon^T - \theta_0| > R/\sqrt{T}\} &= P\{|\tilde{C}|\tilde{\theta}_\varepsilon^T - \theta_0|^\delta > \tilde{C}R^\delta/T^{\frac{\delta}{2}}\} = \\ &= P\{|A(\tilde{\theta}_\varepsilon^T) - \bar{A}(\theta_0)| > \tilde{C}R^\delta T^{-\frac{\delta}{2}}\} \leq \\ &\leq P\left\{ \left| \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2) - \bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T) \right| > \sqrt{T} 2\gamma(\varepsilon) \right\} + P\left\{ |\xi| > \frac{\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)}{2\sqrt{K}} \right\}. \end{aligned}$$

Откуда с учётом оценки (14) и элементарного неравенства для модуля гауссовской величины имеем (22).

**Выводы.** В работе рассмотрена задача оценки неизвестного параметра, входящего в коэффициент сноса стохастического дифференциала. Стоящий при коэффициенте сноса малый параметр делает такую модель пригодной для описания слабых сигналов, внутренне зашумлённых процессом Орнштейна-Уленбека со скачками и диффузионной частью и внешним диффузионным зашумлением. Показано, что наблюдаемый процесс «близок» потраекторно к некоторому гауссовскому процессу, который не наблюдается, но для которого возможно применить метод максимального правдоподобия для оценки неизвестного параметра. Вводится понятие оценки квазimaxимального правдоподобия. Наблюдая такой процесс достаточно долгое время,

по этой оценке всё же удаётся построить достаточно «узкий» интервал гарантийного накрытия неизвестного параметра.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский – М.: Наука, 1979. – 528 с.
2. Линьков Ю. Н. Асимптотические методы статистики случайных процессов / Ю. Н. Линьков – Киев: Наукова Думка, 1993. – 254 с.
3. Лищер Р. Ш. Статистика случайных процессов / Р. Ш. Лищер, А. Н. Ширяев – М.: Наука, 1974. – 696 с.
4. Кнопов П. С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем / П. С. Кнопов – Киев: Наукова Думка, 1981. – 151 с.
5. Bhattacharya R. A. Central limit theorem for diffusions with periodic coefficients / R. A. Bhattacharya // Ann. Probab. – 1985. – V. 13. – №2. – P.385-396.
6. Сафронова О. А. Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами / О. А. Сафронова // Украинский математический журнал. – 1992. – Т. 44. – С. 245–252.
7. Бондарев Б. В. Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом / Б. В. Бондарев, С. М. Козырь // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 3. – С. 109–117.
8. Сенаторов О. С. Оценка скорости сходимости процесса Орнштейна-Уленбека со скачками к эргодическому распределению / О. С. Сенаторов // Прикладная статистика. Актуарна та фінансова математика – 2012. – № 2. – С. 165–169.
9. Бондарев Б. В. Оценка скорости сходимости в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем / Б. В. Бондарев, Е. Е. Ковтун // Украинский математический журнал. – 2005. – Т. 57, № 4. – С. 435–457.

*Поступила в редакцию 02.10.2017 г.*

#### ESTIMATION OF THE UNKNOWN PARAMETER IN SYSTEMS WITH A WEAK SIGNAL WITH INTERNAL AND EXTERNAL NOISES

*B. V. Bondarev, Y. O. Kurilina*

Observations on the noisy parametric family of functions occur with diffusion errors. And internal noises are modeled by the Ornstein-Uhlenbeck process. A confidence interval for an unknown parameter with a predetermined warranty is constructed. reliability.

**Keywords:** parameter estimation, maximum likelihood method, density of measures, coverage interval.

**Бондарев Борис Владимирович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" (г. Донецк), кафедра теории вероятностей и математической статистики  
83001, пр. Гурова, 14,  
E-mail: bondarev.mart@gmail.com

**Bondarev Boris Vladimirovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Full Professor,  
Donetsk National University, Donetsk

**Курилина Юлия Олеговна**

ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет" (г. Донецк), аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики  
E-mail: netakayainesamaya@gmail.com

**Kurilina Yulia Olegovna**

Donetsk National University, Donetsk  
Postgraduate student at the Department  
of probability theory and mathematical statistics

УДК 519.21

## УСРЕДНЕНИЕ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ БЫСТРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ

© 2017. *Б. В. Бондарев, С. А. Майорова*

Рассмотрена краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, где коэффициентом при производных является быстро осциллирующая случайная функция, а внешнее воздействие – неслучайная функция, сложенная с быстро осциллирующим случайным воздействием, которое является "физическим" белым шумом. Получена оценка для нормированных флуктуаций решения исходной стохастической задачи относительно некоторого приближенного решения исходной задачи, имеющего более простой вид.

**Ключевые слова:** краевая задача, процесс Орнштейна-Уленбека, "физический" белый шум, экспоненциальная оценка.

**Введение.** В данной работе рассматривается краевая задача, где коэффициент при производной – быстро осциллирующая периодическая случайная функция, а внешнее воздействие – неслучайная функция, сложенная с быстро осциллирующим случайным воздействием, которое является "физическим" белым шумом. Интерес к таким задачам связан с тем, что во многих областях современной техники широко применяются композитные материалы, имеющие периодическую структуру, а математические модели процессов, протекающих в таких материалах, как правило, описываются уравнениями с быстро осциллирующими случайными коэффициентами. Работы [1-9] посвящены усреднению в системах стохастических эллиптических уравнений, а также оценке скорости сходимости в принципе усреднения в системах с быстрыми осцилляциями. Мы использовали принципы, рассматриваемые в этих работах, но для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. С современными детерминированными постановками аналогов таких задач можно ознакомиться по работам [10-15]. В работах [1-9] найдены естественные ограничения на коэффициенты операторов, обеспечивающие сближение решений уравнений в частных производных с быстро осциллирующими по пространственной переменной случайными коэффициентами с решениями соответствующих усредненных уравнений. В работах [8], [9] находится скорость сближения решения исходной задачи с решением задачи усредненной. В данной работе решается аналогичная задача об оценке скорости сближения решения исходного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, находящегося под воздействием внешних быстро осциллирующих случайных помех, при неслучайных внутренних периодических быстрых осцилляциях с некоторым приближенным решением, имеющим более простую структуру.

**Постановка задачи.** Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dU_\varepsilon}{dx} \right] = f(x) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad U_\varepsilon(0) = U_\varepsilon(1) = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр. Задачей (1) может описываться, например, стационарное температурное поле в сложной среде с быстроменяющимся коэффициентом

теплопроводности  $K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , если источник распределен по закону  $f(x)$  при наложении быстроосциллирующих флуктуаций  $\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $x \in [0, 1]$ , причем стационарный в узком смысле процесс  $\eta(t)$  такой, что  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  является "физическим" белым шумом, то есть допускает представление Д.О. Чикина [16, 17]

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = W_\varepsilon(t) + \rho_\varepsilon(t), \quad (2)$$

где  $P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\rho_\varepsilon(t)| > \delta_\varepsilon\} \leq \gamma_\varepsilon$ ,  $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выписаны в явном виде, а  $W_\varepsilon(t)$  – стандартный винеровский процесс. В дальнейшем в качестве  $\eta(t)$  будет взят классический процесс Л. Орнштейна-Дж. Уленбека с параметрами  $\gamma, \sigma$

$$d\eta(t) = -\gamma\eta(t) dt + \sigma dW(t).$$

Пусть  $K(x)$  – периодическая с периодом 1 функция, удовлетворяющая условию

$$0 < k_0 \leq K(x) \leq k_1 < +\infty. \quad (3)$$

Регулярная составляющая температурного поля  $f(x)$  такая, что

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq f_0 < +\infty. \quad (4)$$

Наряду с краевой задачей (1) рассмотрим «усредненную» краевую задачу

$$\bar{k} \frac{d^2 U_0}{dx^2} = f(x), \quad U_0(0) = U_0(1) = 0, \quad \bar{k} = \left( \int_0^1 \frac{dt}{K(t)} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Покажем, что решение задачи (1)  $U_\varepsilon(x)$  близко к

$$U_\varepsilon^1(x) = U_0(x) + \varepsilon N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dU_0}{dx} + \int_0^1 G_\varepsilon(x, y) dW_\varepsilon(y), \quad N(x) = \int_0^x \left( \frac{\bar{k}}{K(y)} - 1 \right) dy, \quad (6)$$

где  $U_0(x)$  – классическое решение задачи (5), которое определяется формулой

$$U_0(x) = \frac{1-x}{\bar{k}} \int_0^x f(y) dy + \frac{x}{\bar{k}} \int_x^1 (1-y) f(y) dy,$$

$G_\varepsilon(x, y)$  – функция Дж. Грина задачи (1). После этого установим оценку

$$U_\varepsilon^2(x) = U_0(x) + \varepsilon N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dU_0}{dx} - \int_0^x \frac{y}{\bar{k}} dW_\varepsilon(y) - \frac{x}{\bar{k}} \int_x^1 dW_\varepsilon(y) + x \int_0^1 \frac{y}{\bar{k}} dW_\varepsilon(y).$$

Несмотря на то, что в данном случае функция Дж. Грина выписывается в явном виде [18]

$$G_\varepsilon(y, x) = \begin{cases} -g_\varepsilon(y) + \frac{g_\varepsilon(y)g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)}, & 0 \leq y \leq x; \\ -g_\varepsilon(x) + \frac{g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(y)}{g_\varepsilon(1)}, & x \leq y \leq 1, \end{cases}$$

где

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon \int_0^{x/\varepsilon} \frac{dt}{K(t)}, \quad G_\varepsilon(y, x) = G_\varepsilon(x, y),$$

для оценки сближения решения исходной задачи (1) и приближенного решения (6) будем использовать метод разложения по малому параметру Н.С. Бахвалова и Г.П. Панасенко [6]. Результаты работы представлены в следующей теореме.

**Теорема.** Пусть выполняются условия

$$0 < k_0 \leq K(x) \leq k_1 < +\infty, \quad \int_0^1 f^2(x)dx \leq f_0 < +\infty,$$

тогда справедлива оценка

$$P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^2(x)| \geq \sqrt[4]{\varepsilon} \right\} \leq \gamma_\varepsilon + \frac{16k_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{k_0^2} + \frac{13\sqrt{\varepsilon}}{k_0},$$

где

$$\gamma_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2 K_\varepsilon^2}{16\sigma^2 \sqrt{\varepsilon}} [e^{2\gamma} - 1]^{-1} \right\} + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} K_\varepsilon \gamma}{4\sigma \sqrt[4]{\varepsilon}} \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} K_\varepsilon \gamma}{4\sigma \sqrt[4]{\varepsilon}} \right]^2 \right\},$$

$$K_\varepsilon = \left[ 1 - \sqrt[4]{\varepsilon^3} \left( \frac{4k_1^2}{k_0^2} + \frac{5k_1}{k_0} \right) \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \frac{\sqrt{f_0}}{k_0} - \sqrt[4]{\varepsilon} \right] \left( \frac{5}{k_0} + \frac{4k_1}{k_0^2} \right)^{-1}.$$

Доказательство. Запишем (1) в виде

$$d \left[ K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{dU_\varepsilon}{dx} \right] = d \int_0^x f(y)dy + d \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta \left( \frac{y}{\varepsilon} \right) dy.$$

Продифференцируем выражение (6) по  $x$ , умножим результат на  $K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$  и продифференцируем. По свойству функции Дж. Грина

$$d \int_0^1 K \left( \frac{z}{\varepsilon} \right) \frac{\partial G_\varepsilon(z, y)}{\partial x} dW_\varepsilon(y) = dW_\varepsilon(y),$$

то

$$d \left[ K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{dU_\varepsilon^1}{dx} \right] = \varepsilon d \left[ K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) N \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] + dW_\varepsilon(x) + d \int_0^x f(y)dy.$$

Нетрудно убедиться в том, что для разности решений  $U_\varepsilon - U_\varepsilon^1$  справедливо соотношение

$$d \left( K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d[U_\varepsilon - U_\varepsilon^1]}{dx} \right) = d \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta \left( \frac{y}{\varepsilon} \right) dy - \varepsilon d \left[ K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) N \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] - dW_\varepsilon(x), \quad (7)$$

где

$$\left| N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq \int_{\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]}^{\frac{x}{\varepsilon}} \left| \frac{\bar{k}}{K(y)} - 1 \right| dy \leq 1 + \frac{k_1}{k_0}, \quad \left| K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq k_1 \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right).$$

Из соотношения (7) с учетом (2) получаем

$$d\left( K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d[U_\varepsilon - U_\varepsilon^1]}{dx} \right) = d\rho_\varepsilon(x) - \varepsilon d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right],$$

откуда

$$U_\varepsilon - U_\varepsilon^1 = \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\rho_\varepsilon(t) - \varepsilon \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right].$$

Далее

$$\int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\rho_\varepsilon(t) = -g_\varepsilon(x) \int_0^x d\rho_\varepsilon(t) - \int_x^1 g_\varepsilon(t) d\rho_\varepsilon(t) + \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^1 g_\varepsilon(t) d\rho_\varepsilon(t),$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] &= - \int_0^x g_\varepsilon(x) d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] - \\ &- g_\varepsilon(t) \int_x^1 d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] + \frac{g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^1 g_\varepsilon(x) d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы по  $\rho_\varepsilon(t)$ . Справедливы оценки

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} | -g_\varepsilon(x) \rho_\varepsilon(x) | = \frac{1}{k_0} \sup_{0 \leq x \leq 1} | \rho_\varepsilon(x) |.$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} | g_\varepsilon(x) \rho_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(1) \rho_\varepsilon(1) + \int_x^1 \rho_\varepsilon(t) dg_\varepsilon(t) | \leq \frac{3}{k_0} \sup_{0 \leq x \leq 1} | \rho_\varepsilon(x) |,$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{(g_\varepsilon(x))^2}{g_\varepsilon(1)} \rho_\varepsilon(x) - \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^x \rho_\varepsilon(t) dg_\varepsilon(t) \right| \leq \frac{2k_1}{k_0^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} | \rho_\varepsilon(x) |,$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \left| -\frac{(g_\varepsilon(x))^2}{g_\varepsilon(1)} \rho_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) \rho_\varepsilon(1) - \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_x^1 \rho_\varepsilon(t) dg_\varepsilon(t) \right| \leq \left( \frac{2k_1}{k_0^2} + \frac{1}{k_0} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} | \rho_\varepsilon(x) |.$$

То есть,

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\rho_\varepsilon(t) \right| \leq \left( \frac{5}{k_0} + \frac{4k_1}{k_0^2} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} | \rho_\varepsilon(x) |.$$

Рассмотрим интегралы по  $\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right]$ . Имеют место оценки

$$\sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| -g_\varepsilon(t) \int_x^1 d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] \right| \leq \frac{2k_1}{k_0} \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right|,$$

$$\sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| - \int_0^x g_\varepsilon(x) d\left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] \right| \leq \frac{2k_1}{k_0} \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right|,$$

$$\sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \frac{g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^x g_\varepsilon(x) d \left[ K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) N \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] \right| \leq \frac{2k_1^2}{k_0^2} \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right|,$$

$$\sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \frac{g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)} \int_x^1 g_\varepsilon(x) d \left[ K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) N \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] \right| \leq \left( \frac{2k_1^2}{k_0^2} + \frac{k_1}{k_0} \right) \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right|.$$

Так как

$$\left| \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right| = \left| \frac{f(x)}{k} \right| \leq \frac{\sqrt{f_0}}{k_0},$$

получаем следующую оценку

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^1(x)| \leq \left( \frac{5}{k_0} + \frac{4k_1}{k_0^2} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| + \left( \frac{4k_1^2}{k_0^2} + \frac{k_1}{k_0} \right) \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \frac{\sqrt{f_0}}{k_0}. \quad (8)$$

Рассмотрим последний интеграл в выражении (6)

$$\int_0^1 G_\varepsilon(x, y) dW_\varepsilon(y) = - \int_0^x g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y) - g_\varepsilon(x) \int_x^1 dW_\varepsilon(y) + \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^1 g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y),$$

$$g_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \frac{ds}{K(s)} = \varepsilon \int_0^{[t/\varepsilon]} \frac{ds}{K(s)} + \varepsilon \int_{[t/\varepsilon]}^{t/\varepsilon} \frac{ds}{K(s)}.$$

Так как функция  $K(x)$  – периодическая с периодом 1, то

$$\int_0^1 \frac{ds}{K(s)} = \int_1^2 \frac{ds}{K(s)} = \dots = \frac{1}{k}$$

и таких интегралов будет  $[\frac{t}{\varepsilon}]$ . Значит,

$$\left| \varepsilon \int_0^{[t/\varepsilon]} \frac{ds}{K(s)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k} \left[ \frac{t}{\varepsilon} \right] \leq \frac{t}{k} \text{ и } \left| \left[ \frac{t}{\varepsilon} \right] - \frac{t}{\varepsilon} \right| < 1,$$

получаем

$$\left| g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{k_0} < \frac{2\varepsilon}{k_0}. \quad (9)$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon - U_\varepsilon^2(x)| &= \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^1(x) + U_\varepsilon^1(x) + U_\varepsilon^2(x)| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon - U_\varepsilon^1(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon^1 - U_\varepsilon^2(x)|. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно интеграл  $\int_0^x g_\varepsilon(t) dW_\varepsilon(t)$ . Его можно записать как

$$\int_0^x g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y) = \int_0^x \left[ g_\varepsilon(y) - \frac{y}{k} \right] dW_\varepsilon(y) + \frac{1}{k} \int_0^x y dW_\varepsilon(y).$$

Исходя из неравенства Дж. Дуба

$$P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq T} |S(t)| \geq \lambda \right\} \leq \frac{1}{\lambda^p} M [|S(t)|^p], \quad p \geq 1, T \geq 0, \lambda > 0, S(t) - \text{мартингал,}$$

и неравенства О. Гельдера

$$M|XY| \leq (M|X|^p)^{1/p} \cdot (M|Y|^q)^{1/q}, \quad \forall X \in L^p, Y \in L^q,$$

можем записать

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x \left( g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right) dW_\varepsilon(t) \right| \leq \left( 4 \sup_{0 \leq x \leq 1} M \left| \int_0^x \left( g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right) dW_\varepsilon(t) \right|^2 \right)^{1/2};$$

$$M \left| \int_0^x \left( g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right) dW_\varepsilon(t) \right|^2 = \int_0^1 \left( g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right)^2 dt;$$

$$\left( g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right)^2 = \left( \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \frac{ds}{K(s)} - \frac{t}{k} \right)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{k^2}; \quad \int_0^1 \left( g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right)^2 dt \leq \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{k^2} dt = \frac{\varepsilon^2}{k^2}.$$

Следовательно,

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x \left( g_\varepsilon(t) - \frac{t}{k} \right) dW_\varepsilon(t) \right| \leq \left( 4 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right)^{1/2} = \frac{2\varepsilon}{k} < \frac{2\varepsilon}{k_0};$$

$$M \left| \int_0^x g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y) - \frac{1}{k} \int_0^x y dW_\varepsilon(y) \right| \leq \left( M \int_0^x [g_\varepsilon(y) - \frac{y}{k}]^2 dy \right)^{1/2} \leq \frac{2\varepsilon}{k_0}.$$

Аналогично,

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} |W_\varepsilon(1) - W_\varepsilon(x)| \leq \left( 2M \sup_{0 \leq x \leq 1} |W_\varepsilon(x)|^2 \right)^{1/2} = \left( 8 \sup_{0 \leq x \leq 1} M |W_\varepsilon(x)|^2 \right)^{1/2} < 3$$

и из оценки (9)

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} \right| \leq M \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{2\varepsilon}{k} < \frac{2\varepsilon}{k_0},$$

$$g_\varepsilon(x) \int_x^1 dW_\varepsilon(y) = \left[ g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} \right] \int_x^1 dW_\varepsilon(y) + \frac{x}{k} \int_x^1 dW_\varepsilon(y),$$

тогда

$$M \left| g_\varepsilon(x) \int_x^1 dW_\varepsilon(y) - \frac{x}{k} \int_x^1 dW_\varepsilon(y) \right| \leq \frac{3\varepsilon}{k_0}.$$

Наконец

$$\begin{aligned} \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^1 g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y) &= \frac{g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} + \frac{x}{k}}{g_\varepsilon(1) - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}} \left[ \int_0^1 \left[ g_\varepsilon(y) - \frac{y}{k} \right] dW_\varepsilon(y) + \int_0^1 \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) \right] \leq \frac{4k_1\varepsilon}{k_0}; \\ \left( M \left[ \int_0^1 \left[ g_\varepsilon(y) - \frac{y}{k} \right] dW_\varepsilon(y) \right]^2 \right)^{1/2} &= \left( \int_0^1 \left[ g_\varepsilon(y) - \frac{y}{k} \right]^2 dy \right)^{1/2} \leq \frac{2\varepsilon}{k_0}; \\ M \left| \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^1 g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y) - x \int_0^1 \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) \right| &\leq \frac{4k_1\varepsilon}{k_0} \frac{2\varepsilon}{k_0} + \frac{2\varepsilon}{k_0}. \end{aligned}$$

Теперь можем записать неравенство

$$\begin{aligned} M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G_\varepsilon(x, y) dW_\varepsilon(y) + \int_0^x \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) + \frac{x}{k} \int_x^1 dW_\varepsilon(y) - x \int_0^1 \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) \right| &\leq \\ &\leq \frac{16k_1\varepsilon^2}{k_0^2} + \frac{13\varepsilon}{k_0}. \end{aligned}$$

Откуда следует

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon^1 - U_\varepsilon^2(x)| \leq \frac{16k_1\varepsilon^2}{k_0^2} + \frac{13\varepsilon}{k_0}, \quad (10)$$

то есть

$$\begin{aligned} M \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon - U_\varepsilon^2(x)| &= M \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\rho_\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon M \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d \left[ K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) N \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] + M \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon^1 - U_\varepsilon^2(x)|. \end{aligned}$$

Учитывая (8), (10), запишем и оценим вероятность

$$\begin{aligned} &P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^2(x)| \geq \tau_\varepsilon \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ \left( \frac{5}{k_0} + \frac{4k_1}{k_0^2} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| + \varepsilon \left( \frac{4k_1^2}{k_0^2} + \frac{5k_1}{k_0} \right) \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \frac{\sqrt{f_0}}{k_0} + \sqrt{\varepsilon} \geq \tau_\varepsilon \right\} + \\ &\quad + \frac{16k_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{k_0^2} + \frac{13\sqrt{\varepsilon}}{k_0} = \\ &= P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| \geq \left[ \tau_\varepsilon - \varepsilon \left( \frac{4k_1^2}{k_0^2} + \frac{5k_1}{k_0} \right) \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \frac{\sqrt{f_0}}{k_0} - \sqrt{\varepsilon} \right] \left( \frac{5}{k_0} + \frac{4k_1}{k_0^2} \right)^{-1} \right\} + \\ &\quad + \frac{16k_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{k_0^2} + \frac{13\sqrt{\varepsilon}}{k_0}. \end{aligned}$$

Известно [20], что

$$P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| > \delta \right\} = P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \sqrt{\varepsilon} \frac{\eta(0) - \eta(x/\varepsilon)}{\gamma} \right| > \delta \right\} \leq \\ \leq \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{\delta^2 \gamma^2}{16 \varepsilon \sigma^2} [e^{2\gamma} - 1]^{-1} \right\} + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} \gamma \delta}{4\sigma \sqrt{\varepsilon}} \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} \gamma \delta}{4\sigma \sqrt{\varepsilon}} \right]^2 \right\}.$$

Выберем  $\tau_\varepsilon = \sqrt[4]{\varepsilon}$ , тогда

$$\delta_\varepsilon = \left[ \tau_\varepsilon - \varepsilon \left( \frac{4k_1^2}{k_0^2} + \frac{5k_1}{k_0} \right) \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} \right) \frac{\sqrt{f_0}}{k_0} - \sqrt{\varepsilon} \right] \cdot \left( \frac{5}{k_0} + \frac{4k_1}{k_0^2} \right)^{-1} = \sqrt[4]{\varepsilon} K_\varepsilon,$$

$$P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^2(x)| \geq \tau_\varepsilon \right\} \leq P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| \geq \delta_\varepsilon \right\} \leq \gamma_\varepsilon + \frac{16k_1 \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{k_0^2} + \frac{13\sqrt{\varepsilon}}{k_0},$$

где

$$\gamma_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2 K_\varepsilon^2}{16 \sqrt{\varepsilon} \sigma^2} [e^{2\gamma} - 1]^{-1} \right\} + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} \gamma K_\varepsilon}{4\sigma \sqrt[4]{\varepsilon}} \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} \gamma K_\varepsilon}{4\sigma \sqrt[4]{\varepsilon}} \right]^2 \right\},$$

$$K_\varepsilon \rightarrow \left( \frac{5}{k_0} + \frac{4k_1}{k_0^2} \right)^{-1}, \quad \gamma_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что  $U_\varepsilon^2(x)$  состоит из суммы детерминированной функции, имеющей на границах отрезка  $[0, 1]$  нулевые значения, и некоторого гауссовского процесса типа "броуновского моста", который обладает таким же свойством, причем распределение которого выписывается. То есть, распределение  $U_\varepsilon^2(x)$  также легко подсчитывается. Таким образом,  $U_\varepsilon^2(x)$  можно интерпретировать как случайный мост, с закрепленными в концах отрезка  $[0, 1]$  концами с известным распределением. Можно вычислить, например, его минимальное и максимальные значения, а именно их распределения. Нетрудно заметить, что  $U_\varepsilon(x)$  – также "мост", но с неизвестным распределением, вернее распределением, которое мы не можем подсчитать. Утверждение теоремы состоит в том, что значение "истинного" моста не уклонится от приближения  $U_\varepsilon^2(x)$  более, чем на  $\sqrt[4]{\varepsilon}$ . И это утверждение верно в  $\phi \cdot 100$  процентах случаев, где

$$\phi = \left[ 1 - \left( \gamma_\varepsilon + \frac{16k_1 \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{k_0^2} + \frac{13\sqrt{\varepsilon}}{k_0} \right) \right].$$

**Выводы.** Для нормированных флуктуаций решения исходной краевой задачи относительно решения соответствующей детерминированной усредненной задачи установлена оценка экспоненциального типа, что позволяет говорить о достаточно высокой скорости сходимости при усреднении.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов С.М. Осреднение случайных структур / С.М. Козлов // Докл. АН СССР.– 1978. – Т. 241, № 5. – С. 1016–1019.
2. Юринский В.В. О погрешности усреднения многомерной диффузии / В.В. Юринский // Теория вероятностей и ее применения.– 1988. – Т. 33, вып. 1. – С. 14–24.
3. Жауров Ю.В. Асимптотика флуктуаций в схеме усреднения для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами / Ю.В. Жауров // Теория случайн. процессов. – 1983. – Вып. 11. – С. 31–38.
4. Пожидаев А.В. Скорость сходимости в принципе усреднения для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами / А.В. Пожидаев // Теория случайн. процессов. – 1984. – Вып. 12. – С. 59–63.
5. Пожидаев А.В. О погрешности усреднения симметричных эллиптических систем / А.В. Пожидаев, В.В. Юринский // Изв. АН СССР. Сер. математики. – 1989. – Т. 53, № 4. – С.851–867.
6. Бахвалов Н.С. Усреднение процессов в периодических средах / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
7. Бондарев Б.В. Об усреднении в периодических средах при слабо зависимых случайных взаимодействиях. I / Б.В. Бондарев // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – № 45. – С. 12–20.
8. Бондарев Б.В. Про усереднення в періодичних середовищах при слабо залежних випадкових впливах / Б.В. Бондарев // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 46. – С. 18–24.
9. Bensoussan A. Asymptotic analysis of periodic structures / A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. – North-Holland Publishing Company. – 1978. – 700 p.
10. Борисов Д.И. Асимптотика решений эллиптических систем с быстроосциллирующими коэффициентами / Д.И. Борисов // Алгебра и анализ. – 2008. – Т. 20, № 2. – С. 19–42.
11. Малахова И.С. Краевая задача для эллиптического уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами в трёхмерном случае / И.С. Малахова // Челябинский физико-математический журнал, Изд-во Челябинский государственный университет (Челябинск). – 2011. – № 27. – С. 85–93.
12. Назаров С.А. Осреднение смешанной краевой задачи в области с анизотропной фрактальной перфорацией / С.А. Назаров, А.С. Слуцкий // Известия РАН, сер. матем. – 2010. – Т. 74, № 2. – С. 165–194.
13. Leugering G.R. Asymptotic analysis of 3D thin anisotropic plates with a piezoelectric patch / G.R. Leugering, S.A. Nazarov, A.S. Slutskiy // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2012. – V. 35, № 6. – P. 633–658.
14. Мешкова Ю.М. Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами / Ю.М. Мешкова // Алгебра и анализ. – 2013. – Вып. 25, № 6. – С. 125–177.
15. Мешкова Ю.М. Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем / Ю.М. Мешкова, Т.А. Суслина // Функци. анализ и его прил. – 2015. – Вып. 49, № 1. – С. 88–93.
16. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов: Том 2. пер. с англ. / Ж. Жакод, А.Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 1994. – 368 с.
17. Чикин Д.О. Функциональная предельная теорема для стационарных процессов: мартингалный подход / Д.О. Чикин // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – Т. 14, № 4. – С. 731–741.
18. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский, С.Г. Михлин, Л.С. Раковщик, В.Я. Стеценко. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
19. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Киев: Наукова Думка, 1982. – 612 с.
20. Баев А.В. Принцип инвариантности для одного класса стационарных марковских процессов. Оценка скорости сближения / А.В. Баев, Б.В. Бондарев // Вісник Донецького університету, сер А: Природничі науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 7–17.

*Поступила в редакцию 12.04.2017 г.*

THE AVERAGE OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR AN ORDINARY  
SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION UNDER THE EFFECTS OF THE  
RAPID RANDOM OSCILLATIONS

*B. V. Bondarev, S. A. Maiorova*

We considered boundary-value problem for an ordinary second-order differential equation where the coefficient for derivatives is rapidly oscillating random function and external influence is non-random function, added with rapidly oscillating random effect being a "physical" white noise. The estimate for normalized fluctuations of the initial stochastic problem solution was found, moreover, the solution was set out in the simple view.

**Keywords:** boundary-value problem, Ornstein-Uhlenbeck process, "physical" white noise, exponential estimate.

**Бондарев Борис Владимирович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"  
(г. Донецк), кафедра теории вероятностей и  
математической статистики  
83001, пр. Гурова, 14  
E-mail: bondarev.mart@gmail.com

**Bondarev Boris Vladimirovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Full Professor,  
Donetsk National University, Donetsk

**Майорова Светлана Андреевна**

ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"  
(г. Донецк), аспирант кафедры теории вероятностей  
и математической статистики  
E-mail: svetlana\_mayorova@mail.ua

**Maiorova Svetlana Andreevna**

Donetsk National University, Donetsk  
Postgraduate student at the Department  
of probability theory and mathematical statistics

УДК 517.5

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕКОМПАКТНОГО ТИПА

© 2017. Н. П. Волчкова

Изучаются асимптотические свойства сферических функций на симметрических пространствах. Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для сферических функций и их обобщений на римановых симметрических пространствах ранга один некомпактного типа.

**Ключевые слова:** асимптотический ряд, сферические функции, гипергеометрическая функция, симметрические пространства.

**Введение.** Асимптотические свойства различных специальных функций играют важную роль в анализе и приложениях. В настоящее время развиты некоторые общие методы, позволяющие существенно продвинуться в этом направлении (см., например, [1–3]). Вместе с тем остается еще много вопросов, требующих выяснения. В частности, в некоторых задачах интегральной геометрии важное значение имеет нахождение асимптотических рядов типа Бесселя для сферических функций на симметрических пространствах.

Сферическая функция на вещественном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеет вид

$$x \rightarrow \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{(\lambda|x|)^{\frac{n}{2}-1}}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – некоторое комплексное число,  $|x|$  – евклидова норма вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $J_\nu$  – функция Бесселя первого рода с индексом  $\nu$  (см. [4, гл. 4, § 2]). Функция (1) является радиальной собственной функцией оператора

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad (2)$$

который порождает алгебру всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в  $\mathbb{R}^n$ , коммутирующих со всеми движениями  $\mathbb{R}^n$ . (Напомним, что движением  $\mathbb{R}^n$  называется неоднородное линейное преобразование, сохраняющее расстояние между точками этого пространства и его ориентацию.) Как известно (см. [5, том 2, гл. 2, § 29, формула (29.4)]), функции Бесселя  $J_\nu(z)$  имеют при  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon \in (0, \pi)$ ) асимптотическое разложение

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ \cos \left( z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\nu, 2k) (2z)^{-2k} - \sin \left( z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\nu, 2k+1) (2z)^{-2k-1} \right], \quad (3)$$

где

$$(\nu, m) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + m\right)}{m! \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - m\right)}, \quad \Gamma - \text{гамма-функция.}$$

Пусть  $X = G/K$  – риманово симметрическое пространство ранга один некомпактного типа ( $G$  – связная некомпактная полупростая группа Ли вещественного ранга один с конечным центром,  $K$  – её максимальная компактная подгруппа, см., например, [6, гл. 6]). Сферическая функция  $\varphi_\lambda$  на  $X$  является инвариантной относительно подгруппы  $K \subset G$  собственной функцией оператора Лапласа-Бельтрами  $L$  на  $X$ . Отметим, что оператор  $L$  является естественным аналогом оператора (2) для пространств  $X$  и соответственно порождает всю алгебру дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на  $X$ , инвариантных относительно группы  $G$ . Функция  $\varphi_\lambda$  выражается через функции вида

$$F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -\text{sh}^2 r\right),$$

где  $F(a, b; c; z)$  – гипергеометрическая функция Гаусса, т.е. аналитическое продолжение степенного ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l (b)_l}{(c)_l l!} z^l, \quad |z| < 1, \quad (\alpha)_l = \frac{\Gamma(\alpha + l)}{\Gamma(\alpha)} - \text{символ Похгаммера.}$$

В работе [7] (см. также [5, гл. 2, п. 2.3, формула (17)], [8, гл. 6, п. 198]) Г.Н. Ватсон получил следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} F\left(\alpha + \lambda, \beta - \lambda; \gamma; \frac{1 - \mu}{2}\right) &\sim \frac{\Gamma(\lambda - \beta + 1) \Gamma(\gamma)}{\pi \Gamma(\gamma - \beta + \lambda)} 2^{\alpha + \beta - 1} (1 - e^{-\zeta})^{1/2 - \gamma} \times \\ &\times (1 + e^{-\zeta})^{\gamma - \alpha - \beta - 1/2} \left( e^{(\lambda - \beta)\zeta} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_s \Gamma(s + 1/2)}{\lambda^{s+1/2}} + \right. \\ &\left. + e^{\mp \pi i(1/2 - \gamma)} e^{-(\lambda + \alpha)\zeta} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c'_s \Gamma(s + 1/2)}{\lambda^{s+1/2}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Это разложение справедливо при больших  $|\lambda|$  и

$$-\frac{\pi}{2} - \omega_2 + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \omega_1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0;$$

в  $e^{\mp \pi i(1/2 - \gamma)}$  верхний или нижний знак берется соответственно в случаях  $\text{Im } \lambda > 0$  и  $\text{Im } \lambda < 0$  и при этом

$$1 - e^\zeta = e^\zeta (1 - e^{-\zeta}) e^{\mp \pi i}.$$

В этих формулах

$$\mu = \text{ch } \zeta = \text{ch } (\xi + i\eta),$$

$$\omega_2 = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}, \quad -\omega_1 = \operatorname{arctg} \frac{\eta - \pi}{\xi}, \quad \eta \geq 0,$$

$$\omega_2 = \operatorname{arctg} \frac{\eta + \pi}{\xi}, \quad -\omega_1 = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}, \quad \eta \leq 0.$$

Числа  $c_s$  в (4) таковы, что

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{L + M e^\zeta + N e^{2\zeta}}{2(1 - e^{2\zeta})},$$

где

$$L = (\alpha + \beta - 2\gamma + 1)^2 - \alpha + \beta - \frac{1}{2}, \quad N = (\alpha + \beta - 1)^2 + \alpha - \beta + \frac{1}{2},$$

$$M = -2(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2\gamma + 1).$$

Число  $c'_0$  также равно единице, а  $c'_1$  получается из  $c_1$  изменением знака  $\zeta$ .

В данной работе исследуются асимптотические свойства функций

$$\varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(r) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -\operatorname{sh}^2 r\right) \quad (5)$$

( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq -1, -2, \dots; r > 0$ ) при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Разложение (4) и формула Стирлинга для гамма-функции показывают, что

$$\frac{\sqrt{\pi} (\operatorname{sh} r)^{\alpha+1/2} (\operatorname{ch} r)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1)} \varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(r) = \frac{\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1)\right)}{\lambda^{\alpha+1/2}} + O\left(\frac{e^{r|\operatorname{Im}\lambda|}}{\lambda^{\alpha+3/2}}\right).$$

Цель работы – получить общее явное разложение для  $\varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(r)$ , аналогичное асимптотическому ряду (3).

**Формулировка основного результата.** Положим

$$a_0(r) = 0, \quad a_{2k}(r) = -\frac{1}{2(2k)!}, \quad a_{2k-1}(r) = \frac{\operatorname{th} r}{2(2k-1)!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$d_0(r) = 0, \quad d_{2k}(r) = \frac{1}{(2k+1)!}, \quad d_{2k-1}(r) = \frac{-\operatorname{cth} r}{(2k)!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$c_k = \sum_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=k} \frac{(1/2 + \beta)_{l_1+\dots+l_k} (1/2 - \beta)_{l_1+\dots+l_k}}{l_1! \dots l_k! (1/2 + \alpha)_{l_1+\dots+l_k}} a_1^{l_1}(r) \dots a_k^{l_k}(r), \quad (8)$$

$$c_k^* = \sum_{j=1}^k \frac{(1/2 + \beta)_j (1/2 - \beta)_j}{j! (1/2 + \alpha)_j} \sum_{l_1+\dots+l_j=k} a_{l_1}(r) \dots a_{l_j}(r), \quad (9)$$

$$\gamma_k = \sum_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=k} \frac{(-1)^{l_1+\dots+l_k} (1/2 - \alpha)^{l_1+\dots+l_k}}{l_1! \dots l_k! (\operatorname{sh} r)^{1/2-\alpha}} d_1^{l_1}(r) \dots d_k^{l_k}(r), \quad (10)$$

$$\gamma_k^* = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j (1/2 - \alpha)^j}{j! (\operatorname{sh} r)^{1/2-\alpha}} \sum_{l_1+\dots+l_j=k} d_{l_1}(r) \dots d_{l_j}(r). \quad (11)$$

Ниже будет показано (см. леммы 5, 6), что  $c_k = c_k^*$ ,  $\gamma_k = \gamma_k^*$ .

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\operatorname{Re} \alpha > -\frac{1}{2}$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \pi$ ) имеет место асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(r) \sim & \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1 + 2\alpha)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1+2\alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu + \alpha + \frac{1}{2})}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}^*}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{1}{2}}} + \\ & + \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1 + 2\alpha)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3+2\alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu + \alpha + \frac{3}{2})}{(2\nu + 1)!} \frac{A_{2\nu+1}^*}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_k^*$  могут быть вычислены по формуле

$$A_k^* = \frac{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1) (\operatorname{sh} r)^{-2\alpha}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2) (\operatorname{ch} r)^{\beta+1/2}} A_k, \quad A_k = k! \sum_{m=0}^k \gamma_m c_{k-m} = k! \sum_{m=0}^k \gamma_m^* c_{k-m}^*.$$

Аналогичное утверждение для обобщенных сферических функций на римановых симметрических пространствах ранга один компактного типа получено недавно в работе [9].

**Следствие 1.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \pi$ ) имеет место асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi} (\operatorname{sh} r)^{\alpha+1/2} (\operatorname{ch} r)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1)} \varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(r) = & \frac{\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1)\right)}{\lambda^{\alpha+1/2}} + \\ & + \frac{\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right) \operatorname{cth} r + \left(\frac{1}{4} - \beta^2\right) \operatorname{th} r}{2} \cdot \frac{\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1)\right)}{\lambda^{\alpha+3/2}} + O\left(\frac{e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}}{\lambda^{\alpha+5/2}}\right). \quad (12) \end{aligned}$$

Отметим, что разложение из следствия 1 содержится в [10, предложение 7.4]. Относительно других частных случаев теоремы 1, см. [8, гл. 6], [11, часть 2, гл. 3], [12, часть 1, гл. 4, предложение 4.5], [13].

**Вспомогательные утверждения.** Следуя [1, гл. 1, § 2] будем писать

$$f(z) = \tilde{O}(g(z)), \quad z \rightarrow z_0,$$

если  $f(z) = O(g(z))$ , но  $f(z) \neq o(g(z))$  при  $z \rightarrow z_0$ . Обозначим

$$S[R, \alpha] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R, |\arg z| \leq \alpha\}.$$

Для  $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} d > 0, h_0 \in C^\infty[a, b]$  и аналитической функции  $g$  положим

$$A_k(g, h_0, z) = \frac{d^k}{dt^k} ((b-t)^{d-1} h_0(t) g(zt)) \Big|_{t=a}, \quad B_k(g, h_0, z) = \frac{d^k}{dt^k} ((t-a)^{c-1} h_0(t) g(zt)) \Big|_{t=b}.$$

Нам потребуется следующий известный результат об асимптотике преобразования Фурье (см. [1, гл. 2, теорема 10.2]).

**Теорема 2.** Если  $h_0 \in C^\infty[a, b], a > 0, g(z)$  – аналитическая в  $S[R, \pi\gamma], \gamma \in (0, 1)$ , функция, обладающая при  $z \rightarrow \infty$  в  $S$  асимптотическим разложением

$$g(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-\varkappa_k}, \quad \varkappa_k \uparrow +\infty$$

и удовлетворяющая условиям

$$A_k(g, h_0, z) = \tilde{O}(z^{-\varkappa_0}), \quad B_k(g, h_0, z) = \tilde{O}(z^{-\varkappa_0}),$$

то при  $z \rightarrow \infty, z \in S$ , имеет место асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} & \int_a^b e^{\gamma z t} g(z t) (t-a)^{c-1} (b-t)^{d-1} h_0(t) dt \sim \\ & \sim e^{\gamma z a \pm i c \pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+c)}{k!} A_k(g, h_0, z) (\gamma z)^{-k-c} + \\ & + e^{\gamma z b} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+d)}{k!} B_k(g, h_0, z) (\gamma z)^{-k-d}, \end{aligned}$$

где знак “+” берется при  $\arg(\gamma z) \geq \frac{\pi}{2}$ , знак “–” – при  $\arg(\gamma z) \leq -\frac{\pi}{2}$ ; при остальных  $\arg(\gamma z)$  знак можно выбирать произвольным образом.

Доказательство теоремы 2 показывает (см. [1, гл. 2, пункт 10.3]), что в случае, когда функция  $g(z)$  аналитична при  $|z| \geq R$ , указанное асимптотическое разложение справедливо во всей плоскости  $z$ . В частности, это имеет место при  $g \equiv \text{const}$ ; в данном случае можно брать также  $a = 0$ . Полагая  $c = i, g(z) \equiv 1$ , получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** Если  $h_0 \in C^\infty[a, b], 0 \leq a < b, \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} d > 0$ , то при  $\lambda \rightarrow \infty, |\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$  имеет место асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} & \int_a^b e^{i \lambda t} (t-a)^{c-1} (b-t)^{d-1} h_0(t) dt \sim \\ & e^{i \lambda a + i c \pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+c)}{k!} A_k(i \lambda)^{-k-c} + e^{i \lambda b} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+d)}{k!} B_k(i \lambda)^{-k-d}, \end{aligned}$$

где

$$A_k = \frac{d^k}{dt^k} ((b-t)^{d-1} h_0(t)) \Big|_{t=a}, \quad B_k = \frac{d^k}{dt^k} ((t-a)^{c-1} h_0(t)) \Big|_{t=b}.$$

**Лемма 2.** Если  $\operatorname{Re} \alpha > -\frac{1}{2}$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\alpha, \beta}(r) &= \frac{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)} (\operatorname{sh} r)^{-2\alpha} (\operatorname{ch} r)^{-\beta-1/2} \int_0^r \cos(\lambda x) (\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x)^{\alpha-1/2} \times \\ &\quad \times F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch} r}\right) dx. \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из [10, предложение 7.3] имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\alpha, \beta}(r) &= \frac{2^{-\alpha+3/2} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)} (\operatorname{sh} r)^{-2\alpha} (\operatorname{ch} r)^{-\alpha-\beta} \int_0^r \cos(\lambda x) (\operatorname{ch} 2r - \operatorname{ch} 2x)^{\alpha-1/2} \times \\ &\quad \times F\left(\alpha + \beta, \alpha - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch} r}\right) dx. \end{aligned}$$

Применяя формулу

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z)$$

при

$$a = \alpha + \beta, \quad b = \alpha - \beta, \quad c = \alpha + \frac{1}{2}, \quad z = \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch} r}$$

(см. [5, формула 2.9(2)]), получаем

$$F(a, b; c; z) = \left(\frac{\operatorname{ch} r + \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch} r}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} F\left(\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2} + \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch} r}\right).$$

Теперь, учитывая, что

$$\operatorname{ch} 2r - \operatorname{ch} 2x = 2(\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x)(\operatorname{ch} r + \operatorname{ch} x),$$

приходим к требуемому утверждению. □

**Лемма 3.** Для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch}^2 r}{\Gamma(\alpha+1)} \varphi_{\lambda}^{\alpha, \beta}(r) &= -\frac{\operatorname{sh}^2 r}{4\Gamma(\alpha+3)} ((\alpha - \beta + 3)^2 + \lambda^2) \varphi_{\lambda}^{\alpha+2, \beta-2}(r) + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (\alpha + 1 + (\alpha - \beta + 2) \operatorname{sh}^2 r) \varphi_{\lambda}^{\alpha+1, \beta-1}(r). \end{aligned} \quad (13)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу определения (5) имеем

$$\varphi_{\lambda}^{\alpha+1, \beta-1}(r) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}; \alpha + 2; -\operatorname{sh}^2 r\right), \quad (14)$$

$$\varphi_{\lambda}^{\alpha+2,\beta-2}(r) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}; \alpha + 3; -\operatorname{sh}^2 r\right). \quad (15)$$

Используя (5), (14), (15) и формулу

$$c(c-1)(z-1)F(a,b;c-1;z) + c[c-1-(2c-a-b-1)z]F(a,b;c;z) + (c-a)(c-b)zF(a,b;c+1;z) = 0$$

при

$$a = \frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}, \quad b = \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}, \quad c = \alpha + 2, \quad z = -\operatorname{sh}^2 r$$

(см. [5, формула 2.8 (30)]), получаем

$$-(\alpha + 1)(\alpha + 2) \operatorname{ch}^2 r \varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(r) + (\alpha + 2) (\alpha + 1 + (\alpha - \beta + 2) \operatorname{sh}^2 r) \varphi_{\lambda}^{\alpha+1,\beta-1}(r) - \frac{\operatorname{sh}^2 r}{4} ((\alpha - \beta + 3)^2 + \lambda^2) \varphi_{\lambda}^{\alpha+2,\beta-2}(r) = 0.$$

Из формулы приведения для  $\Gamma$ -функции следует требуемое равенство (13).  $\square$

**Лемма 4.** *Для производной порядка  $p$  от суперпозиции двух функций имеет место формула*

$$(f(\tau(t)))^{(p)} = \sum_{m=0}^p \frac{f^{(m)}(\tau(t))}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k (\tau(t))^k (\tau^{m-k}(t))^{(p)}, \quad p \geq 0. \quad (16)$$

Указанное утверждение содержится в [14, доказательство теоремы 2.11].

**Следствие 2.** *Если  $\tau(0) = 0$ , то*

$$(f \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^p \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)}(0) \dots \tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1. \quad (17)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку  $\tau(0) = 0$ , из (16) имеем

$$(f \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^p \frac{f^{(m)}(0)}{m!} (\tau^m)^{(p)}(0), \quad p \geq 1. \quad (18)$$

Теперь воспользуемся формулой Лейбница

$$(f_1 \dots f_m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} f_1^{(k_1)} \dots f_m^{(k_m)}.$$

Положив в этой формуле  $f_1 = \dots = f_m = \tau$ , получим

$$(\tau^m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)} \dots \tau^{(k_m)}, \quad m \geq 1. \quad (19)$$

Комбинируя (18) с (19), приходим к равенству (17).  $\square$

Потребуется также следующие формулы, связанные с подстановкой ряда в ряд (см. [15, приложение 1, § 1.3, п. 1.3.6]):

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right)^l = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < R_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k z^k| < R_2, \quad (20)$$

$$c_k = \sum_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=k} \frac{(l_1+\dots+l_k)!}{l_1!\dots l_k!} b_{l_1+\dots+l_k} a_1^{l_1} \dots a_k^{l_k}. \quad (21)$$

В частности,

$$c_0 = b_0, \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad c_3 = a_3 b_1 + 2 a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3, \\ c_4 = a_4 b_1 + 2 a_1 a_3 b_2 + a_2^2 b_2 + 3 a_1^2 a_3 b_3 + a_1^4 b_4.$$

**Лемма 5.** Пусть

$$f_1(t) = \left( \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t} \right)^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

Тогда  $f_1^{(k)}(0) = k! \gamma_k = k! \gamma_k^*$ , константы  $\gamma_k$  и  $\gamma_k^*$  определены в (10), (11).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Используя разложение гиперболического косинуса и гиперболического синуса в степенной ряд, имеем

$$\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t} = \operatorname{sh} r \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) t^k \right), \quad (22)$$

где коэффициенты  $d_k(r)$  определены равенством (7). Поскольку

$$f(z) := (1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)_l}{l!} z^l,$$

то из (20)–(22) находим

$$\left( \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t} \right)^{\alpha-\frac{1}{2}} = (\operatorname{sh} r)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) t^k \right)^{\alpha-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k,$$

где коэффициенты  $\gamma_k$  определены в (10). Таким образом,  $f_1^{(k)}(0) = k! \gamma_k$ .

Далее, положим

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) t^k.$$

Тогда  $\tau(0) = 0$  и  $f_1(t) = (\operatorname{sh} r)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(\tau(t))$ . Учитывая, что

$$\tau^{(k)}(0) = k! d_k(r), \quad f^{(k)}(0) = (-1)^k \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)_k,$$

по следствию 2 получаем  $f_1^{(k)}(0) = k! \gamma_k^*$ . Это завершает доказательство леммы.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть

$$f_2(t) = F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t - r)}{2 \operatorname{ch} r}\right). \quad (23)$$

Тогда  $f_2^{(k)}(0) = k! c_k = k! c_k^*$ , константы  $c_k$  и  $c_k^*$  определены в (8), (9).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Аргумент гипергеометрической функции в (23) можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_*(t) &:= \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t - r)}{2 \operatorname{ch} r} = \frac{(1 - \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} r + \operatorname{sh} t \operatorname{sh} r}{2 \operatorname{ch} r} = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{ch} r} \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \operatorname{ch} r + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{sh} r \right) = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2 \cdot (2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2 \cdot (2k+1)!} \operatorname{th} r = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(r) t^m, \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициенты  $a_k(r)$  определены в (6). Согласно разложению гипергеометрической функции в степенной ряд

$$F(z) := F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; z\right) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l,$$

где

$$b_l = \frac{\left(\frac{1}{2} + \beta\right)_l \left(\frac{1}{2} - \beta\right)_l}{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)_l l!}. \quad (25)$$

Из (20), (21) и (24)–(25) получаем

$$F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t - r)}{2 \operatorname{ch} r}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m(r) t^m \right)^l = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

где константы  $c_k$  определены в (8). Отсюда  $f_2^{(k)}(0) = k! c_k$ . Далее, поскольку  $\tau_*(0) = 0$ ,  $\tau_*^{(k)}(0) = k! a_k(r)$ ,

$$F^{(l)}(0) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \beta\right)_l \left(\frac{1}{2} - \beta\right)_l}{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)_l},$$

из следствия 2 получаем  $f_2^{(k)}(0) = k! c_k^*$ . Таким образом, лемма 6 доказана.  $\square$

**Доказательство теоремы 1.** По лемме 2 имеем равенство

$$\varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(r) = \frac{2^{\alpha-1/2} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2)} (\operatorname{sh} r)^{-2\alpha} (\operatorname{ch} r)^{-\beta-1/2} I(\lambda), \quad (26)$$

где

$$I(\lambda) = 2 \int_0^r \cos(\lambda x) (\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x)^{\alpha-1/2} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch} r}\right) dx.$$

Представление для  $I(\lambda)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{-r}^r e^{i\lambda x} (\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x)^{\alpha-1/2} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch} r}\right) dx = \\ &= e^{-i\lambda r} \int_0^{2r} e^{i\lambda t} t^{\alpha-1/2} (2r - t)^{\alpha-1/2} \left(\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t(2r-t)}\right)^{\alpha-1/2} \times \\ &\quad \times F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{2 \operatorname{ch} r}\right) dt. \end{aligned}$$

Из асимптотического разложения интегралов Фурье (см. лемму 1) имеем

$$\begin{aligned} I(\lambda) \sim e^{-i\lambda r} \left( e^{i\pi(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\alpha+\frac{1}{2})}{k!} \frac{A_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + e^{2i\lambda r} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\alpha+\frac{1}{2})}{k!} \frac{B_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_k = g_1^{(k)}(0), \quad g_1(t) = \left(\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{2 \operatorname{ch} r}\right), \\ B_k = g_2^{(k)}(2r), \quad g_2(t) = \left(\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{2r-t}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{2 \operatorname{ch} r}\right), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку  $g_1(t) = g_2(2r-t)$ , то  $B_k = (-1)^k A_k$  и

$$\begin{aligned} I(\lambda) \sim e^{-i\lambda r} \left( e^{i\pi(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\alpha+\frac{1}{2})}{k!} \frac{A_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + e^{2i\lambda r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha+\frac{1}{2})}{k!} \frac{A_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I(\lambda) \sim 2 \cos \left( \lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1) \right) e^{i\frac{\pi}{4}(2\alpha+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu + \alpha + \frac{1}{2})}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{1}{2}}} + \\ + 2 \sin \left( \lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1) \right) e^{i\frac{\pi}{4}(2\alpha+3)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu + \alpha + \frac{3}{2})}{(2\nu + 1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{3}{2}}}. \quad (28)$$

При этом для коэффициентов  $A_k$  из (27) справедливо соотношение

$$A_k = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} f_1^{(m)}(0) f_2^{(k-m)}(0) = k! \sum_{m=0}^k \gamma_m c_{k-m} = k! \sum_{m=0}^k \gamma_m^* c_{k-m}^* \quad (29)$$

(см. леммы 5, 6). Используя (26), (28) и (29) получаем утверждение теоремы 1.

В заключение отметим, что разложение (12) при  $\operatorname{Re} \alpha > -\frac{1}{2}$  является непосредственным следствием теоремы 1. В общем случае (12) получается отсюда методом продолжения по параметру с использованием леммы 3 (см. [1, гл. 2, § 10, п. 10.3, доказательство формулы (10.61)]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов, I / Э.Я. Риекстыньш. – Рига: Зинатне, 1974. – 390 с.
2. Федорюк М.В. Метод перевала / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
3. Paris R.B. Asymptotics and Mellin-Barnes integrals / R.B. Paris, D. Kaminski. – New-York: Cambridge University Press, 2001. – 440 p.
4. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. М.: Мир, 1987. – 735 с.
5. Г.Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, I, II / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1973, 1974. – 296 с.
6. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. М.: Мир, 1964. – 533 с.
7. Watson G.N. Asymptotic expansions of hypergeometric functions / G.N. Watson // Trans. Cambridge. Philos. Soc. – 1918. – Т. 22. – P. 277–308.
8. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Е.В. Гобсон. М.: ИЛ, 1952. – 476 с.
9. Волчкова Н.П. Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Якоби / Н.П. Волчкова // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2016. – Т. 1. – P. 27–37.
10. Volchkov V.V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
11. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations / V.V. Volchkov. Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
12. Volchkov V.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. New York: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
13. Волчкова Н.П. Об асимптотических свойствах функций Лежандра / Н.П. Волчкова // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 58–61.
14. R.J. Nessel R.J. Local Multiplier Criteria in Banach Spaces / R.J. Nessel, E. Wickeren // Mathematica Balkanica. New Series. – 1988. – V. 2. – P. 114–132.
15. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 750 с.

Поступила в редакцию 26.06.2017 г.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SPHERICAL FUNCTIONS ON SYMMETRIC SPACES OF THE NON-COMPACT TYPE

*N. P. Volchkova*

We study asymptotic properties of spherical functions on symmetric spaces. An analog of the Bessel asymptotic expansion for spherical functions and their generalizations on Riemannian symmetric spaces of rank one of the non-compact type is obtained.

**Keywords:** asymptotic expansion, spherical functions, hyperheometric function, symmetric spaces.

**Волчкова Наталья Петровна**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
Донецкий национальный технический университет (г. Донецк), кафедра высшей математики.  
83000, ул. Артема, 58, Главный корпус ДонНТУ  
volna936@gmail.com  
+38-050-4748831

**Volchkova Natalia Petrovna**

Candidate of Physical and Mathematical  
Sciences,  
Donetsk National Technical University, Donetsk,  
Department of Higher Mathematics

## М Е Х А Н И К А

УДК 539.3:534.1

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ. ОДНОРОДНЫЕ ПЛИТЫ© 2017. *Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко*

Рассматриваются краевые задачи трехмерной теории упругости о равновесии и установившихся колебаниях изотропных плит. Приводится обзор работ, посвященных методам сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным. Основное внимание уделено методу однородных решений и анализу результатов научных исследований, полученных в последнее время.

*Ключевые слова:* слой, изотропная однородная плита, краевые задачи трехмерной теории упругости, метод однородных решений, вихревое и потенциальное решения, спектральные задачи, напряженное состояние, дисперсионные уравнения, спектры нормальных волн.

**Введение.** Трехмерные задачи статики и гармонических колебаний теории упругости и термоупругости занимают важное место в механике деформируемого твердого тела. В основном многообразие краевых задач обусловлено необходимостью учета физико-механических свойств материала тела, воздействия внешней среды, геометрии объекта и вида граничных условий на его поверхности. Развитие теории однородных и неоднородных упругих тел, подходов и методов решения краевых задач отражено, например, в обзорных статьях [1–50] и монографиях [51–108]. Данные и другие публикации свидетельствуют о том, что подавляющее большинство научных исследований выполнены на основе приближенных теорий и методов. Поэтому актуальным является изучение напряженного состояния и волновых полей в однородных телах и в телах из функционально-градиентных материалов (ФГМ) на основе уравнений трехмерной теории упругости и с использованием точных аналитических методов.

В математической теории упругости равновесие и гармонические колебания трехмерных тел описываются краевыми задачами для систем уравнений в частных производных. В трехмерной постановке решение краевых задач теории упругости сопряжено со значительными математическими трудностями. Здесь в полной мере не приемлемы классические методы математической физики. Поэтому, в первую очередь, разрабатывались приближенные теории, основанные на упрощающих предположениях и гипотезах относительно геометрии и характера деформирования упругих тел. Таковыми являются теория стержней, прикладные теории изгиба пластин и оболочек, основанные на гипотезах Г. Кирхгофа (G. Kirchhoff) – А.Е. Лява (A.E. Love), предположения о плоском напряженном состоянии и плоской деформации, уточненные теории. Заметное влияние на развитие приближенных методов решения краевых задач теории упругости оказали идеи Б. Сен-Венана (B. Saint-Venant). При решении задач о растяжении, кручении и изгибе призматических брусков он отказался от точного удовлетворения граничных условий в области приложения нагрузки. Действующая нагрузка была заменена интегральными характеристиками – равнодействующими силой и моментом. Такой способ удовлетворения граничных условий получил название «принцип Б. Сен-Венана» и широко используется в настоящее время.

Следует отметить, что многие приближенные и некоторые точные теории базируются на идее понижения размерности краевых задач по пространственным координатам. Обзор полученных в этом направлении результатов, библиография научных исследований, история и анализ проблемы перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным задачам математической физики дан, например, в обзорных статьях [3–5, 8–13, 15, 18–25, 27, 31, 34–37, 39–42, 44–47] и монографиях [51, 59, 61, 64, 66, 68, 84, 91, 96, 99, 100, 105, 106]. В частности, в работах [8, 9] рассмотрены математические проблемы и проведена классификация подходов приведения трехмерной задачи к двумерной. Согласно классификации, принятой в статье [9],

методы приведения делятся на две группы. К первой группе относятся методы, базирующиеся на принятии упрощающих гипотез. Ко второй группе относятся аналитические методы и подходы, которые основываются на регулярном процессе замены решения трехмерной задачи последовательностью решения двумерных задач. Аналитические методы приведения не предполагают рассмотрение упрощающих гипотез и ограничений, а содержат некоторый регулярный процесс уточнения решения. Во второй группе выделяются два направления, связанные с асимптотическими методами и формальными методами разложений основных величин по толщине пластины. При помощи методов второй группы можно оценивать адекватность двумерных теорий, правомерность использования решений, полученных на их основе. В работе [9] обращается внимание, как и в других современных публикациях, на актуальность развития аналитических, в том числе, точных (свободных от гипотез и предположений) математических методов решения краевых задач пространственной теории упругости.

Здесь следует отметить, что в последнее время для построения двумерных моделей теории пластин из ФГМ широкое распространение получил формальный аналитический метод аппроксимации перемещений по поперечной координате степенными рядами и разложениями по полиномам Лежандра [5, 37, 41, 47, 109–118].

Количество приближенных теорий чрезвычайно велико и невозможно построить универсальную прикладную теорию, которая давала бы приемлемые результаты для всех характеристик напряженно-деформированного состояния тела. Результаты, полученные на основе приближенных теорий, требуют обоснования и оценки. Это может быть сделано на основе точного решения трехмерных задач теории упругости.

Известны классы краевых задач, для решения которых необходимо использовать трехмерную теорию упругости. К ним, например, относятся смешанные граничные задачи для пространственных тел, все три измерения которых одинакового порядка, задачи о локальном нагружении и нагреве элементов конструкций, высокочастотные колебания упругих тел, задачи исследования напряженного состояния в окрестности трещин и местах резких изменений геометрии и физико-механических характеристик материала. К тому же для оценки погрешности и области применимости приближенных теорий необходимо располагать решением соответствующей трехмерной задачи теории упругости.

В процессе построения решения краевых задач статики и гармонических колебаний трехмерных тел возникают две проблемы. Первая проблема состоит в построении решений системы уравнений равновесия или движения упругого тела, а вторая проблема – удовлетворение граничных условий. Важную роль здесь сыграли, так называемые, общие решения уравнений пространственной теории упругости. В задачах статики широкое распространение получили решения Ж. Буссенеска (J. Boussinesq, 1885), Б.Г. Галеркина (1930), П.Ф. Папковича (1932), Г. Нейбера (H. Neuber, 1934). В динамических задачах теории упругости используются волновые функции с представлением компонент вектора перемещений в форме разложения А.Э. Грина (A.E. Green, 1839) – Г. Ляме (G. Lamé, 1852). В теории упругости неоднородных сред построению общих решений посвящена работа [85]. Благодаря этим решениям основные характеристики напряженно-деформированного состояния (перемещения и напряжения) выражаются через гармонические или бигармонические функции, а в задачах динамики – через функции, удовлетворяющие волновым уравнениям. В связи с этим возможно воспользоваться известными методами математической физики: разделение переменных Ж. Фурье (J. Fourier), функции А.Э. Грина (A.E. Green), теории потенциала, интегральных преобразований, характеристик, собственных функций и другими. Проблема общих решений уравнений теории упругости достаточно полно отражена в обзорных статьях [2, 7, 50] и монографиях [58, 70, 71, 102, 103].

Впервые В. Томсон (W. Thomson, 1882) исследовал действие сосредоточенной силы в изотропном пространстве. Ж. Буссенеск (1885) с помощью теории потенциала получил замкнутое решение задачи о действии сосредоточенной силы в полупространстве. Задачи об упругом равновесии сферы и конуса впервые рассмотрены Г. Ляме (1859) и Дж. Мичеллом (J.H. Michell, 1900) соответственно. На основании форм общих решений уравнений теории упругости и с помощью Ж. Фурье метода А. Вангерин (A. Wangerin, 1873), Л. Похгаммер (L. Pochhammer, 1876), М.А. Шиффа (M.A. Schiff, 1883), Ч. Кри (C. Chree, 1889), Иериш (Jerisch,

1889), В.А. Стеклов (1892), Л. Файлон (L. Filon, 1902) рассмотрели задачи об упругой деформации круглого цилиндра и других тел вращения. Подходы к решению задачи об упругом равновесии изотропного слоя предложили Дж. Дугалл (J. Dougall, 1904), О. Тедоне (O. Tedone, 1904), Л. Орландо (L. Orlando, 1905).

Упомянутые выше некоторые первые результаты, идеи и методы их получения оказали значительное влияние на дальнейшее развитие пространственной теории упругости изотропного тела и нашли отражение в монографиях [52–58, 61–63, 65, 69, 70–73, 75, 76, 78, 79, 85, 87, 88, 92, 93, 94]. В обзорных статьях [1, 2, 7, 8, 9, 13, 14, 18, 19, 28, 29, 32, 33, 36–38, 43, 48, 50] систематизированы результаты исследований напряженно-деформированного состояния сферы, конуса кругового цилиндра, эллипсоида и других трехмерных тел на основе точных аналитических решений пространственной задачи теории упругости.

Следует отметить, что к распространенным аналитическим методам решения краевых задач трехмерной теории упругости относятся: разделение переменных Ж. Фурье, суперпозиции, собственных векторных функций, сингулярных интегральных уравнений и потенциалов, интегральных преобразований, асимптотические, однородных решений, начальных функций.

Одним из эффективных точных аналитических методов приведения трехмерных задач теории упругости изотропного тела к двумерным является метод однородных решений. Метод однородных решений позволяет:

- получить частные решения полной системы уравнений теории упругости изотропного, а в некоторых случаях, анизотропного тела;
- выявить характер особенности в поведении характеристик напряженно-деформированного состояния упругих тел в связи с наличием в них угловых точек, линий раздела граничных условий, неоднородностей;
- в сочетании с другими методами получить приближенное или точное решение поставленной краевой задачи;
- строить приближенные теории решения краевых задач теории упругости;
- естественным способом получить асимптотические решения задач и на этой основе исследовать концентрацию напряжений в элементах конструкций со сложной геометрией граничной поверхности.

Основные положения метода представлены А.И. Лурье в 1942 году в известной статье [119]. В этой работе автор изложил «сущность метода составления частных решений уравнений равновесия теории упругости...», было введено понятие «однородные решения», которое конкретизировано позже в первой монографии [103] по пространственным задачам теории упругости. Предлагаются два возможных способа построения частных решений уравнений трехмерной теории упругости в перемещениях. В основу первого способа положена идея представления перемещений в виде рядов по степеням поперечной координаты. На самом деле, основное внимание автор уделяет второму символическому (операторному) способу построения однородных решений. Согласно символическому способу, компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, содержат шесть неизвестных функций перемещений плиты в срединной плоскости, записанных в операторном виде. Следует отметить, что представления для перемещений в символическом виде были получены А.И. Лурье еще в 1936 году при рассмотрении задачи о равновесии пластины переменной толщины. Для определения шести неизвестных начальных функций получено дифференциальное операторное неоднородное уравнение бесконечно высокого порядка и указан способ его решения в предположении, что на торцевых поверхностях плиты заданы касательные и нормальные напряжения. На основе анализа однородного операторного уравнения установлено существование трех групп независимых решений уравнений теории упругости, оставляющих торцы свободными от напряжений: бигармоническое; решение, соответствующее корням  $\sigma_k$  уравнений  $\sin \sigma = 0$  или  $\cos \sigma = 0$ ; решение, соответствующее корням  $\gamma_k$  уравнений  $\sin \gamma \pm \gamma = 0$ .

В 1963 году решение второй и третьей групп в работе [120] предложено именовать вихревым и потенциальным соответственно, раскрыт смысл этих названий. Авторы отмечают, что «перемещения в вихревом случае будут составляющими ротора некоторой функции, а в потенциальном – градиента некоторой функции».

Завершается работа А.И. Лурье [119] иллюстрацией применения однородных и неоднородных решений в задаче изгиба круглой толстой плиты, по верхнему торцу которой действует нормально распределенная нагрузка. Предполагается, что боковая поверхность плиты жестко закреплена. Во избежание решения бесконечной системы линейных уравнений автор ограничивается требованием равенства нулю одной из компонент вектора перемещения  $u_3$  лишь в середине боковой поверхности плиты и строгим удовлетворением граничных условий для радиального перемещения. В таком варианте удовлетворения граничных условий приближенное решение задачи получено в замкнутом аналитическом виде.

Дальнейшему исследованию общих свойств однородных решений и построению точных и приближенных аналитических решений конкретных задач посвящены публикации [120–174]. В обзорных статьях [8, 9, 16–19, 32, 33, 48] и монографиях [75, 76, 78, 93, 103] отражена история зарождения и развития теории однородных решений, а также ее приложение к решению частных двумерных и трехмерных задач теории упругости.

Предлагаемый обзор содержит краткое описание результатов, полученных в работах [55, 175–227] на основе метода однородных решений, и состоит из двух частей. В настоящей первой части анализируются однородные решения краевых задач трехмерной теории упругости для однородных плит.

Вторая часть обзора будет посвящена анализу результатов исследования, полученных для неоднородных по толщине плит с применением метода однородных решений.

**1. Трехмерные задачи статики однородных плит.** Здесь рассматриваются краевые задачи об упругом и термоупругом равновесии плит.

**1.1. Упругое равновесие пластин.** Для однородных плит известная система уравнений равновесия в перемещениях в безразмерных величинах имеет вид

$$\lambda^2 \nu_0 \partial_j \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_j = 0 \quad (j=1, 2), \quad \lambda \nu_0 \partial_3 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_3 = 0. \quad (1.1)$$

Здесь используются обозначения принятые в монографии [55]. Пусть на плоских гранях пластины имеет место одно из шести однородных граничных условий

$$u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (1.2) \quad \sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (1.3) \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \quad u_j(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (1.4)$$

$$u_3(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \quad \sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0; \quad (1.5) \quad \sigma_{i3}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad u_i(x_1, x_2, -1) = 0; \quad (1.6)$$

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm 1) + k_i^\pm u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (k_1^\pm = k_2^\pm = k^\pm). \quad (1.7)$$

На боковой поверхности пластины могут быть поставлены неоднородные граничные условия аналогичные рассмотренным выше. Их постановка дается на этапе применения однородных решений в конкретных задачах.

Для приведения краевых задач ((1.1), (1.2)) – ((1.1), (1.7)) к двумерным используем метод однородных решений [119, 120, 174].

Элементарные решения уравнений (1.1), удовлетворяющие одному из краевых условий на торцах пластины (1.2)–(1.7), по-прежнему будем называть однородными. При получении однородных решений поставленных задач воспользуемся, например, полуобратным методом [120, 174]. Компоненты вектора перемещений  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  представим суммой вихревого  $u_i^{(1)}$  и потенциального  $u_i^{(2)}$  решений

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^{(1)}(x_1, x_2, x_3) + u_i^{(2)}(x_1, x_2, x_3) \quad (i=1, 3). \quad (1.8)$$

*Вихревое решение.* Компоненты вектора перемещения вихревого состояния могут быть представлены в виде

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = p(x_3) \partial_2 B(x_1, x_2), \quad u_2^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = -p(x_3) \partial_1 B(x_1, x_2), \quad u_3^{(1)} = 0. \quad (1.9)$$

При этом неизвестные функции  $p = p(x_3)$  и  $B = B(x_1, x_2)$  определяются из уравнений равновесия (1.1), однородных граничных условий на торцах пластины (1.2)–(1.7).

После подстановки выражения (1.9) в систему (1.1) третье уравнение системы удовлетворяется тождественно, а из первых двух следует

$$D^2 B(x_1, x_2) - (\delta/\lambda)^2 B(x_1, x_2) = 0, \quad (1.10) \quad p''(x_3) + \delta^2 p(x_3) = 0, \quad (1.11)$$

где  $\delta$  – константа разделения переменных.

Для удовлетворения граничным условиям на плоских гранях пластины подставим выражения (1.9) последовательно в каждое из граничных условий (1.2)–(1.7) и получим граничные условия для функции  $p(x_3)$

$$p(\pm 1) = 0, \quad (1.12) \quad p'(\pm 1) = 0, \quad (1.13) \quad p(\pm 1) = 0, \quad (1.14) \quad p'(\pm 1) = 0, \quad (1.15)$$

$$p'(1) = 0, \quad p(-1) = 0, \quad (1.16) \quad p'(\pm 1) + 2\lambda k^\pm p(\pm 1) = 0. \quad (1.17)$$

*Потенциальное решение.* Введем потенциальное решение с помощью соотношений

$$u_j^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = n(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j=1, 2), \quad u_3^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = q(x_3) C(x_1, x_2). \quad (1.18)$$

После подстановки выражений (1.18) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2)–(1.7) приходим к метагармоническому уравнению

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0 \quad (1.19)$$

и системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $n(x_3)$  и  $q(x_3)$

$$n''(x_3) + a_1 n(x_3) + a_2 q'(x_3) = 0, \quad q''(x_3) + a_3 q(x_3) + a_4 n'(x_3) = 0 \quad (1.20)$$

с учетом одного из граничных условий

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0; \quad (1.21) \quad M(\pm 1) = 0, \quad N(\pm 1) = 0; \quad (1.22) \quad N(\pm 1) = 0, \quad n(\pm 1) = 0; \quad (1.23)$$

$$q(\pm 1) = 0, \quad M(\pm 1) = 0; \quad (1.24) \quad M(1) = 0, \quad N(1) = 0, \quad n(-1) = 0, \quad q(-1) = 0; \quad (1.25)$$

$$M(\pm 1) + k^\pm n(\pm 1) = 0, \quad N(\pm 1) + k_3^\pm q(\pm 1) = 0. \quad (1.26)$$

Здесь

$$a_1 = (1 + \nu_0)\gamma^2, \quad a_2 = \nu_0\lambda, \quad a_3 = \frac{\gamma^2}{1 + \nu_0}, \quad a_4 = \frac{\gamma^2}{2(1 - \nu)\lambda}.$$

$$M(x_3) = G(\lambda^{-1}n' + q)/2, \quad N(x_3) = \lambda^{-2}G\nu_0(\lambda(1 - \nu)q' + \gamma^2\nu n).$$

Спектральные задачи вихревого (1.11), (1.12)–(1.17) и потенциального (1.20), (1.21)–(1.26) решений имеют счетное множество собственных значений  $\delta_k, \gamma_p$ .

Решения вида (1.8), соответствующие счетным множествам собственных значений  $\{\delta_k\}$  вихревого и  $\{\gamma_p\}$  потенциального состояний образуют систему однородных решений.

Полученные решения, точно удовлетворяющие уравнениям равновесия пластины и граничным условиям на плоских гранях, можно использовать для удовлетворения краевым условиям на боковой поверхности плиты.

Следует иметь в виду, что для некоторых граничных условий на плоских гранях, например, (1.3), собственным значениям  $\delta = 0$  и  $\gamma = 0$  соответствует бигармоническое решение, полученное в явном виде в работах [120, 174]. Однородные решения, соответствующие граничным условиям (1.4), содержат гармоническое [192, 219], а условиям (1.5) – бигармоническое [121] решения. В случае граничных условий (1.4), (1.5) ненулевые собственные значения спектральных задач  $\{\delta_k\}, \{\gamma_p\}$  являются кратными и поэтому наряду с вихревым и потенциальным решениями существует присоединённое решение [121, 192, 219]. В случае однородных плит собственные значения  $\{\delta_k\}$  и собственные функции  $\{p_k\}$  вихревого решения и собственные функции  $\{n_p, q_p\}$  потенциального решения находятся в явном

аналитическом виде. Собственные значения  $\{\gamma_p\}$  потенциального решения находятся из трансцендентных уравнений приближенно за исключением граничных условий (1.4), (1.5).

Таким образом, выражения (1.8) примут окончательный вид

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2), \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p(x_3) C_p(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь функции  $B_k(x_1, x_2)$ ,  $C_p(x_1, x_2)$  на основании выражений (1.10), (1.11) удовлетворяют уравнениям

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k/\lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0, \quad (1.28) \quad D^2 C_p(x_1, x_2) - (\gamma_p/\lambda)^2 C_p(x_1, x_2) = 0. \quad (1.29)$$

Из уравнений закона Р. Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= G(\nu\nu_0\theta + \partial_1 u_1), \quad \sigma_{12} = G(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)/2, \quad \sigma_{22} = G(\nu\nu_0\theta + \partial_2 u_2), \\ \sigma_{13} &= G(\partial_1 u_3 + \lambda^{-1} \partial_3 u_1)/2, \quad \sigma_{33} = G(\nu\nu_0\theta + \lambda^{-1} \partial_3 u_3), \quad \sigma_{23} = G(\partial_2 u_3 + \lambda^{-1} \partial_3 u_2)/2 \end{aligned}$$

с учетом соотношений (1.27) получим формулы для напряжений.

Однородные решения (их свойства и структура) системы уравнений (1.1), соответствующие четырем однородным граничным условиям (1.2), (1.4), (1.6), (1.7), представлены в работах [176, 190, 192, 196, 210, 219].

Применение однородных решений к построению точных аналитических решений частных задач трехмерной теории упругости и исследование напряженного состояния плит отражено в публикациях [178, 188, 189, 190, 223]. Рассмотрим следующие задачи: о напряженном состоянии сплошного и полого цилиндров при заданных перемещениях на торцах; изгибе кольцевой плиты со свободными от усилий плоскими гранями; об упругом равновесии слоя с цилиндрической полостью и торцами, покрытыми диафрагмой; о напряженном состоянии изотропного слоя с трещиной.

*Напряженное состояние цилиндра при заданных перемещениях на торцах.* Осесимметричная задача о напряженном состоянии изотропного цилиндра радиуса  $R=1$  и высотой  $2h$  (рис. 1.1) рассмотрена в трехмерной постановке в работе [190]. Боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений

$$\sigma_{rr}(1, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(1, x_3) = 0,$$

а на торцах граничные условия имеют вид

$$u_r(r, \pm h) = 0, \quad u_3(r, \pm h) = \mp c,$$

где  $c$  – постоянное осевое перемещение;  $(r, x_3)$  – цилиндрические координаты.

Для применения однородных решений представим компоненты вектора перемещений в виде

$$u_r = u_r^0, \quad u_3 = u_3^0 + c x_3 / h.$$

Здесь перемещения  $u_r^0$ ,  $u_3^0$  удовлетворяют уравнениям равновесия и следующим граничным условиям

$$u_r^0(r, \pm h) = u_3^0(r, \pm h) = 0, \quad \sigma_{rr}^0(1, x_3) = -2G\nu\nu_0 c/h, \quad \sigma_{r3}^0(1, x_3) = 0. \quad (1.30)$$

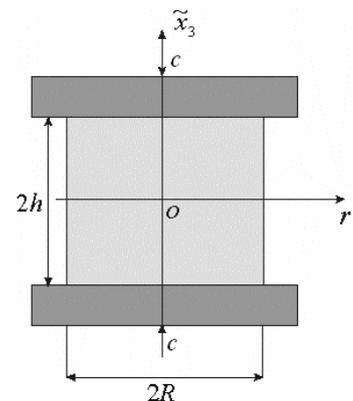


Рис. 1.1

Перемещения  $u_r^0$ ,  $u_3^0$  в цилиндрической системе координат в данном случае представляются в виде

$$u_r^0 = \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \frac{dC_p}{dr}, \quad u_3^0 = \sum_{p=1}^{\infty} q_p(x_3) C_p,$$

где  $C_p = X_p I_0(\gamma_p r) / I_0(\gamma_p)$ ;  $X_p$  – неизвестные постоянные;  $I_0$  – модифицированные функции Ф.В. Бесселя (F.W. Bessel);  $\gamma_p$  – корни уравнения  $(3 - 4\nu) \sin 2\gamma_p - 2\gamma_p = 0$  [190, 210].

Используя уравнения закона Р. Гука и применяя метод Ж. Фурье (J.B.J. Fourier) для удовлетворения граничных условий (1.30), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно комплексных неизвестных  $X_p$ . Для эффективного решения бесконечной системы определены асимптотические свойства неизвестных  $X_p$  с большими номерами  $p$

$$X_p \approx \frac{X}{p^{1-\alpha} \cos \gamma_p h} = \bar{X}_p,$$

где  $X$  – комплексная постоянная, а величина  $\alpha = 1 - k$  определяется из решения трансцендентного уравнения  $(3 - 4\nu) \sin^2(\pi k / 2) + k^2 = 4(1 - \nu)^2$  ( $0 < k < 1$ ).

Знание асимптотических свойств неизвестных  $X_p$  позволяет значительно улучшить метод простой редукции решения бесконечной системы уравнений. При построении алгоритма вычислений напряжений в окрестности линии раздела граничных условий ( $r=1$ ,  $x_3=h$ ) получены асимптотические формулы.

Некоторые результаты численных исследований отражены на рис. 1.2–1.4. На рис. 1.2 изображены графики распределения напряжений  $\sigma_{r3}$  (кривые 1–3),  $\sigma_{\theta\theta}$  (кривые 4–6),  $\sigma_{33}$  (кривые 7–9) и изменения потенциальной энергии  $W$  на торцевой поверхности цилиндра  $x_3=h$  при параметре  $h$ , равном 1; 2; 0,5 соответственно, и значениях  $r \in [0; 0,95]$ .

Графики изменения напряжений  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{r3}$  и потенциальной энергии  $W$  по высоте цилиндра представлены на рис. 1.3, 1.4 для различных значений координаты  $r$ .

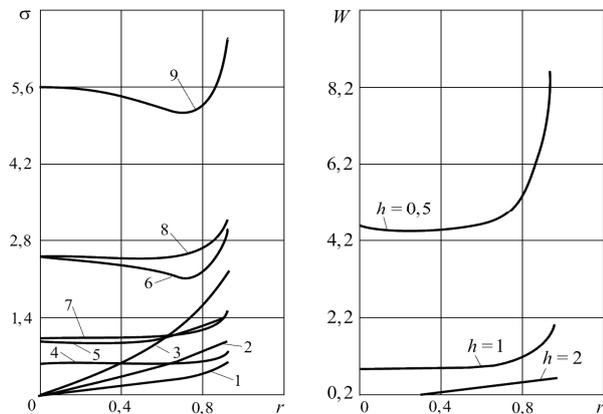


Рис. 1.2

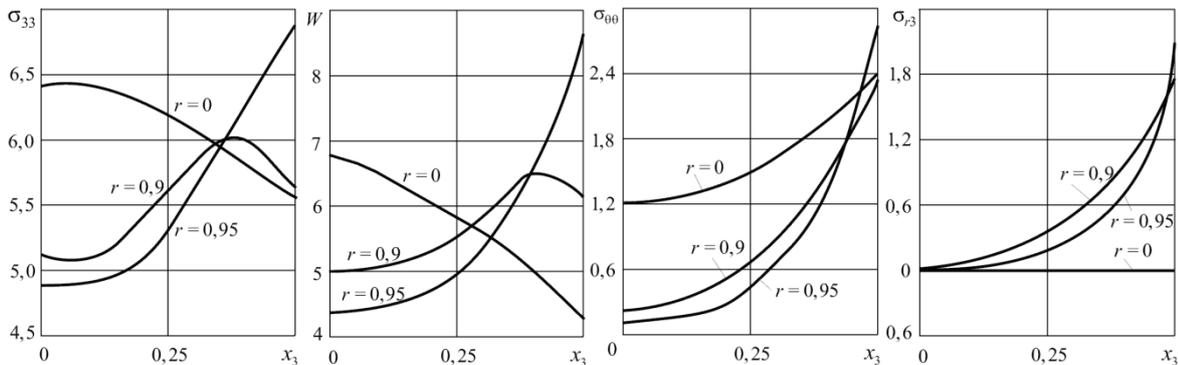


Рис. 1.3

Рис. 1.4

Следует отметить, что напряжения вычислялись с точностью до множителя  $(Gc_0)^{-1}$ , а потенциальная энергия  $W$  – до множителя  $(Gc_0^2)^{-1}$ .

Характерным для всех напряжений и потенциальной энергии является их быстрый рост при приближении к торцевой поверхности. Осевые напряжения  $\sigma_{33}$  значительно превосходят другие. С увеличением высоты цилиндра  $h$  напряжения убывают. На осевой линии  $r=0$   $\sigma_{r3}=0$ , а напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  совпадают.

*Напряженное состояние полого цилиндра с ограничениями по торцам* [188]. Рассмотрим в цилиндрических координатах  $(r, x_3)$  полый цилиндр высотой  $2h$ , с внутренним  $R_0$  и внешним  $R_1$  радиусами, расположенный симметрично относительно координатной плоскости  $x_3=0$  (рис. 1.5).

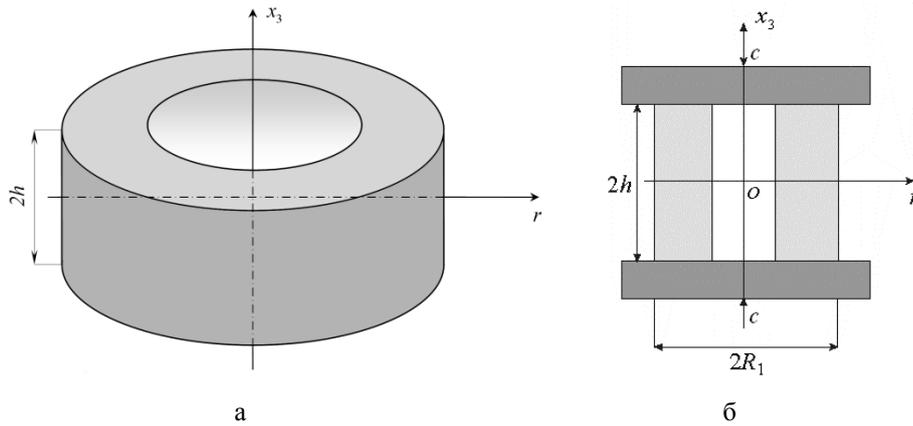


Рис. 1.5

На торцах цилиндра заданы постоянные по радиусу осевые перемещения, а радиальные перемещения отсутствуют

$$u_r(r, \pm h) = 0, \quad u_3(r, \pm h) = \mp c.$$

На боковых поверхностях цилиндра заданы сжимающие усилия  $P_0(x_3)$  и  $P_1(x_3)$

$$\sigma_{rr}(R_i, x_3) = P_i(x_3), \quad \sigma_{r3}(R_i, x_3) = 0 \quad (i=0,1).$$

Функции  $P_i(x_3)$  являются четными.

Решение поставленной задачи с учетом рассматриваемой симметрии и с использованием однородных решений имеет вид

$$u_r = \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} n_p(x_3) \left( X_p I_0^*(r^*) P_0^+(r^*) + Y_p K_0^*(r^*) P_0^-(r^*) \right),$$

$$u_3 = \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} q_p(x_3) \left( X_p I_0^*(r^*) + Y_p K_0^*(r^*) \right) + \frac{c}{h} x_3,$$

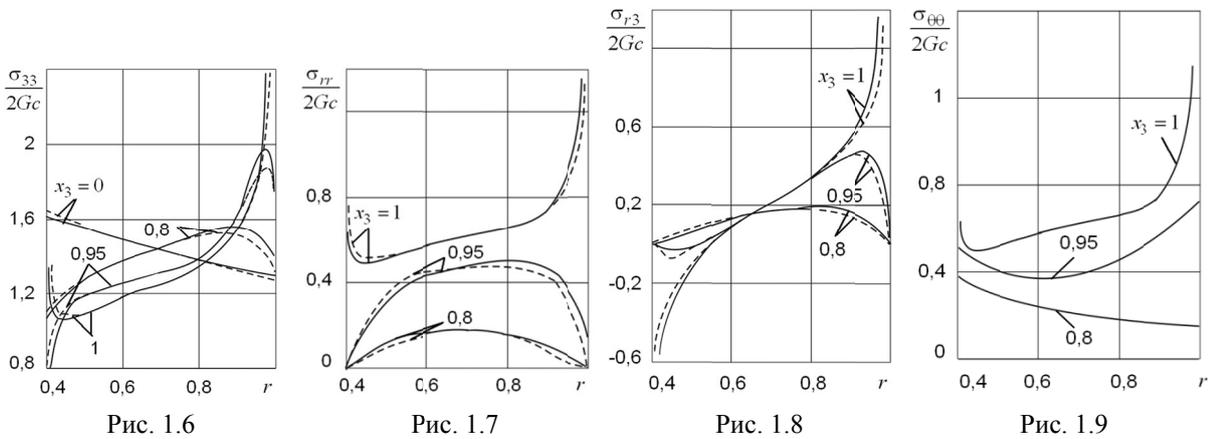
где

$$P_0^+(\gamma_p r) = \gamma_p \frac{I_1(r^*)}{I_0(r^*)}, \quad P_0^-(\gamma_p r) = -\gamma_p \frac{K_1(r^*)}{K_0(r^*)}; \quad I_0^*(r^*) = \frac{I_0(r^*)}{I_0(R^*)}, \quad K_0^*(r^*) = \frac{K_0(r^*)}{K_0(R^*)};$$

$$r^* = \gamma_p r, \quad R^* = \gamma_p R; \quad R = (R_1 + R_0)/2;$$

$I_i(r^*)$ ,  $K_i(r^*)$  ( $i=0,1$ ) – модифицированные функции Ф.В. Бесселя. Неизвестные коэффициенты  $X_p$  и  $Y_p$  в соотношениях определяем из граничных условий. Процедура их определения аналогична описанной выше задачи и представлена в работе [188].

На рис. 1.6–1.9 изображены графики изменения напряжений по радиусу цилиндра  $r$  для некоторых значений координаты  $x_3$ , когда  $h=1$ ,  $R_0/R_1=0,4$ ,  $P_0=P_1=0$ ,  $\nu=1/3$ . Штриховыми линиями на рис. 1.6–1.8 представлены результаты, полученные методом суперпозиции [228]. Как следует из рис. 1.6–1.8, полученные предложенным здесь методом результаты в области  $0,5 < r < 0,9$  и  $0 \leq x_3 \leq h$  совпадают с известными, а вблизи цилиндрических поверхностей отличаются незначительно, причем для всех напряжений характерным является их значительный рост при значении  $x_3 \rightarrow h$  и локализация вблизи граничных поверхностей цилиндра. При подходе к линиям раздела координатных поверхностей цилиндра напряжения резко возрастают и стремятся к бесконечности при подходе к угловым точкам. В области  $0,5 < r < 0,9$  и  $|x_3| \leq 0,9$  напряжения распределены равномерно и можно получать достоверные результаты на основе приближенных методов. Условия на торцах цилиндра  $\sigma_{rr}(r, \pm h) = \sigma_{\theta\theta}(r, \pm h) = (1-\nu)\nu^{-1}\sigma_{33}$  выполняются с высокой степенью точности и совпадают с приведенными в работе [228].



На основе прикладных теорий невозможно получить достоверные результаты вблизи абсолютно жесткой заделки границы, что следует из сравнения этих результатов с аналогичными в прикладных теориях оболочек [228] и пластин [71].

*Изгиб толстой кольцевой плиты со свободными от усилий плоскими гранями.* Изгиб толстой кольцевой плиты нормальными усилиями, приложенными к боковым поверхностям (рис. 1.5, а), рассмотрен в работе [178]. Усилия изменяются по толщине по степенному закону. Если нагружена внешняя боковая поверхность плиты, то граничные условия имеют вид

$$\sigma_{rr}(R, x_3) = P_0 x_3^{2k+1} \quad (k=0, 1, \dots), \quad \sigma_{r3}(R, x_3) = 0, \quad \sigma_{rr}(1, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(1, x_3) = 0.$$

В случае нагружения внутренней боковой поверхности плиты имеем

$$\sigma_{rr}(R, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(R, x_3) = 0, \quad \sigma_{rr}(1, x_3) = P_0 x_3^{2k+1}, \quad \sigma_{r3}(1, x_3) = 0.$$

где  $R = R_1/R_0$ .

Плоские грани пластины свободны от усилий

$$\sigma_{33}(r, \pm 1) = 0, \quad \sigma_{r3}(r, \pm 1) = 0.$$

Однородные решения [119], удовлетворяющие граничным условиям на плоских гранях и уравнениям равновесия, в рассматриваемом случае можно записать в виде суммы бигармонического, определяемого функцией  $F(r)$ , и потенциального, обусловленного функциями  $C_p(r)$ , состояний:

$$u_r(r, x_3) = x_3 \frac{dF}{dr} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \frac{dC_p}{dr}, \quad u_3(r, x_3) = -\frac{1}{\lambda} F + \lambda \frac{1}{1-\nu} \left(1 - \frac{\nu}{2} x_3^2\right) D^2 F - \sum_{p=1}^{\infty} q_p(x_3) C_p.$$

Здесь

$$\lambda = \frac{h}{R_0}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad F(r) = a_1 r^2 + a_2 \ln r,$$

$$C_p(r) = X_p \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^* R)} + Y_p \frac{K_0(\gamma_p^* r)}{K_0(\gamma_p^*)} = X_p I_0^*(r) + Y_p K_0^*(r)$$

$\gamma_p^* = \gamma_p / \lambda$ ,  $\gamma_p$  – корни уравнения  $\sin 2\gamma - 2\gamma = 0$ .

Для удовлетворения граничных условий вблизи цилиндрических поверхностей плиты используется метод ортогонализации, взяв в качестве базиса полную на  $[-1; 1]$  систему функций

$$(\sin \delta_m x_3, \cos \delta_m x_3) \quad (\delta_m = \pi(2m+1)/2, m = 0, 1, \dots).$$

Это позволяет свести краевую задачу к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно  $2p + 2$  произвольных постоянных  $a_1, a_2, X_p, Y_p$ .

После решения системы относительно неизвестных  $a_1, a_2, X_p, Y_p$  перемещения и напряжения в плите находятся по известным формулам [55, 178].

Численные расчеты проводились с коэффициентом Пуассона  $\nu = 1/3$ . На рис. 1.10 приведены графики изменения напряжений  $P_0^{-1} \sigma_{\theta\theta}$  по толщине плиты на внешней боковой поверхности, когда  $R = 3$ , для различных относительных толщин  $\lambda$ . Штриховая линия относится к загрузению плиты по линейному закону, а сплошные кривые – к загрузению внешней поверхности по закону  $P_0 x_3^3$ . На рис. 1.11 даны эпюры тех же напряжений, но при  $\lambda = 2$  и различных  $R$ .

Характер изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  на плоских гранях плиты по перемычке между боковыми поверхностями можно проследить на рис. 1.12. Представляет интерес поведение потенциальной части решения  $\sigma_{\theta\theta}$  при отходе от боковых поверхностей в различных сечениях плиты. Графики изменения указанной величины при различных  $\lambda$  приведены на рис. 1.13.

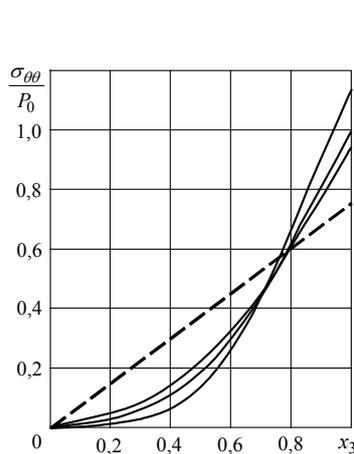


Рис. 1.10

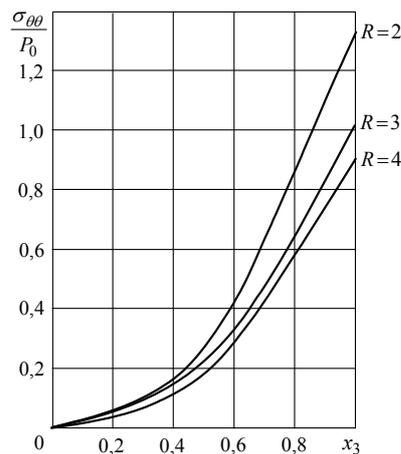


Рис. 1.11

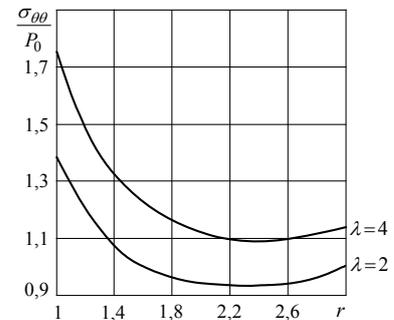


Рис. 1.12

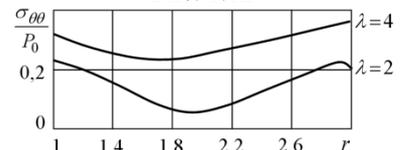


Рис. 1.13

Точность решения задачи контролировалась проверкой удовлетворения граничных условий на боковых поверхностях плиты. При этом бесконечная система линейных алгебраических уравнений решалась методом редукции, ее максимальный порядок брался равным 62, что позволило удовлетворить граничные условия на боковых поверхностях плиты с точностью до 2–3 % от величины  $P_0$  в широких диапазонах изменения  $\lambda$  и  $R$ .

Упругое равновесие слоя с цилиндрической полостью и покрытыми диафрагмой торцами. Осесимметричная задача о равновесии изотропного слоя, ослабленного цилиндрической полостью (рис. 1.14), рассмотрена в работах [192, 219].

На торцах слоя отсутствуют радиальные перемещения  $u_r$  и нормальные напряжения  $\sigma_{33}$

$$u_r(r, \pm 1) = 0, \quad \sigma_{33}(r, \pm 1) = 0,$$

а на поверхности полости граничные условия имеют вид

$$\sigma_{rr}(1, x_3) = f(x_3), \quad \sigma_{r3}(1, x_3) = 0.$$

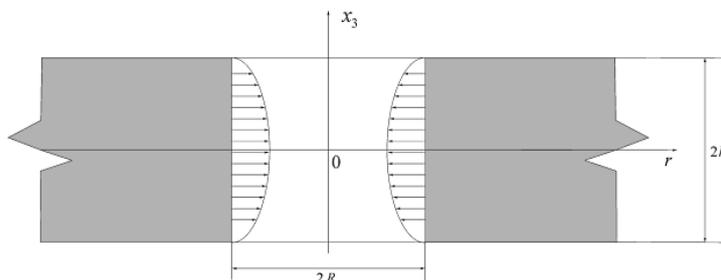


Рис. 1.14

Здесь  $f(x_3)$  – четная функция;  $(r, x_3)$  – цилиндрические координаты. Пусть на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r3}$  равны нулю.

Однородные решения уравнений равновесия в перемещениях (1.1), удовлетворяющие граничным условиям на плоских гранях, в цилиндрической системе координат  $(r, x_3)$  с учетом симметрии относительно плоскости  $x_3 = 0$  имеют вид

$$u_r = \sum_{k=1}^{\infty} (L_1 C_k + r X_k) \cos \delta_k x_3, \quad u_3 = - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda^{-1} \delta_k C_k + \lambda \delta_k^{-1} (r L_1 X_k + 4(1-\nu) X_k) \right] \sin \delta_k x_3,$$

где

$$\delta_k = \frac{\pi(2k-1)}{2}, \quad L_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad C_k(r) = A_k \frac{K_0(\delta_k r / \lambda)}{K_0(\delta_k / \lambda)}, \quad X_k(r) = D_k \frac{K_0(\delta_k r / \lambda)}{K_0(\delta_k / \lambda)},$$

$A_k, D_k$  – коэффициенты, которые находятся в явном виде из граничных условий на боковой поверхности полости

$$A_k = \frac{a_{11} f_k}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad D_k = \frac{a_{21} f_k}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}; \quad a_{11} = t \left( t + \frac{K_1(t)}{K_0(t)} \right), \quad a_{12} = 1 - 2\nu - t \frac{K_1(t)}{K_0(t)},$$

$$a_{21} = t^2 \frac{K_1(t)}{K_0(t)}, \quad a_{22} = 2(1-\nu) \frac{K_1(t)}{K_0(t)} - t, \quad f_k = \int_{-1}^1 f(x_3) \cos \delta_k x_3 dx_3, \quad t = \delta_k / \lambda.$$

Числовые расчеты проведены для нормальных нагрузок на контуре  $f(x_3) = 1 - x_3^2$  и  $f(x_3) = \cos(\pi x_3 / 2)$ . Коэффициент С.Д. Пуассона был принят равным 0,3. В случае нагрузки  $f(x_3) = \cos(\pi x_3 / 2)$  полученное решение является точным и использовалось в качестве эталонного. Наряду с этим в случае нагрузки  $1 - x_3^2$  точность решения задачи контролировалась проверкой граничных условий на боковой поверхности полости пластины. Отклонение полученных значений напряжений  $\sigma_{rr}$  от заданных не превышало величины 0,001 при количестве слагаемых в рядах не более 10. Относительная толщина  $\lambda$  изменялась от 0,1 до 10.

На рис. 1.15 для нагрузки  $1 - x_3^2$  приведены графики распределения напряжений  $-\sigma_{\theta\theta}$  по толщине вблизи полости слоя при различных  $\lambda$ . Штриховая линия соответствует однородным граничным условиям на торце слоя в напряжениях [123]. В работе [123] представлены эпюры распределения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  для нагрузки  $x_3^2$ . Здесь они преобразованы для нагрузки  $1 - x_3^2$ . Приведенные данные свидетельствуют о том, что максимальное по модулю напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  действует на срединной плоскости и с увеличением  $\lambda$  растет. Из этих данных видно, что различные условия, в которых находятся торцы слоя, существенно влияют на характер

напряженного состояния. Следует отметить, что качественная картина распределения напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{33}$  при различных  $\lambda$  такая же.

На рис. 1.16 представлены графики напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $-\sigma_{\theta\theta}$  вблизи полости при  $\lambda=1$ . Сплошные кривые соответствуют нагрузке  $1-x_3^2$ , а штриховые – нагрузке  $\cos(\pi x_3/2)$ . Значения функций  $\cos(\pi x_3/2)$  и  $1-x_3^2$  на отрезке  $[-1; 1]$  мало отличаются друг от друга. В результате наблюдаются незначительные различия и в напряжениях  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ , а также  $\sigma_{r3}$ . Аналогичная картина наблюдается в области слоя при изменении  $\lambda$ .

На рис. 1.17 изображены графики распределения напряжений  $\sigma_{r3}$  при различных значениях  $r$  и  $\lambda$  вблизи торца слоя ( $x_3=1$ ). Касательные напряжения  $\sigma_{r3}$  достигают максимальных значений в области при  $r=1,5$ . С уменьшением  $\lambda$  максимальные значения увеличиваются. При  $r > 4$  они практически равны нулю. Однако следует иметь в виду, что скорость убывания напряжений зависит от значения  $\lambda$ .

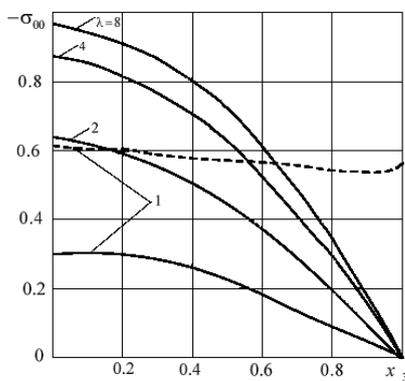


Рис. 1.15

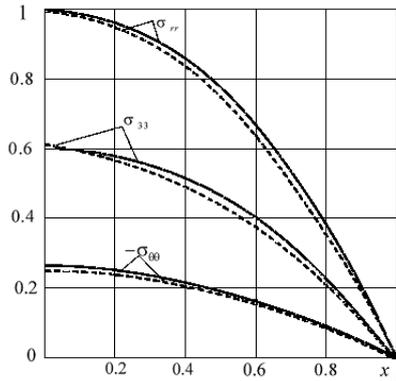


Рис. 1.16

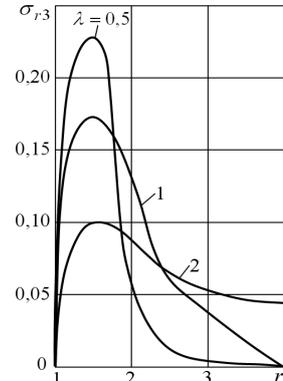


Рис. 1.17

Выше на рис. 1.15–1.17 приведены графики изменения напряжений с точностью до множителя  $(2G)^{-1}$ , где  $G$  – модуль сдвига.

Указанное выше дает основание утверждать, что при данных граничных условиях на торцах пластины истинную картину о напряженном состоянии можно получить только с использованием трехмерной теории упругости. Хорошее удовлетворение граничным условиям, точное решение уравнений равновесия и согласованность с эталонным решением является достаточно надежной гарантией метода решения данного класса задач.

*Напряженное состояние изотропного слоя с трещиной.* В работе [223] рассмотрено равновесие однородного, изотропного, упругого слоя, который занимает область

$$V = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) : |\tilde{x}_1| < \infty, |\tilde{x}_2| < \infty, |\tilde{x}_3| < h\}$$

и содержит прямоугольную в плане трещину в плоскости  $\tilde{x}_1 O \tilde{x}_3$  (рис. 1.18). Размерные декартовы координаты  $\tilde{x}_i$  связаны с безразмерными координатами  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/a, & x_2 &= \tilde{x}_2/a, \\ x_3 &= \tilde{x}_3/(\lambda a), & \lambda &= h/a. \end{aligned}$$

Пусть на бесконечности ( $x_j \rightarrow \infty$ ,  $j=1,2$ ) напряжения в слое равны нулю

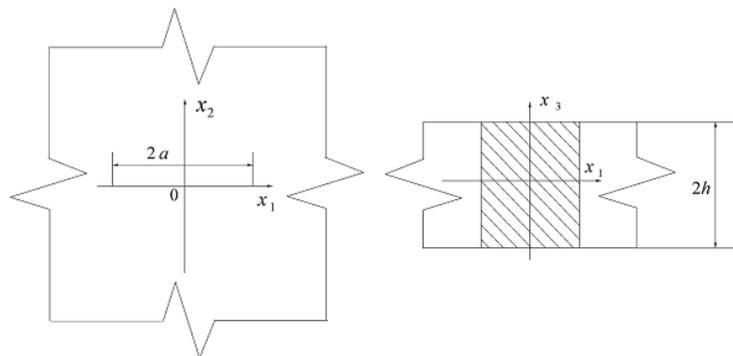


Рис. 1.18

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{22} = \sigma_{13} = 0.$$

На плоских гранях слоя и поверхности трещины граничные условия имеют вид

$$u_3(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \sigma_{22} = f(x_3), f(x_3) = f(-x_3)$$

при  $|x_1| < 1, x_2 = 0^\pm, |x_3| \leq 1$ .

Методика решения задачи основывается на сочетании методов однородных решений [121] и двумерного интегрального преобразования Ж. Фурье. Однородные решения в данном случае имеют вид [121]

$$\begin{aligned} u_1 &= -\partial_1(F + F_1) + \sum_{k=1}^{\infty} [\partial_2 B_k + \partial_1 C_k + x_1 X_k] \cos \beta_k x_3, \\ u_2 &= -\partial_2(F - F_1) + \sum_{k=1}^{\infty} [-\partial_1 B_k + \partial_2 C_k + x_2 X_k] \cos \beta_k x_3, \\ u_3 &= -\sum_{k=1}^{\infty} [\beta_k \lambda^{-1} C_k + \lambda \beta_k^{-1} (x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + 4(1-\nu) X_k)] \sin \beta_k x_3. \end{aligned}$$

Здесь функции  $F(x_1, x_2), F_1(x_1, x_2), B_k(x_1, x_2), C_k(x_1, x_2); X_k(x_1, x_2)$  являются решением уравнений

$$D^2 D^2 F = 0, D^2 F_1 = 0, D^2 B_k = (\beta_k / \lambda)^2 B_k, D^2 C_k = (\beta_k / \lambda)^2 C_k, D^2 X_k = (\beta_k / \lambda)^2 X_k.$$

При этом функции  $F_1$  и  $F$  связаны между собой соотношениями

$$\partial_1^2 F_1 = -(1-\nu) D^2 F, \partial_2^2 F_1 = (1-\nu) D^2 F.$$

В результате задача сведена к решению интегрального уравнения относительно функций  $\psi_k(y_1)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) [223]

$$\sigma_{22}^{(k)}(x_1, 0) = \sigma_{22}^{*(k)}(x_1, 0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(y_1)}{x_1 - y_1} dy_1 - \frac{\alpha_k^2}{4\pi} \int_{-1}^1 (x_1 - y_1) G_{1,0}(\alpha_k |x_1 - y_1|) \psi_k(y_1) dy_1.$$

Данное интегральное уравнение преобразовано к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{y_1 - x_1} + F_k(y_1, x_1) \right\} \psi_k(y_1) dy_1 = f_k(x_1); \quad F_k(y_1, x_1) = \alpha_k^2 \frac{y_1 - x_1}{2} G_{1,0}(\alpha_k |y_1 - x_1|)$$

$$f_k(x_1) = \sigma_{22}^{*(k)}(x_1, 0) - \sigma_{22}^{(k)}(x_1, 0); \quad |x_1| < 1; \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

с учетом дополнительного условия

$$\int_{-1}^1 \psi_k(y_1) dy_1 = 0.$$

Для численного решения интегрального уравнения использовались известные методы: обобщенный метод Х. Мультиппа (H. Multhopp) и метод механических квадратур.

При  $k = 0$  регулярное ядро интегрального уравнения отсутствует и при равномерной нагрузке ( $f_k(x_1) = \text{const}$ ) получаем разрешающее уравнение, соответствующее состоянию плоской деформации.

Выражение для коэффициента интенсивности нормальных напряжений определялось исходя из поведения интеграла типа А.Л. Коши на продолжении линии интегрирования и известного распределения напряжений у концов разреза. Для  $k$ -го члена разложения нагрузки  $f(x_3)$  оно имеет вид (с точностью до множителя  $2G\sqrt{a}$ )

$$K_{1k} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x^2} \psi_k(x),$$

где  $\psi_k(x)$  – решение, соответствующее  $k$ -му члену разложения нагрузки. Окончательное значение коэффициента интенсивности дается формулой

$$K_1 = \sum_{k=0}^N K_{1k} \cos k\pi x_3.$$

Численные исследования проводились для различных типов загрузки берегов разреза. Вначале нагрузка выбиралась в виде  $f(x_3) = \cos(k\pi x_3)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), что соответствует гармоникам разложения симметричной нагрузки в ряд Ж. Фурье. Тогда для каждого  $k$  имеем одно интегральное уравнение с правой частью равной единице, из которого определим амплитудное значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений. В табл. 1.1 представлены результаты этих расчетов для различных относительных толщин слоя  $\lambda$ .

Таблица 1.1

$k$	$\lambda$					
	0,5	1	2	4	8	16
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1	2,15	1,64	1,32	1,14	1,05	1,02
2	2,83	2,15	1,64	1,32	1,14	1,05
3	3,21	2,53	1,91	1,48	1,23	1,10
4	3,41	2,83	2,15	1,64	1,32	1,14
5	3,52	3,05	2,35	1,78	1,40	1,18
6	3,58	3,21	2,53	1,91	1,48	1,23
7	3,62	3,32	2,69	2,03	1,56	1,27
8	3,65	3,41	2,83	2,15	1,64	1,32
9	3,67	3,47	2,94	2,25	1,71	1,36
10	3,69	3,52	3,05	2,35	1,78	1,40

Рассматривалось загрузение берегов трещины нормальными усилиями, изменяющимися по закону  $f(x_3) = x_3^2$ . Бралось в расчет двадцать членов разложения нагрузки. Относительная толщина слоя варьировалась в широких пределах:  $\lambda = 0,5 \div 50$ .

На рис. 1.19 показаны графики изменения коэффициента интенсивности нормальных напряжений по толщине слоя для нескольких значений  $\lambda$ . В вариантах представлены: 1 –  $\lambda = 0,5$ ; 2 –  $\lambda = 1$ ; 3 –  $\lambda = 3$ . Пунктирная кривая соответствует случаю  $\lambda \rightarrow \infty$ .

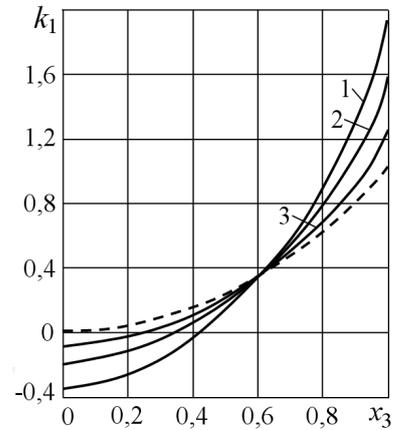


Рис. 1.19

На рис. 1.20 показаны результаты, позволяющие оценить влияние относительной толщины плиты  $\lambda$  на распределение коэффициента интенсивности нормальных напряжений. Графику под номером 1 соответствует коэффициент интенсивности при  $x_3 = 1$  и читается по правой шкале, а под номером 2 – при  $x_3 = 0$  и читается по левой шкале.

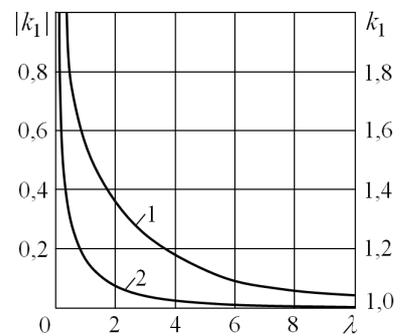


Рис. 1.20

Из графиков следует, что поведение коэффициента интенсивности нормальных напряжений отражает характер распределения нагрузки. Однако в области срединной плоскости плиты происходит контакт берегов разреза – участок, соответствующий отрицательным значениям коэффициента интенсивности. Поэтому данные результаты следует рассматривать как приближенные, не учитывающие контакт берегов разреза. На лицевых гранях слоя коэффициент интенсивности достигает своего максимального значения и превышает величину, соответствующую постоянной нагрузке. Заметное влияние толщины слоя  $\lambda$  сказывается при  $\lambda < 10$ . Однако при  $\lambda < 3$  резко возрастает зона контакта берегов разреза. Поэтому для нагрузки  $x_3^2$  полученные результаты не нуждаются в уточнении при  $3 < \lambda < 10$ . Для  $\lambda > 10$  можно использовать решения, соответствующие  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**1.2. Термоупругое равновесие плит.** Задача исследования термонапряженного состояния изотропной плиты с учетом принятых в работах [55, 74, 229] обозначений сводится к интегрированию уравнений равновесия

$$\lambda^{-2} \partial_3^2 u_j + D^2 u_j + \nu_0 \partial_j (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \lambda^{-1} \partial_j \partial_3 u_3 = (3\nu_0 - 1) \partial_j u_4 \quad (j=1, 2),$$

$$\lambda^{-1} (1 + \nu_0) \partial_3^2 u_3 + \lambda D^2 u_3 + \nu_0 \partial_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) = (3\nu_0 - 1) \partial_3 u_4 \quad (1.31)$$

и теплопроводности

$$\lambda^2 D^2 u_4 + \partial_3^2 u_4 = 0, \quad (1.32)$$

в которых  $u_4 = \alpha_t T$  – безразмерная температура,  $\alpha_t$  – температурный коэффициент линейного расширения,  $T$  – размерная температура.

Напряжения связаны с перемещениями и температурой уравнениями закона Ж.-М.К. Дюамеля – Ф.Е. Неймана

$$\sigma_{11} = \nu \nu_0 \theta + \partial_1 u_1 - (1 + \nu) \nu_0 u_4, \quad 2\sigma_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2, \quad \sigma_{22} = \nu \nu_0 \theta + \partial_2 u_2 - (1 + \nu) \nu_0 u_4,$$

$$2\sigma_{13} = \partial_1 u_3 + \lambda^{-1} \partial_3 u_1, \quad \sigma_{33} = \nu \nu_0 \theta + \lambda^{-1} \partial_3 u_3 - (1 + \nu) \nu_0 u_4, \quad 2\sigma_{23} = \partial_2 u_3 + \lambda^{-1} \partial_3 u_2. \quad (1.33)$$

В системе уравнений (1.31) функция  $u_4(x_1, x_2, x_3)$  становится известной после решения соответствующей задачи теплопроводности.

На этапе построения однородных решений уравнений (1.31), (1.32) ограничимся рассмотрением только однородных механических граничных условий на плоских гранях пластины (1.2)–(1.6). В качестве основных тепловых краевых условий на торцах пластины могут быть заданы распределение температуры, плотность теплового потока или условие конвективного теплообмена между поверхностью тела и средой:

$$d_1 u_4(x_1, x_2, 1) + d_2 \lambda^{-1} \partial_3 u_4(x_1, x_2, 1) = 0, \quad d_3 u_4(x_1, x_2, -1) - d_4 \lambda^{-1} \partial_3 u_4(x_1, x_2, -1) = 0, \quad (1.34)$$

где  $d_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – постоянные, характеризующие теплообмен с окружающей средой. Условия (1.34) включают в себя частные случаи, например, плоские грани пластины поддерживаются при нулевой температуре ( $d_2 = d_4 = 0$ )

$$u_4(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (1.35)$$

или теплоизолированы ( $d_1 = d_3 = 0$ )

$$\partial_3 u_4(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \quad (1.36)$$

Для определения частных решений задачи (1.32), (1.34) используем метод Ж.Фурье. Полагая

$$u_4(x_1, x_2, x_3) = f(x_3) Q(x_1, x_2), \quad (1.37)$$

получим

$$D^2 Q(x_1, x_2) = (\delta/\lambda)^2 Q(x_1, x_2), \quad (1.38) \quad f(x_3) = C_1 \cos \delta x_3 + C_2 \sin \delta x_3. \quad (1.39)$$

При этом

$$C_1 = d_1 \frac{\sin \delta}{\delta} + d_2 \frac{\cos \delta}{\lambda}, \quad C_2 = d_2 \frac{\sin \delta}{\lambda} - d_1 \frac{\cos \delta}{\delta}, \quad \delta = \delta_k \quad (k = \overline{1, \infty}) - \text{корни уравнения}$$

$$\text{tg} 2\delta = \frac{\delta}{\lambda} \frac{d_1 d_4 + d_2 d_3}{d_2 d_4 \lambda^{-2} \delta^2 - d_1 d_3}. \quad (1.40)$$

Таким образом, решение задачи теплопроводности сведено к нахождению счетного множества метагармонических функций  $Q_k(x_1, x_2)$  из уравнения (1.38) с учетом заданных неоднородных

граничных условий на боковой поверхности плиты. В результате решение температурной задачи имеет вид

$$u_4(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_3) Q_k(x_1, x_2). \quad (1.41)$$

Решение неоднородной системы уравнений (1.31) с известной правой частью будем искать в виде

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2, x_3) + u_i^1(x_1, x_2, x_3), \quad \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3) + \sigma_{ij}^1(x_1, x_2, x_3), \quad (1.42)$$

где  $u_i^0$  – общее решение системы (1.31), когда  $u_4 = 0$ ;  $u_i^1$  – частное решение неоднородной системы (1.31), обусловленное температурным полем. Найдем такое частное решение  $u_i^1$  системы (1.31) (однородное тепловое состояние), которое удовлетворяло бы заданным однородным механическим граничным условиям на плоских гранях пластины. Такой подход позволяет сразу применить метод однородных решений для нахождения решения  $u_i^0$ .

Определение частного решения системы уравнений термоупругости является важным этапом. В 1937 г. одновременно П.Ф. Папкович и Дж.Н. Гудьер получили частное решение  $u_i^1$  путем введения термоупругого потенциала перемещений  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$

$$u_1^1 = \partial_1 \Phi, \quad u_2^1 = \partial_2 \Phi, \quad u_3^1 = \lambda^{-1} \partial_3 \Phi. \quad (1.43)$$

Из системы уравнений (1.31) и соотношений (1.43) следует, что функция  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  является решением уравнения С.Д. Пуассона

$$D^2 \Phi + \frac{1}{\lambda^2} \partial_3^2 \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} u_4. \quad (1.44)$$

По известному температурному полю  $u_4(x_1, x_2, x_3)$  находится частное решение уравнения (1.44) для потенциала  $\Phi$ . После этого определяются перемещения  $u_i^1$  и тепловые напряжения  $\sigma_{ij}^1$  на основании уравнений (1.33). Далее на этапе построения общего решения  $u_i^0$  однородной системы (1.31) возникает проблема удовлетворения одновременно неоднородным граничным условиям на плоских гранях и боковой поверхности пластины. Поэтому необходимо дополнительно построить неоднородные решения для слоя при заданных на его торцах граничных условиях. Приемы эффективного построения неоднородных решений указаны, например, в работах [93, 94, 103].

Простой и изящный способ построения частного решения уравнений термоупругости предложил А.И. Лурье [103]

$$u_1^1 = \partial_1 \Phi, \quad u_2^1 = \partial_2 \Phi, \quad u_3^1 = -\lambda^{-1} \partial_3 \Phi. \quad (1.45)$$

Важным следствием данного решения является то, что напряжения  $\sigma_{i3}^1$  ( $i=1,2,3$ ) тождественно равны нулю в области пластины. В результате использование однородных решений системы уравнений упругого равновесия изотропных пластин, плоские грани которых свободны от напряжений (1.3), позволяет свести решение термоупругой задачи к соответствующей упругой.

Термоупругий потенциал  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  вида (1.45) является гармонической функцией

$$D^2 \Phi + \frac{1}{\lambda^2} \partial_3^2 \Phi = 0 \quad (1.46)$$

и определяется из уравнения

$$D^2 \Phi = (1+\nu) u_4. \quad (1.47)$$

В частности, из уравнений (1.46) и (1.47) следует

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -\lambda^2(1+\nu) \iint u_4(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_3 + x_3 \Phi_0(x_1, x_2) + \Phi_1(x_1, x_2). \quad (1.48)$$

Здесь  $\Phi_0, \Phi_1$  – гармонические функции.

Температурное напряжение определим из уравнений (1.33) с учетом выражений (1.45)

$$\sigma_{11}^1 = -\partial_2^2 \Phi, \quad \sigma_{22}^1 = -\partial_1^2 \Phi, \quad \sigma_{12}^1 = \partial_1 \partial_2 \Phi, \quad \sigma_{i3}^1 \equiv 0 \quad (i=1,2,3). \quad (1.49)$$

В результате для определения  $u_i^0$  приходим к решению известной краевой задачи трехмерной теории упругости. Однородные решения данной задачи получены А.И. Лурье [119].

Следует иметь ввиду, что частное решение (1.45) является эффективным только в случае, когда плоские грани пластины свободны от напряжений. При построении частных решений для других граничных условий на торцах пластины, например, (1.2), (1.4)–(1.7) возникают такие же проблемы, как и в случае применения термоупругого потенциала вида (1.43).

Для построения частных решений системы (1.31), удовлетворяющих произвольным однородным механическим граничным условиям на плоских гранях пластины, компоненты вектора перемещений представим в виде [187, 210, 226]

$$u_1^1 = t_1(x_3) \partial_1 Q(x_1, x_2), \quad u_2^1 = t_2(x_3) \partial_2 Q(x_1, x_2), \quad u_3^1 = \lambda^{-1} t_2(x_3) Q(x_1, x_2). \quad (1.50)$$

Здесь  $t_1(x_3), t_2(x_3)$  – неизвестные функции;  $Q(x_1, x_2)$  – решение уравнения (1.38).

Для определения функций  $t_1(x_3), t_2(x_3)$  получена неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$t_1'' + (1+\nu_0) \delta^2 t_1 + \nu_0 t_2' = 2\lambda^2(1+\nu) \nu_0 f, \quad t_2'' + \frac{\delta^2}{1+\nu_0} t_2 + \delta^2 \frac{\nu_0}{1+\nu_0} t_1' = \lambda^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} f'. \quad (1.51)$$

Известная функция  $f(x_3)$  в правой части системы (1.51) имеет вид (1.39), а  $\delta$  – решение уравнения (1.40).

Краевые условия (1.2), (1.4)–(1.6) с учетом выражений (1.50) и уравнений (1.33) в терминах функций  $t_1(x_3), t_2(x_3)$  запишутся так:

$$t_1(\pm 1) = 0, \quad t_2(\pm 1) = 0; \quad (1.52) \quad t_1(\pm 1) = 0, \quad t_2'(\pm 1) = \lambda^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} f(\pm 1); \quad (1.53)$$

$$t_1'(\pm 1) = 0, \quad t_2(\pm 1) = 0; \quad (1.54)$$

$$t_1'(1) + t_2(1) = 0, \quad t_2'(1) + \delta^2 \frac{\nu}{1-\nu} t_1(1) = \lambda^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} f(1), \quad t_1(-1) = 0, \quad t_2(-1) = 0. \quad (1.55)$$

В результате функции  $t_1, t_2$  находятся из системы уравнений (1.51) с учетом одного из граничных условий (1.52)–(1.55).

В некоторых случаях, например, когда на плоских гранях пластины имеют место граничные условия смешанного типа (1.4), (1.5), заслуживает внимания следующая более простая форма частного решения [226]

$$u_1^1 = t(x_3) \partial_1 Q(x_1, x_2), \quad u_2^1 = t(x_3) \partial_2 Q(x_1, x_2), \quad u_3^1 = \lambda^{-1} t'(x_3) Q(x_1, x_2). \quad (1.56)$$

Из уравнений (1.31) и выражений (1.37) и (1.56) следует уравнение для определения неизвестной функции  $t(x_3)$  с учетом заданных граничных условий на плоских гранях пластины

$$t''(x_3) + \delta^2 t(x_3) = \lambda^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} f(x_3). \quad (1.57)$$

Например, если выполняются краевые условия типа диафрагмы (1.4) и равенство нулю температуры на плоских гранях пластины (1.35), то однородное тепловое состояние в случае симметричной относительно срединной плоскости пластины имеет вид (задача А)

$$\begin{aligned} u_1^1 &= \lambda^2(1+\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \partial_1 Q_k(x_1, x_2) \frac{\cos \delta_k x_3}{\delta_k^2}, & u_2^1 &= \lambda^2(1+\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \partial_2 Q_k(x_1, x_2) \frac{\cos \delta_k x_3}{\delta_k^2}, \\ u_3^1 &= \lambda(1+\nu) \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x_1, x_2) \frac{\sin \delta_k x_3}{\delta_k}, & u_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x_1, x_2) \cos \delta_k x_3, & \delta_k &= \frac{2k-1}{2} \pi, \end{aligned} \quad (1.58)$$

а в задаче *Б* (кососимметричная деформация) таково

$$\begin{aligned} u_1^1 &= \lambda^2(1+\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \partial_1 Q_k(x_1, x_2) \frac{\sin \delta_k x_3}{\delta_k^3}, & u_2^1 &= \lambda^2(1+\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \partial_2 Q_k(x_1, x_2) \frac{\sin \delta_k x_3}{\delta_k^3}, \\ u_3^1 &= -\lambda(1+\nu) \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x_1, x_2) \frac{\cos \delta_k x_3}{\delta_k^2}, & u_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x_1, x_2) \frac{\sin \delta_k x_3}{\delta_k}, & \delta_k &= k\pi. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Другие виды граничных условий рассмотрены в работах [55, 187, 210, 226].

Рассмотрим задачи о термонапряженном состоянии изотропного слоя с полостью и цилиндра, полого цилиндра с покрытыми диафрагмой или свободными от усилий торцами.

*Точное решение пространственных задач термоупругости для изотропного слоя с полостью и цилиндра* [202]. В цилиндрической системе координат  $(r, x_3)$  рассмотрим осесимметричные задачи о термоупругом равновесии изотропного слоя с цилиндрической полостью  $(1 \leq r < \infty, |x_3| \leq 1)$  и цилиндра  $(0 \leq r \leq 1, |x_3| \leq 1)$ , напряженное состояние в которых вызвано изменением температуры  $u_4(r, x_3)$ .

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{33}(r, \pm 1) = 0, \quad u_r(r, \pm 1) = 0; \quad (1.60) \quad \sigma_{rr}(1, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(1, x_3) = 0; \quad (1.61)$$

$$u_4(r, \pm 1) = 0, \quad u_4(1, x_3) = T_0 \tau(x_3). \quad (1.62)$$

Здесь  $T_0$  и  $\tau(x_3) = \tau(-x_3)$  – заданные константа и функция, характеризующие нагрев цилиндрической поверхности.

Для решения рассматриваемых задач используется метод однородных решений. Однородное тепловое состояние в слое, соответствующее краевым условиям (1.60)–(1.62) с учетом выражений (1.58) примет вид

$$\begin{aligned} u_r^1 &= -(1+\nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_1(tr)}{K_0(t)} \frac{\tau_k}{\delta_k} \cos \delta_k x_3, & u_3^1 &= (1+\nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \frac{\tau_k}{\delta_k} \sin \delta_k x_3, \\ u_4(r, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \cos \delta_k x_3, & \tau_k &= T_0 \int_{-1}^1 \tau(x_3) \cos \delta_k x_3 dx_3, & t &= \frac{\delta_k}{\lambda}, & \delta_k &= \frac{\pi(2k-1)}{2}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

В задаче равновесия цилиндра имеем

$$\begin{aligned} u_r^1 &= (1+\nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(tr)}{I_0(t)} \frac{\tau_k}{\delta_k} \cos \delta_k x_3, & u_3^1 &= (1+\nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \frac{\tau_k}{\delta_k} \sin \delta_k x_3, \\ u_4(r, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \cos \delta_k x_3. \end{aligned} \quad (1.64)$$

В результате необходимо найти общее решение  $u_i^0, \sigma_i^0$  однородной системы уравнений равновесия в перемещениях, которое должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{33}^0(r, \pm 1) = 0, \quad u_r^0(r, \pm 1) = 0; \quad (1.65) \quad \sigma_{rr}^0(1, x_3) = -\sigma_{rr}^1, \quad \sigma_{r3}^0(1, x_3) = 0; \quad (1.66)$$

Используя метод однородных решений, в задаче для слоя получим

$$u_r^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left( -A_k^0 t \frac{K_1(tr)}{K_0(tr)} + D_k^0 r \right) \cos \delta_k x_3,$$

$$u_3^0 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left( A_k^0 t + \left( -r \frac{K_1(tr)}{K_0(tr)} + \frac{4(1-\nu)}{t} \right) D_k^0 \right) \sin \delta_k x_3. \quad (1.67)$$

В задаче о равновесии цилиндра имеем

$$u_r^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left( A_k^1 t \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} + D_k^1 r \right) \cos \delta_k x_3,$$

$$u_3^0 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left( A_k^1 t + \left( r \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} + 4(1-\nu)t^{-1} \right) D_k^1 \right) \sin \delta_k x_3, \quad (1.68)$$

Коэффициенты  $A_k^i, D_k^i$  ( $i=0,1$ ) в выражениях (1.67), (1.68) определяются в явном виде из граничных условий (1.65), (1.66) и приведены в работе [202].

Таким образом, напряжения и перемещения в слое и цилиндре находятся из выражений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1, \quad u_i = u_i^0 + u_i^1.$$

Некоторые результаты численных исследований представлены на рис. 1.21–1.28 для различных  $\lambda$  при  $\nu=1/3$ . Распределение напряжений в слое, цилиндрическая полость которого нагревается по закону  $\cos(\pi x_3/2)$ , показаны на рис. 1.21–1.26. На рис. 1.21, 1.22 приведены графики распределения напряжений  $\sigma_{33}, \sigma_{\theta\theta}$  на боковой поверхности полости слоя. Характер изменения напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{33}, \sigma_{\theta\theta}$  в срединной плоскости слоя ( $x_3=0$ ) показан на рис. 1.23–1.25. На рис. 1.26 приведены графики напряжения  $\sigma_{r3}$  на плоской грани слоя.

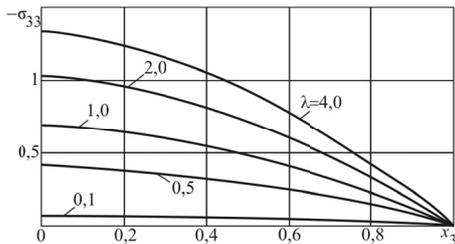


Рис. 1.21

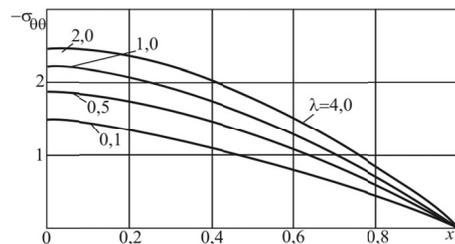


Рис. 1.22

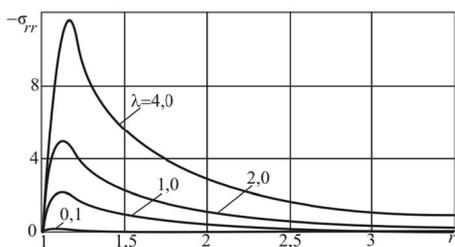


Рис. 1.23

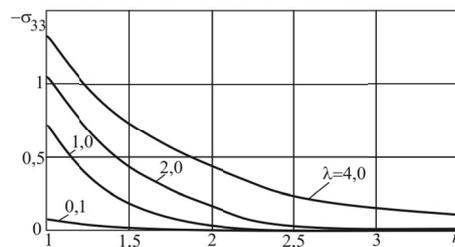


Рис. 1.24

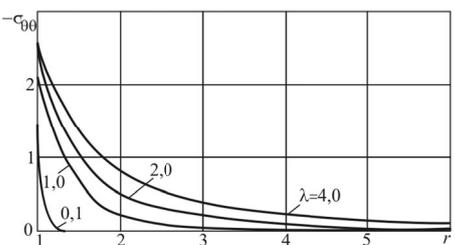


Рис. 1.25

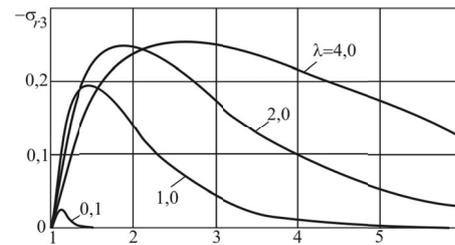


Рис. 1.26

На рис. 1.27, 1.28 приведены графики распределения напряжений  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  на боковой поверхности цилиндра для различных  $\lambda$ .

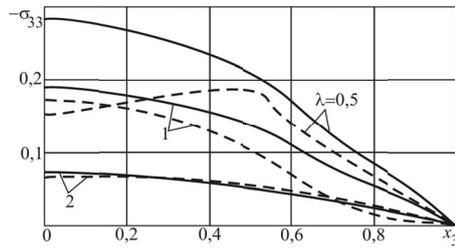


Рис. 1.27

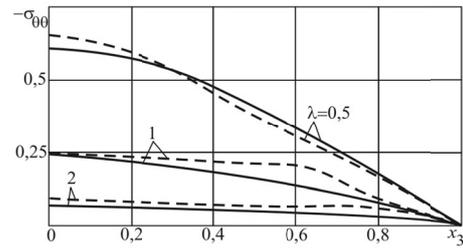


Рис. 1.28

Температура на боковой поверхности цилиндра изменялась по закону  $\cos(\pi x_3/2)$ . Сплошные линии соответствуют граничным условиям на торцах цилиндра (1.65), а штриховые линии – случаю свободных от усилий торцов [75].

Анализ результатов численных исследований показывает, что при неравномерном нагреве напряженное состояние в слое и цилиндре носит пространственный характер и зависит от изменения относительной толщины  $\lambda$ , вида граничных условий на торцах. Поэтому при использовании приближенных теорий невозможно получить реальную картину распределения напряжений при любой относительной толщине  $\lambda$ .

Метод однородных решений позволил естественным образом получить точные решения рассмотренных задач, которые могут быть полезны для оценки погрешности численных методов и приближенных теорий.

*Термонапряженное состояние полого цилиндра с покрытыми диафрагмой торцами.* В цилиндрической системе координат  $r, x_3$  рассмотрим осесимметричную задачу о термоупругом равновесии цилиндра с полостью ( $1 \leq r \leq R, |x_3| \leq 1$ ), напряженное состояние которого вызвано изменением температуры  $u_4(r, x_3)$ . Пусть на граничных поверхностях цилиндра имеют место условия

$$\sigma_{rr}(1, x_3) = 0, \quad \sigma_{rr}(R, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(1, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(R, x_3) = 0; \quad (1.69)$$

$$\sigma_{33}(r, \pm 1) = 0, \quad u_r(r, \pm 1) = 0; \quad (1.70)$$

$$u_4(1, x_3) = \tau_1(x_3), \quad u_4(R, x_3) = \tau_2(x_3); \quad (1.71) \quad u_4(r, \pm 1) = 0, \quad (1.72)$$

где заданные функции  $\tau_i(x_3)$  ( $i=1,2$ ) являются четными и  $\tau_i(\pm 1) = 0$ .

В данном случае представления для перемещений  $u_r, u_3$  и функции распределения температуры  $u_4(r, x_3)$ , удовлетворяющей граничным условиям (1.71), (1.72), имеют вид [201]

$$\begin{aligned} u_r = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1+\nu}{t} \left( T_{2k} \frac{I_1(tr)}{I_0(tR)} - T_{1k} \frac{K_1(tr)}{K_0(t)} \right) + t \left( E_{1k} \frac{I_1(tr)}{I_0(tR)} - D_{1k} \frac{K_1(tr)}{K_0(t)} \right) + \right. \\ & \left. + r \left( D_{2k} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} + E_{2k} \frac{I_0(tr)}{I_0(tR)} \right) \right] \cos \delta_k x_3, \\ u_3 = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1+\nu}{t} \left( T_{1k} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} + T_{2k} \frac{I_0(tr)}{I_0(tR)} \right) - t \left( D_{1k} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} + E_{1k} \frac{I_0(tr)}{I_0(tR)} \right) - \right. \\ & \left. - D_{2k} \left( 4(1-\nu) - \frac{trK_1(tr)}{K_0(tr)} \right) \frac{K_0(tr)}{tK_0(t)} - E_{2k} \left( 4(1-\nu) + \frac{trI_1(tr)}{I_0(tr)} \right) \frac{I_0(tr)}{tI_0(tR)} \right] \sin \delta_k x_3, \\ u_4(r, x_3) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ T_{1k} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} + T_{2k} \frac{I_0(tr)}{I_0(tR)} \right] \cos \delta_k x_3. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Здесь

$$\delta_k = \frac{\pi(2k-1)}{2}, \quad t = \frac{\delta_k}{\lambda}, \quad T_{1k} = \left( \tau_{1k} - \tau_{2k} \frac{I_0(t)}{I_0(tR)} \right) \frac{1}{D}, \quad T_{2k} = \left( \tau_{2k} - \tau_{1k} \frac{K_0(tR)}{K_0(t)} \right) \frac{1}{D},$$

$$D = 1 - \frac{K_0(tR)}{K_0(t)} \frac{I_0(t)}{I_0(tR)}, \quad \tau_{ik} = \int_{-1}^1 \tau_i(x_3) \cos \delta_k x_3 dx_3 \quad (i=1,2),$$

$D_{ik}, E_{ik}$  ( $i=1,2$ ) – неизвестные коэффициенты, которые находятся в явном виде из граничных условий (1.69). Напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{33}, \sigma_{r3}$  вычисляются на основании соотношений (1.33) с учетом выражений (1.73).

Некоторые результаты численных исследований представлены в табл. 1.2–1.5. В табл. 1.2 даны значения безразмерных компонент тензора напряжений, вектора перемещений и температуры (значения величин, равных нулю, не приведены) в цилиндре ( $1 \leq r \leq 2, |x_3| \leq 1$ ) в случае неравномерного нагрева его внутренней ( $u_4(1, x_3) = \cos(\pi x_3/2), u_4(2, x_3) = 0$ ) или внешней ( $u_4(1, x_3) = 0, u_4(2, x_3) = \cos \pi x_3/2$ ) полости. Здесь  $\lambda = 1, \nu = 1/3$ .

Таблица 1.2

Величина	Неравномерный нагрев внутренней полости						Неравномерный нагрев внешней полости					
	$r$						$r$					
	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$x_3 = 0$												
$\sigma_{rr}$	0	-0,207	-0,208	-0,137	-0,057	0	0	0,072	0,089	0,079	0,049	0
$\sigma_{\theta\theta}$	-1,976	-1,055	-0,503	-0,137	0,132	0,354	0,593	0,269	0,033	-0,173	-0,385	-0,632
$\sigma_{33}$	-1,089	-0,531	-0,173	0,097	0,354	0,658	-0,021	-0,058	-0,058	-0,026	0,043	0,157
$u_r$	-0,209	0,046	0,172	0,226	0,233	0,203	0,451	0,456	0,518	0,625	0,775	0,973
$u_4$	1	0,645	0,405	0,234	0,105	0	0	0,182	0,353	0,533	0,743	1
$x_3 = 0,5$												
$\sigma_{rr}$	0	-0,146	-0,147	-0,097	-0,039	0	0	0,051	0,063	0,056	0,035	0
$\sigma_{r3}$	0	-0,159	-0,205	-0,186	-0,118	0	0	-0,009	-0,021	-0,027	-0,023	0
$\sigma_{\theta\theta}$	-1,397	-0,746	-0,355	-0,097	0,093	0,251	0,419	0,191	0,024	-0,122	-0,272	-0,447
$\sigma_{33}$	-0,769	-0,375	-0,122	0,069	0,251	0,465	-0,015	-0,041	-0,041	-0,018	0,031	0,111
$u_r$	-0,148	0,033	0,122	0,159	0,165	0,143	0,318	0,323	0,366	0,442	0,548	0,688
$u_3$	0,305	0,253	0,204	0,169	0,158	0,182	-0,074	0,024	0,126	0,242	0,386	0,574
$u_4$	0,707	0,456	0,286	0,165	0,074	0	0	0,147	0,249	0,377	0,525	0,707
$x_3 = 1$												
$\sigma_{r3}$	0	-0,224	-0,291	-0,263	-0,167	0	0	-0,013	-0,028	-0,038	-0,032	0
$u_3$	0,431	0,358	0,288	0,239	0,224	0,258	-0,105	0,034	0,178	0,342	0,546	0,812

Напряжения  $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{33}$  достигают наибольшего по модулю значения в окрестности точки ( $r=1, x_3=0$ ) и равны нулю на плоских гранях цилиндра ( $x_3 = \pm 1$ ). Окрестность осевой линии  $r \approx 1,5, |x_3| \leq 1$  является зоной повышенных напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{r3}$ . При этом напряжение  $\sigma_{rr}$  достигает максимального значения в срединной плоскости цилиндра ( $x_3 = 0$ ), а касательное напряжение  $\sigma_{r3}$  является наибольшим на плоских гранях. Напряжения  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} = \sigma_{33} = 0$  на плоских гранях цилиндра. Здесь интересно отметить, что при удалении от внутренней полости цилиндра и приближении к внешней полости напряжения  $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{33}$  меняют знак. Осевое перемещение  $u_3$  в отличие от радиального  $u_r$  является знакопостоянным. Если перемещение  $u_3$  достигает максимального значения на плоской грани цилиндра и равно нулю в срединной плоскости, то перемещение  $u_r$  является наибольшим в срединной плоскости и равно нулю на плоских гранях.

Числовые данные табл. 1.2 показывают, что неравномерный нагрев внешней цилиндрической поверхности цилиндра приводит к снижению уровня напряжений и перемещений по сравнению с их значениями в аналогично нагретой внутренней полости. Максимальные по модулю значения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{33}$ , перемещения  $u_r$  и температуры  $u_4$  достигают на внешней полости в сечении  $x_3 = 0$ . При этом  $\sigma_{r3}(r, 0) = u_3(r, 0) = 0$ , а напряжение  $\sigma_{rr}$  достигает максимального значения в окрестности точки  $x_3 = 0$ ,  $r = 1,5$ . Наибольшее значение касательное напряжение  $\sigma_{r3}$  имеет на плоской грани цилиндра  $x_3 = 1$  и  $r \approx 1,5$ .

В табл. 1.3 приведены значения напряжений  $-\sigma_{\theta\theta}$  и  $-\sigma_{33}$  на внутренней полости цилиндра с учетом изменения внешнего радиуса  $R$ . Здесь  $u_4(1, x_3) = \cos(\pi x_3/2)$ ,  $u_4(R, x_3) = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 1/3$ .

Влияние изменения коэффициента С.Д. Пуассона  $\nu$  на поведение напряжений  $-\sigma_{\theta\theta}$ ,  $-\sigma_{33}$  вблизи внутренней полости цилиндра отражено в табл. 1.4. Предполагалось, что  $u_4(1, x_3) = \cos(\pi x_3/2)$ ,  $u_4(2, x_3) = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $R = 2$ .

Таблица 1.3

R	$\sigma_{ij}$	$x_3$					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1,2	$-\sigma_{\theta\theta}$	1,233	1,173	0,998	0,725	0,381	0
	$-\sigma_{33}$	1,215	1,155	0,983	0,714	0,375	0
1,5	$-\sigma_{\theta\theta}$	1,597	1,518	1,292	0,938	0,493	0
	$-\sigma_{33}$	1,317	1,253	1,066	0,774	0,407	0
2	$-\sigma_{\theta\theta}$	1,976	1,879	1,598	1,161	0,610	0
	$-\sigma_{33}$	1,089	1,035	0,881	0,640	0,336	0
4	$-\sigma_{\theta\theta}$	2,177	2,071	1,762	1,280	0,673	0
	$-\sigma_{33}$	0,702	0,668	0,568	0,413	0,217	0
$\infty$	$-\sigma_{\theta\theta}$	2,179	2,072	1,763	1,281	0,673	0
	$-\sigma_{33}$	0,696	0,622	0,563	0,409	0,215	0

Таблица 1.4

$\nu$	$\sigma_{ij}$	$x_3$					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,1	$-\sigma_{\theta\theta}$	1,280	1,217	1,036	0,752	0,396	0
	$-\sigma_{33}$	0,741	0,705	0,599	0,435	0,229	0
0,2	$-\sigma_{\theta\theta}$	1,540	1,465	1,246	0,905	0,476	0
	$-\sigma_{33}$	0,871	0,829	0,705	0,512	0,269	0
0,4	$-\sigma_{\theta\theta}$	2,245	2,135	1,816	1,319	0,693	0
	$-\sigma_{33}$	1,223	1,163	0,989	0,719	0,378	0
0,49	$-\sigma_{\theta\theta}$	2,683	2,552	2,171	1,577	0,829	0
	$-\sigma_{33}$	1,441	1,371	1,165	0,847	0,445	0
0,499	$-\sigma_{\theta\theta}$	2,783	2,599	2,211	1,606	0,845	0
	$-\sigma_{33}$	1,465	1,393	1,185	0,861	0,453	0

При  $R \rightarrow \infty$  (см. табл. 1.3) получаем результаты, совпадающие с приведенными выше для слоя с цилиндрической полостью. Данные этой таблицы показывают, что при  $R > 3$  внешняя боковая поверхность цилиндра не влияет на распределение напряжений. С увеличением  $R$  сохраняется характер распределения напряжений по высоте цилиндра. При этом напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  возрастает, а напряжение  $\sigma_{33}$  убывает с увеличением  $R$ , приближаясь к соответствующим значениям в слое с цилиндрической полостью.

В табл. 1.5 даны значения напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{33}$  в сечении цилиндра  $x_3 = 0$  с учетом изменения его относительной высоты  $\lambda$ .

Таблица 1.5

$\lambda$	$\sigma_{ij}$	$r$					
		1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
0,1	$\sigma_{rr}$	0	-0,011	-0,001	0	0	0
	$\sigma_{\theta\theta}$	-1,469	-0,057	-0,002	0	0	0
	$\sigma_{33}$	-0,085	0,007	0,001	0	0	0
0,5	$\sigma_{rr}$	0	-0,164	-0,139	-0,078	-0,026	0
	$\sigma_{\theta\theta}$	-1,885	-0,850	-0,382	-0,156	-0,032	0,056
	$\sigma_{33}$	-0,447	-0,107	0,002	0,038	0,070	0,146
2	$\sigma_{rr}$	0	-0,174	-0,192	-0,144	-0,073	0
	$\sigma_{\theta\theta}$	-1,540	-0,760	-0,239	0,140	0,436	0,682
	$\sigma_{33}$	-1,363	-0,757	-0,274	0,136	0,511	0,877
4	$\sigma_{rr}$	0	-0,152	-0,175	-0,137	-0,074	0
	$\sigma_{\theta\theta}$	-1,307	-0,606	-0,122	0,238	0,523	0,759
	$\sigma_{33}$	-1,280	0,726	-0,264	0,135	0,491	0,817
8	$\sigma_{rr}$	0	-0,146	-0,169	-0,135	-0,074	0
	$\sigma_{\theta\theta}$	-1,245	-0,567	-0,095	0,259	0,541	0,772
	$\sigma_{33}$	-1,239	-0,706	-0,256	0,133	0,477	0,787

Считалось, что  $u_4(1, x_3) = \cos(\pi x_3/2)$ ,  $u_4(2, x_3) = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 1/3$ . Анализ показывает, что при  $\lambda > 4$  увеличение  $\lambda$  не оказывает влияния на распределение напряжений в срединной плоскости цилиндра.

Анализ результатов численных исследований показывает, что напряженно-деформированное состояние цилиндра носит пространственный характер. Поэтому на основе приближенных теорий пластин и оболочек невозможно получить реальную картину распределения напряжений, перемещений и температуры в цилиндре. Полученное точное в замкнутом виде аналитическое решение задачи может быть использовано в инженерной практике, для оценки погрешности численных методов решения задач теории упругости и приближенных теорий.

*Термоупругий изгиб кольцевой плиты со свободными от усилий плоскими гранями.* Пусть плоские грани плиты (рис. 1.5, а) свободны от усилий (1.3) и поддерживаются при нулевой температуре

$$u_4(r, \pm 1) = 0, \quad (1.74)$$

а на боковых поверхностях имеем

$$u_4(1, x_3) = 0, \quad u_4(R, x_3) = \tau(x_3), \quad \tau(x_3) = -\tau(-x_3) \quad (1.75)$$

либо

$$u_4(1, x_3) = \tau(x_3), \quad u_4(R, x_3) = 0. \quad (1.76)$$

Здесь  $\tau(x_3)$  – заданная функция. В качестве характерного линейного размера выбран радиус внутренней полости плиты. Также предполагается отсутствие напряжений на боковых поверхностях плиты

$$\sigma_{rr}(1, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(1, x_3) = 0, \quad \sigma_{rr}(R, x_3) = 0, \quad \sigma_{r3}(R, x_3) = 0.$$

Алгоритм построения аналитического решения задачи описан в работах [55, 189] и получены соотношения для нахождения температуры  $u_4(r, x_3)$ , термоупругого потенциала  $\Phi(r, x_3)$ , перемещений  $u_r$ ,  $u_3$  и напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{r3}$ ,  $\sigma_{33}$

$$u_4(r, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \frac{K_0(\beta_k^* r)}{K_0(\beta_k^*)} + B_k \frac{I_0(\beta_k^* r)}{I_0(\beta_k^* R)} \right] \frac{\sin \beta_k x_3}{\beta_k}$$

$$\Phi(r, x_3) = (1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta_k^*)^2} \left[ A_k \frac{K_0(\beta_k^* r)}{K_0(\beta_k^*)} + B_k \frac{I_0(\beta_k^* r)}{I_0(\beta_k^* R)} \right] \sin \beta_k x_3$$

$$u_r = x_3 \left( 2a_1 r + \frac{a_2}{r} \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \left[ Y_p \frac{I_1(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^* R)} - X_p \frac{K_1(\gamma_p^* r)}{K_0(\gamma_p^*)} \right] \gamma_p^* + \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

$$u_3 = -\frac{1}{\lambda} \left( a_1 r^2 + a_2 \ln r \right) - 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} q_p(x_3) \left[ X_p \frac{K_0(\gamma_p^* r)}{K_0(\gamma_p^*)} + Y_p \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^* R)} \right] + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.$$

Формулы для напряжений имеют аналогичную структуру. Из граничных условий на боковой поверхности плиты (1.75), (1.76) в явном виде находятся коэффициенты  $A_k$ ,  $B_k$ , а неизвестные  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $X_p$ ,  $Y_p$  – из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Перейдем к анализу результатов численных исследований. Пусть температура на внутренней полости изменяется по закону

$$\tau(x_3) = T_0 \sin \pi x_3,$$

а на внешней равняется нулю, и наоборот. Коэффициент С.Д. Пуассона  $\nu = 1/3$ . Все приведенные далее характеристики напряжений отнесены к величине  $2G\alpha_i T_0$ .

На рис. 1.29–1.33 представлены графики распределения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{33}$  в области и вблизи боковых поверхностей плиты в случае граничных условий (1.76).

На рис. 1.29 изображены графики изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  вдоль радиуса плиты в сечениях  $x_3 = 0$ ;  $x_3 = 0,2$ ;  $x_3 = 0,8$ ;  $x_3 = 1$  и обозначены соответственно номерами 1–4, при этом  $\lambda = 1$ ,  $R = 2$ .

На рис. 1.30 приведены графики изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  в сечении  $x_3 = 0,5$  вдоль радиуса плиты  $1 \leq r \leq 2$  при относительных толщинах  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 0,5$  и обозначены соответственно номерами 1, 2, 3.

На рис. 1.31 изображены графики изменения напряжений  $\sigma_{33}$  вдоль радиуса плиты  $1 \leq r \leq 2$  в сечении  $x_3 = 0,5$  при относительных толщинах плиты  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 0,5$ , что соответствует графикам с номерами 1, 2, 3.

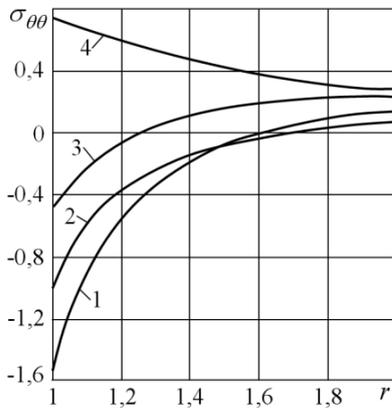


Рис. 1.29

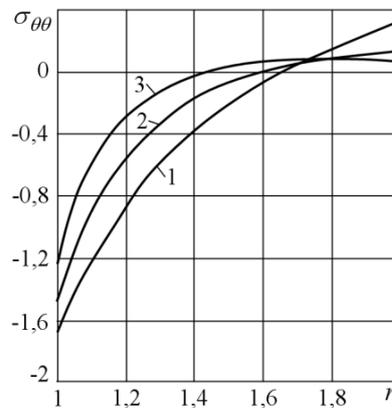


Рис. 1.30

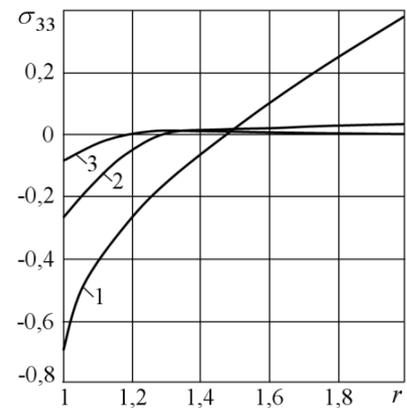


Рис. 1.31

На рис. 1.32 приведены графики изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  вблизи внутренней полости плиты, рассчитанного по прикладной теории Г.Р. Кирхгофа (с номером 1), и по трехмерной теории (с номером 2). При этом  $\lambda = 1$ ,  $R = 2$ . Аналогичные графики приведены на рис. 1.33 с той лишь разницей, что  $\lambda = 0,1$ .

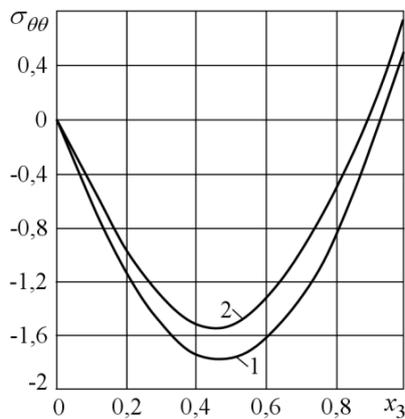


Рис. 1.32

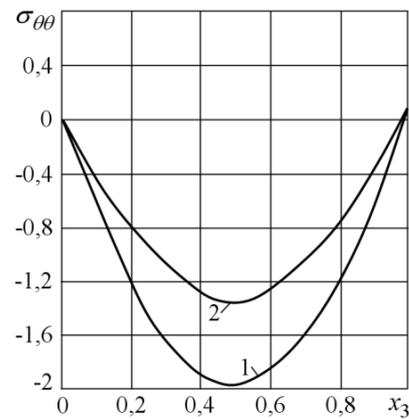


Рис. 1.33

На рис. 1.34–1.42 приведены графики напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{33}$  при температурных условиях на боковых поверхностях плиты (1.76) (рис. 1.34–1.38) и (1.75) (рис. 1.39–1.42) при различных значениях параметров  $\lambda$ ,  $R$ .

На рис. 1.34 изображены графики изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$ , возникающих на площадках, нормальных к внутренней боковой поверхности плиты, при различных относительных толщинах  $\lambda$ . Цифрами 1, 2, 3 обозначены графики для случаев, когда  $\lambda$  равно соответственно 2; 1; 0,5.

На рис. 1.35 представлены графики напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$ , возникающих на площадках, нормальных к внешней боковой поверхности плиты, в той же последовательности, что и на рис. 1.34.

На рис. 1.36 изображены графики изменения напряжений  $\sigma_{33}$  по толщине плиты в зависимости от  $\lambda$ . Цифрами 1–3 обозначены графики напряжений  $\sigma_{33}$  вблизи внутренней полости для случаев, когда  $\lambda$  равно 2; 1; 0,5, а цифрами 4–6 обозначены графики этого же напряжения вблизи внешней поверхности при  $\lambda$  равном 0,5; 1; 2.

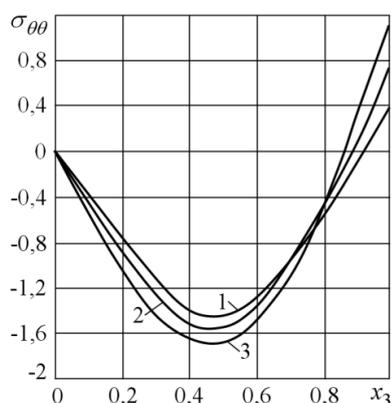


Рис. 1.34

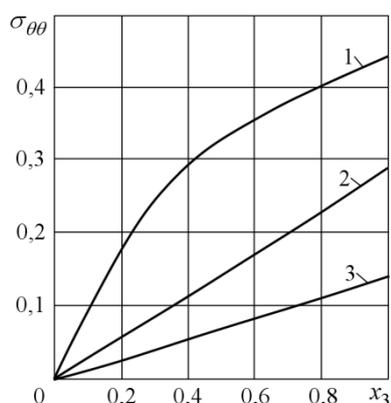


Рис. 1.35

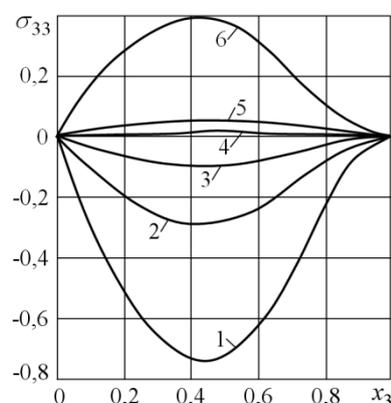


Рис. 1.36

Графики изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  по перемычке плиты в сечении  $x_3 = 0,5$  при  $\lambda = 1$ , а  $R = 4$  и  $R = 2$  приведены на рис. 1.37, 1.38 соответственно.

Изменение напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  вдоль радиуса плиты в сечениях  $x_3$  равных 0,5; 0,6; 0,8; 1 можно проследить по графикам с номерами 1–4 рис. 1.39. При этом  $\lambda$  равнялось 1, а внешний радиус плиты равнялся 2.

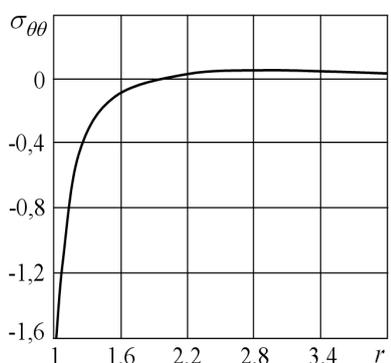


Рис. 1.37

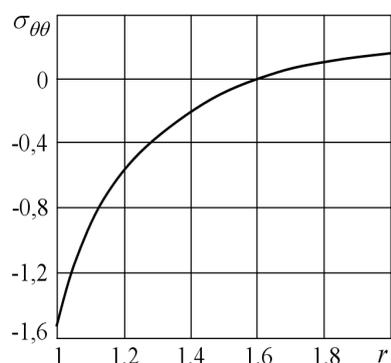


Рис. 1.38

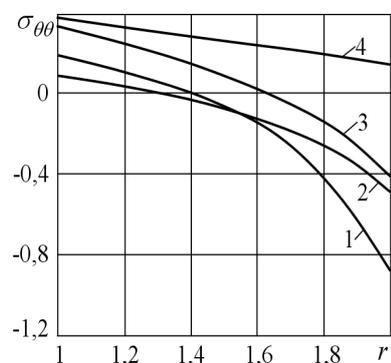


Рис. 1.39

На рис. 1.40 изображены графики изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  вдоль радиуса плиты в сечении  $x_3 = 0,5$ . Цифрами 1–3 обозначены графики для случаев, когда  $\lambda$  равно 2; 1; 0,5.

На рис. 1.41, 1.42 приведены графики напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  соответственно вблизи внешней и внутренней боковых поверхностей. Цифрами 1–3 обозначены графики для  $\lambda$  равного 0,5; 1; 2.

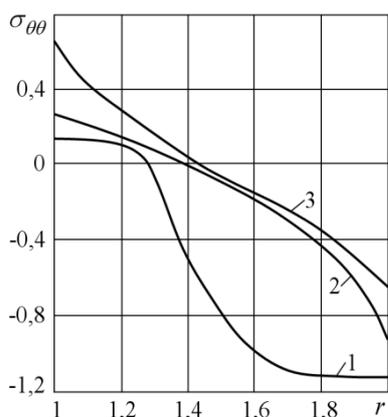


Рис. 1.40

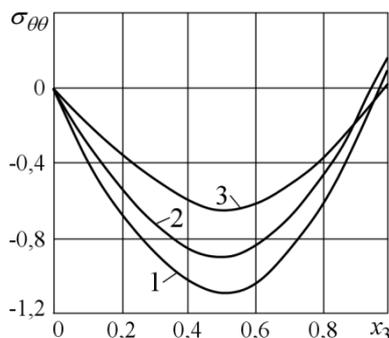


Рис. 1.41

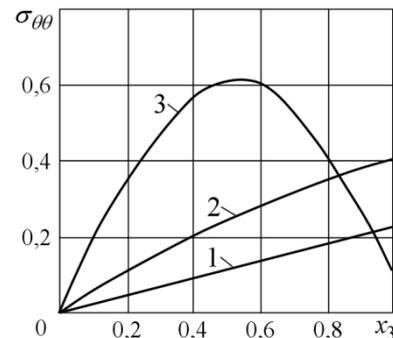


Рис. 1.42

Результаты численных исследований, приведенные на рис. 1.29–1.42, позволяют выявить следующие закономерности. Напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{33}$  являются знакопеременными в области и некоторых граничных зонах. Максимального значения по величине напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{33}$  достигают на той из полостей, на которой температура отлична от нуля, причем в сечении  $x_3 = 0,5$ . Это значение является отрицательным и с увеличением толщины плиты увеличивается по абсолютной величине. Напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r3}$  малы по сравнению с напряжениями  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{33}$  и имеют порядок малости  $10^{-1} - 10^{-2}$ . Напряжение  $\sigma_{33}$  при  $\lambda \geq 0,5$  сравнимо с напряжением  $\sigma_{\theta\theta}$  и при  $\lambda = 2$  максимальное его значение составляет до 30 % от соответствующего напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ . При относительных толщинах плиты  $\lambda < 1$  (температура отлична от нуля на внутренней полости) напряжение  $\sigma_{33}$  при отходе от внутренней полости резко убывает и уже при  $r \geq 1,2$  ( $1 \leq r \leq 2$ ) оно практически равно нулю вплоть до внешней полости  $r = 2$ . Однако при  $\lambda \geq 1$  характер поведения напряжения  $\sigma_{33}$  изменяется, во-первых, оно с ростом  $\lambda$  растет по абсолютной величине, а во-вторых, хотя и при отходе от внутренней полости оно убывает, примерно до середины перемычки ( $r = 1,5$ ), однако после этого, поменяв знак, оно начинает возрастать при подходе к внешней полости. С ростом внешнего радиуса плиты  $R$  (температура отлична от нуля на внутреннем контуре) напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  при отходе от внутреннего контура убывает и при  $R \geq 4$  имеет порядок  $10^{-2}$  уже при  $r \geq 1,6$  и вплоть до  $R = 4$ . Погрешность прикладной теории наиболее существенна при подходе к той из полостей, на которой температура отлична от нуля. Она наибольшая в зоне максимального значения температуры ( $x_3 = 0,5$ ) и при подходе к плоским граням плиты ( $x_3 \geq 0,8$ ). Это наблюдается как при уменьшении относительной толщины плиты, так и при ее увеличении. При этом в ряде случаев она может достигать до 50 %. В тех случаях, когда температура отлична от нуля на внешней полости, характерным является то, что напряжение  $\sigma_{33}$  невелико, несколько снижается и напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$ , хотя в целом характер напряженно-деформированного состояния в качественном отношении такой же. Эти факты объясняются не только изменением геометрических размеров плиты, но и, в первую очередь, характером изменения температурного поля.

Таким образом, когда напряженное состояние в трехмерной плите возникает в результате неравномерного нагрева, применение прикладной теории затруднительно, так как она искажает истинную картину напряженного состояния, как в толстых, так и в тонких плитах.

**2. Гармонические колебания однородных плит.** Метод однородных решений получил дальнейшее развитие в пространственных задачах о колебаниях толстых однородных плит. Впервые однородные решения задач динамики изотропных плит со свободными от усилий плоскими гранями получены в работах [139, 145, 146, 147] символическим способом А.И. Лурье. В монографиях [62, 70, 71, 88, 90, 104, 105, 230, 231 и др.], обзорных статьях [3, 6, 10–12, 14, 27–29, 32, 33] отражена история исследований в области упругих колебаний однородных пластин. В данной части анализируются результаты работ [191, 194, 209, 225, 227].

**2.1. Упругие колебания плит.** Уравнения гармонических колебаний однородных пластин имеют вид [55]

$$\lambda^2 \nu_0 \partial_j \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_j + \Omega^2 u_j = 0 \quad (j=1, 2), \quad \lambda \nu_0 \partial_3 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_3 + \Omega^2 u_3 = 0. \quad (2.1)$$

Однородные решения системы уравнений (2.1), удовлетворяющие одному из краевых условий на торцах пластины (1.2), (1.4)–(1.6) могут быть представлены суммой вихревого  $u_i^{(1)}$  и потенциального  $u_i^{(2)}$  состояний в виде (1.27). Только здесь, в отличие от задач статики, собственные функции  $p(x_3)$ , являются решением уравнения

$$p''(x_3) + l^2 p(x_3) = 0, \quad l^2 = \Omega^2 + \delta^2, \quad (2.2)$$

а  $n(x_3)$  и  $q(x_3)$  определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} n''(x_3) + (\Omega^2 + (1 + \nu_0) \gamma^2) n(x_3) + \lambda \nu_0 q'(x_3) &= 0, \\ q''(x_3) + \frac{\Omega^2 + \gamma^2}{1 + \nu_0} q(x_3) + \frac{\nu_0 \gamma^2}{\lambda(1 + \nu_0)} n'(x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) необходимо дополнить одним из граничных условий на плоских гранях пластины (1.12)–(1.16), а систему уравнений (2.3) – условиями (1.21)–(1.25). Рассмотрим решение каждой из сформулированных задач.

*Жестко защемленные плоские грани* [227]. Собственные функции  $p_k(x_3)$  и собственные значения  $\delta_k$  спектральной задачи (2.2), (1.12) получаются такими

$$\begin{aligned} p_k^+(x_3) &= \cos(l_k^+ x_3), \quad p_k^-(x_3) = \sin(l_k^- x_3), \\ \delta_k^\pm &= \sqrt{(l_k^\pm)^2 - \Omega^2}, \quad l_k^+ = \frac{\pi(2k-1)}{2}, \quad l_k^- = \pi k, \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Знаки «+», «-» относятся соответственно к симметричной и кососимметричной деформациям пластины относительно ее срединной плоскости.

Решение спектральной задачи (2.3), (1.21) имеет вид

$$\begin{aligned} n_p^+(x_3) &= H_{1p}^+ \cos \gamma_{1p}^+ x_3 + H_{2p}^+ \cos \gamma_{2p}^+ x_3, \quad q_p^+(x_3) = Q_{1p}^+ \sin \gamma_{1p}^+ x_3 + Q_{2p}^+ \sin \gamma_{2p}^+ x_3, \\ n_p^-(x_3) &= H_{1p}^- \sin \gamma_{1p}^- x_3 + H_{2p}^- \sin \gamma_{2p}^- x_3, \quad q_p^-(x_3) = Q_{1p}^- \cos \gamma_{1p}^- x_3 + Q_{2p}^- \cos \gamma_{2p}^- x_3. \end{aligned}$$

Здесь

$$Q_{ip}^\pm = \frac{1}{\lambda} a_{ip}^\pm H_{ip}^\pm \quad (i=1, 2), \quad a_{1p}^\pm = \mp \gamma_{1p}^\pm, \quad a_{2p}^\pm = \mp \frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{2p}^\pm}.$$

$$H_{1p}^+ = \cos \gamma_{2p}^+, \quad H_{2p}^+ = -\cos \gamma_{1p}^+, \quad H_{1p}^- = \sin \gamma_{2p}^-, \quad H_{2p}^- = -\sin \gamma_{1p}^-.$$

Собственные значения  $\gamma_p^\pm$  находятся из дисперсионных уравнений

$$P_{31}^+(\gamma, \Omega) = \gamma_1 \gamma_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - \gamma^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$P_{31}^-(\gamma, \Omega) = \gamma_1 \gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma^2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0. \quad (2.5)$$

Следует отметить, что в случае свободных от усилий плоских граней пластины (1.3) и с учетом принятых обозначений приходим к известным уравнениям Дж. Рэлея (Дж.У. Стретт, J.W. Strutt) – Г. Лэмба (H. Lamb) [70]

$$P_{32}^+(\gamma, \Omega) = (\gamma^2 + \gamma_2^2)^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - 4\gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0, \quad (2.6)$$

$$P_{32}^-(\gamma, \Omega) = (\gamma^2 + \gamma_2^2)^2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - 4\gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.4)–(2.7) позволяют описать частотный спектр P-SV волн.

Одной из характеристик распространения волн является набор частот запираания. Для их определения полагаем  $\gamma = 0$  в уравнениях (2.4)–(2.7). Из уравнений (2.4), (2.5) получим по два семейства частот запираания

$$\Omega_{p1}^+ = k_0 \pi p, \quad \Omega_{p2}^+ = \frac{\pi}{2}(2p-1); \quad \Omega_{p1}^- = k_0 \frac{\pi}{2}(2p-1), \quad \Omega_{p2}^- = \pi p \quad (p = \overline{1, \infty}).$$

Аналогично из уравнений (2.6), (2.7) имеем

$$\Omega_{p1}^+ = k_0 \frac{\pi}{2}(2p-1), \quad \Omega_{p2}^+ = \pi p; \quad \Omega_{p1}^- = k_0 \pi p, \quad \Omega_{p2}^- = \frac{\pi}{2}(2p-1).$$

Если значение коэффициента С.Д. Пуассона  $\nu$  равно

$$\nu = \frac{2l^2 - (2m-1)^2}{4l^2 - (2m-1)^2} \quad \text{при } l > (2m-1)/\sqrt{2}; \quad l, m \in \mathbb{N},$$

в частности,  $\nu = 1/3$  ( $l = m = 1$ ), то в случае кососимметричных колебаний пластины с жесткими торцами или симметричных колебаний пластины со свободными плоскими гранями появляются двукратные частоты запираания, например,  $\Omega = \pi(2p-1)$ .

Для исследования процесса переноса энергии основное значение имеют распространяющиеся моды, соответствующие мнимым корням  $\gamma$  дисперсионных уравнений (2.4)–(2.7). Важнейшие характеристики распространяющихся мод – фазовая  $c_p$  и групповая  $c_g$  скорости. Фазовая скорость представляется в виде

$$c_p = \omega/k = c_S \Omega/y,$$

где

$$\Omega = \omega h/c_S, \quad k = y/h, \quad i = \sqrt{-1}, \quad y = \text{Im } \gamma.$$

Групповая скорость  $c_g$ , согласно кинематическому определению, задается равенством

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_S \frac{d\Omega}{dy}.$$

Безразмерные фазовые  $v_p$  и групповые  $v_g$  скорости распространяющихся мод определим следующим образом:

$$v_p = \Omega/y = c_p/c_S, \quad v_g = \frac{d\Omega}{dy} = -\frac{\partial P}{\partial y} / \frac{\partial P}{\partial \Omega} = \frac{c_g}{c_S}.$$

Если фазовую скорость представить в виде зависимости  $c_p = c_p(y)$  или  $v_p = v_p(y)$ , то для вычисления групповой скорости имеем формулу

$$c_g = c_p + y \frac{dc_p}{dy} \quad \text{или} \quad v_g = v_p + y \frac{dv_p}{dy}. \quad (2.8)$$

На рис. 2.1 приведены диаграммы дисперсионных кривых, соответствующие жесткому заземлению плоских граней плиты – уравнению (2.4). Сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – комплексным корням.

На рис. 2.2 изображен спектр P-SV мод, определяемый на основании уравнения (2.6), при симметричной относительно срединной плоскости  $x_3 = 0$  деформации пластины, плоские грани которой свободны от напряжений.

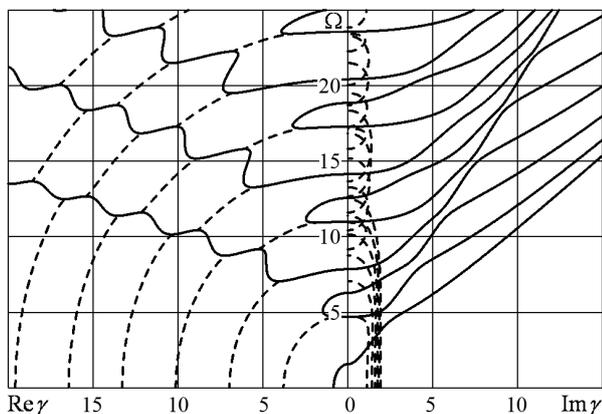


Рис. 2.1. Дисперсионные кривые, соответствующие уравнению  $P_{31}^+(\gamma, \Omega) = 0$

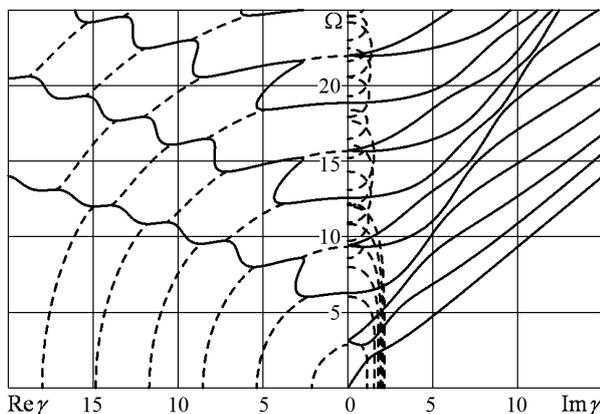


Рис. 2.2. Дисперсионные кривые, соответствующие уравнению  $P_{32}^+(\gamma, \Omega) = 0$

Для антисимметричной деформации пластины спектральные кривые приведены на рис. 2.3 и 2.4. При этом рис. 2.3 соответствует пластине с жестко заземленными торцами, а рис. 2.4 – со свободными от напряжений плоскими гранями.

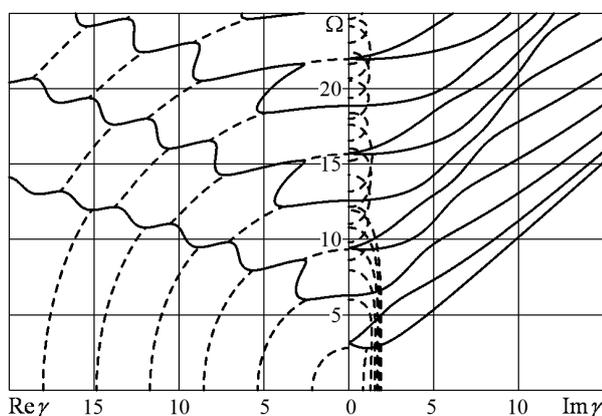


Рис. 2.3. Дисперсионные кривые, соответствующие уравнению  $P_{31}^-(\gamma, \Omega) = 0$

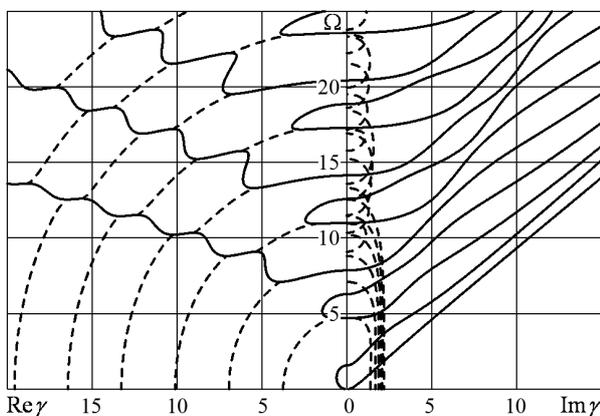


Рис. 2.4. Дисперсионные кривые, соответствующие уравнению  $P_{32}^-(\gamma, \Omega) = 0$

При построении дисперсионных кривых исключены решения  $\gamma_2 = 0$  (рис. 2.1, 2.2) и  $\gamma_1 = 0$  (рис. 2.3, 2.4). Данные на рис. 2.1–2.4 соответствуют значению коэффициента С.Д. Пуассона  $\nu = 1/3$ .

Общей закономерностью поведения корней рассмотренных уравнений (2.4)–(2.7) является следующее. Кривая каждой моды состоит из действительных, мнимых и комплексных ветвей и изменяется от нулевой частоты до бесконечной. Комплексные участки дисперсионных кривых, которые начинаются на плоскости  $\Omega = 0$ , пересекают ее под прямым углом. С увеличением частоты  $\Omega$  комплексный корень переходит в два действительных или мнимых, и из комплексной ветви образуется действительная или мнимая. Причем, действительная (мнимая) составляющая комплексной ветви оканчивается в точке относительного минимума действительной (мнимой)

ветви. Далее действительная составляющая остальных комплексных кривых соединяет точки относительного максимума и минимума действительных кривых, а мнимая составляющая образует петлеобразную кривую с граничными точками на оси  $\Omega$ . Действительные ветви ортогональны оси  $\text{Re } \gamma$ . Если предположить, что начальная точка действительной ветви находится на оси  $O\Omega$  (ей соответствует частота запирания), то возможно одно из трех положений конечной точки этой ветви: точка находится на оси  $O\Omega$ , тока принадлежит оси  $\text{Re } \gamma$  или уходит на бесконечность. В соответствии с этим действительная мода является петлей, кривой или волнообразной кривой. Некоторые дисперсионные кривые обладают важным свойством: участки мнимых ветвей для определенных частот запирания опускаются ниже частоты запирания, что объясняется наличием обратной волны. Например, это характерно для второй моды на рис. 2.2 и первой моды на рис. 2.3.

В плитах с жестко защемленными плоскими гранями, по сравнению со свободными, происходят значительные изменения в структуре дисперсионных спектров и, в частности, в значениях частот запирания. Например, в пластине со свободными от усилий плоскими гранями существует распространяющаяся мода с нулевой частотой запирания (рис. 2.2, 2.4 и другие). Однако в пластине с жестко защемленными плоскими гранями такая мода отсутствует (рис. 2.1, 2.3 и другие). При симметричных колебаниях пластины с жестко защемленными торцами и кососимметричных со свободными в области от нулевой частоты до первой ненулевой частоты запирания появляется действительная мода в дисперсионном спектре (рис. 2.1, 2.4 и другие), которая отсутствует в случае противоположных указанным видам симметрии деформаций (рис. 2.2, 2.3). При  $\nu = 1/3$  частоты запирания  $\Omega_p = (2p - 1)\pi$  являются двукратными (рис. 2.2, 2.3), что показано выше в теоретических исследованиях.

Данные рис. 2.5 иллюстрируют изменения безразмерных фазовых скоростей  $v_p = c_p/c_S = i\Omega/\gamma$  первых трех (кривые с номерами 1, 2, 3) симметричных (а) и кососимметричных (б) мод при  $\nu = 1/3$ . Сплошные линии на рис. 2.5 соответствуют жестким, а штриховые – свободным от напряжений торцам плиты.

Как видно из указанных выше рисунков, для мод характерна значительная дисперсия их скорости. Особенно выделяется первая мода в случае свободных торцов, которая распространяется при любой частоте  $\Omega$  (здесь частота запирания равна нулю). Данные рис. 2.5 также свидетельствуют о том, что в случае жестко защемленных плоских граней пластины асимптотическим значением фазовой скорости первой моды в высокочастотном пределе является значение  $c_S$ , а для случая свободных плоских граней – значение скорости поверхностной волны Дж. Рэлея  $c_R$ , равной  $\approx 0,93c_S$ .

Анализ результатов численно-аналитических исследований показывают, что изменение граничных условий на торцах плиты оказывают существенное влияние на вид дисперсионных уравнений и, как следствие, структуру спектров. Для пластин с защемленными торцами собственные значения в задачах статики и поведение дисперсионных кривых в задачах динамики зависят от значения коэффициента С.Д. Пуассона  $\nu$ . При малых частотах и с ростом коэффициента С.Д. Пуассона наблюдается много общего в поведении дисперсионных кривых в случае симметричной деформации пластины с защемленными торцами и антисимметричной деформацией пластин со свободными плоскими гранями и наоборот. Так, если  $\Omega \rightarrow 0$ , то дисперсионные уравнения (2.4) и (2.5) примут вид

$$(3 - 4\nu)\sin 2\gamma^\pm \mp 2\gamma^\pm = 0. \quad (2.9)$$

Аналогично для пластин со свободными торцами в задачах статики имеем

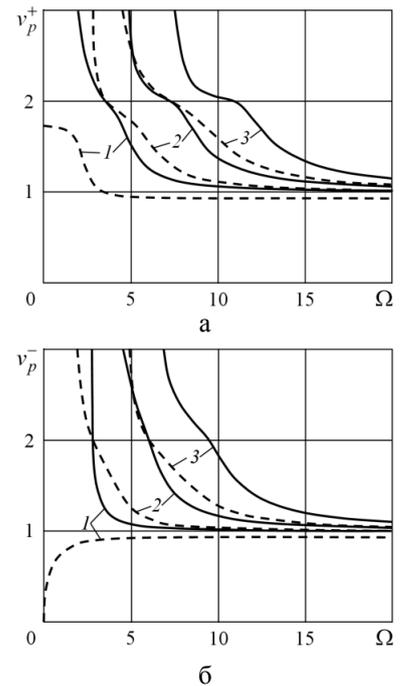


Рис. 2.5

$$\sin 2\gamma^{\pm} \pm 2\gamma^{\pm} = 0. \quad (2.10)$$

При  $\nu = 1/2$  уравнение (2.9) относительно  $\gamma^+$  совпадает с уравнением (2.10) относительно  $\gamma^-$  и наоборот.

Смешанные граничные условия на торцах [194, 225]. Рассмотрим изотропную пластину, верхняя плоская грань которой свободна от напряжений, а нижняя жестко закреплена (1.6). Собственные функции  $p_k(x_3)$  и собственные значения  $\delta_k$  вихревого решения определяются из спектральной задачи (2.2), (1.16)

$$p_k(x_3) = \cos l_k x_3 + (-1)^{k+1} \sin l_k x_3, \quad \delta_k^2 = l_k^2 - \Omega^2, \quad l_k = \frac{\pi}{4}(2k-1).$$

Потенциального состояния на основе общего решение системы (2.3) определения в виде

$$\begin{aligned} n(x_3) &= H_1 \cos \gamma_1 x_3 + H_2 \sin \gamma_1 x_3 + H_3 \cos \gamma_2 x_3 + H_4 \sin \gamma_2 x_3, \\ q(x_3) &= Q_1 \sin \gamma_1 x_3 + Q_2 \cos \gamma_1 x_3 + Q_3 \sin \gamma_2 x_3 + Q_4 \cos \gamma_2 x_3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{1}{\lambda} a_i H_i \quad (i = \overline{1, 4}), \quad a_1 = -\gamma_1, \quad a_2 = \gamma_1, \quad a_3 = -\frac{\gamma^2}{\gamma_2}, \quad a_4 = \frac{\gamma^2}{\gamma_2}; \\ H_1 &= -\gamma^2 \left( 4(\gamma_1 \gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma^2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_2 - \Omega^2 \sin \gamma_1 \right), \\ H_2 &= \gamma^2 \left( 4(\gamma_1 \gamma_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \gamma^2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_2 - (4\gamma^2 + \Omega^2) \cos \gamma_1 \right), \\ H_3 &= 2\kappa^2 \left( \gamma_1 \gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma^2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \right) \cos \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2 \Omega^2 \sin \gamma_2, \\ H_4 &= 2\kappa^2 \left( \gamma_1 \gamma_2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \gamma^2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \right) \cos \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2 (4\gamma^2 + \Omega^2) \cos \gamma_2; \end{aligned}$$

счетное множество собственных значений  $\gamma$  находится из дисперсионного уравнения

$$\begin{aligned} P_{33}(\gamma, \Omega) &= (\gamma_1 \gamma_2 + \gamma^2) \left[ (\Omega^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \right] \cos 2(\gamma_2 - \gamma_1) + \\ &+ (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma^2) \left[ (\Omega^2 + 2\gamma^2)^2 - 4\gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \right] \cos 2(\gamma_2 + \gamma_1) - 8(\Omega^2 + 2\gamma^2) \gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для изучения поведения дисперсионных кривых важным является рассмотрение случая, когда  $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_2 = 0$  [105]. При этом точки пересечения дисперсионных кривых с прямыми  $\Omega = k_0 y$ ,  $\Omega = y$  ( $y = \gamma/i$ ,  $\gamma$  – чисто мнимая величина) также являются корнями уравнения (2.12) кратности выше единицы.

Если  $\gamma_1 = 0$ , то уравнение (2.12) после некоторых преобразований примет вид

$$\begin{aligned} & (k_0^2 - 1)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{4}(2 - k_0^2)^2 \right] \cos 2y (k_0^2 - 1)^{1/2} - \\ & - 0,5y (2 - k_0^2)^2 \sin 2y (k_0^2 - 1)^{1/2} - (k_0^2 - 1)^{1/2} (2 - k_0^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При  $\Omega = k_0 y$  уравнение (2.13) имеет бесконечное число корней. Следовательно, прямую  $\gamma_1 = 0$  пересекает бесконечное множество дисперсионных кривых из сектора  $\Omega/k_0 > y$ .

Аналогичным образом при  $\gamma_2 = 0$  из (2.12) получим уравнение

$$\frac{5}{4} \left( 1 - \frac{1}{k_0^2} \right)^{1/2} \operatorname{ch} 2y \left( 1 - \frac{1}{k_0^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} y \operatorname{sh} 2y \left( 1 - \frac{1}{k_0^2} \right)^{1/2} - \left( 1 - \frac{1}{k_0^2} \right)^{1/2} = 0, \quad (2.14)$$

из которого следует, что только одна (первая) дисперсионная кривая пересекает прямую  $\Omega = y$  и попадает в область  $\Omega < y$ .

Из уравнения (2.12) при  $\gamma = 0$  получим два семейства частот запираания

$$\Omega_p = k_0 \frac{\pi}{4} (2p - 1), \quad (2.15)$$

$$\Omega_p = \frac{\pi}{4} (2p - 1), \quad (2.16)$$

Если коэффициент С.Д. Пуассона

$$v_* = \frac{2(2l-1)^2 - (2m-1)^2}{2[(2l-1)^2 - (2m-1)^2]} \text{ при } m > \sqrt{2}l - \frac{\sqrt{2}-1}{2}; \quad m, l \in \mathbb{N},$$

то происходит совпадение двух указанных семейств частот запираания. Такие частоты запираания  $\Omega^*$  являются общими при любых граничных условиях на торцах и любых деформациях пластины относительно срединной плоскости и вычисляются по формуле

$$\Omega^* = \pi(2m-1)/2.$$

На рис. 2.6 и 2.7 изображены соответственно диаграммы дисперсионных кривых первой и второй мод. Кривые 1, 2 соответствуют свободным, кривая 3 – свободному и защемленному ( $P_{33}(\gamma, \Omega/2) = 0$ ), кривые 4, 5 – защемленным торцам пластины. Кривые 1, 4 и 2, 5 относятся к симметричной и антисимметричной деформациям пластины относительно срединной плоскости. Аналогичные результаты для фазовых скоростей представлены на рис. 2.8, 2.9. Данные рис. 2.6–2.9 свидетельствуют о том, что в случае смешанных краевых условий первая и вторая моды снизу ограничены соответствующими модами для пластины со свободными торцами, а сверху – дисперсионными кривыми, соответствующими условиям жёстких плоских граней. Возможно, что данный факт может иметь место и для мод более высокого порядка.

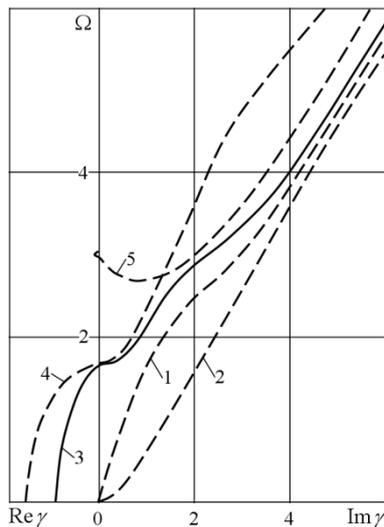


Рис. 2.6

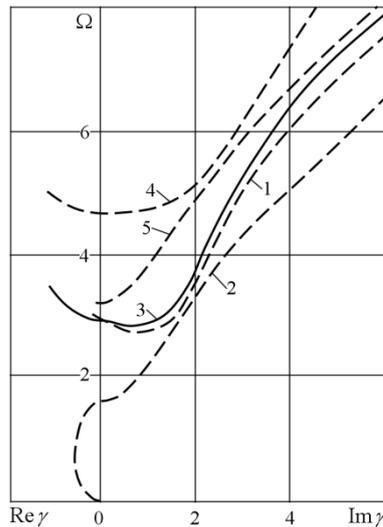


Рис. 2.7

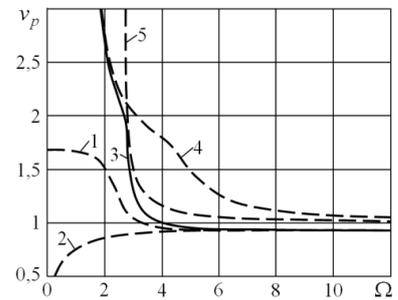


Рис. 2.8

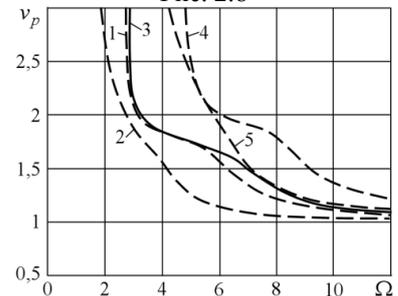


Рис. 2.9

На рис. 2.10 приведены дисперсионные кривые уравнения (2.12) при  $\nu = 0,3$ . Сплошные линии рис. 2.10 соответствуют вещественным ( $\text{Im } \gamma = 0$ ) и чисто мнимым ( $\text{Re } \gamma = 0$ ), штриховые – комплексным корням. На рис. 2.11 и 2.12 представлены графики изменения безразмерных фазовых  $v_p = \Omega/y$  и групповых  $v_p = d\Omega/dy$  скоростей распространяющихся мод в диапазоне частот  $0 < \Omega \leq 15$ .

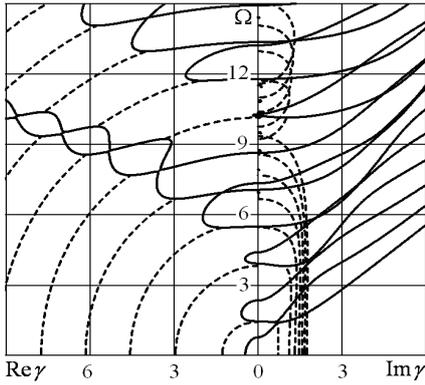


Рис. 2.10

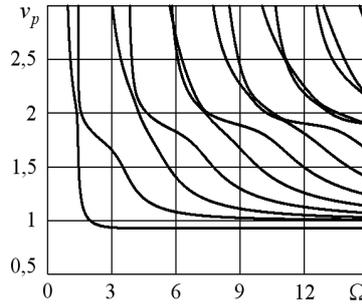


Рис. 2.11

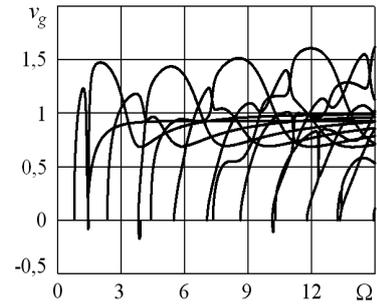


Рис. 2.12

Из результатов численных исследований, в частности следует, что, как и в случае колебаний пластины со свободными от усилий плоскими гранями, асимптотой фазовой скорости низшей распространяющейся моды является значение скорости волны Дж. Рэлея. Значения скоростей  $v_p$  остальных мод с увеличением  $\Omega$  асимптотически приближаются сверху к единице ( $c_p \rightarrow c_S$ ). В области низких частот, как и в пластине с жесткими торцами, отсутствует распространяющаяся мода, выходящая из нуля.

Для групповых скоростей характерна более сложная зависимость от частоты  $\Omega$ . В отличие от фазовых скоростей групповые скорости изменяются немонотонно и имеют локальные максимумы и минимумы. Групповые скорости всех мод на частотах запириания равны нулю. Появление отрицательных значений у групповых скоростей некоторых мод свидетельствует о существовании обратных волн (см. рис. 2.12).

В работах [194, 225] показано, что на частотах запириания возможно появление решений системы уравнений движения (2.1), отличных от вихревого и потенциального (гармоническое или бигармоническое частное решение). Эти решения носят характер краевого эффекта степенного типа и определяются аналитическими функциями комплексного переменного. Наряду с этим в данных работах получены приближенные теории решения задач о колебаниях изотропных пластин.

*Краевые условия типа диафрагмы или плоского торца* [191, 209]. Пусть на плоских гранях изотропной пластины имеют место однородные граничные условия (1.4) или (1.5). Построение однородных решений в данном случае сводится к решению спектральных задач (2.2), (1.14) и (2.3), (1.23) – в случае диафрагмы и (2.2), (1.15) и (2.3), (1.24) – в случае плоского торца.

Собственные функции  $p_k^\pm(x_3)$  в обеих задачах имеют вид

$$p_k^+(x_3) = \cos l_k^+ x_3, \quad p_k^-(x_3) = \sin l_k^- x_3; \quad l_k^\pm = \Omega^2 + (\delta_k^\pm)^2.$$

При этом, если имеют место граничные условия (1.4), тогда собственные значения  $\delta_k^\pm$  таковы

$$\delta_k^+ = \sqrt{\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 - \Omega^2}; \quad \delta_k^- = \sqrt{(\pi k)^2 - \Omega^2} \quad (k=1, 2, \dots),$$

а в случае соотношений (1.5) запишутся так

$$\delta_k^+ = \sqrt{(\pi k)^2 - \Omega^2}; \quad \delta_k^- = \sqrt{\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right)^2 - \Omega^2}.$$

В случае граничных условий типа диафрагмы для собственных функций  $n_p^\pm(x_3)$ ,  $q_p^\pm(x_3)$  и значений  $\gamma_p^\pm$  потенциального состояния из спектральной задачи (2.3), (1.23) имеем

$$n_p^+(x_3) = \cos \gamma_{2p} \cos \gamma_{1p} x_3 - \cos \gamma_{1p} \cos \gamma_{2p} x_3,$$

$$n_p^-(x_3) = \sin \gamma_{2p} \sin \gamma_{1p} x_3 - \sin \gamma_{1p} \sin \gamma_{2p} x_3,$$

$$q_p^+(x_3) = \frac{1}{\lambda\gamma_{2p}} \left( \gamma_p^2 \cos \gamma_{1p} \sin \gamma_{2p} x_3 - \gamma_{1p} \gamma_{2p} \cos \gamma_{2p} \sin \gamma_{1p} x_3 \right),$$

$$q_p^-(x_3) = \frac{1}{\lambda\gamma_{2p}} \left( \gamma_{1p} \gamma_{2p} \sin \gamma_{2p} \cos \gamma_{1p} x_3 - \gamma_p^2 \sin \gamma_{1p} \cos \gamma_{2p} x_3 \right); \quad (2.17)$$

$$P_{34}^+(\gamma, \Omega) = \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0, \quad P_{34}^-(\gamma, \Omega) = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0. \quad (2.18)$$

Аналогично в случае плоского торца из спектральной задачи (2.3), (1.24) получим

$$n_p^+(x_3) = \gamma_{2p} \sin \gamma_{2p} \cos \gamma_{1p} x_3 - \gamma_{1p} \sin \gamma_{1p} \cos \gamma_{2p} x_3,$$

$$n_p^-(x_3) = \gamma_{2p} \cos \gamma_{2p} \sin \gamma_{1p} x_3 - \gamma_{1p} \cos \gamma_{1p} \sin \gamma_{2p} x_3,$$

$$q_p^+(x_3) = \frac{\gamma_{1p}}{\lambda\gamma_{2p}} \left( \gamma_p^2 \sin \gamma_{1p} \sin \gamma_{2p} x_3 - \gamma_{2p}^2 \sin \gamma_{2p} \sin \gamma_{1p} x_3 \right),$$

$$q_p^-(x_3) = \frac{\gamma_{1p}}{\lambda\gamma_{2p}} \left( \gamma_{2p}^2 \cos \gamma_{2p} \cos \gamma_{1p} x_3 - \gamma_p^2 \cos \gamma_{1p} \cos \gamma_{2p} x_3 \right); \quad (2.19)$$

$$P_{35}^+(\gamma, \Omega) = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0, \quad P_{35}^-(\gamma, \Omega) = \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0. \quad (2.20)$$

Из уравнений (2.18) и (2.20) следует, что  $P_{34}^+ = P_{35}^-$  и  $P_{34}^- = P_{35}^+$ . Поэтому достаточно провести анализ кинематических характеристик для случая плоского торца. Из каждого уравнения (2.20) получаем по два семейства собственных значений. В плоскости  $(y = i\gamma, \Omega)$  имеется конечное число действительных и счетное множество мнимых корней уравнения (2.20).

На рис. 2.13–2.16 при  $\nu = 0,3$  изображены графики изменения фазовых  $c_p = c_S \Omega / y$  и групповых  $c_g = -c_S F_y' / F_\Omega'$  скоростей. Горизонтальные штриховые и штрих-пунктирные прямые линии на всех рисунках соответствуют значениям скоростей продольной ( $c_p$ ) и поперечной ( $c_S$ ) волн.

На рис. 2.13, 2.15 представлены графики изменения фазовых и групповых скоростей первых двух мод каждого из двух семейств собственных значений. Сплошные линии соответствуют симметричной относительно срединной плоскости деформации пластины, штриховые – кососимметричной деформации. Данные рис. 2.13, 2.15 показывают, что при  $\Omega \rightarrow \infty$  одна группа мод следует к значению  $c_p$ , а другая – к  $c_S$ .

Следует отметить, что всегда существует минимальное значение частоты  $\Omega_{\min}$ , ниже которой отсутствуют распространяющиеся моды.

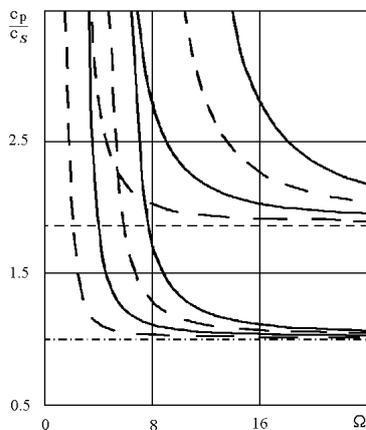


Рис. 2.13

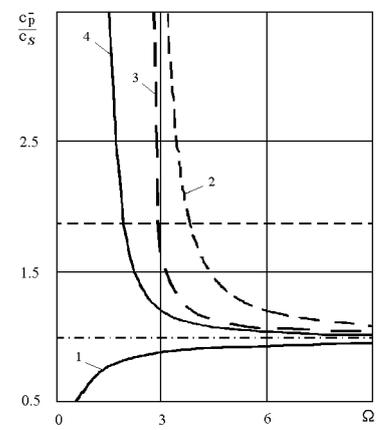
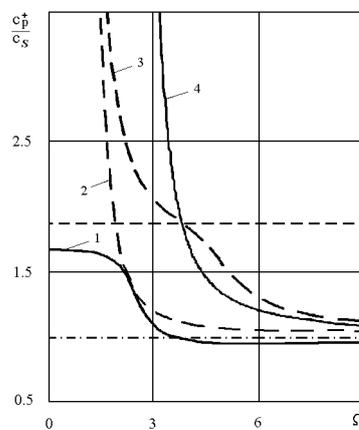


Рис. 2.14

На рис. 2.14, 2.16 изображены графики изменения соответственно фазовой и групповой скоростей первой моды для симметричной (а) и косимметричной (б) деформаций пластины. Кривая 1 соответствует свободным торцам; 2 – диафрагме; 3 – условиям жесткого защемления торцов; 4 – плоскому торцу.

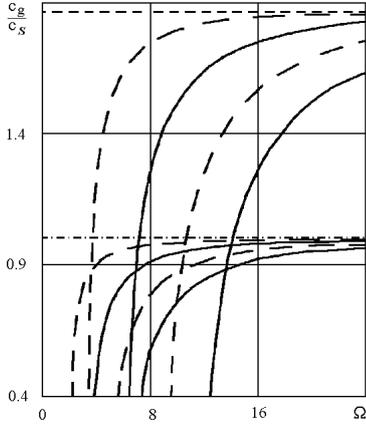


Рис. 2.15

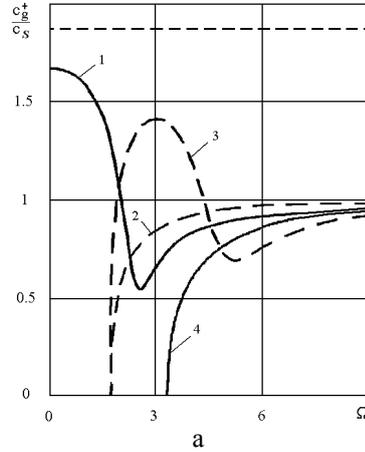
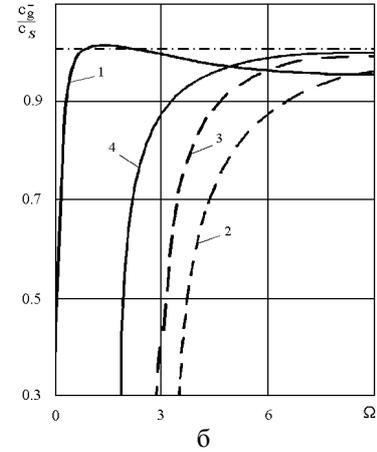


Рис. 2.16



Из приведенных данных следует, что вид однородных граничных условий на торцах пластины оказывает существенное влияние на характер изменения фазовых и групповых скоростей в области низких частот. В коротковолновом диапазоне независимо от вида граничных условий значения фазовых и групповых скоростей приближаются к величине  $c_s$ . Исключением является первая мода в случае свободных от усилий плоских граней пластины. Асимптотическим ее значением является скорость волны Дж. Рэлея, приближенно равная  $0,93c_s$ .

**2.2. Динамические задачи связанной термоупругости.** Здесь анализируются результаты исследований, представленные в работах [175, 185, 186, 195], в которых рассматриваются связанные и обобщенные задачи термомеханики.

Построение однородных решений задачи связанной термоупругости о гармонических колебаниях изотропных плит сводится к интегрированию системы уравнений [55, 67, 74, 86, 229]

$$\begin{aligned} \partial_3^2 u_j + (\lambda^2 D^2 + \Omega^2) u_j + \lambda^2 \nu_0 \partial_j (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \lambda \nu_0 \partial_j \partial_3 u_3 &= \lambda^2 (3\nu_0 - 1) \partial_j u_4 \quad (j=1, 2), \\ (1 + \nu_0) \partial_3^2 u_3 + (\lambda^2 D^2 + \Omega^2) u_3 + \lambda \nu_0 \partial_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) &= \lambda (3\nu_0 - 1) \partial_3 u_4, \\ \partial_3^2 u_4 + (\lambda^2 D^2 + i\Omega_2) u_4 + i\Omega_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1} \partial_3 u_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

с учетом одного из граничных условий (1.2)–(1.7) в сочетании с одним из краевых условий (1.34). Здесь  $u_1, u_2, u_3$  – амплитудные значения перемещений;  $u_4$  – амплитудные значения температуры;  $i^2 = -1$ ,  $u_4 = \alpha_t (T - T_0)$ ,  $\Omega_2 = \omega h^2 / \alpha$ ,  $\Omega_3 = \omega h^2 \eta \alpha_t$ ,  $\alpha = \lambda_t c_9^{-1}$ ,  $\eta = \beta T_0 \lambda_t^{-1}$ ,  $\beta = 2G(1 + \nu) \nu_0 \alpha_t$ ;  $T_0 = \text{const}$  – температура тела в исходном недеформированном состоянии;  $T - T_0$  – приращение температуры точек тела;  $\lambda_t, c_9$  – коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости.

Однородные решения в данном случае могут быть представлены в виде суммы вихревого и потенциального состояний. Амплитудные значения вектора перемещений и температуры вихревого решения имеют вид

$$u_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{\pm}(x_3) \partial_2 B_k^{\pm}(x_1, x_2), \quad u_2^{(1)} = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{\pm}(x_3) \partial_1 B_k^{\pm}(x_1, x_2), \quad u_3^{(1)} = 0, \quad u_4^{(1)} = 0, \quad (2.22)$$

где

$$p_k^+(x_3) = \cos \delta_k^+ x_3, \quad p_k^-(x_3) = \frac{\sin \delta_k^- x_3}{\delta_k^-}, \quad \delta_k^+ = \pi k, \quad \delta_k^- = \pi \left(k - \frac{1}{2}\right), \quad \lambda^2 D^2 B_k^\pm = \left((\delta_k^\pm)^2 - \Omega^2\right) B_k^\pm.$$

Потенциальное решение будем находить, исходя из представлений

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= n(x_3) \partial_1 C(x_1, x_2), \quad u_2^{(2)} = n(x_3) \partial_2 C(x_1, x_2), \\ u_3^{(2)} &= q(x_3) C(x_1, x_2), \quad u_4^{(2)} = \lambda^{-2} t(x_3) C(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тогда из системы уравнений (2.21) с учетом соотношений (2.23) следует, что функция  $C(x_1, x_2)$  является метагармонической, а функции  $n(x_3)$ ,  $q(x_3)$ ,  $t(x_3)$  определяются из решения системы обыкновенных уравнений

$$\begin{aligned} n'' + \left[ (1 + \nu_0) \gamma^2 + \Omega^2 \right] n + \lambda \nu_0 q' - (3\nu_0 - 1)t &= 0, \\ (1 + \nu_0)q'' + (\gamma^2 + \Omega^2)q + \lambda^{-1} \nu_0 \gamma^2 n' - \lambda^{-1} (3\nu_0 - 1)t' &= 0, \\ t'' + (\gamma^2 + i\Omega_2)t + i\Omega_3 (\gamma^2 n + \lambda q') &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь  $\gamma$  – параметр разделения переменных. Характеристическое уравнение системы (2.24) имеет вид

$$a_1 k^6 + a_2 k^4 + a_3 k^2 + a_4 = 0, \quad (2.25)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 + \nu_0); \quad a_2 = 3\gamma^2(1 + \nu_0) + \Omega^2(2 + \nu_0) + i[\Omega_2(1 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)]; \\ a_3 &= 3\gamma^4(1 + \nu_0) + 2\gamma^2 \left[ \Omega^2(2 + \nu_0) + i(\Omega_2(1 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)) \right] + \Omega^4 + \\ &+ i\Omega^2 [\Omega_2(2 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)]; \quad a_4 = \gamma^6(1 + \nu_0) + \gamma^4 \left[ \Omega^2(2 + \nu_0) + i(\Omega_2(1 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)) \right] + \\ &+ \gamma^2 \Omega^2 \left[ \Omega^2 + i(\Omega_2(2 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)) \right] + i\Omega^2 \Omega_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Решением системы (2.24) для различных по модулю корней  $k_i = k_i(\gamma)$  уравнения (2.25) являются функции

$$\begin{aligned} n^+(x_3) &= H_1^+ \operatorname{ch} k_1^+ x_3 + H_2^+ \operatorname{ch} k_2^+ x_3 + H_3^+ \operatorname{ch} k_3^+ x_3, \quad n^-(x_3) = H_1^- \operatorname{sh} k_1^- x_3 + H_2^- \operatorname{sh} k_2^- x_3 + H_3^- \operatorname{sh} k_3^- x_3, \\ q^+(x_3) &= Q_1^+ \operatorname{sh} k_1^+ x_3 + Q_2^+ \operatorname{sh} k_2^+ x_3 + Q_3^+ \operatorname{sh} k_3^+ x_3, \quad q^-(x_3) = Q_1^- \operatorname{ch} k_1^- x_3 + Q_2^- \operatorname{ch} k_2^- x_3 + Q_3^- \operatorname{ch} k_3^- x_3, \\ t^+(x_3) &= T_1^+ \operatorname{ch} k_1^+ x_3 + T_2^+ \operatorname{ch} k_2^+ x_3 + T_3^+ \operatorname{ch} k_3^+ x_3, \quad t^-(x_3) = T_1^- \operatorname{sh} k_1^- x_3 + T_2^- \operatorname{sh} k_2^- x_3 + T_3^- \operatorname{sh} k_3^- x_3. \end{aligned} \quad (2.27)$$

При этом

$$Q_i^\pm = \frac{1}{\lambda} k_i^\pm H_i^\pm, \quad T_i^\pm = d_i^\pm H_i^\pm, \quad d_i = \frac{(1 + \nu_0)(\gamma^2 + k_i^2)^2 + \Omega^2 \left( (2 + \nu_0)(\gamma^2 + k_i^2) + \Omega^2 \right)}{(3\nu_0 - 1)(\gamma^2 + k_i^2 + \Omega^2)}. \quad (2.28)$$

Собственные значения  $\gamma^\pm$  и коэффициенты  $H_i^\pm$  находятся из условий на плоских гранях плиты. Рассмотрим некоторые из них.

*Установившиеся термоупругие колебания пластин с жесткими торцами.* Пусть плоские грани пластины жестко защемлены и поддерживаются при нулевой температуре

$$u_j(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (j = \overline{1, 4}) \quad (2.29)$$

или жестко защемлены и теплоизолированы

$$u_j(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \partial_3 u_4(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \quad (2.30)$$

Из граничных условий (2.29) и выражений (2.23) следует, что

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0, \quad t(\pm 1) = 0. \quad (2.31)$$

Подставляя соотношения (2.27) в граничные условия (2.31), получаем дисперсионные уравнения относительно значений параметра  $\gamma^\pm$

$$\begin{aligned} P_{36}^+(\gamma, \Omega) &= (d_2 - d_3)k_1 \operatorname{th} k_1 + (d_3 - d_1)k_2 \operatorname{th} k_2 + (d_1 - d_2)k_3 \operatorname{th} k_3 = 0, \\ P_{36}^-(\gamma, \Omega) &= (d_2 - d_3)k_1 \operatorname{cth} k_1 + (d_3 - d_1)k_2 \operatorname{cth} k_2 + (d_1 - d_2)k_3 \operatorname{cth} k_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

и выражения для коэффициентов  $H_i^\pm$

$$\begin{aligned} H_1^+ &= k_3 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{sh} k_3 - k_2 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{ch} k_3, & H_2^+ &= k_1 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_3 - k_3 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_3, \\ H_3^+ &= k_2 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_2 - k_1 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_2; \\ H_1^- &= k_3 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{ch} k_3 - k_2 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{sh} k_3, & H_2^- &= k_1 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_3 - k_3 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_3, \\ H_3^- &= k_2 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_2 - k_1 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

Дисперсионные уравнения (2.32) имеют счетное множество корней  $\gamma_p^\pm$ . Каждому корню  $\gamma_p^\pm$  соответствуют величины  $H_{ip}^\pm$ ,  $d_{ip}^\pm$ ,  $k_{ip}^\pm$ , ( $i=1,2,3$ ) и собственные функции  $n_p^\pm(x_3)$ ,  $q_p^\pm(x_3)$ ,  $t_p^\pm(x_3)$ . Поэтому структура потенциального решения в задачах А и Б такова

$$\begin{aligned} u_1^{(2)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2), & u_2^{(2)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2), \\ u_3^{(2)}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p(x_3) C_p(x_1, x_2), & u_4^{(2)}(x_1, x_2, x_3) &= \lambda^{-2} \sum_{p=1}^{\infty} t_p(x_3) C_p(x_1, x_2). \end{aligned}$$

При этом  $C_p(x_1, x_2)$  – метагармонические функции, которые являются решением уравнения

$$\lambda^{-2} D^2 C_p - \gamma_p^2 C_p = 0.$$

В случае граничных условий (2.30) функции (2.27) определяются из уравнений

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0, \quad t'(\pm 1) = 0.$$

Поэтому для получения потенциального решения необходимо в выражениях (2.32), (2.33) произвести формально замену  $d_i$  на  $k_i d_i$ .

*Термоупругие колебания пластин с покрытыми диафрагмой торцами.* В данном случае вихревое решение совпадает с приведенным выше, а для построения потенциального решения воспользуемся представлениями (2.27) для функций  $n^\pm(x_3)$ ,  $q^\pm(x_3)$ ,  $t^\pm(x_3)$  и граничными условиями

$$n(\pm 1) = 0, \quad q'(\pm 1) = 0, \quad t(\pm 1) = 0. \quad (2.34)$$

или

$$n(\pm 1) = 0, \quad q'(\pm 1) = 0, \quad t'(\pm 1) = 0. \quad (2.35)$$

Подставляя соотношения (2.27) в граничные условия (2.34), получим однородные системы уравнений, из которых следуют дисперсионные уравнения относительно значений параметра  $\gamma^\pm$

$$P_{37}^+(\gamma, \Omega) = \operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3 = 0; \quad (2.36) \quad P_{37}^-(\gamma, \Omega) = \operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3 = 0. \quad (2.37)$$

Счетные множества корней  $k_{1p}$ ,  $k_{2p}$ ,  $k_{3p}$  уравнений (2.36), (2.37) находятся в явном виде. Зависимость между квадратами корней  $k_i^2$  бикубического уравнения (2.25) и  $\gamma$  может быть установлена, например, по формулам Д. Кардано. В результате собственные значения  $\gamma_p^\pm$  становятся известными.

Неизвестные коэффициенты  $H_i^\pm$  имеют вид

$$H_1^+ = (k_3^2 - k_2^2) \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3, \quad H_2^+ = (k_1^2 - k_3^2) \operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_3, \quad H_3^+ = (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2, \\ H_1^- = (k_3^2 - k_1^2) \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3, \quad H_2^- = (k_1^2 - k_3^2) \operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_3, \quad H_3^- = (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_3.$$

В случае теплоизолированных плоских граней пластины (2.35) алгоритм получения потенциального решения не изменяется.

Однородное решение вихревого состояния описывает распространение SH волн в пластине, которые не зависят от сопряженного температурного поля. Потенциальное решение характеризует распространение P-SV волн в пластине, которые в рамках связанной термоупругости затухают и обладают дисперсией.

**2.3. Однородные решения уравнений обобщенной термомеханики изотропных пластин.** Построение однородных решений краевой задачи обобщенной термоупругости о гармонических колебаниях пластин сводится к интегрированию системы уравнений [55, 86]

$$\partial_3^2 u_j + (\lambda^2 D^2 + \Omega^2) u_j + \lambda^2 \nu_0 \partial_j (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \lambda \nu_0 \partial_j \partial_3 u_3 = \lambda^2 (3\nu_0 - 1) \partial_j u_4 \quad (j=1, 2), \\ (1 + \nu_0) \partial_3^2 u_3 + (\lambda^2 D^2 + \Omega^2) u_3 + \lambda \nu_0 \partial_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) = \lambda (3\nu_0 - 1) \partial_3 u_4, \\ \partial_3^2 u_4 + (\lambda^2 D^2 + \Omega_4^2 + i\Omega_2) u_4 + (\Omega_5^2 + i\Omega_3) (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1} \partial_3 u_3) = 0 \quad (2.38)$$

с учетом одного из механических граничных условий (1.2)–(1.7) и тепловых краевых условий вида (1.34). В формулах (2.38) введены следующие обозначения

$$\Omega_4^2 = \omega^2 h^2 / c_q^2, \quad c_q^2 = \alpha \tau_r^{-1}, \quad \Omega_5^2 = \omega^2 h^2 \eta \alpha_i \tau_r,$$

$\tau_r$  – время релаксации теплового потока. Если  $\tau_r = 0$ , то  $\Omega_4 = \Omega_5 = 0$  и система уравнений (2.38) совпадает с приведенной выше (2.21) и описывает распространение тепла с бесконечно большой скоростью [229].

Очевидно, что в данном случае вихревое решение совпадает с приведенным выше.

Потенциальное решение найдем, исходя из представлений (2.23). Неизвестные функции  $n(x_3)$ ,  $q(x_3)$ ,  $t(x_3)$  определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$n'' + [(1 + \nu_0)\gamma^2 + \Omega^2] n + \lambda \nu_0 q' - (3\nu_0 - 1)t = 0, \\ (1 + \nu_0)q'' + (\gamma^2 + \Omega^2)q + \lambda^{-1} \nu_0 \gamma^2 n' - \lambda^{-1} (3\nu_0 - 1)t' = 0, \\ t'' + (\gamma^2 + \Omega_4^2 + i\Omega_2)t + (\Omega_5^2 + i\Omega_3)(\gamma^2 n + \lambda q') = 0. \quad (2.39)$$

Характеристическое уравнение системы (2.39) имеет вид

$$b_1 k^6 + b_2 k^4 + b_3 k^2 + b_4 = 0, \quad (2.40)$$

где

$$b_1 = (1 + \nu_0), \quad b_2 = 3\gamma^2(1 + \nu_0) + \Omega^2(2 + \nu_0) + i[\Omega_2(1 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)] + \Omega_4^2(1 + \nu_0) + \Omega_5^2(3\nu_0 - 1), \\ b_3 = 3\gamma^4(1 + \nu_0) + 2\gamma^2 \left[ \Omega^2(2 + \nu_0) + \Omega_4^2(1 + \nu_0) + \Omega_5^2(3\nu_0 - 1) \right] + 2i\gamma^2 (\Omega_2(1 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)) + \\ + \Omega^2 (\Omega_4^2(2 + \nu_0) + \Omega_5^2(3\nu_0 - 1)) + \Omega^4 + i\Omega^2 [\Omega_2(2 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)], \\ b_4 = \gamma^6(1 + \nu_0) + \gamma^4 \left[ \Omega^2(2 + \nu_0) + \Omega_4^2(2 + \nu_0) + \Omega_5^2(3\nu_0 - 1) + i(\Omega_2(1 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)) \right] + \\ + \gamma^2 \Omega^2 \left[ \Omega^2 + \Omega_4^2(2 + \nu_0) + \Omega_5^2(3\nu_0 - 1) + i(\Omega_2(2 + \nu_0) + \Omega_3(3\nu_0 - 1)) \right] + \Omega^4 (\Omega_4^2 + i\Omega_2). \quad (2.41)$$

В частности, если  $\tau_r = 0$ , то коэффициенты  $b_i$  (2.41) совпадают с аналогичными  $a_i$  (2.26) в задаче связанной термоупругости.

Обозначим различные по модулю корни уравнения (2.40) через  $\bar{k}_i(\gamma)$ . Тогда, после формальной замены в соотношениях (2.27)–(2.33) величин  $k_i$  на  $\bar{k}_i$ , получим потенциальные решения рассматриваемых задач, которые по виду совпадают с рассмотренными в п. 2.2.

Однородные решения для неоднородных по толщине плит предполагается рассмотреть во второй части обзорной статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамян Б.Л. Исследования в области пространственных задач теории упругости для однородных и неоднородных упругих тел / Б.Л. Абрамян // Механика деформируемых тел и конструкций. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1985. – С. 10–25.
2. Абрамян Б.Л. Осесимметричные задачи теории упругости / Б.Л. Абрамян, А.Я. Александров // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике (Москва, 29 янв. – 5 февр. 1964 г.): в 3 кн. Кн. 3: Механика твердого тела. – М.: Наука, 1966. – С. 7–37.
3. Айнола Л. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек / Л. Айнола, У. Нигул // Изв. АН ЭССР. – 1965. – Т. 14, № 1. – С. 3–55.
4. Александров А.Я. Трехслойные пластины и оболочки / А.Я. Александров, Л.М. Куршин // Прочность, устойчивость, колебания. – 1968. – Т. 2. – С. 243–308.
5. Анин Б.Ф. Неклассические модели теории пластин и оболочек / Б.Ф. Анин, Ю.М. Волчков // Прикл. механика и техн. физика. – 2016. – Т. 57, № 5. – С. 5–14.
6. Бабич В.М. Математические методы в теории упругих волн / В.М. Бабич, И.А. Молотков // Итоги науки и техники. Сер.: Механика деформируемого твердого тела. – М., 1977. – Т. 10. – С. 5–62.
7. Бородачев Н.М. Решения пространственной задачи теории упругости в напряжениях / Н.М. Бородачев // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 3–34.
8. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / И.И. Ворович // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике (Москва, 29 янв. – 5 февр. 1964 г.): в 3 кн. Кн. 3: Механика твердого тела. – М.: Наука, 1966. – С. 116–136.
9. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек / И.И. Ворович // Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин, (Гегечкори, 1-10 окт. 1974 г.). – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – С. 51–149.
10. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям / А.К. Галиныш // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1967. – Вып. 5. – С. 66–92.
11. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. II / А.К. Галиныш // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – Вып. 6-7. – С. 23–64.
12. Григолюк Э.И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов // Итоги науки и техники. Сер.: Механика твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1973. – Т. 5. – 271 с.
13. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек / Н.А. Кильчевский // Тр. II Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек (г. Львов, 1961). – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – С. 58–69.
14. Купрадзе В.Д. Динамические задачи теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.В. Бурчуладзе // Итоги науки и техники. Сер.: Современные пробл. математики. – М., 1975. – Т. 7. – С. 163–294.
15. Куршин Л.М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек / Л.М. Куршин // Расчет пространственных конструкций. – М.: Стройиздат, 1962. – Вып. 7. – С. 163–192.
16. Прокопов В.К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям / В.К. Прокопов // Тр. Ленинградского политехнического ин-та. – Л., 1967. – Т. 279. – С. 31–46.
17. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложения к теории тонких пластинок / В.К. Прокопов // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике (Москва, 29 янв. – 5 февр. 1964 г.): в 3 кн. Кн. 3: Механика твердого тела – М.: Наука, 1966. – Вып. 3. – С. 253–259.
18. Устинов Ю.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода в теории плит и оболочек / Ю.А. Устинов, М.А. Шленев // Расчет оболочек и пластин. – Ростов н/Д, 1976. – С. 3–27.
19. Устинов Ю.А. О некоторых особенностях асимптотического метода при применении его к изучению колебаний тонких неоднородных упругих плит / Ю.А. Устинов // Матер. I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин, (Гегечкори, 1-10 окт. 1974 г.). – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – С. 395–404.
20. Agalovyan L.A. The solution asymptotics of classical and nonclassical, static and dynamic boundary-value problems for thin bodies / L.A. Agalovyan // Int. Appl. Mech. – 2002. – Vol. 38, Iss. 7. – P. 765–782.
21. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review / H. Altenbach // Mech. Compos. Mater. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243–252.
22. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, No 5. – P. 195–216.
23. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287–308.

24. Carrera E. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates / E. Carrera, S. Brischetto // *Appl. Mech. Rev.* – 2009. – Vol. 62, No 1. – P. 010803 (1–17).
25. Carrera E. Developments, ideas and evaluations based upon the Reissner's mixed theorem in the modeling of multilayered plates and shells / E. Carrera // *Appl. Mech. Rev.* – 2001. – Vol. 54, No 4. – P. 301–329.
26. Chandrasekharaiah D.S. Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature / D.S. Chandrasekharaiah // *Appl. Mech. Rev.* – 1998 – Vol. 51, Iss. 12. – P. 705–729.
27. Chimenti D.E. Guided waves in plates and their use in materials characterization / D.E. Chirmenti // *Appl. Mech. Rev.* – 1997. – Vol. 50, No 5. – P. 247–284.
28. Elastic waveguides: History and the state of the art. I / V.V. Meleshko, A.A. Bondarenko, S.A. Dovgiy, et al. // *J. Math. Sci.* – 2009. – Vol. 162, No 1. – P. 99–120.
29. Elastic waveguides: History and the state of the art. II / V.V. Meleshko, A.A. Bondarenko, A.N. Trofimchuk, et al. // *J. Math. Sci.* – 2010. – Vol. 167, No 2. – P. 197–216.
30. Guz' A.N. Dynamics of laminated and fibrous composites / A.N. Guz', N.A. Shul'ga // *Appl. Mech. Rev.* – 1992. – Vol. 45, No 2. – P. 35–60.
31. Jha D.K. A critical review of recent research on functionally graded plates / D.K. Jha, T. Kant, R.K. Singh // *Compos. Struct.* – 2013. – Vol. 96. – P. 833–849.
32. Kosmodamianskii A.S. Accumulation of internal energy in multiply connected bodies / A.S. Kosmodamianskii // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 38, No 4. – P. 399–422.
33. Kosmodamianskii A.S. Three-dimensional problems of the theory of elasticity for multiply connected plates: Survey / A.S. Kosmodamianskii // *Int. Appl. Mech.* – 1983. – Vol. 19, Iss. 12. – P. 1045–1062.
34. Leissa A.W. A review of laminated composite plate buckling / A.W. Leissa // *Appl. Mech. Rev.* – 1987. – Vol. 40, No 5. – P. 575–591.
35. Liew K.M. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells / K.M. Liew, X. Zhao, J.M. Ferreira // *Compos. Struct.* – 2011. – Vol. 93, No 8. – P. 2031–2041.
36. Nemish Yu.N. Stress-deformation state of thick shells and plates. Three-dimensional theory (review) / Yu.N. Nemish, I.Yu. Khoma // *Int. Appl. Mech.* – 1991. – Vol. 27, Iss. 11. – P. 1035–1055.
37. Nemish Yu.N. Stress-strain state of non-thin plates and shells. Generalized theory (Survey) / Yu.N. Nemish, I.Yu. Khoma // *Int. Appl. Mech.* – 1993. – Vol. 29, Iss. 11. – P. 873–902.
38. Nemish Yu.N. Three-dimensional boundary-value problems of the mechanics of piecewise-uniform bodies with noncanonical interfaces (review) / Yu.N. Nemish // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – Vol. 32, Iss. 10. – P. 743–771.
39. Noor A.K. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates / A.K. Noor, W.S. Burton // *Appl. Mech. Rev.* – 1989. – Vol. 42, No 1. – P. 1–13.
40. Noor A.K. Computational models for sandwich panels and shells / K. Noor, W.S. Burton, C.W. Bert // *Appl. Mech. Rev.* – 1996. – Vol. 9, No 3. – P. 155–199.
41. Piskunov V. G. Evolution of the theory of laminated plates and shells / V. G. Piskunov, A. O. Rasskazov // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 38, No 2. – P. 135–166.
42. Piskunov V.G. An iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems / V.G. Piskunov // *Mech. Compos. Mater.* – 2003. – Vol. 39, No 1. – P. 1–16.
43. Popov G.Ya. New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics / G.Ya. Popov // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, Iss. 12. – P. 1400–1424.
44. Reddy J.N. On the generalization of displacement-based laminated theories / J.N. Reddy // *Appl. Mech. Rev.* – 1993. – Vol. 42, No 11, Pt. 2. – P. S213–S222.
45. Reddy J.N. Theories and computational models for composite laminates / J.N. Reddy, D.H. Robbins // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – Vol. 47, No 6, Pt. 1. – P. 147–169.
46. Reissner E. Reflection on the theory of elastic plates / E. Reissner // *Appl. Mech. Rev.* – 1985. – Vol. 38, No 11. – P. 1453–1464.
47. Sayyad A.S. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results / A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal // *Composite Structures.* – 2015. – Vol. 129. – P. 177–201.
48. Shaldyrvan V.A. Some results and problems in the three-dimensional theory of plates (Review) / V.A. Shaldyrvan // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – Vol. 43, Iss. 2. – P. 160–181.
49. Shul'ga N.A. Propagation of elastic waves in periodically inhomogeneous media / N.A. Shul'ga // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, No 7. – P. 763–796.
50. Wang M.Z. Recent general solutions in linear elasticity and their applications / M.Z. Wang, B.X. Xu, C.F. Gao // *Appl. Mech. Rev.* – 2008. – Vol. 61, Iss. 3. – P. 030803-1–030803-20.
51. Александров А.Н. Расчет элементов авиационных конструкций, трехслойные пластины и оболочки / А.Н. Александров. – М.: Машиностроение, 1985. – 203 с.
52. Александров А.Я. Пространственные задачи теории упругости / А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
53. Александров В.М. Введение в механику контактных взаимодействий / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – Ростов н/Д: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
54. Александров В.М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В.М. Александров, Д.А. Пожарский. – М.: Факториал, 1998. – 288 с.
55. Алтухов Е.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.

56. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.С. Васильев и др. – М.: Физматлит, 2011. – 192 с.
57. Бабешко В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. – М.: Наука, 1989. – 343 с.
58. Байда Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости / Э.Н. Байда. – Л.: ЛГУ, 1983. – 231 с.
59. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
60. Бреховских Л.М. Акустика неоднородных сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин. – М.: Наука, 2009. – Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. – 428 с.
61. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В.В. Власов. – М.: Стройиздат, 1975. – 223 с.
62. Ворович И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И. Ворович, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
63. Ворович И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
64. Галимов Ш.К. Уточненные теории пластин и оболочек / Ш.К. Галимов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – 134 с.
65. Гарынин Г.Л. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления / Г.Л. Гарынин, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2004. – 409 с.
66. Горшков А.Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / А.Г. Горшков, В.И. Пожуев. – М.: Машиностроение, 1992. – 224 с.
67. Грибанов В.Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В.Ф. Грибанов, Н.Г. Паничкин. – М.: Машиностроение, 1984. – 184 с.
68. Григолюк Э.И. Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк. – М.: МГУ, 1981. – 238 с.
69. Григоренко Я.М. Задачи теории упругости неоднородных тел / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
70. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
71. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
72. Гузь А.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – К.: Вища школа, 1989. – 352 с.
73. Гузь А.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – К.: Вища школа, 1982. – 352 с.
74. Коваленко А.Д. Избранные труды / А.Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1976. – 762 с.
75. Космодамианский А.С. Толстые многосвязные пластины / А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
76. Мехтиев М.Ф. Асимптотический анализ некоторых пространственных задач теории упругости для полых тел / М.Ф. Мехтиев. – Баку: НАН Азербайджана, 2008. – 320 с.
77. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах / Л.А. Молотков. – Л.: Наука, 1984. – 201 с.
78. Напряженное состояние пластинок с отверстиями в трехмерной постановке / А.С. Космодамианский, В.Н. Ложкин, Ю.В. Мысовский, В.А. Шалдырван. – Донецк: ДонГУ, 1970. – 255 с.
79. Никишин В.С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред / В.С. Никишин, Г.С. Шапиро. – М.: ВЦ АН СССР, 1970. – 260 с.
80. Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек / Л.П. Хорошун, С.В. Козлов, Ю.А. Иванов, И.К. Кошевой. – К.: Наук. думка, 1988. – 152 с.
81. Олейник О.А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред / О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
82. Папкович П.Ф. Теория упругости / П.Ф. Папкович. – Л.-М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
83. Петрашень Г.И. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики / Г.И. Петрашень, Л.А. Молотков, П.В. Крауклис. – Л.: Наука, 1982. – 289 с.
84. Пикуль В.В. Теория расчета слоистых конструкций / В.В. Пикуль. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
85. Плевако В.П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред / В.П. Плевако. – Харьков: Основа, 1997. – 159 с.
86. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
87. Приварников А.К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований / А.К. Приварников. – Запорожье: ЗНУ, 1990. – 84 с.
88. Пространственные задачи теории упругости и пластичности / под общ. ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1984–1986. – Т. 1–6.
89. Сеймов В.М. Колебания и волны в слоистых средах / В.М. Сеймов, А.Н. Трофимчук, О.А. Савицкий. – К.: Наук. думка, 1990. – 224 с.
90. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах / И.Т. Селезов. – К.: Наук. думка, 1989. – 204 с.

91. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: Физматлит, 2006. – 379 с.
92. Улітко А.Ф. Вибрані праці / А.Ф. Улітко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2004. – 457 с.
93. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
94. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
95. Шевляков Ю.А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред / Ю.А. Шевляков. – К.: Вища школа, 1977. – 215 с.
96. Штамм К. Многослойные конструкции / К. Штамм, Х. Витте. – М.: Стройиздат, 1982. – 296 с.
97. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
98. Brekhovskikh L.M. Waves in layered media / L.M. Brekhovskikh. – New York: Academic Press, 1980 – 503 p.
99. Datta S.K. Elastic waves in composite media and structures: with applications to ultrasonic nondestructive evaluation / S.K. Datta, A.H. Shah. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 318 p.
100. Ewing W.M. Elastic waves in layered media / W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, F. Press. – New York: Mc Graw-Hill Co., 1957. – 380 p.
101. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
102. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity / A.E.H. Love. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013. – 662 p.
103. Lur'e A.I. Three-dimensional problems of the theory of elasticity. – New York: Interscience Publishers, 1964. – 493 p.
104. Miklowitz J. The theory of elastic wave and waveguides / J. Miklowitz. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – 618 p.
105. Mindlin R.D. An introduction to the mathematical theory of vibration of elastic plates / R.D. Mindlin. – Singapore: World Scientific, 2006. – 190 p.
106. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis / J.N. Reddy. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
107. Suresh S. Fundamentals of FGM / S. Suresh, A. Mortensen. – London: Maney, 1998. – 338 p.
108. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity / V.D. Kupradze, T.G. Gegeliia, M.O. Bacheleishvili, T.V. Burchuladze. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979. – 929 p.
109. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets / A. Bessaim, M.S.A. Houari, A. Tounsi et al. // J. Sandwich Struct. Mater. – 2013. – Vol. 15, No 6. – P. 671–703.
110. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates / H.T. Thai, T.P. Vo, T.Q. Bui, T.K. Nguyen // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225, Iss. 3. – P. 951–964.
111. Alibeigloo A. Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method / A. Alibeigloo, M. Alizadeh // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2015. – Vol. 54. – P. 252–266.
112. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates / Z. Belabed, M.S. Ahmed Houari, A. Tounsi et al. // Composites. Part B: Engineering. – 2014. – Vol. 60. – P. 274–283.
113. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory / H.T. Thai, T.K. Nguyen, T.P. Vo, J. Lee // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2014. – Vol. 45. – P. 211–225.
114. Analysis of sandwich plates with a new layerwise formulation / D.A. Maturi, A.J.M. Ferreira, A.M. Zenkour, D.S. Mashat // Composites. Part B: Engineering. – 2014. – Vol. 56. – P. 484–489.
115. Kumari P. Three-dimensional free vibration analysis of levy-type laminated plates using multi-term extended Kantorovich method / P.Kumari, S.Behera // Composites. Part D: Engineering. – 2017. – Vol. 116. – P. 224–238.
116. Lebé A. On the Generalization of Reissner Plate Theory to Laminated Plates, Part I: Theory / A. Lebé, K. Sab // Journal of Elasticity. – 2017. – Vol. 126, Iss. 1. – P. 39–66.
117. Qu Y. Three-dimensional elasticity solution for vibration analysis of functionally graded hollow and solid bodies of revolution. Part I: Theory / Y. Qu, G. Meng // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2014. – Vol. 44. – P. 222–233.
118. Thai H.T. Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates / H.T. Thai, D.H. Choi // Arch. Appl. Mech. – 2013. – Vol. 83, Iss. 12. – P. 1755–1771.
119. Лурье А.И. К теории толстых плит / А.И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2-3. – С. 151–168.
120. Aksentian O.K. The state of stress in a thin plate / O.K. Aksentian, I.I. Vorovich // J. Appl. Math. Mech. – 1963. – Vol. 27, Iss. 6. – P. 1621–1643.
121. Буланов Г.С. Решение смешанной задачи о концентрации напряжений в толстой пластине / Г.С. Буланов, В.А. Шалдырван // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 5–9.
122. Ворovich И.И. К теории неоднородных по толщине плит / И.И. Ворovich, И.Г. Кадомцев, Ю.А. Устинов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – Вып. 3. – С. 119–130.
123. Ворovich И.И. О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты / И.И. Ворovich, О.С. Малкина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – Вып. 5. – С. 92–102.
124. Гомилко А.М. Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра конечной длины / А.М. Гомилко, В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко // Теорет. и прикл. механика. – 1989. – Вып. 20. – С. 3–9.

125. Григолюк Э.И. Изгиб полуслоя, ослабленного сквозным отверстием / Э.И. Григолюк, Ю.Д. Ковалев, Л.А. Фильштинский // Докл. АН России. – 1995. – Т. 345, № 1. – С. 54–56.
126. Григолюк Э.И. Изгиб слоя, ослабленного сквозными туннельными разрезами / Э.И. Григолюк, Ю.Д. Ковалев, Л.А. Фильштинский // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 317, № 1. – С. 51–53.
127. Григолюк Э.И. Пространственная стационарная динамическая задача теории упругости для слоя со сквозной полостью / Э.И. Григолюк, Ю.Д. Ковалев, Л.А. Фильштинский // Докл. АН России. – 2004. – Т. 394, № 4. – С. 476–479.
128. Груздев Ю.А. О частотах и формах изгибных колебаний плит с учетом нескольких распространяющихся мод / Ю.А. Груздев, А.А. Коженков // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 35–39.
129. Груздев Ю.А. Применение символического метода Лурье к динамической задаче растяжения толстой плиты / Ю.А. Груздев, А.А. Коженков // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1988. – № 425. – С. 61–65.
130. Груздев Ю.А. Две осесимметричные задачи теории толстых плит / Ю.А. Груздев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 2. – С. 142–147.
131. Груздев Ю.А. Полимоментная теория равновесия толстых плит / Ю.А. Груздев, В.К. Прокопов // Прикл. математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 2. – С. 344–352.
132. Зильберглейт А.С. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости / А.С. Зильберглейт, Б.М. Нуллер // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 234, № 1. – С. 333–335.
133. Златин А.Н. Некоторые теоремы разложения по однородным решениям для цилиндра / А.Н. Златин // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1979. – Т. 32, № 5. – С. 16–24.
134. Кадомцев И.Г. Изгиб трехслойной плиты / И.Г. Кадомцев // Физико-математические исследования. – Ростов н/Д., 1972. – С. 33–40.
135. Космодамианський О.С. Побудова розв'язку типу пограничного шару в просторовій задачі згину плит / О.С. Космодамианський, В.М. Ложкин // Доповіді АН УРСР. Сер А. – 1969. – № 4. – С. 330–333.
136. Космодамианский А.С. Изгиб толстой кусочно-однородной плиты / А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван, Г.Г. Шалдырван // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 6. – С. 108–115.
137. Космодамианский А.С. Изгиб толстой плиты, ослабленной полостью / А.С. Космодамианский, Г.Г. Шалдырван // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10, № 5. – С. 27–32.
138. Космодамианский А.С. К определению напряженного состояния в трехслойных плитах, ослабленных цилиндрическими полостями / А.С. Космодамианский, А.Ю. Чуриков, В.А. Шалдырван // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 8. – С. 710–713.
139. Кутсер М.Э. О применении символического метода А.И. Лурье в динамике плит при деформации, симметричной относительно срединной поверхности / М.Э. Кутсер, У.К. Нигул // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. науки. – 1965. – Т. 14, № 3. – С. 385–392.
140. Кушнир Д.В. Гармонические и импульсные возбуждения многосвязных цилиндрических тел / Д.В. Кушнир, Л.А. Фильштинский // Прикл. математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 2. – С. 305–314.
141. Лашенов В.К. Метод кусочно-однородных решений в стационарных задачах теории упругости / В.К. Лашенов, Б.М. Нуллер // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т. 64, № 2. – С. 321–333.
142. Ложкин В.Н. Изгиб плиты с двумя неравными круговыми отверстиями в трехмерной постановке / В.Н. Ложкин, Г.Ю. Рудакова // Изв. АН СССР Механика твердого тела. – 1975. – № 1. – С. 147–150.
143. Ложкин В.Н. Пространственная задача термоупругости для изотропных пластин / В.Н. Ложкин // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 169–175.
144. Махсма В.К. Однородные решения задач динамики для толстой плиты / В.К. Махсма, М.А. Шленев // Пластины и оболочки. – Ростов н/Д., 1971. – С. 28–39.
145. Мяннил А. О напряженных состояниях упругой плиты при распространении синусоидальных волн изгиба / А. Мяннил, У. Нигул // Изв. АН ЭССР. – 1963. – Т. 12, № 3. – С. 273–283.
146. Нигул У.К. О корнях уравнения Лэмба для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности / У.К. Нигул // Изв. АН ЭССР. Сер. Физ.-мат. и техн. наук. – 1963. – Т. 12, № 3. – С. 284–293.
147. Нигул У.К. О применении символического метода А.И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит / У.К. Нигул // Изв. АН ЭССР. Сер. Физ.-мат. и техн. наук. – 1963. – Т. 12, № 2. – С. 146–155.
148. Нуллер Б.М. О некоторых обобщениях метода кусочно-однородных решений / Б.М. Нуллер // Изв. Всесоюз. НИИ гидротехники. – 1978. – № 120. – С. 36–42.
149. Нуллер Б.М. О соотношении обобщенной ортогональности П.А. Шиффа / Б.М. Нуллер // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 376–383.
150. Однородные решения задачи о связанных термоупругих колебаниях толстых изотропных пластин / В.А. Буглак, Р.Н. Мысовская, Ю.В. Мысовский, В.И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 1979. – Вып. 10. – С. 79–84.
151. Прокопов В.К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой / В.К. Прокопов // Прикл. математика и механика. – 1950. – Т. 14, № 5. – С. 527–537.
152. Прокопов В.К. Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра / В.К. Прокопов // Прикл. математика и механика. – 1949. – Т. 12, № 2. – С. 135–145.
153. Ружицкий Б.А. Однородные решения для двухслойной плиты / Б.А. Ружицкий // Теорет. и прикл. механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 10–16.
154. Сумбатьян М.А. К теории толстых плит на упругом основании / М.А. Сумбатьян, И.Ф. Хрджианц // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 255–262.
155. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит / Ю.А. Устинов // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755–758.

156. Устинов Ю.А. О структуре погранслоя в слоистых плитах / Ю.А. Устинов // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 229, № 2. – С. 325–328.
157. Фильштинский Л.А. О структуре однородных и фундаментальных решений для упругого слоя / Л.А. Фильштинский, А. Абидо // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 59–63.
158. Чуриков А.Ю. К определению напряженного состояния трехслойной плиты при наличии в ней циклической симметрии / А.Ю. Чуриков // Теорет. и прикл. механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 7–10.
159. Чуриков А.Ю. Концентрация напряжений в трехслойной плите с двумя цилиндрическими полостями / А.Ю. Чуриков, В.А. Галич // Теорет. и прикл. механика. – 1987. – Вып. 18. – С. 25–28.
160. Шалдырван В.А. К определению концентрации напряжений в трехслойной пластине с полостью / В.А. Шалдырван // Теорет. и прикл. механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 3–7.
161. Шленев М.А. Однородные решения трехмерной задачи теории упругости об установившихся колебаниях трехслойной плиты / М.А. Шленев, М.М. Лурье // Расчет оболочек и пластин. – Ростов н/Д., 1978. – С. 23–36.
162. Aksentian O.K. On stress concentrations in thick plates / O.K. Aksentian // J. Appl. Math. Mech. – 1966. – Vol. 30, Iss. 5. – P. 1146–1155.
163. Bulanov G.S. On improving the convergence of the homogeneous solution method / G.S. Bulanov, V.A. Shaldyrvan // J. Appl. Math. Mech. – 1980. – Vol. 44, Iss. 5. – P. 681–683.
164. Chebakov M.I. Certain dynamic and static contact problems of the theory of elasticity for a circular cylinder of finite size / M.I. Chebakov // J. Appl. Math. Mech. – 1980. – Vol. 44, Iss. 5. – P. 651–658.
165. Chebakov M.I. Method of homogeneous solutions in the mixed problem for a finite circular cylinder / M.I. Chebakov // J. Appl. Math. Mech. – 1979. – Vol. 43, Iss. 6. – P. 1160–1169.
166. Fil'shtinskii L.A. Solving the three-dimensional elastic problem for a cylinder of finite length subject to bending / L.A. Fil'shtinskii, Yu.D. Kovalev // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, Iss. 5. – P. 532–536.
167. Folias E.S. Method of solution of a class of three-dimensional elastostatic problems under mode I loading / E.S. Folias // Int. J. Fracture. – 1980. – Vol. 16, No 4. – P. 335–348.
168. Folias E.S. On the three-dimensional theory of cracked plates / E.S. Folias // Trans. ASME, E. – 1975. – Vol. 42, No 3. – P. 663–674.
169. Nigul U.K. Application of the Lur'e symbolic method to stress analysis and to the two-dimensional theory of elastic plates / U.K. Nigul // J. Appl. Math. Mech. – 1963. – Vol. 27, Iss. 3. – P. 882–891.
170. Prokopov V.K. Application of the symbolic method to the derivation of the equations of the theory of plates / V.K. Prokopov // J. Appl. Math. Mech. – 1965. – Vol. 29, Iss. 5. – P. 1064–1083.
171. Ustinov Iu.A. On the completeness of a system of homogeneous solutions of the plates theory / Iu.A. Ustinov // J. Appl. Math. Mech. – 1976. – Vol. 40, Iss. 3. – P. 489–496.
172. Ustinov Yu.A. On critical modes of an inhomogeneous plate / Yu.A. Ustinov // Doklady Physics. – 2000. – Vol. 45, Iss. 2. – P. 80–83.
173. Vorovich I.I. Qualitative investigation of the stress-strain state of a sandwich plate / I.I. Vorovich, I.G. Kadomtsev // J. Appl. Math. Mech. – 1970. – Vol. 34, Iss. 5. – P. 830–836.
174. Vorovich I.I. The state of stress in a thick plate / I.I. Vorovich, O.S. Malkina // J. Appl. Math. Mech. – 1967. – Vol. 31, Iss. 2. – P. 252–264.
175. Авилова С.В. Однородные решения в трехмерных задачах обобщенной термодинамики изотропных пластин / С.В. Авилова, Е.В. Алтухов, Ю.В. Мысовский // Актуальные проблемы механики деформируемого тела: матер. IV Междунар. научн. конф. посвященной памяти акад. НАН Украины А.С. Космодамианского (Донецк-Мелекино, 12-14 июня 2006 г.). – Донецк, 2006. – С. 166–168.
176. Алтухов Е.В. Деформация изотропных пластин при смешанных краевых условиях / Е.В. Алтухов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 1997. – № 1. – С. 56–60.
177. Алтухов Е.В. Деформация трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 29–39.
178. Алтухов Е.В. Изгиб толстой кольцевой плиты / Е.В. Алтухов, А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1975. – Т. 28, № 6. – С. 66–72.
179. Алтухов Е.В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2009. – № 1. – С. 117–124.
180. Алтухов Е.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с покрытыми диафрагмой торцами / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 3–9.
181. Алтухов Е.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины со скользящей заделкой торцов / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 3–10.
182. Алтухов Е.В. Колебания трехслойных пластин в случае граничных условий плоского торца и проскальзывания слоев / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 2. – С. 36–41.
183. Алтухов Е.В. Колебания трехслойных пластин при проскальзывании слоев и с покрытыми диафрагмой торцами / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 5–14.
184. Алтухов Е.В. Колебания трехслойных пластин с жесткой заделкой торцов и при проскальзывании слоев / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 3 (49). – С. 38–50.
185. Алтухов Е.В. Метод И.И. Воровича в трехмерной теории термодинамики пластин / Е.В. Алтухов // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 3–8.

186. Алтухов Е.В. Метод однородных решений в трехмерной теории обобщенной термомеханики изотропных пластин / Е.В. Алтухов, С.В. Авилова // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2006. – № 1. – С. 64–67.
187. Алтухов Е.В. Метод однородных решений в трехмерных задачах статики упругих пластин / Е.В. Алтухов // Тр. III Всероссийской конф. по теории упругости с международным участием (г. Ростов н/Д, 13-16 окт. 2004 г.). – Ростов н/Д, 2004. – С. 34–36.
188. Алтухов Е.В. Напряженное состояние полого цилиндра с ограничениями по торцам / Е.В. Алтухов, В.А. Галич // Теорет. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 8–18.
189. Алтухов Е.В. Напряженное состояние толстой плиты, вызванное неравномерным нагревом её боковых поверхностей / Е.В. Алтухов // Тр. II Республиканской конф. молодых учёных по механике (г. Киев, 1979 г.). – К., 1979. – С. 10–12.
190. Алтухов Е.В. Напряженное состояние толстых пластин при заданных перемещениях на торцах / Е.В. Алтухов, В.А. Галич // Прикл. механика. – 1988. – Т. 25, № 2. – С. 116–119.
191. Алтухов Е.В. Некоторые смешанные задачи динамики изотропных пластин / Е.В. Алтухов, Ю.В. Мысовский // Донец. гос. ун-т. – Донецк, 1995. – 15 с. – Рукопись деп. в ГНТБ Украины 01.12.95: № 2561-Ук95.
192. Алтухов Е.В. Однородные решения в смешанных задачах пространственной теории упругости / Е.В. Алтухов; Донец. ун-т. – Донецк, 1989. – 8 с. – Деп. в УкрНИИТИ 12.01.89: № 280-Ук89.
193. Алтухов Е.В. Однородные решения задач о равновесии и колебаниях изотропных слоисто-неоднородных упругих пластин / Е.В. Алтухов // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 18–22.
194. Алтухов Е.В. Однородные решения смешанной пространственной задачи об установившихся колебаниях пластин / Е.В. Алтухов, Ю.В. Панченко // Современные пробл. механики сплошной среды: Тр. IV Междунар. конф. (Ростов н/Д, 27–28 окт. 1998). – Ростов н/Д: СКНИ, ВШ, 1999. – Т. 1. – С. 32–36.
195. Алтухов Е.В. Однородные решения трехмерных динамических задач изотропных пластин с граничными условиями типа диафрагмы / Е.В. Алтухов // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 137–141.
196. Алтухов Е.В. Однородные решения трехмерных контактных задач теории упругости изотропных пластин / Е.В. Алтухов // Доп. НАН України. – 1999. – № 1. – С. 48–52.
197. Алтухов Е.В. Равновесие двухслойных пластин с жесткими торцами / Е.В. Алтухов, В.Н. Неспирный // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 43–47.
198. Алтухов Е.В. Равновесие и колебания упругих двухслойных изотропных пластин / Е.В. Алтухов // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: тр. VII Междунар. науч. конф. (п. Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк: ДонНУ, 2013. – Т. 1. – С. 33–36.
199. Алтухов Е.В. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами / Е.В. Алтухов, И.Е. Кулиш // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2001. – № 1. – С. 314–321.
200. Алтухов Е.В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146–153.
201. Алтухов Е.В. Термонапряженное состояние полого изотропного цилиндра конечной длины / Е.В. Алтухов, О.С. Фонарева // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2007. – № 1. – С. 85–92.
202. Алтухов Е.В. Точное решение пространственных задач термоупругости для изотропного слоя с полостью и цилиндра / Е.В. Алтухов, М.Л. Алтухова // Тр. IX Междунар. конф. Современные проблемы механики сплошной среды (г. Ростов н/Д, 11–15 окт. 2005 г.). – Ростов н/Д, 2006. – С. 10–14.
203. Алтухов Е.В. Упругие колебания двухслойной пластины со свободной от усилий верхней и защемленной нижней плоскими гранями / Е.В. Алтухов, Е.В. Симбратович, М.В. Фоменко // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. – Днепропетровск, 2012. – Вып. 19. – С. 3–9.
204. Алтухов Е.В. Упругие колебания двухслойных пластин со свободными от напряжений плоскими гранями / Е.В. Алтухов, Е.В. Симбратович // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 5–14.
205. Алтухов Е.В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 3–10.
206. Алтухов Е.В. Упругое равновесие трехслойной пластины с неидеальным контактом слоев / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – № 1. – С. 17–22.
207. Алтухов Е.В. Упругое равновесие трехслойной пластины с покрытыми диафрагмой плоскими гранями / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 1. – С. 19–26.
208. Алтухов Е.В. Установившиеся колебания упругих двухслойных пластин с жесткими плоскими гранями / Е.В. Алтухов, Е.В. Куцай, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 38–46.
209. Алтухов С.В. Коливання ізотропних пластин з урахуванням крайових умов типу плоского торця або діафрагмами / С.В. Алтухов, Ю.В. Панченко, А.Ю. Богатчук // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2000. – № 1. – С. 41–45.
210. Космодамианский А.С. Метод однородных решений в смешанных задачах теории упругости и термоупругости для толстых многосвязных пластин / А.С. Космодамианский, Е.В. Алтухов, В.А. Галич // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 11. – С. 62–65.
211. Космодамианский А.С. Напряженно-деформированное состояние толстых многосвязных пластин в нестационарном тепловом режиме / А.С. Космодамианский, Е.В. Алтухов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 5. – С. 43–46.
212. Симбратович Е.В. Упругие колебания двухслойной пластины при отсутствии напряжений на торцах и скользящем контакте слоев / Е.В. Симбратович, М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2012. – № 2. – С. 66–74.
213. Фоменко М.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с жесткими торцами / М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 2. – С. 71–77.

214. Фоменко М.В. Колебания трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах и скользящего контакта слоев / М.В. Фоменко // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – № 5 (51). – С. 130–141.
215. Фоменко М.В. Кососимметричные колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев / М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 188–195.
216. Фоменко М.В. Однородные решения задач о равновесии упругих трехслойных пластин с несовершенным контактом слоев / М.В. Фоменко // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 75–82.
217. Шевченко В.П. Деформация трехслойных пластин со скользящей заделкой торцов и несовершенным контактом слоев / В.П. Шевченко, Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Доп. НАН України. – 2012. – № 8. – С. 61–66.
218. Шевченко В.П. Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца / В.П. Шевченко, Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Доп. НАН України. – 2011. – № 9. – С. 70–77.
219. Altukhov E.V. The stress state of thick plates under homogeneous boundary conditions of mixed type on the faces / E.V. Altukhov // J. Math. Sci. – 1995. – Vol. 76, No 3. – P. 2339–2342.
220. Altukhov E.V. Elastic equilibrium of a layer with a cavity for boundary conditions of mixed type on the faces / E.V. Altukhov // J. Math. Sci. – 1995. – Vol. 77, No 6. – P. 3477–3479.
221. Altukhov E.V. Elastic vibrations of sandwich plates with diaphragms at the edges / E.V. Altukhov, M.V. Fomenko // Int. Appl. Mech. – 2014. – Vol. 50, No 2. – P. 179–186.
222. Altukhov E.V. Steady-state vibrations of two-layer plates with rigidly fixed end faces and imperfect contact of the layers / E.V. Altukhov, E.V. Simbratovich, M.V. Fomenko // J. Math. Sci. – 2014. – Vol. 198, Iss. 1. – P. 39–53.
223. Altukhov E.V. Stress state of isotropic layer with crack / E.V. Altukhov, A.S. Gol'tsev, V.K. Khizhnyak // Int. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 33, No 1. – P. 39–46.
224. Altukhov E.V. Symmetric elastic vibrations of three-layer plates in the absence of stresses on their end faces and layer slip / E.V. Altukhov, M.V. Fomenko // J. Math. Sci. – 2012. – Vol. 185, No 6. – P. 837–851.
225. Altukhov E.V. The mixed three-dimensional problem for steady vibrations of plates / E.V. Altukhov, Yu.V. Mysovskii, Yu.V. Panchenko // J. Math. Sci. – 1998. – Vol. 90, No 1. – P. 1805–1810.
226. Altukhov E.V. Three-dimensional mixed problems of thermoelasticity for isotropic plates / E.V. Altukhov // J. Math. Sci. – 1997. – Vol. 84, No 6. – P. 1469–1472.
227. Altukhov E.V. Three-dimensional problems of steady vibrations of isotropic plates / E.V. Altukhov, Yu.V. Mysovskii, Yu.V. Panchenko // J. Math. Sci. – 1997. – Vol. 86, No 6. – P. 3095–3098.
228. Мельников В.П. Решение смешанной граничной задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины / В.П. Мельников // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 21–27.
229. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М.: МИР, 1970. – 256 с.
230. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach. – New York: Elsevier, 1973. – 450 p.
231. Graff K.F. Wave motion in elastic solids / K.F. Graff. – New York: Dover, 1991. – 692 p.

Поступила в редакцию 11.09.2017 г.

#### HOMOGENEOUS SOLUTIONS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF THE THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY THEORY OF ISOTROPIC BODIES. HOMOGENEOUS PLATES

*E.V. Altukhov, M.V. Fomenko*

The boundary-value problems of the three-dimensional elasticity theory of the equilibrium and steady-state vibrations of isotropic plates are considered. A review of papers devoted to the methods of reducing the three-dimensional problems of the elasticity theory to two-dimensional problems is given. The review paper zero in on the method of homogeneous solutions and analysis of the results of scientific research received recently.

**Keywords:** layer, isotropic homogeneous plate, boundary-value problems of the three-dimensional elasticity theory, homogeneous solution method, vortex and potential solutions, spectral problems, stress state, dispersion equations, normal mode spectra.

**Алтухов Евгений Викторович**

кандидат физико-математических наук, доцент;  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».  
E-mail: ealtukhov@ukr.net  
Тел.: (062) 302-92-93

**Altukhov Evgenii Victorovich**

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences, Docent;  
Donetsk National University, Donetsk

**Фоменко Максим Владимирович**

кандидат физико-математических наук;  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».  
E-mail: maxim\_fom@mail.ru

**Fomenko Maksim Vladimirovich**

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences;  
Donetsk National University, Donetsk

УДК 539.3

## ИЗГИБ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УСИЛИЙ ПО ОСНОВАНИЮ

© 2017. А.И. Занько

Решена задача об изгибе многосвязной анизотропной плиты под действием усилий, распределенных по основанию. С использованием методов комплексных потенциалов, разложений функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и обобщенного метода наименьших квадратов рассматриваемая задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для круговой плиты с эллиптическим отверстием или трещиной проведены численные исследования с анализом влияния геометрических характеристик плиты, его материала и способа подкрепления контуров на значения изгибающих моментов.

**Ключевые слова:** анизотропная плита; комплексные потенциалы теории изгиба плит; полиномы Фабера; ряды Лорана; обобщенный метод наименьших квадратов; равномерно распределенные усилия.

Практически важные решения некоторых классов задач изгиба тонких многосвязных плит до сих пор не рассматривались. К ним относятся и задачи о действии усилий на основании плиты. Многие задачи изгиба тонких плит были решены с использованием функций обобщенных комплексных переменных С. Г. Лехницкого [1]. В работах [2, 3] были получены общие представления этих функций для многосвязных областей. Однако в них неверно учтено действие усилий по основанию плиты. Используемый для удовлетворения граничным условиям метод рядов не позволял получать приемлемые решения задач. В работах [4–6] получены общие представления комплексных потенциалов, учитывающие произвольное нагружение плиты. Для удовлетворения граничным условиям использован обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК).

В данной статье с использованием комплексных потенциалов и ОМНК решена задача о действии на многосвязную плиту равномерно распределенных усилий по ее основанию.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим тонкую анизотропную плиту, срединная плоскость которой занимает многосвязную область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  и центрами в точках  $z_l$  ( $x_{0l}$ ,  $y_{0l}$ ) (рис. 1).

Плита находится под действием равномерно распределенных нормальных усилий  $q(x, y) = q_0$ , распределенных по верхнему основанию. Эллипсы  $L_l$  могут располагаться произвольно относительно друг друга и внешнего контура, в том числе касаться, пересекаться, образовывать контуры сложной конфигурации. Один из контуров плиты  $L_p$  жестко защемлен, остальные свободны от усилий или жестко подкреплены. При этом на жестко защемленном контуре  $L_p$  сила реакции опоры защемления в силу

равновесия плиты равна  $P_p^* = -\pi q_0 \left( a_0 b_0 - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} a_l b_l \right)$ , а ее главный момент имеет

компоненты  $M_{px}^* = y_{0p} P_p^*$ ,  $M_{py}^* = -x_{0p} P_p^*$ .

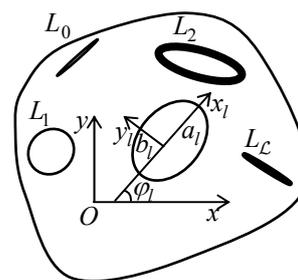


Рис. 1

Решение рассматриваемой задачи при использовании комплексных потенциалов теории изгиба плит [1–6] сводится к нахождению функций  $W'_k(z_k)$  из граничных условий на контурах  $L_i$  ( $i = \overline{0, \mathcal{L}}$ )

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ki\alpha} W'_k(z_k) = f_{i\alpha}(t) \quad (\alpha = 1, 2), \quad (1)$$

причем в случае неподкрепленного контура  $L_i$

$$\begin{aligned} g_{ki1} &= p_k / \mu_k, \quad g_{ki2} = q_k, \quad f_{i1} = J_{01} - c_i x, \quad f_{i2} = -J_{02} + c_i y, \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ J_{01} &= \int_0^s [(N_{xy0} - H_{xy0}) dx + M_{x0} dy], \quad J_{02} = -\int_0^s [M_{y0} dx - (N_{xy0} + H_{xy0}) dy]; \\ N_{xy0} &= -\int_0^s N_{y0} dx - N_{x0} dy, \quad M_{x0} = -\left( D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{y0} &= -\left( D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy0} &= -\left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \\ N_{x0} &= -\left( D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right), \\ N_{y0} &= -\left( D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right); \end{aligned}$$

$D_{ij} = B_{ij} D_0$  – известные [4] жесткости материала плиты;  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (2)$$

$c_i$  – вещественные постоянные;  $w_0(x, y)$  – частное решение уравнения

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (3)$$

Если же контур  $L_i$  жестко подкреплен, то

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \quad f_{i1} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{1i}, \quad f_{i2} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{2i}, \quad (4)$$

В случае жесткого защемления контура в условиях (4) нужно принять  $c_{ai} = 0$ .

Функции  $W'_k(z_k)$  голоморфны в многосвязных областях  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными преобразованиями

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (5)$$

и ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими  $L_l$  при аффинных преобразованиях (5). Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана (для контуров отверстий) и по полиномам Фабера (для внешних контуров), для комплексных потенциалов получаем выражения [4–6]

$$W'_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}); \quad (6)$$

в которых  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  – постоянные, определяемые из решения систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left( 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right);$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left( 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{x0l}}{4\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{y0l}}{4\pi D_{11}} \right);$$

$P_l$  и  $M_{xl}$ ,  $M_{yl}$  – главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат внешних сил или сил реакции, приложенных к контуру  $L_l$ ;

$$P_{0l} = - \int_{L_l} N_{y0} dx - N_{x0} dy, \quad M_{x0l} = \int_{L_l} (y N_{x0} - H_{xy0}) dy - (y N_{y0} - M_{y0}) dx,$$

$$M_{y0l} = \int_{L_l} (x N_{y0} - H_{xy0}) dx - (x N_{x0} - M_{x0}) dy; \quad \varphi_{k0n} = (z_k / R_{k0})^n, \quad \varphi_{kln} = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l \geq 1);$$

$\zeta_{kl}$  – переменные, определяемые из конформных отображений [7]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right)$$

внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \left[ a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2,$$

$$m_{kl} = \left[ a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2 R_{kl},$$

где  $\varphi_l$  – угол между направлениями осей координат  $Ox$  и  $O_l x_l$  основной системы и локальной системы с началом в центре эллипса  $L_l$  и осью  $O_l x_l$  вдоль полуоси  $a_l$ , отсчитываемый от  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}$ ,  $y_{0l}$  – координаты начала системы координат  $O_l x_l y_l$ ;  $a_{kln}$  – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах.

Для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  функций (6) удовлетворим граничным условиям (1). Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_{kia} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kl}) a_{kln} + \bar{g}_{kia} \bar{\delta}_{k,s} \overline{\varphi'_{kln}(t_{kl})} \bar{a}_{kln} \right) =$$

$$= - \sum_{k=1}^2 \left[ g_{kia} \delta_{k,s} N'_k(t_{kl}) + \bar{g}_{kia} \bar{\delta}_{k,s} \overline{N'_k(t_{kl})} \right] + \frac{df_{i\alpha}(t)}{ds} \quad (i = \overline{0, \mathcal{L}}; \alpha = 1, 2), \quad (7)$$

где

$$N'_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}};$$

$$\varphi'_{k0n} = \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k0}^n}; \quad \varphi'_{kln} = - \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l \geq 1); \quad \delta_{k,s} = dt_k / ds;$$

При этом в случае неподкрепленного контура

$$\frac{df_{i1}}{ds} = \frac{dJ_{01}(s)}{ds} - c_i \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{i2}}{ds} = - \frac{dJ_{02}(s)}{ds} + c_i \frac{dy}{ds},$$

если же контур  $L_i$  жестко подкреплен или жестко защемлен, то

$$\frac{df_{i1}}{ds} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{i2}}{ds} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}.$$

Условиям (7) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [8, 9]. Для этого на контурах плиты  $L_i$  выберем набор точек  $M_{im}(x_{im}, y_{im})$  ( $m = \overline{1, M_i}$ ) и, удовлетворив в них условиям (7), получим

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_{kia} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} + \bar{g}_{kia} \bar{\delta}_{k,s} \overline{\varphi'_{kln}(t_{klm})} \bar{a}_{kln} \right) = - \sum_{k=1}^2 \left[ g_{kia} \delta_{k,s} N'_k(t_{klm}) + \bar{g}_{kia} \bar{\delta}_{k,s} \overline{N'_k(t_{klm})} \right] + \frac{df_{i\alpha}(t_{im})}{ds} \quad (i = \overline{g, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_i}; \alpha = 1, 2), \quad (8)$$

где  $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$ ,  $t_{im}(x_{im}, y_{im})$ . Систему (8) дополним уравнениями однозначности прогиба [4] для каждого отверстия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i R_{kl} a_{kln} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (9)$$

После нахождения псевдорешений системы уравнений (8) и (9) с использованием сингулярных разложений постоянные  $a_{kln}$ , а следовательно и функции  $W'_k(z_k)$ , будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты в любой точке плиты

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k),$$

где  $r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2$ . Если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез (трещину), то для его концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности

моментов (КИМ)  $k_{1M}^{\pm}$  (КИМ соответствующий моменту  $M_y$ ) и  $k_{2M}^{\pm}$  (КИМ соответствующий моменту  $H_{xy}$ ) по формулам [10]

$$k_{1M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k M_k, \quad k_{2M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 r_k M_k,$$

в которых

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left( A_{kl} (z_{kl} \pm 2R_{kl}) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kl n} \right),$$

знаки + и – у КИМ относятся к правому и левому концам разреза соответственно.

**Решение для круговой плиты с эллиптическим отверстием.** Исходя из приведенного, представим решения некоторых задач для круговой плиты с внешним контуром  $L_0$  радиуса  $a_0$  ( $b_0 = a_0$ ) и центральным эллиптическим отверстием  $L_1$  с полуосями  $a_1$ ,  $b_1$ . Плита находится под действием равномерно распределенных по верхнему основанию усилий  $q(x, y) = q_0$ , где  $q_0$  – интенсивность этих усилий.

Для заданного нагружения частное решение  $w_0(x, y)$  неоднородного дифференциального уравнения (3) можно принять в виде

$$w_0(x, y) = q_*(x^2 + y^2)^2, \quad q_* - \text{постоянная.} \quad (10)$$

Подставляя функцию (10) в уравнение (3), получаем

$$q_* = q_0 / \{ 8 [ 3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66}) ] \}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= 4q_*(3x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 4q_*(3y^2 + x^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 8q_*xy; \\ M_{x0} &= -4q_* [ D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy ], \\ M_{y0} &= -4q_* [ D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy ], \\ H_{xy0} &= -4q_* [ D_{16}(3x^2 + y^2) + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy ]; \\ N_{x0} &= -8q_* [ (3D_{11} + D_{12} + 2D_{66})x + 3(D_{16} + D_{26})y ], \\ N_{y0} &= -8q_* [ 3(D_{16} + D_{26})x + (D_{12} + 2D_{66} + 3D_{22})y ]; \\ N_{xy0} &= 4q_* [ 3 \cos^2(\vartheta) a_1^2 D_{16} + 3 \cos^2(\vartheta) a_1^2 D_{26} - 2a_1 b_1 D_{12} \vartheta + \\ &+ 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) a_1 b_1 D_{22} - 3a_1 b_1 D_{22} \vartheta - 4a_1 b_1 D_{66} \vartheta - 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \times \\ &\times a_1 b_1 D_{11} - 3a_1 b_1 D_{11} \vartheta + 3 \cos^2(\vartheta) b_1^2 D_{16} + 3 \cos^2(\vartheta) b_1^2 D_{26} ]. \\ P_{01} &= - \int_{L_1} N_{y0} dx - N_{x0} dy = - \int_0^{2\pi} N_{y0} dx - N_{x0} dy = -\pi q_0 a_1 b_1. \end{aligned}$$

Для рассматриваемой задачи в вышеприведенном решении нужно принять

$$\mathcal{L} = 1, \quad x_{0l} = y_{0l} = 0, \quad \varphi_1 = 0 \quad P_p^* = -\pi q_0 (a_0^2 - a_1 b_1), \quad B_{kl} = 0.$$

Остальные величины зависят от граничных условий.

Рассмотрим случаи, когда плита жестко защемлена по внешнему контуру, по внутреннему свободна и второй, когда она жестко подкреплена по внутреннему, свободна по внешнему. В случае жесткого защемления плиты по внешнему контуру

$$g_{k01} = 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \quad f_{01} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{10} = -4q_* (x^2 + y^2)x + c_{10},$$

$$f_{02} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{20} = -4q_* (x^2 + y^2)y + c_{20},$$

$$g_{k11} = p_k / \mu_k, \quad g_{k12} = q_k, \quad f_{11} = J_{01} - c_1 x + c_{11}, \quad f_{12} = -J_{02} + c_1 y + c_{21}$$

$$J_{01} = \frac{4R_1^3 q_*}{3} \left[ 4 \cos^3(\vartheta) (3D_{16} + D_{26}) - \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta) (5D_{11} - 2D_{12} - 3D_{22} - 4D_{66}) - \right. \\ \left. - 3\vartheta \cos(\vartheta) (3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) + 3 \cos(\vartheta) (D_{16} + 3D_{26}) + \right. \\ \left. + \sin(\vartheta) (5D_{11} + D_{12} + 6D_{22} + 8D_{66}) \right],$$

$$J_{02} = \frac{4R_1^3 q_*}{3} \left[ \cos^3(\vartheta) (3D_{11} + 2D_{12} - 5D_{22} + 4D_{66}) + 4 \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta) (D_{16} + 3D_{26}) - \right. \\ \left. - 3\vartheta \sin(\vartheta) (3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) - 3 \cos(\vartheta) (3D_{11} + D_{12} + 4D_{66}) + \right. \\ \left. + \sin(\vartheta) (5D_{16} + 3D_{26}) \right],$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = -4q_* \left[ (3x^2 + y^2) \frac{dx}{ds} + 2xy \frac{dy}{ds} \right], \quad \frac{df_{02}}{ds} = -4q_* \left[ 2xy \frac{dx}{ds} + (x^2 + 3y^2) \frac{dy}{ds} \right],$$

$$\frac{df_{11}}{ds} = \frac{dJ_{01}}{ds} - c_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{dJ_{02}}{ds} + c_1 \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dJ_{01}}{ds} = 4q_* \left\{ \left[ R_1^2 (6 \cos^2(\vartheta) (D_{16} + D_{26}) - \vartheta (2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) (D_{22} - D_{11})) + D_{16} (3x^2 + y^2) + D_{26} (3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy \right] \frac{dx}{ds} - \right. \\ \left. - \left[ D_{11} (3x^2 + y^2) + D_{12} (3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\},$$

$$\frac{dJ_{02}}{ds} = -4q_* \left\{ \left[ D_{12} (3x^2 + y^2) + D_{22} (3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\ \left. + \left[ R_1^2 (6 \cos^2(\vartheta) (D_{16} + D_{26}) - \vartheta (2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) (D_{22} - D_{11})) - D_{16} (3x^2 + y^2) - D_{26} (3y^2 + x^2) - 4D_{66}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}.$$

Заметим, что в данном случае  $P_1 = 0$ ,  $P_{01} = -\pi q_0 R_1^2$ ,  $M_{x1} = M_{y1} = 0$ .

Если плита жестко защемлена по внутреннему контуру, то

$$g_{k01} = p_k / \mu_k, \quad g_{k02} = q_k, \quad f_{01} = J_{01} - c_0 x + c_{10}, \quad f_{02} = -J_{02} + c_0 y + c_{20},$$

$$\begin{aligned}
 g_{k11} &= 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \quad f_{11} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{11} = -4q_*(x^2 + y^2)x + c_{11}, \\
 f_{12} &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{21} = -4q_*(x^2 + y^2)y + c_{21}, \\
 J_{01} &= \frac{4R_0^3 q_*}{3} \left[ 4 \cos^3(\vartheta)(3D_{16} + D_{26}) - \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)(5D_{11} - 2D_{12} - 3D_{22} - 4D_{66}) - \right. \\
 &\quad \left. - 3\vartheta \cos(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) + 3 \cos(\vartheta)(D_{16} + 3D_{26}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sin(\vartheta)(5D_{11} + D_{12} + 6D_{22} + 8D_{66}) \right], \\
 J_{02} &= \frac{4R_0^3 q_*}{3} \left[ \cos^3(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} - 5D_{22} + 4D_{66}) + 4 \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)(D_{16} + 3D_{26}) - \right. \\
 &\quad \left. - 3\vartheta \sin(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) - \right. \\
 &\quad \left. - 3 \cos(\vartheta)(3D_{11} + D_{12} + 4D_{66}) + \sin(\vartheta)(5D_{16} + 3D_{26}) \right], \\
 \frac{df_{01}}{ds} &= \frac{dJ_{01}}{ds} - c_0 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = -\frac{dJ_{02}}{ds} + c_0 \frac{dy}{ds}, \\
 \frac{df_{11}}{ds} &= -4q_* \left[ \left( 3x^2 + y^2 \right) \frac{dx}{ds} + 2xy \frac{dy}{ds} \right], \quad \frac{df_{12}}{ds} = -4q_* \left[ 2xy \frac{dx}{ds} + (x^2 + 3y^2) \frac{dy}{ds} \right], \\
 \frac{dJ_{01}}{ds} &= 4q_* \left\{ \left[ R_0^2 \left( 6 \cos^2(\vartheta)(D_{16} + D_{26}) - \vartheta(2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)(D_{22} - D_{11}) \right) + D_{16} \left( 3x^2 + y^2 \right) + D_{26} \left( 3y^2 + x^2 \right) + 4D_{66}xy \right] \frac{dx}{ds} - \\
 &\quad \left. - \left[ D_{11} \left( 3x^2 + y^2 \right) + D_{12} \left( 3y^2 + x^2 \right) + 4D_{16}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}, \\
 \frac{dJ_{02}}{ds} &= -4q_* \left\{ \left[ D_{12} \left( 3x^2 + y^2 \right) + D_{22} \left( 3y^2 + x^2 \right) + 4D_{26}xy \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ R_0^2 \left( 6 \cos^2(\vartheta)(D_{16} + D_{26}) - \vartheta(2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)(D_{22} - D_{11}) \right) - D_{16} \left( 3x^2 + y^2 \right) - D_{26} \left( 3y^2 + x^2 \right) - 4D_{66}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $P_1 + P_{01} = -\pi q_0 (R_0^2 - R_1^2) - \pi q_0 R_1^2 = -\pi q_0 R_0^2$ ,  $M_{x1} = M_{y1} = 0$ .

**Результаты численных исследований.** Проведены численные исследования значений изгибающих моментов. Плита считалась изготовленной из материалов [11]: алюминий (материал М1) или стеклопластик косоугольной намотки (М2). Коэффициенты деформаций  $a_{ij}$  для этих материалов приведены в табл. 1. При этом все значения приведены с точностью до множителя  $q_0 / D_0$ . Для изотропной плиты принимался алюминий, для которого  $a_{22} = 0,1458 \cdot 10^{-4}$  незначительно отличается от постоянной  $a_{22} = a_{11} = 0,1408 \cdot 10^{-4}$ .

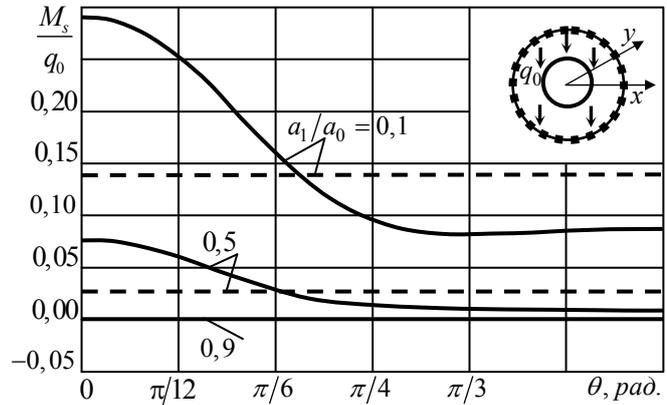
Таблица 1

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^4$ , МПа <sup>-1</sup>	$a_{22} \cdot 10^4$ , МПа <sup>-1</sup>	$a_{12} \cdot 10^4$ , МПа <sup>-1</sup>	$a_{66} \cdot 10^4$ , МПа <sup>-1</sup>	
М1	0,1408	0,1458	-0,035	0,352	1,000
М2	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571

Для кругового кольца с внешним жестко заземленным контуром  $L_0$  радиуса  $a_0$  и внутренним незагруженным контуром  $L_1$  радиуса  $a_1$  ( $b_1 = a_1$ ) в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  и значения отношения  $a_1/a_0$  в табл. 2 приведены значения моментов  $M_s$  в точках контура  $L_1$ , а на рис. 2 изображены графики распределения этих моментов  $M_s$ .

Таблица 2

Материал	$\theta$ , рад.	$a_1/a_0$		
		0,1	0,5	0,9
M1	0	0,140	0,027	0,000
M2	0	0,292	0,077	0,001
	$\pi/12$	0,253	0,060	0,001
	$\pi/6$	0,161	0,028	0,000
	$\pi/4$	0,095	0,013	0,000
	$\pi/3$	0,082	0,010	0,000
	$5\pi/12$	0,085	0,008	0,000
	$\pi/2$	0,088	0,007	0,000



Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла  $\theta$ , поэтому они приведены только для  $\theta = 0$ . Эти значения для изотропного кольца оказались совпадающими с их значениями, вычисленными по точному решению задачи [5]. Сплошные линии относятся к материалу M2, штриховые – к материалу M1. Из табл. 2, рис. 2 и других полученных результатов видно, что с ростом отношения  $a_1/a_0$  значения изгибающих моментов на контурах по модулю уменьшаются, что связано с уменьшением суммарной нагрузки на плиту, причем при  $a_1/a_0 \rightarrow 1$  они стремятся к нулю. Заметим, что для частных случаев кругового кольца полученные результаты согласуются с данными других авторов [3], отличаясь от последних своей высокой точностью.

Для кругового кольца с внешним незагруженным контуром  $L_0$  радиуса  $a_0$  и внутренним жестко заземленным контуром  $L_1$  радиуса  $a_1$  в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  и значения отношения  $a_1/a_0$

в табл. 3 приведены значения моментов  $M_s$  и  $M_n$  в точках контура  $L_1$ , а на рис. 3 изображены графики распределения моментов  $M_s$  по контуру  $L_1$ . Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла  $\theta$ , поэтому они

Таблица 3

Материал	$\theta$ , рад.	$a_1/a_0$					
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		$M_s$ на $L_1$			$M_n$ на $L_1$		
M1	0	-0,243	-0,044	-0,001	-0,971	-0,175	-0,005
M2	0	-0,310	-0,053	-0,001	-1,126	-0,194	-0,005
	$\pi/6$	-0,475	-0,081	-0,002	-1,102	-0,189	-0,005
	$\pi/3$	-0,678	-0,117	-0,004	-1,039	-0,180	-0,005
	$\pi/2$	-0,532	-0,095	-0,003	-0,953	-0,170	-0,005
	$2\pi/3$	-0,269	-0,050	-0,002	-0,868	-0,162	-0,005
	$5\pi/6$	-0,109	-0,021	-0,001	-0,807	-0,154	-0,005
	$\pi$	-0,060	-0,012	0,000	-0,784	-0,150	-0,005

приведены только для  $\theta = 0$ . Эти значения для изотропного кольца оказались совпадающими с их значениями, вычисленными по точному решению задачи [5]. Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1. Из данных табл. 3, рис. 3 и других полученных результатов видно, что с ростом отношения  $a_1/a_0$  значения изгибающих моментов на контурах по модулю уменьшаются, причем при  $a_1/a_0 \rightarrow 1$  они стремятся к нулю, что связано с уменьшением суммарной нагрузки на плиту. Заметим, что известные результаты [3] существенно отличаются от полученных здесь.

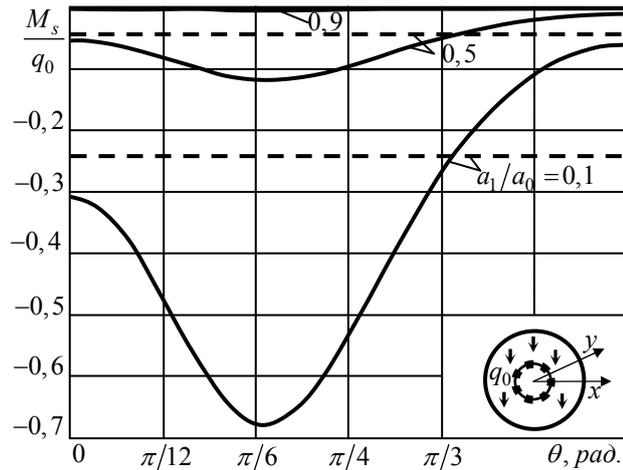


Рис. 3

Численные исследования были проведены и для случая, когда круговая плита ослаблена центральным эллиптическим отверстием с контуром  $L_1$ . Для круговой плиты с внешним жестко заземленным контуром  $L_0$  радиуса  $a_0$  ( $b_0 = a_0$ ) и трещиной полудлины  $a_1 = 0,5a_0$  при действии равномерно распределенных усилий  $q(x, y)$  по основанию в зависимости от отношения  $b_1/a_1$ , в табл. 4 приведены значения моментов

$M_s$  по контуру трещины и КИМ  $k_{1M}^\pm$ . Как видно из данных этой таблицы, при уменьшении отношения полуосей  $b_1/a_1$  эллипса  $L_1$  значения моментов  $M_s$  вблизи конца большой полуоси возрастают и стремятся к бесконечности. Для точек трещины, лежащих в окрестности малой полуоси трещины значения моментов изменяются незначительно. При  $b_1/a_1 < 10^{-3}$  отверстие можно считать трещиной и считать для ее концов КИМ  $k_{1M}^\pm$  (для рассматриваемого случая  $k_{2M}^\pm = 0$ ). Для анизотропной плиты значения КИМ получаются больше, чем для изотропной.

Таблица 4

Материал	$\theta$ , рад.	$b_1/a_1$					$k_{1M}^\pm$
		1,0	0,5	0,1	0,01	0,001	
М1	0	0,027	0,057	0,394	4,198	42,181	0,039
	$\pi/12$	0,027	0,052	0,076	0,041	0,037	
	$\pi/6$	0,027	0,046	0,053	0,048	0,047	
	$\pi/4$	0,027	0,048	0,061	0,062	0,063	
	$\pi/3$	0,027	0,054	0,074	0,077	0,078	
	$5\pi/12$	0,027	0,060	0,084	0,088	0,089	
	$\pi/2$	0,027	0,062	0,087	0,092	0,093	
М2	0	0,077	0,164	1,056	11,245	113,147	0,059
	$\pi/12$	0,060	0,103	0,050	0,031	0,029	
	$\pi/6$	0,028	0,041	0,037	0,036	0,036	
	$\pi/4$	0,013	0,030	0,043	0,046	0,046	
	$\pi/3$	0,010	0,031	0,051	0,056	0,056	
	$5\pi/12$	0,008	0,034	0,057	0,063	0,064	
	$\pi/2$	0,007	0,035	0,060	0,065	0,066	

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957.– 463 с.
2. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А. С. Космодамианский. – К., Донецк: Вища шк., 1976.– 200 с.
3. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – № 3. – С. 97–127.

4. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 4 (50). – С. 115 – 136.
5. Калоеров С. А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С. А. Калоеров, А. И. Занько, А. А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 55. – С. 99–138.
6. Калоеров С. А. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 456–464.
7. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская Е.С. // Концентрация напряжений.– К.: А. С. К., 1998.– С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
8. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин.– М.:Наука, 1977.– 304 с.
9. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К.Моулер.– М.: Мир, 1969. – 280 с.
10. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика.– 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
11. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров.– К., Донецк: Вища шк., 1983.– 160 с.

*Поступила в редакцию 01.11.2017 г.*

#### BENDING OF MULTICONNECTED ANISOTROPIC PLATE UNDER THE INFLUENCE ON THE BASE

*A.I. Zan`ko*

The problem of the bending of a multiconnected anisotropic plate under the action of forces distributed along the base was solved. Using the methods of complex potentials, expansions of functions in Laurent series and with respect to Faber polynomials and the generalized method of least squares, the problem under consideration is reduced to solving a system of linear algebraic equations. For a circular plate with an elliptical hole or a crack, were carried out numerical studies with an analysis of the influence of the geometrical characteristics of the plate, its material, and the method of reinforcing the contours on the values of the bending moments.

**Keywords:** anisotropic plate; complex potentials of the theory of bending plates; Faber polynomials; Laurent's ranks; generalized method of least squares; evenly distributed forces.

**Занько Алена Игоревна**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,

г. Донецк

E-mail: all53700@mail.ru

**Zan`ko Alyona Igorevna**

Donetsk National University, Donetsk

УДК 531.38; 531.39

**О РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ  
В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ  
ЭФФЕКТА БАРНЕТТА-ЛОНДОНА**© 2017. *Е.А. Игнатова*

Изучены равномерные движения относительно наклонной оси при движении гиростата с переменным гиростатическим моментом в сложном силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского и магнитного полей. Действие магнитного поля на движение гиростата обусловлено эффектом Барнетта-Лондона. Условия существования равномерных движений записаны в виде системы алгебраических уравнений на параметры задачи. Дан анализ компонент гиростатического момента в зависимости от времени.

**Ключевые слова:** гириостат; магнитное поле, эффект Барнетта-Лондона.

**Введение.** Равномерные движения являются рабочими режимами многих современных технических конструкций, что объясняет актуальность моделирования этих движений для систем связанных твердых тел класса гириостат в полях сложной структуры. В работах [1–7] изучены свойства и устойчивость равномерных вращений тяжелого твердого тела и гириостата относительно вертикали в предположении, что гириостатический момент постоянен. В книге [8] показано, что в задаче о движении гириостата с постоянным гириостатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил имеют место и равномерные движения относительно наклонной оси (то есть оси, которая не совпадает с осью симметрии силовых полей). Это свойство для движения тяжелого гириостата с неподвижной точкой невозможно. Наиболее адекватным служит моделирование движения гириостата с учетом переменности гириостатического момента. Исследование равномерных вращений гириостата с одним ротором выполнено в статье [9]. В указанной статье показано существование равномерных вращений гириостата вокруг оси, направление которой не совпадает с направлением силы тяжести. Наиболее полно проведены исследования условий существования различных классов движений в задаче о движении гириостата с одним вращающимся ротором. В последнее время интенсивно изучаются программные движения гириостата с двумя вращающимися роторами. При этом рассматриваются условия существования для задачи о движении гириостата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгоффа-Пуассона. Основным методом в исследовании условий существования решений уравнений движения гириостата служит метод инвариантных соотношений [10] для автономных дифференциальных уравнений и метод для инвариантных соотношений [11] для неавтономных дифференциальных уравнений.

Данная статья посвящена изучению условий существования равномерных вращений гириостата в задаче о движении гириостата с переменным гириостатическим моментом в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Данная задача рассмотрена не только в постановке [12–16], но и при изучении первых интегралов уравнений движения [8, 17, 18].

**Постановка задачи.** Как показано в [8, 16, 17] моделирование движения ферромагнетика и сверхпроводящего тела сводится к системе дифференциальных уравнений

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \lambda(t) \times \omega - \dot{\lambda}(t) + B\omega \times \nu + s \times \nu + \nu \times C\nu, \quad (1) \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (2)$$

которые допускают два первых интеграла

$$(A\omega + \lambda) \cdot \nu = k, \quad \nu \cdot \nu = l, \quad (3)$$

где  $k$  – произвольная постоянная.

В формулах (1)–(3) введены обозначения:  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости гиростата;  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей и магнитного поля;  $\lambda(t)$  – гиростатический момент;  $s = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор, направленный из неподвижной точки гиростата в обобщенный центр масс;  $A = (A_{ij})$ ,  $(i, j = \overline{1,3})$  – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке;  $B = (B_{ij})$  и  $C = (C_{ij})$  – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Точка над переменными обозначает относительную производную по времени  $t$ .

Предположим, что вектор гиростатического момента имеет вид:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t)\alpha + \lambda_2(t)\beta, \quad \alpha \cdot \beta = 0, \quad |\alpha| = 1, \quad |\beta| = 1. \quad (4)$$

То есть гиростат несет два вращающихся ротора. В формуле (4) функции  $\lambda_i(t)$ ,  $(i = 1, 2)$  – дифференцируемые функции  $t$ . Задачу (1), (2) в случае (4) рассмотрим для равномерных вращений гиростата. Положим [8]

$$\omega = \omega_0 \mathbf{a}. \quad (5)$$

Здесь  $\omega_0$  – постоянная, отличная от нуля;  $\mathbf{a}$  – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем, то есть  $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ . Это означает, что вектор  $\mathbf{a}$  неподвижен в пространстве.

Будем считать, что вектор  $\mathbf{a}$  не совпадает с вектором  $\nu$  (равномерное вращение происходит относительно наклонной оси). Из уравнения (2) в силу (5), получим:

$$\dot{\nu} = \omega_0 (\nu \times \mathbf{a}). \quad (6)$$

Умножим обе части уравнения (6) скалярно на  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} \times \nu = \mathbf{a}_0 = \text{const}. \quad (7)$$

В работе [8] показано, что инвариантному соотношению (7), геометрическому интегралу из (3) и уравнению (6) удовлетворяет вектор-функция

$$\nu(t) = (a'_0 \sin \omega_0 t, a'_0 \cos \omega_0 t, a_0), \quad (8)$$

где  $a'_0 = \sin \theta_0$ , функция (8) есть общее решение уравнения (6),  $\theta_0$  – в данной постановке произвольная постоянная ( $\theta_0 \in (0, \pi)$ ).

Подставим выражения (4), (5) в уравнение (1)

$$\dot{\lambda}_1(t)\alpha + \dot{\lambda}_2(t)\beta = \omega_0^2 (A\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + \omega_0 [\lambda_1(t)(\alpha \times \mathbf{a}) + \lambda_2(t)(\beta \times \mathbf{a})] + \omega_0 (B\mathbf{a} \times \nu) + s \times \nu + \nu \times C\nu. \quad (9)$$

Здесь  $\nu = \nu(t)$  определяется равенством (8).

Введем обозначение  $\gamma = \alpha \times \beta = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , т.е.

$$\gamma_1 = \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1. \quad (10)$$

Так как  $\alpha \cdot \beta = 0$ , то векторы  $\alpha, \beta, \gamma$  составляют ортогональный базис. Запишем уравнения, которые получаются проектированием (9) на векторе  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\dot{\lambda}_1(t) = \omega_0 \gamma_3 \lambda_2(t) + A_0 + A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t + A_3 \sin 2\omega_0 t + A_4 \cos 2\omega_0 t, \quad (11)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\omega_0 \gamma_3 \lambda_1(t) + B_0 + B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \cos \omega_0 t + B_3 \sin 2\omega_0 t + B_4 \cos 2\omega_0 t, \quad (12)$$

$$\omega_0 [\beta_3 \lambda_1(t) - \alpha_3 \lambda_2(t)] + C_0 + C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + C_3 \sin 2\omega_0 t + C_4 \cos 2\omega_0 t = 0. \quad (13)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1, \quad B_0 = \beta_1 c_2 - \beta_2 c_1, \quad C_0 = \gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1, \quad A_1 = a'_0 (\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_0 - \alpha_3 b_2), \\ A_2 &= a'_0 (\alpha_2 b_0 - \alpha_1 b'_1 - \alpha_3 b'_2), \quad A_3 = \frac{(a'_0)^2}{2} (\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3 (C_{22} - C_{11})), \\ A_4 &= \frac{(a'_0)^2}{2} (\alpha_1 C_{23} - 2\alpha_3 C_{12} + \alpha_2 C_{13}), \quad B_1 = a'_0 (\beta_2 b_1 - \beta_1 b_0 - \beta_3 b_2), \\ B_2 &= a'_0 (\beta_2 b_0 - \beta_1 b'_1 - \beta_3 b'_2), \quad B_3 = \frac{(a'_0)^2}{2} (\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3 (C_{22} - C_{11})), \\ B_4 &= \frac{(a'_0)^2}{2} (\beta_1 C_{23} - \beta_3 C_{12} + \beta_2 C_{13} - \beta_3 C_{12}), \quad C_1 = a'_0 (\gamma_2 b_1 - \gamma_1 b_0 - \gamma_3 b_2), \\ C_2 &= a'_0 (\gamma_2 b_0 - \gamma_1 b'_1 - \gamma_3 b'_2), \quad C_3 = \frac{(a'_0)^2}{2} (\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3 (C_{22} - C_{11})), \\ C_4 &= \frac{(a'_0)^2}{2} (\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}), \quad c_1 = a_0 \omega_0 B_{13} + a_0 s_1 + \frac{C_{13}}{2} ((a'_0)^2 - 2a_0^2) + \omega_0^2 A_{13}, \\ c_2 &= a_0 \omega_0 B_{23} + a_0 s_2 + \frac{C_{23}}{2} ((a'_0)^2 - 2a_0^2) + \omega_0^2 A_{23}, \quad b_0 = a_0 C_{12}, \\ b_1 &= a_0 (C_{11} - C_{33}) + \omega_0 B_{33} + s_3, \quad b_2 = -a_0 C_{23} + \omega_0 B_{23} + s_2, \\ b'_1 &= \omega_0 B_{33} + s_3 + a_0 (C_{22} - C_{33}), \quad b'_2 = -\omega_0 B_{13} - s_1 + a_0 C_{13}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, задача об исследовании условий существования равномерных движений гиростата сведена к анализу решений  $\lambda_i(t) \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ) уравнений (11), (12) при наличии у них инвариантного соотношения (13).

Согласно методу инвариантных соотношений [11] вычислим первую и вторую производные от инвариантного соотношения (13) в силу уравнений (11), (12):

$$\begin{aligned} &\gamma_3 \omega_0 (\beta_3 \lambda_2(t) + \alpha_3 \lambda_1(t)) + A_0 \beta_3 - \alpha_3 B_0 + (A_1 \beta_3 - \alpha_3 B_1 - C_2) \sin \omega_0 t + \\ &+ (A_2 \beta_3 - B_2 \alpha_3 + C_1) \cos \omega_0 t + (A_3 \beta_3 - B_3 \alpha_3 - 2C_4) \sin 2\omega_0 t + \\ &+ (A_4 \beta_3 - B_4 \alpha_3 + 2C_3) \cos 2\omega_0 t = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &-\gamma_3^2 \omega_0 (\beta_3 \lambda_1(t) - \alpha_3 \lambda_2(t)) + \gamma_3 (\beta_3 B_0 + \alpha_3 A_0) + \\ &+ (\gamma_3 \beta_3 B_1 + \alpha_3 \gamma_3 A_1 - \beta_3 A_2 + \alpha_3 B_2 - C_1) \sin \omega_0 t + \\ &+ (\gamma_3 \beta_3 B_2 + \gamma_3 \alpha_3 A_2 + \beta_3 A_1 - \alpha_3 B_1 - C_2) \cos \omega_0 t + \\ &+ (\gamma_3 \beta_3 B_3 + \gamma_3 \alpha_3 A_3 - 2\beta_3 A_4 + 2\alpha_3 B_4 - 4C_3) \sin 2\omega_0 t + \\ &+ (\gamma_3 \beta_3 B_4 + \gamma_3 \alpha_3 A_4 + 2\beta_3 A_3 - 2\alpha_3 B_3 - 4C_4) \cos 2\omega_0 t = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычисление производных от (13) более высокого порядка нецелесообразно, так как их структура повторяется.

**Случай**  $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0$ . Рассмотрим инвариантные соотношения (13), (15), (16) для случая  $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0$ . Исходя из того, что равенство (13) должно быть тождеством по  $t$ , необходимо потребовать выполнения условий  $C_i = 0$  ( $i = \overline{0,4}$ ). Выберем подвижную систему координат таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\alpha_2 = 0, \beta_1 = 0. \quad (17)$$

Тогда из (14) получим условия

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, C_{12} = 0, \\ C_{22} = C_{11}, s_1 = a_0 C_{13} - \omega_0 B_{13}, s_2 = a_0 C_{23} - \omega_0 B_{23}, \quad (18)$$

Для интегрирования уравнений (11), (12) исключим в уравнении (11) функцию  $\lambda_2(t)$  путем дифференцирования (11) с использованием уравнения (12), учитывая условия на параметры (18):

$$\ddot{\lambda}_1(t) + \omega_0^2 \cdot \lambda_1(t) = \omega_0 [B_0 + D_1 \sin \omega_0 t + D_3 \sin 2\omega_0 t + D_4 \cos 2\omega_0 t], \quad (19)$$

где

$$D_1 = a'_0(2s_3 + 2\omega_0 B_{33} + a_0(C_{11} + C_{22} - 2C_{33})), \quad D_3 = -\frac{3}{2}(a'_0)^2 C_{23}, \\ D_4 = \frac{3}{2}(a'_0)^2 C_{13}, \quad B_0 = -(\omega_0^2 A_{13} + \frac{(a'_0)^2}{2} C_{13}). \quad (20)$$

Если в уравнении (19)  $D_1 \neq 0$ , то в решении этого уравнения появляются вековые члены. Чтобы исключить их, рассмотрим случай  $D_1 = 0$ . Тогда в силу (20) получим

$$s_3 + \omega_0 B_{33} + a_0(C_{11} - C_{33}) = 0. \quad (21)$$

При ограничении (21) решение (19) будет таковым:

$$\lambda_1(t) = C_2^* \cos \omega_0 t + C_1^* \sin \omega_0 t + \frac{1}{3\omega_0} [3B_0 - D_3 \sin 2\omega_0 t - D_4 \cos 2\omega_0 t], \quad (22)$$

где  $C_1^*, C_2^*$  – произвольные постоянные.

Функцию  $\lambda_2(t)$  найдем путем подстановки выражения (22) в уравнение (11):

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{\omega_0} [-A_0 - (A_1 + C_2^* \omega_0) \sin \omega_0 t + (\omega_0 C_1^* - A_2) \cos \omega_0 t + \\ + (\frac{2}{3} D_4 - A_3) \sin 2\omega_0 t - (A_4 + \frac{2}{3} D_3) \cos 2\omega_0 t] \quad (23)$$

Таким образом, соотношения (22), (23) являются решением уравнений (11), (12) при условиях на параметры (18), (21). Обратим внимание, что в этом случае вектор  $\gamma = (0; 0; 1)$  совпадает с вектором  $\mathbf{a} = (0; 0; 1)$ .

Выбор условия  $D_1 = 0$  объясняется тем, что на практике применение периодических функций (22), (23) более целесообразно по сравнению со случаем, когда в решении уравнения (19) учитывается слагаемое с линейным по  $t$  членом.

**Случай**  $\gamma_3 = 0, \alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$ . Рассмотрим случай  $\gamma_3 = 0$ , т.е. в силу (10)  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$ . Потребуем, чтобы соотношение (15) было тождеством по  $t$ . Тогда найдем следующие условия

$$\begin{aligned} \beta_3 A_0 - \alpha_3 B_0 = 0, \quad \beta_3 A_1 - \alpha_3 B_1 - C_2 = 0, \quad \beta_3 A_2 - \alpha_3 B_2 + C_1 = 0, \\ \beta_3 A_3 - \alpha_3 B_3 - 2C_4 = 0, \quad \beta_3 A_4 - \alpha_3 B_4 + 2C_3 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

После подстановки выражений (14) в равенство (24) получим

$$\gamma_1 \mu_0 = 0, \quad \gamma_2 \mu_0 = 0, \quad C_{13} \gamma_2 + C_{23} \gamma_1 = 0, \quad C_{13} \gamma_1 + C_{23} \gamma_2 = 0; \quad (25)$$

$$\gamma_1 [\omega_0^2 A_{13} + a_0 \omega_0 B_{13} + a_0 s_1] + \gamma_2 [\omega_0^2 A_{23} + a_0 \omega_0 B_{23} + a_0 s_2] = 0, \quad (26)$$

$$\mu_0 = 2\omega_0 B_{33} + 2s_3 + a_0 (C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) \quad (27)$$

Так как  $\gamma_3 = 0$ , то  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$  и из (25) следует, что параметр  $\mu_0 = 0$ , а условия (25), (27) примут вид

$$C_{13} = 0, \quad C_{23} = 0 \quad (28) \quad 2\omega_0 B_{33} + 2s_3 + a_0 (C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) = 0. \quad (29)$$

Таким образом, равенства (26), (28), (29) являются условиями существования равномерных вращений гиростата в случае  $\gamma_3 = 0$ .

Рассмотрим равенство (29). Если  $B_{33} \neq 0$ , то можно получить условия на значение скорости вращения:

$$\omega_0 = -\frac{1}{2B_{33}} [2s_3 + a_0 (C_{11} + C_{22} - 2C_{33})].$$

Если в (29)  $B_{33} = 0, C_{11} + C_{22} - 2C_{33} \neq 0$ , то значение угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{v}$  из (29) таково:

$$\theta = \arccos(-\varphi), \quad \varphi = 2s_3 / (C_{11} + C_{22} - 2C_{33}), \quad |\varphi| \leq 1.$$

Из условия (26) видно, что ось равномерного вращения может быть главной в теле-носителе ( $A_{23} = A_{13} = 0$ ). В неподвижном пространстве при выполнении условия  $s_3 + \omega_0 B_{33} = 0$  она может принимать горизонтальное положение.

Функции  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  определим путем интегрирования уравнений (11), (12):

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= A_0 t + \frac{1}{\omega_0} [A_2 \sin \omega_0 t - A_1 \cos \omega_0 t - \frac{A_3}{2} \cos 2\omega_0 t + \frac{A_4}{2} \sin 2\omega_0 t] + \mu_1, \\ \lambda_2(t) &= B_0 t + \frac{1}{\omega_0} [B_2 \sin \omega_0 t - B_1 \cos \omega_0 t - \frac{B_3}{2} \cos 2\omega_0 t + \frac{B_4}{2} \sin 2\omega_0 t] + \mu_2, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  постоянные параметры, которые можно определить из равенства

$$\omega_0 [\beta_3 \lambda_1(t) - \alpha_3 \lambda_2(t)] + C_0 = 0.$$

**Случай**  $\gamma_3 \neq 0, \alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$ . Рассмотрим случай  $\gamma_3 \neq 0, \alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$ . Подставим выражение  $\beta_3 \lambda_1(t) - \alpha_3 \lambda_2(t)$  из уравнения (13) в (16).

Полученное уравнение будет тождеством по  $t$  при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \gamma_3 C_0 + \alpha_3 A_0 + \beta_3 B_0 = 0, \quad C_1(\gamma_3^2 - 1) + \gamma_3(\beta_3 B_1 + \alpha_3 A_1) + \alpha_3 B_2 - \beta_3 A_2 = 0, \\ C_2(\gamma_3^2 - 1) + \gamma_3(\beta_3 B_2 + \alpha_3 A_2) + \beta_3 A_1 - \alpha_3 B_1 = 0, \\ C_3(\gamma_3^2 - 4) + \gamma_3(\beta_3 B_3 + \alpha_3 A_3) + 2\beta_3 A_4 + 2\alpha_3 B_4 = 0 \\ C_4(\gamma_3^2 - 4) + \gamma_3(\beta_3 B_4 + \alpha_3 A_4) + 2\beta_3 A_3 - 2\alpha_3 B_3 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из равенств  $|\alpha| = 1, |\beta| = 1, |\gamma| = 1, (\alpha \cdot \beta) = 0, (\alpha \cdot \gamma) = 0, (\beta \cdot \gamma) = 0$  следует

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad \gamma_1 \gamma_3 + \beta_1 \beta_3 + \alpha_1 \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0.$$

С учетом записанных равенств, подставим в (31) выражение из (14):

$$\begin{aligned} \gamma_2 \mu_0 = 0, \quad \gamma_1 \mu_0 = 0, \quad 2\gamma_1 C_{13} - 2\gamma_2 C_{23} + \gamma_3(C_{22} - C_{11}) = 0, \\ \gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - \gamma_3 C_{12} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Предположим, что  $\mu_0 \neq 0$ , тогда  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$  и вектор  $\gamma$  будет сонаправлен с вектором  $\alpha$ , то есть  $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0$ . Поэтому в данном случае полагаем  $\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$ . Значит необходимо считать  $\mu_0 = 0$ , т.е. выполняется условие (29).

Функции  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  найдем из уравнений (13), (15)

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) = m[\alpha_3^2 B_0 - \beta_3(\gamma_3 C_0 + \alpha_3 A_0) + (\alpha_3^2 B_1 - \beta_3(\gamma_3 C_1 + \alpha_3 A_1) + \\ + \alpha_3 C_2) \sin \omega_0 t + (\alpha_3^2 B_2 - \beta_3(\gamma_3 C_2 + \alpha_3 A_2) - \alpha_3 C_1) \cos \omega_0 t + \\ + (\alpha_3^2 B_3 - \beta_3(\gamma_3 C_3 + \alpha_3 A_3) + 2\alpha_3 C_4) \sin 2\omega_0 t + \\ + (\alpha_3^2 B_4 - \beta_3(\gamma_3 C_4 + \alpha_3 A_4) - 2\alpha_3 C_3) \cos 2\omega_0 t]; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) = m[-\beta_3^2 A_0 + \alpha_3(\gamma_3 C_0 + \beta_3 B_0) + (-\beta_3^2 A_1 + \alpha_3(\gamma_3 C_1 + \beta_3 B_1) + \\ + \beta_3 C_2) \sin \omega_0 t + (-\beta_3^2 A_2 + \alpha_3(\gamma_3 C_2 + \beta_3 B_2) - \beta_3 C_1) \cos \omega_0 t + \\ + (-\beta_3^2 A_3 + \alpha_3(\gamma_3 C_3 + \beta_3 B_3) + 2\beta_3 C_4) \sin 2\omega_0 t + \\ + (-\beta_3^2 A_4 + \alpha_3(\gamma_3 C_4 + \beta_3 B_4) - 2\beta_3 C_3) \cos 2\omega_0 t], \quad m = \left(\omega_0 \gamma_3 (\alpha_3^2 + \beta_3^2)\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Компоненты гиросtatического момента  $\lambda(t)$  из (33), (34) являются периодическими функциями времени с периодом  $2\pi/\omega_0$ .

Рассмотрим условия существования равномерных вращений гиростата для случая  $\gamma_3 \neq 0, \alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$ . Если матрица  $C = 0, B_{33} \neq 0$ , то скорость равномерного вращения гиростата  $\omega_0 = -s_3/B_{33}$  фиксирована и зависит от параметров  $s_3, B_{33}$ .

Когда  $C = 0, B_{33} = 0$ , то  $s_3 = 0$ . В этом случае скорость равномерного вращения гиростата произвольна, параметр  $\theta$  так же произволен.

Если матрица  $C \neq 0$ , то из (32) и условия  $|\gamma| = 1$  найдем компоненты вектора  $\gamma$ , которые определяют в теле-носителе некоторую ось:

$$\gamma_1 = \frac{2C_{12}C_{23} - C_{13}(C_{22} - C_{11})}{2(C_{13}^2 + C_{23}^2)}\gamma_3, \quad \gamma_2 = \frac{2C_{12}C_{13} + C_{23}(C_{22} - C_{11})}{2(C_{13}^2 + C_{23}^2)}\gamma_3, \\ \gamma_3 = 2\sqrt{\frac{C_{13}^2 + C_{23}^2}{4(C_{13}^2 + C_{23}^2 - C_{12}^2) - (C_{22} - C_{11})^2}}. \quad (36)$$

Таким образом, компоненты  $\gamma_i$  зависят от элементов матрицы  $C$ .

**Выводы.** Рассмотрена задача о движении гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Исследованы условия существования равномерных движений гиростата в предположении, что ось вращения не совпадает с осью симметрии силового поля. На основе метода инвариантных соотношений получена система двух дифференциальных уравнений и одно инвариантное соотношение на компоненты гиростатического момента. Полностью изучены решения редуцированных уравнений; установлено, что компоненты гиростатического момента являются периодическими функциями времени. Исследованы свойства условий на параметры задачи и значение угловой скорости гиростата.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Ковалев А. М. О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ковалев // Мат. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
3. Ковалев А.М. О конусе осей равномерного вращения гиростата // А.М. Ковалев, А.М. Киселев // Механика твердого тела. – 1972. – Вып.4. – С.36-45.
4. Ковалев А.М. Выделение областей устойчивости на конусе осей равномерного вращения гиростата // А.М. Ковалев, А.М. Киселев // Механика твердого тела. – 1972. – Вып.4. – С.46-48.
5. Ковалев А. М. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси / А. М. Ковалев, А. Я. Савченко // Прикл. математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 4. – С. 650–661.
6. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1954. – Т. 18, вып. 4. – С. 457–458.
7. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1956. – Т. 30, вып. 1. – С. 51–66.
8. Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
9. Ковалева Л. М. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком / Л. М. Ковалева, А. Е. Позднякович // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
10. Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
11. Ковалев А.М. Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений / А.М. Ковалев, Г.В. Горр, В.Н. Неспирный // Доклады НАН Украины. Математика. – 2014, № 2. – С. 13-19.
12. Barnett S.I. Gyromagnetic and Electron-Inertia Effects / S.I. Barnett // Rev. Modern Phys. – 1935. – Vol. 7 (2). – P.129-166.
13. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
14. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
15. Егармин Н.Е. О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела / Н.Е. Егармин //Аэрофизика и геокосмические исследования. – М.:МОТИ, 1983. – С. 95-96.
16. Урман Ю. М. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе / Ю. М. Урман // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 6. – С. 1402–1404.

17. Самсонов В. А. О вращении твердого тела в магнитном поле / В. А. Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
18. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В. Козлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28-33.

*Поступила в редакцию 10.10.2017 г.*

**ABOUT UNIFORM ROTATIONS RELATIVE TO INCLINED AXIS IN THE PROBLEM  
OF MOTION OF GYROSTAT IN A MAGNETIC FIELD WITH ACCOUNT  
OF THE BARNETT-LONDON EFFECT**

*E.A. Ignatova*

The uniform motions relative to the inclined axis when the gyrostat moves with a variable gyrostatic moment in a complex force field, which is a superposition of the central newtonian and magnetic fields were studied. The affect of a magnetic field on motion of gyrostat is due to the Barnett-London effect. Conditions of existence of uniform motions in the form of a system of algebraic equations for the parameters of the problem were written. The analysis of the components of the gyrostatic moment as a function of time was given.

**Keywords:** gyrostat; magnetic field, the Barnett-London effect.

**Игнатова Екатерина Анатольевна**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
ГО ВПО «Донецкий национальный университет  
экономики и торговли имени Михаила Туган-  
Барановского», г. Донецк  
E-mail: Katerina-ignat@yandex.ru

**Ignatova Ekaterina Anatolievna**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent,  
Donetsk National University of Economics and Trade,  
Donetsk

УДК531.38

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА

© 2017. Д.Н. Ткаченко

Исследованы условия существования полиномиальных решений класса Стеклова-Горячева-Ковалевского- Чаплыгина уравнений движения динамически симметричного тяжелого твердого тела. На основе уравнений Н.Ковалевского показано, что такими решениями являются только частные случаи решений уравнений Эйлера-Пуассона, полученные С.В. Ковалевской и Д.Н. Горячевым.

**Ключевые слова:** полиномиальные решения, тяжелое твердое тело, случаи интегрируемости, уравнения Н. Ковалевского.

**Введение.** Уравнения Эйлера-Пуассона, моделирующие движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, легли в основу формирования новых задач аналитической механики. Обзор результатов, полученных в исследовании классической задачи, отражен в многочисленных монографиях [1–5]. Уравнения Эйлера-Пуассона в общем случае неинтегрируемы в квадратурах [6, 7]. Для изучения свойств движения тела применялись различные методы интегрирования этих уравнений. Среди этих методов особую роль в построении новых решений играют редуцированные уравнения динамики твердого тела [3]. Наибольшее количество частных решений уравнений Эйлера-Пуассона получено в случае, когда центр масс тела лежит на главной оси эллипсоида инерции.

Известно [8], что редуцированные уравнения для случая, когда центр масс тела лежит на главной оси, можно привести к виду, в котором основными переменными являются квадраты проекций вектора угловой скорости на небарицентрические оси, а вспомогательной переменной служит проекция вектора угловой скорости на барицентрическую ось. Уравнения Н.Ковалевского представляют собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка на указанные переменные. Если основные переменные являются многочленами по вспомогательной переменной, то указанные уравнения допускают решения В.А. Стеклова [9], Д.Н. Горячева [10], Н. Ковалевского [8]. Обобщение этих решений на задачу о движении тяжелого гиростата рассмотрено П.В. Харламовым [11]. В статье Г.В. Горра [12] показано, что для динамически несимметричных тел уравнения Н.Ковалевского допускают единственное решение С.А. Чаплыгина [13], которое характеризуется полиномиальной структурой основных переменных от кубического корня вспомогательной переменной. Анализ частных решений уравнений Эйлера-Пуассона показывает, что для динамически симметричного тела частный случай [14] решения С.В. Ковалевской относится к полиномиальному решению класса Стеклова-Горячева-Ковалевского, а частный случай [15] решения Д.Н. Горячева [16] — к полиномиальному решению класса С.А. Чаплыгина [13]. На первое свойство указанное и в статье П.В. Харламова, Г.В. Мозалевской [17].

Целью данной статьи является исследование полиномиальных решений классов В.А. Стеклова, Д.Н. Горячева, Н. Ковалевского и С.А. Чаплыгина в случае динамического симметричного твердого тела.

**Постановка задачи. Уравнения Н.Ковалевского** Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела, центр масс которого лежит на первой главной оси эллипсоида инерции [4]

$$A_1 \dot{p} = (A_2 - A_3)qr, \quad A_2 \dot{q} = (A_3 - A_1)pr - sv_3, \quad A_3 \dot{r} = (A_1 - A_2)qp + sv_2. \quad (1)$$

$$\dot{v}_1 = rv_2 - qv_3, \quad \dot{v}_2 = pv_3 - rv_1, \quad \dot{v}_3 = qv_1 - pv_2. \quad (2)$$

В уравнениях (1)–(2) введены обозначения:  $p, q, r$  – компоненты вектора угловой скорости;  $v_1, v_2, v_3$  – компоненты единичного вектора, указывающего направление силы тяжести;  $s$  – произведение массы тела, ускорения свободного падения и расстояния от неподвижной точки до центра масс тела;  $A_1, A_2, A_3$  – главные моменты инерции тела; точка над переменными обозначает производную по времени  $t$ .

Уравнения (1)–(2) имеют первые интегралы

$$A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 - 2sv_1 = 2E, \quad A_1 pv_1 + A_2 qv_2 + A_3 rv_3 = k, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad (3)$$

где  $k$  и  $E$  – произвольные постоянные.

Если в качестве независимой переменной принять компоненту  $p$  и считать  $q=q(p), r=r(p)$ , то из уравнений (1) и интеграла энергии из (3) следует

$$v_1 = \frac{1}{s} \left[ \frac{A_1(Q(p) - R(p))}{(A_2 - A_3)} - E \right], \quad v_2 = \frac{1}{s} qQ'(p), \quad v_3 = \frac{1}{s} rR'(p), \quad (4)$$

$$Q(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_3(A_2 - A_3)}{A_1} r^2(p) + (A_2 - A_1)p^2 \right], \quad R(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_2(A_3 - A_2)}{A_1} q^2(p) + (A_3 - A_1)p^2 \right]. \quad (5)$$

Зависимость  $p(t)$  находится из первого уравнения системы (1) с учетом значений  $q(p), r(p)$ , которые определяются из соотношений (5).

Подставим выражения (4) в уравнения Пуассона (2)

$$Q''(p)[2R(p) + (A_1 - A_3)p^2] + Q'(p)[R'(p) + (A_1 - A_3)p] + A_2 pR'(p) - \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_2 E = 0, \quad (6)$$

$$R''(p)[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2] + R'(p)[Q'(p) + (A_1 - A_2)p] + A_1 pQ'(p) - \frac{A_1 A_3}{A_2 - A_3} (Q(p) - R(p)) + A_3 E = 0, \quad (7)$$

Интегралы уравнений (6), (7) найдем, внося (4), (5) в равенства (3). При интегрировании уравнений (6), (7) важно использовать геометрический интеграл из (3), так как в этом интеграле постоянная фиксирована и отлична от нуля. Поэтому, запишем результат подстановки (4) в соотношение  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$

$$A_2(A_2 - A_3)[2Q(p) + (A_1 - A_2)p^2](R'(p))^2 + A_3(A_3 - A_2)[2R(p) + (A_1 - A_3)p^2](Q'(p))^2 + A_1 A_2 A_3 (Q(p) - R(p) + \frac{(A_3 - A_2)}{A_1} E)^2 = \frac{A_2 A_3 (A_2 - A_3)^2}{A_1} s^2. \quad (8)$$

Следуя статье [12], преобразуем уравнения Н. Ковалевского (6)–(8), используя новую переменную  $\sigma = p^{1/3}$ . Тогда

$$[2R(p) + (A_1 - A_3)\sigma^6] \left( \sigma \frac{d^2 Q(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \right) + \sigma \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \left[ \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_3)\sigma^5 \right] + 3A_2 \sigma^6 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} - \frac{9A_1 A_2}{A_2 - A_3} \sigma^5 (Q(p) - R(p)) + 9A_2 E \sigma^5 = 0, \quad (9)$$

$$[2Q(p) + (A_1 - A_2)\sigma^6] \left( \sigma \frac{d^2 R(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \right) + \sigma \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \left[ \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_2)\sigma^5 \right] + 3A_3\sigma^6 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} - \frac{9A_1A_3}{A_2 - A_3} \sigma^5 (Q(p) - R(p)) + 9A_3E\sigma^5 = 0, \quad (10)$$

$$A_2(A_2 - A_3)[2Q(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^6] \left( \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \right)^2 + A_3(A_3 - A_2)[2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6] \times \times \left( \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \right)^2 + 9A_1A_2A_3\sigma^4 (Q(p) - R(p)) + \frac{A_3 - A_2}{A_1} E^2 = \frac{9A_2A_3(A_2 - A_3)^2}{A_1} s^2\sigma^4. \quad (11)$$

Исследуем условия существования решений уравнений (9)–(11) полиномиального вида

$$Q(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \dots + a_m\sigma^m, \quad R(\sigma) = b_0 + b_1\sigma + \dots + b_n\sigma^n. \quad (12)$$

В статье [12] показано, что в (12) максимальные значения  $m$  и  $n$  таковы:  $m=6, n=12$ ; то есть

$$Q(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \dots + a_6\sigma^6, \quad R(\sigma) = b_0 + b_1\sigma + \dots + b_{12}\sigma^{12}. \quad (13)$$

В [12] анализ выполнен при  $A_1 \neq A_2$ . В данной статье полагаем в (9)–(11)  $A_1 = A_2$ . Будем применять полуобратный метод нахождения решения (13) уравнений (9)–(11) (при  $A_1 = A_2$ ), то есть потребуем, чтобы при подстановке полиномов в (9)–(11) эти уравнения были тождественны по  $\sigma$ . Уравнение (11) служит для определения параметра  $s$ , который должен быть отличен от нуля (в противном случае имеем случай Эйлера). После нахождения величин  $a_i$  ( $i = \overline{0,6}$ ),  $b_i$  ( $i = \overline{0,12}$ ) необходимо провести исследование условий действительности найденного решения, которое состоит в рассмотрении функций  $q^2(\sigma)$ ,  $r^2(\sigma)$  из соотношений (5) при  $A_1 = A_2$

$$q^2(\sigma) = -\left( \sigma^6 + \frac{2R(\sigma)}{A_1 - A_3} \right), \quad r^2(\sigma) = \frac{2A_1Q(\sigma)}{A_3(A_1 - A_3)}.$$

Отсюда следует, что  $Q(\sigma)R(\sigma) \leq 0$ , то есть должны существовать такие  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ , при которых  $Q(\sigma)$  и  $R(\sigma)$  имеют разные знаки.

**Тестовые примеры решений.** На известных решениях Д.Н. Горячева и С.В. Ковалевской протестируем полученную систему (9)–(11) которая, с учетом предположения  $A_1 = A_2$  будет следующей:

$$[2R(p) + (A_1 - A_3)\sigma^6] \left( \sigma \frac{d^2 Q(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \right) + \sigma \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} \left[ \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} + 3(A_1 - A_3)\sigma^5 \right] + 3A_1\sigma^6 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} - \frac{9A_1^2}{A_1 - A_3} \sigma^5 (Q(p) - R(p)) + 9A_1E\sigma^5 = 0, \quad (14)$$

$$2Q(p) \left( \sigma \frac{d^2 R(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \right) + \sigma \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} + 3A_3\sigma^6 \frac{dQ(\sigma)}{d\sigma} - \frac{9A_1A_3}{A_1 - A_3} \sigma^5 (Q(p) - R(p)) + 9A_3E\sigma^5 = 0, \quad (15)$$

$$A_2(A_1 - A_3)2Q(\sigma)\left(\frac{dR(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 + A_3(A_3 - A_2)[2R(\sigma) + (A_1 - A_3)\sigma^6]\left(\frac{dQ(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 + 9A_1^2 A_3 \sigma^4 (Q(p) - R(p) + \frac{A_3 - A_1}{A_1} E)^2 = 9A_3(A_1 - A_3)^2 s^2 \sigma^4. \quad (16)$$

Проверим систему (14)–(16) на совместность в случае С.В.Ковалевской, в котором при условии  $A_1 = A_2 = 2A_3$  решение принимает вид [14]:

$$q^2(p) = -\alpha p + \beta p^2, \quad r^2(p) = 4R^2 - 4p^2.$$

С учетом  $A_1 = A_2 = 2A_3$  из (5) следует, что

$$Q(p) = \frac{A_3}{4} r^2(p), \quad R(p) = -\frac{A_3}{2} [q^2(p) + p^2].$$

Тогда, при переходе к вспомогательной переменной  $\sigma$  данные функции таковы:

$$Q(\sigma) = A_3(R^2 - \sigma^6), \quad R(\sigma) = -\frac{A_3}{2} (-\alpha\sigma^3 + (\beta+1)\sigma^6). \quad (17)$$

Подставив (17) в (14)–(15) приходим к выводу, что система разрешима при  $\beta = -1$ . Таким образом, уравнения (9)–(10) допускают частный случай решения С.В. Ковалевской.

Исследуем (14)–(16) на разрешимость в частном случае решения Д.Н. Горячева [15]

$$q^2(p) = p^{2/3}(b - p^{4/3}), \quad r^2(p) = p^{2/3}(kp^{2/3} - 4b^2),$$

При условии  $A_1 = A_2 = 4A_3$  из (5) следует

$$Q(p) = \frac{3}{8} A_3 r^2(p), \quad R(p) = -\frac{3}{2} A_3 [q^2(p) + p^2].$$

Полагая в этих формулах  $\sigma = p^{1/3}$  имеем

$$Q(\sigma) = \frac{3}{8} A_3 \sigma^2 (k\sigma^2 - 4b^2), \quad R(p) = -\frac{3}{2} A_3 b \sigma^2.$$

Из уравнений (14)–(16) следует, что данные функции являются их решением.

**Анализ разрешимости системы.** Проведем теперь анализ уравнений (14), (15) в общей постановке. Подставим решение (13) в исходные уравнения, представим полученный результат по степеням  $\sigma$  и потребуем тождественного обращения в нуль рассматриваемых соотношений. Приравнявая нулю все коэффициенты полиномов, с учетом условия  $A_i > 0$  ( $i = 1, 3$ ) и  $A_1 \neq A_3$  придем к следующей системе:

$$a_0 b_1 = 0, \quad b_0 a_1 = 0, \quad (18) \quad 4a_0 b_2 + 3a_1 b_1 = 0, \quad 4a_2 b_0 + 3a_1 b_1 = 0, \quad (19)$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0, \quad (20) \quad 8a_0 b_4 - 3a_3 b_1 + 3a_1 b_3 = 0, \quad 8a_4 b_0 - a_1 b_3 + 3a_3 b_1 = 0, \quad (21)$$

$$10a_0 b_5 + 6a_1 b_4 + a_3 b_2 + 3a_2 b_3 = 0, \quad 10a_5 b_0 + 6a_4 b_1 + a_2 b_3 + 3a_3 b_2 = 0; \quad (22)$$

$$-b_{12}(5A_1^2 + 12A_1 a_6 - 4A_1 A_3 - 12A_3 a_6) = 0,$$

$$2(A_3 - A_1)(40a_5 b_{12} + 51a_6 b_{11}) + 3(11A_3 - 14A_1)A_1 b_{11} = 0,$$

$$(A_3 - A_1)(96a_6 b_{10} + 75a_5 b_{11} + 56a_4 b_{12}) + 3(10A_3 - 13A_1)A_1 b_{10} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & (A_3 - A_1)(90a_6b_9 + 70a_5b_{10} + 52a_4b_{11} + 36a_3b_{12}) + 9(3A_3 - 4A_1)A_1b_9 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(84a_6b_8 + 65a_5b_9 + 48a_4b_{10} + 33a_3b_{11} + 20a_2b_{12}) + 3(8A_3 - 11A_1)A_1b_8 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(78a_6b_7 + 60a_5b_8 + 44a_4b_9 + 30a_3b_{10} + 18a_2b_{11} + 8a_1b_{12}) + 3(7A_3 - 10A_1)A_1b_7 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(72a_6b_6 + 55a_5b_7 + 40a_4b_8 + 27a_3b_9 + 16a_2b_{10} + 7a_1b_{11}) - \\
 & \quad - 9(4A_3^2 - 8A_1A_3 + 3A_1^2)a_6 + 9(2A_3 - 3A_1)A_1b_6 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(33a_6b_5 + 25a_5b_6 + 18a_4b_7 + 12a_3b_8 + 7a_2b_9 + 3a_1b_{10}) - \\
 & \quad - (25A_3^2 - 50A_1A_3 + 16A_1^2)a_5 + 3(5A_3 - 8A_1)A_1b_5 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(60a_6b_4 + 45a_5b_5 + 32a_4b_6 + 21a_3b_7 + 12a_2b_8 + 5a_1b_9) - \\
 & \quad - (16A_3^2 - 32A_1A_3 + 7A_1^2)a_4 + 3(4A_3 - 7A_1)A_1b_4 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(27a_6b_3 + 20a_5b_4 + 14a_4b_5 + 9a_3b_6 + 5a_2b_7 + 2a_1b_8) + \\
 & \quad + 9(2A_1 - A_3)A_3a_3 + 9(A_3 - 2A_1)A_1b_3 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(48a_6b_2 + 35a_5b_3 + 24a_4b_4 + 15a_3b_5 + 8a_2b_6 + 3a_1b_7) - \\
 & \quad - (4A_3^2 - 8A_1A_3 - 5A_1^2)a_2 + 3(2A_3 - 5A_1)A_1b_2 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(21a_6b_1 + 15a_5b_2 + 10a_4b_3 + 6a_3b_4 + 3a_2b_5 + a_1b_6) - \\
 & \quad - (A_3^2 - 2A_1A_3 - 8A_1^2)a_1 + 3(A_3 - 4A_1)A_1b_1 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(36a_6b_0 + 25a_5b_1 + 16a_4b_2 + 9a_3b_3 + 4a_2b_4 + a_1b_5 + 9A_1E) + 9A_1^2(a_0 - b_0) = 0, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -b_{12}(32A_1a_6 + A_1A_3 - 32A_3a_6) = 0, \quad 2(A_3 - A_1)(121a_6b_{11} + 138a_5b_{12}) - 9A_1A_3b_{11} = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(200a_6b_{10} + 231a_5b_{11} + 264a_4b_{12}) - 9A_1A_3b_{10} = 0, \\
 & 2(A_3 - A_1)(81a_6b_9 + 95a_5b_{10} + 110a_4b_{11} + 126a_3b_{12}) - 9A_1A_3b_9 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(128a_6b_8 + 153a_5b_9 + 180a_4b_{10} + 209a_3b_{11} + 240a_2b_{12}) - 9A_1A_3b_8 = 0, \\
 & 2(A_3 - A_1)(49a_6b_7 + 60a_5b_8 + 72a_4b_9 + 85a_3b_{10} + 99a_2b_{11} + 114a_1b_{12}) - 9A_1A_3b_7 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(72a_6b_6 + 91a_5b_7 + 112a_4b_8 + 135a_3b_9 + 160a_2b_{10} + 187a_1b_{11}) - \\
 & \quad - 9A_3(A_1 - 2A_3)a_6 - 9A_1A_3b_6 = 0, \\
 & 2(A_3 - A_1)(25a_6b_5 + 33a_5b_6 + 42a_4b_7 + 52a_3b_8 + 63a_2b_9 + 75a_1b_{10}) - \\
 & \quad - 3A_3(A_1 - 4A_3)a_5 - 9A_1A_3b_5 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(32a_6b_4 + 45a_5b_5 + 60a_4b_6 + 77a_3b_7 + 96a_2b_8 + 117a_1b_9) - \\
 & \quad - 3A_3(2A_1 - 5A_3)a_4 - 9A_1A_3b_4 = 0, \\
 & 2(A_3 - A_1)(9a_6b_3 + 14a_5b_4 + 20a_4b_5 + 27a_3b_6 + 35a_2b_7 + 44a_1b_8) + 9A_3^2a_3 - 9A_1A_3b_3 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(8a_6b_2 + 15a_5b_3 + 24a_4b_4 + 35a_3b_5 + 48a_2b_6 + 63a_1b_7) - \\
 & \quad - 3A_3(A_1 - 2A_3)a_2 - 9A_1A_3b_2 = 0, \\
 & 2(A_3 - A_1)(a_6b_1 + 3a_5b_2 + 6a_4b_3 + 10a_3b_4 + 15a_2b_5 + 21a_1b_6) - \\
 & \quad - 3A_3(2A_1 - A_3)a_1 - 9A_1A_3b_1 = 0, \\
 & (A_3 - A_1)(a_5b_1 + 4a_4b_2 + 9a_3b_3 + 16a_2b_4 + a_1b_5 + 36a_0b_6 + 9A_3E) - 9A_1A_3(a_0 - b_0) = 0. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Из уравнений (18) следует, что один из параметров или оба одновременно равны нулю. Рассмотрим случай, когда  $a_0 = 0$ . Тогда из первого уравнения (19) имеем  $a_1b_1 = 0$ . Зафиксируем, например,  $a_1 = 0$ . Таким образом, имеем дерево вариантов с различными значениями параметров. Анализируя каждую ветку, получаем

последовательно условия на параметры системы. Представим результат полного исследования системы (18)–(24) в виде всех возможных наборов значений параметров решения (13) и уравнений (14), (15).

1. В системе (18)–(24) с полученными значениями параметров  $a_i=0$  ( $i = \overline{0,3}$ ) из первых простейших уравнений (18)–(20) следует, что возможен только случай

$$A_1 = 2A_3, \quad a_6 = -A_3, \quad b_3 \in R^1, \quad A_3 \in R^+, \quad E = 0.$$

2. При условиях  $a_i=0$  ( $i = \overline{0,2}$ ),  $b_1 = 0$ , кроме предыдущего, возникает дополнительный случай разрешимости данной системы, который соответствует указанному выше варианту решения С.В.Ковалевской и имеет следующий вид:

$$a_3 \in R^1, \quad a_6 = -\frac{1}{2} \frac{A_3(2b_3 - a_3)}{b_3}, \quad b_0 = -\frac{1}{2} \frac{a_3 b_3^2}{A_3(2b_3 - a_3)},$$

$$b_3 \in R^1, \quad A_1 = 2A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = -\frac{a_3 b_3(b_3 - a_3)}{A_3(2b_3 - a_3)}.$$

3. В случае, когда значения параметров из уравнений (18)–(20) равны  $a_i=0, b_i = 0$  ( $i = \overline{0,1}$ ), получаем решения

$$3.1. \quad a_2 \in R^1, \quad b_2 \in R^1, \quad A_1 = -\frac{2a_2}{a_2 - 3b_2} A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = 0;$$

$$3.2. \quad a_2 = 2b_2, \quad a_4 \in R^1, \quad b_2 \in R^1, \quad A_1 = 4A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = -\frac{4}{9} \frac{a_4 b_2}{A_3}.$$

При рассмотрении уравнения (11) в случае 3.1 получим, что параметр  $s$  удовлетворяет условию  $s^2 = -\kappa^2$ , что невозможно. Вариант 3.2 соответствует изученному выше частному случаю решения Д.Н. Горячева.

4. Анализ системы (18)–(24) на разрешимость при начальных значениях  $a_i=0, b_i = 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ) дает положительный результат только при недопустимых значениях моментов инерции  $A_1 = A_3 = 0$ .

5. При значении параметров  $a_i=0, b_i = 0$  ( $i = 1, 2, 4, 5$ ) возникают следующие условия разрешимости системы:

$$5.1. \quad a_0 = \frac{A_1 b_0 + E(A_1 - A_3)}{A_1}, \quad b_0 \in R^1, \quad A_1, A_3 \in R^+, \quad E \in R^1;$$

$$5.2. \quad a_0 = \frac{1}{2} \frac{A_3^2 E a_6 + 3b_3^2 a_6 A_3 + 2b_3^2 a_6^2 + b_3^2 A_3^2}{A_3^2 a_6}, \quad a_3 = \frac{2b_3(A_3 + a_6)}{A_3},$$

$$a_6 \in R^1, \quad b_0 = \frac{b_3^2(A_3 - a_6)}{2A_3 a_6}, \quad b_3 \in R^1, \quad A_1 = 2A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E \in R^1;$$

$$5.3. \quad a_0 = \frac{21}{128} \frac{a_3^2}{b_6}, \quad a_3 \in R^1, \quad a_6 = \frac{4}{21} b_6, \quad b_0 = \frac{147}{512} \frac{a_3^2}{b_6}, \quad b_3 = \frac{105}{32} a_3,$$

$$b_6 \in R^1, \quad b_9 = \frac{32}{441} \frac{b_6^2}{a_3}, \quad A_1 = \frac{8}{9} A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = -\frac{525}{64} \frac{a_3^2}{b_6};$$

$$5.4. a_0 = \frac{8}{15}b_0, \quad a_6 = \frac{7}{15}b_6, \quad b_0 \in R^1, \quad b_6 \in R^1, \\ b_{12} = \frac{7}{40} \frac{b_6^2}{b_0}, \quad A_1 = \frac{7}{8}A_3, \quad A_3 \in R^+, \quad E = \frac{34}{15}b_0.$$

При указанных значениях параметров в случаях 5.1–5.4 не выполняется условие  $Q(\sigma)R(\sigma) < 0$ .

6. В случае, когда значения параметров равны  $a_j=0$  ( $i=1,2$ ),  $b_i=0$  ( $i=1,2,4,5$ ) система (18)–(24) разрешима только при  $A_1=0$  или  $A_3=0$ , что невозможно в силу механического смысла этих параметров.

7. Вариант разрешимости системы (18)–(24) со значениями параметров  $b_i=0$  ( $i=0,5$ ) возможен только в указанных выше случаях.

Таким образом, изучены все возможные случаи выполнения условий существования полиномиальных решений уравнений Эйлера-Пуассона (1), (2). На основе уравнений Н. Ковалевского показано, что для класса Стеклова-Ковалевского-Горячева имеет место только случай решения С.В. Ковалевской, а для класса С.А. Чаплыгина – частный вариант решения Д.Н. Горячева, который характеризуется условием  $A_1 = A_2 = 4A_3$ .

**Выводы.** Рассмотрены условия существования полиномиальных решений уравнений Н.Ковалевского в предположении, что распределение масс тяжелого твердого тела соответствует условиям Ковалевской-Горячева для двух главных моментов инерции. Полиномиальные решения характеризуются многочленами по вспомогательной переменной, которая является корнем кубическим от первой компоненты угловой скорости. Доказано, что частными случаями [14, 15] решений С.В. Ковалевской, Д.Н. Горячева исчерпываются все решения уравнений Н. Ковалевского.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела / Ю.А. Архангельский. – М.:Наука. – 1977. – 328 с.
2. Горр Г.В. Классические задачи динамики твердого тела / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
3. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, – 2012. – 401 с.
4. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. университета. – 1965. – 221 с.
5. Харламова Е.И. Интегро-дифференциальное уравнений динамики твердого тела / Е.И. Харламова, Г.В. Мозалевская. – Киев.: Наук. думка. – 1986. – 296 с.
6. Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах / С.Л. Зиглин // Функци. анализ и его приложения. – 1982. – Т. 16, № 3. – С. 30-41.
7. Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах / С.Л. Зиглин // Функци. анализ и его приложения. – 1983. – Т. 17, № 1. – С. 8-23.
8. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt / N. Kowalewski // Math. Ann. – 1908. – В. 65. – S. 528-537.
9. Стеклов В.А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В.А. Стеклов // Тр. отд. физ.-мат. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – Т. 10, вып. 1. – С. 1-3.
10. Горячев Д.Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки / Д.Н. Горячев // Тр. отд. физ.-мат. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – Т. 10, вып. 1. – С. 23-24.

11. Харламов П.В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – Т. 29, вып. 1. – С. 26-34.
12. Горр Г.В. Об алгебраическом инвариантном соотношении уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1 – С. 89-102.
13. Чаплыгин С.А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке / С.А. Чаплыгин // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1901. – Т. 10, вып. 2. – С. 32-34.
14. Горр Г.В. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В.Ковалевской / Г.В. Горр, А.Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 66-73.
15. Горр Г.В. Подвижный годограф вектора угловой скорости решения Д.Н. Горячева / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 95-100.
16. Горячев Д.Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае  $A_1 = A_2 = 4A_3$  / Д.Н. Горячев // Мат. сб. Круглая любительская математика. – 1900. – Т. 21, вып. 3. – С. 431-438.
17. Харламов П.В. Геометрическое истолкование некоторых движений гироскопа С.В.Ковалевской / П.В. Харламов, Г.В. Мозалевская. – 1972. – Вып. 5. – С. 5-24.

Поступила в редакцию 16.06.2017 г.

### ABOUT ONE CLASS OF POLYNOMIAL SOLUTIONS OF EULER-POISSON EQUATIONS

*D.N. Tkachenko*

The article researches the conditions for existence of polynomial solutions of Steklov-Goryachev-Kowalewski-Chaplygin class for motion equations of dynamically symmetrical heavy rigid body. On the basis of N. Kowalewski equations, it is shown that such solutions are only special cases solutions of Euler-Poisson equations, received by S.V. Kovalevskaya and D.N. Goryachev.

**Key words:** polynomial solution, heavy rigid body, integrability cases, N.Kowalewski equations.

**Ткаченко Дмитрий Николаевич**

ГУ «Институт прикладной математики и механики»,  
г. Донецк, младший научный сотрудник.  
83114, г. Донецк, ул.Розы Люксембург, 74  
E-mail: dntkachenko@mail.ru  
Тел.: 0504777540

**Tkachenko Dmitry Nikolaevich**

Institute Applied Mathematics and Mechanics,  
Donetsk,  
Research Assistant.

## Ф И З И К А

УДК 621.375.4

**ПОВЫШЕНИЕ КПД УСИЛИТЕЛЯ КЛАССА  $F_3$  С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВЫХОДНОЙ ЕМКОСТИ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА И АКТИВНЫХ ПОТЕРЬ В НАГРУЗОЧНОЙ ЦЕПИ**

© 2017. А.П. Ефимович, И.А. Третьяков, Г.В. Мазаев, В.В. Данилов

В работе проведено теоретическое исследование взаимного влияния величины выходной емкости активного элемента и активных потерь в катушках индуктивности нагрузочной цепи на КПД и выходную мощность насыщенного усилителя мощности (УМ) класса  $F_3$  с рабочей частотой 13,56 МГц. Предложены рекомендации для выбора наиболее энергетически выгодного сочетания расчетных параметров нагрузочной цепи насыщенного УМ класса  $F_3$ , при которых с учетом выходной емкости транзистора и активных потерь в катушках индуктивности нагрузочной цепи возможно получение максимального КПД усилителя.

**Ключевые слова:** Усилитель мощности, насыщенный класс  $F_3$ , перенапряженный класс  $F_3$ , нагрузочная цепь, стоковый КПД, выходная мощность.

**Введение.** Важнейшими параметрами, которые необходимо учитывать при разработке усилителей мощности (УМ), являются выходная емкость активного элемента ( $C_{out}$ ) и активные потери в нагрузочной цепи усилителя. Это крайне важно для УМ нагрузочные цепи, которых совместно с  $C_{out}$  образуют резонансные контуры, настроенные на первую и высшие гармоники. Примерами таких усилителей могут служить УМ класса  $F_3$  [1] и его разновидность насыщенный УМ класса  $F_3$  [2–6], имеющие одинаковые нагрузочные цепи, но отличающиеся формами тока на активном элементе, например полевым транзисторе. В настоящее время сильно возрос интерес к насыщенному (перенапряженному) УМ класса  $F_3$ , что вызвано его большим стоковым КПД ( $\eta_D$ ) и выходной мощностью ( $P_{out}$ ) по сравнению с традиционным (не насыщенным) УМ класса  $F_3$  [3]. Вместе с тем для данного усилителя нет никаких сведений о том, каким образом величина  $C_{out}$  совместно с учетом активных потерь в нагрузочной цепи влияет на КПД усилителя и каким образом с учетом этого влияния добиться высокого КПД.

Цель работы – предложить рекомендации для выбора наиболее энергетически выгодного сочетания расчетных параметров нагрузочной цепи насыщенного УМ класса  $F_3$ , при которых с учетом выходной емкости транзистора и активных потерь в катушках индуктивности нагрузочной цепи возможно получение максимального КПД усилителя.

**Схема исследуемого УМ класса  $F_3$ .** В данной работе был рассмотрен высокочастотный (ВЧ) насыщенный УМ класса  $F_3$  (рис. 1), в котором предполагается, что транзистор (активный элемент ( $Q_1$ )) безынерционен и работает как управляемый генератор тока зависимый от входного гармонического напряжения ( $U_{In}$ ) и напряжения сток-исток ( $U_{DS}$ ).

Нагрузочная цепь усилителя показанного на рис. 1 была выполнена по схеме, предложенной в [3], позволяющая с учетом  $C_{out}$  за счет подстройки емкостей  $C_4$  и  $C_5$  настраивать независимо друг от друга нагрузочные импедансы на первой и третьей гармониках  $Z(f_0)$  и  $Z(3f_0)$ . Значения элементов

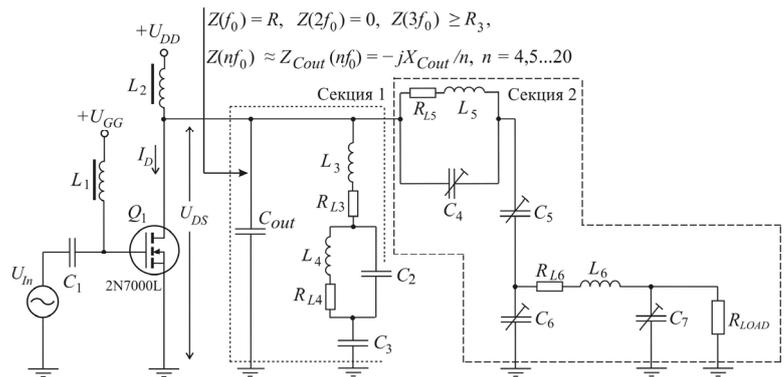


Рис. 1. Принципиальная схема УМ класса F<sub>3</sub>

секции 1 нагрузочной цепи (рис. 1) рассчитываются по формулам, приведенным в [7],

$$L_3 = 1/(6\omega_0^2 C_{out}), \quad L_4 = 5/3(L_3), \quad C_2 = 12/5(C_{out}), \quad (1)$$

где  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $f_0$  – рабочая частота. В секции 1  $C_3$  – разделительный конденсатор. В секции 2  $L_5 C_4$  – контур, настроенный на третью гармонику ( $3f_0$ ). Величина  $C_5$  выбирается такой, чтобы на  $f_0$  элементы  $L_5$  и  $C_4$  совместно с емкостью  $C_5$  образовывали последовательный контур. Поэтому на  $f_0$  транзистор нагружен на нагрузочное сопротивление ( $R$ ), которое трансформируется в сопротивление нагрузки  $R_{LOAD} = 50$  Ом с помощью П-контура, образованного элементами  $C_6$ ,  $C_7$  и  $L_6$ .

В [3] было показано, что за счет емкостного импеданса  $Z(nf_0) = -jX_{Cout}/n$ , создаваемого  $C_{out}$  на высших гармониках ( $n = 4, 5, \dots$ ) можно при  $X_{Cout} \geq R$  ( $1/\omega_0 C_{out} \geq R$ ) дополнительно повысить  $\eta_D$  и  $P_{out}$  насыщенного УМ класса F<sub>3</sub>. Достигалось это за счет роста амплитуд высших гармоник напряжения сток-исток ( $U_{DS}$ ) при увеличении реактивного сопротивления  $X_{Cout}$ . При этом на стоке транзистора уменьшалась площадь перекрытия форм  $U_{DS}$  и тока стока  $I_D$ , что приводило к снижению рассеиваемой мощности потерь в транзисторе. Однако следует отметить, что расчетные значения  $L_3$ ,  $L_4$  и  $C_2$  в (1) зависят от выбора величины  $C_{out}$ . Поэтому представляет интерес рассмотреть влияние на  $\eta_D$  и  $P_{out}$  не только  $C_{out}$ , но и активных потерь в  $L_3$  и  $L_4$ , которые не учтены в (1).

**Моделирование УМ класса F<sub>3</sub> и анализ полученных результатов.** Моделирование усилителя (рис. 1) выполнялось методом гармонического баланса. В моделировании использовалась модель полевого транзистора 2N7000L, параметры которой приведены [3]. Напряжение питания было равно  $U_{DD} = 25$  В. Напряжение смещения на затворе транзистора  $U_{GG} = 1,86$  В, обеспечивало угол отсечки  $90^\circ$ . Рабочая частота была равна  $f_0 = 13,56$  МГц. Активные потери во всех катушках индуктивности учитывались с помощью последовательно включенных сопротивлений  $R_L$  (рис. 1) и затем пересчитывались в добротности по формуле  $Q_L = X_L/R_L$ , где  $X_L = \omega_0 L$ . Поскольку  $L_5$  и  $L_6$  не зависят от выбора  $C_{out}$ , добротности  $Q_{L5}$  и  $Q_{L6}$  были заданы постоянными 100 и 120. Для простоты значения  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$  выбирались равными

( $Q_{L3} = Q_{L4}$ ). Величина  $C_{out}$  учитывалась путем сравнения реактивного емкостного сопротивления  $X_{Cout} = 1/2\pi f_0 C_{out}$  со значением активного нагрузочного импеданса на первой гармонике  $Z(f_0) = R = 200$  Ом. Для исключения влияния изменения  $Z(f_0)$  в зависимости от различных величин  $Q_{L5}$  и  $Q_{L6}$ , величина  $Z(f_0)$  поддерживалась неизменной, что достигалось за счет подстройки  $C_5$ ,  $C_6$  и  $C_7$  (рис. 1). Импеданс  $Z(3f_0)$  был чисто активным, при котором выполнялось условие высокоэффективной работы УМ класса  $F_3$  ( $|Z(3f_0)| \geq |3Z(f_0)|$ ) [3–5]. Настройка  $Z(3f_0)$  осуществлялась за счет подстройки  $C_5$ .

На рис. 2 приведены зависимости  $\eta_D$  и  $P_{out}$  от величины добротностей  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$ , полученные при различных значениях  $X_{Cout}$  для насыщенного УМ класса  $F_3$ . В том случае, когда  $X_{Cout} = (5...10)R$ , уменьшение добротностей  $Q_{L3}$ ,  $Q_{L4}$  со значений  $\infty$  ( $L_3, L_4$  без потерь) до 10 снижало  $\eta_D$  не более чем на 6,9 % (рис. 2). Выходная мощность усилителя при этом снижалась на 9,3 % (рис. 2). Когда  $X_{Cout} = (0,1...1)R$  уменьшение  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$  оказывало гораздо большее влияние на снижение величин  $\eta_D$  и  $P_{out}$  (рис. 2). В этом случае уменьшение  $Q_{L3}$ ,  $Q_{L4}$  со значений  $\infty$  до 100 уже снижало  $\eta_D$  на 2,6 % при  $X_{Cout} = R$  и на 24,9% при  $X_{Cout} = 0,1R$ . Значение  $P_{out}$  снижалось на 2,9 % при  $X_{Cout} = R$  и на 28,7 % при  $X_{Cout} = 0,1R$ .

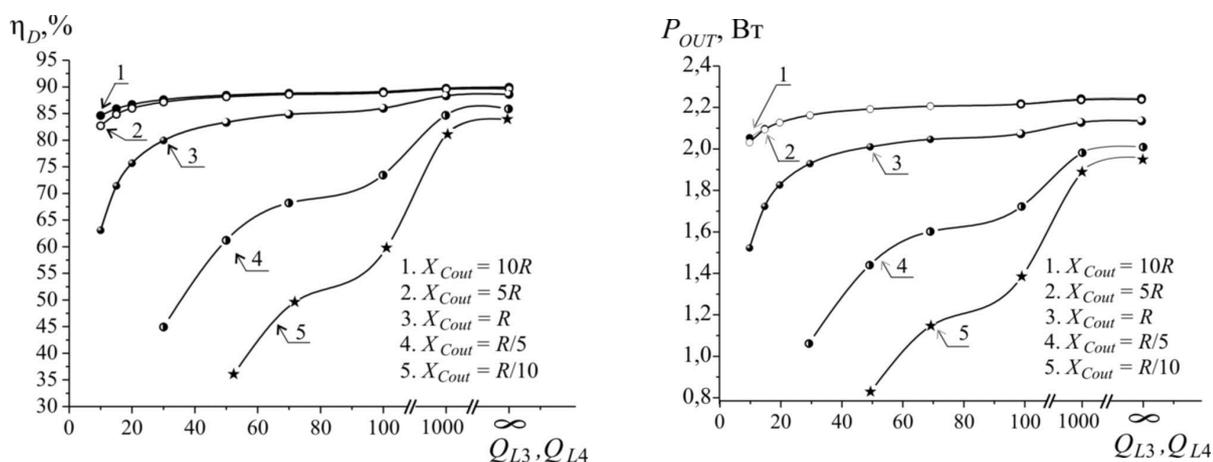


Рис. 2. Зависимости  $\eta_D$  и  $P_{out}$  от величин  $Q_{L3} = Q_{L4}$  при различных значениях  $X_{Cout}$  для насыщенного УМ класса  $F_3$

Для наглядного примера, когда добротности  $Q_{L3} = Q_{L4} = 100$ , были получены формы напряжения ток-исток  $U_{DS}$  и тока стока  $I_D$  при различных значениях  $X_{Cout}$  (рис. 3). В данном случае изменение  $X_{Cout}$  в диапазоне от  $R/5$  до  $5R$  вполне наглядно демонстрирует уменьшение площади перекрытия форм  $U_{DS}$  и  $I_D$  (рост  $\eta_D$  и  $P_{out}$ ) за счет уплощения нижней части формы напряжения  $U_{DS}$ , что достигается с ростом величины  $X_{Cout}$  (уменьшение величины выходной емкости транзистора). Вполне

очевидно, что такое уплощение  $U_{DS}$  будет происходить и при более низких значениях добротностей  $Q_{L3}$ ,  $Q_{L4}$ .

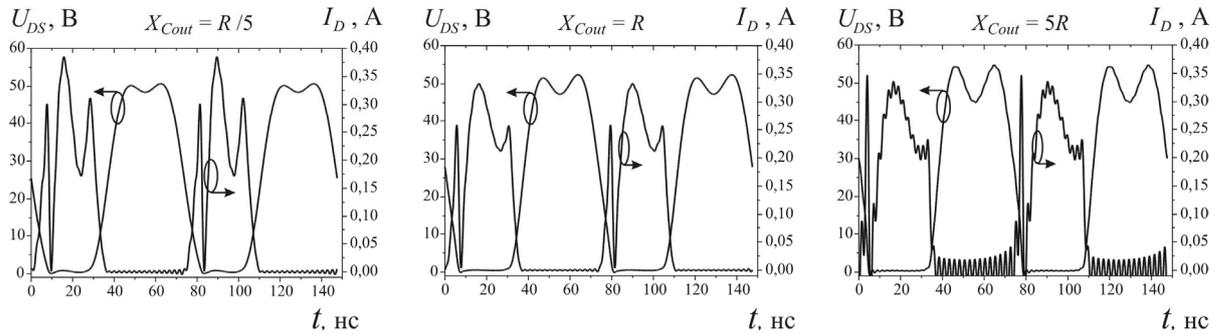


Рис. 3. Формы  $U_{DS}$  и  $I_D$  насыщенного УМ класса  $F_3$ , полученные при  $Q_{L3} = Q_{L4} = 100$  для различных значений  $X_{Cout}$

Для установления причины возрастания влияния добротностей  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$  на  $\eta_D$  и  $P_{out}$ , при снижении  $X_{Cout}$ , необходимо рассмотреть работу секции 1 нагрузочной цепи (рис. 1) на частоте  $f_0$ . Учитывая, что по отдельности от секции 2 на  $f_0$  секция 1 должна создавать нагрузочный импеданс  $Z(f_0) = \infty$  [1], ее можно представить эквивалентным параллельным колебательным контуром, как показано на рис. 4.

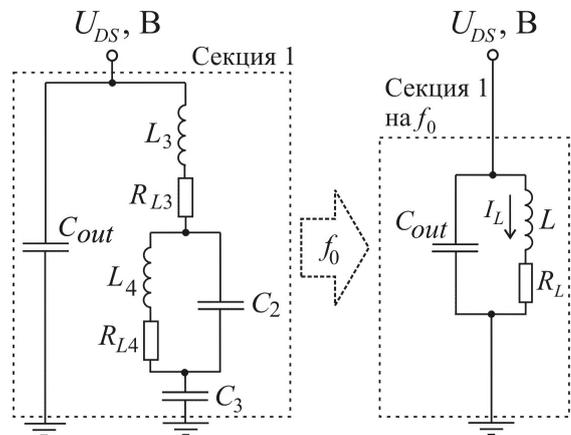


Рис. 4. Эквивалентная схема секции 1 на  $f_0$

В параллельном контуре значения активных сопротивлений  $R_{L1}$  и  $R_{L2}$ , которые вносят потери в секцию 1 нагрузочной цепи, могут быть заменены на сопротивление  $R_L$ . Величина  $R_L$  определяет добротность контура при заданных значениях добротностей  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$ . Индуктивность  $L$  в контуре представляет собой значение индуктивности участка цепи секции 1 образованного элементами  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $C_2$ ,  $R_{L3}$ ,  $R_{L4}$  (рис. 4). Емкость  $C_3$  секции 1 можно не учитывать, поскольку она разделительная по постоянному току и ее реактивное сопротивление близко к 0 Ом.

На рис. 5 показаны зависимости величины  $R_L$  и  $P_L$  от значений добротностей  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$ , полученные при различных значениях  $X_{Cout}$ . Также на рис. 5 приведены амплитудные значения резонансных токов  $I_L$  создаваемых за счет первой гармоники напряжения  $U_{DS}$ . В параллельном колебательном контуре на резонансной частоте ток  $I_L$  при заданном значении  $X_{Cout}$  практически не зависит от  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$ . Поскольку основной вклад в характеристическое сопротивление контура вносит величина  $X_{Cout}$  [3]. Соответственно при постоянной амплитуде первой гармоники напряжения  $U_{DS}$  резонансный ток  $I_L$  будет тем выше, чем меньше величина  $X_{Cout}$ .

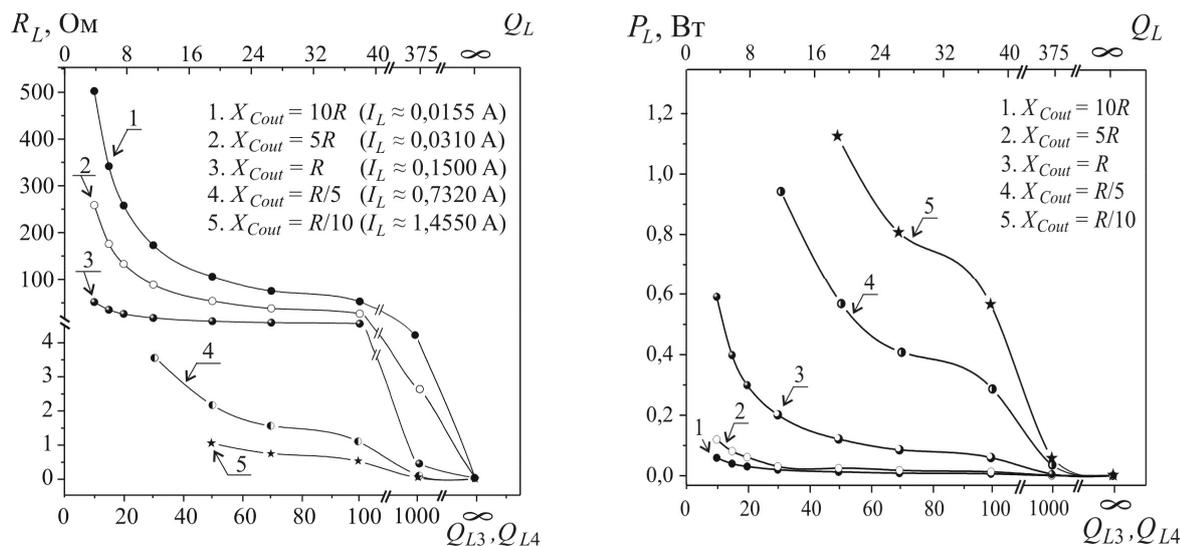


Рис. 5. Зависимости  $R_L$  и  $P_L$  от  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$  при различных значениях  $X_{Cout}$

Из рис. 5 также видно, что уменьшение величины  $X_{Cout}$  приводит к росту  $P_L$ , вызванному увеличением резонансных токов, протекающих в индуктивностях. Поэтому возрастание влияния величины добротностей  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$  на  $\eta_D$  и  $P_{out}$  (рис. 2) при снижении  $X_{Cout}$  объясняется тем, что с ростом  $C_{out}$  в секции 1 происходит возрастание резонансных токов, протекающих в индуктивностях. В свою очередь это приводит к генерации мощности потерь на  $R_{L3}$  и  $R_{L4}$ .

**Выводы.** Для снижения величины активных потерь в нагрузочной цепи насыщенного УМ класса  $F_3$  и получения высоких значений  $\eta_D$ , необходимо использовать транзисторы выходные емкости, которых обеспечивают на рабочей частоте усилителя выполнение условия  $X_{Cout} > R$ . Рост величины  $X_{Cout}$  способствует расширению (в сторону уменьшения добротности) диапазона значений  $Q_{L3}$  и  $Q_{L4}$ , при которых может быть получен высокий  $\eta_D$ , что может быть использовано при реализации нагрузочных цепей усилителей, где в силу конструктивных ограничений не могут быть реализованы высокодобротные катушки индуктивности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Raab F.H. Maximum Efficiency and Output of Class-F Power Amplifiers / F.H. Raab // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2001. – Vol. 49, No. 6. – P. 1162-1166.
2. Behaviors of Class-F and Class-F<sup>-1</sup> Amplifiers / J. Moon, S. Jee, J. Kim, B. Kim // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2012. – Vol. 60, No. 6. – P. 1937-1951.
3. Yefimovich A.P. Investigation into energy characteristics of saturated class-F amplifier / A.P. Yefimovich, V.G. Kryzhanovskii // Telecommunications and Radio Engineering. – 2015. – Vol. 74, Issue 8. – P. 709-723.
4. Ефимович А.П. Методика расчета насыщенного усилителя класса F / А.П. Ефимович // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2015. – Вып. 3. – С. 13-21.
5. Павлов М.Л. Влияние настройки импеданса третьей гармоники на энергетические характеристики насыщенного усилителя класса  $F_3$  / М.Л. Павлов, А.П. Ефимович // Материалы I-й международной научной конференции «Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности», 16-18 мая 2016 г., Донецк. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 1. – С. 217-219.
6. Ефимович А.П. Исследование нелинейных искажений высокочастотного насыщенного усилителя класса  $F_3$  / А.П. Ефимович // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 65-69.

7. Grebennikov A.V. Circuit design technique for high efficiency class F amplifiers / A.V. Grebennikov // Proc. of IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest. – 2000. – Vol. 2. – P. 771-774.

Поступила в редакцию 15.09.2017 г.

**INCREASING THE EFFICIENCY OF CLASS-F<sub>3</sub> AMPLIFIER WITH REGARD  
TO THE IMPACT OF THE OUTPUT CAPACITY OF THE ACTIVE ELEMENT  
AND ACTIVE LOSSES IN THE LOAD CIRCUIT**

*A. Yefymovych, I. Tretyakov, G. Mazaev, V. Danilov*

The theoretical investigation of the mutual influence of the value of the output capacitance of the active element and active losses in the inductance coils of the load network on the efficiency and the output power of the saturated class-F<sub>3</sub> power amplifier (PA) with an operating frequency of 13.56 MHz. Proposed recommendations are offered for choosing the most energetically favorable combination of the design parameters of the loading network of saturated class-F<sub>3</sub> PA, in which, taking into account the output capacitance of the transistor and active losses in the inductance coils of the load circuit, it is possible to obtain the maximum efficiency of the amplifier.

**Keywords:** power amplifier, saturated class-F<sub>3</sub>, overvoltage class F<sub>3</sub>, load network, drain efficiency, output power.

**Ефимович Андрей Павлович**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк; старший преподаватель.  
E-mail: yefymovych@gmail.com

**Yefymovych Andrii**

Donetsk National University, Donetsk;  
Senior Lecturer

**Третьяков Игорь Александрович**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк; ассистент  
E-mail: es75i@mail.ru

**Tretyakov Igor**

Donetsk National University, Donetsk;  
Assistant Lecturer

**Мазаев Глеб Вячеславович**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк; студент  
E-mail: mazaevgleb@gmail.com

**Mazaev Gleb**

Donetsk National University, Donetsk; Student

**Данилов Владимир Васильевич**

доктор технических наук, профессор;  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк; проректор по научной и инновационной  
деятельности.  
E-mail: ut5iv@mail.ru

**Danilov Vladimir**

Doctor of Engineering Sciences, Full Professor;  
Donetsk National University, Donetsk;  
Vice-Rector of Research and Innovation Activity

УДК 548.4

## УЧЁТ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭЛЛИПСОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ТОНКИХ ПРОЗРАЧНЫХ ПЛЁНОК НА ПРИМЕРЕ ОКСИДА ИНДИЯ (III)

© 2017. *А.А. Тихий, Ю.М. Николаенко, М.Ю. Бадекин, В.Н. Саяпин, Н.П. Иваницын, И.В. Жихарев*

В настоящей работе практически показана применимость методов учета сложной структуры границ и информации о величине оптического пропускания, ранее разработанных для поглощающих плёнок, при интерпретации результатов эллипсометрических измерений прозрачных плёнок  $\text{In}_2\text{O}_3$  на прозрачных подложках. Результаты их применения к серии пленок  $\text{In}_2\text{O}_3$ , напылённых на подложки  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (012) в различном температурном интервале, согласуются с общими представлениями о влиянии температуры подложки на свойства плёнок получаемых методом dc-магнетронного распыления.

**Ключевые слова:** оксид индия, поверхность, эллипсометрия, магнетронное напыление.

**Введение.** Эллипсометрия является высокочувствительным поляризационно-оптическим методом исследования поверхностей и границ раздела различных сред [1–10]. В основе метода лежит регистрация изменения состояния поляризации света в результате его взаимодействия с исследуемой поверхностью. Изменение поляризации света при его отражении от поверхности характеризуется эллипсометрическими углами  $\psi$  и  $\Delta$ . Эти углы зависят от свойств поверхности – молекулярного взаимодействия на границе раздела, переходных слоев, обусловленных обработкой поверхности, нанесенных тонкопленочных покрытий и пр. При этом эллипсометрический метод исследования оптических свойств и толщины тонкопленочных покрытий обладает существенными преимуществами по сравнению с другими методами, т.к. не требует специальной подготовки поверхностей и даже позволяет в реальном времени наблюдать за изменением их свойств под влиянием различных процессов.

Базовым соотношением, позволяющим судить о свойствах исследуемых поверхностей, является так называемое основное уравнение эллипсометрии

$$\operatorname{tg} \psi \cdot e^{i\Delta} = R^{(p)} / R^{(s)}, \quad (1)$$

в котором  $R^{(p)}$  и  $R^{(s)}$  – амплитудные коэффициенты отражения  $p$ - и  $s$ -составляющих эллиптически поляризованной электромагнитной волны соответственно. В этом уравнении значения  $R^{(p)}$  и  $R^{(s)}$  определяются структурой и свойствами поверхности, оптическими свойствами обрамляющих сред, длиной волны зондирующего излучения  $\lambda$  и углом падения  $\varphi$ . Так, для системы из  $j$  однородных изотропных плоскопараллельных слоёв

$$\Psi = \Psi(\varphi, \lambda, n_0, n_1, \dots, n_{j+1}, k_0, k_1, \dots, k_{j+1}, d_1, d_2, \dots, d_j) \quad (2)$$

$$\Delta = \Delta(\varphi, \lambda, n_0, n_1, \dots, n_{j+1}, k_0, k_1, \dots, k_{j+1}, d_1, d_2, \dots, d_j) \quad (3)$$

Здесь  $n_j$  – показатели преломления,  $k_j$  – коэффициенты экстинкции, а  $d_j$  – толщины слоёв. Индексы 0 и  $j+1$  отвечают подложке и внешней среде, соответственно.

Важнейшей задачей эллипсометрии является нахождение оптических свойств поверхности по результатам измерений эллипсометрическим углам  $\psi$  и  $\Delta$  – обратная задача эллипсометрии. Очевидно, что такая задача может быть решена лишь в том случае, если модель поверхности адекватна ее реальной структуре.

Одним из наиболее практически важных видов поверхностей, является однослойное тонкоплёночное покрытие. Простейшей его моделью является модель тонкого слоя однородного изотропного материала, разделяющего два однородных изотропных полупространства из материалов с иными свойствами (однослойная модель). Однако можно утверждать, что однослойная модель является идеализацией, далеко не всегда отражающей реальную структуру исследуемого покрытия.

Ранее, в работах [4, 5–7], был предложен способ учета сложной структуры однослойного тонкоплёночного покрытия, и комплексная методика интерпретации результатов эллипсометрических измерений с использованием дополнительной информации о величине оптического пропускания для поглощающих плёнок (в частности, манганита лантана-стронция). В настоящей работе практически показана применимость этих методов и для прозрачных плёнок  $\text{In}_2\text{O}_3$  на прозрачных подложках.

**Интерпретация результатов эллипсометрических измерений однослойных покрытий с шероховатой поверхностью.** Как правило, реальные однослойные тонкоплёночные покрытия характеризуются сложной структурой внешней поверхности и границы сопряжения плёнка-подложка. Нарушение структуры пленки [8] на границах среда – пленка ( $af$ ) и пленка – подложка ( $fs$ ) можно рассматривать как совокупности однородных физически бесконечно тонких слоёв фиксированной толщины ( $d_j^{(af)}, d_j^{(fs)} = d = 5 - 10 = \text{нм}$ ), определяемых макроскопическими оптическими параметрами. В общем случае число таких однородных слоев фиксированной толщины различно на границах  $af$ ,  $fs$ , и возможны различные законы изменений соответствующих показателей преломления ( $n^{(af)}$  и  $n^{(fs)}$ ) и коэффициентов экстинкции ( $k^{(af)}$  и  $k^{(fs)}$ ). В частности, для линейного закона

$$n_j^{(af)} = n_a + j \frac{n_f + n_a}{g}, \quad k_j^{(af)} = k_a + j \frac{k_f - k_a}{g}, \quad j = 1, 2, \dots, g \quad (4)$$

$$n_j^{(fs)} = n_f + j \frac{n_s + n_f}{h}, \quad k_j^{(fs)} = k_f + j \frac{k_s - k_f}{h}, \quad j = 1, 2, \dots, h \quad (5)$$

Здесь  $n_a$ ,  $k_a$  – характеристики среды со стороны падающего и отраженного лучей зондирующего излучения, а  $n_s$ ,  $k_s$  – характеристики материала подложки. Следует отметить, что шероховатость поверхности может привести и к некоторому росту эффективного значения коэффициента экстинкции в предлагаемой модели поверхности, что обусловлено дополнительным диффузным рассеянием энергии.

При интерпретации результатов эллипсометрических измерений структур с произвольным числом слоев, параметры которых неизвестны, обычно применяются оптимизационные методы, в основе которых лежит процедура минимизации определенным образом выбранной целевой функции

$$G(\Psi_1^{(e)}, \dots, \Psi_N^{(e)}, \Delta_1^{(e)}, \dots, \Delta_N^{(e)}, \Psi_1^{(c)}, \dots, \Psi_N^{(c)}, \Delta_1^{(c)}, \dots, \Delta_N^{(c)}) \quad (6)$$

Здесь индексами  $(e)$  и  $(c)$  обозначены экспериментальные и расчетные значения эллипсометрических углов, а  $N$  – число измерений при различных углах падения

зондирующего излучения. Простейшая целевая функция имеет вид

$$G = \sum_{i=1}^N \left( \frac{(\Psi_i^{(e)} - \Psi_i^c)^2}{(\Psi_i^{(e)})^2} + \frac{(\Delta_i^{(e)} - \Delta_i^c)^2}{(\Delta_i^{(e)})^2} \right) \quad (7)$$

В силу неоднозначности [3, 10] решения обратной задачи эллипсометрии функция  $G$  вида (7) имеет множество локальных минимумов. При этом в случае слабо поглощающих пленок эти минимумы практически неразличимы. Эта проблема может быть решена включением в целевую функцию дополнительной информации, полученную другими методами [2]. В частности, такая расширенная целевая функция с использованием коэффициента оптического пропускания измеренного на длине волны эллипсометрических измерений имеет вид:

$$G' = N(T^{(e)} - T^{(c)})^2 (T^{(e)})^{-2} + G \quad (8)$$

Функция  $G'$  также характеризуется набором локальных минимумов, однако её глобальный минимум выражен чётче, а количество локальных минимумов меньше чем у функции  $G$  (при одинаковых диапазонах предполагаемых значений параметров модели). Также, в качестве дополнительного критерия глобального минимума, при необходимости, можно использовать факт совпадения минимумов для целевых функций  $G$  и  $G'$ .

**Интерпретация результатов эллипсометрических измерений тонких прозрачных плёнок оксида индия (III).** Описанная методика применялась нами при интерпретации результатов эллипсометрических измерений пленок  $\text{In}_2\text{O}_3$ , на подложках  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (012). Плёнки были получены методом dc-магнетронного распыления [5]. Напыление производилось в атмосфере аргон-кислород, при температурах подложек 600, 300, и 20 °C в течение 1 часа; рабочий ток составлял 50 mA, напряжение – 300 V.

Как известно [1–3], для плёнок такого типа характерно наличие развитого переходного слоя на поверхности плёнки, который обусловлен её шероховатостью. Этот слой, как описано выше, моделировался как совокупность физически бесконечно тонких слоев фиксированной толщины с показателем преломления, изменяющимся по линейному закону [3]. Выбор количества таких слоёв переходных слоёв производится, исходя из точности измерений эллипсометрических углов  $\psi$  и  $\Delta$ , в соответствии с условием

$$(|\Delta_c - \Delta'_c| < \varepsilon_\Delta) \wedge (|\Psi_c - \Psi'_c| < \varepsilon_\Delta), \quad (9)$$

где нештрихованные величины вычислены в модели с  $m$ , а штрихованные – с  $(m+1)$  слоями;  $\varepsilon_\Delta$  и  $\varepsilon_\Psi$  – погрешности измерений  $\Delta$  и  $\Psi$ . При этом погрешность эллипсометрических измерений составила не более 0,5 °.

Двулучепреломление сапфира не учитывалось, так как благодаря специальной ориентации образца в процессе измерения не оказывало влияния на результат. Так как исследованные образцы состоят из материалов прозрачных для света с длиной волны 633 nm, коэффициенты экстинкции подложки, плёнки, и поверхностного слоя полагались равными нулю. Попытка учёта диффузным рассеянием энергии поверхностным слоем плёнки путём назначения небольших значений коэффициента экстинкции для данных образцов не привела к заметному улучшению согласования

расчётных значений эллипсометрических углов и коэффициента пропускания с измеренными значениями.

На рис. 1 и 2 представлены некоторые из проекций зависимостей  $G(n_f, n'_{nf}, d_f, d_{fa})$  и  $G'(n_f, n'_{nf}, d_f, d_{fa})$  для одной из исследованных плёнок полученной при температуре подложки 600 °С. Как видно из представленных рисунков, в данном случае, для нахождения параметров плёнки достаточно использовать лишь функцию  $G'(n_f, n'_{nf}, d_f, d_{fa})$ . Она, в отличие от функции  $G$ , имеет чётко выраженный глобальный минимум при  $n_f = 2.05$ ,  $n'_{nf} = 1.5$ ,  $d_f = 375 \text{ \AA}$ ,  $d_{fa} = 75 \text{ \AA}$ .

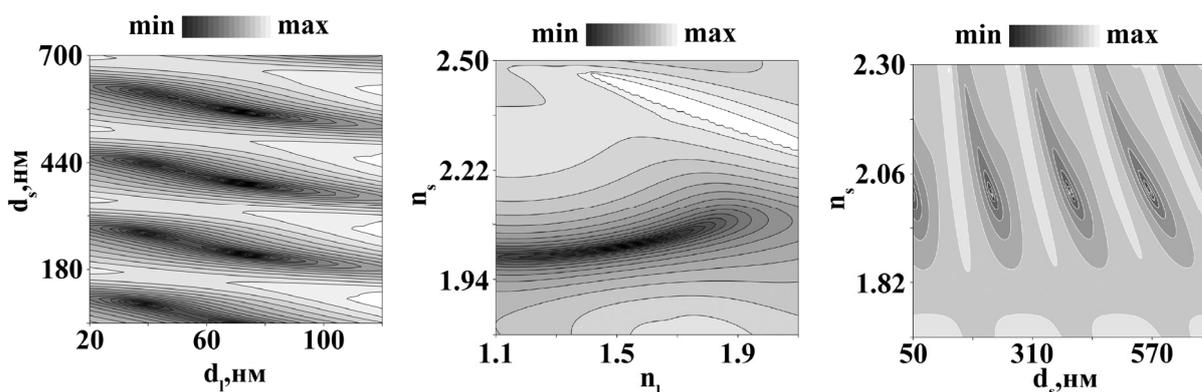


Рис. 1. Сечения зависимости  $G(n_f, n_t, d_f, d_t)$  для пленки, полученной при температуре подложки 600 °С (а – при  $n_t = 1,52$ ,  $n_f = 2,02$ , б –  $d_t = 72 \text{ нм}$ ,  $d_f = 391 \text{ нм}$ , в  $n_t = 1,52$ ,  $d_t = 72 \text{ нм}$ )

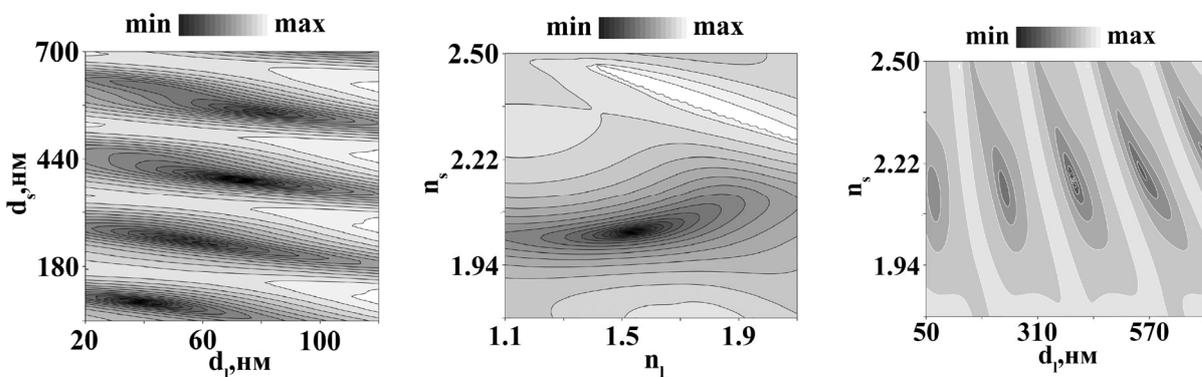


Рис. 2. Сечения зависимости  $G'(n_f, n_t, d_f, d_t)$  для пленки, полученной при температуре подложки 600 °С (а – при  $n_t = 1,52$ ,  $n_f = 2,02$ , б –  $d_t = 72 \text{ нм}$ ,  $d_f = 391 \text{ нм}$ , в  $n_t = 1,52$ ,  $d_t = 72 \text{ нм}$ )

Применение описанной методики решения обратной задачи эллипсометрии позволило построить профили показателей преломления исследованных плёнок, анализ которых указывает на то, что пленки, нанесенные на подложки с температурой 300 °С и более однородны по толщине, но имеют поверхностный нарушенный слой. При этом толщины пленки и нарушенного слоя тем меньше, чем выше была температура подложки, на которую они наносились. Показатель преломления наоборот – возрастает с увеличением температуры подложки.

В тоже время, для анализа результатов эллипсометрических измерений плёнки нанесенной на «холодную» (20 °С) подложку потребовалось использование более

сложной модели – показатель преломления слоя собственно материала плёнки сначала возрастает от 1,9 у границы подложка-пленка, а затем линейно уменьшается в нарушенном слое с 2 до 1,8. При этом общая толщина плёнки, как толщина нарушенного слоя больше, чем у пленок на «горячих» подложках.

Отжиг плёнок привёл к унификации их свойств и улучшил однородность распределения показателя преломления по толщине. Также уменьшилась толщина плёнок и нарушенных слоёв – произошло уплотнение материала. Толщины всех отожжённых пленок составили около 400 nm, показатели преломления – 2, а толщины нарушенных слоёв ~ 20 nm. Что хорошо согласуется с [9]

**Выводы.** Процедура решения обратной задачи, минимизационным методом с использованием дополнительной информации о величине оптического пропускания позволяет однозначно определять толщину и показатель преломления тонких плёнок с шероховатой поверхностью. Результаты её применения к серии пленок  $\text{In}_2\text{O}_3$ , напылённых на подложки с различными температурами, согласуются с общими представлениями о влиянии температуры подложки на свойства плёнок получаемых методом dc-магнетронного распыления. – Так, наблюдаемые закономерности в изменениях оптических параметров пленок  $\text{In}_2\text{O}_3$  в зависимости от температуры подложки, достаточно закономерны – чем выше температура подложки в процессе напыления, тем более плотным и менее дефектным является материал пленки. Что касается пленки на «холодной» подложке, то, можно предположить, что данная плёнка является «рыхлой», а рост показателя преломления в ней, по-видимому, связан с повышением температуры поверхности растущей пленки в процессе ее напыления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tompkins H.G. Handbook of Ellipsometry / H.G.Tompkins, E.A. Irene. – USA, William Andrew Publishing, 2005. – 847 p.
2. Features of interpreting ellipsometric measurement results /A. A. Tikhii, V. A. Gritskikh, S. V. Kara-Murza et al. // Opt. Spectrosc. – 2012. – Vol. 112. – P. 300–304.
3. An ellipsometric method for determining the optical parameters of thin-film coatings with a complex structure / A. A. Tikhii, V. A. Gritskikh, S. V. Kara-Murza et al. // Opt. Spectrosc. – 2015. – Vol. 119. – P. 268–272.
4. Non-uniform oxygen diffusion in epitaxial  $\text{La}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_{3-\delta}$  film on  $\text{SrTiO}_3$  substrate / Yu. M. Nikolaenko, A. N. Artemov, Yu. B. Medvedev et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2016. – Vol. 49. – P. 375302-375302.
5. Thornton J. A.. The microstructure of sputter deposited coatings / J. A. Thornton. // J. Vac. Sci. Technol. – 1986. – Vol. 4. – P. 3059-3065.
6. Jarzebski M.Z. Preparation and physical properties of transparent conducting oxide films / M.Z. Jarzebski // Phys. Stat. Sol. – 1982. – Vol. 71. – P. 13-41.
7. Effect of elevated substrate temperature on growth, properties, and structure of indium tin oxide films prepared by reactive magnetron sputtering. /A. Rogozin, M. Vinnichenko, N. Shevchenko et al. // J. Mater. Res. – 2007. – Vol. 8. – P. 2319-2329.
8. Получение высококачественных пленок на основе манганита на усовершенствованной магнетронной приставке ВУП-5М / Ю.М.Николаенко, А.Б. Мухин, В.А.Чайка, В.В.Бурховецкий // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80. – С. 115–119.
9. Оптические свойства тонких пленок  $\text{In}_2\text{O}_3$  и ИТО / А. А. Тихий, Ю. М. Николаенко, Ю. И. Жихарева, И. В. Жихарев // Журн. прикл. спектр. – 2016. – Т. 83. – С. 488–491.
10. Ржанов А. В. Эллипсометрия: теория, методы, приложения / А. В. Ржанов. – Новосибирск: Наука, 1987. – 161 с.

*Поступила в редакцию 06.11.2017 г.*

ACCOUNTING COMPLEX STRUCTURE OF THE SURFACE AT INTERPRETATION  
OF THE RESULTS OF ELLIPSOMETRIC MEASUREMENTS OF THIN TRANSPARENT FILMS ON  
THE EXAMPLE OF INDIUM OXIDE(III).

*A.A. Tikhii, Yu. M. Nikolaenko, M.Yu. Badekin, V.N. Sayapin, N.P. Ivanitsin, I.V. Zhikharev*

In the present work, the applicability of methods for taking into account the complex structure of the boundaries and the information on the optical transmission value, previously developed for absorbing films, is practically shown when interpreting the results of ellipsometric measurements of transparent  $\text{In}_2\text{O}_3$  films on transparent substrates. The results of their application to a series of  $\text{In}_2\text{O}_3$  films deposited on  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (012) substrates in a different temperature range are consistent with the general idea of the effect of substrate temperature on the properties of films produced by the dc-magnetron sputtering method.

**Keywords:** indium oxide, surface, ellipsometry, magnetron sputtering.

**Тихий Александр Александрович**

Донецкий физико-технический институт им.  
А.А. Галкина, младший научный сотрудник .  
83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72,  
e-mail: ea0000ffff@mail.ru  
тел: (062) 311-52-27

**Tikhii Alexander Alexandrovich**

Donetsk Institute for Physics and Engineering named  
after A.A.Galkin, Research Assistant.  
83114, Donetsk, R. Luxemburg, 72 st.

**Николаенко Юрий Макарович**

кандидат физико-математических наук, с.н.с.;  
Донецкий физико-технический институт им.  
А.А. Галкина, с.н.с .  
83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72,  
e-mail: nik@fti.dn.ua  
тел: (062) 311-52-27

**Nikolaenko Yuri Makarovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Senior  
Research Officer;  
Donetsk Institute for Physics and Engineering named  
after A.A.Galkin, Senior Research Officer.  
83114, Donetsk, R. Luxemburg, 72 st.

**Бадекин Максим Юрьевич**

Донецкий физико-технический институт им.  
А.А. Галкина, аспирант .  
83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72,  
e-mail: korund2002@list.ru  
тел: (062) 311-52-27

**Badekin Maxim Yurievich**

Donetsk Institute for Physics and Engineering named  
after A.A.Galkin, Postgraduate.  
83114 DPR, Donetsk, R. Luxemburg, 72 st.

**Саяпин Валерий Николаевич**

Донецкий физико-технический институт им.  
А.А. Галкина, инженер.  
83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72,  
e-mail: den\_syaopin@mail.ru  
тел: (062) 311-52-27

**Sayapin Valery Nikolayevich**

Donetsk Institute for Physics and Engineering named  
after A.A.Galkin, engineer.  
83114, Donetsk, R. Luxemburg, 72 st.

**Иваницын Николай Петрович**

кандидат физико-математических наук, профессор;  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк).  
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24,  
тел: (062) 302-92-93

**Ivanitsin Nikolay Petrovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Full  
Professor;  
Donetsk National University.  
83001, Donetsk, University, 24 st.

**Жихарев Игорь Васильевич**

кандидат физико-математических наук, с.н.с.;  
Донецкий физико-технический институт им.  
А.А. Галкина, с.н.с  
83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72,  
e-mail: izhiharev@mail.ru  
тел: (62) 311-52-27

**Zhikharev Igor Vasilievich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Senior  
Research Officer;  
Donetsk Institute for Physics and Engineering named  
after A.A.Galkin, Senior Research Officer  
83114, Donetsk, R. Luxemburg, 72 st.

*Научное издание*

**Вестник Донецкого национального университета.  
Серия А: Естественные науки**

**2017. – № 3**

Редактор: *Е.В. Алтухов*  
Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о регистрации СМИ № 000077 от 21.11.2016 г.

---

Адрес редакции:  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
ул. Университетская, 24,  
283001, г. Донецк  
Тел: (062) 302-92-56, 302-92-93  
E-mail: [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)  
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

---

Подписано в печать 27.11.2017 г.  
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.  
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 13,65.  
Тираж 100 экз. Заказ. № 17-Дек16

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.  
Тел.: (062) 302-92-27.

Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности  
в Государственный реестр  
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.