Гончарова И.В., Пустовая Ю.В.

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

по математике

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

для учащихся 11 класса
профильного уровня

Гончарова И.В., Пустовая Ю.В.

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ
по математике

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ УЧЕНИКА

____

(фамилия и имя)

11 класса профильного уровня

Под редакцией профессора Е.И. Скафы

Донецк
Издательство «Ноулидж»
Донецкое отделение
2014

УДК 514.11:004.023
ББК 22.151.0+74.202.5
Г65

Р е ц е н з е н т ы:

Е.В. Власенко, д-р пед. наук, проф. кафедры высшей математики Донбасской государственной машиностроительной академии;

В.В. Кукуй, учитель-методист учебно-воспитательного комплекса №1 г. Донецка

Рекомендовано Методическим советом факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета (протокол № 138 от 22.05.2014 г.)

Г65 **Гончарова И.В.**
Эвристический факультатив по математике: Рабочая тетрадь для учащихся 11 кл. профильного уровня / И.В. Гончарова, Ю.В. Пустовая; под ред. проф. Е.И. Скафы. – Донецк: Изд-во «Ноулидж» (донецкое отделение), 2014. – 180 с.

Пособие предназначено для занятий эвристического факультатива по математике для учащихся 11 классов профильного уровня.

Между первой встречей с новой нестандартной задачей и окончательным, компактным изложением ее решения лежит полоса поиска этого решения. Как производить этот поиск? Как догадаться о способе решения? К сожалению, единого, универсального метода для достижения этой цели не существует. Однако имеются некоторые общие приемы и правила, которые нередко помогают догадаться о способе решения разнообразных задач. С этими общими приемами поиска решения математических задач – эвристическими приемами – учащиеся и будут знакомиться на занятиях эвристического факультатива.

Структура пособия позволяет учащимся сделать нужные записи, касающиеся решения эвристических задач, оценить предлагаемые задачи, свое настроение и работу на занятиях.

Пособие будет полезно школьникам, студентам математических специальностей, учителям, которые пытаются внедрять в учебный процесс методическую систему эвристического обучения математике.

УДК 514.11:004.023
ББК 22.151.0+74.202.5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Я обращаюсь ко всем, кто обучается математике, и заинтересован в овладении ею, и говорю: **«Конечно, будем учиться доказывать, но давайте также учиться догадываться».**

Дж. Пойа

Уважаемые старшеклассники!

В Ваших руках рабочая тетрадь эвристического факультатива по математике. С ней Вы будете работать на занятиях в классе и дома, выполняя самостоятельную работу. Она станет надежным помощником в знакомстве с эвристическими приемами поиска решения математических задач и их применением на практике.

Наверное, много раз Вас волновали вопросы вроде таких: *что сделать для решения трудной задачи? Как можно было догадаться до этого остроумного доказательства? Почему был выбран именно такой путь рассуждения?* Подобные вопросы связаны не только с математикой – сюда относятся также принятие решений и отыскание выхода из затруднительных положений в жизненных ситуациях, производственных вопросах, условиях военного боя и т. д.

По словам М.Б.Балка [3], ответ на поставленные вопросы содержится в двух словах: *ЗНАЙ* и *УМЕЙ*. Ведь в математике есть четко сформулированные понятия, аксиомы, теоремы, а также правила логических умозаключений. Нужно *знать* эти теоремы и правила и *уметь* их применять. Но это еще не всё. В сложных задачах приходится применять не одну, а несколько теорем. И заранее неясно, какие из них следует применять, и в какой последовательности. А над очень трудными задачами (например, теми, которые даются на олимпиадах) ученики думают часами, хотя они прекрасно знают все изученные теоремы и владеют правилами логики. Законы логики больше приспособлены для того, чтобы *ИЗЛОЖИТЬ* уже найденное решение. *НАЙТИ* же решение трудной задачи чаще помогают не доводы логики, а случайно подмеченная аналогия, навеянное примерами предположение (которое вовсе не является логически обоснованным), опыт, интуиция и другие психологические факторы.

Рабочая тетрадь для занятий эвристического факультатива по математике, которую Вы держите в руках, как раз и имеет своей целью рассказать о психологии поиска решения, приоткрыть завесу таинственности над «лабораторией мышления» математика – от школьника до академика. На занятиях факультатива Вы познакомитесь с богатым арсеналом эвристических приемов; узнаете о поучительности контрпримеров, об использовании аналогии при решении задач, о применении индукции, ознакомитесь с другими приемами поиска решения.

Рабочая тетрадь состоит из двенадцати занятий. В каждом выделены следующие блоки.

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

В нем предлагается теоретическое описание эвристического приема и конкретные примеры применения его на практике при поиске решения задачи;

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

В этом блоке приводятся примеры применения изучаемой эвристики в жизни;

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Данный блок позволит освоить изучаемый эвристический прием на практике при поиске решения математических задач;

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

Этот блок дает возможность осознать вашу индивидуальность и уникальность. Рефлексия – это источник внутреннего опыта, способ самопознания и необходимый инструмент мышления;

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Дается возможность еще раз окунуться в изучаемый эвристический прием, сформировать свой личный прирост знаний. В этом блоке необходимо описать то, что из данного занятия Вы возьмете в свою эвристическую копилку, и как сможешь применить изученный эвристический прием в своей жизни.

В конце каждого занятия описывайте свои эвристические приобретения и отмечайте их в «Эвристической диаграмме» (рис. 90). На последнем занятии все пункты «Эвристической диаграммы» соедините плавной линией, и Вы увидите прирост своих эвристических умений.

В результате проработки предлагаемых занятий эвристического факультатива Вы *овладеете* рассмотренными эвристическими приемами, и будете *уметь* их применять для поиска решения математических задач.

Желаем успехов в решении задач!

Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли в голову другим.

Б. Паскаль

Занятие 1
«БУДЕМ ЗНАКОМЫ, ЭВРИСТИКИ»

Михаил Васильевич Ломоносов говорил: «Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит». Математический стиль мышления нужен всем, какой бы сферы нашей жизни мы не коснулись, практически везде присутствует математика. Поэтому важно научиться решать как стандартные алгоритмические задачи, так и нестандартные задачи по математике.

Между первой встречей с новой нестандартной задачей и окончательным, компактным изложением ее решения лежит полоса *поиска этого решения. Как производить этот поиск? Как догадаться о способе решения?* К сожалению, единого, универсального метода для достижения этой цели не существует. Однако имеются некоторые общие приемы и правила, которые нередко помогают догадаться о способе решения разнообразных задач. С этими общими приемами поиска решения математических задач (иначе говоря, приемами, пригодными для задач самых различных типов) – эвристическими приемами – мы и будем знакомиться на занятиях эвристического факультатива.

Метода, гарантирующего решение любой наперед заданной задачи, нет. Но существуют весьма общие приемы, которые при умелом их применении заметно облегчают решение многих нестандартных задач. Разработкой таких приемов занимается эвристика. Это слово происходит от знаменитого возгласа Архимеда «Эврика!». («Нашёл!») – воскликнул, согласно легенде, древнегреческий учёный, выскочив из ванны и выбежав на улицу: он понял, как решить предложенную ему задачу.

Немного истории

Слово «эвристика» можно перевести с греческого на русский язык как «искусство изобретать». Эвристика – учение об общих приемах поиска решений задач и проблем, учение о тех мыслительных операциях, которые часто оказываются полезными в процессе поиска решения. Эвристику разрабатывали такие знаменитые математики, как Р. Декарт, Б. Паскаль, Г. Лейбниц, Л. Эйлер, Б. Больцано, Ж. Адамар, Дж. Пойа и др. [3].

Термин *«эвристический»* означает «обеспечивающий открытие». Эвристика определяет наше поведение, помогающее достижению цели, но которое не может быть четко охарактеризовано, поскольку мы знаем, чего хотим, но не знаем, как этого достичь, где лежит истина. Предположим, мы хотим достичь конусообразной вершины горы, закрытой облаками. У нее есть высшая точка, но у нас нет точного маршрута. Указание «продолжайте подъем» приведет нас к вершине, где бы она ни была.

Все вы тоже, решая задачи или доказывая теоремы, привлекаете эвристические приемы, но пользуетесь ими «стихийно», неосознанно. Если бы вы применяли эти приемы сознательно, целенаправленно, то эффект был бы значительно выше. В школьном курсе математики довольно много внимания уделяется последовательному изложению доказательств теорем, аккуратному и грамотному оформлению решений задач, логическому обоснованию различных этапов решения и доказательства. А самому процессу поиска решения задачи или способа доказательства теоремы, процессу открытия новых математических фактов внимания уделяется значительно меньше. Многим так и остается неясным, каков процесс открытия той или иной теоремы, как удалось догадаться о способе решения той или иной задачи. ***Как искать? Как догадываться?*** Вот, что будет предметом наших занятий!

Каждый из Вас многократно наблюдал такую картину. Решающий долго и напряженно думает над задачей. Вдруг вспышка, озарение, или сегодня говорят инсайт (*insight* в переводе с английского и означает «озарение»). Откуда-то в сознании появляется путь решения задачи, «видна» та последовательность действий, которую надо выполнить, чтобы получить результат.

«С чего начать?» – думает каждый, приступая к решению задачи. Это очень важный вопрос этапа поиска решения. Недаром говорит народная пословица: «Лиха беда – начало». Правильный подход к началу решения нестандартной задачи во многом определяет успех в ее решении.

«Как решать задачу»
алгоритм решения задачи

1. Если условие задачи дано на «житейском» языке, то «переведите» задачу на математический язык.

2. Изучите внимательно условие задачи, осмыслите его и в целом, и в деталях:

– тщательно выполните наглядные рисунки, чертежи, таблицы или иллюстрированные схемы, помогающие осмыслить условие задачи;

– ясно представьте себе все элементы задачной ситуации, обстоятельно выясните, какие из них заданы, известны, какие из них являются искомыми, неизвестными.

3. Изучите цель поставленной задачи. «Хорошо понять вопрос – значит, наполовину ответить на него».

4. Принимайте во внимание:

– то, что вы знаете о ситуации, отраженной в задаче;

– то, что вы умеете и можете делать в данной ситуации, и что нужно делать;

– то, что известно вообще о связи данных и искомого;

– то, о чем вам говорит опыт в решении задач, похожих на данную;

– однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли условие задачи избыточных, недостающих, противоречащих друг другу данных.

5. Выберите направление поиска плана решения задачи.

– Если доказываемое утверждение кажется сомнительным, то *испытайте его на правдоподобие: попытайтесь построить контрпример, произведите проверку по размерности, на симметрию*.

– Попытайтесь *переформулировать задачу*, может быть, в новой формулировке задачу легче будет решить.

– Если вы не видите непосредственно связи между известными и искомыми величинами, *введите вспомогательные неизвестные*. Составьте уравнения, содержащие как искомые, так и вспомогательные неизвестные, исключите вспомогательные неизвестные.

– *Привлекайте аналогию*: сформулируйте задачу, похожую на данную, но более простую или более знакомую.

– *Привлекайте индукцию*. Спросите себя, в каких частных случаях вы данную задачу в состоянии решить.

– Попробуйте *спрогнозировать* те результаты, к которым может привести поиск.

– В решении геометрических задач, попробуйте достроить рисунок, *введите вспомогательный элемент*.

– Если вы увидели связь, между неизвестными элементами задачи, то попробуйте *выразить одну переменную через другую*.

– Попробуйте найти такие «сопоставляющие» задачи, рассмотрение которых облегчает решение, *разбейте целое на части*.

6. Создайте план решения задачи.

7. Запишите решение. Запись решения задачи должна быть четкой, образной, полной и обоснованной.

8. Сделайте анализ решения. Изучите найденное вами решение задачи. Сделайте грубую прикидку правильности результата, проверьте по размерности, соотнесите результат с условием (и здравым смыслом). Проследите обоснованность каждого шага решения задачи. Подумайте, нельзя ли решить задачу другим способом. Помните, что получение того же результата другим способом – лучшая проверка правильности решения.

Из-за чего решение может быть неправильным?

– Небрежно проведены выкладки (вычисления) – «для черновика». Не зря говорится: «Делаешь кое-как, и получается кое-как».

– Решается не та задача: условие или не понято, или изменено, или использовано не полностью.

– Чертеж построен неправильный или для частного случая.

– Формула применяется в условиях, когда она теряет смысл или просто неправильная.

– Рассмотрение задачи проведено не для всех возможных случаев.

– При выполнении преобразований утеряны корни уравнения или появились посторонние.

– Используется неточная формулировка теоремы, понятия, допущены другие логические ошибки. Например, вместо данной задачи решается обратная.

9. Учитесь на задаче. Решив задачу, просмотрите все решение заново. Изучите решение, проанализируйте имеющиеся выкладки и обоснования. Установите то, что полезно запомнить, что может пригодиться в дальнейшем. Обобщите результат решения данной задачи, подумайте, при решении каких задач его можно было бы применить.

10. Совершенствуйте себя. Старайтесь при решении задач почувствовать себя в роли ученого. Изобретайте новые решения и новые задачи, овладевая умением работать творчески. Старайтесь подойти к задаче и её решению с разных сторон. Чаще задавайте себе вопросы: «А нельзя ли …?» или «А что, если так …?».

ПОВТОРЯЕМ ЭВРИСТИКИ

Опр. **Выделение целой части дроби** – эвристический прием отыскания конкретных способов решения целого ряда задач, условия которых содержат дробно-рациональные выражения.

Пример 1. Постройте график функции $y = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{x - 3}$.

Решение.

Если *выделить целую часть дроби*, то задача сводится к построению графика линейной функции $y = -2x + 3$ при $x \neq 3$.

Опр. **Выражение одной переменной через другую** – эвристический прием, в котором одно из неизвестных в заданном выражении принимается в качестве параметра, а все последующие рассуждения проводятся относительно другого (других) неизвестного или параметра. Используется для решения многих алгебраических задач: решение диофантовых уравнений, нахождение наибольших и наименьших значений функций, решение уравнений с параметрами, решение систем уравнений, исследование функций и т. п.

Пример 2. Найдите значение дроби

$$A = \frac{(3b - a)(2a + 5b)(3a - 4b)}{(a + 2b)(4a - b)(7a - 2b)}, \text{ если } 2a^2 + 2b^2 = 5ab,\ b > a > 0.$$

Решение.

По условию $2b^2 - 5ab + 2a^2 = 0$. Считая в этом уравнении a параметром, решим его как квадратное относительно b, т. е. *выразим переменную b через переменную a*. Получим $b_1 = 2a$, $b_2 = 0{,}5a$. Однако, учитывая, что $b>a>0$, окончательно получаем, что b может быть равно только $2a$. Следовательно, значение данной дроби равно –10.

При решении простых задач часто удается сразу выразить искомую величину – с помощью какой-нибудь известной формулы – через заданные величины. В более сложных случаях мы выражаем искомую величину через какие-то промежуточные неизвестные величины, а эти неизвестные – через другие неизвестные; и так далее – до тех пор, пока не сумеем выразить искомую величину через величины, заданные в условии задачи.

Более общий подход – состоит в следующем: если нам не удается выразить искомую величину через данные величины, то мы пытаемся составить несколько уравнений, которые связывают искомую величину, данные величины и какие-то вспомогательные, ненужные для окончательного решения задачи, неизвестные. После исключения всех вспомогательных неизвестных обычно получаем уравнение, из которого находим искомую величину.

В некоторых случаях целесообразно выразить не саму переменную, а какую-либо ее степень, или даже целое выражение, представляющее собой некий одночлен. Например, чтобы найти все целочисленные решения уравнения $2x^2y^2+y^2-6x^2-12=0$, удобно выразить $2x^2$ через y^2.

Опр. **Инверсия** – эвристический прием перестановки или расположения членов выражения в особом порядке, нарушающем заданный так называемый прямой порядок, с целью получения нового выражения, тождественно равного данному, и более удобного для выполнения последующих преобразований. Этот прием лежит в основе различного рода группировок, используемых для разложения многочленов на множители, вычисления значений числовых выражений, доказательства неравенств и т. д.

Пример 3. Найдите при x=0,61 значение функции

$$f(x)=x^4+0{,}39x^3-0{,}61x^2+2x-0{,}22.$$

Решение.

Если в выражении, стоящем в правой части формулы, *расположем его члены следующим образом* $(((x+0{,}39)x-0{,}61)x+2)x-0{,}22$, то процесс вычисления значения функции при x = 0,61 можно провести уже устно.

Опр. **Симметрия** – эвристический прием выделения некоторого фактора, обладающего свойством симметрии, будь то расположение множества решений уравнения, расположение коэффициентов многочлена и т. д.

Пример 4. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}|x|=\frac{1}{4}(|x-2|+|x+2|)$.

Решение.

Каждая из функций, входящая в уравнение $\log_{\frac{1}{2}}|x|$, $|x-2|+|x+2|$, четная. Поэтому *в силу симметрии* достаточно найти только положительные корни этого уравнения. Корни будем искать на интервалах: $(0,2]$, $(2,+\infty)$.

1) $x \in (0,2] \Rightarrow |x| = x;\ |x-2| = -x+2;\ |x+2| = x+2$.

Поэтому можно записать, что $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}(-x+2+x+2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1$. Откуда $x = \frac{1}{2}$.

2) $x \in (2,+\infty) \Rightarrow |x| = x;\ |x-2| + |x+2| = x-2+x+2 = 2x$.

Уравнение приобретет вид: $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}x$.

Это уравнение решений не имеет потому, что правая часть приобретает положительные значения, а левая – отрицательные, если $x \in (2,+\infty)$. Поэтому, решениями уравнения являются $x = \pm\frac{1}{2}$.

Опр. **Метод малых изменений** – эвристический прием, предполагающий последовательное сведение заданного в условии задачи объекта к требуемому за счет построения цепочки моделей. Каждая из этих моделей получается в результате незначительной, т. е. сохраняющей основные качественные характеристики самого объекта, деформации одного из его компонентов или предыдущей модели.

Пример 5. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \ldots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}.$$

Решение.

Будем *последовательно преобразовывать выражение, заданное в левой части неравенства, за счет построения цепочки моделей*:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \ldots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} + \ldots + \frac{1}{2000} = \frac{1}{2000} \cdot 1000 = \frac{1}{2}.$$

Опр. ***Разбиение «целого на части»*** – эвристический прием нахождения «сопоставляющих» данного объекта (выражений, фигур), рассмотрение которых облегчает решение.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{3x}{(x+1)(2x+4)(3x+1)} + \ldots + \frac{1989}{(x+1)(2x+4)\ldots(1989x+1)} > 1.$$

Решение.

Если *каждое слагаемое выражения, стоящего в левой части неравенства, «разобьем на части», т. е. представим в виде разности двух слагаемых*:

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1};\frac{2x}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)};$$

$$\frac{3x}{(x+1)(2x+4)(3x+1)}=\frac{1}{(x+1)(2x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)(3x+1)};$$

$$\frac{1989}{(x+1)(2x+4)...(1989x+1)}=\frac{1}{(x+1)...(1989x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+)...(1989x+1)},$$

то задача будет иметь весьма простое решение.

Опр. ***Реконструкция «целого по части»*** – эвристический прием восстановления того или иного выражения по какой-либо его части. В алгебраических задачах этот прием чаще всего принимает вид «дополнения до полного квадрата (куба)», однако существуют и другие формы его применения. В геометрии эвристические приемы разбиение «целого на части» и реконструкция «целого по части», как правило, не различаются, они объединены в одну эвристику, называемую «приемом дополнительных построений».

Пример 7. Докажите неравенство $x^2-3x+y^2+3>0$.

Решение.

Реконструируем «целое по части» выделив полный квадрат двучлена $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ и приведя подобные слагаемые. Получим неравенство $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+\frac{3}{4}>0$ равносильное исходному. Справедливость этого неравенства легко устанавливается.

Опр. **Рассмотрение частных случаев** – эвристический прием планомерного рассмотрения некоторой совокупности упрощенных моделей решения задачи для поиска решения исходной задачи.

Пример 8. При каких значениях *a* неравенство $x^3-x^2-ax+1\geq 0$ выполняется при любом $x\geq 0$?

Решение.

Проведем исследование возможных значений параметра *a* при некоторых фиксированных значениях *x*, выбранных из промежутка $(0,\infty)$. *Рассмотрим частные случаи*: *x*=0,5; 1; 2; 3. Если *x*=0,5, то $a\leq 1\frac{3}{4}$. Если *x*=1, то $a\leq 1$. Если *x*=2, то $a\leq 2{,}5$. Если *x*=3, то $a\leq 6\frac{1}{3}$.

Очевидно, что искомые значения a не должны превышать 1. Проверим, является ли $a \le 1$ искомой областью значений, т. е. если $a \le 1$, то данное неравенство выполняется при любом $x \ge 0$.

Используя эвристики разбиения «целого на части» и инверсию, представим левую часть данного неравенства в виде $(x-1)^2(x+1)+(1-a)x$, следовательно, при $a \le 1$ неравенство будет справедливо при любом $x \ge 0$. Итак, $a \le 1$.

Опр. **Рассмотрение крайних случаев** – эвристический прием рассмотрения поведения исследуемого объекта в крайних или предельных случаях, исходя из наибольших и наименьших значений, с целью выяснения области поиска решения задачи.

Пример 9. Изобразите на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\left(x^2+2x+4\right)\left(y^2-6y+11\right)=6.$$

Решение.

Рассмотрим крайние (предельные) значения заданных трехчленов. Трехчлен x^2+2x+4 принимает наименьшее значение, равное 3, при $x=-1$, а трехчлен $y^2-6y+11$ принимает наименьшее значение, равное 2 при $y=3$. Значит, все выражения, стоящие в левой части данного уравнения, принимают наименьшее значение, равное $2\cdot 3=6$. Поэтому, искомому множеству принадлежит только одна точка (-1;3).

Как при поиске математической закономерности, так и при поиске способа доказательства теоремы или решения задачи часто оказывается очень полезным ***рассмотрение предельного случая***. Его рассмотрение полезно при выяснении правдоподобия того или иного готового результата, а также для построения опровержения.

Пример 10. Ученику было предложено вычислить площадь *S* вписанного четырехугольника *ABCD*, если известны его стороны *a, b, c, d*. После некоторых кропотливых выкладок он получил формулу: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (1), где p – полупериметр. Верна ли такая формула?

Решение.

Будем *непрерывно деформировать четырехугольник*, чтобы сторона *a* стягивалась в точку, при этом будет непрерывно изменяться площадь четырехугольника. В пределе, когда *a* стремится к 0 (точка *A* неограниченно приближается к точке *D*), четырехугольник *ABCD* деформируется в треугольник BCD, тогда по формуле (1) получаем для площади этого треугольника $S=\sqrt{p^2(p-b)(p-c)}$ (2). С другой стороны, формула Герона для треугольника BCD даёт $S=\sqrt{p(p-d)(p-b)(p-c)}$ (3).

Так как, очевидно, $p \neq p-d$, то ответ, полученный по формуле (2), отличен от значения площади, даваемой формулой Герона (3). Итак, формула (2) ошибочна. Это указывает на то, что и формула (1) ошибочна или, во всяком случае, весьма сомнительна[1]. Сделав, такой вывод, мы должны, естественно, заново пересмотреть свое решение и выявить в нем ошибку.

Эвристику «рассмотрение крайних случаев» А. Розенталь [8, С.57] называет ***правилом «крайнего»***, которое может быть выражено словами «Рассмотрите крайнее!». Это правило является попросту рекомендацией рассмотреть объект, обладающий какими-либо «крайними», или, как говорят математически, экстремальными свойствами. Если речь в задаче идет о множестве точек на прямой, то правило «крайнего» советует сосредоточить свое внимание на самой крайней точке множества (самой левой или самой правой). Если в задаче фигурирует какой-либо набор чисел, то правило «крайнего» рекомендует рассмотреть наибольшее и наименьшее из этих чисел.

Пример 11. На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.

Решение.

Предположим, что множество M конечно. Применим правило «крайнего»: если множество M – конечное, то среди его точек есть крайние – самая левая и самая правая. Рассмотрим одну из них, например, самую левую; обозначим ее буквой A. Точка A – крайняя и потому не может лежать внутри отрезка, соединяющего две другие точки множества M; значит, она не принадлежит M. Полученное противоречие и доказывает, что множество M не может быть конечным.

Приведем еще одно решение этой задачи, использующее правило «крайнего». Допустим снова, что множество M конечно, и рассмотрим длины отрезков, соединяющих точки из M. Этот набор чисел конечен. Применим к нему наше правило в форме «Рассмотри наибольшее!» – рассмотрим отрезок BC наибольшей длины. Ясно, что вне отрезка BC нет точек из M, иначе существовали бы отрезки с большими длинами. Таким образом, все точки множества M лежат на отрезке BC и, значит, ни B, ни C не удовлетворяют условию, то есть не принадлежат множеству M. Получили противоречие.

[1] В действительности для площади вписанного четырехугольника имеет место формула Брамагупты $S=\sqrt{(p-a)\ p-b\ \ p-c\ \ p-d}$.

Правильный ответ к задаче можно иногда получить, рассмотрев сначала другую, вспомогательную задачу, которая получается, если в данной задаче какие-либо фигуры заменить их предельными положениями (выбор предельных положений зависит от нас). Так, например, если в задаче говорится о равнобедренном треугольнике $ACB\,(AC = CB)$ с высотой CC_1, то удаляя неограниченно вершину C от основания AB вдоль прямой CC_1, получим в пределе полосу, ограниченную отрезком AB и двумя лучами, перпендикулярными этому отрезку. Далее пользуемся следующими соображениями: правдоподобно, что вывод верный в предельном случае, верен и в случаях, близких к предельным. Это позволяет получить правдоподобный ответ к исходной задаче (который, строго говоря, требует еще надлежащего формального обоснования). Нередко оказывается, что к задаче, возникающей в предельном случае, можно свести решение исходной задачи.

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКИ

Выделение целой части дроби

Задача 1. Найдите все целые x, при которых функция $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x + 2}$ принимала бы целые значения.

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 2. Найдите значение выражения $\dfrac{7x^2 - 6xy - y^2 + 4}{x - y}$ при x=6, y=129.

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 3. Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{x^2-3x+3}{1-x}$, если $x<1$.

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 4. Решите уравнение $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x^2-3}{x^2+2}=2$.

Решение.

Ответ: ______________.

Выражение одной переменной через другую

Задача 5. Решите уравнение:

$$a^2-2\left(x^2-5x-1\right)a+x^4+12x^2+12x=0.$$

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2{,}5\lg^2 a^2 \end{cases} \text{ при } a > 0.$$

Решение.

Ответ: ______________.

Инверсия

Задача 7. Упростите выражение

$$0{,}57y + 42{,}39y + 49{,}43y + 0{,}62y + 8{,}61y.$$

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 8. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 9. Постройте график уравнения $y^2 - xy - x^2y + x^3 = 0$.

Решение.

Ответ: _______________.

Метод малых изменений

Задача 10. Какое из чисел больше: 63^5 или 8^{10}?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 11. Верны ли неравенства: *а*) $31^{11}<17^{14}$; *б*) $16^{12}<63^7$?

Решение.

Ответ: _______________.

Разбиение «целого на части»

Задача 12. Найдите значение многочлена $x^4+2x^3+x^2-4$ при условии, что $x^3+x-2=0$.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 13. Упростите выражение

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}.$$

Решение.

Ответ: _______________.

Реконструкция «целого по части»

Задача 14. Решите уравнение $x^2+6x+9+y^2=0$.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 15. Докажите, что при любых x и y выражение $x^2-2xy+6y^2-14x-6y+72=0$ принимает наименьшее значение.

Решение.

Ответ: _______________.

Рассмотрение частных случаев

Задача 16. Докажите, что для произвольного a, $1<a<2$, площадь фигуры, ограниченная графиками функций $y=1-|x-1|$ и $y=|2x-a|$, меньше 1/3.

Решение.

Ответ: _______________.

Рассмотрение крайних случаев

Задача 17. Дана окружность радиуса R (рис.1). Из точки A, лежащей вне окружности и отстоящей от центра O на расстоянии a, проведена секущая. Точки B и C ее пересечения с окружностью соединим с центром O. Найдите $tg\frac{y}{2}tg\frac{\beta}{2}$, если $\angle COA = y$, $\angle BOA = \beta$.

Решение.

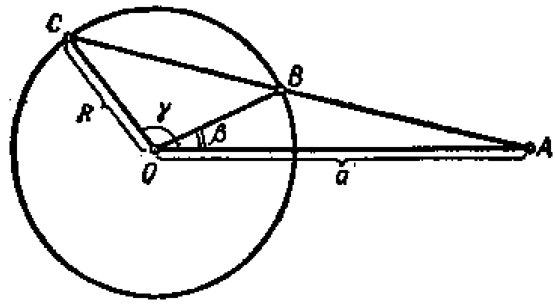


Рис. 1

Ответ: ______________.

Задача 18. На плоскости задано некоторое множество точек *M* такое, что каждая точка из *M* является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества *M*. Докажите, что множество *M* содержит бесконечно много точек

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 19. На плоскости заданы *n* точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три данные точки, не содержащая внутри ни одной из данных точек.

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 20. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного тетраэдра до его граней есть величина постоянная.

Решение.

Ответ: ______________.

ДИАГНОСТИРУЕМ СЕБЯ

Решите предложенные задачи и для каждой укажите эвристические приемы, используемые для поиска их решения.

1. Зная, что $\frac{a+b}{b}=7$, найдите значения выражения $\frac{a^2-b^2}{b^2}$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4. \end{cases}$

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

3. Вычислите сумму наиболее рациональным способом

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2+101^2-2^2-4^2-\ldots-98^2-100^2.$$

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

4. Докажите неравенство $x^8-x^5+x^2-x+1>0$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

5. Сравните 26^9 и 120^6.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

6. Разложите на множители многочлен $x^3 + 3x^2 + 7x + 5$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

7. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения $9x^2 - 24x + 63$ – положительное число.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

8. Рассмотрев предельный случай, испытайте на правдоподобие формулу $S = \sqrt{p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)(p-a_5)}$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристический приём: ____________________________________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Рефлексивная визитка»

ФИО	
Класс	
О себе	
Мои ожидания от эвристического факультатива	
Что понравилось на занятии	
Что не понравилось на занятии	

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Идея, примененная однажды, порождает искусственный прием; примененная дважды, она становится методом.

Дж. Пойа

Занятие 2
ИСКУССТВО ОБОЗНАЧЕНИЯ

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

Опр. **Введение вспомогательной неизвестной** – эвристический прием замены одной или нескольких переменных (выражений) выражениями, имеющими ту же область значений. Используется в алгебре для формоизменения текста задачи.

Пример 1. Решите уравнение $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3.$

Решение.

Введем вспомогательную неизвестную $y = \sin^2 x$. Тогда $1 - y = \cos^2 x$.

В результате уравнение приобретает вид $2^y + 2^{1-y} = 3.$ А это уравнение уже является стандартным.

В зависимости от того, как меняется число переменных в исходном выражении при таких подстановках, выделяют три типа замены переменных:

1) подстановки, ведущие к сокращению числа переменных;

2) подстановки, сохраняющие число переменных;

3) подстановки, увеличивающие число переменных.

Пример 2. Решите систему смешанного типа $\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}, \\ x^2+3y-5z+25=0, \\ -x^2+\dfrac{z}{2}+\dfrac{15}{2}+4x-8<0. \end{cases}$

Решение.

Введем вспомогательную неизвестную t:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{4}=t.$$

Выразим: $z=4t+1, y=3t-3,\ x=t+2$. Из второго уравнения получим:

$$(t+2)^2+9t-9-20t-5-25=0,\ t^2+4t+1+9t-9-20t-5+25=0,$$

$$t^2-7t+6=0, D=49-48=1\Rightarrow\sqrt{D}=1,\ t_1=\frac{7+1}{2}=4;\ \mathrm{t}_2=\frac{7-1}{2}=3.$$

Из третьего неравенства получим:

$$x^2-\frac{z}{2}-\frac{7}{2}-4t-8+8>0,\ (t+2)^2-\frac{1}{2}(4t+1)-\frac{15}{2}-4t>0,$$

$$t^2+4t+4-2t-\frac{1}{2}-\frac{15}{2}+4t>0,\ t^2-2t-3>0,\ t_1=3;\ t_2=-1.$$

Решением последнего неравенства является $t\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. Учитывая третье неравенство, получим, что $t=3$ не входит в промежуток $t\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$, нам подходит $t=4$.

$$t=4\Rightarrow z=4t+1\Rightarrow 4*4+1=17,\ t=4\Rightarrow y=3t-3\Rightarrow 3*4-3=9,$$

$$t=4\Rightarrow x=t+2\Rightarrow 4+2=6.$$

Ответ: (6; 9; 17).

Пример 3. Решите уравнение $\dfrac{(34-x)\cdot\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\cdot\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$.

Решение.

ОДЗ: $\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}\neq 0$ или $x\neq\dfrac{33}{2}$. Разделив числитель и знаменатель левой части заданного уравнения на $\sqrt[3]{34-x}\neq 0$, получим

$$\frac{(34-x)\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{34-x}}-(x+1)}{1-\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{34-x}}}=30. \qquad (1)$$

<u>*Введем вспомогательную неизвестную*</u> $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{34-x}}$. Тогда

$$\frac{x+1}{34-x}=t^3,\quad x+1=34t^3-t^3x,\ x+t^3x=34t^3-1,$$

$$(1+t^3)\cdot x=34t^3-1,\ x=\frac{34t^3-1}{1+t^3};\ 34-x=34-\frac{34t^3-1}{1+t^3}=\frac{35}{1+t^3};$$

$$x+1=\frac{34t^3-1}{1+t^3}+1=\frac{35t^3}{1+t^3}.$$

Относительно переменной t уравнение (1) примет вид

$$\frac{\dfrac{35}{1+t^3}\cdot t-\dfrac{35t^3}{1+t^3}}{1-t}=30,$$

или, после упрощения,

$$6t^2-13t+6=0,\ \text{откуда}\ \ t_1=\frac{2}{3},\ t_2=\frac{3}{2}.$$

Из уравнения $x=\dfrac{34t^3-1}{1+t^3}$ найдем $x_1=7,\ x_2=26.$

Ответ: $x_1=7,\ x_2=26.$

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}-\sin x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}+\sin x}=1.$

Решение.

<u>*Введем вспомогательные неизвестные*</u>*:*

$$\begin{cases}\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}-\sin x}=y,\\ \sqrt[5]{\dfrac{1}{2}+\sin x}=z,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{2}-\sin x=y^5,\\ \dfrac{1}{2}+\sin x=z^5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=1,\\ y^5+z^5=1.\end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет вид

$$(y+z)(y^4-y^3z+y^2z^2-yz^3+z^4)=1,(y+z)((y^4+z^4)-yz(y^2+z^2)+y^2z^2)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y+z)(((y+z)^2-2yz)^2-2y^2z^2-yz((y+z)^2-2yz)+y^2z^2)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y+z=1),$$

$$(1-2yz)^2-y^2z^2-yz(1-2yz)=1\Leftrightarrow 5y^2z^2-5yz=0,yz(yz-1)=0.$$

Отсюда или $yz=0,$ или $yz=1.$

Имеем два случая: 1) $\begin{cases}y+z=1,\\ yz=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y+z=1,\\ yz=1.\end{cases}$

Из первой системы получаем $\begin{cases} y_1 = 0, \\ z_1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y_2 = 1, \\ z_2 = 0. \end{cases}$

Вторая система не имеет решений ($D < 0$). Тогда $\sin x = z^5 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Таким образом $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\ k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\ k \in Z$.

На первый взгляд может показаться, что указанные типы рассматриваемого приема лишь отдаленно, а точнее, формально, характеризуют своеобразие этой эвристики, поскольку в реальном процессе решающий задачу редко задумывается над тем, как в количественном отношении меняется заданный комплекс переменных. Более важным, с его точки зрения, является, то, насколько выбранный путь быстрее приближает к требуемому результату.

Однако, эти виды замены переменной целесообразно различать. И вот по каким причинам. Сама идея введения вспомогательной неизвестной возникает в том случае, когда усматривается возможность представления задачи в более обозримой или более «знакомой» форме.

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

Вспомогательные вещества – это дополнительные вещества, необходимые, например, для приготовления лекарственного препарата. Эти вещества могут в значительной степени влиять на фармакологическую активность лекарственных веществ: усиливать действие лекарственных веществ или снижать их активность, изменять характер действия под влиянием разных причин, а именно комплексообразования, молекулярных реакций, интерференции и др.

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6,\\ \sqrt{x+y}-y+x=2.\end{cases}$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 2. При каких значениях параметра a неравенство $a\cos^2 x+2(a-2)|\cos x|+1>0$ выполняется при всех действительных x?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 3. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 4. Решите уравнение $tgx+ctgx+tg^2x+ctg^2x+tg^3x+ctg^3x=6.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 5. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{2-x}+\sqrt{5-y}=3,\\ 5x+2y-xy=6.\end{cases}$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 6. Решите уравнение $12\cos^{-2} x+\frac{1}{3}ctg^2 x+10(2tgx+\frac{ctgx}{3})=1.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 7. Докажите, что $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ делится на $5(x-y)(y-z)(z-x)$ где $x,y,z\in Z$ и попарно разные.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 8. Решите уравнение $\sqrt{x+5}=x^2-5.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 9. Решите уравнение $\sqrt{17-x^2}=(3-\sqrt{x})^2$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 10. Решите уравнение $x^3+\frac{1}{x^3}+x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=6$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 11. Решите уравнение $x^3+3x-18+\sqrt{x^2+3x-6}=0.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 12. Решите уравнение $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{8+x}=3.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 13. Решите уравнение $4\cos(x-\frac{\pi}{3})=3\cos 3x.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 14. Решите уравнение $\sqrt[4]{\frac{1}{2}-\cos 2x}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\cos 2x}=1.$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 15. Решите уравнение

$$\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 16. Найдите все значения параметра m, при которых уравнение $\cos^2 3x+\left(2m^2-3{,}5\right)\cos 3x+m^2-2=0$ имеет ровно пять корней на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 17. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} y\ge |x-a|+a^2-4a+2, \\ y\le -|x-a|-a^2+8a, \end{cases}$$

При каких значениях a эта площадь является наибольшей?

Решение.

Ответ: _______________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Рефлексивные весы». На чаше весов «Я сумел» (рис. 2) напишите все, что у Вас получилось на занятии, каких успехов достигли. На чаше весов «У меня не вышло» напишите, с чем у Вас возникли трудности, что не вышло на занятии. После этого покажите стрелочкой, какая чаша весов перевесила.

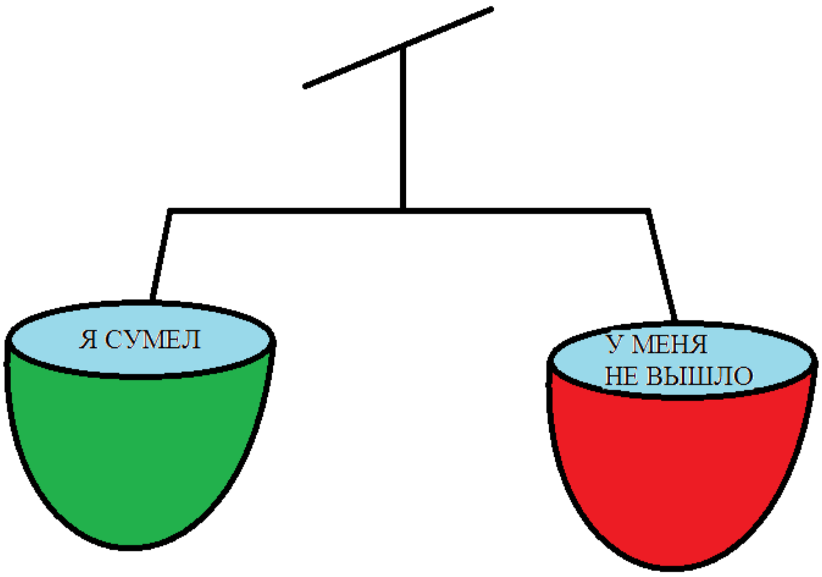


Рис. 2

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли в голову другим.

Б. Паскаль

Занятие 3
ИДЕЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

Опр. **Введение вспомогательного элемента** – эвристический прием решения геометрических задач с помощью введения дополнительных элементов (длин, площадей, объемов, углов), непосредственно не заданных в условии задачи. С их помощью составляется уравнение, где неизвестным будет искомый элемент или элемент, с помощью которого легко найдется искомый, или соотношение, требуемое условием задачи.

Разновидности эвристического приема

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

В планиметрических задачах линейный элемент или отношение линейных элементов удобно ввести, если рассматриваемые фигуры подобны. Тогда с помощью пропорций или вспомогательных геометрических построений составляется уравнение, в котором введенный элемент как член уравнения сокращается, а найти искомый не представляет большого труда.

Вспомогательный отрезок рекомендуется вводить, если в условии задачи не даны линейные элементы и требуется найти зависимость между углами [7].

Пример 1. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

Решение.

По условию ортоцентр H треугольника ABC ($AB=AC$) должен находиться внутри треугольника, поэтому $\angle A<90°$ (рис. 3). <u>*Введем вспомогательный элемент а – длину отрезка*</u> BD, обозначим $\angle ABC$ через

x, центр вписанной окружности – через O. Тогда $\angle HDC = \frac{\pi}{2} - x$,

$$HD = a \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a \cdot ctgx = 2OD,\ OD = a \cdot tg\frac{x}{2},$$

откуда $ctgx = 2tg\frac{x}{2},\ tg^2\frac{x}{2} = \frac{1}{5},\ \cos x = \frac{2}{3}.$

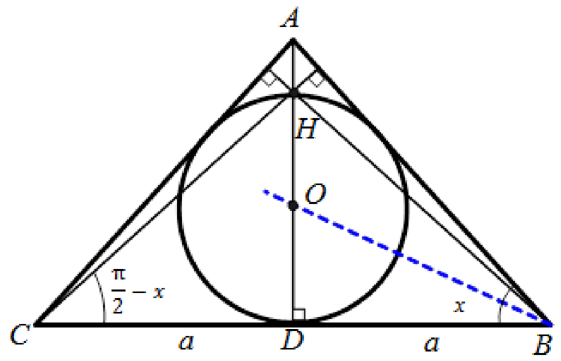


Рис. 3

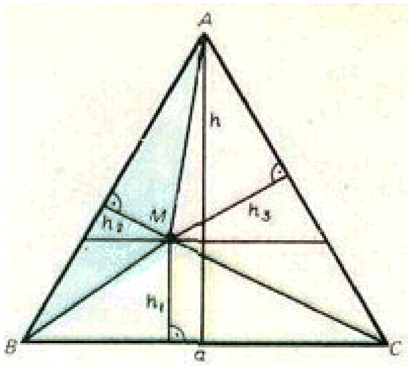


Рис. 4

Особенно большое значение имеет введение вспомогательного элемента для нахождения отношений различных геометрических величин.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ – ПЛОЩАДЬ ИЛИ ОБЪЕМ

Введение площади и объема в качестве вспомогательного элемента аналогично введению линейного элемента. Сравнивая площади и объемы отдельных частей фигуры, можно получить или уравнение относительно неизвестных задачи, или необходимое соотношение. Лучше находить те площади и объемы, сумма (разность) которых дает площадь заданной фигуры, а также отношение площадей тех фигур, у которых линейные элементы – либо искомые, либо являются компонентами необходимого соотношения [7].

***Пример* 2.** Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка M. Докажите, что расстояние от точки M до основания треугольника есть среднее арифметическое расстояний от точки M до боковых сторон треугольника.

Решение.

Пусть h_1, h_2, h_3 – расстояния от точки M до сторон треугольника BC, AB, AC соответственно (см. рис. 4). *Введем вспомогательный элемент – площадь*. Ясно, что $S_{\Delta AMB} + S_{\Delta CMB} + S_{\Delta AMC} = S_{\Delta ABC}$ или $ah_1 + ah_2 + ah_3 = ah$, где a – сторона треугольника ABC, h – его высота. Итак, $h = h_1 + h_2 + h_3$, но $h_1 = \frac{h}{3}$, поэтому $h_2 + h_3 = h - h_1 = (2/3)h = 2h_1$, $h_1 = \frac{h_2 + h_3}{2}$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ – УГОЛ

Если искомые или заданные элементы удобно выразить с помощью тригонометрических функций, то вводится вспомогательный угол. Затем с помощью теоремы синусов или косинусов для треугольников находятся компоненты для записи некоторого условия в виде уравнения [7].

Пример 3. Через центр правильного треугольника в плоскости этого треугольника проведена произвольная прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

Решение.

Пусть точка O – центр треугольника ABC (рис. 5). Точки D, E, F – соответственно проекции вершин A, B, C на прямую l, R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Введем вспомогательный элемент – угол φ, обозначив им $\angle BOE$. Тогда $\angle AOD = \angle AOB - \angle BOD = \varphi - \frac{\pi}{3}$.

$$\angle COE = \frac{2\pi}{3} - \varphi,\ BE = R\sin\varphi,\ AD = R\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$CF = R\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = R\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = R^2\left[\sin^2\varphi + \sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{2}R^2.$$

Проверьте самостоятельно, что сумма в квадратных скобках равна 3/2.

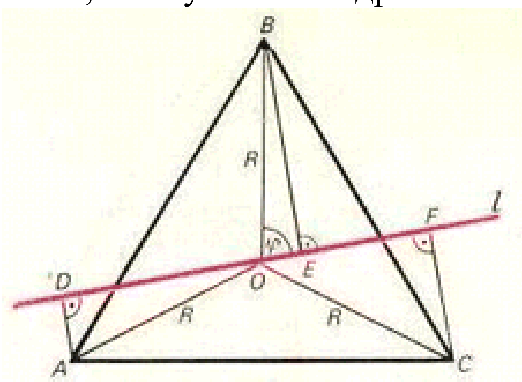


Рис. 5

Если в условии задачи упоминаются окружность и касательная, надо провести радиус в точку касания. Если дан угол наклона ребра пирамиды к основанию, следует построить высоту пирамиды и проекцию ее ребра на основание. Точки, симметричные относительно прямой, полезно соединить отрезком и т. д. Возможно, эти построения облегчат поиск. Если в условии нет никакой зацепки, идея может появиться в ходе решения.

В рассмотренных задачах, построив чертеж по условию, мы проводили дополнительно вспомогательные построения. Но встречаются задачи, по условию которых можно сделать различные чертежи. Меняя чертеж, мы можем уточнить или изменить постановку задачи.

Пример 4. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки равностороннего треугольника до его сторон постоянна.

Решение.

Пусть треугольник ABC – равносторонний (рис. 6, *а*), точка M лежит внутри треугольника, MD, ME, MH – ее расстояния до сторон треугольника. Нужно доказать, что сумма $MD + ME + MH$ постоянна.

1). В задаче сказано: «от любой внутренней точки». Что же это означает? Это означает, что точка M может «путешествовать» внутри треугольника и при этом сумма ее расстояний до сторон не изменится. Если, конечно, справедливо утверждение задачи.

2). Но вот точка M подходит к точке H. Подходит с опаской: ведь точка H не внутренняя, а граничная. Однако в то время, когда точка M подходит к точке H как угодно близко, сумма расстояний от нее до сторон треугольника должна сохраняться. Значит, и для точки H, видимо, эта сумма будет той же самой. Возможно, этот вывод справедлив для каждой точки отрезка BC.

Для точки H задачу решать легче, чем для точки M: надо найти и сложить только две длины (HE и HD), а третье расстояние равно нулю (рис. 6, *б*). Но это другая задача – точка H не внутренняя.

3). Пусть теперь точка M направилась прямо к точке B. Рассмотрим сумму расстояний точки B от сторон треугольника (рис. 6, *в*). Она равна h – высоте треугольника, так как расстояния точки от B до сторон AB и BC равны нулю.

4). Вернемся к точке H. Как решить задачу в этом случае? Нельзя ли использовать предыдущий результат? Но для этого точка H должна быть вершиной треугольника. Проведем через нее прямую HK параллельно AC (рис. 6, *г*). Мы получим треугольник BHK. Он равносторонний. В нем HE является высотой, и она равна высоте BO, проведенной из вершины B (в равностороннем треугольнике все высоты равны). Итак, $HE + HD = h$.

5). Рассмотрим теперь M – произвольную внутреннюю точку треугольника (рис. 6, *д*). Как использовать предыдущий результат (точка H лежала на стороне треугольника)? Проведем через точку M прямую PT параллельно AC. Теперь M лежит на стороне треугольника PTB. Значит, сумма ее расстояний до сторон треугольника PTB равна высоте этого треугольника. Прибавив к ней еще MD, получим опять высоту h треугольника ABC. Какой вывод можно сделать из решения?

Почему мы занялись точкой H? Эта задача проще: точка H расположена на стороне треугольника. «Путешествуя» вместе с точкой M, мы дважды меняли задачу, и, соответственно, менялся чертеж, чтобы решить сначала более простую задачу.

В ходе решения сделаны два вспомогательных построения (прямые HK и PT). Оба построения были продиктованы необходимостью использовать полученный нами предыдущий результат.

И еще один вывод: оказалось, что мы решили более общую задачу – сумма расстояний постоянна не только для внутренних точек, но и для всех точек треугольника. А если бы задача так и была сначала поставлена? Тогда мы не стали бы двигать точку M , а сразу разделили задачу на части (в вершине, на стороне, внутри).

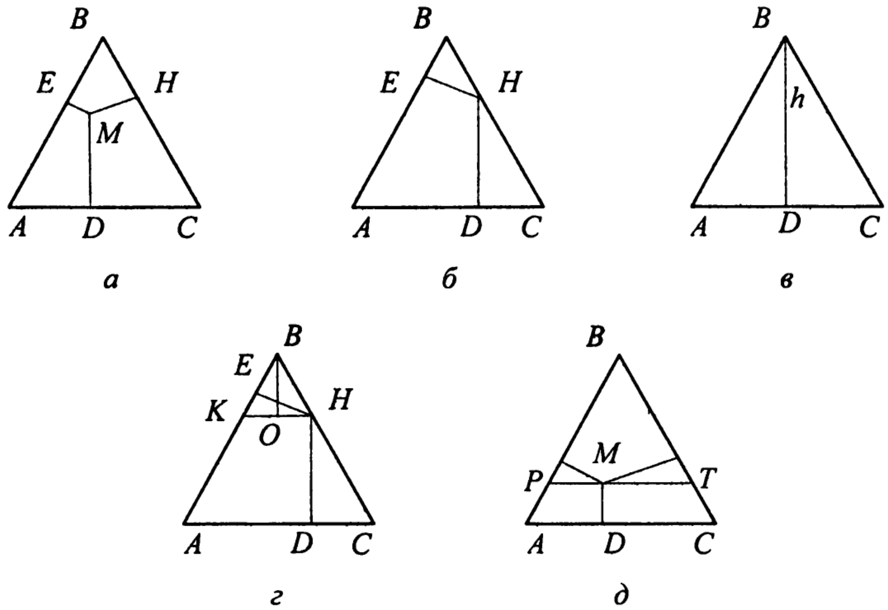


Рис. 6

И последнее: зная формулу площади треугольника, можно решить задачу, не двигая точку M [10, С.48-50].

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

Вспомогательные постройки – постройки, возводившиеся, например, для усиления долговременных (и временных) фронтов в фортах и оградах. В военном деле термин «вспомогательные постройки» используется как располагавшиеся впереди линии огня главного вала (внешние постройки) и в тылу (внутренние постройки).

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют треугольник на шесть частей, из которых три – треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 2. Большее основание правильной усеченной четырехугольной пирамиды образует с боковой гранью угол α, а с плоскостью, проходящей через противолежащие стороны верхнего и нижнего основания, – угол β. Найдите отношения площадей оснований.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 3. Дан четырехугольник $ABCD$, описанный около круга. Докажите, что квадраты расстояний от центра окружности до противоположных вершин относятся, как произведения сторон, сходящихся в этих вершинах.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 4. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны a, b, c. Высота пирамиды, опущенная из вершины на основание, равно h. Докажите, что $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 5. Докажите, что объём пирамиды, описанной около шара, вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot r$, где r – радиус шара, вписанного в пирамиду, S – полная поверхность пирамиды.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 6. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной a. Через диагональ AC нижнего основания $ABCD$ проведена плоскость пересекающая верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$. В трехгранные углы B и D_1 вписаны шары, касающийся этой плоскости и имеющие радиусы $r=\frac{a}{5}$, $R=\frac{a}{4}$. Найдите высоту параллелепипеда.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 7. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, угол между боковыми гранями равен φ. Найдите сторону основания.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 8. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D и стороны BC в точке E. Найдите углы треугольника, если $\frac{BD}{AD}=\frac{1}{2}$, $\frac{BE}{CE}=\frac{1}{3}$.

Решение (*указание:* BD – вспомогательный отрезок).

Ответ: _______________.

Задача 9. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E лежит на середине ребра AB. Найдите угол между отрезками MN и DE.

Решение (*указание:* ребро тетраэдра – вспомогательный отрезок).

Ответ: ________________.

Задача 10. В трапеции, основания которой равны a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 11. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE:EC=a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD:DB=b$. Проведены отрезки CD и BE. Найдите отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.

Решение (*указание:* опустите перпендикуляры из точек A, E и B, на CD, затем найдите, в каком отношении делятся BE и CD. Вспомогательный элемент – площадь).

Ответ: ________________.

Задача 12. В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны c. Основание ее – прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определите радиус описанного шара.

Решение (*указание:* вспомогательный элемент – площадь).

Ответ: ________________.

Задача 13. На окружности радиуса R даны две точки A и B, расстояние между которыми равно l. Какое наибольшее значение может принимать сумма $AC^2 + BC^2$, если точка C также лежит на этой окружности?

Решение (*указание:* вспомогательный элемент – угол CAB).

Ответ: ________________.

Задача 14. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α, радиус вписанного шара равен R. Найдите полную поверхность пирамиды.

Решение (*указание:* вспомогательные элемент – либо сторона основания пирамиды, либо угол при вершине пирамиды в ее сечении, проходящем через точки касания шара и двух противоположных боковых граней пирамиды).

Ответ: ________________.

Задача 15. Луч OP составляет с лучами OH и OM углы по 45°. Найдите угол между плоскостями POM и POH, если $\angle MOH = 60^\circ$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 16. Основания трапеции равны 4 и 10, а её боковые стороны – $3\sqrt{3}$ и 15. Найдите косинус наименьшего угла этой трапеции.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 17. Докажите, что когда A_1B_1 – проекция отрезка AB на прямую l, а φ – угол между AB и l, то $A_1B_1 = AB\cos\varphi$.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 18. Через вершину прямого угла C $\triangle ABC$ проведен перпендикуляр CM к плоскости треугольника (рис. 7). AC=6 *см*, BC=8 *см*, CM=6,4 *см*. Найдите расстояние: *а*) от точки M к прямой AB; *б*) от точки C к плоскости *(AMB)*.

Решение.

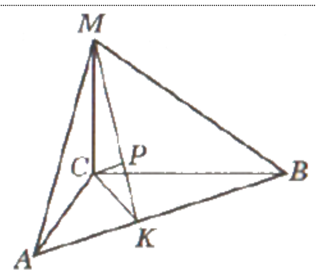


Рис. 7

Ответ: _______________.

Задача 19. Определите периметр равнобокой трапеции, у которой длина меньшего основания равна 7, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам и равны $6\sqrt{2}$.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 20. В равнобокой трапеции основание AD равно диагонали AC. Известно, что $\angle CAD = \angle CDM$, где M – середина BC. Найдите углы трапеции.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 21. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. Найдите угол φ между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен β.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 22. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит её на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найдите углы треугольника.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 23. Найдите двугранный угол α при основании правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанного около пирамиды шара втрое больше радиуса вписанного в нее шара.

Решение.

Ответ: _______________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Рефлексивная диаграмма». Горизонтальная ось разбита на «три этапа занятия», а на вертикальной оси отмечено настроение от 1 до 10. Оцените свое настроение в начале занятия, середине и в конце. После чего постройте диаграмму на рис. 8.

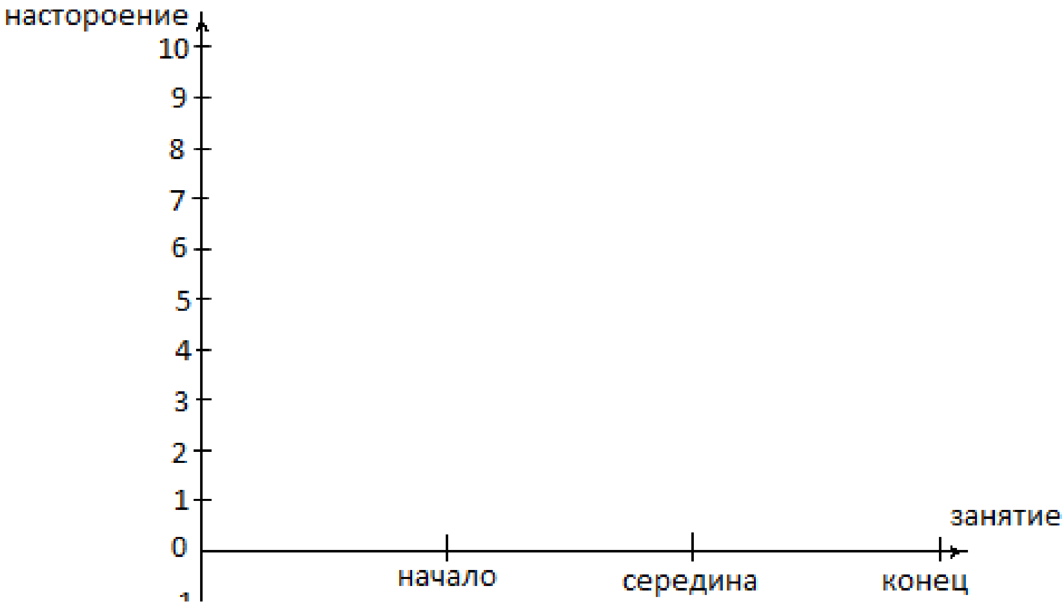


Рис. 8

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Я счёл нужным написать тебе и изложить новый метод, который позволит тебе при помощи механики находить новые математические теоремы.

Архимед

Занятие 4
ВЗГЛЯД НА ЗАДАЧУ ГЛАЗАМИ ФИЗИКА

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

Посмотрим на задачи, приводимые в этом занятии, с точки зрения физика, и это нам поможет найти правильный ответ. Вы спросите: «Неужели физик может увидеть в чисто математической задаче что-то такое, чего не видит в ней простой смертный?». Может случиться, что вас интересует прежде всего правильный ответ на тот или иной математический вопрос, правильный ответ к той или иной математической задаче, вас интересуют убедительные доводы в пользу правдоподобия такого ответа; строгое же, чисто математическое доказательство правильности ответа вас интересует меньше. Оказывается, что правильные ответы к математическим задачам часто удается найти, если связать с задачей какую-либо физическую картину, придать задаче физический смысл. Такой подход позволяет воспользоваться понятиями и хорошо известными сведениями из соответствующего раздела физики, например, из статики, геометрической оптики и п. т. Особенно плодотворным оказывается привлечение таких понятий, как центр тяжести (центр масс, барицентр) системы материальных точек, момент инерции, потенциальная энергия и др. При этом зачастую возникают очень убедительные, правдоподобные доводы, которые убеждают даже сильнее, чем строгое доказательство. Впрочем, нередко сами такие «физические соображения» могут послужить отправным пунктом и для строгого формального доказательства. Классический пример – «теорема о трех медианах треугольника». Впервые ее открыл Архимед еще в III в. до н. э., опираясь на физические соображения (чисто математическое доказательство было найдено значительно позже, через 13 веков после Архимеда, итальянцем Леонардо Пизанским (Фибоначчи)). Рассмотрим несколько замечаний [3].

Материальную точку, которая возникнет, если поместить в какой-нибудь точке A массу в m единиц (скажем, m граммов), условимся кратко обозначать так: mA. Кроме того, учтем следующие факты:

I). Каждая система материальных точек

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ \ldots,\ m_kA_k \qquad \text{(I)}$$

имеет центр тяжести, и притом единственный. Если отметить часть материальных точек из системы (1) и перенести в центр тяжести системы отмеченных точек их суммарную массу, то от этого положение центра тяжестей *всей* системы (1) не изменится.

II). Центр тяжести C двух материальных точек aA и bB (рис. 9) всегда лежит на отрезке, соединяющем эти точки, причем его положение определяется по «правилу рычага»:

$$a\cdot\overrightarrow{AC}=b\cdot\overrightarrow{CB}. \qquad \text{(II)}$$

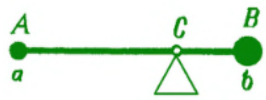


Рис. 9

Отметим еще несколько фактов из статики, которые приводятся во многих учебниках по механике и которые полезны, если мы хотим получить правдоподобные ответы на вопросы и задачи из геометрии и алгебры.

III). Если Z – центр тяжести двух материальных точек aA и bB, а O – произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}}{a+b}. \qquad \text{(III)}$$

IV). Если Z – центр тяжести трех материальных точек aA, bB, cC, а O – произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}. \qquad \text{(IV)}$$

V). Аналогично для центра тяжести Z четырех точек aA, bB, cC, dD, имеем

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}+d\cdot\overrightarrow{OD}}{a+b+c+d}. \qquad \text{(V)}$$

VI). Если на прямой Ox выбрано несколько точек с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и в них помещены соответственно массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то координату z центра тяжести этих материальных точек можно найти по формуле

$$z=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_kx_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}. \qquad \text{(VI)}$$

Теперь вернемся к «теореме о трех медианах». Архимеда интересовала такая задача.

Пример 1. При любом ли выборе треугольника ABC (рис. 10) три медианы AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку?

Решение.

Архимед получил убедительный правдоподобный ответ с помощью примерно таких рассуждений: «Помещу в каждой вершине треугольника единицу массы. Эта система из трех материальных точек имеет центр тяжести: обозначу его буквой Z. Перенесу массы из точек A и B в их центр тяжести, то есть в середину C_1 отрезка AB. Получу теперь систему из двух материальных точек ($2C_1$ и $1C$), причем ее центр тяжести – та же точка Z. Но в таком случае Z лежит на отрезке CC_1. Аналогично убеждаюсь, что Z лежит на AA_1 и на BB_1. Видим, что в треугольнике ABC три медианы AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку (а именно точку Z)». Более того, по правилу рычага имеем: $1 \cdot CZ = 2 \cdot ZC_1$, откуда $ZC_1 = \frac{1}{3} \cdot CC_1$, т. е. точка пересечения медиан отсекает от каждой медианы одну треть ее, считая от ее основания.

Для получения строгого доказательства нам необходимо либо провести рассуждение лишь с привлечением понятий и аксиом геометрии без использования понятий механики, либо же дать аккуратное, чисто математическое определение использованных в рассуждении Архимеда понятий («материальная точка», «центр тяжести двух или нескольких материальных точек») и доказать те вспомогательные факты I-III, которыми мы воспользовались. Рассмотрим еще один пример.

Пример 2. На стороне AC треугольника ABC (рис. 11) взята такая тонка M, что $AM = \frac{1}{3} AC$, а на продолжении стороны BC – такая точка D, что $BD = BC$. Пусть P – точка пересечения прямых AB и DM. В каком отношении делит точка P отрезок DM?

Решение.

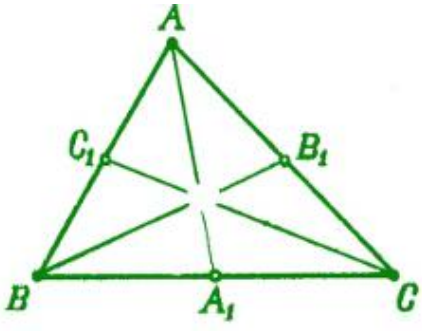


Рис. 10

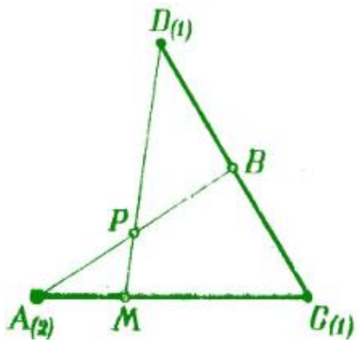


Рис. 11

Для решения этой задачи загрузим точки A, C, D такими массами, чтобы точка P оказалась их центром тяжести. Это можно сделать следующим образом: сначала поместим в точках C и A такие массы, чтобы точка M оказалась их центром тяжести. Так как $CM = 2MA$,то ясно, что достаточно в C поместить 1 грамм массы, а в A – 2 грамма. Затем поместим в D такую массу, чтобы центром тяжести возникающей при этом материальной точки и материальной точки $1C$ оказалась точка B. Нужно в D тоже поместить 1 грамм. Чем же такая загрузка поможет решить задачу? Система трех материальных точек имеет центр тяжести Z. Положение его не изменится, если мы сосредоточим массы из точек C и D в точку B. Значит, Z лежит на Отрезке AB. Но положение центра тяжести также не изменится, если мы сосредоточим массы из A и C в M (всего 3 грамма массы). Значит, точка Z лежит на DM. Итак, $AB \cap DM = Z$, то есть $Z = P$. По правилу рычага $1 \cdot DZ = 3 \cdot ZM$, т. е. $DP : PM = 3:1$.

Сопоставим несколько простых свойств медиан и высот треугольника:

- медиану треугольника можно определить как отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и делящий *площадь* треугольника пополам;
- три медианы треугольника имеют общую точку;
- высоту остроугольного треугольника можно определить как такой отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и делит *сумму углов* треугольника пополам; три таких отрезка тоже имеют общую точку.

Пример 3. Рассмотрим в треугольнике три отрезка, из которых каждый соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и делит периметр треугольника пополам («отрезки Нагеля») (рис. 12). Будут ли отрезки иметь общую точку?

Решение.

Начнем решение этой задачи следующим образом. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – три отрезка Нагеля; пусть a, b, c – длины сторон треугольника, $2p$ – его периметр. Найдём сначала длины шести отрезков, получающихся на сторонах:

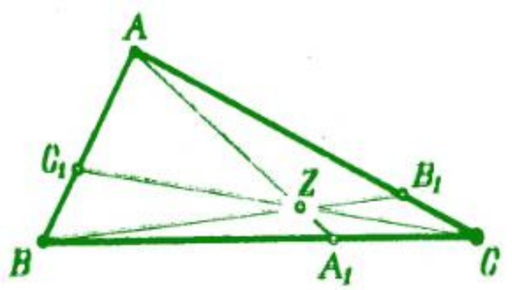


Рис. 12

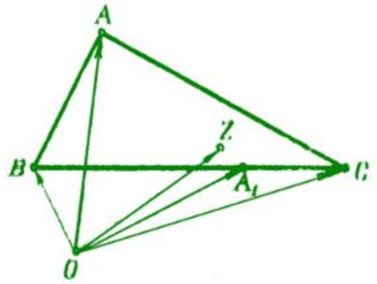
$$BA_1 = p-c,\ A_1C = p-b,\ CB_1 = p-a,\ B_1A = p-c, AC_1 = p-b,\ C_1B = p-a.$$

Затем загрузим вершины B и C такими массами, чтобы точка A_1 оказалась их центром тяжести. Так как $BA_1 : A_1C = (p-c):(p-b)$, то ясно, что достаточно в B поместить $p-b$ единиц массы, а в C поместить $p-c$ единиц. Как нужно загрузить вершины B и A, чтобы точка C_1 стала их центром тяжести? В B поместить $p-b$ единиц массы, а в A поместить $p-a$ единиц. Складывается такое впечатление, что центр тяжести Z трех материальных точек $(p-a)A,\ (p-b)B,$ и $(p-c)C$ и будет общей точкой трех отрезков Нагеля.

Сначала найдем центр тяжести двух материальных точек $(p-a)A$ и $(p-c)C$. Так как точка B_1 лежит на AC и удовлетворяет условиям $AB_1 = p-c,\ B_1C = p-a$, то ясно, что $(p-a)AB_1 = (p-c)B_1C$. Но в силу правила рычага это и означает, что B_1 – центр тяжести материальных точек $(p-a)A$ и $(p-c)C$. Если перенести массы материальных точек $(p-a)A$ и $(p-c)C$ в их центр тяжести B_1, то от этого положение центра тяжести всей системы не изменится. Но тогда система будет состоять только из двух материальных точек: $(p-b)B$ и $\left[(p-a)+(p-c)\right]B_1$ (т. е. bB_1). Значит, точка Z – на отрезке BB_1. Но аналогичными рассуждениями можно показать, что Z – на AA_1 и что Z – на CC_1. Значит, три отрезка Нагеля $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ имеют общую точку (точку Z).

Возникает вопрос: как дать строгое математическое доказательство, без использования механики, что три отрезка Нагеля пересекаются? Это можно сделать, используя таблицу 1.

Таблица 1

Что мы сказали бы вслух	*Что подумали бы про себя*
Докажем, что в $\triangle ABC$ три отрезка Нагеля $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ имеют общую точку.	В этом нет никаких сомнений, это ясно из приведенных ранее соображений механики.
Выберем произвольную точку O (рис.13) и рассмотрим точку Z, задаваемую формулой $\overrightarrow{OZ} = \dfrac{(p-a)\overrightarrow{OA} + (p-b)\overrightarrow{OB} + (p-c)\overrightarrow{OC}}{p}$ (1)  Рис. 13	Мы-то знаем, какая точка является общей точкой трех отрезков Нагеля: это центр тяжести Z материальных точек $(p-a)A,\ (p-b)B,\ (p-c)C$ (их суммарная масса равна p). А положение точки Z, как установлено в механике, определяется формулой вида (IV). Значит, для точки Z надо написать формулу (1).

Так как AA_1 – отрезок Нагеля, то для точки A_1 имеем: $BA_1 = p - c,\ A_1C = p - b,$ $(p-b)\overrightarrow{BA_1} = (p-c)\overrightarrow{A_1C},$ $(p-b)(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB}) = (p-c)(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OC}),$ $a\overrightarrow{OA_1} = (p-b)\overrightarrow{OB} + (p-c)\overrightarrow{OC}.$ (2) Из (1) и (2) получаем: $p \cdot \overrightarrow{OZ} = (p-a)\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OA_1}$ (3)	Нам заранее ясно, без всяких выкладок, что должна получиться формула (2): ведь точка A_1 – центр тяжести двух материальных точек $(p-b)B$ и $(p-c)C$, а для подобного случая имеется в механике формула (III). Зачем же мы проводили выкладки? Чтобы получить формулу (2) без ссылок на механику.
Отсюда получим, что точка Z – на отрезке AA_1. Можно (3) переписать так: $(p-a)(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ}) + a(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OZ}) = 0,$ т. е. $(p-a)\overrightarrow{ZA} = -a\overrightarrow{ZA_1}$. Отсюда видно, что векторы $\overrightarrow{ZA}$ и $\overrightarrow{ZA_1}$ коллинеарны и противоположно направлены. А это и означает, что точка Z – на отрезке AA_1. Аналогично убеждаемся, что Z – на BB_1 и CC_1. Значит, три отрезка Нагеля действительно имеют общую точку.	Совершенно очевидный факт с точки зрения механики. Да и без механики это тоже довольно ясно. Докажем «в лоб», что векторы $\overrightarrow{ZA}$ и $\overrightarrow{ZA_1}$ коллинеарны, откуда уже все, наверное, и будет вытекать.

Пример 4. На ребрах AB, AC и BD треугольной пирамиды $ABCD$ выбрали соответственно точки M, N и P так, что

$$AM = \frac{1}{2}AB,\ AN = \frac{1}{3}AC,\ BP = \frac{1}{5}BD.$$

Через M, N, P проведена плоскость α. В каком отношении делит она ребро CD?

Решение. I способ.

Загрузим вершины массами так, чтобы точки M, N, P оказались центрами тяжести материальных точек, помещенных в концах соответствующих отрезков (рис. 14).

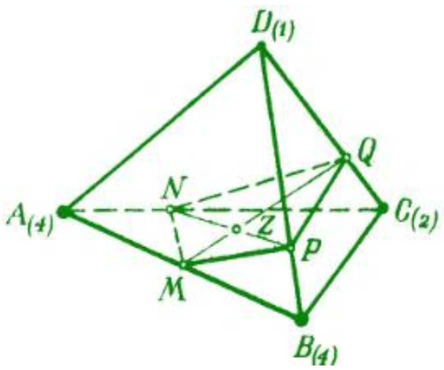


Рис. 14

Если в точке D поместить 1 единицу массы, тогда в B надо поместить 4 единицы, в A – тоже 4 единицы, а в C – 2 единицы. Система материальных точек $4A$, $4B$, $2C$, $1D$

имеет центр тяжести, обозначим его буквой Z. Складывается такое впечатление, что Z – на отрезке NP. Это можно показать заменив точки $4A$ и $2C$ материальной точкой $6N$, а точки $4B$ и $1D$ – материальной точкой $5P$. От этого положение центра тяжести всей системы не изменится. Значит, Z – на отрезке NP. С другой стороны, пусть Q – центр тяжести точек $2C$ и $1D$. Тогда ясно, что Z лежит на MQ, или – что тоже самое – точка Q лежит на прямой MZ; значит, $Q \in \alpha$; кроме того $Q \in CD$. Итак, Q и есть точка встречи плоскости α с ребром CD. Но так как Q – центр тяжести точек $2C$ и $1D$, то по правилу рычага $DQ:QC = 2:1$.

Рассмотрим, как можно обосновать правильность этого ответа, не прибегая к понятиям «материальная точка» и «центр тяжести». Это можно сделать на «языке векторов». Из условия задачи видно, что

$$4\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PD},\ 2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$$

Пусть точка Q выбрана так, что $\overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{QC}$. Возьмем в пространстве Произвольную точку O. Так как

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP}, \text{ то}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}(4\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}). \tag{4}$$

Совершенно аналогично получим формулы

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}),\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}), \tag{5}$$

Рассмотрим точку Z, задаваемую равенством

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{11}(4\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \tag{6}$$

Из (6), (5), (4) видно, что

$$11\overrightarrow{OZ} = 6\overrightarrow{ON} + 5\overrightarrow{OP}, \tag{7}$$

$$11\overrightarrow{OZ} = 8\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OQ}. \tag{8}$$

Из (7) следует: $6(\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{ON}) = 5(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OZ})$, т. е. $6\overrightarrow{NZ} = 5\overrightarrow{ZP}$. (9)

Аналогично из (8) получим $8\overrightarrow{MZ} = 3\overrightarrow{ZQ}$. (10)

Из (9) видно, что векторы $\overrightarrow{NZ}$ и $\overrightarrow{ZP}$ коллинеарны, так что точка Z – на прямой NP и, следовательно, в плоскости α. Из (10) видно, что Q – на прямой MZ, значит, в плоскости α. Итак, плоскость α пересекает ребро DC в точке Q, делящей это ребро в отношении 2:1.

II способ. Пусть $Q = \alpha \cap DC$, $\overrightarrow{DQ} = \lambda\overrightarrow{QC}$. Надо вычислить λ. Выразим вектор $\overrightarrow{MQ}$ через неколлинеарные векторы $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MB}$. Легко получить следующие (с точки зрения механики – очевидные) зависимости: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{O}$.

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{MD}+4\overrightarrow{MB}),\ \overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}),\ \overrightarrow{MQ}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{MD}+\lambda\overrightarrow{MC}).$$

Из этих равенств, исключив $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MA}$, получим:

$$(1+\lambda)\overrightarrow{MQ}=3\lambda\overrightarrow{MN}+5\overrightarrow{MP}+(2\lambda-4)\overrightarrow{MB}.$$

Но так как вектор $\overrightarrow{MQ}$ должен лежать в плоскости векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$, то коэффициент при векторе $\overrightarrow{MB}$ в последней формуле равен нулю, т. е. $\lambda=2$.

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

Как известно, Земля – часть Солнечной системы. Центр тяжести этой системы (барицентр) в зависимости от движения планет постоянно меняет свое положение: он то оказывается в глубине Солнца, то у его поверхности. В 70-х годах прошлого века немецкий геофизик Т. Ландшайдт обнаружил, что перемещения барицентра не только отражаются на солнечной активности, но и оказывают влияние на климат Земли. Ему удалось доказать существование цикла длительностью примерно 180 лет, объяснить причины похолоданий и потеплений в прошлом и сделать ряд удачных климатических прогнозов.

Долгое время оставалась неясным, каким образом сравнительно небольшие изменения солнечного излучения могут приводить к столь серьезным переменам в природе. Теперь мы можем говорить о действии трех механизмов регулирования глобальной температуры атмосферы Земли.

Барицентр дальше – меньше космических лучей. Первый механизм связан с количеством космических лучей. Чем ближе оказывается барицентр к центру Солнца, тем больше этих лучей попадает в атмосферу. Точный механизм этой связи пока непонятен, но само ее существование не вызывает сомнения. Космические же лучи стимулируют конденсацию влаги в атмосфере (как в известной нам со школы камере Вильсона). Облака способны очень сильно уменьшать приток солнечной радиации и соответственно охлаждать Землю. Связь между интенсивностью космических лучей и глобальной температурой приземного слоя воздуха надежно зафиксирована. Итак: чем барицентр дальше от Солнца, тем меньше космических лучей в атмосфере, то есть меньше облаков и теплее климат.

Барицентр дальше – меньше космической пыли. Второй известный механизм – поглощение солнечного излучения космической пылью. Удалось установить, что в последние 100 лет происходило снижение числа метеоритов, а, следовательно, уменьшение запыленности атмосферы и увеличение притока радиации. Это явление – следствие преимущественно удаленного положения барицентра Солнечной системы в XX веке.

Барицентр дальше – вращение Земли ускоряется. Скорость вращения Земли непостоянна, а непрерывно претерпевает небольшие изменения. Суть третьего механизма, обнаруженного автором, заключается в изменении скорости вращения Земли при перемещении барицентра относительно Солнца.

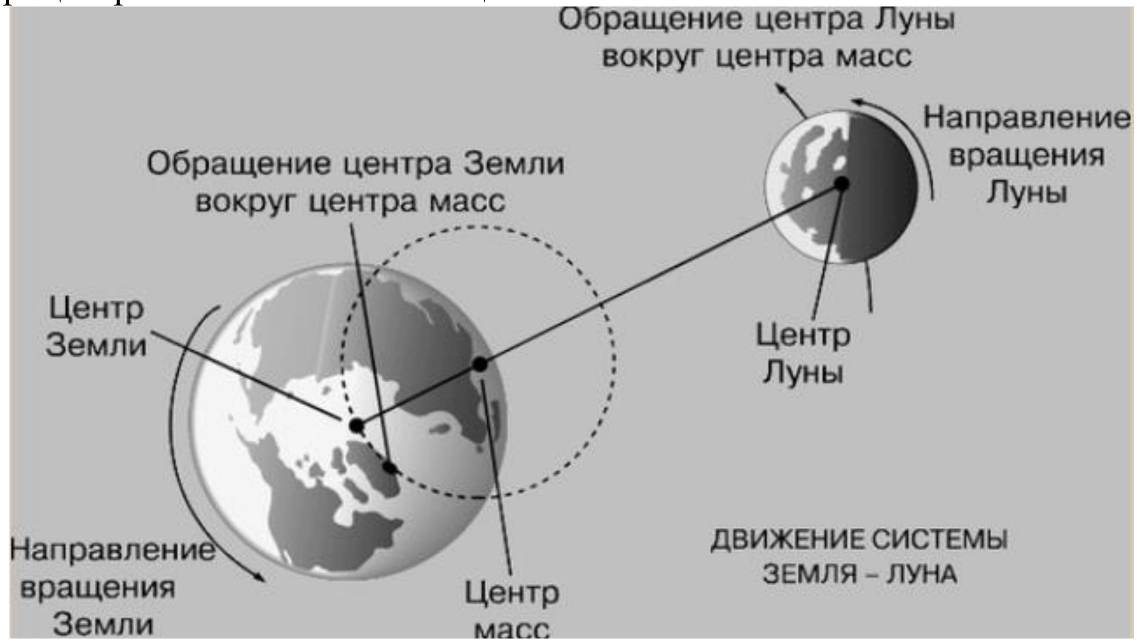


Рис. 15

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. Пусть $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Что больше: $\dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ или $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$?

Решение.

Ответ: _______________.

***Задача* 2.** В $\triangle ABC$ вписана окружность, которая касается сторон треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Будут ли три отрезка AA_1, BB_1, CC_1 иметь общую точку?

Решение.

Ответ: _______________.

***Задача* 3.** В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ отмечены середины B_1, B_2 ,..., B_6 сторон A_1A_2, A_2A_3 ,..., A_6A_1. Отмеченные точки соединены «через одну», так что возникают два треугольника $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$. Будет ли точка пересечения медиан первого из них совпадать с точкой пересечения медиан второго треугольника?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 4. Докажите, что три медианы треугольника ABC имеют общую точку.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 5. На стороне BC треугольника ABC (рис. 16) взята такая точка D, что $BD:DC=5:1$. В каком соотношении медиана CE делит AD? Решите задачу традиционным методом и барицентрическим. Сравните оба метода и сделайте вывод.

Решение.

Ответ: _______________.

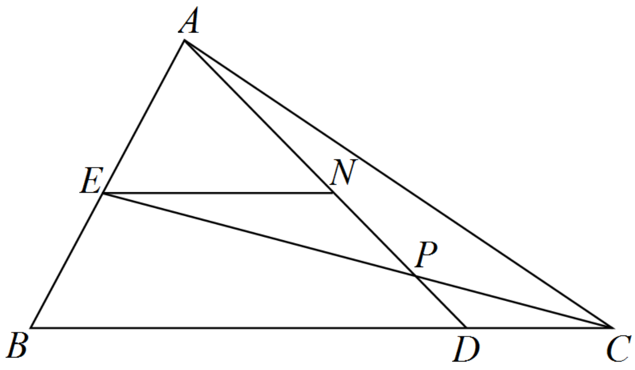


Рис. 16

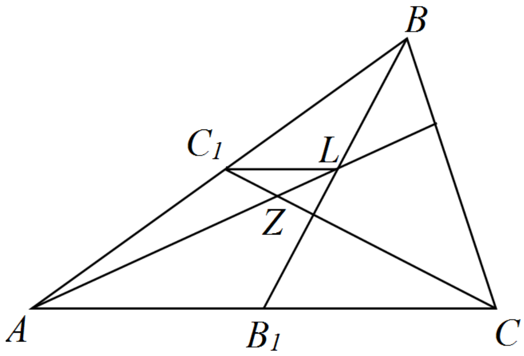


Рис. 17

Задача 6. Прямая проходит через вершину A $\triangle ABC$ и середину L медианы BB_1 (рис. 17). В каком соотношении делит эта прямая медиану CC_1?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 7. Через середину медианы AA_1 и через вершину B $\triangle ABC$ (рис.18) проведена пряма. В каком соотношении она делит сторону AC?

Решение.

Ответ: ________________.

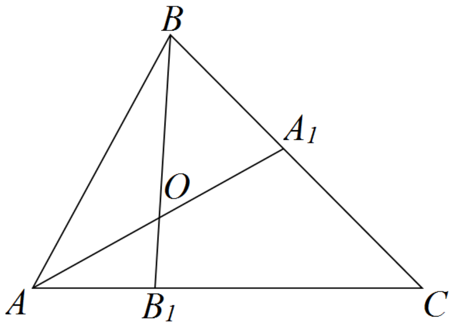


Рис. 18

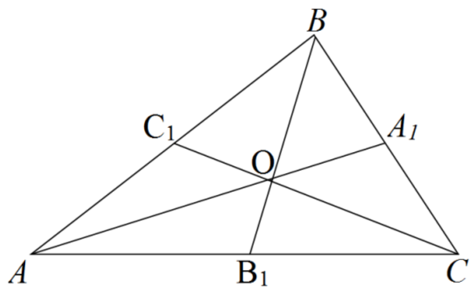


Рис. 19

Задача 8. Пусть O – произвольная точка внутри треугольника ABC (рис. 19). Докажите, что всегда можно подобрать три массы в вершинах треугольника ABC, чтобы центром масс системы трёх материальных точек A, B и C была точка O.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 9. Точка L служит центром масс двух материальных точек aA и bB (рис.20), где a и b – массы, помещенные соответственно в точках A и B. Найдите отношение $BL:BA$.

Решение.

Ответ: ________________.

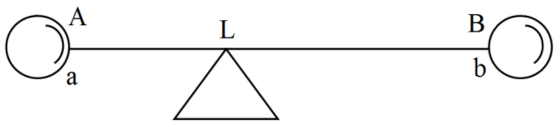


Рис. 20

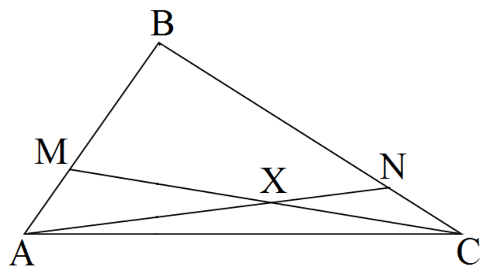


Рис. 21

Задача 10. Дан треугольник ABC, на сторонах AB и BC взято такие точки M и N (рис. 21), что $AM=\frac{2}{5}AB$, $CN=\frac{1}{6}CB$. Пусть X – точка пересечения CM и AN. Найдите отношения: $\frac{AX}{XN}$; $\frac{CX}{XM}$; $\frac{AX}{AN}$; $\frac{CX}{CM}$; $\frac{XN}{AN}$; $\frac{XM}{CM}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 11. Через точку M (рис. 22) проведены 3 прямые AA_1, BB_1, CC_1 (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах $\triangle ABC$). Пусть $\frac{AC_1}{C_1B}=p$, а $\frac{AB_1}{B_1C}=q$. Докажите формулу Ван-Обеля: $\frac{AM}{MA_1}=p+q$.

Решение.

Ответ: ________________.

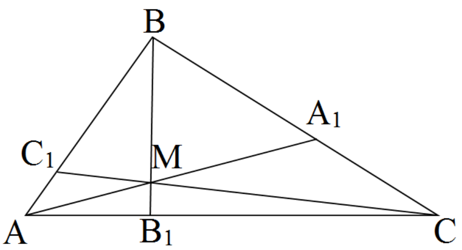


Рис. 22

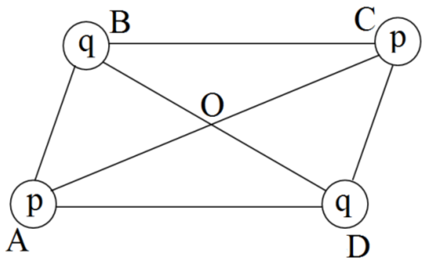


Рис. 23

Задача 12. В вершинах A, B, C, D параллелограмма $ABCB$ (рис. 23) помещены соответственно массы p, q, p, q. Докажите, что центром этих масс служит центр параллелограмма.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 13. Пусть Z и Z_1 – точки пересечения медиан (рис. 24) соответственно $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что: $\overrightarrow{ZZ_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)$.

Решение.

Ответ: ________________.

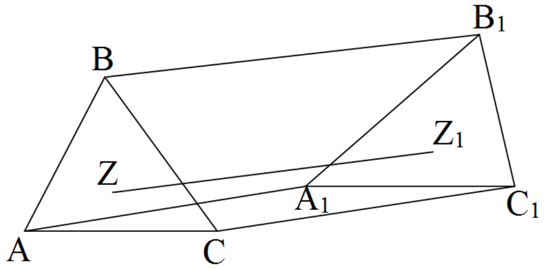


Рис. 24

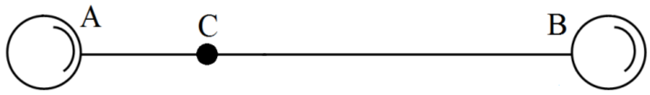


Рис. 25

Задача 14. Точка С лежить на отрезке *AB* и делит его в отношении 2:7 (рис.25), считая от точки *A*, т. е. *AC: CB* = 2:7. Покажите этот факт с помощью понятия о центре масс.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 15. На стороне *AC* треугольника *ABC* взята такая точка *M*, что *3AM=AC*, а на продолжении стороны *CB* – такая точка *N*, что *BN* = *CB*. Прямая *MN* пересекает сторону *AB* в точке *P*. В каком соотношении дельт эта точка сторону *AB* и отрезок *NM* (рис. 26)?

Решение.

Ответ: ________________.

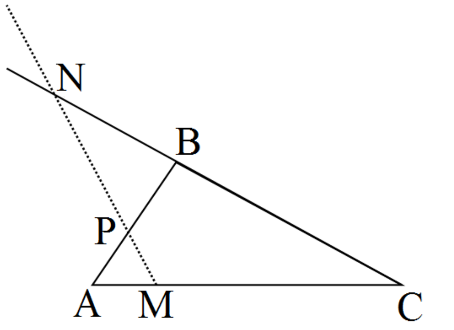


Рис. 26

Рис. 27

Задача 16. Известно, что $\overrightarrow{BM} = 0,7\overrightarrow{BA}$ (рис. 27). Какими массами можно загрузить точки *A* и *B*, чтобы центром масс полученных материальных точек оказалась точка *M*?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 17. Дан треугольник *ABC* (рис. 28). На сторонах *AB* и *BC* взяты такие точки *M* и *P*, что $AM=\frac{1}{3}AB$, $CP=\frac{1}{4}CB$. Пусть X – точка пересечения *CM* с *AP*. Найдите отношения: $\frac{AX}{XP}$; $\frac{CX}{XM}$; $\frac{AX}{AP}$; $\frac{CX}{CM}$; $\frac{XP}{AP}$; $\frac{XM}{CM}$.

Решение.

Ответ: ________________.

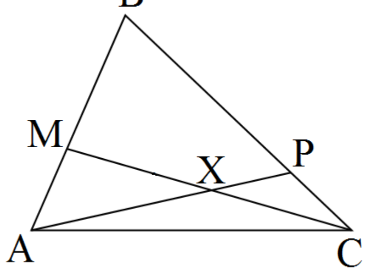


Рис. 28

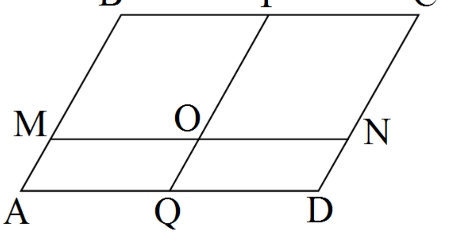


Рис. 29

Задача 18. Противолежащие стороны *AB* и *DC* параллелограмма *ABCD* разделены точками *M* и *N* в одном и том же соотношении *k* (т. е. $AM=kMB$; $DN=kNC$). *P* и *Q* – середины сторон *AD* и *BC*. В каком соотношении делится каждый из отрезков *MN* и *PQ* точкой их пересечения (рис. 29)?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 19. Середины противолежащих сторон произвольного четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ соединены отрезками (рис. 30). Докажите, что образованные таким образом два отрезка пересекаются, и каждый делится точкой пересечения пополам.

Решение.

Ответ: ________________.

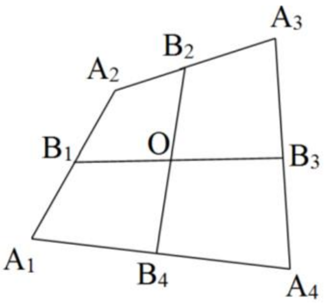


Рис. 30

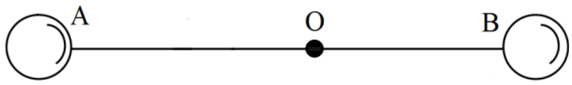


Рис. 31

Задача 20. Дано: $BO = 0{,}4\ BA$ (рис. 31). Каким образом нужно распределить между точками *A* и *B* единичную массу, чтобы центром масс возникающих при этом двух материальных точек оказалась точка *O*?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 21. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты такие точки L и M (рис. 32), что $\overrightarrow{CL}=0{,}2\overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{CM}=0{,}6\overrightarrow{BC}$. Пусть P – точка пересечения прямых AM и BL. Вычислите отношения $AP:AM$ и $BP:BL$.

Решение.

Ответ: _______________.

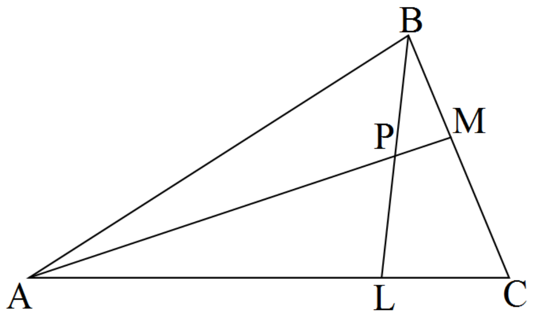


Рис. 32

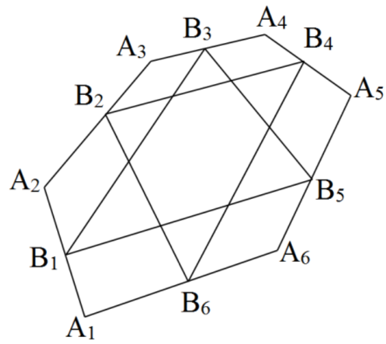


Рис. 33

Задача 22. В произвольном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис. 33) отмечены середины сторон A_1A_2, A_2A_3... и получены точки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 соединены через одну так, что созданы треугольники $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольника $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$ совпадают.

Решение.

Ответ: _______________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Птицы настроения». «Поместите» птицу (рис. 34), соответствующую Вашему состоянию на данном этапе занятия, на определенную ветку дерева (рис. 35).

Все понятно

Не очень понятно

Непонятно

Рис. 34

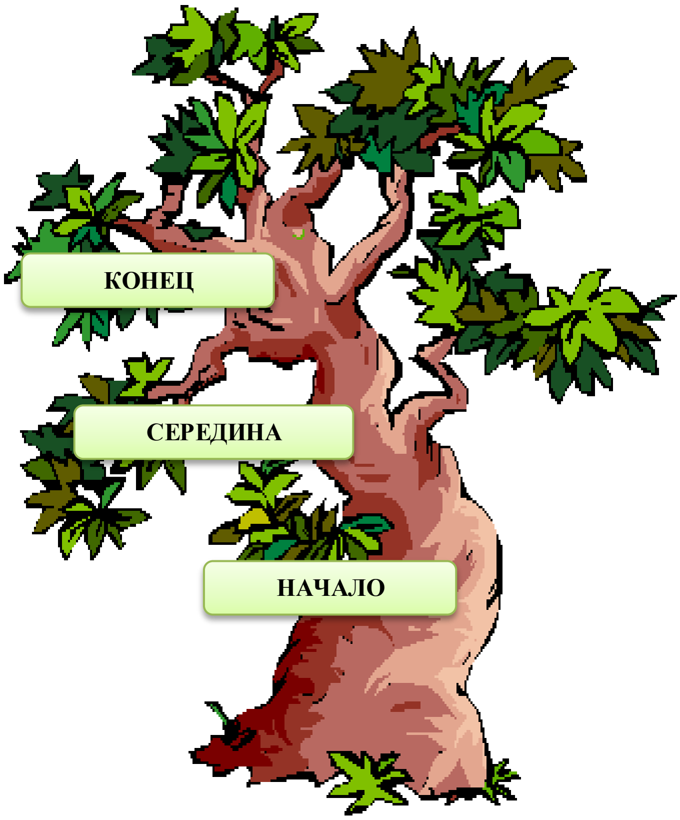


Рис.35

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Убедившись, что теорема верна, мы начинаем её доказывать.

Из афоризмов Рассеянного Профессора[2]

Занятие 5
ИСПЫТАНИЯ НА ПРАВДОПОДОБИЕ

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

Опр. ***Испытания на правдоподобие*** – эвристические приемы, позволяющие обнаружить ошибочный ответ при решении той или иной задачи; отбросить собственные ошибочные гипотезы, возникающие на разных этапах решения задачи; проверить, не является ли предложенное утверждение ошибочным.

Иногда может случиться, что доказательство утверждения упирается в громоздкие выкладки, тогда часто бывает полезно не начинать с попыток доказательства, а постараться проанализировать его, испытать данную гипотезу, насколько она правдоподобна, не приводит ли она к явно ошибочным или сомнительным выводам.

Встречаются задачи не только в стандартных формулировках «Доказать, что …», «Вычислить …», «Построить … », но и в формулировках, более интенсивно стимулирующих активный, творческий подход решающего: *«Доказать или опровергнуть следующее утверждение …», «Верно ли, что …», «Из двух (исключающих друг друга) высказываний выбрать истинное …», «Для такой-то игры выбрать оптимальную стратегию …»* и т. п.

В подобной ситуации также важно, чтобы решающий задачу мог достаточно быстро отвергнуть возможные ошибочные варианты [2]. Рассмотрим наиболее полезные приемы для достижения этой цели.

[2] Рассеянный Профессор – герой ученических и студенческих анекдотов. Он всегда что-нибудь путает: имеет в виду *a*, говорит *b*, пишет *c*, а должно быть *d*. Однако в его афоризмах, если в них вдуматься, – как в афоризмах Козьмы Пруткова – нередко имеется нечто весьма поучительное.

ПРОВЕРКА НА ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Пример 1. Обобщая известную формулу Герона для площади треугольника, индийский математик и астроном Брамагупта высказал утверждение, которое в принятых сейчас обозначениях можно сформулировать так: «Площадь S любого четырехугольника выражается через его стороны a, b, c, d по формуле $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; здесь p – полупериметр четырехугольника: $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Верно ли утверждение Брамагупты?

Решение.

Прежде чем доказывать это утверждение (если оно является правильным, то доказательство будет вероятно громоздким), имеет смысл испытать его на правдоподобие. Применим эвристический прием: *проверку на частных случаях.*

Задание. Рассмотрите частные случаи четырехугольника – квадрат; произвольный прямоугольник; ромб, отличный от квадрата. Экспериментально проверьте свои предположения с помощью программного педагогического средства DG или складного метра (работа индивидуально, в парах или группах). Напишите вывод.

Для какого четырехугольника верна формула Брамагупты?

При обсуждении утверждения Брамагупты решающую роль сыграли не подтверждающие частные случаи (квадрат, прямоугольник), а опровергающий частный случай (ромб, отличающийся от квадрата). Нередко бывает, что наличие большого (даже бесконечного) числа разнообразных подтверждающих примеров еще не может служить доказательством правильности математического утверждения; напротив, указать хотя бы один опровергающий пример («контрпример») – часто значит решительно отвергнуть данное утверждение, полностью доказать, что оно ошибочно. Такова сила ***контрпримера***. Полезно приобрести умения в составлении не громоздких контрпримеров».

ПОСТРОЕНИЕ КОНТРПРИМЕРА

Опр. Для того чтобы убедиться в ложности высказывания вида $(\forall x \in X)\ \mathrm{P}(x)$, достаточно найти такое значение *x* из области *X*, для которого свойство *P* не выполняется. Такой способ рассуждений называют ***приведением контрпримера (или опровергающего примера)***.

Чаще всего задачи, требующие применения приемов приведения контрпримера, формулируются в виде неопределенности типа: *«Верно ли …?», «Существует ли …?», «Всегда ли …?»* и т. п.

***Пример* 2.** Всегда ли числа вида n^2+n+41 являются простыми, где n – целое число?

Решение.

Подставляя в квадратный трёхчлен P(n)=n^2+n+41 вместо n целые числа $0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$ найдём: P(0)=41, P(1)=43, P(-1)=41, P(2)=47, P(-2)=43, P(3)=53, P(-3)=47, P(4)=61, P(-4)=53, P(5)=71, P(-5)=61. Все полученные значения данного трехчлена при указанных значениях переменной x являются простыми числами. Однако высказанная гипотеза ошибочна, так как, например, P(41)=41^2+41+41=41×43.

Так как при этом методе рассуждения вывод делается после разбора нескольких примеров, не охватывающих всех возможных случаев, то этот метод называется ***неполной индукцией***. Метод неполной индукции не приводит к вполне надёжным выводам, но он полезен тем, что позволяет сформулировать гипотезу, которую потом можно доказать или опровергнуть. Чтобы избежать подобных ошибок, надо или перебрать все возможные случаи, что не всегда возможно, или справедливость утверждения доказать методом математической индукции.

Пример 3. Ученику Дакову представляется очевидным, что прямоугольник (рис. 36), описанный около правильного треугольника[3], имеет вдвое большую площадь, чем этот треугольник. Ученик Нетов полагает, что это утверждение ошибочно. Кто прав?

Решение.

Для выяснения истины школьники <u>*обратились к частному случаю*</u>, когда одна сторона треугольника целиком лежит на стороне прямоугольника (рис. 37). В этом случае гипотеза Дакова подтверждается. Однако это еще не значит, что она верна. Ученик Нетов предлагает обратиться к другому частному случаю: пусть диагональ описанного прямоугольника *ONCK* расположена на биссектрисе угла правильного треугольника (рис. 38).

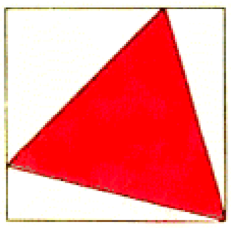


Рис. 36

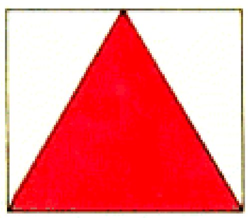


Рис. 37

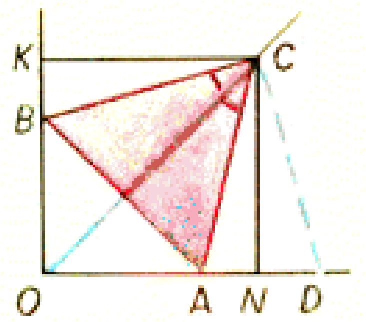


Рис. 38

Положим $OA=OB=1$. На продолжении отрезка ON отложим отрезок $ND=AN$. Тогда $\angle ACD=30$, $AB=\sqrt{2}$. $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{\Delta AOB}+(S_{\Delta ANC}+S_{\Delta BKC})=\frac{1}{2}+S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Отсюда ясно, что $S_{\Delta ABC}\neq\dfrac{1}{2}S_{ONCK}$. Итак, мы получили контрпример, опровергающий гипотезу Дакова.

ПРОВЕРКА ПО РАЗМЕРНОСТИ

Опр. ***Проверка по размерности*** – эвристический прием быстро и эффективно проверять геометрические и физические формулы. Является хорошим и очень простым средством самоконтроля: в любой формуле величина, записанная в правой части, должна иметь такую же размерность, что и величина в левой части формулы. Это позволяет сразу отвергнуть некоторые гипотезы, возникающие при поиске математических закономерностей [2].

[3] Прямоугольник считается описанным около треугольника, если на каждой стороне прямоугольника (быть может, в конце этой стороны) находится хотя бы одна вершина треугольника.

Пример 4. Для площади S треугольника со сторонами, равными *a см, b см, c см* справедлива формула Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр треугольника. Испытайте на правдоподобие такую гипотезу: «Для площади S четырехугольника со сторонами, имеющими длины *a см, b см, c см, d см* справедлива формула $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p – полупериметр четырехугольника.

Решение.

<u>*Проверим формулу по размерности*</u>: правая часть формулы имеет размерность $см^{\frac{5}{2}}$, а левая часть (площадь) имеет размерность $см^2$. Следовательно, формула ошибочна.

Приме проверки по размерности можно использовать в отношении окончательных результатов задачи или промежуточных результатов, к своей работе или к работе других (очень подходящий прием для выявления ошибок в контрольных работах), а также для проверки формул, которые знаете, или же для проверки формул, о существовании которых лишь догадываетесь.

ПРОВЕРКА НА СИММЕТРИЮ

Пусть в условии задачи говорится о каких-то величинах a, b, c, d, … Если условие не изменяется, когда меняются местами две из этих величин (скажем a и b), то говорят, что оно симметрично относительно этих величин. Этим свойством должен обладать и ответ к задаче.

Представим себе, что нам известен правильный ответ к задаче, симметричной относительно букв a и b. Ради конкретности будем полагать, что ответ дан в виде формулы, содержащей величины a и b (и быть может, еще какие-то величины, независимые от a и b). Понятно, что если в этом ответе поменять местами величины a и b, то мы снова должны получить правильный ответ к задаче.

Можно представить и более сложный случай, когда условие задачи не меняется от «циклической» («круговой») перестановки некоторых величин (рис. 39). Тогда и ответ к задаче должен меняться при той циклической перестановке букв.

Например, задачу, на которую товарищ Вам принес свой ответ, Вы обнаружили следующее:

1) задача симметрична относительно букв a и b;

2) по смыслу задачи она обязана иметь единственное решение;

3) формула, предложенная вашим товарищем, несимметрична относительно букв a и b.

Тогда можно, очевидно, сделать вывод: ответ, предложенный товарищем, ошибочен.

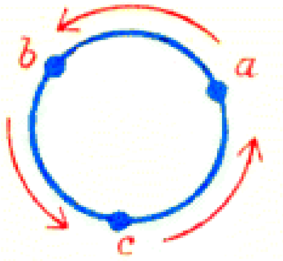


Рис. 39

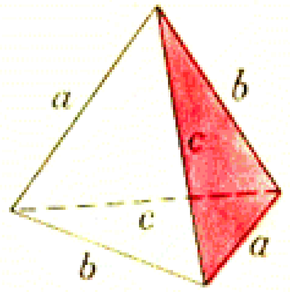


Рис. 40

Пример 5. Вообразим себе такую ситуацию. Школьники решали задачу: «Дан тетраэдр (рис. 40), противоположные ребра которого попарно равны. Стороны основания равны соответственно *a, b, c*. Вычислить объем V тетраэдра». Через некоторое время ребята уже успели получить решения – различные ответы были выписаны на доске:

$$V=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)} \qquad (1)$$

$$V=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} \qquad (2)$$

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} \qquad (3)$$

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} \qquad (4)$$

Какой ответ правильный? Как бы вы подвергли эти ответы испытанию на правдоподобие и отобрали наиболее правдоподобный ответ?

Решение.

Условие задачи не изменится, если поменять местами буквы *a* и *b*. Поэтому и ответ не должен измениться при такой перестановке букв, т. е. если ответ (1) верен, то должна быть верна и такая формула:

$$V=\sqrt{2(b^2+a^2+c^2)(b^2-a^2+c^2)}\cdot\sqrt{b^2+a^2-c^2} \qquad (5)$$

Но формулы (1) и (5) (при $a \neq b$) приводят к различным значениям для объема, что нелепо.

Ответ (2) сохраняется, если поменять местами любые из трех букв *a, b, c*; он поэтому сохранится и при циклической перестановке этих букв. Но он все-таки ошибочен – это видно, *проверив по размерности*: если считать, что *a*, *b* и *c* измеряются в метрах, то объем *V*, определяемый формулой (2), имел бы размерность $м^4$.

Ответ (3) успешно выдерживает испытания «на симметрию», «на цикличность» и «на размерность». Проверим его на частном случае: рассмотрим тетраэдр, у которого все 6 ребер равны *a*. Вычисляя площадь его основания и высоту и пользуясь формулой для вычисления объема тетраэдра, найдем $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Между тем ответ (3) при *b*=*c*=*a* дает: $V=\frac{1}{6}a^3$. Следовательно, этот ответ тоже неверен.

Ответ (4) успешно выдерживает все те испытания, которым мы подвергли предыдущие ответы. Это, конечно, еще не значит, что он правильный; но имеет смысл проверить лишь то решение, которое привело к этому ответу. Решение этой задачи будет рассмотрено в блоке «Применяем эвристику».

Эти простые замечания иногда позволяют обнаружить ошибочность ответа к задаче даже тому, кто сам ее решить не умеет.

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

Тем, кто утверждает, что яблоки не могут расти гроздьями можно в виде контрпримера привести рябину (ее плоды называют яблоками). А тем, кто утверждает, что все ягоды помещаются на ладони, можно в виде контрпримера привести арбуз.

Если кто-либо утверждает, что птицы отличаются от других животных наличием крыльев, то можно в качестве контрпримера указать на бескрылую птицу киви, живущую в Новой Зеландии (рис. 41), или же на летучих мышей.

Долгое время считали, что все лебеди белые. Это утверждение было опровергнуто, когда в Австралии обнаружили черного лебедя (рис. 42).

Рис. 41

Рис. 42

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. Пусть имеется прямой круговой усеченный конус (рис. 43), причем R – радиус нижнего основания, r – радиус верхнего основания, h – высота усеченного конуса, S – площадь боковой поверхности усеченного конуса. Верно ли, что площадь боковой поверхности усеченного конуса находится по формуле $S=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$?

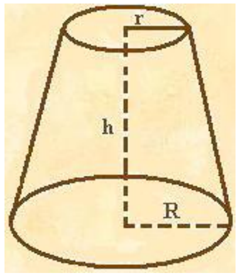


Рис. 43

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 2. Найдите корни уравнения

$$x^2-3(a+b)x+2a^2+2b^2+5ab=0.$$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 3. Дан треугольник, у которого стороны имеют длины a, b, c. Вычислите радиус какой-нибудь окружности, касающейся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 4. Дан тетраэдр (см. рис. 40), противоположные ребра которого попарно равны. Стороны основания равны соответственно *a, b, c*. Вычислите объем *V* тетраэдра.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 5. Один школьник просил помочь ему решить следующую задачу: «Пусть *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, а *p* – его полупериметр. Доказать, что $p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 2{,}5$». Он пишет, что много раз пытался решить эту задачу, но не сумел с нею справиться. Что бы вы посоветовали этому школьнику?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 6. Верно ли, что равенство $|a-b|=|a|-|b|$ является тождеством?

Ответ: ________________.

Задача 7. Функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Всегда ли их сумма $f(x)+g(x)$ будет постоянной функцией, т. е. значение функции $f(x)+g(x)$, вне зависимости от значения переменной x, равно одному и тому же числу.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 8. Сумма двух возрастающих функций является возрастающей функцией, и доказательство этого утверждения обычно проводят примерно следующим образом: «Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ возрастают, т. е. при любых $a<b$ выполняются неравенства $f(a)<f(b)$ и $g(a)<g(b)$, а эти два неравенства можно сложить: $f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$, а это и означает, что функция $y=f(x)+g(x)$ – возрастающая». Все ли в этом доказательстве логически чисто?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 9. На плоскости даны два равных многоугольника F и F'. Известно, что все вершины многоугольника F принадлежат F' (могут лежать внутри него или на границе). Верно ли, что все вершины этих многоугольников совпадают?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 10. Пусть f и g – нечетные функции, определенные на множестве всех вещественных чисел. Верно ли, что их сумма $f+g$ является четной функцией?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 11. Прямая, проходящая через центр тяжести любого четырехугольника, делит этот четырехугольник на две равновеликие части (рис. 44). Проверка показала, что это утверждение верно для квадрата, прямоугольника, ромба, параллелограмма. Докажите или опровергните эту гипотезу.

Решение.

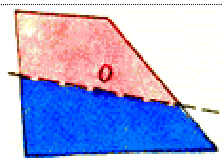


Рис. 44

Ответ: ________________.

Задача 12. Найдите контрпример к следующему утверждению: «Если t – число, лежащее между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то $2\sin t = \sin 2t$».

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 13. Найдите контрпример к следующему утверждению: «Пусть функции f, g, и h определены на множестве всех вещественных чисел. Если $f \circ g = f \circ h$, то $g = h$».

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 14. Верно ли следующее утверждение? Пусть функция f, определенная при всех вещественных значениях переменной, принимает только положительные значения. Тогда функция $g(x) = (f(x))^3$ возрастает».

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 15*. (задача Мальфатти[4]). Верна ли гипотеза Мальфатти?

Задача 15.1. Как надо вырезать из прямой треугольной призмы (рис. 45) три прямых круговых цилиндра (той же высоты, что призма), чтобы отходы были минимальными?

Эта задача равносильна следующей:

Задача 15.2. Как следует расположить в данном треугольнике три попарно не перекрывающихся круга так, чтобы сумма их площадей была наибольшей?

Мальфатти считал, что последняя сводится, в свою очередь, к следующей:

Задача 15.3. В данном треугольнике расположить три круга так, чтобы каждый из них касался двух других кругов и двух сторон треугольника (рис. 46).

Решение.

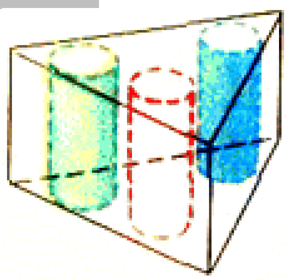


Рис. 45

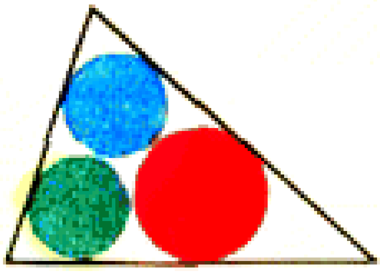


Рис. 46

[4] В 1803 году в одном итальянском математическом журнале появилась статья профессора университета в Ферраре Джанфранческо Мальфатти, где была сформулирована эта задача.

Ответ: _______________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Рефлексивный светофор». Оцените свое состояние в начале, середине и конце занятия. Для этого от определенного цвета светофора (рис. 47) проведите стрелки к нужным кружкам (рис. 48) с теми цветами, которые соответствуют Вашему состоянию в данный момент.

– хорошо;

–не очень хорошо;

–плохо.

Рис. 47

Рис. 48

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Сначала я совсем ничего не понял и начал читать задачу во второй раз, потом в третий... (потом) я переписал задачу по-своему, чтобы она выглядела попроще, и вот что получилось…

Н. Носов

Занятие 6

ТО ЖЕ САМОЕ – НО ИНАЧЕ

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

Оказывается, что поиск решения задачи облегчается, если задачу сформулировать иначе.

Опр. **Переформулировка** ***(перефразирование, переход к равносильной задаче)*** – эвристический прием перехода к равносильной, но более простой задаче, чаще всего алгоритмической, путем перевода текста исходной задачи на другой язык (например, с естественного на символический), или нахождении новой интерпретации заданных условий в рамках одного и того же языка.

Суть приема заключается в том, что условия или требования, а возможно, то и другое одновременно, заменяются на новые, эквивалентные имеющимся, но позволяющие упростить поиск решения. В простейших случаях переформулировка – это замена термина его содержанием[5].

Пример 1. Если первуй автомобиль сделает 4 рейса, а второй 3 рейса, то они перевезут вместе больше 33 т груза. Какой автомобиль имеет большую грузоподъемность?

Решение.

Обозначим через x и y грузоподъемности соответственно первого и второго автомобилей. *Переформулируем задачу*, заменив ее другой, равносильной задачей: «Какое из двух положительных чисел x и y больше, если имеет место система неравенств:

[5] Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Л.В.Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с. – С.37.

$$\begin{cases} 4x+3y<21, \\ 7x+4y>33. \end{cases}$$

Умножая первое неравенство на 11, второе на 7, затем вычитая из первого неравенства второе, получим $-5x+5y<0$, откуда $x>y$.

На уроках часто приходится пользоваться простейшими приемами перехода к равносильной задаче, например, перевод данной задачи «на язык алгебры», вместо доказательства некоторого сформулированного в задаче утверждения осуществляется переход к доказательству предложения, противоположного обратному сформулированному. Однако можно рассмотреть и более сложные случаи переформулировки задач. В случаях, когда нестандартная задача не поддается решению, полезно задать себе вопрос: *«Не могу ли я эту задачу сформулировать иначе? Не могу ли я это сделать так, чтобы в новой формулировке задача оказалась более простой, более доступной для решения, чем исходная задача?»* [3, С.22].

Очень полезным вариантом переформулировки является переход к наглядной модели (геометрическая формулировка, график, чертеж, житейская ситуация и т. п.).

Пример 2. В треугольнике ABC (рис. 49) выбрана точка P так, что верно следующее равенство для площадей треугольников:

$$S_{\Delta APC}+S_{\Delta BPC}=S_{\Delta APB} \tag{1}$$

Найдите в треугольнике ABC множество всех таких точек P, для которых указанное равенство выполняется.

Решение.

Замечаем, что $S_{\Delta APC}+(S_{\Delta BPC}+S_{\Delta CPA})=S_{\Delta ABC}$ (2)

Из (1) и (2) вытекает, что $S_{\Delta APB}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$ (3)

Условие (3) удобнее условия (1), потому что в (3) участвует только один «переменный» треугольник (имеющий вершину P), тогда как в условии (1) таких треугольников три. Итак, <u>*переформулируем задачу*</u>: *«Найти множество всех таких принадлежащих треугольнику ABC точек P, что площадь треугольника APB вдвое меньше площади треугольника ABC»*.

Эту задачу уже нетрудно решить. Для этого можно опять применить переформулировку. Если обозначить проекции точек P и C на прямую AB через P_1 и C_1, то легко обнаружить, что равенство (3) равносильно равенству $PP_1=\dfrac{1}{2}CC_1$. Теперь <u>*данную задачу переформулируем*</u> так: *«Найти множество всех точек, принадлежащих треугольнику ABC и отстоящих от прямой AB на расстоянии* $\dfrac{1}{2}CC_1$*»*. Этим множеством является отрезок A_1B_1 – средняя линия треугольника ABC (рис. 50).

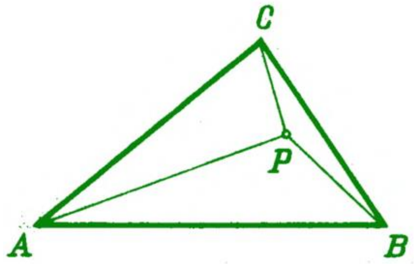


Рис. 49

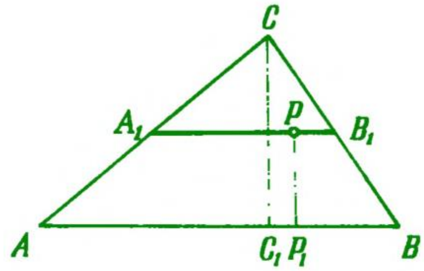


Рис. 50

Пример 3. Сколько корней имеет уравнение $|10-x|+|x+10|=20$?

Решение.

Пусть x – точка на числовой прямой. Тогда $|10-x|$ – расстояние от точки x до 10; $|x+10|$ – расстояние от точки x до точки –10. Сформулируем равносильную задачу: *«Сколько существует на числовой прямой точек x, обладающих следующим свойством: сумма расстояний каждой такой точки x от концов отрезка [-10;10] равна 20 (т. е. длине этого отрезка)?».* Ответ очевиден: каждая точка x отрезка [-10;10] обладает этим свойством, так что таких точек бесконечно много.

Переформулировка задачи, постановка ее по-новому часто проливает свет на ее подлинный смысл и является прямым путем к решению. Более того, способность рассматривать задачу с разных сторон в различных интерпретациях является одним из важнейших признаков математического развития и одним из условий дальнейшего обучения в вузе. Нельзя не подчеркнуть, что сказанное касается не только математики.

Разумеется, основными, точнее сказать, наиболее естественными приемами переформулировки задач вы в должной мере владеете, поскольку эти приемы входят в обычную школьную практику. Так, большинство из вас вполне справляются с решением так называемых «текстовых» задач, а ведь основа решения такой задачи – типичная переформулировка: задача дается в виде некоторой совокупности условий, записанных на обычном, «житейском» языке, а решающий, как правило составляет некоторые уравнения, иногда неравенства, то есть переводит эти условия на математический язык, после чего задача решается чисто математическими приемами. Вспомните, для сравнения, что в младших классах такие задачи решаются непосредственно, довольно хитрыми рассуждениями, но без всяких алгебраических соотношений, а такое решение придумать намного сложнее.

Другой пример – решение геометрических задач. Если задача может быть переведена на язык уравнений, если легко выписываются соотношения между данными и неизвестными элементами геометрической конфигурации, то, как правило, задача решается без труда. Наоборот, если этот подход к задаче неприменим, то она вызывает значительно большие трудности – требуется придумывать чисто геометрические идеи, а это уже совсем другое дело – вместо техники вычисления здесь нужна хорошая геометрическая интуиция, геометрическое чутье, более активные геометрические знания.

Что значит переформулировать задачу? Ясно, что дать точный ответ на этот вопрос, строго говоря, невозможно. Но суть дела состоит в том, что условие задачи формулируется на другом языке, в других, более или менее близких терминах. Приемы переформулировки настолько разнообразны, что перечислить, описать их разумным образом практически невозможно, и овладеть ими можно только на практике, решая достаточное количество примеров.

Один из важнейших приемов переформулировки задач, в применении которого, грубо говоря, и заключается практическая, прикладная сторона математики – это «перевод» реальной, жизненной ситуации на формальный язык, на язык точных математических утверждений. В школьной математической практике часто приходится «переводить» слова в формулы и наоборот. С другой стороны, важное значение имеет и «обратный перевод» – умение увидеть в некотором подлежащем доказательству формальном равенстве его словесное выражение [4].

Пример 4. График функции $y=\dfrac{2+x}{x}$ пересекается в двух точках с прямой, образующей угол α с осью абсцисс. Найдите среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начала координат с проекциями точек пересечения на ось О*x*.

Решение.

В этой задаче самое главное – точно понять ее условие и выразить его на языке формул.

График функции $y=\dfrac{2+x}{x}$ или $y=1+\dfrac{2}{x}$ – гипербола. Поэтому, прямая о которой идет речь в условии задачи, является наклонной (т. е. $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2},\alpha\neq 0$), т. к. ни с вертикальной, ни с горизонтальной прямой данная гипербола не может пересекаться в двух точках. Иными словами уравнение прямой имеет вид: $y=xtg\alpha+b,\ tg\alpha\neq 0$. Тот факт, что гипербола и прямая пересекаются в двух точках, означает, что уравнение $\dfrac{2+x}{x}=xtg\alpha+b$, или, что то же самое, уравнение $x^2+x(b-1)ctg\alpha-2ctg\alpha=0$ (4) имеет два различных действительных корня (поскольку *x*=0 не является корнем уравнения (4)). В условии задачи дано, что этот факт имеет место.

Если корни уравнения (4) обозначить через x_1 и x_2, то длины отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения прямой и гиперболы на ось Ox, равны соответственно $|x_1|$ и $|x_2|$. Следовательно требуется вычислить величину $\sqrt{|x_1|\cdot|x_2|}=\sqrt{|x_1\cdot x_2|}$, где x_1 и x_2 – кони уравнения (4). А это легко сделать, используя теорему Виета $\sqrt{|x_1|\cdot|x_2|}=\sqrt{2|ctg\alpha|}$.

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

Рассмотрим, например, задачу, с которой сталкивается фактически каждый взрослый человек «Как накопить деньги?» Многочисленные семьи по всему миру, пытаясь решить эту задачу, совершают покупки на оптовых рынках, едят бутерброды и проводят субботние вечера дома.

Предположим, вы переформулировали задачу, и она стала звучать так: «Как мне стать богаче?» Дополнительные решения этой задачи теперь будут включать в себя поиски более высокооплачиваемой работы, переезд на квартиру подешевле и т. д.

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. Перефразируйте задачу путем привлечения средств геометрии: «Сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ y=x^3. \end{cases}$».

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 2. Перефразируйте в данной задаче символическую информацию в словесную форму: «Решите неравенство $x > \frac{1}{x}$». Решите задачу.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 3. Сформулируйте задачу, равносильную данной, но более простую, чем исходная: «Проверить справедливость равенства

$$1023^2 + 64^2 = 1025^2$$».

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 4. Переформулируйте и решите задачу: «Найти множество значений функции $y = \frac{2x}{1+x^2}$».

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 5. Переформулируйте и решите задачу: «Найти все числа x, для которых выполняется неравенство $|x-5| < |x+4|$», используя геометрический смысл модуля.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 6. Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC, AD > BC$). Можно ли гарантировать, что точка пересечения диагоналей трапеции лежит на отрезке T_1T_2, соединяющим точки касания боковых сторон трапеции с окружностью?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 7. Поезд двигается из пункта А в пункт В, делая на пути несколько остановок. На первой остановке из поезда вышло 6 пассажиров, на каждой следующей – на 4 пассажира больше, чем на предыдущей остановке. Кроме того, на каждой остановке 18 новых пассажиров садятся в поезд. Какое наибольшее количество пассажиров может быть в поезде, если из пункта А их выехало 410?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 8. Расстояние между двумя колхозами 12 *км*. Колхозник вышел з своего колхоза в 9 *ч* 25 *мин* и прибыл в другой в 13*ч* 15 *мин.* На следующий день он отправился в обратный путь в11 ч и пришел домой в 14 *ч* 40 *мин.* На коком расстоянии от его колхоза находится пункт, который колхозник проходил в один и тот же час как на прямой, так и на обратном пути.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 9. При каких значениях a корни уравнения $x^2+ax+a=0$ больше 1?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 10. При каких значениях a из неравенства $1 < x \le 2$ следует неравенство $x^2 - 2ax + a < 0$?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 11. Докажите, что уравнение

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 0,$$

при любых a, b, c имеет действительные корни.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 12. Дано $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Докажите, что

$$x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz > 0.$$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 13. При каком действительном x величина $t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{3} - \frac{x}{5}$ принимает наименьшее значение?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 14. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-1)(x-5)(x-6)(x-2).$$

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 15. Решите неравенство $\left|\frac{2x-3}{2x+5}\right| > 1$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 16. Найдите все такие значения x, что

$$\min\left\{2x - x^2,\ x-1\right\} > -\frac{1}{2}.$$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 17. Найдите сумму коэффициентов многочлена

$$(x^3+2x-8)^{73}(x^2-4x+3)^{37}$$

получающегося после раскрытия скобок.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 18. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2-2ax-a=0$ больше 1, а другой меньше 1?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 19. Пусть $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней и $a+b+c<0$. Найдите знак числа c?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 20. Пересекаются ли прямая $y=2$ график функции $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+3}$?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 21. Найдите область значений функции $y=\dfrac{2x-3}{x^2+2x+2}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 22. При каких a параболы $y=x^2+ax-a$ и $y=2x^2-x+a$ не имеют общих точек?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 23. Докажите, что $2x^2+5y^2+3z^2-6xy-2xz+5yz>0$, если $x^2+y^2+z^2>0$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 24. Найдите все действительные значения x, y, z, удовлетворяющие уравнению $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2xz-2x-2z+1=0$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 25. При каком действительном x выражение $y=\dfrac{2x-1}{2x-x^2-4}$ принимает наименьшее значение?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 26. При каких положительных x выражение $2x+\dfrac{3\frac{1}{8}}{x+1}$ принимает минимальное значение?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 27. График функции $y = 2x^2 - x$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси y с ординатой b. Найдите среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось абсцисс.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 28. График функции $y = \dfrac{1}{1-x}$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси x с абсциссой a. Вычислите абсциссу середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 29. Решите уравнение $\left|x^2 - 4\right| + \left|x^2 - 9\right| = 5$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 30. Решите уравнение $\left|4+\log_{\frac{1}{7}} x\right| = 2 + \left|2+\log_{\frac{1}{7}} x\right|$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 31. Найдите все значения x, для которых $\min\{1-x^2, \frac{1-x}{2}\} > \frac{1}{2}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 32. Найдите все целые решения неравенства

$$2x+1 < 2\log_2(x+3).$$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 33. Решите уравнение $\cos^7 x + \sin^5 x = 1$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 34. Решите уравнение $2-\sin x=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 34. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}<\sqrt[8]{5-x}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 35. Решите уравнение $x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 36. Решите уравнение $\arcsin\frac{x^2-8}{8}=2\arcsin\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 37. Решите уравнение $4x^2+4x+17=\frac{12}{x^2-x+1}$.

Решение.

Ответ: _________________.

Задача 38. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

Решение.

Ответ: _________________.

Задача 39. Решите уравнение

$$(\cos^2 x+\cos^{-2} x)(1+tg^2 2y)(3+\sin 3z)=4.$$

Решение.

Ответ: _________________.

Задача 40. Решите уравнение $4\cos^4\frac{x}{4}=\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 41. На координатной плоскости отметьте штриховкой множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям $\begin{cases} \left||x-y|-|y+1|\right|=2y-x+1, \\ (x+1)^2+(y+1)^2\le 2. \end{cases}$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 42. Решите уравнение $\cos x\cos 7x=1$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 43. Решите уравнение $|x-3|+|x+2|+|x+1|=x-4$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 44. Сколько корней имеет уравнение $x^3=\sin 3x$?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 45. Решите систему уравнений $\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48, \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24. \end{cases}$

Решение.

Ответ: ________________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Рефлексивная звезда». Оцените занятие с помощью рефлексивной звезды (рис. 51), для этого в каждом лучике звезды укажите число по шкале от 1 до 12.

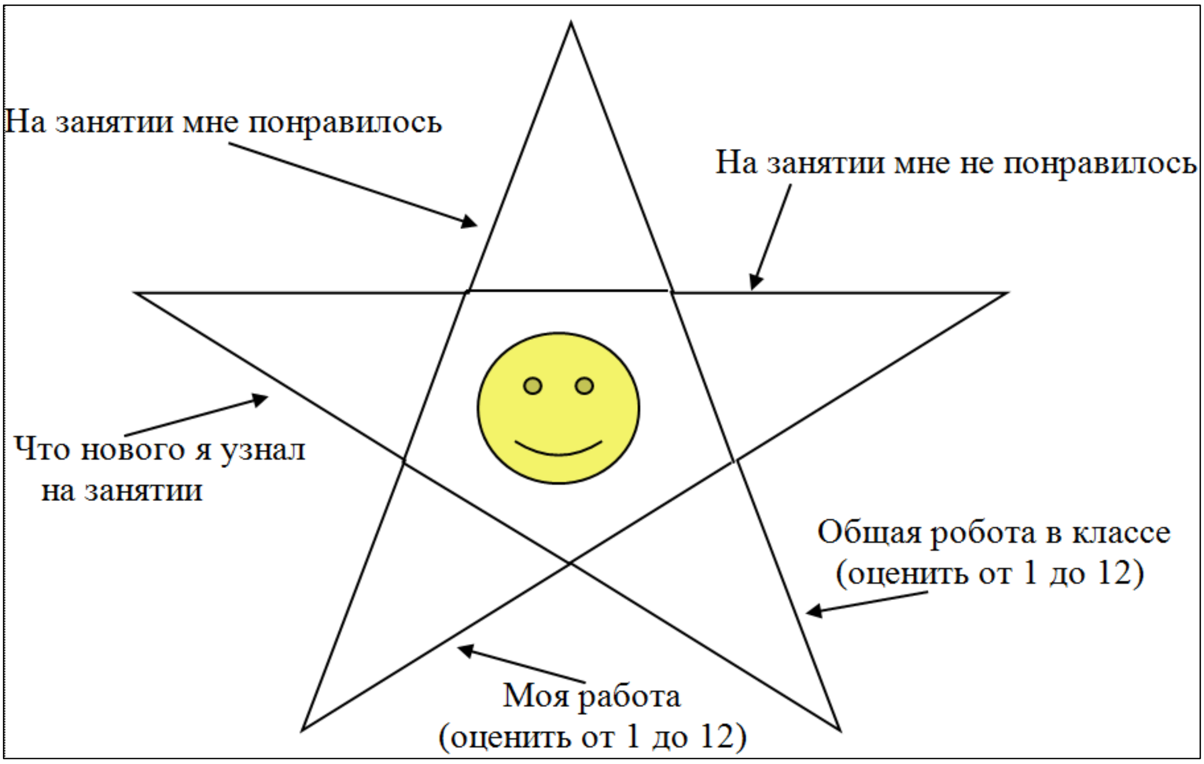


Рис. 51

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Вы спрашиваете, встречался ли я с аналогией при изучении математики. Конечно, встречался! И много раз! Каждый раз, когда автору учебника не хочется рассмотреть какой-либо случай, он пишет: «Это легко сделать, рассуждая по аналогии с предыдущим случаем».

Из высказываний школьника

Занятие 7
РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО АНАЛОГИИ

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

«Аналогия» – греческое слово, в переводе оно означает «сходство». Аналогия – это сходство между объектами в некотором отношении. Использование аналогии в математике является одной из основ поиска решения задач. Нередко рассуждения по аналогии приводят к требуемому результату.

Аналогия (или точнее – умозаключение по аналогии) является одним из основных методов при изучении разнообразных явлений природы. Исключительно большую роль играют умозаключения по аналогии в физике и математике. Многие естествоиспытатели применяли аналогию стихийно, неосознанно. Однако особенно больших успехов удавалось достичь в тех случаях, когда ученый применял аналогию сознательно. Крупнейшие ученые разных времен давали высокую оценку аналогии как средству для поиска научных закономерностей. Ценность аналогии отмечал еще создатель логики Аристотель. Убежденным сторонником сознательного применения аналогии в математике был знаменитый астроном и математик И. Кеплер. Ему принадлежит следующая полезная мысль: «Желательно подчинить геометрические рассуждения аналогии». Он говорил: «Я больше всего дорожу Аналогиями, моими самыми верными учителями. Они знают все секреты Природы, и ими меньше всего следует пренебрегать в геометрии». О роли аналогий в математике достаточно убедительно говорил американский математик Дж. Пойа: «Аналогия, по-видимому, имеет долю во всех открытиях, но в некоторых она имеет львиную долю». Понятно, насколько важно приобрести навыки в поисках аналогии в самых разнообразных ситуациях.

Многие ученые обращали внимание на то, что аналогия может привести к ошибочным выводам, что аналогия не может заменить доказательство. Так, например, советский физик С.И. Вавилов обратил внимание на то, что подмеченная Ньютоном аналогия между цветами видимого спектра и музыкальными интервалами привела этого гениального физика к грубой ошибке. Число таких примеров очень много. Однако существенно то обстоятельство, что аналогия часто служит подспорьем для получения правильных выводов или доказательств.

Давно было замечено, что сходство условий нередко приводит к сходству заключений. Логики и философы многократно – и справедливо – обращали внимание на то, что это не всегда так, что аналогия не может служить доказательством, что немало случаев, когда заключения по аналогии могут привести к ошибке. Однако в огромном количестве случаев гипотезы, построенные по аналогии, все же оказываются верными. Это обстоятельство очень полезно при поиске решения математических задач. При этом мы должны помнить, что сравнение не есть доказательство, что *предложения, сформулированные по аналогии, могут оказаться ошибочными* [3].

Пример 1. Верно такое предложение: «Если в треугольнике все стороны равны, то и все углы равны». Сформулируйте аналогичное предложение для шестиугольника. Верно ли оно?

Решение.

Сформулируем аналогичное предложение: «*Если в шестиугольнике все стороны равны, то и все углы равны*». Но оно неверно. Возьмем правильный шестиугольник, шарнирный, и затем сожмем его немного, вот так, как показано на рис. 52, где стрелки указывают направления сжатия. Стороны останутся равными, а углы шестиугольника (рис. 53) уже не все равны. Итак, *сформулированное по аналогии предложение оказалось ошибочным*.

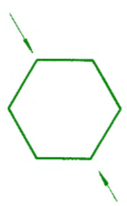


Рис. 52

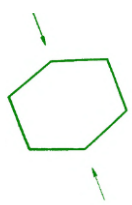


Рис. 53

Опр. ***Аналогия*** – эвристический прием, заключающийся формулировке аналогичной, похожей, но более простой вспомогательной задачи; решении этой вспомогательной задачи путем разбиения ее решения на отдельные этапы («шаги»); проведения сходных рассуждений на каждом «шаге» применительно к исходной задаче.

Особенно часто этот прием оказывается полезен при поиске решения нестандартной стереометрической задачи: в этом случае формулируется сходная планиметрическая задача; решив ее, рассматривается по аналогии исходная (пространственная) задача.

Применим аналогию к поиску решения следующей задачи.

Пример 2. Зная длины a, b, c сторон треугольника ABC ($AB=c$, $BC=a$, $AC=b$), вычислите радиус r_1 «вневписанной» окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC.

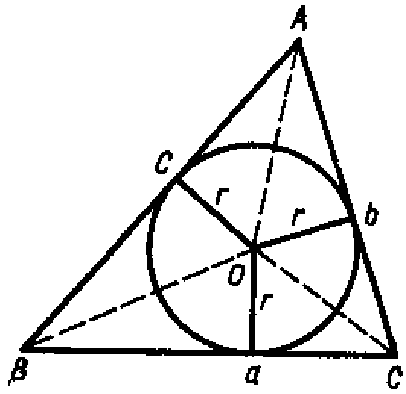
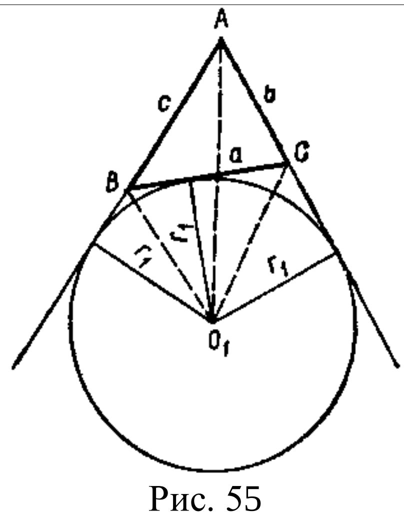
Решение.

Сформулируем вспомогательную задачу, аналогичную данной. Как и в данной задаче, в этой вспомогательной задаче должна идти речь о треугольнике с известными сторонами, об окружности, о ее радиусе и о касании. И кроме того, вспомогательная задача должна быть хоть немного проще исходной.

Задача 2.1. Зная стороны a, b, c треугольника ABC, вычислить радиус r вписанной окружности.

Такую задачу Вы уже решали. *Разобьем решение этой вспомогательной задачи на простейшие шаги*. Решение оформим в таблице 2 (сначала заполняем левый столбец).

Таблица 2

Вспомогательная задача	*Исходная задача*
 Рис. 54	 Рис. 55
1. Соединим центр O (рис. 54) вписанной окружности с вершиной треугольника ABC.	1. Соединим центр O_1 (рис. 55) вневписанной окружности с вершинами треугольника ABC.
2. Запишем зависимость между площадями треугольника ABC и площадями треугольников AOB, AOC, BOC: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}+S_{\Delta BOC}$	2. Запишем зависимость между площадями треугольника ABC и площадями треугольников AO_1B, AO_1C, BO_1C: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AO_1B}+S_{\Delta AO_1C}-S_{\Delta BO_1C}$

3. Обозначим площадь треугольника ABC через S, тогда по формуле Герона $$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$ где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.	3. То же.
4. $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}cr,\ S_{\Delta AOC}=\dfrac{1}{2}br,$ $S_{BOC}=\dfrac{1}{2}ar$.	4. $S_{\Delta AO_1B}=\dfrac{1}{2}cr_1,\ S_{\Delta AO_1C}=\dfrac{1}{2}br_1,$ $S_{BO_1C}=\dfrac{1}{2}ar_1$.
5. Из 2) и 4) следует: $$S=\frac{1}{2}(c+b+a)r=pr,$$ откуда $r=\dfrac{S}{p}$, или $$r=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$ Задача решена.	5. Из 2) и 4) следует: $$S=\frac{1}{2}(c+b-a)r_1=(p-a)r_1,$$ откуда $r_1=\dfrac{S}{p-a}$, или $$r_1=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$ Задача решена.

А теперь *попытаемся по аналогии получить решение исходной задачи*. Проследим за аналогией на каждом шаге (заполняем правый столбец таблицы 2).

На этом примере мы проследили за одним весьма полезным приемом поиска решения задач. Он сводится, как мы видели, к следующему:

1. Подбираем задачу, аналогичную исходной, то есть такую, чтобы у нее и у исходной задачи были сходные условия и сходные заключения. Вспомогательная задача должна быть проще исходной или ее решение должно быть нам известно.

2. Решив вспомогательную задачу, мы проводим аналогичные рассуждения для решения исходной задачи. При этом удобно решение вспомогательной задачи и решение исходной задачи разбить на отдельные и проследить за возможностью проведения аналогии на каждом шаге.

АНАЛОГИЯ В ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПОНЯТИЙ

В математике при построении различных теорий нередко вводятся понятия по аналогии с ранее имевшимися. Так вводилось, например, для различных фигур понятие диаметра. Из школьного курса планиметрии известно понятие диаметра круга (и окружности), которое определяется как хорда, проходящая через центр. По аналогии с этим вводится в стереометрии понятие диаметра шара (сферы). Можно ввести сходным образом понятие диаметра для любой плоской или пространственной фигуры, имеющей центр симметрии. Можно исходить и из другого определения диаметра круга: диаметр круга – это наибольшая хорда круга, то есть наибольший из отрезков, соединяющих какие-либо две точки круга. В математике по аналогии с этим вводится и часто находит применение понятие диаметра произвольной ограниченной фигуры, соединяющего какие-либо две точки произвольной фигуры.

Приведем еще несколько примеров из школьного курса геометрии.

По аналогии с понятием угла между двумя лучами вводится понятие угла между двумя полуплоскостями.

По аналогии с определением параллельности двух прямых строится определение понятий параллельности плоскостей или параллельности прямой и плоскости.

По аналогии с длиной отрезка вводится понятие площади плоской фигуры и объема тела.

Аналогия часто является отправным пунктом при построении новых научных теорий. Так, например, основные понятия многомерной геометрии были введены по аналогии с понятиями геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве.

Приведем несколько простых примеров.

При изучении в стереометрии вопроса о перпендикуляре и наклонных можно самостоятельно определить понятие наклонной к плоскости по аналогии с понятием наклонной к прямой.

Зная определение касательной к окружности, можно по аналогии сформулировать определение касательной плоскости к шару.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АНАЛОГИИ

Часто оказывается, что поиск решения *стереометрической* задачи сильно упрощается, если предварительно сформулировать для себя – а затем и решить – аналогичную *планиметрическую* задачу. При проведении аналогий планиметрией и стереометрией, между плоскостью и пространством, плоским фигурам обычно сопоставляют представленные (см. табл. 2) [6].

Таблица 2

Фигура на плоскости	*Ей сопоставляется в пространстве фигура*	
	чаще	*реже*
точка	точка	прямая
прямая	плоскость	цилиндрическая поверхность
окружность	сфера	цилиндр
круг	шар	–
параллельные прямые	параллельные плоскости	–
треугольник	тетраэдр	–
многоугольник	многоугольник	–
сторона многоугольника	грань многоугольника	ребро многогранника

Пример 3. Боковые ребра тетраэдра (треугольной пирамиды) $DABC$ взаимно перпендикулярны, и их длины равны a, b, c. Вычислите длину высоты тетраэдра, опущенной на его основание ABC.

Решение.

Сформулируем аналогичную планиметрическую задачу:

Задача 3А. Боковые стороны треугольника взаимно перпендикулярны (т. е. треугольник прямоугольный), и их длины равны a и b. Вычислить длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

Решение задачи 3А.

Пусть (рис. 56) h – длина искомой высоты, S – площадь треугольника. Тогда $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}AB\cdot h$. Отсюда $h=\frac{ab}{AB}$, т. е. $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Теперь, уже по аналогии решим и исходную задачу.

Пусть (рис. 57) DD_1 – высота тетраэдра, V – его объем, σ – площадь треугольника ABC, $h=DD_1$. Тогда, $V=\frac{1}{3}\sigma h=\frac{1}{6}abc,\ h=\frac{abc}{2\sigma}$.

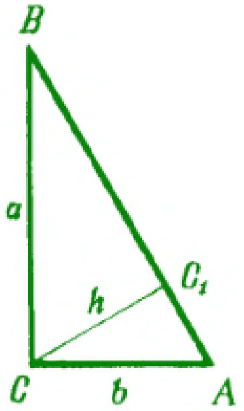


Рис. 56

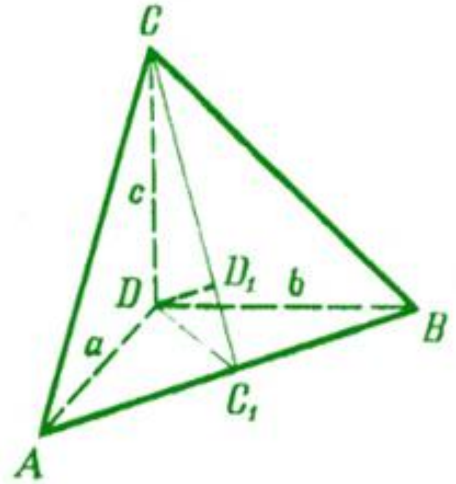


Рис. 57

Остается выразить σ через a, b, c. Пусть CC_1 – высота треугольника. Тогда

$$\sigma=\frac{1}{2}AB\cdot CC_1=\frac{1}{2}AB\sqrt{c^2+DC_1^{\,2}}.$$

Так как $CC_1\perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах $DC_1\perp AB$, т. е. DC_1 – высота в $\triangle ADB$. Длину высоты DC_1 найдем из $\triangle ADB$ (см. задачу 3А): $DC_1=\frac{ab}{AB}$, где $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому

$$\sigma=\frac{1}{2}AB\sqrt{c^2+\frac{a^2b^2}{AB^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2(a^2+b^2)+a^2b^2}.$$

Следовательно, $h = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Приведем другую идею решения: не привлекая двоякого определения объема тетраэдра, а дважды воспользовавшись решением вспомогательной задачи 3А. Ясно, что если D_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на плоскость $\triangle ABC$, то D_1 лежит на высоте CC_1 этого треугольника Действительно, так как $AB \perp C_1C$ и $AB \perp C_1D$, то плоскость β треугольника C_1DC перпендикулярна плоскости α треугольника ACB; так как $\beta \perp \alpha$, $DD_1 \perp \alpha$ и $D \in \beta$ то $DD_1 \in \beta$ и, в частности, $D_1 \in \beta$; так как $D_1 \in \alpha$, то $D_1 \in \alpha \cap \beta$. Таким образом, $D_1 \in CC_1$.

Применяя способ решения задачи 3А к $\triangle CC_1D$, видим, что

$$h = \frac{c \cdot DC_1}{CC_1} = \frac{c \cdot DC_1}{\sqrt{c^2 + DC_1^2}}. \tag{1}$$

Аналогично из $\triangle ADB$ имеем:

$$DC_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует: $h = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Изучая геометрию, Вы, наверное, заметили, что некоторые свойства треугольника и тетраэдра похожи, а многие геометрические понятия, связанные с треугольником, имеют пространственные аналоги. Например: сторона треугольника – грань тетраэдра, длина стороны – площадь грани, вписанная окружность – вписанная сфера, описанная окружность – описанная сфера, площадь – объем, биссектриса угла – биссектор[6] двугранного угла и т. п.

Эта аналогия – не только внешняя. Многие теоремы о треугольниках, если заменить в их формулировках планиметрические термины соответствующими стереометрическими и соответствующим образом «подправить» формулировки, превращаются в теоремы о тетраэдрах [6].

Пример 4.

Теорема 1. Биссектриса *CD* внутреннего угла треугольника *ABC* делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные его сторонам *AB* и *BC*.

[6] *Биссектором* двугранного угла называется полуплоскость, делящая его на два равных по величине двугранных угла. Биссектор двугранного угла является множеством точек, равноудаленных от его граней.

Доказательство.

Примем сначала за основание треугольников ADC и DBC (рис. 58) отрезки AC и BC соответственно. Точка D равноудалена от сторон угла ACB, поэтому $\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{AC}{BC}$. Теперь примем за основания этих же треугольников отрезки AD и BD. Ясно, что $\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{AD}{BD}$.Следовательно, $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

Докажем свойство биссектора двугранного угла тетраэдра, аналогичное свойству биссектрисы угла треугольника.

Теорема 2. Биссектор двугранного угла тетраэдра делит противолежащее ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот двугранный угол.

Доказательство.

Пусть ADM – сечение тетраэдра $ABCD$ биссектором двугранного угла с ребром AD (рис. 59). Объемы тетраэдров $ACMD$ и $ABMD$ обозначим через V_1 и V_2 соответственно.

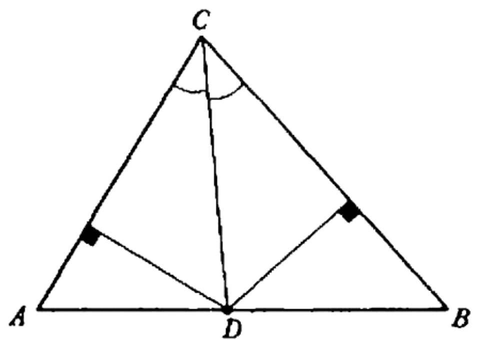


Рис. 58

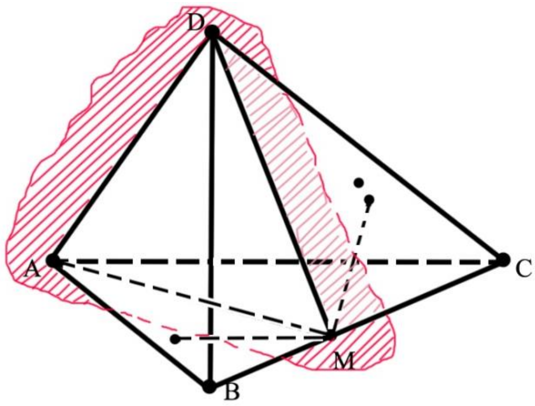


Рис. 59

Так как точка M одинаково отдалена от граней ADC и ADB, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}$. С другой стороны, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}} = \frac{MC}{MB}$. Поэтому $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{MC}{MB}$, что и требовалось доказать. Попутно замечаем, что $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}$, что еще раз подчеркивает аналогичность теорем 1 и 2.

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

В жизни часто бывает, что мы оказываемся в ситуациях, в которых уже были мы или наши знакомые. Проведя аналогию между нынешней и предыдущей ситуациями, можно найти правильный выход из сложившийся ситуации.

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. Справедливо предложение: «Сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон есть величина постоянная». Сформулируйте аналогичное предложение для семиугольника и укажите, верно ли оно.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 2. Докажите, что если все три корня уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ положительные, то коэффициент a отрицателен.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 3. Дана теорема «Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины». Докажите ее. Сформулируйте аналогичную стереометрическую теорему для тетраэдра и докажите её.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 4. Дана теорема «Через произвольную точку O, взятую внутри треугольника ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Если S_1, S_2, S_3 – площади образовавшихся при этом треугольников (рис. 60), а S – площадь данного треугольника, то $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$». Докажите ее. Сформулируйте аналогичную стереометрическую теорему для тетраэдра и докажите её.

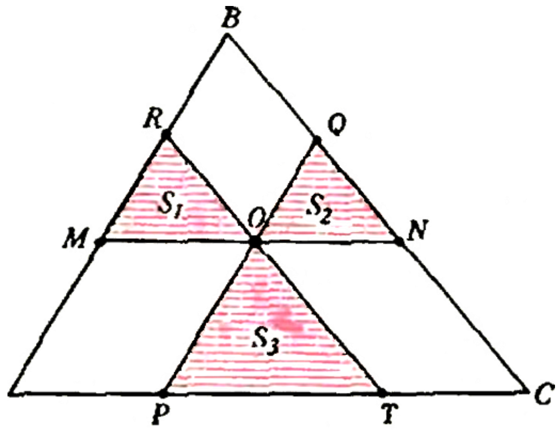


Рис 60

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 5. Докажите, что площадь треугольника, описанного около окружности, вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}P\cdot r$, где r – радиус этой окружности, P – периметр треугольника. Сформулируйте аналогичную стереометрическую задачу для тетраэдра и докажите ее.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 6. В треугольник вписана окружность радиуса r. Докажите, что $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$, где $h_1,\ h_2,\ h_3$ – высоты треугольника. Сформулируйте аналогичную стереометрическую задачу для тетраэдра и докажите ее.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 7. Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка O. Докажите, что расстояние от точки O до основания треугольника равно среднему арифметическому расстояний от точки O до боковых сторон треугольника. Сформулируйте аналогичную стереометрическую задачу для тетраэдра и докажите ее.

Решение.

Ответ: _______________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Шкала настроения». Оцените своё настроения, используя шкалу на рис. 61. Настроение оценивается на трёх этапах занятия. В начале занятия оцените своё настроение от 1 до 5 и пометьте значение на шкале стрелочкой. В середине занятия оцените свое настроение от 1 до 5 и поднимите на это значение стрелочку. В конце занятия оцените настроение от 1 до 5 и еще поднимите стрелочку на шкале.

Посмотрите на результат:

- если стрелочка находится в пределах темно-серого цвета, то настроение угнетённое;
- если в пределах светло-серого– хорошее;
- если в пределах белого – отличное.

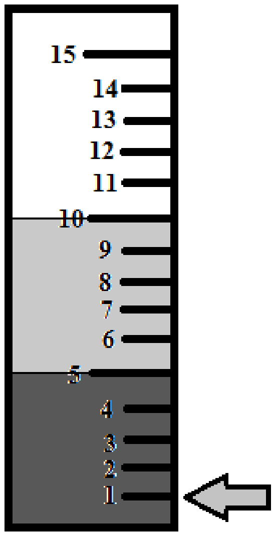


Рис. 61

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Методом индукции пользуются все науки, в том числе и математика. Математической же индукцией пользуются только в математике для доказательства теорем определенного типа. Довольно неудачно, что их названия связаны, так как между этими двумя методами почти нет логической связи.

Дж. Пойа

Занятие 8
ПОИСК ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

Опр. ***Индукция*** – эвристический прием перехода от частного к общему случаю.

При поиске решения какой-либо задачи или доказательства какой-либо теоремы оказывается чрезвычайно полезным предварительное рассмотрение частных или предельных случаев.

Само слово «индукция» в переводе с латинского означает «наведение»: рассмотрение частных случаев «наводит» нас на решение задачи в общем случае. Его обычно противопоставляют дедукции (выведению), т. е. переходу от общего к частному.

Индукция – наряду с аналогией – является полезнейшим средством для поиска научных закономерностей. Важность индукции отмечалась многими крупнейшими учеными-философами и естествоиспытателями. Впервые на исключительную ценность индукции обратили внимание английский философ Ф. Бэкон и итальянский физик Галилей. Хотя математика является, казалось бы, чисто дедуктивной наукой, соображения индуктивного характера находят самые широкие применения в математических исследованиях. Это одно из основных орудий каждого научного работника, один из основных инструментов его творческой лаборатории. Эту мысль неоднократно подчеркивали многие видные математики (И. Ньютон, Л. Эйлер, П. Лаплас и др.). Так, например, П. Лаплас называл индукцию и аналогию «главным средством достижения истины в математике» [3, С.48-49].

Индукция при поиске математических закономерностей

Рассматривая какой-либо класс геометрических фигур, иногда удается подметить, что некоторые частные виды этих фигур обладают одним и тем же свойством. Это может нас навести на мысль, что все фигуры рассматриваемого класса обладают тем же свойством. Например, рассматривая правильный треугольник, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, можно подметить, что в каждом из них любая из медиан меньше суммы двух других медиан. Это наталкивает на мысль, что и в любом треугольнике любая из медиан меньше суммы двух других медиан.

Следует, однако, иметь в виду, что в результате рассмотрения частных случаев мы можем прийти только к некоторой гипотезе, к некоторому *предложению*. Не исключено, что эта гипотеза окажется ложной, даже если рассмотрено большое число частных случаев.

Пример 1. Обозначим через S_n наибольшее число областей, на которые можно разбить плоскость n окружностями. Легко проверить, что $S_1=2, S_2=4, S_3=8$. Возникает *предположение*, что при любом натуральном n будет $S_n=2^n$. Однако можно показать, что это заключение ошибочно, например, $S_4=14$, а не 16 (рис. 62).

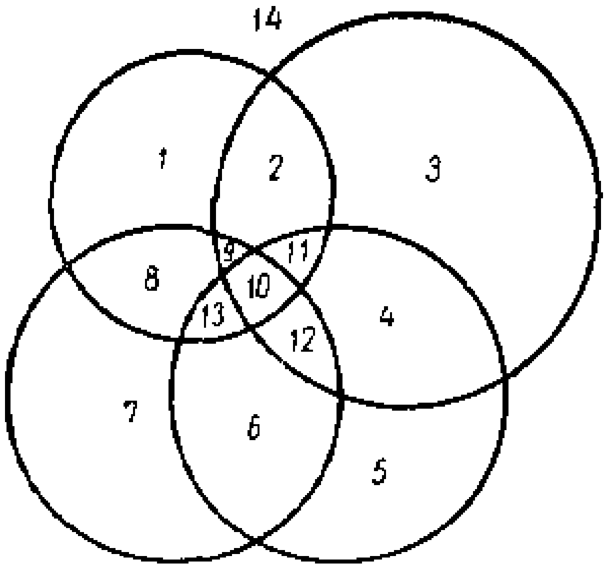


Рис. 62

Предположение, полученное из индуктивных соображений, нуждается еще в доказательстве. Прежде всего, необходимо *научиться формулировать математические предположения* на основании наблюдений, проведенных в ряде частных случаев, а затем уже выяснять, будут ли полученные гипотезы истинными или ложными.

Индукция при поиске способа решения задач

Предварительное рассмотрение *частных случаев* предложенной нам задачи может навести на метод ее решения в общем случае. Если при решении трудной задачи у нас возникают серьезные затруднения, полезно себя спросить: *«А не могу ли я решить эту задачу в каком-либо простом частном случае?»*. После того, как нам удалось нащупать вот такой частный случай, ставим перед собой уже новый вопрос: *«Нельзя ли воспользоваться этим решением (или приобретенным нами опытом), чтобы решить задачу в каком-либо более сложном (но, может быть, тоже частном) случае?»*. Такие рассуждения повторяем достаточное число раз, пока не доберемся до решения исходной задачи.

Выполняя более точный чертеж, из рисунка усматриваются свойства фигур, на основе этого делаются определенные выводы, а затем они доказываются. Желательно на конкретных примерах убедиться в том, что такое «рассматривание», анализ рисунка, выявление его особенностей с последующим обязательным доказательством своих выводов очень полезно при поиске решения задачи. Такое «изучение» рисунка наталкивает часто на удачные идеи, существенно облегчающие поиск решения задачи.

Во многих случаях индукцию желательно сочетать с переформулировкой задачи. Идею решения, возникшую при рассмотрении частных случаев, формулируем в виде промежуточной, вспомогательной задачи. Тем самым более четко оттеняется индукция и переформулировка задачи.

Встречаются такие задачи, решения которых без использования индукции найти довольно трудно. Особенно удобен этот прием в сочетании с другими эвристиками.

Рассмотрим пример, где индукция выступает незаметно.

***Пример* 2.** Точки M, K, E лежат на сторонах треугольника ABC (рис. 63), AK – биссектриса угла A, $MK \parallel AC$, $ME \parallel BC$. Докажите, что $AM = EC$.

Решение.

Чтобы доказать равенство отрезков AM и EC, попытаемся заменить их такими отрезками, которые принадлежали бы одной фигуре. Рассмотрим рисунок. Из него видно, что отрезки EC и MK как будто равны (<u>*применяем индукцию*</u>). Если это удастся доказать, тогда задачу можно будет свести к доказательству того, что $AM = MK$. Докажем наше предположение.

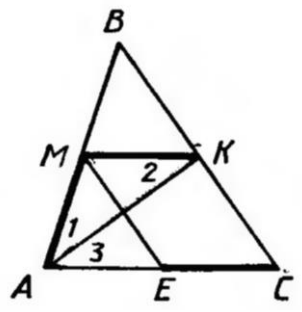


Рис. 63

Так как по условию противоположные стороны четырехугольника $MKCE$ попарно параллельны, то он параллелограмм и, значит, $EC = MK$. Итак, наше предположение оправдалось, и теперь решение задачи действительно можно свести к доказательству равенства отрезков AM и MK, которые принадлежат одной фигуре – треугольнику AMK.

В треугольнике AMK стороны AM и MK будут равны, если равны лежащие против них углы 1 и 2. Это и остается доказать.

Переходим к данным задачи. Пытаемся получить следствия из тех данных, которые мы еще не использовали. Так как AK – биссектриса, то $\angle 1 = \angle 3$.

Теперь вместо равенства углов 1 и 2 можно доказать, что $\angle 2 = \angle 3$.

Вновь переходим к данным и замечаем, что эти углы действительно равны, так как они накрест лежащие при параллельных прямых MK и AC. Отсюда $AM = MK$ и $AM = EC$.

На примере решения следующей задачи, которая сложнее предыдущей, покажем, что рассмотрение частных случаев (индуктивный метод) существенно ускоряет поиск решения.

Пример 3. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее следующими свойствами: *а*) его запись в десятичной системе заканчивается цифрой 6; *б*) если зачеркнуть последнюю цифру 6 и записать ее перед оставшимися цифрами, то получится число, в 4 раза больше исходного.

Решение.

Выберем форму записи чисел. Для этого *рассмотрим частные случаи* (*применяем индукцию*):

а) $2736 = 2\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 6;$
$6273 = 6\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 3;$

б) $2736 = 273\cdot 10 + 6;$
$6273 = 6\cdot 10^3 + 273.$

Форма *б*) удобнее, так как, например, в случае четырехзначного числа $\overline{abc6} = \overline{abc}\cdot 10 + 6$ имеем одно неизвестное число $(\overline{abc})$ вместо трех $(a,\ b$ и $c)$.

Итак, рассмотрение частных случаев подсказывает нам, что данное число удобно обозначить через $x\cdot 10 + 6$. Тогда полученное число будет $6\cdot 10^k + x$. Составляем уравнение $6\cdot 10^k + x = 4(x\cdot 10 + 6)$, $x = \dfrac{2(10^k - 4)}{13}$.

Так как x – целое число, то $(10^k - 4)$ должно делиться на 13. Остается выяснить, при каких k это возможно.

Формулируем вспомогательную задачу: *«Найти, при каких значениях* k *выражение* $(10^k - 4)$ *делится на 13».*

Учитывая еще не использованное условие о нахождении наименьшего натурального числа, приходим к «догадке» отыскания k путем проб:

$k=1,\ 10^1-4=6$ не делится на 13,

$k=2,\ 10^2-4=96$ >>

$k=3,\ 10^3-4=996$ >>

$k=4,\ 10^4-4=9996$ >>

$k=5,\ 10^5-4=99996,\ 99996:13=7692,$

т.е. $10^k-4=99996,\ x=\dfrac{2\cdot 99996}{13}=15384$.

Следовательно, искомое число: $15384\cdot 10+6=153846$.

Проверим: $4\cdot 153846=615384$. А то, что число 153846 – наименьшее, следует из испытаний значений $k=1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$.

Посмотрим, не упростится ли решение, если выбрать другую форму записи чисел. Рассмотрим частный случай, при котором выполняется только часть условий задачи. Предположим, что $\overline{abc6}$ – искомое число, $\overline{6abc}$ – полученное и что $\overline{abc6}\cdot 4=\overline{6abc}.$ (1)

На самом деле это равенство может не выполняться, если искомое число содержит больше цифр, чем четыре. Но для поиска решения это, быть может, несущественно. Сама форма записи «подсказывает» нам идею о целесообразности использования алгоритма умножения многозначных чисел. Посмотрим, не получим ли мы при использовании этого алгоритма хотя бы одну-две неизвестные нам цифры.

Вычисляем произведение, стоящее в левой части равенства (1): $6\cdot 4=24$. Следовательно, последняя цифра числа, стоящего в правой части равенства (1), есть 4, т. е. $c=4$. Наше предположение оправдывается.

Продолжаем умножение: $4\cdot 4=16,\ 16+2=18$. Следовательно, $b=8$. Получили вторую неизвестную цифру. Далее: $4\cdot 8=32,\ 32+1=33$, т. е. $a=3$. Очевидно, таким путем мы можем умножать число: $\overline{abc...mnk6}\cdot 4$ (2) до тех пор, пока не получим в произведении цифру 6. В силу наших рассуждений полученное при этом число 615 384 – наименьшее. Значит, и искомое число 153846 – наименьшее. Кроме того, $615384=4\cdot 153846$.

Как видим, при отыскании второго способа решения рассмотрение частных случаев также облегчает поиск. Конечно, можно рассматривать сразу общую форму числа (2). Но тогда записи были бы более громоздкими, и, может быть, по этой причине уменьшилась бы вероятность отыскания идеи решения.

Опр. **Прогнозирование** – эвристический прием, предполагающий предвидение тех результатов, к которым может привести поиск.

В современной психологии считают, что человек ищет и находит решение задачи на основе непрерывного прогнозирования искомого, т. е. некоторого предвидения получаемого результата в процессе анализа, синтеза, обобщения. Прогнозирование хода событий и регулирование на этой основе последующей мыслительной деятельности является одной из основных функций психики. Формирование умения прогнозировать, предвидеть результаты, к которым приведет каждый отдельный шаг в процессе поиска решения задачи, является важным компонентом развития мышления. С целью такого развития при обсуждении идеи решения задачи, когда кто-либо из учащихся предлагает воспользоваться той или иной формулой, теоремой, тождественным преобразованием, целесообразно добиваться того, чтобы учащийся обосновывал разумность своего предложения и хотя бы в общих чертах указывал, к чему оно приведет.

Пример 4. Докажите тождество $1+2\cos 7x=\dfrac{\sin 10{,}5x}{\sin 3{,}5x}$.

Решение.

При поиске решения этой задачи сразу возникает мысль, что левую часть можно преобразовать по формуле $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. Однако что это нам даст? Поэтому эту идею нужно отвергнуть, поскольку надо предусматривать, предвидеть хотя бы на один-два шага вперед, к чему приведет предлагаемое преобразование.

Попробуем рассмотреть вид коэффициентов $7x=2\cdot 3{,}5x$; $10{,}5x=3\cdot 3{,}5x$, разложим числитель правой части по формуле $\sin(7x+3{,}5x)$, при этом уменьшится число аргументов. Значит, такое преобразование должно привести к рациональному решению. Кроме того, в правой части появится $\cos 7x$, который имеется в левой части тождества.

Осуществим этот путь решения задачи:

$$\frac{\sin(7x+3{,}5x)}{\sin 3{,}5x}=\frac{\sin 7x\cdot\cos 3{,}5x+\cos 7x\cdot\sin 3{,}5x}{\sin 3{,}5x}=A.$$

Далее заметим, что можно еще раз уменьшить число аргументов, преобразовав $\sin 7x$ и $\cos 7x$ по формулам двойного аргумента, и что после этого сократится дробь. Здесь есть предвидение, но без учета левой части (синтеза) оно может привести к нерациональным действиям.

Сопоставим полученное выражение с левой частью тождества. Теперь уже можно заметить, что не стоит применять формулу косинуса двойного аргумента. Продолжим преобразовывать правую часть:

$$A = \frac{2\sin 3,5x \cdot \cos^2 3,5x + \cos 7x \cdot \sin 3,5x}{\sin 3,5x} = 2\cos^2 3,5x + \cos 7x.$$

Еще раз, сопоставляя полученное выражение с левой частью доказываемого тождества, видим, что рационально будет применить формулу понижения степени косинуса и закончим решение.

Как видим, прогнозирование совместно с анализом, синтезом, обобщением и с рядом методических рекомендаций помогает найти путь решения задачи. Прогнозирование – важный элемент поиска решений и мощное средство развития навыков логического мышления.

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

Если мы вспомним знаменитых сыщиков, описанных в детективной литературе (например, Дюпена, Шерлока Холмса, Пуаро), то обратим внимание на то, что они преуспевали в расследовании преступлений именно благодаря наблюдательности и аналитическим способностям (индукции и дедукции). С удивительной точностью и умением они отыскивали причины, побудившие человека к тому или иному преступлению, и с математической точностью делали соответствующие выводы; из незначительных следов, побочных обстоятельств делали остроумные выводы, восстанавливая картину преступления. Авгуры предсказывали конкретным военачальникам их личные победы или поражения, жрецы прорицали для конкретных правителей.

Приведем пример для иллюстрации приема прогнозирования. Хороший шахматист не просто делает один ход, а предвидит на несколько ходов вперед, к чему этот ход приведет, т. е. прогнозирует направление дальнейшего развития партии.

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

ЗАДАЧИ НА ИНДУКЦИЮ

Задача 1. По данным рис. 64-66 сделайте индуктивные умозаключения. Установите их истинность. Попробуйте составить подобное задание и предложите его своему товарищу.

Рис. 64

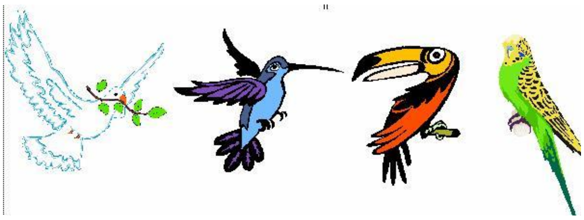


Рис. 65

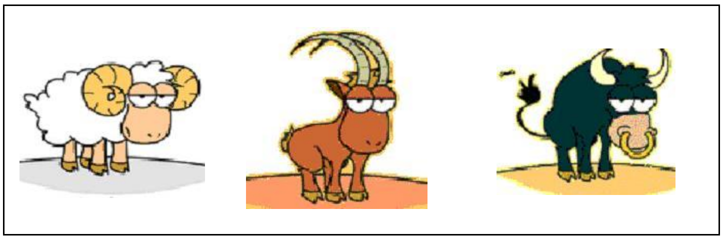


Рис. 66

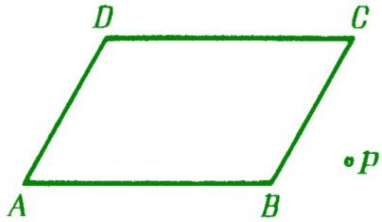


Рис. 67

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 2. Через точку *P* (рис. 67), лежащую в плоскости данного параллелограмма *ABCD*, проведите прямую, рассекающую параллелограмм на две равновеликие части.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 3. Дан правильный треугольник ABC. Докажите, что при любом выборе точки P внутри треугольника или на его границе сумма расстояний от этой точки до сторон треугольника есть величина постоянная.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 4. Пусть фигура Φ – какой-либо параллелограмм, M – его центр симметрии. Предложите способ разбиения фигуры Φ на пять равновеликих частей лучами, исходящими из точки M.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 5. В двух ящиках имеются шары: в одном – m, в другом – n, $m > n$. Двое играющих поочередно вынимают шары из ящика. Каждый раз игроку разрешается взять любое число шаров, но только из одного ящика. Выигравшим считается тот, кто вынимает последний шар. Как должен играть первый (тот, кто начинает игру), чтобы выиграть?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 6. Будем рассматривать натуральные числа p, $2p+1$, $4p+1$. Если p и $2p+1$ – простые числа, то можно ли что-либо утверждать о простоте или непростое числа $4p+1$?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 7. $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$, $9^2=81$. Каждое из этих чисел при делении на 8 дает в остатке единицу. Что это: случайность или проявление некоторой закономерности? Если вы здесь подозреваете закономерность, то сформулируйте свою гипотезу. Подвергните ее какому-либо испытанию на правдоподобие. Если ваша гипотеза выдержит это испытание, попытайтесь ее доказать.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 8. Рассмотрите такие примеры:

148 делится на 37 – и 814 делится на 37;

259 делится на 37 – и 925 делится на 37;

703 делится на 37 – и 370 делится на 37.

Не возникает ли у вас подозрение, что приведенные примеры свидетельствуют о какой-либо общей закономерности? Какой? Сформулируйте свою гипотезу.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 9. Делится ли число 11…11 (81 единица) на 81?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 10. В поселке 100 домов. Сколько заборов, не пересекающих друг друга, можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали бы одну и ту же совокупность домов? Например, на рис. 68 всего 4 дома и 7 заборов.

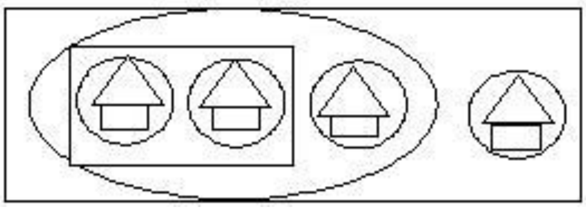


Рис. 68

Решение.

Ответ: _______________.

ЗАДАЧИ НА ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Задача 11. В параллелограмме $ABCP$ $BC = 2 \cdot AB$, M – середина AP, E – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на AB. Докажите, что $\angle EMP = 3 \cdot \angle AEM$.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 12. Проследите за результатами использования прогнозирования при решении следующей задачи: «Вычислите $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{ctg\dfrac{\alpha}{2} - tg\dfrac{\alpha}{2}}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = m$».

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 13. Выполните тождественные преобразования следующих иррациональных выражений, используя прогнозирование:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right),\ \frac{\sqrt[3]{a^2}-1}{\sqrt[3]{a}-1},\frac{b-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}-1},\frac{\sqrt[4]{mn^3}+\sqrt[4]{m^3n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 14. Докажите тождество $(1+2\cos 7x)\sin 3{,}5x=\sin 10{,}5x$, используя прогнозирование.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 15. Используя прогнозирование, докажите следующее утверждение: «В произвольном четырехугольнике сумма квадратов длин диагоналей равна удвоенной сумме квадратов длин средних линий (т. е. отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника)».

Решение.

Ответ: ________________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Рефлексивная кривая». Горизонтальная ось на рис. 69 разбита на «три этапа занятия». На вертикальной оси отмечено настроение по шкале от -10 до 10. Отметьте свое настроение четырьмя точками с координатами A (0;0), B (начало занятия; настроение), C (середина занятия; настроение), D (конец занятия; настроение). Координаты настроения выберите сами от -10 до 10. Затем постройте рефлексивную кривую, соединив все полученные точки.

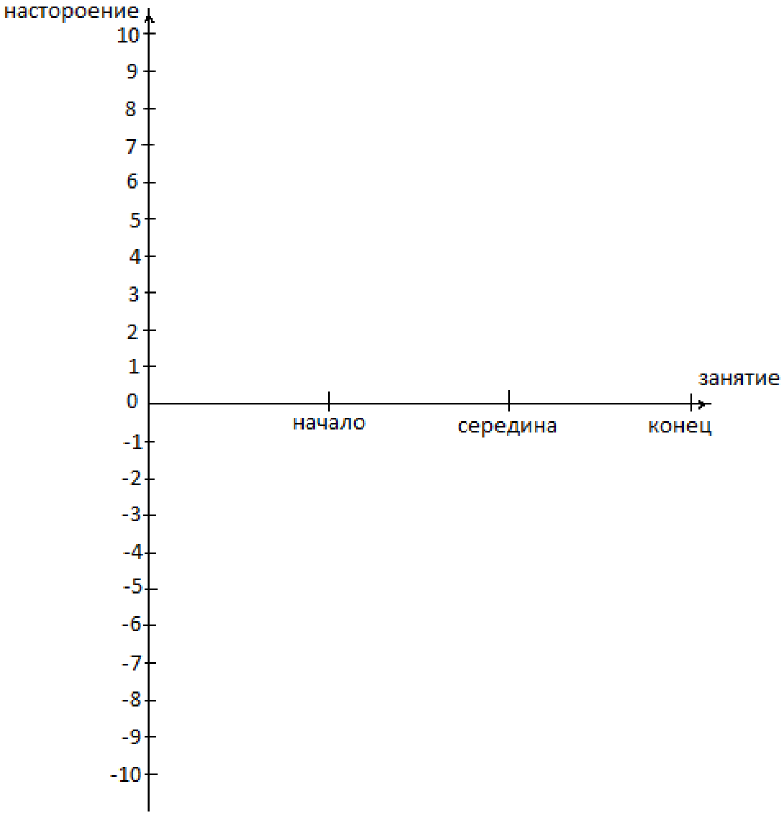


Рис. 69

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Шевельнул донец уздою,
Шпорой прикольнул,
И помчался конь стрелою.

А.С. Пушкин

Занятие 9
ПОШЕВЕЛИМ ТОЧКУ

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

При испытании геометрических высказываний на правдоподобие, при поиске контрпримеров математик нередко рассуждает так: «Возьму хороший случай, когда высказывание подтверждается, и пошевелю одну точку (или несколько точек, или отрезок, или какое-либо другое множество точек). Не могу ли я таким способом получить «плохой случай», когда высказывание уже не подтверждается?» Рассмотрим пример.

Пример 1. Верно ли высказывание: «Если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ один угол прямой, а диагонали равны, то он – прямоугольник»?

Решение.

Начнем поиск решения следующим образом. Возьмем хороший случай: прямоугольник (рис. 70); у него угол A – прямой, $AC = BD$. Возникает вопрос: нельзя ли так пошевелить на чертеже одну точку – скажем, вершину C, – чтобы условие обсуждаемого высказывания все еще выполнялось (т. е. чтобы угол A остался прямым, а диагональ AC осталась равной BD), но чтобы заключение уже не имело места (т. е. чтобы после такого шевеления четырехугольник $ABCD$ уже перестал быть прямоугольником)? Условие, будет по-прежнему выполняться, если точку C немного переместить по окружности $Г$ (с центром A и радиусом BD) (рис. 71).

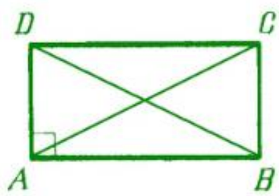


Рис. 70

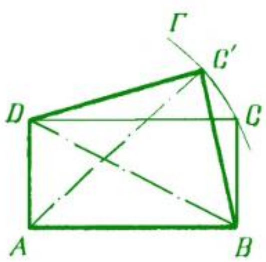


Рис. 71

Если после перемещения точка C займет положение C', то получим контрпример: для четырехугольника $ABC'D$ по-прежнему выполняется условие, но не заключение приведенного в задаче утверждения. Делаем вывод, что высказывание из примера 1 неверно.

Пример 2. Известно, что в каждом треугольнике три высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке (рис. 72-73). Верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра: «Все высоты любого тетраэдра (или их продолжения) имеют общую точку»?

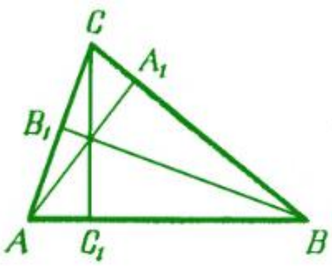


Рис. 72

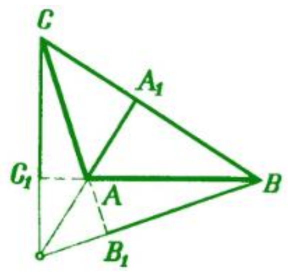


Рис. 73

Решение.

Возьмем какой-нибудь простой случай – пирамиду, у которой все рёбра одинаковой длины (рис. 74). Имеем хороший случай, в ней все высоты проходят через одну и ту же точку O. А что теперь сделаем? Можем пошевелить одну вершину, например точку D, но куда ее шевелить? Вниз, по направлению к точке O? Но тогда сместятся все высоты, и трудно будет что-нибудь обнаружить. Надо переместить точку D по ребру DA. Получим точку D' (рис. 75).

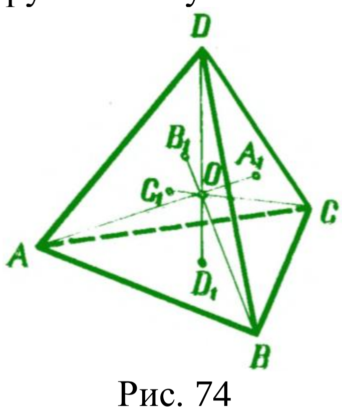


Рис. 74

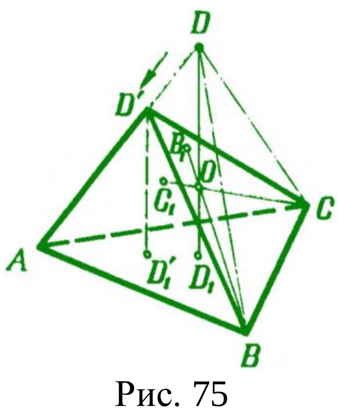


Рис. 75

Рассмотрим пирамиду $D'ABC$. У нее CC_1 и BB_1 – по-прежнему высоты, и они проходят через точку O. А прямая, проведенная через точку D' перпендикулярно к плоскости треугольника ABC, уже наверняка через O не пройдет. Итак, пошевелив надлежащим образом вершину D, мы получили такую пирамиду, что четыре прямые, на которых лежат четыре высоты пирамиды, не имеют общей точки. Выходит, что теорема, аналогичная теореме о трех высотах треугольника, для произвольной треугольной пирамиды неверна.

Суть приема «малых шевелений». Предположим, что мы хотим построить, подобрать, «сконструировать» фигуру, обладающую несколькими свойствами, скажем I, II, III. Следуя нашему приему, подбираем сначала фигуру, обладающую не всеми, а только некоторыми из этих свойств, например, свойствами I и II; а затем шевелим эту фигуру (например, сдвигаем точку). Если свойства I и II устойчивы, т. е. не разрушаются, не теряются при «малых шевелениях», то можно попытаться подобрать «шевеление» так, чтобы после него фигура обладала еще и пропущенным свойством (III). Так, например, в примере 1 при сдвиге точки C вдоль окружности Γ два свойства ($\angle A \neq 90^\circ$ и $AC = BD$) устойчивы, а третье ($\angle B \neq 90^\circ$) фигура приобретает после надлежащего шевеления [3].

Этот эвристический прием, особенно полезен для построения контрпримеров. Пусть у нас нет уверенности в том, что существует фигура, обладающая заданными свойствами. Тогда пытаемся подобрать фигуру, обладающую хотя бы некоторыми из требуемых свойств, скажем, всеми этими свойствами, кроме одного; затем немного смещая какую-либо точку (или отрезок или другую часть рассматриваемой фигуры), пытаемся получить фигуру, обладающую и пропущенными свойствами.

Идея малых изменений полезна и при решении задач, в которых требуется из ряда возможных вариантов выбрать оптимальный. В этом случае выбираем сначала (более или менее произвольно) какой-либо вариант и ставим себе вопрос: «Нельзя ли путем малого изменения улучшить этот вариант?» Если это удается сделать, то относительно улучшенного варианта ставим себе тот же вопрос. Таким образом, после нескольких «шагов» можем прийти к варианту, который нам улучшить не удается. Правдоподобно, что последний вариант и есть оптимальный (это заключение должно быть подкреплено надлежащим доказательством).

Идею «малых шевелений» полезно привлечь и тогда, когда в каком-то множестве фигур требуется выбрать (построить, найти) ту, которая в том или ином смысле является «наилучшей» (например, имеет наименьший периметр, наибольшую площадь и т. п.). В таких задачах основная трудность состоит в том, чтобы сначала угадать правильный ответ. Для этого возьмем сначала какую-то фигуру из данного множества и попробуем малым шевелением ее улучшить. Если это не удается, то правдоподобно, что взятая фигура является искомой (за этим, разумеется, должно последовать строгое доказательство) [1].

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

«Изменение взгляда на вещи» – история, которую рассказал Стефан Кавей в своей книге.

Однажды темной ночью во время шторма в порт после учений возвращались два военных судна. Море было бурным, клочья тумана застилали горизонт. Капитан одного из судов оставался на мостике. Он хотел быть уверенным в том, что все идет нормально.

Вскоре после наступления темноты дозорный объявил: «Вижу огонь по правому борту». «Относительно кормы – движущийся или нет?» — спросил капитан.

«Неподвижный, сер – ответил дозорный, имевший в виду то, что корабль идет встречным курсом».

Капитан приказал сигнальщику «Просигналить: иду встречным курсом. Советую изменить ваш курс на двадцать градусов».

В ответ пришел сигнал: «Советую изменить ваш курс на двадцать градусов».

Капитан приказал: «Ответь следующее: Я – капитан, меняйте курс на двадцать градусов».

Пришел ответ: «Я матрос второго ранга, советую Вам изменить курс на двадцать градусов».

Капитан, теперь уже достаточно разгневанный, отрывисто прокричал команду: «Это – военный корабль. Измените курс на двадцать градусов».

В ответ пришел сигнал: «Я – маяк».

Так меняется взгляд на вещи!

Один маленький бит информации. «Я – маяк» полностью изменил точку зрения капитана на этот предмет. Не кажется ли Вам, что взгляд капитана на другие вещи также должен измениться?

Так происходит и в нашей жизни, стоит взглянуть на какую-то вещь чуть с другой точки зрения, с другого ракурса (пошевелить точку), как полностью изменяется представление о ней.

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. Из точки P, расположенной внутри выпуклого многоугольника, опускаются перпендикуляры на его стороны или на их продолжения. Условимся основание такого перпендикуляра называть «приятным», если оно принадлежит стороне, и «неприятным» в противном случае. Верно ли, что всякая внутренняя точка любого многоугольника имеет, по крайней мере, две «приятные» проекции?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 2. Существует ли выпуклый ограниченный многогранник, ортогональная проекция которого на любую плоскость является 1979-угольником?

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 3. Можно ли в правильном тетраэдре просверлить сквозное отверстие (не обязательно круглое), чтобы через него мог пройти такой же тетраэдр?

Задача 3а. Можно ли расположить в пространстве два равных правильных тетраэдра, так, чтобы при ортогональном проектировании их на некоторую – одну и ту же – плоскость проекция одного тетраэдра лежала целиком (включая границу) внутри проекции другого тетраэдра?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 4. Внутри угла C, меньшего, чем развернутый, дана точка P. Укажите способ построения прямой, проходящей через точку P и отсекающей от угла C треугольник наименьшего периметра.

Решение.

Ответ: _______________.

Задача 5. Три друга Алик, Боря и Вася – рассказали, что они будто бы однажды сыграли некоторое число партий в шахматы, причем каждый с каждым сыграли одинаковое число партий, Потом, когда начали решать, кто лучше сыграл и должен считаться победителем, Алик сказал своим товарищам: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Боря сообщил: «А у меня, больше чем у каждого из вас, выигрышей», а Вася заметил: «Я набрал больше всего очков» (выигрыш – 1 очко, ничья – $\frac{1}{2}$ очка, проигрыш – 0). Мог ли в действительности быть турнир с такими результатами? Если нет, то докажите; если да, то приведите подтверждающий пример.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 6. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и равны и, кроме того, $AB=CD$. Обязательно ли этот четырехугольник – квадрат?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 7. В выпуклом пятиугольнике все стороны равны. Обязательно ли этот пятиугольник правильный?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 8. В выпуклом пятиугольнике все диагонали равны. Обязательно ли этот пятиугольник правильный?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 9. В выпуклом шестиугольнике противоположные стороны попарно параллельны, а три диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны. Обязательно ли этот шестиугольник правильный?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 10. Около окружности описан четырехугольник, диагонали которого равны. Обязательно ли этот четырехугольник – трапеция?

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 11. На плоскости даны $2n$ точек $A_1,...,A_n,B_1,...,B_n$. Докажите, что малым шевелением этих точек можно добиться того, что чтобы никакие два из отрезков $A_1B_1,...,A_nB_n$ не были параллельны и никакие три не пересекались в одной точке.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 12. В пространстве точек n точек A_1, … , A_n. Докажите, что малым шевелением этих точек можно добиться того, что чтобы для каждых четырех различных индексов i, j, k, l точки A_i,A_j,A_k,A_l не лежали в одной плоскости.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 13. Дан выпуклый n-угольник M. Докажите, что шевелением n-5 вершин этого многоугольника можно добиться того, чтобы никакие три диагонали не пересекались в одной точке.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 14. Дан многочлен $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Докажите, что малым шевелением свободного члена a_n можно добиться того, чтобы многочлен не имел кратных корней[7].

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 15. Внутри угла C, меньшего чем развернутый, дана точка P. Постройте прямую, проходящую через точку P и отсекающую от угла C треугольник наименьшей площади.

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 16. Если четырехугольник выпуклый, то сумма длин диагоналей больше его полупериметра. Приведите контрпример, показывающий, что обратная теорема неверна.

Решение.

[7] Указание: число x_0 тогда и только тогда является кратным корнем многочлена, когда оно одновременно является корнем этого многочлена и его производной.

Ответ: _______________.

Задача 17. Полуполоса *Ф* ограничена отрезком *BC* и двумя сонаправлеными лучами *BA* и *CD*. Точка *M* лежит внутри полосы, и притом ближе к прямой *BA*, чем к прямой *CD*. Проведите через *M* прямую так, чтобы она имела общие точки с лучами *BA* и *CD* и отсекала от полосы фигуру наименьшей площади.

Решение.

Ответ: _______________.

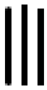
Задача 18. Из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, выберите такой, который имеет наибольшую площадь.

Ответ: _______________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Рефлексивная диаграмма». Разбейте круг (рис. 76) на три части, как показано на рис. 77, и заштрихуйте эти части в пропорциях, которые соответствуют Вашему состоянию на занятии.

 – принимал участие в обсуждении, всЕ понимал;

 – вел себя пассивно, но материал понимал;

 – чувствовал себя некомфортно, ничего не понимал.

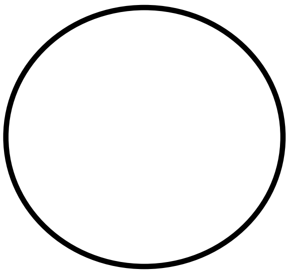


Рис. 76

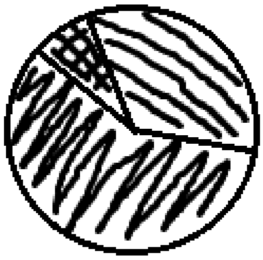


Рис. 77

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Важность «$\varepsilon - \delta$ определения» непрерывности состоит главным образом в его применимости к доказательству каких-либо фактов ... и лишь в незначительной мере – к обнаружению каких-либо фактов ... Для получения ответов лучше использовать интуитивные соображения – даже если они кажутся весьма зыбкими. Для доказательства же правильности ответов только строгие формальные доводы заслуживают доверия.

Дж. Б. Россер[8]

Занятие 10
НЕПРЕРЫВНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ

ЗНАКОМИМСЯ С ЭВРИСТИКОЙ

В самых различных вопросах математики нередко удается получить правильные ответы на те или иные задачи, если рассмотреть величины, которые с течением времени изменяются непрерывно.

Рассмотрим шарнирный угол (рис. 78); его начальную сторону OA оставим неподвижной, а конечную сторону OB будем поворачивать вокруг точки O против направления движения часовой стрелки; тогда величина угла, заметаемого лучом OB, будет изменяться непрерывно с течением времени.

Непрерывно меняется с течением времени площадь, заметаемая каким-нибудь движущимся отрезком AB (рис. 79).

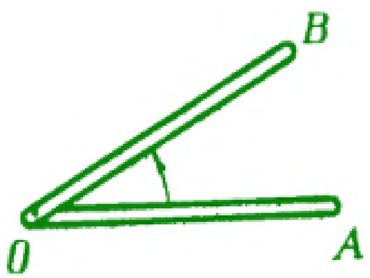


Рис. 78

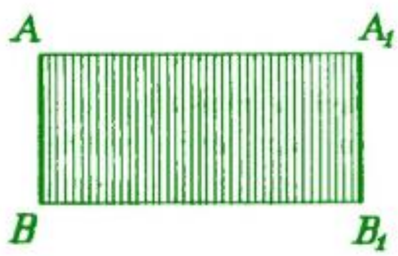


Рис. 79

[8] Дж. Б. Россер – современный английский математик; эпиграф взят из его книги «Логика математиков».

Рассмотрим еще пример величины, которая не меняется непрерывно. Рассмотрим на координатной плоскости фигуру Φ, которая является объединением квадрата Q (квадрат рассматривается вместе со своей внутренней областью) и оси ординат Oy. Пусть прямая MN (рис. 80) параллельна оси Ox и, начиная с некоторого момента t_0, движется (опускается) равномерно «вниз» (т. е. в направлении, противоположном направлению оси Oy). Пересечение Φ с прямой MN может оказаться либо одной точкой, либо отрезком. Обозначим через $l(t)$ длину такого отрезка (или точки) в момент t. В начале движения (при $t = t_0$) пересечение состоит из одной точки, и поэтому $l(t) = 0$ при $t = t_0$. В течение некоторого промежутка времени такая картина сохранится: будет $l(t) = 0$. Но вот в какой-то момент t_1, прямая MN совпала с прямой BC; тогда $l(t_1) = BC = 2$. При дальнейшем опускании прямой MN будем еще в течение некоторого времени иметь $l(t) = 2$ – до того момента t_2, когда прямая MN совпадет с прямой DA. А после этого (при $t > t_2$) будет опять $l(t) = 0$. В данном случае мы, естественно, скажем, что величина $l(t)$ меняется в моменты t_1 и t_2 не непрерывно, а скачкообразно. Графически можно функцию $l(t)$ изобразить так (рис. 81).

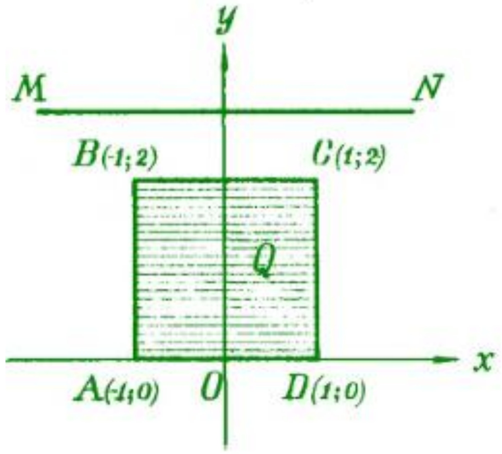


Рис. 80

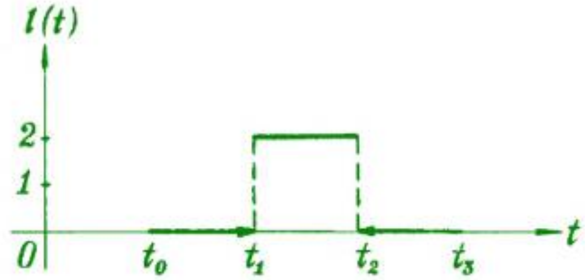


Рис. 81

Представим себе, что какая-нибудь величина (например, длина отрезка, величина угла, сумма нескольких углов, площадь какой-то изменяющейся фигуры и т. п.) менялась с течением времени непрерывно. Разнообразные приложения находит следующее интуитивно очевидное утверждение, которое называется «***теоремой о промежуточном значении***»:

Если некоторая величина (u) *менялась непрерывно в течение какого-то отрезка времени и в начальный момент она была меньше постоянной* c, *а в конечный она была больше, чем* c, *то был такой промежуточный момент времени, когда величина* (u) *была равна* (c).

В качестве примера на применение этого утверждения рассмотрим следующую задачу.

Пример 1. Существует ли на плоскости такой четырехугольник, у которого последовательные стороны имеют длины 3 *м*, 4 *м*, 5 *м* и 6 *м* и около которого можно описать окружность?

Решение.

Вообразим себе шарнирный четырехугольник $ABCD$ со сторонами, равными 5, 4, 3, 6 единицам (рис. 82). Так как $AB+BC=CD+DA$, то можно деформировать (сплющить) четырехугольник таким образом, чтобы все его вершины оказались на одной прямой (рис. 10.6).

В этом начальном положении сумма двух углов A и C четырехугольника чему будет равна $\angle A+\angle C=0^\circ$. Видим, что в начальном положении четырехугольника $\angle A+\angle C<180^\circ$. Будем теперь сжимать четырехугольник (рис. 83) в направлении AC до тех пор, пока вершина C не окажется на отрезке BD (рис. 84). В этом конечном положении сумма $\angle A+\angle C>180^\circ$.

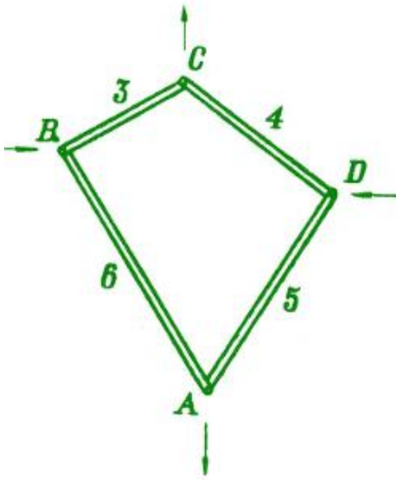


Рис. 82

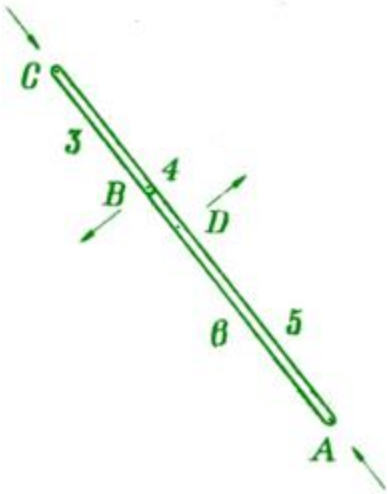


Рис. 83

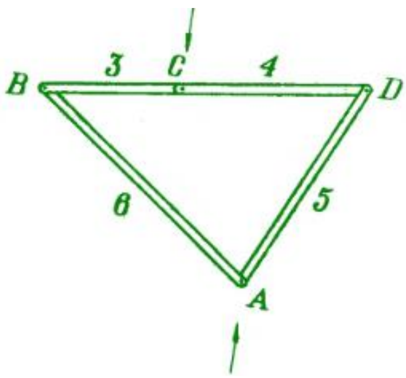


Рис. 84

Так как из начального положения четырехугольника мы пришли к конечному положению, непрерывно меняя сумму $\angle A+\angle C$, то в какой-то промежуточный момент величина $\angle A+\angle C$ была равна 180°. Следовательно, существует такое положение четырехугольника $ABCD$, при котором около него можно описать окружность.

Возникает вопрос: «*А можно ли соображения непрерывности применять не к четырехугольнику, а к замкнутым ломаным с большим числом звеньев?*». Можно, но только рассуждать надо несколько иначе. Нужно посмотреть какому условию должны удовлетворять положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, где $n\geq 3$, чтобы они могли служить длинами звеньев некоторой замкнутой ломаной? Видимо, наибольшее из этих чисел должно быть меньше суммы остальных, поскольку каждое звено (даже наибольшее) меньше остальной части периметра ломаной. Так вот, будем считать, что a_n – наибольшее из указанных n чисел, причем оно меньше суммы остальных:

$$a_n \geq a_1,\ a_n \geq a_2,\ ...,\ a_n \geq a_{n-1},\ a_n < a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}.$$

Вопрос состоит в следующем: «*Существует ли при этих условиях замкнутая* n*-звенная ломаная, у которой стороны имеют длины* $a_1,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ *и вокруг которой можно описать окружность?*».

Поступим следующим образом. Рассмотрим окружности различных радиусов R и в каждую из них впишем ломаную (вообще говоря, незамкнутую) $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ со звеньями длины (соответственно) $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{n-1}$ $(A_1A_2 = a_1,\ A_2A_3 = a_2,\ ...,\ A_{n-1}A_n = a_{n-1})$ (рис. 85). Длину хорды A_1A_n, соединяющей концы этой ломаной, обозначим через u (т. е. $u = A_1A_n$). Понятно, что u зависит только от выбора радиуса (R) окружности (но не зависит от выбора на окружности положения начала A_1 ломаной). Попытаемся подобрать такое значение R' радиуса R, при котором было бы $u > a_n$; затем подберем такое значение $R'' < R'$, при котором $u < a_n$. Если такие R' и R'' удалось бы обнаружить, то мы стали бы непрерывно менять радиус R окружности от R' до R''; иными словами, мы бы стали непрерывно сжимать окружность радиуса R' до тех пор, пока ее радиус не стал бы равным R''. При этом концы вписанной ломаной $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ будут скользить по окружности (но так, чтобы длины ее звеньев не изменялись); длина u замыкающего звена будет непрерывно изменяться. Так как в начальный момент (при $R = R'$) $u > a_n$, а в конечный (при $R = R''$) $u < a_n$, то по теореме о промежуточном значении должно существовать такое значение радиуса $R = R_0$ (R_0 – между R' и R''), для которого длина u хорды A_1A_n будет в точности равна a_n. Это означает, что вписанная в окружность радиуса R_0 замкнутая ломаная $A_1A_2...A_{n-1}A_nA_1$ будет иметь своими звеньями отрезки с длинами $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{n-1},\ a_n$. Мы получили бы положительный ответ на интересующий нас вопрос.

Возникает вопрос: «А откуда у нас может быть уверенность, что найдется окружность (какого-то радиуса R'), для которой $u > a_n$?». Обнаружить существование такой окружности нетрудно с помощью следующих соображений. Ведь если отрезки длины (соответственно) $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{n-1}$ отложить последовательно на прямой, то отрезок A_1A_n, соединяющий начало первого отрезка с концом последнего, будет иметь длину, большую, чем a_n (потому что по условию $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} > a_n$). Так как в окружности очень большого (по сравнению с a_n) радиуса R' ломаная $A_1A_2...A_n$ располагается «почти прямолинейно», то и в ней замыкающая хорда

A_1A_n будет иметь длину (u), большую, чем a_n. Значит, есть такое R', что для вписанной в окружность радиуса R' ломаной $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ будет $u > a_n$.

Но как быть с R''? Сделаем так. Выберем из чисел $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{n-1}$ самое большое. Пусть, ради конкретности, это будет a_3. Рассмотрим окружность диаметра a_3 и отложим от одного конца диаметра последовательно один за другим хорды длины a_2 и a_1, а от другого конца – хорды длины $a_4,\ a_5,\ ...,\ a_{n-1}$ (рис. 86). Получится ломаная, причем расстояние u между ее концами не больше диаметра, т. е. не больше a_3 и, значит, подавно не больше, чем a_n. Видим, что если положить $R'' = \frac{1}{2}a_3$, то будет u не больше, чем a_n. Итак, при любом выборе положительных чисел $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, для которых $a_n \ge a_1,\ a_n \ge a_2,\ ...,\ a_n \ge a_{n-1},\ a_n < a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$
существует замкнутая ломаная $A_1A_2...A_nA_1$ у которой длины последовательных звеньев выражаются числами $a_1,\ ...,\ a_n$ и около которой можно описать окружность[9].

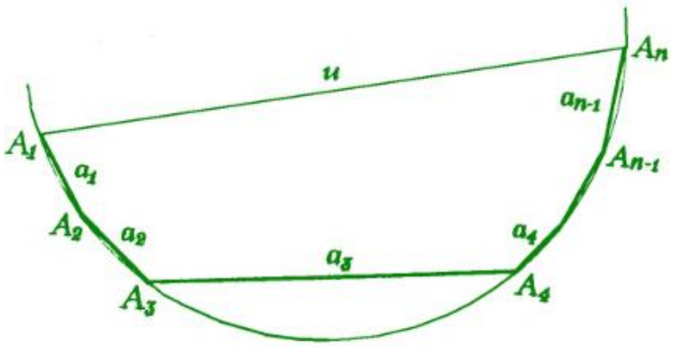


Рис. 85

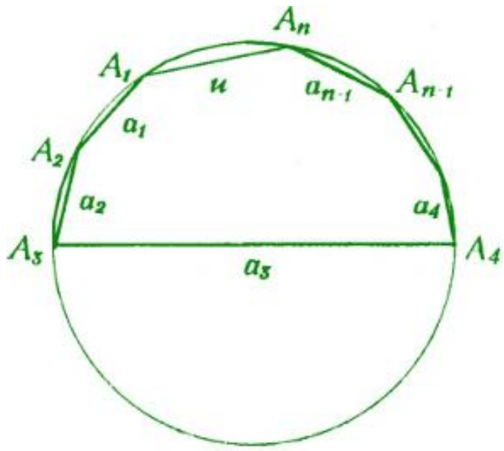


Рис. 86

***Пример* 2.** Имеет ли уравнение $4x - 2^x = 0$ (1) корень между 0 и 1?

Решение.

При решении воспользуемся теоремой о промежуточном значении. Пусть x – время, и пусть оно меняется от момента $x = 0$ до момента $x = 1$. При $x = 0$ величина $u = 4x - 2^x$ равна $-1 < 0$. При $x = 1$ величина u равна $2 > 0$. Поэтому найдется промежуточный момент x_0 между 0 и 1, что $u(x_0) = 0$, т. е. $4x_0 - 2x_0 = 0$. Значит, число x_0 – такой корень уравнения, который заключен между 0 и 1. Мы установили только существование корня уравнения.

[9] Не исключено, что ломаная, о которой мы говорили, окажется самопересекающейся. Однако, проводя рассуждение более тщательно, можно было бы доказать существование выпуклого многоугольника, обладающего всеми указанными выше свойствами

ИНТЕРЕСУЕМСЯ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВРИСТИКИ

Каждое «доказательство существования» кто-то из математиков в шутку сравнил с приобретением замкнутого сейфа с деньгами: сейф есть, а ключей от сейфа нет. Но если есть уверенность, что в сейфе имеются деньги, то имеет смысл приложить усилия, чтобы его открыть.

Наглядное представление о величинах, которые с течением времени изменяются непрерывно, имеет каждый. Можно привести немало случаев, когда каждый из нас, опираясь на такие наглядные представления, скажет, что та или иная величина изменяется непрерывно с течением времени. Например, путь, который пройдет автомобиль (точнее говоря, каждая его точка), будет расти непрерывно с течением времени. Непрерывно с течением времени будет изменяться и скорость автомобиля.

ПРИМЕНЯЕМ ЭВРИСТИКУ

Задача 1. В астрономии важную роль играет уравнение Кеплера: $x+e\sin x=M$. Выясните, имеет ли это уравнение при $e=0{,}3$ и $M=6{,}7$ корень в промежутке $(2\pi;3\pi)$.

Решение.

Ответ: ______________.

Задача 2. На плоскости начерчен квадрат и неперекрывающийся с ним треугольник. Существует ли такая прямая, которая разделила бы одновременно каждую из этих фигур на две равновеликие части?

Решение.

Ответ: _________________.

Задача 3. Диаметры двух кругов равны соответственно 1 *дм* и 0,5 *дм*. Существует ли прямая, параллельная линии их центров, из которой эти круги высекают две хорды суммарной длины $\sqrt[2000]{2000}$ *дм*?

Решение.

Ответ: _________________.

Задача 4. Существует ли такой квадрат, который был бы описан около параллелограмма $ABCD$, изображенного на рис. 87? Здесь предполагается, что длины отрезков AB и AD равны соответственно 20 *см* и 1 *см*, а $\angle BAD = 60^{\circ}$.

Рис. 87

Решение.

Ответ: ________________.

Задача 5. Около окружности описан четырехугольник, диагонали которого равны. Обязательно ли этот четырехугольник – квадрат или трапеция?

Решение.

Ответ: ________________.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Предмет настроения». Выберите один из предложенных предметов, который Вам больше подходит в данный момент.

		
☐ скучно, хочу погулять	☐ готов учиться	☐ хочу отдохнуть, устал

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Умения решать задачи – практическое искусство, подобное плаванию или катанию на лыжах, или игре на фортепиано: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь

Дж. Пойа

Занятие 11
ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ТРЕНАЖЁР

Изучите внимательно предложенные решения следующих задач. Для каждой решенной задачи укажите эвристические приемы, которые были использованы при ее решении.

1. Решите уравнение $2^{|x|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0$.

Решение.

Запишем $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = \cos y$. Очевидно, что $x^2 + |y| \geq 0$. Значит, $\lg(1 + x^2 + |y|) \geq 0$. Но $2^{|x|} \geq 1$. Следовательно, левая часть уравнения не меньше единицы, а правая – не больше. Таким образом, равенство может быть обеспечено лишь в том случае, если

$$\begin{cases} \cos y = 1, \\ |x| = 0, \\ x^2 + |y| = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = 0$.

Эвристики: ____.

2. Решите уравнение $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 = 5 + \cos(\frac{\pi}{3} + 4x)$.

Решение.

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 = \left(2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\right)^2 = 4\sin^2(x + \frac{\pi}{3}) \leq 4.$$

Но $5 + \cos(\frac{\pi}{3} + 4x) \geq 4$. Значит, корни исходного уравнения – это решения системы

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{3}+4x)=-1, \\ \cos(x+\frac{\pi}{3})=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, \\ x=\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n,k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n \in Z$.

Эвристики: ____.

Решите предложенные задачи. Укажите эвристические приемы, которые Вы использовали для поиска решения каждой задачи.

3. Решите уравнение $2\sin x = 5x^2+2x+3$.

Решение.

Ответ: _______________.

Эвристики: ____.

4. Найдите все решения уравнения: $\cos^4(x-\frac{\pi}{4})=a(1+\sin 2x)$, принадлежащие промежутку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Ответ: _______________.

Эвристики: ____.

5. Решите уравнение $x^4 + 1 = 2x^2 \sin y$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

6. В прямоугольном треугольнике, высота, проведенная на гипотенузу, делит её на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найдите углы треугольника.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

7. Решите уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

8. Решите уравнение $\sqrt{17 - x^2} = (3 - \sqrt{x})^2$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

9. Решите уравнение $\log_2^2(x+y) + \log_2^2 xy + 1 = 2\log_2(x+y)$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

10. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка K лежит на AM, причем $AK:AM = 1:3$. Через точку K и вершину B проведено прямую, которая пересекает AC в точке L. Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна S.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

11. Найдите двугранный угол α при основании правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанного около пирамиды шара втрое больше радиуса вписанного в нее шара.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

12. Решите уравнение $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

13. Решите уравнение $5^x-3^x=16$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

14. Решите систему уравнение $\begin{cases} 3-(y+1)^2=\sqrt{x-y}, \\ x+8y=\sqrt{x-y-9}. \end{cases}$

Решение.

Ответ: ________________.

Эвристики: ____.

15. Решите уравнение $x^3+\frac{1}{x^3}+x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=6$.

Решение.

Ответ: ________________.

Эвристики: ____.

16. Решите уравнение $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{8+x}=3$.

Решение.

Ответ: ________________.

Эвристики: ____.

ОЦЕНИВАЕМ СЕБЯ

«Дробь настроения». Распределите 10 баллов меду числителем и знаменателем обыкновенной дроби на рис. 89. В числителе дроби поставьте то количество баллов из 10, в которое Вы оцениваете свое настроение в конце занятия, а в знаменателе – в начале. Переведите полученную дробь в десятичную. Если полученное число будет:

– от 0,1 до 0,5, то Ваше настроение *ухудшилось*;

– от 0,5 до 1,5, то Ваше настроение *не изменилось*;

– от 2,3 до 9, то Ваше настроение *улучшилось*.

Обыкновенная дробь Десятичная дробь

Рис. 89

Оцените предложенные задачи с точки зрения:

а) *интереса*: ________________________________;

б) *доступности:* ______________________________;

в) *эвристичности:*_____________________________.

ОСОЗНАЁМ СВОЁ ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

Занятие 12
ПОДВЕДЕНИЕ ИТОГОВ. ЗАЧЁТ

ДИАГНОСТИРУЕМ СЕБЯ

Изучите внимательно предложенное решение следующей задачи и укажите эвристические приемы, которые были использованы при ее решении.

1. Решите уравнение $\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x=2$.

Решение.

Имеем $\cos^5 x+\sin^5 x=2-\sin^4 x$. Так как $\cos^5 x\le\cos^2 x$, $\sin^5 x\le\sin^2 x$, то $\cos^5 x+\sin^5 x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

В то же время $2-\sin^4 x\ge 1$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin^5 x+\cos^5 x=1,\\ 2-\sin^4 x=1,\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=-1,\\ \sin^5 x+\cos^5 x=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \sin^5 x+\cos^5 x=1,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=-1,\\ \cos^5 x=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos^5 x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z$.

Эвристики: ____.

Решите предложенные задачи. Укажите эвристические приемы, которые Вы использовали для поиска решения каждой задачи.

2. Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{x^2-5}{x^2+1}$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 3x+2y+z=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

4. Решите уравнение $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

5. Какое из чисел больше: 15^6 или 7^{12}?

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

6. Верно ли, что периметр любого треугольника больше радиуса описанной около него окружности?

Решение.

Ответ: _______________.

Эвристики: ____.

7. Решите уравнение $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Решение.

Ответ: _______________.

Эвристики: ____.

8. Решите уравнение $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

9. Длина боковой стороны трапеции равна a, расстояние от нее до середины боковой стороны равно b. Найдите площадь трапеции.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

10. Решите уравнение $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

11. Решите уравнение $4\cdot 3^{3x+1}+4=5\cdot 2^{9x}$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

12. Решите уравнение $x^2+3x-18+\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

Решение.

Ответ: ______________.

Эвристики: ____.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ЭВРИСТИКИ

1) аналогия;
2) введение вспомогательного элемента:
    2.1) вспомогательный линейный элемент;
    2.2) вспомогательный элемент – площадь или объем;
    2.3) вспомогательный элемент – угол;
    2.4) вспомогательное построение;
3) введение вспомогательных неизвестных:
    3.1) подстановки, ведущие к сокращению числа переменных;
    3.2) подстановки, сохраняющие число переменных;
    3.3) подстановки, увеличивающие число переменных;
4) выделение целой части дроби;
5) выражение одной переменной через другую;
6) инверсия;
7) использование центра масс (барицентрический метод);
8) использование непрерывности;
9) использование-симметрии;
10) испытания на правдоподобие:
    10.1) проверка на частных случаях;
    10.2) построение контпримера;
    10.3) проверка по размерности;
    10.4) проверка на симметрию;
11) метод малых изменений;
12) метод малых шевелений;
13) переформулировка;
14) переход к равносильной задаче;
15) разбиение «целого на части»;
16) рассмотрение крайних случаев («правило крайнего»);
17) рассмотрение частных случаев;
18) реконструкция «целого по части».

ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ПРИОБРЕТЕНИЕ

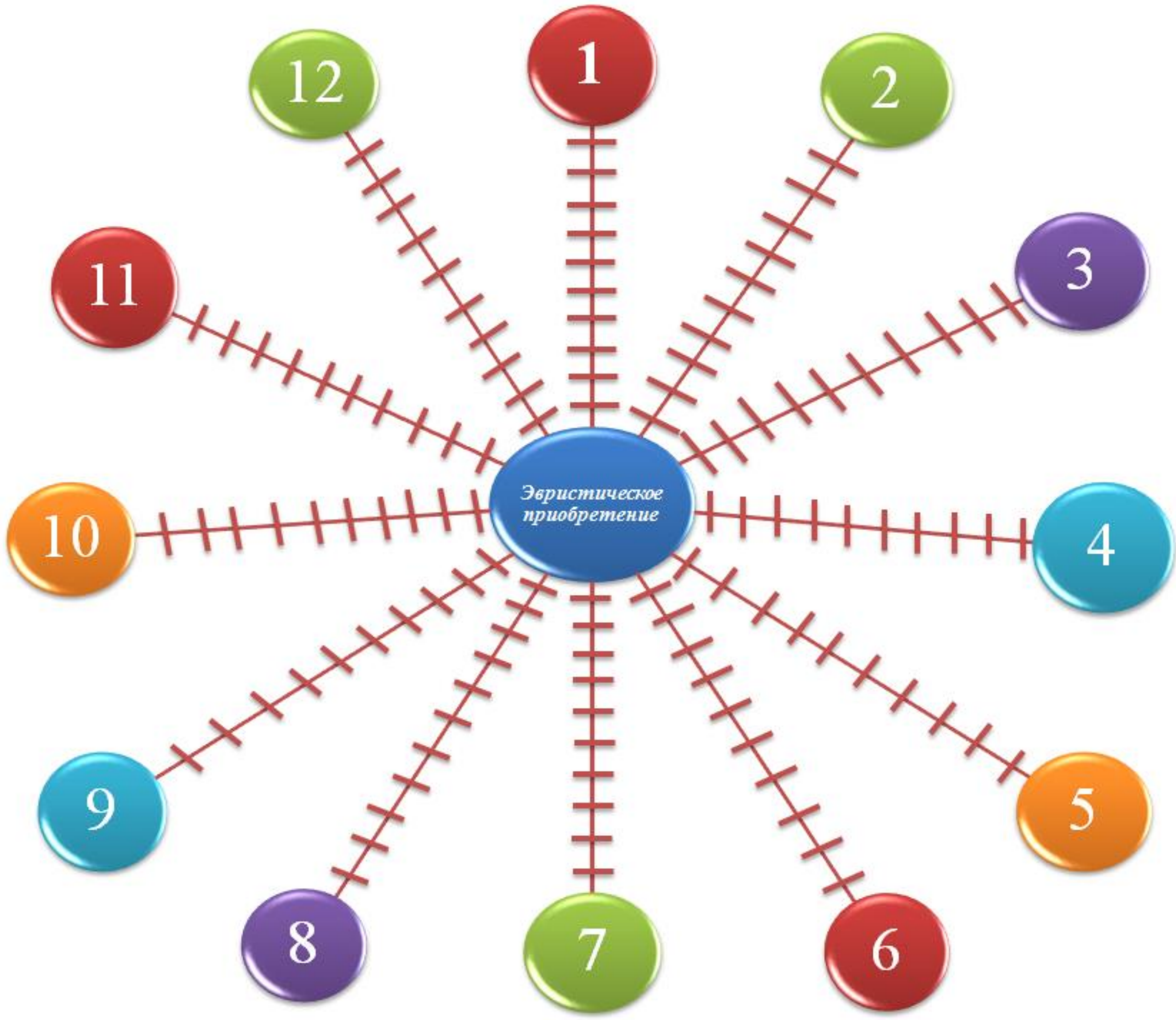


Рис. 90

Инструкция: Число в цветном круге означает номер факультативного занятия. В каждом занятии Вы указывали свои эвристические приобретения. На каждой оси нужно от центра отсчитать столько полосок, сколько в данном занятии вами было указано эвристических приобретений. На нужной полоске нарисуйте точку. Так проделайте 12 раз. После чего все точки соедините плавной линией. Пример показан на рис. 91-92.

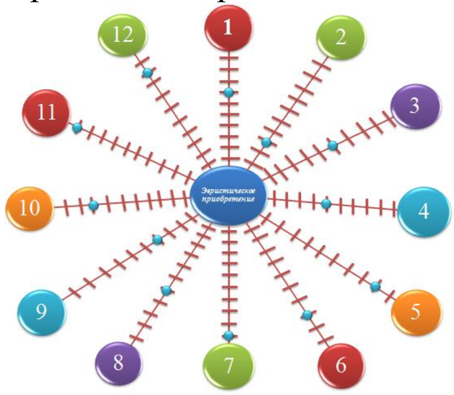


Рис. 91

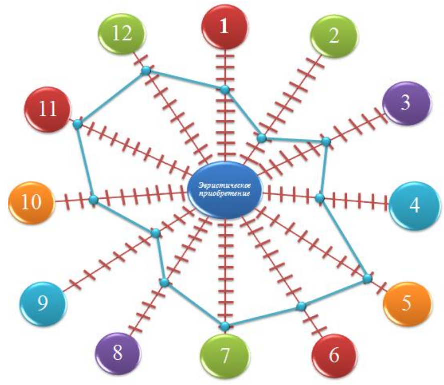
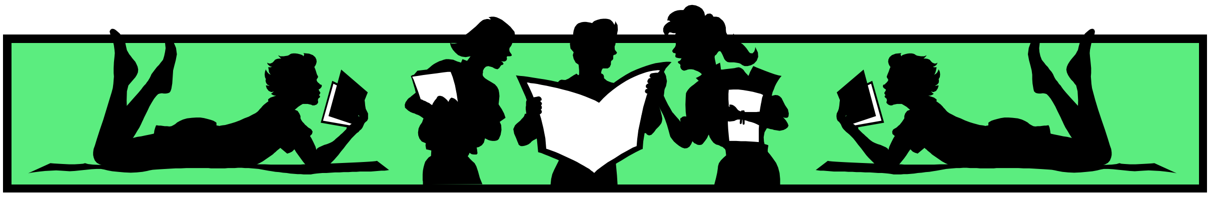


Рис. 92



ЛИТЕРАТУРА

1. Балк Г. Метод малых шевелений / Г.Балк, М.Балк, В.Болтянский // Квант, 1979. – №4. – С.4-8.
2. Балк М.Б. Испытания на правдоподобие / М.Б.Балк, Г.Д.Балк // Квант, 1972. – №1. – С.20-25.
3. Балк М.Б. Поиск решения / М.Б.Балк, Г.Д.Балк. – М.: Дет. лит., 1983. – 143 с.
4. Дорофеев Г.В. Переформулировка задачи / Г.В.Дорофеев // Квант, 1974. – №1. – С.53-59.
5. Купиллари А. Трудности доказательства. Как преодолеть страх перед математикой. Пер. с англ. С.А.Кулешов / А.Купиллари. – М.: Техносфера, 2002. – 303 с.
6. Кучеров В. Геометрические аналогии / В.Кучеров // Квант, 1981. – №10. – С.44-46.
7. Кушнир И.А. Метод вспомогательного элемента / И.А.Кушнир // Квант, 1974. – №2. – С. 46-51.
8. Розенталь А. Правило «крайнего» / А.Розенталь // Квант, 1976. – №8. – С.57-61.
9. Уфнаровский В.А. Математический аквариум. – Новое издание / В.А.Уфнаровский. – М.: Изд-во МЦНМО, 2010. – 232 с.
10. Финкельштейн В.М. Что делать, когда задачу решить не удается. – 4-е изд., перераб. / В.М.Финкельштейн. – М.: ИЛЕКСА, 2008. – 74 с.

Навчально-методичне видання

Гончарова Ірина Володимирівна
Пустова Юлія Валеріївна

ЕВРИСТИЧНИЙ ФАКУЛЬТАТИВ з математики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ

для учнів 11 класу профільного рівню

В авторській редакції

Підписано до друку 22.05.2014 р. Формат 60x90/16.
Умовн. друк. арк. 14,8. Тираж 100 прим.