МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
кафедра высшей математики
и методики преподавания математики

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Донецк 2017

УДК 51:005(075.8)
ББК В1г.в.я73-2

Рекомендовано к изданию Ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 10 26.12.2016 г.)

История и методология математики: учебное пособие / составитель И.В. Гончарова. – Донецк: ДонНУ, 2017. – 149 с.

Рецензенты:
Губина Ю. А., учитель математики высшей категории Республиканского многопрофильного лицея-интерната при Донецком национальном университете,
Цапова С. Г., учитель математики первой категории МОУ «Технический лицей г. Донецка».

Учебное пособие содержит программу курса «История и методология математики», теоретический материал, примеры решения исторических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы, список рекомендованной литературы к содержанию каждой темы и список рекомендованной литературы к курсу. Пособие полностью обеспечивает все темы курса.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование (профиль: математическое образование).

УДК 51:005(075.8)
ББК В1г.в.я73-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение истории и методологии математики является непрерывным условием получения добротного математического образования, составляет важную часть подготовки специалистов в высших учебных заведениях. Общепризнано, что незнание опыта развития науки, неумение его анализировать делают исследователя беспомощным перед задачами будущего. Эти соображения определяют задачу настоящего учебного пособия: помочь студентам направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование (профиль: математическое образование) осмыслить исторический опыт своей науки, движущие силы и пути ее развития.

В учебном пособии отобран и кратко проанализирован тот материал, на примере которого наиболее наглядно проявляются закономерности развития математики.

Курс истории и методологии математики должен способствовать формированию у студентов понятия целостности математики, налаживанию связей между отдельными математическими науками. В процессе изучения этого курса студент должен ознакомиться, как с основными школами и ячейками интенсивного развития математики, так и с развитием главных ее смысловых линий и методов: учение о числе, функциональной линии, аксиоматического метода и т. п.

Учитывая то, что курс «История и методология математики» ограничен небольшим количеством часов аудиторных занятий, большая роль при его изучении отводится самостоятельной работе студентов, поиску, подбору и усвоению ими новой информации.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА «История и методология математики»

Цель изучения дисциплины «История и методология математики» *– осветить историю формирования, развития и трансформации математической науки; дать будущим учителям* *историко-математические знания, необходимые им для правильного разрешения методологических и методических вопросов, возникающих в процессе обучения математике в школе.*

Основными задачами изучения дисциплины являются:

- воссоздать богатство фактического содержания исторического развития математики, осветить возникновения математических методов, понятий, идей, теорий и отдельных математических дисциплин;
- выяснить характер и особенности развития математики у различных народов в определенные исторические периоды;
- показать вклад, сделанный в математику великими учеными прошлого, в том числе и отечественными учеными;
- продемонстрировать студентам многогранные связи математики с практическими потребностями и деятельностью людей, с развитием других наук;
- осветить влияние экономического, социального и идеологического состояния общества на характер развития математики и, наоборот, влияние математики на развитие общества;
- показать, как формировались исторические и логические связи между отдельными разделами математики, раскрыть историческую обусловленность логической структуры современной математики и диалектику ее развития, осветить соотношение частей математики и перспективы ее развития;
- ознакомить будущих учителей с важнейшими знаниями по методологии математики и сформировать у них современный взгляд на математику как на составляющую общечеловеческой культуры;
- раскрыть психолого-методические вопросы взаимосвязи истории науки и практики обучения;
- показать место, значение и возможности исторического материала в курсе математики современной школы разных уровней и профилей;
- сформировать умения и навыки применять историко-математические знания к проведению научных исследований: выделять и анализировать исторические аспекты исследуемой проблемы, определять и обрабатывать соответствующую библиографию.

Требования
к результатам освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины «История и методология математики» направлен на формирование общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ГОС ВПО) и основной образовательной программой для направления 44.04.01 Педагогическое образование (профиль: математическое образование), принятыми в Донецкой Народной Республике. Среди них:

а) общекультурные компетенции (ОК):

– способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу, способностью совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень (ОК-1);

б) общепрофессиональные компетенции (ОПК):

– готовность использовать знание современных проблем науки и образования при решении профессиональных задач (ОПК-2);

– готовность взаимодействовать с участниками образовательного процесса и социальными партнерами, руководить коллективом, толерантно воспринимая социальные, этноконфессиональные и культурные различия (ОПК-3);

– способность осуществлять профессиональное и личностное самообразование, проектировать дальнейшие образовательные маршруты и профессиональную карьеру (ОПК-4).

в) профессиональные компетенции (ПК):

педагогическая деятельность:

– способность формировать образовательную среду и использовать профессиональные знания и умения в реализации задач инновационной образовательной политики (ПК-2);

проектная деятельность:

– готовность проектировать содержание учебных дисциплин, технологии и конкретные методики обучения (ПК-10);

методическая деятельность:

– готовность к разработке и реализации методических моделей, методик, технологий и приемов обучения, к анализу результатов процесса их использования в организациях, осуществляющих образовательную деятельность (ПК-11);

– готовность к систематизации, обобщению и распространению отечественного и зарубежного методического опыта в профессиональной области (ПК-12);

культурно-просветительская деятельность:

– способность изучать и формировать культурные потребности и повышать культурно-образовательный уровень различных групп населения (ПК-17);

специальных компетенций выпускника*:*

– владение основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом (СК-1);

– владение культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой, способен понимать общую структуру математического знания, взаимосвязь между различными математическими дисциплинами, реализовывать основные методы математических рассуждений на основе общих методов научного исследования и опыта решения учебных и научных проблем, пользоваться языком математики, корректно выражать и аргументировано обосновывать имеющиеся знания (СК-2);

– способность понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности, роль и место математики в системе наук, значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике, общекультурное значение математики (СК-3);

– владение математикой как универсальным языком науки, средством моделирования явлений и процессов, способен пользоваться построением математических моделей для решения практических проблем, понимать критерии качества математических исследований, принципы экспериментальной и эмпирической проверки научных теорий (СК-4);

– владение содержанием и методами элементарной математики, умеет анализировать элементарную математику с точки зрения высшей математики (СК-5);

– владение основными положениями истории развития математики, эволюции математических идей и концепциями современной математической науки (СК-7).

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:
знать:

- основные взгляды на предмет математики, движущие силы ее развития;
- периодизацию развития математики;
- уровень развития отечественной математики, ее место в мировой науке;
- роль, место, возможности математических теорий в моделировании процессов и явлений окружающего мира.

уметь:

- использовать элементы историзма, понятие методологии науки при написании магистерской работы;
- формировать содержание и методическую разработку учебных занятий с учетом принципов историзма;
- проводить информационный поиск, отбор, компоновку материалов по истории математики для педагогической деятельности.

владеть:

- основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом;
- культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой;
- математикой как универсальным языком науки, средством моделирования явлений и процессов;
- содержанием и методами элементарной математики;
- основными положениями истории развития математики, эволюции математических идей и концепциями современной математической науки.

Тема 1
ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДОЛОГИЮ МАТЕМАТИКИ

План

1.1. Предмет истории математики. Роль практики в развитии математики. О диалектическом характере законов развития математики.

1.2. Понятие о методологии математики.

1.3. Периодизация истории математики.

1.1. ПРЕДМЕТ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ. РОЛЬ ПРАКТИКИ В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ. О ДИАЛЕКТИЧЕСКОМ ХАРАКТЕРЕ ЗАКОНОВ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

Все отрасли математики, какими бы разными они ни казались, объединены общностью предмета. Этим предметом являются, по определению Ф. Энгельса, количественные отношения и пространственные формы действительного мира. Различные математические науки имеют дело с частными, отдельными видами этих количественных отношений и пространственных форм или же выделяются своеобразием своих методов.

Состав математики, как и всякой другой науки, следующий:

а) *факты*, накопленные в ходе ее развития;

б) *гипотезы*, т. е. основанные на фактах научные предположения, подвергающиеся в дальнейшем проверке, опытом;

в) результаты обобщения фактического материала, выраженные в математических *теориях* и *законах*;

г) *метолология математики*, т. е. общетеоретические истолкования математических законов и теорий, характеризующие общий подход к изучению предмета математики.

Def. Все эти элементы взаимосвязаны и постоянно находятся в развитии. Выяснение того, *как* происходит это развитие в изучаемый исторический период и *куда* оно ведет, и является ***предметом истории математики***, одной из математических дисциплин. *История математики есть наука об объективных законах развития математики.*

В соответствии с этим на историю математики возлагается решение большого круга задач. Охарактеризуем направления историко-математических исследований.

Во-первых, в работах историко-математического характера воссоздается богатство фактического содержания исторического развития математики. В них освещается, как возникли математические методы, понятия и идеи, как исторически складывались отдельные математические теории. Выясняются характер и особенности развития математики у отдельных народов в определенные исторические периоды, вклад, внесенный в математику великими учеными прошлого, и в первую очередь отечественными учеными.

Во-вторых, историко-математические работы раскрывают многообразные связи математики. Среди них: связи математики с практическими потребностями и деятельностью людей, с развитием других наук, влияние экономической и социальной структуры общества и классовой борьбы (особенно в области идеологии) на содержание и характер развития математики, роль народа, личности ученых и коллективов ученых и т. п.

В-третьих, историко-математические исследования вскрывают историческую обусловленность логической структуры современной математики, диалектику ее развития, помогают правильно понять соотношение частей математики и до известной степени ее перспективы.

История математики, как это следует из данного выше определения ее предмета, имеет дело со всем составом данной науки, со всеми областями математики и с большим количеством других наук. Это обстоятельство подчеркивает трудность задач истории математики и своеобразие методов историко-научного исследования.

Роль практики в развитии математики. Математика – одна из самых древних наук. Математические познания приобретались людьми уже на самой ранней стадии развития под влиянием даже самой несовершенной трудовой деятельности. По мере усложнения этой деятельности изменялась и разрасталась совокупность факторов, влияющих на развитие математики.

Со времени возникновения математики как особой науки со своим собственным предметом наибольшее влияние на формирование новых понятий и методов математики оказывало математическое естествознание[1]. На прогресс математики ранее других наук оказали влияние астрономия, механика, физика.

Непосредственное воздействие задач математического естествознания на развитие математики можно проследить на протяжении всей ее истории. Так, например, дифференциальное и интегральное исчисление в его наиболее ранней форме исчисления флюксий возникло как наиболее общий в то время метод решения задач механики, в том числе и небесной механики. Теория полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, была разработана русским академиком П.Л. Чебышевым в связи с исследованием паровой машины. Метод наименьших квадратов возник в связи с большими геодезическими работами, проводившимися под руководством К.Ф. Гаусса. В настоящее время под непосредственным влиянием запросов новых областей техники получают бурное развитие многие области математики: комбинаторный анализ, методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений и т. д. Примеры подобного рода можно продолжать неограниченно в отношении любой области математики. Все они показывают, что математика возникла из трудовой деятельности людей и формулировала новые понятия и методы в основном под влиянием математического естествознания.

Выход математики в естествознание происходит в результате приложения существующих математических теорий практическим проблемам и разработки новых методов их решения. Вопрос о приложимости к практике той или иной математической теории не всегда получает сразу удовлетворительное разрешение. До его решения проходят зачастую годы и десятилетия. Практика входит в математику как незаменимое вспомогательное средство научного исследования, во многом меняющее лицо математики.

О диалектическом характере законов развития математики. Математика как наука, является одной из форм общественного сознания людей. Поэтому, несмотря на известное качественное

[1] Под *математическим естествознанием* понимают комплекс наук о природе, для которых на данной ступени развития оказывается возможным приложение математических методов.

своеобразие, законы, управляющие ее развитием, в основном – общие для всех форм общественного сознания.

Приведем некоторые соображения в поддержку тезиса о диалектическом характере развития науки. Развитие математики не есть плавный процесс постепенного и непрерывного развития математических истин; развитие в действительности происходит в ожесточенной борьбе нового со старым. История математики изобилует примерами, когда эта борьба проявляется особенно сильно, когда новое неодолимо побеждает, несмотря на неудачи и даже гибель творцов науки.

Математика всегда испытывала противодействие религиозно настроенных кругов. Это противодействие было иногда настолько сильным, что значительно затрудняло и задерживало рост науки. Наука многим обязана героизму известных и безвестных ученых времен Римской империи и средних веков, продвигавших науку вперед ценой собственной жизни.

Пр В XVII в. анализ бесконечно малых, едва появившись в трудах Лейбница и Ньютона и их последователей, подвергся ожесточенной критике, тон которой задал епископ Беркли. Борьба вокруг основных понятий математического анализа, в частности вокруг понятия предела, происходила в течение всей истории этой научной дисциплины. Эта борьба не утихла, как принято думать, с появлением работ Коши в первой трети XIX в., а разгорелась с новой силой. Построение основ анализа на базе теории пределов получило всеобщее признание только к самому концу позапрошлого века.

И в наше время во всех областях математики происходит борьба передовых и реакционных тенденций. В условиях социалистического общества развитие происходит в атмосфере борьбы мнений, научной критики, развитие которой всемерно поощряется.

1.2. ПОНЯТИЕ МЕТОДОЛОГИИ МАТЕМАТИКИ

Методология (от греч. μεθοδολογία – учение о способах; от др. греч. μέθοδος из μέθ- + οδος, букв. «путь вслед за чем-либо» и др. греч. λόγος – мысль, причина) учение о системе понятий и их отношений, – система базисных принципов, методов, методик, способов и средств их реализации в организации и построении научно-практической деятельности людей.

Методология науки в традиционном понимании – это учение о методах и процедурах научной деятельности, а также раздел общей теории познания, в особенности теории научного познания (эпистемологии) и философии науки.

Методология в прикладном смысле – это система (комплекс, взаимосвязанная совокупность) принципов и подходов исследовательской деятельности, на которые опирается исследователь (ученый) в ходе получения и разработки знаний в рамках конкретной дисциплины.

Методология математики в самом общем понимании – это знание о знаниях. Более детально методология математики может быть охарактеризована путем рассмотрения ее наиболее важных сторон.

1). Методология математики – это учение о специфике математики, рассматриваемой с точки зрения теории познания.

Известно, что математика в определенной мере тоже занимается исследованием самой себя. Создаются специальные метатеории, посвященные изучению природы формальных систем. Исследуется специфика математического аппарата. Но все это делается формально-логическими методами, т. е. не выходя за рамки самой математики. Методология же математики исследует математическое знание с более общих позиций.

2). Методология математики – это учение о причинах объективности математического знания, о его «разумности», об исторической обусловленности ее природы и ее логической структуры.

В рамках этого учения исследуется вопрос о предмете математики и вопрос о причинах эффективности математического аппарата. Устанавливается, что эта эффективность отчасти является результатом приспособления нашего сознания к действительности: происходит накопление огромного интеллектуального опыта, играющего роль «компаса» в научных исследованиях.

3). Методология математики – это учение, основанное на обобщении исторического опыта. Анализ этого опыта приводит к формированию теории познания и к осознанию ее взаимосвязи с математикой.

4). Методология математики – это учение о логических аспектах математического знания: методах построения математических абстракций, их природе, логическом статусе их «существования», характере логических связей, специфических методах классической математики. Это учение о построении формальных систем и возникающих в этой связи вопросах непротиворечивости, категоричности и полноты соответствующих аксиоматик.

5). Методология математики – это учение о закономерностях и методах математической деятельности. Это учение о закономерностях математического творчества, т. е. учение о методах поиска новых идей, новых теорем и их доказательств. В этом качестве методология математики смыкается с психологией познания и с эвристикой. Ее цель в этом случае состоит в выяснении норм научного мышления, осмыслении и выделении общих принципов математического познания, а также в выяснении взаимоотношений между эвристическими, эмпирическими и рационально-логическими факторами математической деятельности.

Методологию можно рассматривать в двух срезах: как теоретическую, так и практическую. Теоретическая стремится к модели идеального знания, практическая же – это программа (алгоритм), набор приемов и способов того, как достичь желаемой практической цели и не погрешить против истины, или того, что мы считаем истинным знанием. Качество метода проверяется практикой, решением научно-практических задач, т. е. поиском принципов достижения цели, реализуемых в комплексе реальных дел и обстоятельств.

В методологии можно выделить следующую ***структуру***:

1) *основания методологии*: философия, логика, психология, информатика, системный анализ, науковедение, этика, эстетика;

2) *характеристики деятельности*: особенности, принципы, условия, нормы деятельности;

3) *логическая структура деятельности*: субъект, объект, предмет, формы, средства, методы, результат деятельности, решение задач;

4) *временная структура деятельности*: фазы, стадии, этапы;

5) *технология выполнения работ и решения задач:* средства, методы, способы, приемы.

Методология также делится на содержательную и формальную. Содержательная методология включает изучение законов, теорий, структуры научного знания, критериев научности и системы используемых методов исследования. Формальная методология связана с анализом методов исследования с точки зрения логической структуры и формализованных подходов к построению теоретического знания, его истинности и аргументированности.

1.3. ПЕРИОДИЗАЦИЯ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

В истории математики можно различить отдельные периоды, отличающиеся друг от друга рядом характерных особенностей. Периодизация необходима, чтобы легче было разобраться во всем богатстве фактов исторического развития математики. Существует много попыток периодизации истории математики. Периодизация проводится по странам, по социально-экономическим формациям, по выдающимся открытиям, определившим на известное время характер развития математики, и т. п. Споры о периодизации нескончаемы.

В данном курсе лекций мы придерживаемся периодизации, установленной А.Н. Колмогоровым. Эта периодизация является наиболее точной потому, что в ее основу положена оценка содержания математики: ее важнейших методов, идей и результатов. В истории математики А.Н. Колмогоров различает следующие периоды:

1) период накопления начальных математических сведений (зарождение математики): от древнейших времен до VI-V вв. до н. э.;
2) период математики постоянных величин (период элементарной математики): VI-V вв. до н. э. – XVI в. н. э.;
3) период математики переменных величин: XVII – XVIII вв.;
4) период современной математики: XIX в. – наши дни.

1. Период накопления начальных математических сведений

Этот период заканчивается в Древней Греции VI в. до н. э. Он включает в себя происхождение первых натуральных чисел и первых геометрических фигур и тел, математику Древнего Египта и математику Древнего Вавилона.

1.1. Математика Древнего Египта

Большинство математических текстов, сохранившихся в памятниках Древнего Египта, написаны на папирусе. Папирус хрупкий, поэтому сохранились только те тексты, которые положены в пирамиды. Важнейшими из дошедших до нас математических текстов являются папирус Райнда и Московский папирус.

Носителями научных знаний в Древнем Египте были «писцы» – чиновники, состоявшие на государственной или храмовой службе. Писцы обучались в специальных школах. Математические знания древнего писца позволяли ему производить расчеты при строительных работах, сборе налогов, разделе имущества, обмене и распределении продуктов, измерении площадей полей, объемов плотин, зернохранилищ и т. п. Все внимание сосредоточено при этом на вычислениях с конкретными количествами; числа как таковые, равно как и методы решения, не становятся еще предметом рассмотрения, задачи группируются поэтому не по методам решений, а по темам (задачи на емкость зернохранилищ, задачи на площадь поля и т. д.). Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений, в числах. Лишь иногда дается проверка найденного решения.

Анализ математических текстов позволяет утверждать, что математика Древнего Египта представляла собой совокупность знаний, еще не расчленившуюся на арифметику и геометрию и выступающую, прежде всего, как собрание примеров решения простейших прикладных задач.

1.2. Математика Древнего Вавилова

Источниками для изучения математики Древнего Вавилона являются математические клинописные тексты, обнаруженные при археологических раскопках или найденные случайно местными жителями в развалинах старых сооружений. Среди разрозненного, распыленного по музеям мира множества глиняных табличек самых разных эпох, от начала III тыс. до н. э. до I в. н. э., известно примерно 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами.

Носителями научных знаний в Древнем Вавилоне были, как и в Древнем Египте, писцы. Они руководили общественными работами, занимались учетом хозяйства, составлением торговых документов и деловой перепиской. Писцы были тесно связаны с храмами, в которых и хранились глиняные таблички с клинописными текстами. Как и в Египте, в Древнем Вавилоне специальность писца была почетной.

Задачи, решаемые в вавилонских клинописных текстах, так же как и задачи в древнеегипетских папирусах, являются чисто практическими вычислительными задачами и так же изложены догматически, без каких-либо пояснений. Отличие состоит в том, что искусство счета у вавилонян более совершенное, а решаемые математические задачи значительно разнообразнее и сложнее. В Древнем Вавилоне впервые возникла позиционная система счисления, разработана алгебра линейных и квадратных уравнений, открыта теорема Пифагора, решаются простейшие теоретико-числовые задачи. Здесь же, в отличие от математики Древнего Египта, наблюдается начавшееся разделение математики на арифметику и геометрию, зачатки алгебры и теории чисел, а также появление первых «теоретических» задач, т. е. задач, не связанных непосредственно с практикой, а вызванных внутренними потребностями самой математики.

2. Период математики постоянных величин

Математика в древних цивилизациях развивалась очень медленно. Иногда на протяжении целых веков не было никакого прогресса. Но вот в Древней Греции VI в. до н. э. положение резко меняется. Всего за несколько десятилетий математика из набора примеров для решения простейших прикладных задач превращается в строгую дедуктивную науку. Формируются первые математические понятия и аксиомы, строятся первые математические теории; математики начинают работать с понятиями.

Греки справедливо приписывали радикальные перемены во всех областях общественной жизни (в том числе и в математике) возникшему у них в то время новому демократическому общественному строю.

Период развития математики с VI в. до н. э. по XVI в. н. э. принято считать периодом математики постоянных величин. Он включает в себя математику Древней Греции, эллинистических стран и Римской империи, математику средневекового Китая, математику средневековой Индии, математику стран ислама, математику средневековой Европы и математику эпохи Возрождения.

2.1. Математика Древней Греции, эллинистических стран и Римской империи

Первые математические теоремы были доказаны учеными ионийской школы натурфилософии (первая половина VI в. до н. э.), основателем которой считается Фалес. Но коренное преобразование математики по традиции единодушно приписывают Пифагору (VI в.

до н. э.). В школе Пифагора (VI-V вв. до н. э.) была разработана арифметика целых чисел, построена первая теория отношений, сделано очень важное для дальнейшего развития математики открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, разработана тория делимости, основана геометрическая алгебра, в которой задачи решаются построением с помощью циркуля и линейки.

Развивая математику пифагорейцев, греки построили (в IV-III вв. до н. э.) теорию конических сечений (Менехм, Аполлоний), создали новую теорию отношений (Евдокс), первый метод пределов (Евдокс), первые интегральные и дифференциальные методы (Архимед). Достижения греческих математиков были приведены в систему в «Началах» Евклида (III в. до н. э.).

Со II в. до н. э. наступает спад в развитии греческой математики, вызванный началом тяжелых разрушительных войн, приведших к созданию Римской империи. Только в начале нашей эры, когда положение установилось, греческая математика вновь стала оживать. Уже в I в. н. э. в Александрии, центре культурной жизни того времени, работают такие математики, как Герон и Менелай, а в середине II в. н. э. – Клавдий Птолемей. В III в. создает свою алгебру Диофант.

Значительная часть знаменитой Александрийской библиотеки сгорела еще в 30-х гг. до н. э. при захвате римлянами Александрии. В 391 г. библиотеку жгли и разрушали христиане-фанатики. Когда в VIII в. уровень культуры в арабских странах поднялся настолько, что ученые начали собирать и переводить греческие рукописи, уцелело лишь немногое. Это немногое и послужило основой для дальнейшего развития математики в странах ислама, а впоследствии и в Европе.

2.2. Математика средневекового Китая

Наиболее древние из дошедших до нас математических текстов относятся ко II в. до н. э. Исторические документы свидетельствуют о том, что в Китае издавна математике уделялось большое внимание. Уже ко второй половине I тыс. до н. э. были серьезно поставлены математическое образование и экзамены.

Важнейшей особенностью китайской науки является ее догматизм; в течение многих веков китайская наука направлялась чиновниками, придавшими ей, как и другим сторонам жизни Китая, бюрократический характер. Если произведения греческих математиков подвергались при переписке значительной обработке и снабжались различными дополнениями и комментариями, то китайские «классические трактаты», написанные еще во II в. до н. э. – IV в. н. э., переиздавались затем без всяких изменений.

Исследование математики древнего и средневекового Китая показывает, что до XIV в. она развивалась преимущественно как совокупность вычислительных алгоритмов. Наиболее значительными из этих алгоритмов являются метод «Фан-чэн» решения системы линейных уравнений и метод «Тянь-юань» приближенного решения алгебраических уравнений. Важнейшим достижением китайской математики было также введение отрицательных чисел.

2.3. Математика средневековой Индии

Первые индийские математические тексты относятся к VII-V вв. до н. э. Крупнейшие индийские математики V-XII вв. н. э. – Ариабхата (V-VI вв.), Брахмагупта (VII в.), Магавира (IX в.), Шридхара (IX-X вв.), Бхаскара (XII в.). Уже с первых веков н. э. прослеживается связь математики Индии с математикой Китая. Она особенно усиливается в период распространения буддизма. В это время индийская математика распространяется и на территории стран ислама.

Важнейшими достижениями индийской математики являются: создание арифметики на основе десятичной позиционной системы счисления, разработка тригонометрии, создание развитой алгебраической символики.

2.4. Математика стран Ислама

В VII в. н. э. образовались научные центры: Багдад, Бухара и Хорезм в Средней Азии, Каир в Египте, Кордова в Испании, Газна на территории Афганистана, Исфахан на территории Пакистана, Марага в Азербайджане и др. В IX-X вв. здесь работали такие известные математики, как ал-Хорезми, ал-Бируни, Абу Камил ал-Мисри, Хасан ибн ал-Хайсам, в XI в. – Омар Хайям, в XIII в. – Насир ад-Дин ат-Туси, в XV в. – ал-Каши и т. д.

Из достижений арабских математиков отметим работы по теории параллельных, алгебре и тригонометрии. Но не менее важно было то, что арабские математики переписывали, комментировали и совершенствовали результаты греческой математики, переняли у индийцев их десятичную позиционную систему счисления. Все это и послужило основой для последующего развития математики в Европе.

2.5. Математика средневековой Европы

В середине I тыс. н. э. произошел социальный и политический распад Римской империи, вызванный кризисом рабовладельческого хозяйства, борьбой покоренных римлянами народов, и нашествиями варваров; на смену рабовладельческому обществу приходит феодальная формация. Время господства феодальных отношений, продолжавшееся с V-VI вв. до XV-XVI вв., именуется средними веками.

Основой для развития науки в средние века служило постепенное развитие ремесла, товарного производства и торговли, подъем – особенно со второй половины XI в. – городов, улучшение положения горожан. Для развития математики в средневековой Европе главную роль сыграли переводы на латинский язык сочинений арабских математиков. Такие переводы, редкие в X в., приобретают систематический характер в XI-XIII вв. Благодаря работе переводчиков и переписчиков европейцы познакомились с сочинениями Архимеда, Аполлония, Евклида, Диофанта и др. греческих математиков.

Важную роль в развитии математики сыграло также появление университетов. Древнейший в Европе университет – медицинский – был основан в Салерно не позднее первой половины XI в. Около 1100 г. был открыт юридический университет в Болонье. В конце XII в. на базе нескольких монастырских школ вырос Парижский университет, где обучались тысячи студентов со всех концов Европы. Примерно тогда же были созданы Оксфордский и в 1209 г. Кембриджский университеты. Затем появляются университеты в Праге (1348 г.), Кракове (1364 г.), Вене (1365 г.), Гейдельберге (1385 г.), Лейпциге (1409 г.), Базеле (1459 г.) и т. д.

Организация преподавания в университетах того времени была примерно такова: университет состоял из четырех факультетов – искусств, богословия, права и медицины. Преподаватели делились на младших – бакалавров – и старших – магистров и докторов. Во главе университетов стояли монахи-богословы. Студент, нередко подросток, поступал сначала на факультет искусств, где обучался около шести лет; после испытаний он мог перейти на какой-либо другой факультет, где обучение продолжалось около восьми лет и завершалось испытанием и диспутом.

В течение нескольких веков математика оставалась в университетах вспомогательной дисциплиной, отдельных математических кафедр и специальных преподавателей математики не было. Подсобная роль математики в университетах отрицательно сказывалась на знаниях студентов. И все же, несмотря на подчиненное положение математики, несмотря на преобладание богословия и схоластики в преподавании, университеты были важными центрами распространения и развития математических знаний. Из стен средневековых университетов вышли такие математики, как Томас Брадвардин в Англии, Николь Орем во Франции, Иоганн Мюллер-Региомонтан в Германии, Николай Коперник в Польше и др.

2.6. Математика эпохи Возрождения

XV и XVI в. вошли в историю Европы под названием «эпоха Возрождения»; при этом имелось в виду возрождение того высокого уровня культуры, который был достигнут в античном мире. На самом же деле эта эпоха характеризуется гораздо более глубокими преобразованиями в жизни всего общества: именно в это время в недрах феодального строя зреет новый общественный строй – буржуазное общество. В промышленности возникают мануфактуры, требующие технических усовершенствований и изобретений. Тогда же появляются в Европе компас, часы, порох, дешевая бумага и книгопечатание. Резко возрастает торговля, приведшая к росту мореплавания. Бумага и книгопечатание способствуют тому, что научные знания становятся необходимым элементом общественной жизни. Совершается культурная революция.

Развитию математики способствовали, с одной стороны, чисто практические соображения, а с другой – религиозные традиции, утверждавшие, что Вселенная построена богом по математическому плану.

В XV-XVI вв. математика развивается, главным образом, в Италии, Франции, Германии, а с конца XVI в. и в Голландии, переживавшей первую в Европе буржуазную революцию. Математика впервые выходит за пределы знаний, полученных в наследство от древних греков и народов Востока. Именно в это время повсеместно вводится пришедшая в Европу от арабов индийская десятичная позиционная система счисления, вводятся десятичные дроби, отрицательные, иррациональные и мнимые числа, создается развитая алгебраическая символика. Тогда же были решены в радикалах алгебраические уравнения 3-й и 4-й степеней, разработаны плоская и сферическая тригонометрии, значительно усовершенствованы вычислительные методы. Математика становится мощным средством решения быстро расширяющегося круга задач не только торговли, землемерия и т. п., но и новой техники и нового естествознания. В математике начинают видеть основной, наряду с экспериментом, метод изучения природы.

3. Период математики переменных величин

К XVII в. создаются как теоретические, так и практические предпосылки для математического описания движения. Изучение движения, изучение переменных величин становится главной задачей математики. Начинается период математики переменных величин. Его принято условно разделять на математику XVII в. и математику XVIII в.

3.1. Математика XVII века

В XVII в. воздействие практических потребностей на математику становится непосредственным. На смену энтузиастам-одиночкам приходят научные организации и общества. С 1662 г. начало свою деятельность Лондонское королевское общество, играющее и ныне роль национальной академии наук. В 1666 г. была организована Парижская академия наук. Переписка ученых и появлявшиеся изредка и в малом количестве экземпляров книги уже не удовлетворяли потребности обмена и распространения научной информации. В XVII в. выходят первые научные периодические издания: с 1665 г. – в Лондоне «Philosophical transactions», а с 1682 г. – в Лейпциге «Acta Eruditorum».

В математике на первый план выдвигается изучение движения. Его первым математическим описанием явилась аналитическая геометрия Декарта и Ферма.

Труды Кеплера, Кавальери, Торичелли, Сен-Венсана, Галилея, Роберваля, Декарта, Ферма, Барроу по развитию античных интегральных и дифференциальных методов привели к созданию в работах Ньютона и Лейбница основ дифференциального и интегрального исчисления.

3.2. Математика XVIII века

XVIII в. – господство капиталистического способа производства. Темпы развития науки в это время быстро нарастают. Промышленная революция, образование мирового рынка и связанные с этим нужды мореплавания, кораблестроения, военной техники, теплотехники, гидроэнергетики и т.п. ставят перед наукой все новые и новые задачи. Причем помимо задач механики и астрономии встают задачи исследования электромагнитных и тепловых явлений. Развитие науки становится делом государственной важности. Для целей научного исследования в крупнейших городах Европы создаются академии наук, деятельность которых направляется и финансируется государством.

В XVIII в. быстро развивается дифференциальное и интегральное исчисление. Используются степенные, тригонометрические и асимптотические ряды, изучаются простейшие специальные функции, складываются элементы теории дифференциальных уравнений, создается вариационное исчисление. В алгебре отмечаются многочисленные попытки решения в радикалах уравнений 5-й и высших степеней, развиваются приближенные методы решения алгебраических уравнений, появляются первые формулировки и доказательства основной теоремы алгебры. Заложены основы элементарной теории чисел. Формулируются первые предельные теоремы теории вероятностей. Формируется дифференциальная геометрия.

1.4. Период современной математики

XIX в. – начало периода современной математики, характеризующееся следующими особенностями:

в *алгебре* появились работы, приведшие к созданию теоретико-групповых методов, составивших в дальнейшем ядро современной алгебры;

в *геометрии* создаются основы неевклидовых геометрий, формируются проективная и многомерная геометрии, топология, появляются классификации типов геометрий;

математический анализ строится на основе современных определений вещественного числа и предела. Внутри анализа зарождаются новые дисциплины такие, как теория функций комплексного переменного и теория функций действительного переменного. Происходит интенсивное разрастание анализа вширь, резко расширяется область его приложений;

теория вероятностей и математическая статистика формируются как науки;

формируются *алгебраическая* и *аналитическая теории чисел*;

все больший интерес проявляется к вопросам обоснования математики, в связи с этим развиваются *теория множеств* и *математическая логика*.

Большое внимание уделяется в XIX в. преподаванию математики. Ведущее учебное заведение начала XIX в. – Парижская политехническая школа. Так как в это учреждение были привлечены в качестве преподавателей лучшие математики Франции, то Политехническая школа в очень короткий срок достигла исключительных успехов. Немаловажную роль сыграло здесь и то рвение, которое вызывало в учащейся молодежи непосредственное личное общение с преподавателями. Влияние школы за ее стенами сделалось еще более значительным с тех пор, как в законодательном порядке была сделана обязательной публикация лекций. Большая часть основных учебников по высшей математике в начале XIX в. возникла из курсов, преподававшихся в Политехнической школе.

Четырем периодам в развитии математики соответствуют четыре ступени в преподавании математики. Периоду накопления первоначальных математических сведений соответствует преподавание математики в начальных классах средней школы. Математика постоянных величин преподается в средних и старших классах средней школы. Математика переменных величин начинает изучаться еще в старших классах средней школы и заканчивается на первых курсах вузов. Современная математика изучается в основном на средних и старших курсах вузов.

Контрольные вопросы к теме 1

1. Что является предметом истории математики?
2. Какие задачи возлагаются на историю математики?
3. Какова роль практики в развитии математики?
4. Что понимают под методологией математики?
5. Какова структура методологии?
6. Какие выделяют периоды в истории математики?
7. Кто были носителями научных знаний в Древнем Египте и Древнем Вавилоне?

8. В период математики постоянных величин была создана арифметика на основе десятичной позиционной системы счисления; разработана тригонометрия; создана развитая алгебраическая символика. О какой математике этого периода идет речь?
9. Где впервые возникла позиционная система счисления, разработана алгебра линейных и квадратных уравнений, открыта теорема Пифагора, решаются простейшие теоретико-числовые задачи; наблюдается разделение математики на арифметику и геометрию, зачатки алгебры и теории чисел, а также появились первые «теоретические» задачи.
10. Математика какого периода из набора примеров для решения простейших прикладных задач превращается в строгую дедуктивную науку; формируются первые математические понятия и аксиомы, строятся первые математические теории; математики начинают работать с понятиями?
11. Чем характеризуется математика средневековой Европы периода математики постоянных величин?
12. Укажите основные источники для изучения математики Древнего Вавилона.
13. Укажите основные источники для изучения математики Древнего Египта.
14. Чем знаменит период математики переменных величин?

Рекомендованная литература для самостоятельной работы студентов к теме 1

1. Александров А.Д. Общий взгляд на математику. В сб.: «Математика, ее содержание, методы и значение» / А.Д. Александров. – М.: Изд-во АН СССР, 1956.
2. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 368 с.
3. Вейль Г. О философии математики / Г. Вейль. – М.-Л.: ГТТИ, 1934.
4. Марков С.Н. Курс истории математики: учеб. пособие / С.Н. Марков. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1996. – 248 с.
5. Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – 191 с.
6. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1984. – 283 с.

Тема 2
ПРОЦЕСС ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

План

2.1. Возникновение первых математических понятий и методов.
2.2. Математика древнего Египта.
2.3. Математика древнего Вавилона.
2.4. Математика древнего Китая.
2.5. Математика древней Индии.

2.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И МЕТОДОВ

Процесс формирования математических понятий и регулярных приемов решения определенных классов элементарных задач охватывает огромный промежуток времени. Его начало, по всей вероятности, относится к далекому времени, когда человек перешел к использованию орудий для добывания средств существования, а затем и к обмену продуктов труда. Завершается этот период с появлением качественно новых форм математического мышления, т. е. тогда, когда совокупность этих понятий и методов и их содержание делаются достаточно богатыми, чтобы образовать логически связанные системы – начальные формы математических теорий. Последние возникают в математике около VI-V вв. до н. э.

Материальные свидетельства, по которым можно изучать этот самый ранний период в истории математики, немногочисленны и неполны. Исследователю приходится привлекать факты общей истории культуры человечества, по преимуществу археологические материалы и историю языка. История математики периода ее зарождения практически неотделима от общей истории человечества.

Формы и пути развития математических знаний у различных народов весьма разнообразны. Однако при всем своеобразии путей развития общим для всех народов является то, что все основные понятия математики: понятие числа, фигуры, площади, бесконечно продолжающегося натурального ряда и т. д. – возникли из практики и прошли длинный путь совершенствования. Например, понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Вначале считали с помощью подручных средств: пальцев, камней, еловых шишек и т. д. Следы этого сохранились в названии математических исчислений, например, *calculus* в переводе с латинского означает счет камешками.

Происхождение первых натуральных чисел. Натуральные числа возникли в результате очень длительного и сложного исторического процесса, в котором можно выделить три основных этапа:

1) установление случайного, нерегулярного взаимно однозначного соответствия между двумя множествами (например, между множествами обмениваемых предметов);
2) появление различных эталонов счета (вначале естественных: «луна» – 1, «глаза» – 2, «рука» – 5 и т. п., затем искусственных – счетные палочки, камешки и т. п.);
3) переход к единому, наиболее удобному эталону счета, который при этом становится основой системы счисления («руки» – двоичная система счисления, «пальцы рук и ног» – пятичная система счисления, «пальцы обеих рук» – десятичная система счисления, «пальцы рук и ног» – двадцатичная система счисления и др.).

Счет предметов с помощью эталонов сопровождался образованием числительных и возникновением числовых обозначений. Позднее появляются записи палочками на глине (клинопись), записи на папирусе, бересте и т. п.

Таким образом, в соответствии с историей, можно дать следующее определение натурального числа: «Каждое натуральное число, как «два», «пять» и т. п., есть свойство, общее для всех совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и различное у таких совокупностей, для которых такое сопоставление невозможно»[2].

Замечание. Происхождение натуральных чисел неотделимо от происхождения арифметических операций. Четыре арифметических

[2] Математика, ее содержание, методы и значение. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т.1-3. – Т.1. – С. 20.

операции (сложение, вычитание, умножение, деление) являются развитыми формами элементарного арифметического действия – нумерации (прямой и обратной)[3]. Через практическую нумерацию (счет вперед и назад) вводят натуральные числа в школе. Аксиоматическое же определение нумерации (и, следовательно, аксиоматическое определение натуральных чисел), предложенное Пеано (1889), вошло в учебники по высшей арифметике и алгебре[4].

Запас чисел на ранних ступенях весьма ограничен. Ряд известных и используемых натуральных чисел был конечен и удлинялся лишь постепенно. Сознание неограниченной продолжимости натурального ряда является признаком высокого уровня знаний и культуры.

История нумераций и систем счисления. Число «пять» с помощью первых чисел можно подать разными способами: 3 + 2; 2 + 2 + 1; 1 + 1+1 + 1 + 1. Но это – неудобно. А как таким способом записывать большие числа? Для решения этой проблемы создавались нумерации.

Def. ***Нумерация*** (от лат. *numerus* – число, *numeratio* – счет) – это способ изображения чисел.

Задание всякой нумерации – изобразить любое натуральное число с помощью небольшой группы специальных знаков (цифр). Существует много способов изображения одного и того же числа. Следовательно, существует много нумераций. Следует различать два понятия: нумерация и система счисления.

Def. ***Система счисления*** – символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков.

Системы счисления бывают: двоичные, троичные, десятичные, ..., g-ричные. Название системы определяется ее основанием, которое указывает через степень какого числа (основания системы счисления) записывается любое число.

Наряду с употреблением все больших и больших чисел развивались их символы, а сами числа образовывали системы. Для ранних периодов истории материальной культуры характерно

[3] Гегель Г. Сочинения / Г. Гегель. – М.–Л.: Гос.соц.-экон.изд., 1929-1958., Т. 5. – С. 223-231.

[4] См. например, Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – С. 20.

разнообразие числовых систем. Постепенно совершенствовались и унифицировались системы счисления. Употребляемая ныне во всех странах десятичная позиционная система счисления – итог длительного исторического развития. Ей предшествовали:

Непозиционные системы счисления

1. *Иероглифические.* В каждой из них строится система так называемых узловых чисел (чаще всего 1, 10, 100, 1000, ...). Каждое такое число имеет индивидуальный символ – иероглиф. Остальные числа (их называют алгоритмическими) образуются приписыванием с той или другой стороны узлового числа других узловых чисел и повторением их.

Примеры таких систем: египетская, финикийская, критская, сирийская, аттическая, старо-китайская, старо-индусская, римская.

2. *Алфавитные.* В этих системах буквы алфавита, взятые по 9, используются соответственно для обозначения единиц, десятков, сотен. Каждой букве при этом дается отличительный знак, указывающий, что она используется как число. В случае, если букв алфавита недостаточно, привлекаются дополнительные буквы и знаки.

Пр Типичный пример алфавитной системы – греческая ионическая (древнейшая сохранившаяся запись, сделанная по этой системе, относится к V в. до н. э.). Запись чисел по этой системе ясна из примера:

$533 - \overline{\varphi\lambda\gamma}$ або $\varphi'\ \lambda'\ \gamma'$; $\quad 340 - \overline{\tau\mu}$ або $\tau'\ \mu'$.

Чтобы записать числа, большие тысячи, необходимо усложнять знаки, например: 2 = β'; 2000 = ,β'. Число 1000 обозначали буквой М или точкой.

Алфавитные системы удобнее из-за краткости записи, однако они малопригодны для оперирования с большими числами и требуют больших усилий для запоминания.

Примеры таких систем: греческая (ионическая), древнеславянская (кириллица и глаголица), еврейская, арабская, грузинская, армянская.

Позиционные системы счисления

К позиционным недесятичным системам относятся вавилонская (с основанием 60), индейская (племени майя на полуострове Юкатан), индийская, современная двоичная.

Записи в позиционной десятичной системе с нулем впервые появились около 500 г. до н. э. в Индии.

Стоит отдельно отметить важный знак – ноль. О его происхождении есть масса гипотез, однако нет единого мнения. Точно известно, что в 150 году ноль уже был в записях Птоломея. У вавилонян его не было. Однако его роль играл разделительный знак, который использовали, только если в записи числа отсутствовал разряд.

Принципы построения изображения чисел:

1) числа изображаются с помощью иероглифов, букв и цифр;
2) позиционный принцип (от места конкретного символа в записи числа зависит, какое он имеет значение);
3) выделяют три основных принципа образования чисел из знаков m и n:
   a) *аддитивный* – когда стоящие рядом основные знаки mn изображают число, равное сумме чисел, изображаемых отдельными знаками, т. е. $m + n$;
   b) *субстрактивный* – когда стоящие рядом основные знаки mn изображают число, равное разности $m – n$;
   c) *мультипликативный* – когда запись mn изображает число, равное произведению $m \cdot n$.

Почти в каждой древней системе счисления имеются *узловые* и *алгоритмические числа*. Например, рассмотрим узловые числа римской системы счисления.

Знак	I	V	X	L	C
Его значение	1	5	10	50	100

Она является субстрактивно-аддитивной, т. е. два знака в записи числа означают или их разность, или их сумму (в зависимости от того, какое число стоит сначала: меньшее или нет).

Происхождение первых геометрических фигур и тел. В результате длительного исторического развития из повседневной практической деятельности людей сформировались другие математические понятия: площади, объемы и другие абстракции пространственных свойств предметов.

С простейшими геометрическими фигурами человек столкнулся в своей трудовой деятельности при изготовлении орудий труда и сосудов, при обработке полей и постройке зданий. Уже в глубокой древности изготовлялись скребки и ножи в форме дисков, треугольников, ромбов и сегментов, круглые сосуды. Поля обычно имели форму прямоугольника, а здания – форму конуса, цилиндра или параллелепипеда.

Большинство общепринятых сейчас названий геометрических фигур имеют греческое происхождение и обозначают различные предметы той или иной формы, с которыми люди сталкивались в своей практической деятельности. Слово «центр» происходит от греческого, обозначавшего палку с заостренным концом, которой погоняли быков (первоначально это слово было названием ножки циркуля, ставящейся в центр описываемой им окружности). «Ромб», происходит от слова, обозначавшего волчок, «трапеция» – от слова, обозначавшего столик. «Призма» происходит от слова «отпиленный кусок» или «опиленная», «сфера» – от слова, обозначавшего мяч, «конус» – от слова, обозначавшего сосновую шишку, «цилиндр» – от слова, обозначавшего валик, каток. «Пирамида» происходит от древнеегипетского названия египетских пирамид – «пурама». «Линия» происходит от латинского слова, обозначавшего лён, льняную нить. «Точка» происходит от слова «ткнуть», равнозначное слово «пункт» происходит от латинского слова «pungo» (укалываю) и т. д.

Таким образом, происхождение первых геометрических фигур и тел аналогично происхождению первых натуральных чисел. Постепенно были выделены эталоны: мяч – для шарообразных предметов, шишка – для остроконечных и т. д. Названия этих эталонов становятся затем названиями абстрактных геометрических фигур и тел, а сами эталоны фигур и тел получили свое изображение в живописи и архитектуре.

Накопление знаний как численно-арифметического, так и геометрического характера создало следующие *предпосылки для формирования математических теорий:*

а) возможность предварять непосредственное оперирование с вещами оперированием с их упрощенными, схематическими изображениями и наименованиями (символами). На более поздней ступени это привело к развитию числовых систем и геометрических построений;

б) умение заменять конкретную задачу канонической задачей более общего вида, решаемой по определенным правилам, охватывающим целую совокупность частных случаев. Речь идет о первичных формах создания общих алгоритмов и связанных с ними математических исчислений.

Когда указанные предпосылки оказываются действующими в заметных масштабах, а в обществе образуется прослойка людей, умеющих пользоваться определенной совокупностью математических приемов, тогда появляются основания говорить о начале существования математики как науки, о наличии ее элементов.

Рассмотрим конкретно ранние стадии формирования математики на примере сохранившихся памятников математической культуры древних египтян, вавилонян, китайцев и индийцев.

Задание 1. Подготовьте сообщение по одному из следующих вопросов: «Числа начинают получать имена» (С. 14-17); «Великолепная семерка» (С. 17-19); «Живая счетная машина» (С. 20-21); «Сорок и шестьдесят» (С. 21-23); «Системы счисления» (С. 24-26); «Дюжины и гроссы» (С. 26-29).

Источник: Депман И.Я. За страницами учебника математики: пособие для учащихся 5-6 кл. сред. шк. / И.Я. Депман., Н.Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.

2.2. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ЕГИПТА

Исторические источники. Наши познания о древнеегипетской математике основаны главным образом на двух больших папирусах математического характера: Московском математическом папирусе и папирусе Ринда.

Папирусы – лентообразные свитки из особого писчего материала растительного происхождения.

Древнейшая сохранившаяся математическая рукопись египтян написана около 4 тысяч лет назад (относится к 1850 г. до н. э.). Она хранится в Москве – Музее изобразительных искусств имени А.С. Пушкина – и называется ***Московским папирусом***. Он приблизительно 5,5 *м* длины и 8 *см* ширины. Расшифрован академиками Б.А. Тураевым и В.В. Струве.

В Московском папирусе собраны решения 25 задач. Большинство их такого же типа, как и в папирусе Ринда. Кроме того, в одной из задач (№ 14) правильно вычисляется объем усеченной пирамиды с квадратным основанием. В другой задаче (№ 10) содержится самый ранний в математике пример определения площади кривой поверхности: вычисляется боковая поверхность корзины, т. е. полуцилиндра, высота которого равна диаметру основания.

В Московском математическом папирусе задачи не приведены в систему. Частично они сходны с задачами Лондонского папируса, но среди них выделяются три задачи:

1) задача на вычисление части судна, которая полностью не расшифрована, так как текст попорчен;

2) задача на вычисление объема усеченной пирамиды;

3) задача на нахождение площади либо полушара, либо полуцилиндра (какой именно поверхности, окончательно не установлено).

Одной из замечательных египетских задач является задача 14 Московского папируса на вычисление объема усеченной пирамиды.

Задача. Определить объем квадратной усеченной пирамиды, если ее высота равна 6, сторона нижнего основания 4, верхнего 2.

Решение. «Форма вычисления пирамиды, не имеющей вершины; если тебе назовут пирамиду без вершины в 6 (локтей) в высоту, 4 (локтя) по нижней стороне и в 2 по верхней стороне; вычисляй с этой 4, возводя в квадрат, получается 16; удвой 4, получается 8; вычисляй с этой 2, возводя в квадрат, получается 4; сложи вместе эти 16 с этими 8 и с этими 4, получается 28; вычисли $\frac{1}{3}$ от 6, получается 2; вычисли 28 два раза, получается 56; смотри: она будет 56. Ты нашел правильно».

В оригинале нет знаков препинания, усеченная пирамида изображена в виде небольшой трапеции, а действие «возводить в квадрат» дано иероглифом «проходить мимо», как принято в египетской математике; происхождение этого обозначения не выяснено.

Вместе с текстом в папирусе дан чертеж и вычислительная схема. На рис. 1 изображена иероглифическая транскрипция двух столбцов Московского папируса, выполненная И.И. Перепелкиным (иероглифический текст читается справа налево: длина верхней стороны 2 с ее квадратом 4 записана над чертежом, нижняя длина 4 – под чертежом, высота 6 и объем 56 – внутри чертежа, а умножение 28 на 2 – слева от чертежа). Таким образом, вычисление производится тем же способом, которому следуем мы, применяя формулу $v=\frac{1}{3}h\left(a^2+ab+b^2\right)$. Ответ: 56.

Другой математический папирус, написанный лет на 200-300 позднее Московского, хранится в Лондоне (рукопись относится к периоду 2000-1700 лет до н. э.). Содержащиеся в нем математические сведения относятся примерно к 2000 г. до н. э. Он называется «Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей, всех тайн, которые скрывают в себе вещи … По старым памятникам писец Ахмес написал это». Рукопись так и называют папирусом Ахмеса или ***папирусом Ринда*** (или Райнда) – по имени англичанина, который разыскал и купил этот папирус в Египте. Он приблизительно 5,5 *м* длины и 0,32 *м* ширины. Расшифрован профессором А. Эйзенлором в 1877 г.

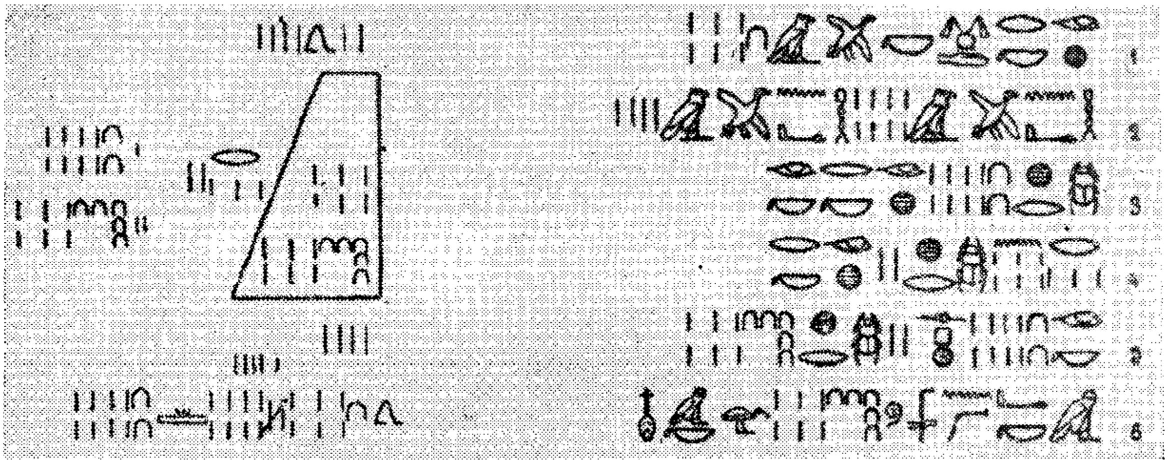


Рисунок 1 – Иероглифическая транскрипция двух столбцов Московского папируса, выполненная И.И. Перепелкиным

В папирусе Ринда даются решения 84 задач на различные вычисления, которые могут понадобиться на практике. Некоторые из этих задач показались бы довольно сложными ученику-старшекласснику нашей школы (у древних египтян не было ни удобного способа записи чисел, ни наших правил арифметических действий, ни таблицы умножения). Задачи сгруппированы в трех «книгах». В первой содержатся арифметические задачи, во второй имеются задачи на определение площадей и объемов, а в третьей собраны различные задачи прикладного хозяйственного характера.

Большая часть задач папируса Ринда относятся к арифметике: задачи на арифметические действия, на пропорциональное деление и т. д. При этом сгруппированы они не по математическому содержанию, а по тому, о чем идет в них речь. Некоторые из задач папируса Ринда имеют отвлеченный характер.

Пр ***Задача.*** «В доме 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев, каждый колос дает 7 растений, на каждом растении вырастает 7 мер зерна. Сколько всех вместе?».

Интересно, что в задаче надо ответить на вопрос: сколько всех вместе? Автора задачи не интересует, о каких вещах или предметах идет речь, однородны они или разнородны, – важно только их общее количество. Значит, очень давно египтяне уже представляли себе не число кошек, или колосьев, или мышей, а именно само по себе число.

Метод ложного положения. Египтяне за 2000 лет до н. э. имели для обозначения неизвестного числа особый символ и название (последнее произносится «хау» или «аха» и условно переводится словом «куча»). Для примера рассмотрим задачу из папируса Ринда, решаемую способом, который затем в течение нескольких тысячелетий употреблялся разными народами для решения подобных задач и называется методом ложного положения. Это есть тот же метод предположений, который на уроках арифметики применяется и в наше время.

Задача. «Куча. Ее седьмая часть, ее целое. Что составляет 19». Это значит: требуется найти число, которое, будучи сложенным с его седьмой частью, даст в сумме 19. Иными словами, требуется решить уравнение $x+\frac{x}{7}=19$.

Рисунок 2 – Египетское решение задачи

Решение. На рис. 2 представлено в виде таблицы египетское решение задачи. Смысл этого решения таков. Предположим, что «куча» есть 7; тогда 1/7 будет 1 (см. первый столбец). Звездочки означают, что эти числа использованы при решении. При сделанном предположении правая часть решаемого уравнения равнялась бы восьми (7+1), поэтому во втором столбце стоит число 8. Оно меньше требуемого задачей числа 19. Автор в уме удваивает его и получает 16. Дальнейшее удваивание дало бы 32, но это превышает требуемое задачей число 19, и в решении отмечается поэтому звездочкой число 16 как долженствующее войти в искомое решение. Не хватает еще 19-16 = 3. Автор пробует взять 1/2 от 8, т. е. 4. Эта доля предположенного числа не может войти в искомое решение, так как надо добавить лишь 3. Тогда решающий берет 1/4 и 1/8 от 8, т. е. 2 и 1, отмечает их как составляющее вместе с 16 число 19.

Таким образом, автор установил (второй столбец решения), что первоначально предположенное значение для «кучи» надо взять

2+1/4+1/8 раз, чтобы удовлетворить условию 11 задачи. Остается 7 умножить на 2+1/4+1/8 (египтяне, как и многие другие народы, знак «плюс» при сложении не ставили; мы также в смешанных числах пишем 31/4 вместо 3+1/4). Автор решения вместо умножения 7 на 21/4 1/8 умножает 21/41/8 на 7. Для этого в третьем столбце он записывает число *21/41/8*, затем удвоенное (..) и учетверенное (....) значения его. Эти три числа складываются, и получается для «кучи» значение 161/2 1/8, К нему прибавляется 1/7 «кучи», т. е. 21/4 1/8, и это дает в результате 19. Последняя часть решения представляет проверку его и во многих задачах отмечается словами: «будет хорошо».

Записи на папирусе производились преимущественно красками. Иногда же материалом для записи служили камень, дерево, кожа, холст, черепки. Текст выписывался в строки преимущественно справа налево или столбцами – сверху вниз.

Оказывается, как показала расшифровка папирусов, египтяне еще 4 тыс. лет назад решали ряд практических задач по арифметике, алгебре, геометрии, причем в арифметике пользовались не только целыми числами, но и дробями.

Система счисления. Первоначально египетская письменность носила иероглифический характер. Но постепенно иероглифические записи принимали несколько иной характер, который придал им своеобразный вид, именуемый иератической записью. На рис. 3 приведен один и тот же текст, записанный при помощи иероглифов (верхний ряд) и иератической скорописи (нижний ряд).

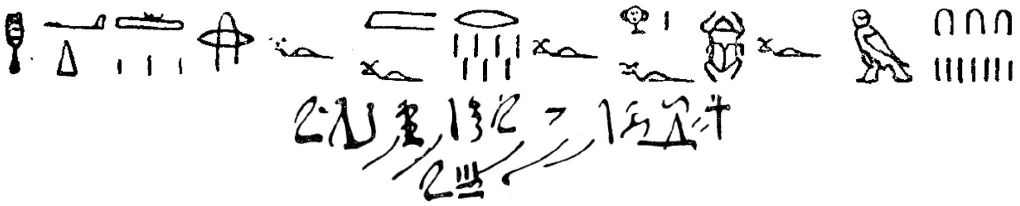


Рисунок 3 – Текст, записанный при помощи иероглифов и при помощи иератической скорописи

Такими же методами производилась и запись чисел. У древних египтян существовала десятичная система нумерации. При иероглифической записи числа выражались уже в десятичной системе, причем были особые знаки для разрядных чисел (рис. 4). Например, на рис. 5 изображена иероглифическая запись числа 35736.

Несмотря на застойный характер египетской математики на протяжении тысячелетий она все же претерпела некоторые изменения. Обмеры пирамид показали, что основные их размеры выражаются в целых числах «локтей», – строя свои сооружения из целых блоков, египтяне для измерения длин не нуждались в дробях, которые были, однако, необходимы в землемерии.

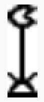
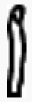
1	10	100	1000	10,000	100,000	1,000,000
						

Рисунок 4 – Иероглифы для изображения чисел

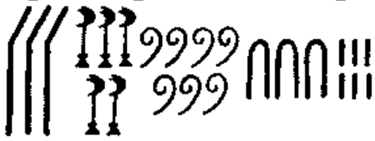
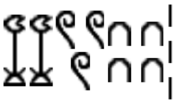


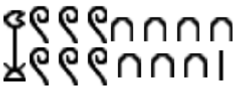
Рисунок 5 – Иероглифическая запись числа 35736.

Арифметические действия. Египтяне выполняли четыре арифметических действия над числами (положительными целыми). При ***сложении*** складывались единицы одинаковых разрядов (изображенные одинаковыми знаками). В тех случаях, когда число таких единиц достигало 10, единица прибавлялась к следующему высшему разряду. Выполнение этих действий облегчалось применением камешков. Обозначалось сложение и вычитание иероглифами  и , первоначально изображавшими «хождение» в одну или другую сторону. Если направление ног у этого иероглифа совпадало с направлением письма, тогда он означал «сложение», в других случаях он означал «вычитание». Если при сложении получается число большее десяти, тогда десяток записывается повышающим иероглифом.

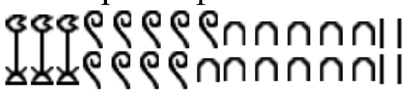
Пр 2343 + 1671

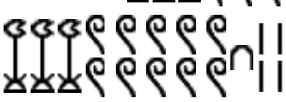


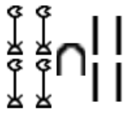
+



Собираем все однотипные иероглифы вместе и получаем:



Преобразуем: .

Окончательный результат выглядит вот так:  .

Разность двух величин выражалась символом, представляющим три стрелы, направленные горизонтально.

Действие умножения проводилось у египтян путем удвоения.

Чтобы умножить 8 на 8 египтянин должен был умножить 8 на 2, полученное произведение опять умножить на 2 и, наконец, новый результат еще раз удвоить. Чтобы умножить 15 на 17, надо было произвести следующие операции: $15(1 + 2·2·2·2) = 15·1 + 15·2·2·2·2 =$ $= 15 + 30·2·2·2 = 15 + 60·2·2 = 15 +120·2 = 15+240 = 255$.

Действие деление производилось как действие, обратное умножению, т. е. подбиралось такое число, которое, будучи умноженным на делитель, давало бы делимое.

При делении также используется процедура удвоения и последовательного деления пополам. Деление, по-видимому, было самой трудной математической операцией для египтян. Здесь наблюдается самое большое разнообразие приемов. Так, иногда в качестве промежуточного действия применялось нахождение двух третей или одной десятой доли числа и т. п.

Деление одного числа на другое производилось с помощью последовательных удвоений и раздвоений с привлечением, в случае необходимости, аликвотных дробей.

Деление 19 на 8 производилось только с помощью удвоений и раздвоений:

1	**8**
2	**16**
1/2	**4**
1/4	**2**
1/8	**1**
2 + 1/4 + 1/8	**16 + 2 + 1 = 19**

Деление 5 на 9 производилось с использованием таблиц разложения дробей вида $2:(2n+1)$ на сумму аликвотных:

$$5:9 = (4+1):9 = 4:9+1/9 = 2:9+2:9+1/9 =$$
$$= \text{(используя таблицы) } 1/6+1/18+1/6+1/18+1/9 =$$
$$(1/6+1/6) + (1/18+1/18) + 1/9 = 1/3+1/9+1/9 = 1/3+2/9 =$$
$$= \text{(используя таблицы) } 1/3 + 1/6 + 1/18 = 1/2+ 1/18,$$

Так что для деления 5 хлебов на 9 человек достаточно разрезать эти хлеба пополам, затем одну из половинок разрезать на 3 равные части, а каждую из этих частей еще на 3 равные части.

При сложении дробей, имеющих разные знаменатели, египтяне использовали умножение их на вспомогательные числа. Способы подбора этих вспомогательных чисел не дают, однако, права судить об этом приеме как о единообразном процессе, адекватном способу приведения дробей к общему знаменателю. Исторические реконструкции во многом еще спорны и не подтверждены достаточным количеством фактов.

Сложились также определенные приемы производства математических операций с целыми числами и дробями. Общей для всей вычислительной техники египтян является ее аддитивный характер, при котором все процедуры приводят к сложению.

Дроби. Особые знаки обозначали дроби вида $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{3}$. Однако общего понятия дроби $\frac{m}{n}$ у египтян не было, и все неканонические дроби представлялись как сумма ***аликвотных дробей***, означавших деление одной меры на *n* равных частей. Типовые разложения были сведены в громоздкие таблицы. На рис. 6 приведены примеры изображения часто встречающихся дробей.

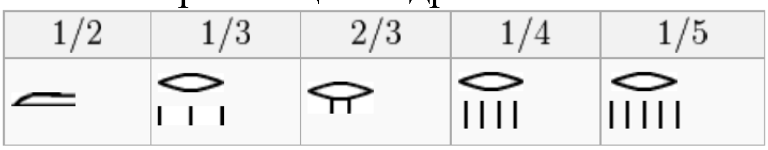


Рисунок 6 – Примеры изображения часто встречающихся дробей

Пример записи дробей из Папируса Ринда

$$5+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}(=5\frac{5}{7})$$

Геометрические сведения египтян. В математических текстах Древнего Египта встречаются простейшие геометрические задачи, связанные с вычислением площадей и объемов. При этом площади прямоугольников, треугольников и трапеций вычислялись правильно, в то время как площадь произвольного четырехугольника вычислялась как произведение полусумм противолежащих сторон, а площадь круга вычислялась по правилу $S=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, где d – диаметр круга. Объемы куба, параллелепипеда, призмы вычислялись правильно. Особенно отмечают знание египтянами точной формулы для объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями: $V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$, где a и b – стороны квадратов, h – высота усеченной пирамиды.

Наличие в геометрии Древнего Египта «неправильных» формул свидетельствует о том, что формулы для вычисления площадей и объемов получены как результат практики измерений. При этом вычисления по «неправильным» формулам отличались практическим удобством и удовлетворительной для того времени точностью.

Оценка математических знаний египтян. При изучении содержания математических папирусов обнаруживается следующий уровень математических знаний древних египтян.

Если учитывать найденные папирусы, то они представляют собой элементарные школьные пособия. Но поскольку обучение сводилось к заучиванию на память, естественно, что в них излагались лишь готовые предписания, а не способы, которыми эти предписания были открыты.

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии были придуманы для упражнений. У древних египтян имелось несколько видов общих приемов для решения однотипных задач. Эти приемы с полным правом можно рассматривать как зачатки алгебраического метода.

Взятая в целом, на протяжении всего своего многотысячелетнего развития математика египтян, так же как и вся египетская культура, оказала сильное влияние на науку стран, с которыми Древний Египет находился в общении, в особенности на греческую математику.

Надо отметить, что все эти познания были преимущественно опытного характера. Не было почти никаких обобщений и тем более доказательств. Знания ограничивались сведениями, которые нужно было применять при решении задач зарождающейся культурной жизни. Поэтому и в письменных документах мы не находим никаких общих правил, а каждый вопрос частного характера разрешается в них как самостоятельная задача. Нельзя сказать, что в Египте существовала математика как наука. Там наблюдался лишь процесс накопления математических знаний, которые в более поздние времена способствовали развитию науки.

Материалы, содержащиеся в папирусах, позволяют утверждать, что за 20 веков до нашей эры в Египте начали складываться элементы математики как науки. Эти элементы еще только начинают выделяться из практических задач, целиком подчинены их содержанию. Техника вычислений еще примитивна, методы решения задач не единообразны. Однако материалов, которые позволяли бы вообще судить о развитии математики в Египте, еще недостаточно.

2.3. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ВАВИЛОНА

Исторические источники. Математическими источниками Вавилона являются клинописные тексты и таблички из глины, обнаруженные при археологических раскопках или найденные случайно местными жителями в развалинах старых сооружений. Среди разрозненного по музеям мира множества глиняных табличек самых разных эпох, от начала III тыс. до н. э. до I в. н. э., имеются также в большом числе хозяйственные записи, многие из которых еще не прочитаны. Зарегистрировано их около 500 000, известно примерно 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами. Расшифровка и анализ клинописных текстов открыли неведомый до той поры мир математики древнего Двуречья, жившего IV тыс. назад.

Математические клинописные тексты, как и египетские, носят учебный характер и содержат в основном расчетные задачи; однако вавилонская вычислительная техника была гораздо более совершенна, а среди задач выделяется обширный класс алгебраических задач, которые выражаются системами линейных уравнений и уравнений второй степени. И хотя в клинописных текстах, как в египетских, нет доказательств, методы вычислений показывают, что их авторы знали и применяли законы алгебраических дробей и преобразований. В целом вавилонская математика в большей мере, чем египетская, приобретает знакомый нам вид самой абстрактной из наук, и внутренние потребности получают в ее развитии большее значение.

Вавилонские памятники в виде глиняных плиток с клинописными надписями хранятся в различных музеях мира, в том числе в Санкт-Петербурге в Эрмитаже и Московском Музее изобразительных искусств. Найдены 44 глиняные таблицы – своеобразная математическая энциклопедия древних вавилонян. В них даны достаточно удобные способы решения ряда практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей.

Система счисления. Вавилонская система математических символов имеет два основных элемента: *клин* ▼ с числовым значением 1 и *крючок* ◀ с числовым значением 10. Повторением этих знаков можно записать числа от 1 до 59. Система счисления была позиционной 60-ричной, не имела нуля, а один и тот же знак «клин» может обозначать не только единицу, но любое число вида $60^{\pm k}$ (k – натуральное число). Различать числа, написанные в такой системе, можно лишь исходя из условий задачи. Любое число записывали слева направо.

Пр

◀▼▼ – 12;
▼▼▼ ▼▼▼ – $(3 \cdot 60 + 3)$ – 183.

Арифметические действия. На основе 60-ричной системы были созданы многие единообразные правила арифметических действий, как с целыми числами, так и с дробями. Для облегчения действий существовали таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $60 \cdot 60$). При перемножении больших чисел с помощью таблицы умножения находились частичные произведения, которые затем складывались. Деление производилось с помощью таблиц обратных значений (так как $b : a = b \cdot \frac{1}{a}$). Кроме указанных таблиц вавилоняне использовали таблицу квадратов целых чисел, их кубов, обращенные таблицы (таблицы корней) и т. д.

При классификации приемов решения задач в вавилонских табличках Б.Л. Ван дер Варден выделил виды уравнений и их систем, которым эквивалентны следующие приемы решения:

а) уравнения с одним неизвестным:

$$ax = b,\ x^2 = a;\ x^2 \pm ax = b;\ x^3 = a;\ x^2\left(x+1\right) = a;$$

б) системы уравнений с двумя неизвестными:

$$x \pm y = a,\ xy = b;\ x \pm y = a,\ x^2 + y^2 = b.$$

Кроме того, вавилонянам были известны: суммирование арифметических прогрессий; суммы вида:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^n + \left(2^n - 1\right);\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n\right)\sum_{k=1}^{n} k.$$

Геометрические знания вавилонян состояли из вычислений площадей и объемов прямолинейных фигур. Площадь круга вычислялась по формуле $S = \frac{c^2}{12}$ (c – длина окружности), откуда $\pi = 3$. Имелись также и способы приблизительного вычисления объемов, основанные на своеобразном усреднении размеров (рис. 7).

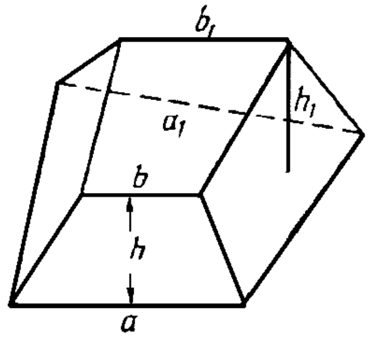


Рисунок 7 – Способ приблизительного вычисления объема

Объем неравностороннего вала вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a_1 + b_1}{2}\right) \cdot \frac{h + h_1}{2}.$$

Важнейшим достижением геометрии Древнего Вавилона является открытие теоремы Пифагора – метрического свойства прямоугольного треугольника. Как пришли вавилоняне к этому открытию остается неизвестным. Возможно, сначала они заметили, что некоторые треугольники с целочисленными сторонами a, b, c, удовлетворяющими равенству $a^2 + b^2 = c^2$, являются прямоугольными, а затем распространили это свойство на все прямоугольные треугольники. Во всяком случае, еще в III тыс. до н. э. вавилоняне уже имели таблицы пифагоровых чисел. Причем в этих таблицах встречаются помимо простых троек вроде $(60,45,75) = (4 \cdot 15, 3 \cdot 15, 5 \cdot 15)$ и довольно сложные, например (72, 65, 97) или (3456, 3367, 4825) и т. д. Составление этих сложных троек подбором маловероятно. Поэтому предполагают, что вавилоняне составляли тройки пифагоровых чисел по определенному правилу. Теорема Пифагора находила в Древнем Вавилоне разнообразное применение. С ее помощью вычисляли диагональ квадрата (приближенно), радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности, гипотенузу прямоугольного треугольника по данному периметру и площади, площадь правильного многоугольника и т. д.

Зачатки алгебры в математике Древнего Вавилона. В клинописных текстах Древнего Вавилона обнаружено большое число задач, содержащих уравнения и системы уравнений 1-й и 2-й степени, записанные без символов, но особой терминологией. В случае двух неизвестных одно называлось «длиной» (x), другое – «шириной» (y), их произведение (xy) – «полем», «площадью» или «длиной-шириной». Говорилось также о «сторонах моих квадратов» (x^2 и y^2). При этом в примерах «длина» всегда больше «ширины» ($x>y$). В задачах, приводящихся к кубическому уравнению, встречалась третья неизвестная – «глубина» (z), а произведение трех неизвестных именовалось «объемом» (xyz). Такая терминология свидетельствует о происхождении ряда задач из геометрии, хотя сами задачи носили алгебраический характер. Это проявляется в том, что с неизвестными величинами, имеющими различные измерения, обращались как с однородными, составляя выражения, равносильные нашим $xy+x$ и $xyz+xy$, а также в том, что «длина», «ширина», «площадь» и т. д. обозначались словами шумерского языка, который к тому времени уже вышел из употребления.

Научные достижения древних вавилонян заключаются в следующем. Вавилоняне создали шестидесятеричную систему счисления, в основе которой лежало число 60. Они создали систему мер и весов, в которой каждая последующая мера больше предыдущей в 60 раз. Отсюда ведет начало наше деление мер времени – часа, минуты, секунды – на 60 частей, круга – на 360.

Вавилоняне умели решать уравнения 2-й степени и некоторые виды уравнений 3-й степени, причем последние – при помощи специальных таблиц. Так же использовали суммирование арифметических прогрессий.

Есть основания предполагать, что математика древних вавилонян оказала влияние на математическую культуру закавказских народов. В особенности на армянскую, содействовав ее исключительно раннему расцвету.

Оценка математических знаний. В математических текстах древнего Вавилона наблюдается высокая алгоритмичность, что дало повод к высказыванию предположений, что в те времена культивировались общие методы, отвлеченные от конкретных задач и представляющие своеобразную алгебру.

Вавилонские математические традиции распространились на сопредельные государства Ближнего Востока и могут быть прослежены в них вплоть до эпохи эллинизма (ок. 330 г. – ок. 30 г. до н. э.).

Приведенные примеры показывают, как в разных странах происходил процесс накопления большого конкретного математического материала в виде приемов арифметических действий, способов определения площадей и объемов, методы решения некоторых классов задач, вспомогательных таблиц и т. п. Примерно такой же процесс накопления математических знаний происходил в Китае и в Индии.

2.4. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО КИТАЯ

История древнего Китая охватывает период от II в. до н. э. – до III в. н. э. Многие важнейшие открытия в науке и технике, сделанные китайскими учеными, значительно определили открытия в других странах.

В истории математики древнего Китая имеются сведения о десятичной системе счета, специальной иероглифической символике для чисел, об оперировании большими числами, наличии вспомогательных счетных устройств (узелки, счетная доска), об оперировании циркулем, линейкой и угольником и т. д.

Исторические источники. Самым ранним математическим сочинением является «Математика в девяти книгах», иногда называемая «Математикой в девяти главах», или разделах. Это сочинение появилось как своеобразный итог математических достижений Китая к началу нашей эры. Есть сведения, что оно было составлено выдающимся государственным деятелем и ученым Чжан Цаном (152 г. до н. э.), собравшим и систематизировавшим все известные к его времени математические знания. «Математика в девяти книгах» неоднократно подвергалась переработкам и дополнениям: в I в. до н. э. (Гэн Чоу-чан), в III в. н. э. (Лю Хуэй), в VI в. (Чжень Луань), в VII в. (Ли Чунь-фен) и др.

В результате этих переработок «Математика в девяти книгах» приобрела вид своеобразной математической энциклопедии со сравнительно неоднородным содержанием. В VII-X вв. н. э. она сделалась основным учебником для поступающих на государственную службу и классическим сочинением, от которого отправлялись ученые-математики в своих исследованиях. Текст его стал известен в СССР в 1957 г. (первый перевод на русский язык сделала Э.И. Березкина).

Книги, составляющие это сочинение, имеют вид отдельных свитков. Они посвящены различным темам, преимущественно практического характера. Различие обусловлено, по-видимому, тем, что различные книги предназначались для чиновников различных ведомств: землемеров, инженеров, астрономов, сборщиков налогов и т. п. Позднейшие дополнения вносились в книги по признаку не математической общности, а единства темы.

Изложение – догматическое: формулируются условия задач (всего 246 задач) и даются к ним ответы. После группы однотипных задач формулируется алгоритм их решения. Этот алгоритм состоит или из общей формулировки правила или из указаний последовательных операций над конкретными числами. Выводов этих правил, объяснений, определений, доказательств нет.

Обзор содержания «Математики в девяти книгах». В *первой книге «Измерение полей»* речь идет об измерении площадей круга, сектора, кольца, прямолинейных фигур, для чего введены простые дроби и арифметические действия над ними.

Площади прямолинейных фигур вычисляли правильно. При вычислении площадей круга, сектора и кольца принимали $\pi = 3$. Площадь сегмента вычисляли как площадь трапеции, большее основание которой совпадает с основанием сегмента, а меньшее основание и высота – каждое равно высоте сегмента.

Используемая при этом система счисления – десятичная иероглифическая. Числа делятся на классы по четыре разряда в каждом. Особого знака, нуля при такой системе записи, очевидно, не требуется. Нуль, действительно, появился значительно позднее, только в XII в., и был, видимо, заимствован из математики Индии. Чтобы придать большую общность постановке основной задачи об измерении площадей, в первой книге введены простые дроби и арифметические действия над ними. Правила действий – обычные: особенностью является только то, что при делении дробей требуется предварительное приведение их к общему знаменателю.

Употребляемое в первой книге значение $\pi = 3$, видимо, сохранилось с очень давнего времени. Китайские математики того времени умели и более точно вычислять значение π. Например, в I в. до н. э. у Лю Синя $\pi = 3{,}1547$, а в V в н. э. Цзу Чун-чжи (430-501) дал для π два значения подходящих дробей: $\frac{22}{7}$ и $\frac{385}{113}$, и оценку значения π до седьмого знака: $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Он исходил из предложения, что площадь круга аппроксимируется[5] снизу площадями вписанных многоугольников. Для аппроксимации сверху площади этих многоугольников увеличиваются на сумму площадей прямоугольников, описанных вокруг остаточных сегментов. Отсюда: $S_{2n} < S_p < S_n + 2\left(S_{2n} - S_n\right)$.

Вторая книга «Соотношение между различными видами зерновых культур» отражает старинную практику взимания налогов зерном, измеряемых в объемных мерах, и расчетов при переработке этого зерна. Математические задачи, возникающие при этом, – это задачи на тройное правило и пропорциональное деление. Во второй книге была позднее добавлена группа задач на определение стоимости предметов, число которых может быть как целым, так и дробным.

Задачи на пропорциональное деление, деление пропорционально обратным значениям чисел, а также простое и сложное тройное правило составляют содержание *третьей книги «Деление по ступеням»*. Правил суммирования арифметических прогрессий здесь еще нет; они встречаются, по-видимому, впервые в математическом трактате Чжан Цяю-цзяня (VI в.).

В *четвертой книге «Шао-гуан»* речь идет об определении стороны прямоугольника по данным значениям площади и другой стороны; излагаются правила извлечения квадратных и кубических корней, нахождения радиуса круга по его площади. Правила сформулированы специально для счетной доски; подкоренное число делится на разряды соответственно по 2 или по 3 знака, затем последовательно подбирается очередное число корня и дается правило перестройки палочек на счетной доске.

---

[5] *Аппроксима́ция*, или *приближе́ние* – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). В геометрии рассматриваются аппроксимации кривых ломаными. В переносном смысле употребляется в философии как *метод приближения*, указание на приблизительный, неокончательный характер.

В *пятой книге «Оценка работ»* собраны задачи, связанные с расчетами при строительстве крепостных стен, валов, плотин, башен, ям, рвов и других сооружений. При этом вычисляются как объемы различных тел, так и потребности в рабочей силе, материале, транспортных средствах при различных условиях.

Шестая книга «Пропорциональное распределение» начинается группой задач о справедливом (пропорциональном) распределении налогов. Математические методы здесь те же, что и в третьей книге, где речь шла о распределении доходов между чиновниками различных классов, пропорциональное деление, простое и сложное тройное правило. Кроме того, есть задачи на суммирование отдельных арифметических прогрессий и задач на совместную работу с разной производительностью.

В *седьмой книге «Избыток-недостаток»* подобраны задачи, приводившиеся к линейным уравнениям и их системам, разработан способ их решения, совпадающий с методом двух ложных положений. Задачи располагались в возрастающей степени трудности. Метод тоже еще не сформулирован четко и имеет много разновидностей частного характера.

Пр ***Задача №18.*** 9 слитков золота весят столько же, сколько 11 слитков серебра. Если же поменять местами по одному слитку, то веса золота и серебра будут различаться на 13 ланов (16 ланов равны 1 цзиню). Задача определения весов слитков сводится к решению системы уравнений: $9x = 11y;\ 8x + y + 13 = 10y + x$, которая решается с помощью ***правила двух ложных положений***. Принимается: $x_1 = 3$ цзиня, $x_2 = 2$ цзиня. Тогда $y_1 = 2\frac{5}{11}$ цзиня, $y_2 = 1\frac{7}{11}$ цзиня. Подстановка этих значений во второе уравнение (в котором все члены перенесены в одну сторону, допустим в левую) дает соответственно недостаток: $z_1 = -\frac{49}{11 \cdot 16}$ цзиня и избыток $z_2 = +\frac{15}{11 \cdot 16}$ цзиня. Действительное значение x находится по правилу $x = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1}$ и равно $2\frac{15}{64}$ цзиня. Соответственно $y = \frac{9}{11}$, $x = 1\frac{53}{64}$ цзиня.

В *восьмой книге* изложен метод «фан-чен» – метод решения систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (задачи этой книги приводят к системам до пяти линейных уравнений с положительными корнями). Этот метод заключался в том, что на доске изображали соответствующую таблицу «фен-чен» (в современном виде – матрицу заданной системы), а затем постепенно превращали эту таблицу способом, который напоминает действия над столбцами матриц в современном виде. Последовательное исключение неизвестных приводило к вычислению решений системы. Позже этот метод был переоткрыт в Европе, он получил название метода Гаусса или метода последовательного исключения неизвестных.

Отрицательные числа впервые появляются в Древнем Китае в связи с необходимостью выполнить до конца алгоритм метода «фан-чен». Причем вначале отрицательные числа появляются лишь как промежуточные результаты вычислений по этому методу, когда в ходе выполнения алгоритма приходится вычитать из меньшего числа большее или из «ничего» какое-либо число. Было введено специальное *правило «чжэн-фу»*, которое можно перевести, как правило «плюс-минус». Так как все вычисления, в том числе и преобразования матрицы, проводились на счетной доске, то для обозначения отрицательных чисел применялись счетные палочки другого цвета или формы, а при письме записывались другими чернилами или отмечались косой чертой. Для них имелось и особое название – «фу», в то время как положительные числа назывались «чжен». Для чисел «фу» были определены следующие правила операций: $(\mp a)\mp(\pm b)=\mp(a\pm b)$, $(\pm a)\mp(\mp b)=\pm(a\pm b)$, $0\mp(+b)=\mp b$, $0\mp(-b)=\pm b$.

Кроме сложения и вычитания употреблялись иногда также умножение и деление с отрицательными числами, хотя правила таких действий явно не сформулированы.

Постепенно китайские ученые пришли к истолкованию чисел «фу» как долга, недостачи и п. т. Позднее общепринятой становится геометрическая интерпретация отрицательных чисел как точек на отрицательной полуоси вещественной прямой.

Практическую основу последней *девятой книги* «Математики в девяти книгах» составляют задачи определения недоступных расстояний и высот с помощью теоремы Пифагора и свойств подобных треугольников. Математически эта книга особенно интересна общей, алгебраической формулировкой правил. Помимо элементарных способов применения теоремы Пифагора в ней имеется способ нахождения пифагорейских троек, т. е.

целочисленных решений уравнения $x^2+y^2=z^2$: $x=\alpha\beta,\ y=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2},\ z=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$.

Некоторые задачи приводят к полным квадратным уравнениям, а правила их решения эквивалентны общеупотребительным и сейчас формулам.

Пр **_Задача № 11_** о размерах двери с известными диагональю и разностью между длиной и шириной сводится к двум уравнениям: $x^2+y^2=c^2,\ y-x=k$ или к полному квадратному уравнению $2x^2+2kx+k^2-c^2=0$. Сформулированное в тексте правило, если его переписать символически, будет $x_{1,2}=\sqrt{\dfrac{c^2-2\left(\dfrac{k}{2}\right)^2}{2}}\pm\dfrac{k}{2}$. Выводов и доказательств в рассматриваемом трактате нет. Э.И. Березкина предполагает, что правило получено следующим элементарным способом: пусть $x_{1,2}=z\pm\dfrac{k}{2}$, тогда $x_1{}^2+x_2{}^2=2z^2+2\left(\dfrac{k}{2}\right)^2=c^2$, откуда $z=\sqrt{\dfrac{c^2-2\left(\dfrac{k}{2}\right)^2}{2}}$.

СРС **_Задание 2._** Изучите метод, получивший в китайской математике название метода «небесного элемента». Сделайте краткий конспект.
Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 85-87.

Математическое сочинение «Математика в девяти книгах» является единственным крупным памятником древней китайской математики, имеющим энциклопедический характер. Оно показывает, что в течение многих веков математика Китая развивалась по преимуществу в вычислительно-алгоритмическом направлении и создала существенные элементы алгебраического подхода к решению задач.

В средние века в математике Китая все больше выявлялись и формировались алгебраические элементы, как в области создания общих алгебраических методов, так и в формировании и усовершенствовании символики. Так же развивались элементы комбинаторики; был найден треугольник биноминальных коэффициентов, известный теперь под названием треугольника Паскаля.

С XIV в. в Китае начинается длительный период застоя в развитии наук. Математика получила новый стимул к развитию только в XX в. В 1928 г. в Нанкине была образована центральная научно-исследовательская академия, среди 13 институтов которой был и институт математики. Ученые получили результаты в области рядов Фурье, аналитической теории чисел, топологии, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и математической статистики, алгебры, теории конечных групп.

Среди важнейших достижений китайской математики отмечают: правило двух ложных положений, введение отрицательных чисел, десятичных дробей, методы решения систем линейных уравнений, алгебраических уравнений высших степеней и извлечения корней любой степени.

2.5. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕЙ ИНДИИ

Исторические источники. Самыми ранними памятниками математической культуры индийцев являются религиозные книги: сутры и веды. Их происхождение относят к VIII-VII вв. до н. э. Написаны они на давно уже умершем языке – санскритском. В них мы находим геометрические построения, составляющие важную часть ритуалов при постройке культовых сооружений: храмов, алтарей и т. д. В них можно найти первые способы квадрирования[6] кругов, применение теоремы Пифагора. Видимо, вследствие требований архитектуры решалась и арифметическая задача о нахождении пифагоровых троек натуральных чисел.

Наиболее яркий период развития, оставивший самые значительные образцы математической литературы, – это V-XII вв. н. э. В это время трудились выдающиеся индийские ученые – математики и астрономы: Ариабхата (конец V в.), Брахмагупта (род. 598 г.), Магавира (IX в.), Бхаскара (род. 1114 г.).

От Ариабхатты осталось сочинение в стихах астрономического и математического содержания. В нем сформулированы правила элементарной математики, арифметики, геометрии и тригонометрии. Брахмагупта также в стихотворной форме написал огромное

---

[6] *Квадри́рование* (от лат. *quadrare* – «делать четырехугольным») — один из способов гармонизации формы, основанный на фигуре квадрата и его диагонали.

сочинение в 20 книгах «Усовершенствованная наука Брамы», в котором 12-я книга посвящена арифметике и геометрии, а 18-я – алгебре и неопределенным уравнениям. Значительное математическое содержание имеют две книги Бхаскары: «Лилавати» и «Виджаганита». «Лилавати» (что значит «прекрасная») Бхаскара посвятил своей дочери. В поэтической манере в 13 отделах книги излагаются: 1) метрология; 2) действия над целыми числами и дробями и извлечение корней; 3) способ обращения, способ ложного положения и другие частные приемы решения задач; 4) задачи на бассейны и смеси; 5) суммирование рядов; 6) планиметрия; 7-11) вычисление различных объемов; 12) задачи неопределенного анализа; 13) задачи комбинаторики.

Другое сочинение Бхаскары – «Виджаганита» – состоит из восьми отделов: 1) действия над положительными и отрицательными числами; 2-3) неопределенные уравнения 1-й и 2-й степени; 4) линейные алгебраические уравнения; 5) квадратные уравнения; 6) системы линейных уравнений; 7-8) неопределенные уравнения 2-й степени.

Система счисления с древних времен определилась как десятичная. Состоит из десяти индийских цифр, включая и знак нуль, называемый по-индийски «сунья», что дословно означает «ничто». В первоначальном начертании нуль изображался точкой и лишь спустя много веков в виде маленького кружка. Эта система была изобретена в начале I века н. э. Что касается первого употребления знака нуля, то этот факт относится ко II веку н. э.

Процесс записи чисел и проведение арифметических операций над ними делались индийцами на белой доске, засыпанной красным песком. Орудием записи служила палочка. Таким образом, при записи на красной поверхности появлялись белые знаки, прочерченные палочкой.

Развитие математики в Древней Индии. Главной особенностью индийской математики является преобладание вычислительных приемов, излагаемых в догматической форме. Среди арифметических правил замечено широкое распространение *правила обращения (инверсия)*, которое состоит в следующем: задумывается число, но учащемуся или противнику сообщаются лишь последовательность операций с задуманным числом и конечный результат. Решение задачи состоит в последовательном проведении всех операций в обратном порядке.

В сочинении Бхаскары «Лилавати» перед неизвестной красавицей ставится задача: назвать число, которое, будучи умножено на три, увеличено затем на три четверти произведения, разделено на 7, уменьшено на 1/3 частного, умножено само на себя и уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, даст 2.

Среди других правил вычислительной техники индийцев есть правило извлечения корней и действий с иррациональностями.

Оперирование большими числами (в качестве примера приведем задачу определения числа членов геометрической прогрессии, если $a_1 = 3, q = 5, S = 22888183593$), помимо отработки единой числовой десятичной системы с нулем и числовой символики, привело к введению в математику представлений о бесконечно больших числах. Бхаскара вводил это представление, рассматривая выражения вида $\frac{a}{0}$ и поясняя, что это есть тоже число, но не претерпевающее изменений, приращения или ущерба, какое бы большое число мы к нему ни прибавляли или от него ни вычитали; его, по выражению Бхаскары, можно уподобить вечному времени бесконечной цепи существований.

Индийские математики ввели и правильно трактовали понятие отрицательного числа. Так, Брахмагупта разъясняет, что числа могут трактоваться либо как имущество, либо как долг. Правила операций с числами таковы: сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов – долг, имущества и долга – их разность, а если они равны – нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля – имущество. Произведение двух имуществ или двух неимуществ есть имущество; результат произведения имущества на долг представляет убыток. То же правило справедливо и при делении. Квадрат имущества, или долга, есть имущество; имущество имеет два корня: один составляет прибыль, другой – долг. Корня убытка не существует, ибо таковой не может быть квадратом. Однако, вводя отрицательные числа, индийские математики не использовали их как равноправные элементы математики, считая их только чем-то вроде логических возможностей, потому что, по выражению

Бхаскары, люди с ними не согласны.

Кроме правил и задач арифметики в индийскую математику входили также решения ряда задач алгебры, неопределенного анализа, комбинаторных задач. К алгебре относятся, в первую очередь, правила решения линейных уравнений, их систем и квадратных уравнений.

Развитие методов решения задач неопределенного или диофантова анализа представляет одно из высших достижений индийской математики. Появление подобных методов – общее явление для всех древних математических культур. Причина того, что математики Индии, Греции, Китая и других стран в равной мере интересовались решением подобных задач, лежит, по-видимому, в необходимости изучения периодически повторяющихся явлений, обильные примеры чего дает астрономия.

Индийские ученые умели находить целочисленные решения различных видов неопределенных уравнений 1-й и 2-й степени.

СРС

Задание 3. Рассмотрите примеры применения теоретико-числовых методов индийских математиков: 1) пример решения неопределенного уравнения 1-й степени вида $ax - by = c$; 2) пример решения неопределенного уравнения вида $xy = ax + by + c$; 3) циклический метод Бхаскары на примере решения уравнения вида $y^2 = ax^2 + 1$. Сделайте краткий конспект.

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 94-95.

К области алгебры и теории чисел в индийской математике относят элементарные комбинаторные сведения, знание сумм $\sum_{k=1}^{n} k$ и $\sum_{k=1}^{n} k^2$, треугольник Паскаля и др.

Индийская геометрия носит все черты прикладной науки. Есть чертежи, есть правила, иногда даже правил нет, под чертежом написано только: «смотри!». Некоторый интерес представляют тригонометрические таблицы, в которых хорды заменены полухордами. При этом вводятся в рассмотрение по существу тригонометрические функции: синусы, косинусы и синусы-версусы ($\sin vers\,\alpha = 1 - \cos\alpha$).

В истории Индии имеется достаточно фактов, свидетельствующих о наличии экономических и политических связей с греческими, египетскими, арабскими государствами и с Китаем. В математике считается бесспорным индийское происхождение десятичной системы счисления с нулем и правил счета. Можно проследить заимствование индусами у греков некоторых геометрических фактов и т. д. Но количество этих фактов невелико. Вопрос о связях и взаимных влияниях математики Индии, Греции, Китая и арабских стран еще остается недостаточно выясненным.

Либо исчезли, либо еще не найдены многие материальные свидетельства возникновения и накопления математических знаний как части древних культур. Помимо разрушительного влияния времени, в этом виноваты колонизаторы, которые уничтожили целые народы.

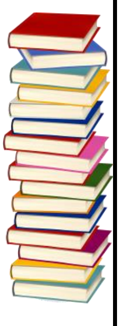
Творчество индийских математиков оказало огромное влияние на развитие арифметики (индийская десятичная позиционная нумерация), алгебры (метод рассеивания для решения неопределенных уравнений 1-й и 2-й степени с двумя неизвестными) и тригонометрии (бесконечные ряды для синуса, косинуса и арктангенса).

Контрольные вопросы к теме 2

1. Каково происхождение первых натуральных чисел?
2. Укажите непозиционные и позиционные системы счисления. Охарактеризуйте их кратко. Приведите примеры.
3. Укажите принципы построения изображения чисел.
4. Дайте характеристику славянской нумерации.
5. Остатки каких систем счисления мы обнаруживаем в названиях числительных «один», «два», «пять», «семь», «сорок», «девяносто»?
6. Опишите происхождение первых геометрических фигур и тел.
7. Укажите исторические источники математики Древнего Египта. Опишите каждый источник.
8. Что собой представляет папирус?
9. Какая система счисления была в Древнем Египте?
10. Каким образом происходило действие сложение, умножение, деление в Древнем Египте?
11. В чем заключалась особенность египетских дробей?

12. Какие древние арифметические задачи египтян Вы знаете?
13. Какие древние геометрические задачи египтян Вы знаете?
14. Опишите геометрические знания египтян.
15. Охарактеризуйте математические знания египтян.
16. Укажите исторические источники математики Древнего Вавилона.
17. Какой была вавилонская система счисления?
18. Укажите особенности арифметических действий вавилонян.
19. Опишите геометрические знания вавилонян.
20. Что Вам известно о зачатках алгебры в математике Древнего Вавилона?
21. В чем заключаются научные достижения древних вавилонян?
22. Укажите исторические источники математики Древнего Китая.
23. Обзор содержания «Математики в девяти книгах».
24. Опишите геометрические знания древних китайцев.
25. Какой была система счисления древних китайцев?
26. В чем заключается сущность метода «фан-чэн»?
27. Как впервые появились отрицательные числа в Древнем Китае?
28. Оцените математические знания древних китайцев.
29. Укажите исторические источники математики Древней Индии.
30. Назовите выдающихся индийских ученых-математиков V-XII вв. н. э.
31. Какой была система счисления в Древней Индии?
32. Что является главной особенностью индийской математики?
33. Какое правило получило широкое распространение в математике Древней Индии среди арифметических правил? В чем оно состоит.
34. Как индийские математики трактовали понятие отрицательного числа?
35. Что представляет собой одно из высших достижений индийской математики?
36. Назовите достижения индийцев в области алгебры и теории чисел.
37. Опишите геометрические знания древних индийцев.

Рекомендованная литература для самостоятельной работы студентов к теме 2



1. Башмакова И.Г. Происхождение систем счисления / И.Г. Башмакова, А.П. Юшкевич // Энциклопедия элементарной математики, Т. I, 1951.
2. Березкина Э.И. Математика древнего Китая / Э.И. Березкина. – М.: Наука, 1980. – 158 с.
3. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 368 с.
4. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1967.

5. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире / М.Я. Выгодский. – Изд-ние 2-е, испр. и доп. – М.: Наука, 1967. – 370 с.
6. Депман И.Я. Рассказы о старой и новой алгебре / И.Я. Депман. – Ленинград: Детская литература, 1967. – 145 с.
7. История математики. Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 353 с.
8. Кольман Э. История математики в древности / Э. Кольман. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 236 с.
9. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2002. – 304 с.
10. Марков С.Н. Курс истории математики: учеб. пособие / С.Н. Марков. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1996. – 248 с.
11. Матвиевская Г.П. Учение о числе на средневековом ближнем и среднем востоке / Г.П. Матвиевская. – Ташкент: «ФАН» Узбекской ССР, 1967. – 344 с.
12. Нейгебаузр О. Точные науки в древности / О. Нейгебаузр. – М.: Наука, 1968.
13. Раик А.Е. Очерки по истории математики в древности / А.Е. Раик. – Изд. 2-е, испр. и доп. – Саранск: Мордовское книжное изд-во, 1977. – 373 с.
14. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1984. – 283 с.
15. Юшкевич А.П. История математики в средние века / А.П. Юшкевич. – М.: Изд. физ.-мат. лит, 1961. – 448 с.
16. Юшкевич А.П. История математики в средние века / А.П. Юшкевич. – М.: Физматгиз, 1961.

Тема 3
ФОРМИРОВАНИЕ ПЕРВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

План

3.1. ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Характерным обстоятельством, позволяющим выделить начало периода элементарной математики, является рассмотрение наряду с узкопрактическими задачами системы основных идей в отдельных областях математики. Эти системы обобщали математическую практику и отражали объективные закономерности математического мышления людей. Они являлись первыми математическими теориями. Процесс их формирования являлся частью более общего процесса становления первых естественнонаучных теорий. Классическим примером образования математических теорий и становления математики как науки является математика Древней Греции.

В период VI-IV вв. до н. э., который рассматривается в этой лекции, Греция представляла собой совокупность рабовладельческих государств-полисов (городов), ведущих оживленную торговлю, как между собой, так и с другими государствами Средиземноморского бассейна: Египтом, Финикией, Персией и т. д.

Дошедшие до нас естественнонаучные и философские труды античных ученых и сведения о них показали, что в Древней Греции действовали различные естественнонаучные школы. Ведущее место среди греческих натурфилософских школ последовательно занимали: ионийская (VII-VI вв. до н. э.), пифагорейская (VI-V вв. до н. э.) и афинская (со второй половины V в. до н. э.). В этих школах с большой полнотой и обстоятельностью разрабатывались и математические вопросы.

В античной математике этого времени практические задачи, связанные с необходимостью арифметических вычислений и геометрических измерений и построений, продолжали играть большую роль. Однако новым было то, что эти задачи постепенно выделились в отдельную область математики, получившую наименование логистики. В логистику были отнесены: операции с целыми числами, численное извлечение корней, счет с помощью вспомогательных устройств, вроде абака, вычисления с дробями, численное решение задач, сводящихся к уравнениям 1-й и 2-й степени, практические вычислительные и конструктивные задачи архитектуры, землемерия и т. д.

В то же время уже в школе Пифагора из арифметики была выделена в отдельную область теория чисел, т. е. совокупность математических знаний, относящихся к общим свойствам операций с натуральными числами. В это время уже стали известными способы суммирования простейших арифметических прогрессий и результатов вроде $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. Рассматривались вопросы делимости чисел, введены арифметическая, геометрическая и гармоническая пропорции и различные средние: арифметическое, геометрическое и гармоническое.

Наряду с геометрическим доказательством теоремы Пифагора был найден способ отыскания неограниченного ряда троек «пифагоровых» чисел, т. е. троек чисел, удовлетворяющих соотношению $a^2+b^2=c^2$ и имеющих вид: $n,\ \frac{1}{2}(n^2-1),\ \frac{1}{2}(n^2+1)$, где n – нечетное.

Особенностью школы Пифагора является то, что отдельным числам и числовым соотношениям приписывались таинственные, магические свойства, а само занятие теорией чисел рассматривалось как удел «избранных» и «посвященных». Числовой мистицизм пифагорейцев имел не естественнонаучное, а социально-политическое происхождение.

В тот же период времени происходили абстрагирование и систематизация геометрических сведений. Были написаны специальные книги, в которых излагали сложившуюся к тому времени систему геометрии. Например, «Начала» Гиппократа Хиосского. В геометрических работах вводились и совершенствовались приемы геометрического доказательства. Рассматривались, в частности, теорема Пифагора, задачи о квадратуре круга, трисекции угла, удвоении куба, квадрировании ряда площадей, в том числе ограниченных кривыми линиями.

Одной из причин создания математических теорий явилось открытие иррациональности, вначале в виде установления геометрического факта несоизмеримости двух отрезков (первой открытой иррациональностью явился $\sqrt{2}$).

Вслед за иррациональностью $\sqrt{2}$ были открыты многие другие иррациональности. Так, Архит (конец V в. до н. э.) доказал иррациональность чисел вида $\sqrt{n(n+1)}$. Теодор из Кирены установил иррациональность квадратного корня из чисел 3, 5, 6, ..., 17. Теэтет (начало IV в. до н. э.) дал одну из первых классификаций иррациональностей.

Геометрическая алгебра. Следующий этап ознаменован попыткой создать для нужд научного исследования общую математическую теорию, пригодную как для рациональных чисел, так и для иррациональных величин. Коль скоро после открытия иррациональности оказалось, что совокупность геометрических величин (например, отрезков) более полна, чем множество рациональных чисел, то представилось целесообразным это более общее исчисление строить в геометрической форме. Это исчисление было создано. Оно получило название геометрической алгебры.

Первичными элементами геометрической алгебры являлись отрезки прямой. С ними были определены все операции исчисления. Сложение интерпретировалось приставлением отрезков, вычитание – отбрасыванием от отрезка части, равной вычитаемому отрезку. Умножение отрезков приводило к построению двумерного образа; произведением отрезков a и b считался прямоугольник со сторонами a и b. Произведение трех отрезков давало параллелепипед, а произведение большего числа сомножителей в геометрической алгебре не могло быть рассмотрено. Деление оказывалось возможным лишь при условии, что размерность делимого больше размерности делителя. Оно интерпретировалось эквивалентной задачей приложения площадей.

Задача. Приложить к отрезку *c* прямоугольник, равновеликий данному (*ab*).

Решение задачи, как видно из рис. 8, состоит в прикладывании друг к другу прямоугольников *ab* и *bc* и в построении нового прямоугольника, диагональю которого является диагональ прямоугольника *bc*, продолженная до пересечения с продолжением стороны *b*. Тогда прямоугольники *ab*=*cx* оказываются равновеликими, и задача решена.

Описанный в задаче ***метод приложения площадей*** позволял решать задачи, сводящиеся к линейным уравнениям, и носил название параболического (по-гречески «приложение площадей»).

В геометрическую алгебру входила и совокупность геометрических предложений, интерпретирующих алгебраические тождества. Например, рис. 9 дает геометрическую интерпретацию тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

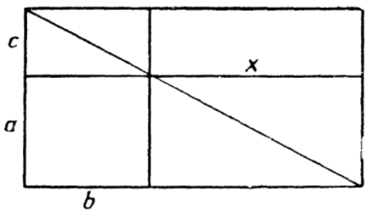


Рисунок 8 – Решение задачи из примера

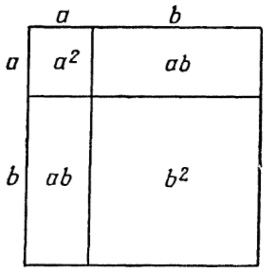


Рисунок 9 – Геометрическая интерпретация тождества «квадрат суммы»

Метод приложения площадей был распространен и на случаи решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. Примерами таких задач являются:

- определение сторон правильных вписанных многоугольников;
- так называемое «золотое сечение» отрезка, т. е. деление отрезка *a* на две части: *x* и *a*-*x*, удовлетворяющие соотношению $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$;
- выражение ребер правильных многогранников через диаметр описанного шара и т. д.

Задание 4. Решение этого класса задач проводилось с помощью единообразного канонического метода, имеющего некоторые разновидности в зависимости от вида квадратного уравнения. Изучите эти методы. Законспектируйте примеры их применения.

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 30-31.

Очевидно, что подобный метод давал только один положительный корень квадратного уравнения. Древние математики понимали необходимость так формулировать условия задач геометрической алгебры, чтобы они заведомо имели положительное решение. Поэтому на условия задачи они в необходимых случаях накладывали ограничения.

Это обстоятельство выявляло ограниченность области применения методов геометрической алгебры. Еще больше возможности геометрической алгебры ограничивались из-за того, что ее объектами были образы размерности не выше второй. Средствами построения были только циркуль и линейка. Можно было представить себе в рамках геометрической алгебры операции с трехмерными образами. Этого, однако, не делалось, потому что даже такая простая, казалось бы, задача, как построение куба, имеющего объем вдвое больше данного, не поддавалась решению с помощью циркуля и линейки. Задачи же, приводящиеся к уравнениям степени выше третьей, были в геометрической алгебре древних просто невозможными.

Недостаточность геометрической алгебры как общей математической теории была особенно подчеркнута выделением класса задач, не поддающихся решению с помощью циркуля и линейки. Среди этих задач наиболее известны:

1) удвоение куба (построение куба с известным ребром, но имеющего объем вдвое больше заданного);
2) трисекция угла (разделение произвольного угла на три равные части);
3) квадратура круга (отыскание квадрата, равновеликого данному кругу).

СРС

Задание 5. Подготовьте сообщение об истории трех знаменитых задач древности: об удвоении куба (С. 31-32); о трисекции угла (метод вставок) (С. 32-34); о квадратуре круга (С. 34).

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – 191 с.

Появление иррациональностей обусловило необходимость создания общей теории отношений, способной дать определения и ввести операции, применимые как для рациональных, так и для иррациональных величин. Первоначальной основой теории отношений античной древности являлся *алгоритм попеременного вычитания* известный под названием *алгоритма Евклида*. Пусть даны два отношения: $a{:}b$ и $c{:}d$. Поиски общей меры величин, участвующих в отношениях, приводят к следующей цепочке соотношений:

$$
\begin{array}{lcl}
a:b & \qquad\qquad & c:d \\
a - n_0 b = b_1 & & c - m_0 d = d_1 \\
b - n_1 b_1 = b_2 & & d - m_1 d_1 = d_2 \\
b_1 - n_2 b_2 = b_3 & & d_1 - m_2 d_2 = d_3 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

В случае, если члены отношения соизмеримы, эта цепочка обрывается; несоизмеримость не дает конечного алгоритма.

В то время не существовало еще общего понятия величины. В силу этих обстоятельств алгоритм Евклида не сделался основой теории отношений.

Теория отношений Евдокса. Следующая концепция античной общей теории отношений связана с именем Евдокса (ок. 408 г. – ок. 355 г. до н. э.). Ему же приписывается создание теории пропорций. В теории отношений Евдокса:

а) произведено обобщение понятия величины посредством подчинения его системе пяти аксиом: 1) если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$; 2) $a + b = c + b$; 3) $a - b = c - b$; 4) совмещающиеся равны; 5) целое больше части;

б) введена аксиома однородности: a и b могут иметь отношение, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга, т. е. для любых конечных a и b существуют m и n такие, что $na > b$ и $mb > a$. Эта аксиома была введена для того, чтобы исключить так называемые неархимедовы величины, например, роговидные углы.

В этой теории введена только одна операция составления отношений, соответствующая операции умножения действительных чисел. Если существуют два отношения $a{:}b$ и $b{:}c$, то из них можно составить отношение $a{:}c$. Это отношение называется двойным. Возможно составление и более сложных отношений. Введение только одной операции объясняется тем, что теория Евдокса применялась лишь в учении о подобии, где служила основой теории пропорций, и при определении площадей и объемов.

Дальнейшее развитие античной теории отношений пошло по пути трактования отношений, как обобщенных чисел и отождествления их с дробями. Так поступали Архит, Архимед, Герон и многие другие ученые. В этом сказалось влияние практики, требовавшей развития вычислительно-алгоритмических методов и распространения их на все более широкие классы чисел.

Задание 6. Изучите следующие вопросы самостоятельно: «Аксиоматическое построение математики в эпоху эллинизма». ««Начала» Евклида». Сделайте краткий конспект.

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 39-47.

3.2. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ[7] МЕТОДЫ АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ

При построении математических теорий в Древней Греции рано выделился специфический класс проблем, для решения которых оказалось необходимым исследовать предельные переходы, бесконечные процессы, непрерывность и т. п. Уже одно из первых открытий теоретического характера – обнаружение несоизмеримости величин – поставило задачу рационального объяснения подобных проблем. В данном случае они связаны: а) с неограниченной продолжимостью процесса нахождения общей меры; б) с бесконечной малостью последней и в) с тем, что она должна содержаться бесконечное множество раз в сравниваемых величинах. С этой группой проблем вскоре были сближены геометрические, решение которых приводило к аналогичным затруднениям (определение большинства длин, площадей и объемов).

Некоторые группы античных ученых искали выход из этих затруднений в применении к математике атомистических философских воззрений. Примером наиболее яркого выражения подобного подхода является натурфилософская школа Демокрита, (ок. 460-370 гг. до н. э.).

Однако о математической стороне подобных высказываний и исследований известно слишком мало. Гораздо больше известно о возражениях их научных противников. Здесь имеются в виду *апории Зенона* (род. ок. 500 г. до н. э.), т. е. логические парадоксы, к

---

[7]Инфинитезимальный (*лат. infinitus* беспредельный, бесконечный) – *мат.* рассматриваемый в бесконечно малом, в абстракции.

которым приводят попытки получать непрерывные величины из бесконечного множества бесконечно малых частиц.

Среди апорий наиболее известны: а) дихотомия, т. е. невозможность осуществить движение, так как путь может быть делим до бесконечности (пополам, еще раз пополам и т. д.) и поэтому надо последовательно преодолевать бесконечное множество участков пути (математически это сводится к отрицанию факта, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$; б) Ахиллес, который не может догнать черепаху, так как ему надо последовательно достигать тех мест, где только что находилась черепаха, т. е. исчерпывать бесконечную последовательность отрезков пути (математически это оказалось возражением против уже известного тогда факта, что $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{n}{n-1}$.

Апории Зенона убедительно показали, что если искать точные доказательства и логически исчерпывающие решения задач, нельзя пользоваться бесконечностью, опираясь на наивные, атомистические соображения. Для подобных целей необходимо разрабатывать и привлекать методы, содержащие наряду с разновидностями суждений о бесконечно малых элементы предельного перехода. Одним из самых ранних методов такого рода является метод исчерпывания.

Метод исчерпывания Евдокса. Его изобретение приписывают Евдоксу ($\approx$406-355 гг. до н. э.). Его создание относится к IV в. до н. э. Название методу было дано в XVII веке (его предложил в 1647 г. француз Грегуар де Сен-Венсан). Метод исчерпывания применялся при вычислении площадей фигур, объемов тел, длин кривых линий и т. п.

В основе метода исчерпывания лежит лемма Евдокса: «Если даны две величины a и $\varepsilon, 0<\varepsilon<a$, то вычитая из величины a больше ее половины, из полученного остатка больше половины этого остатка и т. д., получим через конечное число шагов n остаток $r_n<\varepsilon$».

Математическая сущность метода (разумеется, в форме, несколько отличной от формы изложения древних греков) состоит в последовательности следующих операций:

1). Если необходимо, например, квадрировать фигуру *B*, то в качестве первого шага в эту фигуру вписывается последовательность других фигур $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, площади которых монотонно возрастают и для каждой фигуры из этой последовательности они могут быть определены.

2). Фигуры A_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ выбираются таким образом, чтобы положительная разность $B - A_k$ могла быть сделана сколь угодно малой.

3). Из факта существования и построения описанных фигур делается вывод об ограниченности сверху последовательности «исчерпывающих» вписанных фигур.

4). Неявно, обычно с помощью других теоретических и практических соображений, отыскивается *A* – предел последовательности вписанных фигур.

5). Доказывается, для всякой задачи отдельно, что *A* = *B*, т. е. что предел последовательности вписанных фигур равен площади *B*. Доказательство ведется, как правило, от противного[8].

Методом исчерпывания доказывается, таким образом, единственность предела. В сочетании с другими методами он полезен для нахождения предела. Однако решения вопроса о существовании предела этот метод не может дать.

СРС

Задание 7. Законспектируйте в качестве примера метода исчерпывания решение задачи о нахождении квадратуры параболы у Архимеда «Найти площадь косого параболического сегмента *ABC*, отсекаемого хордой *AC*. Касательная к точке *B* диаметра *BO*, сопряженного с данной хордой, параллельна последней: *MBN*||*AC*».

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 50-51.

Метод исчерпывания был одним из распространенных методов античной математики. Им широко пользовался Архимед. Ранее этот метод включил в «Начала» Евклид, сделав его основой 12-й книги. Предельные переходы, совершавшиеся ранее часто в

[8] См. источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 50.

силу интуитивных или эмпирических соображений, получили в методе исчерпывания первое теоретическое оформление, исторически первую форму метода пределов.

Логическая строгость метода исчерпывания оставалась непревзойденной в течение многих веков. По существу только в XIX в. были поставлены и начали получать разрешение проблемы, непосредственно вытекающие из логической сущности античного метода исчерпывания. Однако форма последнего была еще весьма несовершенной. Метод развивался только в связи с конкретными задачами: он не стал абстрактным методом с развитой системой исходных понятий и с единообразными алгоритмами. Единственность предела доказывалась для всякой задачи заново. Этот недостаток не был случайным, частным. Дело в том, что всякая попытка ввести это доказательство раз навсегда для определенного достаточно широкого класса задач неизбежно влекла за собой необходимость объяснить ряд понятий инфинитезимальной природы. Потребовалось бы дать рациональное объяснение понятия бесконечно близкого приближения, бесконечно малой величины и т. п. Трудностей, связанных с этим, древние математики не могли преодолеть.

Тем не менее, метод исчерпывания лежал в основе многих инфинитезимальных методов и выдающихся конкретных достижений античных математиков.

Механический метод решения геометрических задач. В 1906 г. было найдено сочинение Архимеда «Послание к Эратосфену (Эфод)» о механическом методе решения геометрических задач. Метод состоял в следующем.

Пусть необходимо, например, вычислить объем шара. Одновременно с шаром строятся конус и цилиндр, радиус основания и высота которых равны диаметру шара. Затем через все эти тела проводится сечение, параллельное основаниям, на некотором произвольном фиксированном расстоянии от них (рис. 10).

$AK^2 = OK^2 + OA^2 = OK^2 + OL^2$; в то же время $AK^2 = AB \cdot OA$. Следовательно, $OK^2 + OL^2 = AB \cdot OA$. Такое же соотношение между величинами, пропорциональными слагаемым:

$$(\pi \cdot AB^2) \cdot OA = (\pi \cdot OK^2) \cdot AB + (\pi \cdot OL^2) \cdot AB,$$

представляет собой соотношение между горизонтальными сечениями шара, цилиндра и конуса.

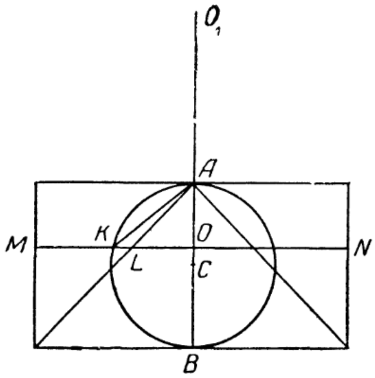


Рисунок 10 – Пример механического метода решения геометрических задач

Архимед дает этому соотношению механическую интерпретацию, основанную на правиле рычага, или, что то же самое, двуплечных весов. Именно, если принять точку A за точку опоры рычага, то элемент цилиндра, закрепленный в O, уравновесит элементы шара и конуса, закрепленные в O_1 $(AO_1 = AB)$. Переходя к объемам тел, как к суммам всех произвольных сечений, параллельных друг другу, получим:

$$V_{цил} \cdot AC = (V_{шар} + V_{кон}) \cdot AO_1 = (V_{шар} + V_{кон}) \cdot 2AC;$$

отсюда

$$V_{шар} = \frac{1}{2}V_{цил} - V_{кон}. \text{ Но т. к. } V_{кон} = \frac{1}{3}V_{цил}, \text{ то } V_{шар} = \frac{1}{6}V_{цил},$$

$$\text{или } V_{шар} = \frac{1}{6}\pi(2r)^2 \cdot 2r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

В соответствии с научной традицией своего времени Архимед переводил доказательства, полученные методом механической аналогии, на общепринятый язык метода исчерпывания с обязательным завершением последнего в каждом отдельном случае доказательством от противного.

Метод интегральных сумм. Следующей разновидностью инфинитезимальных методов античной древности является метод, который можно охарактеризовать как метод интегральных сумм. Наиболее яркие примеры применения этого метода находятся в сочинениях Архимеда «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах». Сущность этого метода в применении, например, к вычислению объемов тел вращения состоит в следующем: тело вращения разбивается на части, и каждая часть аппроксимируется[9] описанным и вписанным телами, объемы которых можно вычислить. Сумма объемов описанных тел будет больше, а сумма вписанных тел – меньше объема тела вращения.

[9] Аппроксимация (или приближение) – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми.

Теперь остается выбрать аппроксимирующие сверху и снизу тела таким образом, чтобы разность их объемов могла быть сделана сколь угодно малой. Это достигается выбором в качестве указанных тел соответствующих цилиндриков.

Задание 8. Ознакомьтесь с примером метода интегральных сумм: законспектируйте решение Архимедом задачи вычисления объема эллипсоида вращения в сочинении «О коноидах и сфероидах».

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 55-56.

Замечание. Этот пример показывает, что в античной математике сложился ряд элементов определенного интегрирования, в первую очередь построение верхних и нижних интегральных сумм, аналогичных до известной степени суммам Дарбу.

Различие метода интегральных сумм древних от определенного интегрирования состоит в том, что метод интегральных сумм древних опирается на интуитивное, строго не определенное понятие площади и не использует арифметико-алгебраический аппарат. В нем не введены и не определены необходимые общие понятия: предела, интеграла, бесконечной суммы и т. д. и не изучены условия применимости высказываемых теорем. Метод применяется индивидуально для каждой конкретной задачи без выделения и оформления его общетеоретических основ.

Инфинитезимальные методы Древней Греции послужили исходным пунктом многих исследований ученых-математиков XVI и XVII вв. Особенно часто изучались методы Архимеда. Инфинитезимальные методы образуют ту часть античной математики, которая формировалась под непосредственным давлением научно-практических запросов. Они выходили за рамки образуемых в то время замкнутых математических систем, построенных на основе минимального числа основных положений. В инфинитезимальных методах получили первое выражение элементы новых математических средств, которые привели к созданию анализа бесконечно малых. Отношения противоречия между совокупностью подобных методов и замкнутыми логико-математическими системами в древней Греции представляют один из исторических примеров противоречий, являющихся движущей силой развития математических наук.

3.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ПОЗДНЕЙ АНТИЧНОСТИ

Теория конических сечений Аполлония. Ученые более поздней античности оставили в своих сочинениях примеры теоретических исследований и даже развитых математических теорий. Среди них важное место занимает теория конических сечений.

Конические сечения вошли в античную математику как средство решения задач, не поддающихся решению средствами геометрической алгебры, т. е. построениям с помощью циркуля и линейки. Для их получения пользовались геометрическими местами точек пересечения поверхности конуса (соответственно остро-, тупо- или прямоугольного) плоскостью, перпендикулярной одной из образующих конуса.

Свойства конических сечений стали предметом специального теоретического исследования. Коническим сечениям был посвящен ряд сочинений. Однако все эти сочинения были забыты, когда появился труд Аполлония «Конические сечения». Он не имеет себе равных по полноте, общности и систематичности изложения теории конических сечений.

Аполлоний (около 200 г. до н. э.) – младший современник и научный соперник Архимеда. Продолжительное время он жил и работал в Александрии. Из многочисленных математических сочинений Аполлония до нас дошли в основном только 7 из 8 книг «Конических сечений».

Первая книга «Конических сечений», помимо основ теории, включает в себя теоремы о проведении касательных.

Во второй книге содержится теория главных осей, асимптот и сопряженных диаметров. Доказывается, в частности, что у эллипса, гиперболы или параболы имеется только одна пара взаимно перпендикулярных осей, что если соединить прямой точку пересечения двух касательных с серединой хорды, соединяющей точки касания, то эта прямая будет диаметром и т. п. Наконец, сообщаются способы построения центров и осей данного конического сечения и др.

Третья книга начинается группой теорем о площадях фигур, образуемых секущими, асимптотами и касательными. В этой книге находятся теоремы о полюсах и полярах и о получении конических сечений с помощью двух проективных пучков. Наконец, через свойства соответствующих площадей рассматриваются простейшие случаи проведения касательных, без использования точек касания, а также теория фокусов эллипса и гиперболы.

Первая группа предложений четвертой книги относится к гармоническому делению прямых. Затем подробно разбирается вопрос о наибольшем числе точек пересечения и соприкосновения двух конических сечений.

Книги 1-4 часто характеризуют как содержащие изложение основных свойств конических сечений, остальные имеют отношение к специальным вопросам теории конических сечений.

В пятой книге впервые решаются экстремальные задачи вроде задачи о кратчайшем расстоянии от данной точки до конического сечения. Здесь появляются элементы теории разверток в виде определения геометрического места центров кривизны.

Шестая книга содержит разбор проблемы подобия конических сечений и обобщения задачи о построении семейства конусов, проходящих через данное коническое сечение.

В седьмой книге исследуются вопросы, связанные с функциями длин сопряженных диаметров, параметров и т. п.

Из краткой аннотации книг «Конических сечений» можно проследить сколь высокие достижения имела теория конических сечений античной древности. Результатами этой теории позднее существенно воспользовались математики при создании аналитической геометрии.

Методы Диофанта. На основе преимущественного роста вычислительной стороны математики, а возможно и под другими дополнительными влияниями, в математике поздней античности зародились элементы алгебры и начальные формы алгебраической символики. На это обстоятельство указывают методы и результаты Диофанта.

Из математических сочинений Диофанта, жившего и работавшего в Александрии (вероятно, в III в. н. э.), сохранилось 6 книг «Арифметики» и отрывки книги о многоугольных числах. Понятие многоугольных чисел возникло в пифагорейской математике как следствие геометрической интерпретации теоретико-числовых соотношений. Если обозначать числа точками и располагать их в виде каких-либо фигур, то частные суммы арифметических прогрессий (вида $a_1 = 1, d = n - 2$) могут быть изображены в виде семейства подобных многоугольников (рис. 11 для n = 3, 4, 5), а соответствующие числовые значения могут называться (и называются) многоугольными. Ко времени Диофанта эту идею распространяли также на пространство. При этом получались пространственные числа, изображаемые семейством подобных параллелепипедов (в частном случае – кубов), пирамидальные числа (частные суммы последовательностей многоугольных чисел) и т. д.

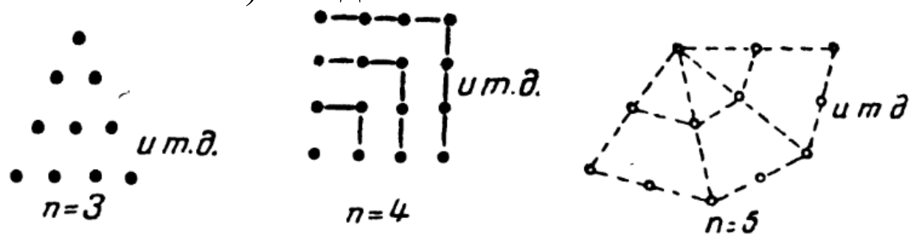


Рисунок 11 – Частные суммы арифметических прогрессий в виде семейства подобных многоугольников

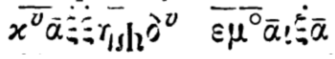
В «Арифметике» Диофанта исследуются операции с рациональными числами. В первой книге он вводит основные арифметические понятия, правило знаков при умножении, правила оперирования с многочленами, решает линейные уравнения. В последующих книгах содержатся многочисленные задачи, приводящиеся к уравнениям с рациональными коэффициентами, имеющими рациональные корни.

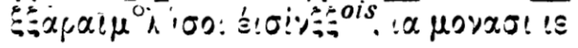
Диофант во всех задачах пользуется специальными числовыми значениями и производит только операции с числами, нигде не приводя общих теорем. Для обозначения неизвестного количества в уравнении и для записи функций от него он был вынужден разработать систему символов.

Символика Диофанта основана на сокращении слов. В истории развития алгебраической символики она знаменует переход от словесных выражений алгебраических зависимостей («риторическая» алгебра) к сокращениям этих выражений («синкопическая» алгебра). Следующей ступенью развития уже является чисто символическая алгебра.

Неизвестная величина x в уравнениях Диофанта представлена специальным символом. Переписчики пользовались разными символами, что не изменяет принципиально существа дела.

Система счисления – алфавитная. Символика не строго единообразная, имеет модификации. Об употреблении символики Диофанта лучше всего могут дать следующие примеры:

а)  означает $x^3+8x-(5x^2+1)=x$;

б)  означает $10x+30=11x+15$.

С помощью подобной символики в книгах 2-6 «Арифметики» Диофант решает (т. е. находит одно из их рациональных решений) многочисленные задачи, приводящиеся в большинстве к неопределенным уравнениям 2-й степени. Он нашел рациональные решения около 130 неопределенных уравнений, принадлежащих более чем к 50 различным классам. В каждом случае Диофант ограничивается нахождением одного корня. Общих методов решения неопределенных уравнений или классификации последних у Диофанта нет. Нет также доказательств; справедливость полученного результата подтверждается только тем, что он при подстановке удовлетворяет условиям задачи.

Общая теория диофантовых уравнений 1-й степени: $ax+by=1$, где a и b – взаимно простые целые числа, была построена в XVII в. французским математиком Баше де Мезириаком (1587-1638). Он также издал в 1621 г. сочинения Диофанта на греческом и латинском языках со своими комментариями. Над созданием общей теории диофантовых уравнений 2-й степени трудились многие выдающиеся ученые: П. Ферма, Дж. Валлис, Л. Эйлер, Ж. Лагранж и К. Гаусс. В результате их усилий к началу XIX в. было в основном исследовано общее неоднородное уравнение 2-й степени с двумя неизвестными и с целыми коэффициентами:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Диофантовы уравнения являются предметом исследования и в современной математике. Так называются неопределенные алгебраические уравнения, или их системы, с целыми коэффициентами, у которых разыскиваются целые или рациональные решения. Фундаментальные исследования по теории диофантовых уравнений проведены советскими учеными А.О. Гельфандом, Б.Н. Делоне, Д.К. Фадеевым, В.А. Тартаковским.

Имя Диофанта прочно закрепилось и в той части теории чисел, которая изучает приближения действительных чисел рациональными числами. Эти приближения называются диофантовыми. К теории диофантовых приближений относят также вопросы, относящиеся к решению в целых числах неравенств (или их систем) с действительными коэффициентами, и вопросы теории трансцендентных чисел.

Таким образом, сочинения Диофанта послужили по существу отправной точкой многих теоретико-числовых и алгебраических исследований.

СРС

Задание 9. Подготовьте сообщение о таких комментаторах классических математических сочинений поздней античности как: 1) Гемин Родосский (около 100 г. до н. э.); 2) Теон из Александрии (IV в.); 3) Папп из Александрии (IV в. н. э.); 4) Прокл (V в.); 5) Евтокий (VI в.)

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 76-78.

Математика Древней Греции представляет собой один из самых ранних примеров становления математики как науки и образования в ней всех ее составных частей.

Главными особенностями античной математики являются возникновение, бурный рост и приостановка развития ряда математических теорий.

В рамках математических теорий античной древности возникали и развивались элементы более поздних математических наук: алгебры, анализа бесконечно малых, аналитической геометрии, теоретической механики, аксиоматического метода в математике. Однако оторванность результатов математических теорий от практики, узость их геометрической формы предопределили ограниченность области и времени их развития.

Контрольные вопросы к теме 3

1. Перечислите греческие натурфилософские школы и укажите время их существования.
2. Какие математические факты были известны древним грекам?
3. Укажите древнегреческих математиков.
4. Что Вы знаете о геометрической алгебре древних греков?
5. Поясните на примере суть метода приложения площадей, назван-

ного греками параболическими методом.
6. Приведите пример геометрического предложения, интерпретирующего алгебраическое тождество.
7. Приведите примеры задач, сводящихся к квадратным уравнениям, решаемых с помощью метода приложения площадей.
8. Что ограничивало область применения методов геометрической алгебры?
9. Укажите три древнейшие задачи, не поддающиеся решению с помощью циркуля и линейки.
10. Какой алгоритм являлся первоначальной основой теории отношений античной древности?
11. Теория отношений Евдокса.
12. Назовите инфинитезимальные методы античной Греции.
13. Кто и когда изобрел метод исчерпывания.
14. Укажите математическую сущность метода исчерпывания.
15. Механический метод решения геометрических задач.
16. Метод интегральных сумм
17. В чем различие метода интегральных сумм древних от определенного интегрирования?
18. В качестве чего конические сечения вошли в античную математику?
19. Из скольких книг состоит труд Аполлония «Конические сечения»?
20. Сделайте краткий обзор содержания книг труда Аполлония «Конические сечения».
21. Что Вы знаете о многоугольных числах?
22. Что рассматривает Диофант в своем труде «Арифметика»?
23. Символика Диофанта.
24. Кем и когда построена общая теория диофантовых уравнений 1-й степени?
25. Какие выдающиеся ученые трудились над созданием общей теории диофантовых уравнений 2-й степени?

Рекомендованная литература для самостоятельной работы студентов к теме 3

1. Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции. В сб.: ИМИ / И.Г. Башмакова. – Вып. 11. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 225-438.
2. Белозеров С.Е. Пять знаменитых задач древности. История и современная теория / С.Е. Белозеров. Изд-во Ростовского университета, 1975. – 320 с.
3. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 368 с.
4. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука / Б.Л. Ван дер Варден.

– М.: Физматгиз, 1959.
5. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1967.
6. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире / М.Я. Выгодский. – Изд-ние 2-е, испр. и доп. – М.: Наука, 1967. – 370 с.
7. Депман И.Я. Рассказы о старой и новой алгебре / И.Я. Депман. – Ленинград: Детская литература, 1967. – 145 с.
8. История математики. Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 353 с.
9. Кольман Э. История математики в древности / Э. Кольман. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 236 с.
10. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2002. – 304 с.
11. Марков С.Н. Курс истории математики: учеб. пособие / С.Н. Марков. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1996. – 248 с.
12. Матвиевская Г.П. Учение о числе на средневековом ближнем и среднем востоке / Г.П. Матвиевская. – Ташкент: «ФАН» Узбекской ССР, 1967. – 344 с.
13. Раик А.Е. Очерки по истории математики в древности / А.Е. Раик. – Изд. 2-е, испр. и доп. – Саранск: Мордовское книжное изд-во, 1977. – 373 с.
14. Стиллвелл Д. Математика и ее история / Д. Стиллвелл. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 529 с.
15. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1984. – 283 с.
16. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века / Г.Г. Цейтен. – Изд. 2. – М.- Л.: ГТТИ, 1932. – 232 с.
17. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века / Г.Г. Цейтен. – М.-Л.: Гос. технико-теоретическое изд., 1932. – 231 с.
18. Чистяков В.Д. Три знаменитые задачи древности / В.Д. Чистяков: пособие для внеклассной работы. – М.: Гос. учебно-пед. изд. министерства просвещения РСФСР, 1963, – 97 с.

Тема 4
РАЗВИТИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

План

4.1. Математика народов Средней Азии и Ближнего Востока.
4.2. Математика Европейского средневековья и эпохи Возрождения.

4.1. МАТЕМАТИКА НАРОДОВ СРЕДНЕЙ АЗИИ И БЛИЖНЕГО ВОСТОКА

Математические науки в Европе стали приобретать заметное развитие только в конце средних веков и в эпоху раннего Возрождения (XII–XV вв.). Наиболее значительным источником знаний для европейских ученых в этой области явилась не математика древних, а так называемая арабская математика[10]. Математические сочинения всех этих народов, написанные на арабском языке, служили европейским ученым основным источником научной информации и мерилом математической подготовленности. Даже большая часть сведений об античной математике была почерпнута из арабских трактатов и в арабских переводах.

Научная деятельность арабских ученых образует в истории математики важный отдел, имеющий большое самостоятельное значение. Она позволяет, в частности, выяснить, как происходило развитие сложившихся в античную эпоху математических теорий и практических знаний, каковы были предпосылки успехов математики в Европе. Однако в течение нескольких предшествующих нашему веку столетий колониальная буржуазно-капиталистическая эксплуатация этих народов нанесла неисправимый ущерб их науке и культуре. До настоящего времени и в области истории математики сохраняется огромное число пробелов, нерешенных и спорных вопросов; материальные же свидетельства еще недостаточны количественно и не полностью исследованы.

[10] Этим термином обозначалась математическая наука народов Средней Азии, Ближнего Востока и Северной Африки периода IX–XV вв.

Задание 10. Найти ответ на вопрос: «Почему для арабской математики характерна некоторая многоплановость, пестрота в постановке задач, в методах их решения и даже в символике?».
Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – 191 с. – С. 98-99.

Рассмотрим подробнее вопросы о характерных особенностях математики средневекового[11] Востока и о достигнутом уровне развития математических наук.

Система счисления. В вычислительной практике арабоязычных народов равноправно действовали обе системы счисления: десятичная и 60-ричная. Первая была воспринята из Индии не позднее VII в. и быстро получила широкое распространение. Через посредство арифметического трактата Хорезми (IX в.) «Об индийских числах», переведенного в XII в. на латинский язык, десятичная система стала известной в Европе. Параллельно с десятичной сохранялась и регулярно употреблялась в астрономических обсерваториях унаследованная от вавилонян 60-ричная система счисления. В духе математиков Древнего Вавилона составлялись и использовались вспомогательные таблицы, вроде таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $59 \cdot 59$). Даже в сравнительно позднее время (ок. 1427 г.) в обсерватории узбекского астронома Улуг-бека под г. Самаркандом находилась в употреблении как десятичная, так и 60-ричная система. Для удобства вычислений были разработаны правила перевода из одной системы в другую. Регулярные правила существовали для вычислений с дробями: простыми и десятичными. В Западной Европе десятичные дроби были введены только около 1585 г. фламандским математиком и инженером С. Стевином.

Вычислительные приемы и алгоритмы. В арсенале арабских математиков накопилось много вычислительных приемов и специальных алгоритмов. Приведем некоторые из них, чтобы продемонстрировать уровень вычислительной техники.

1). Получение до 17 верных знаков числа π с помощью вписанных в окружность и описанных правильных многоугольников.

[11] Время господства феодальных отношений, продолжавшееся с V-VI вв. до XV-XVI вв., именуется *средними веками*.

Вычисления были проведены в первой половине XV в. ал-Каши и были доведены до определения сторон правильного $3\cdot 2^{28}$-угольника. Более чем через 150 лет, в 1593 г., в Европе Ф. Виет нашел только 9 правильных десятичных знаков π с помощью $3\cdot 2^{17}$-угольников. Только на рубеже XVI и XVII вв. (ван Роу-мен, 1597) результат ал-Каши был повторен, а затем превзойден.

2). Вычисление корней способом, известным ныне под именем метода Руффини-Горнера. Можно предположить, что этот метод воспринят в результате тесных связей с китайскими математиками. В развитии метода было учтено, что последовательное вычисление знаков корня $\sqrt[n]{q} = a, bc...$ связано с отысканием последовательных разностей

$$q - a^n, \qquad q - \left(a + \frac{b}{10}\right)^n, \quad q - \left(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}\right)^n, \ \dots$$

При этом обнаружен и сформулирован ряд биномиальных разложений вида:

$$(a+1)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a + 1;$$

$$(a+b)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n;$$

высказано правило образования биномиальных коэффициентов.

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

В Европе таблица биномиальных коэффициентов (для $n \le 17$) опубликована Штифелем (1544), а описанный метод переоткрыт Руффини (1804) и Горнером (1819).

3). Приближенное извлечение корней. Известный в древности прием

$$\sqrt{q} = \sqrt{T^2 + r} \approx T + \frac{r}{2T+1},$$

где T – целое, был распространен к XV в. (ал-Каши) на случай любого натурального показателя корня. Основой этого приема было линейное интерполирование, т. е. рассуждения типа: положим

$$y = \sqrt[n]{x}; \quad \text{при} \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = T^n; & y_1 = T \\ x_2 = (T+1)^n; & y_2 = T+1 \end{array} \right\} x = x_1 + r.$$

Тогда

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = T + \frac{r}{(T+1)^n - T^n}.$$

По-видимому, от индийцев было воспринято правило

$$\sqrt[n]{q} = \frac{1}{z}\sqrt[n]{qz^n},$$

применявшееся как в десятичной ($z=10^k$), так и в 60-ричной ($z=60^k$) системе.

Распространение подобных приемов приближенного извлечения корней отмечено в Европе лишь с середины XVI в.

4). Суммирование арифметических и геометрических прогрессий, включая нахождение сумм вида

$$\sum_{a=1}^{n} a^k \,(k=1, 2, 3, 4)$$

Например:

$$\sum_{a=1}^{n} a^4 = \sum_{a=1}^{n} a^2 \left[\sum_{a=1}^{n} a + \frac{\sum_{a=1}^{n} a - 1}{5} \right].$$

Преобладающее влияние вычислительной части математики оказало влияние на трактовку многих теоретических вопросов. Особенно интересен вопрос о понимании алгебраических иррациональностей. Стремление к производству операций над ними характерно для всей арабской математики. Например, в сочинениях Хорезми (IX в.) уже встречаются операции над квадратичными иррациональностями. Аль-Кархи (XI в.) ввел многие преобразования иррациональностей, в том числе

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}.$$

В силу такого подхода и частого применения вычислений иррациональностей грань между рациональными числами и иррациональностями начинает стираться. К представлению о числе как о собрании единиц прибавились представления об отношениях непрерывных величин. Была установлена адекватность геометрической несоизмеримости с арифметической иррациональностью. Последние вошли в класс чисел на основе разработанных для них правил оперирования. В математике вместо двух обособленных понятий – числа и отношения – возникла новая, более широкая концепция действительного положительного числа. Уже в XIII в. (Насирэддин, 1201 – 1274) этот факт был констатирован с полной определенностью: «Каждое из отношений может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов».

Идея создания единой концепции действительного числа путем объединения рациональных чисел и отношений, появившаяся у математиков поздней античности, получила на Ближнем Востоке известное завершение.

В Европе подобная идея не появлялась довольно долго. Только с XVI в. бурное развитие вычислительных средств начало приводить ученых к ее осознанию. Однако с равносильной степенью общности она была высказана лишь И. Ньютоном в 70-х годах XVII в., а опубликована еще позднее (1707) в его «Всеобщей арифметике».

Влияние алгоритмически-вычислительной направленности арабской математики отразилось и на ее структуре. В ней сравнительно быстро, впервые в истории, выделилась в качестве самостоятельной математической науки алгебра. В этом факте нашло свое выражение слияние элементов алгебраического характера математики различных народов, например: геометрическая алгебра древних греков, группировка однотипных задач и попытка выработать для каждой группы единый алгоритм в Древнем Вавилоне, вычислительные задачи индийцев, приводившие к уравнениям 1-й и 2-й степени, и т. п.

В трудах математиков средневекового Востока эти алгебраические элементы были впервые выделены, собраны в новый специальный отдел математики, сформулирован предмет этого нового отдела науки и построена систематическая теория.

Европейские ученые начали знакомиться с алгеброй в начале XII в. Источником их сведений об алгебре явилось сочинение «Китаб аль-Джебр валь-Мукабала» Мухаммеда бен-Муса аль-Хорезми (сокращенно Хорезми), жившего в первой половине IX в. Название в переводе означает: книга об операциях джебр (восстановления) и кабала (приведения). Первая из операций, имя которой послужило названием для алгебры и служит до сего времени, состоит в переносе членов уравнения из одной стороны в другую. Вторая есть операция приведения подобных членов уравнения. Решение уравнений рассматривается как самостоятельная наука. В книге содержатся систематические решения уравнений 1-й и 2-й степени вида:

$$ax=b; \quad x^2+bx=a;$$
$$ax^2=b; \quad x^2+a=bx;$$
$$ax^2=bx; \quad bx+a=x^2.$$

Хорезми приводит как арифметические, так и геометрические решения приведенных уравнений. ***Метод нахождения геометрических решений*** состоит в приравнивании площадей, специально подобранных для геометрической интерпретации уравнения.

Например, дано уравнение $x^2+ax=b$. На рис. 12 площадь

$$S=x^2+4\left(\frac{a}{4}\right)^2+4\cdot\frac{a}{4}x=(x^2+ax)+4\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2=b+\frac{a^2}{4}.$$

В то же время

$$S=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2; \quad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2=b+\frac{a^2}{4},$$

откуда

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}.$$

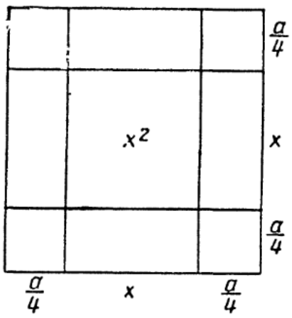


Рисунок 12 – Рисунок к примеру

Книга Хорезми пользовалась большой известностью. Термин «алгебра» укоренился в математике. Осталось в этой науке и имя автора (аль-Хорезми) в латинизированном виде: алгоритм. Вначале это слово обозначало фамилию, затем нумерацию по позиционной системе, а теперь – всякую систему вычислений, производимых по строго определенным правилам и заведомо приводящих к решению поставленной задачи. В ходе развития науки изменялось содержание понятий, вложенных в эти термины, но термины сохранились. Хорезми не высказывал мысли о своем приоритете в алгебре. Видимо, оба приема – джебр и кабала – были уже широко распространены в его время.

Алгебраические арабские трактаты IX–XV вв., помимо решения уравнений 1-й и 2-й степени, включали в себя и кубические уравнения. К последним приводили разнообразные задачи: а) рассечение шара плоскостью; б) трисекция угла; в) отыскание стороны правильного 9-угольника; г) отыскание стороны правильного 7-угольника и др. Одна из задач оптики:

найти на данной окружности такую точку, чтобы луч, падающий из данной точки *A*, отразился в другую заданную точку *B*, – приводила к уравнению 4-й степени.

В методах решения кубических уравнений отразилось многообразие средств, обычно присущее математике арабских ученых. Ряд трактатов содержит попытки численного решения этих уравнений; другие трактаты отражали античное влияние. В них строилась теория решения кубических уравнений с помощью пересечения конических сечений.

Численные решения этих уравнений развивались начиная со способа проб (Бируни, 972-1048) до изящного итерационного, быстро сходящегося, метода (ал-Каши, ок. 1420 г.). Рассмотрим последний метод подробнее. В самаркандской обсерватории Улуг-бека, оснащенной совершенными инструментами, составлялись таблицы синусов с частотой через $1'$ и с точностью до девятого знака. Решающую роль в этой работе играла, как известно, точность вычисления синусов малых дуг, скажем $\sin 1°$. Исходя из $\sin 72°$ и $\sin 60°$, ал-Каши нашел $\sin 3°$. Для нахождения отсюда $\sin 1°$ он получил ($\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$) кубическое уравнение $x^3 + 0{,}7850393433644006 = 45x$.

Возьмем для удобства пояснения метода уравнение в общем виде: $x^3 + Q = Px$ или $x = \dfrac{x^3+Q}{P}$.

Первое приближение, в силу малости x, а следовательно и x^3 принимается $x_1 \approx \dfrac{Q}{P} = a$. Результат вычисляется приближенный, с условием, чтобы остаток от деления R был такого же порядка малости, что и a^3. Второй этап: положим

$$x=a+y;\quad a+y=\frac{(a+y)^3+Q}{P};\quad y=\frac{(a+y)^3+R}{P}.$$

R имеет порядок a^3; он велик по сравнению с a^2y. Новое приближение получается, если пренебречь в числителе членами, содержащими y.

$$y=\frac{a^3+R}{P}=b+\frac{S}{P}.$$

Третий этап: $y = b + z$, и операции повторяются в том же порядке, как во втором этапе. По этому способу получаются следующие последовательные приближения

$$x_1 = a = \frac{Q}{P};$$

$$x_2 = a + b = \frac{a^3 + Q}{P};$$

$$x_3 = a + b + c = \frac{(a+b)^3 + Q}{P};$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_n = \frac{x_{n-1}^3 + Q}{P}.$$

Процесс сходится при $3x^2 < r < 1$, что в данном случае ввиду малости x имеет место.

Этим способом было найдено 17 верных знаков $\sin 1°$ в десятичной системе (результат вначале был получен в 60-ричной системе). Такая степень точности позволила вычислять таблицы тригонометрических функций с точностью до девятого знака.

Такой уровень техники приближенных вычислений в Европе был достигнут лишь к концу XVI в.

Большим недостатком алгебры в это время было отсутствие символики, словесное описание операций. Это задерживало развитие алгебры.

Помимо выделения алгебры, важнейшей характерной чертой арабской математики было формирование тригонометрии. И в этой области происходил синтез разнообразных тригонометрических элементов: исчисление хорд и соответственные таблицы древних, в особенности результаты Птоломея и Менелая, операции с линиями синуса и косинуса у древних индийцев, накопленный опыт астрономических измерений.

Используя этот разнородный материал, математики стран Ближнего Востока и Средней Азии ввели все основные тригонометрические линии. В связи с задачами астрономии они составили таблицы тригонометрических функций с большой частотой и высокой точностью. Данных накопилось при этом так много, что стало возможным изучать свойства плоских и сферических треугольников, способы их решений. Получилась богатая фактами стройная система тригонометрии как плоской, так и сферической. Такую систему представляет, например, сочинение Насирэддина (1201-1274) «Трактат о полном четырехсторроннике», где: 1) развита теория отношений; 2) изложена теория фигур, состоящих из четырех попарно пересекающихся прямых; 3) собраны способы решения плоских и сферических треугольников; 4) решена задача об определении сторон сферического треугольника по трем углам. Из-за недостатков символики еще задерживалось чисто аналитическое построение тригонометрии.

Итак, тригонометрия в математике средневекового Востока приобрела положение отдельной математической науки. Из совокупности вспомогательных средств астрономии она преобразовалась в науку о тригонометрических функциях в плоских и сферических треугольниках и о способах решения этих треугольников. Алгоритмически-вычислительные средства стали играть в ней преобладающую роль. Оставался один только шаг: введение специфической символики, чтобы тригонометрия приобрела привычный нам аналитический облик. Однако для этого шага понадобилось еще много времени. Дальнейшее развитие тригонометрия начала получать со второй половины XVI в. в Европе, в первую очередь под влиянием запросов мореплавания и астрономии. В конце XVI в. начало входить в употребление и название науки – «тригонометрия».

Математическая литература того времени богата переводами сочинений Евклида, Архимеда, Аполлония и других геометров античной Греции и комментариями на эти сочинения. В арабских рукописях сохранились для математики многие достижения древности. Нередко эти рукописи являются единственным источником многих немаловажных сведений о предшествующем развитии математики и научной основой математического творчества европейских ученых эпохи Возрождения[12].

В ряду геометрических сочинений обращают на себя внимание глубокие исследования по основаниям геометрии. В сочинениях Хайяма (XI в.) и Насирэддина (XIII в.) мы находим попытки доказательства постулата о параллельных, основанные на введении эквивалентных этому постулату допущений. Имена этих

[12] XV и XVI века вошли в историю Европы под названием «эпоха Возрождения».

математиков с полным правом могут быть помещены историками в длинном ряду предшественников неевклидовой геометрии, подвергавших логическому анализу систему аксиом и постулатов геометрии Евклида.

Примерно в середине XV в. развитие математических наук в описываемых здесь районах замедляется и прекращается. Причины этого явления коренятся в наступившем экономическом разобщении обширных территорий, о которых шла речь выше.

Народы Средней Азии, Ближнего Востока и Северной Африки в силу исторически сложившихся условий оказались задержанными на феодальной стадии развития, жили в обстановке войн и политических неурядиц, подвергались возраставшему колониальному нажиму передовых и сильных капиталистических стран. Прогресс науки, в том числе и математики, оказался приостановленным на несколько столетий.

4.2. МАТЕМАТИКА ЕВРОПЕЙСКОГО СРЕДНЕВЕКОВЬЯ И ЭПОХИ ВОЗРОЖДЕНИЯ

Пути развития математики в Европе в V-XV вв. Заметные успехи европейской математики появились только в эпоху развитого средневековья и особенно Возрождения. В V-XI вв. уровень математических знаний в Европе был весьма низким. Единственными хранителями математических знаний были ученые-монахи, хранившие, изучавшие и переписывавшие естественно-научные и математические сочинения древних.

Основной организационной предпосылкой развития математики в Европе было открытие учебных заведений. Одно из первых подобных заведений организовал в г. Реймсе (Франция) Герберт (940-1003), позднее ставший римским папой под именем Сильвестра II.

В школе Герберта, кроме прочих наук, учили счету с применением счетной доски – абака, усовершенствованного путем замены пустых жетонов, каждый из которых имел значение единицы, на жетоны с написанными на них цифрами. В то время существовало много способов счета. Основное место занимали две враждующие партии: абакистов и алгоритмиков. Первые в основном отличались требованием обязательного использования абака и 12-ричной римской нумерации. Алгоритмики пользовались письменным обозначением индусских цифр, некоторые из них вводили знак нуля, счет вели на бумаге, применяли 60-ричные дроби. В спорах формировались системы счисления и приемы арифметического счета, все более близкие к привычным нам системам и приемам.

В XII-XIII вв. появились в Европе первые университеты. Самыми ранними университетами были итальянские в Болонье, Салерно и др. городах. Вслед за ними были открыты университеты в Оксфорде и Париже (1167), Кембридже (1209), Неаполе (1224), Праге (1347), Вене (1367) и т. д. Это были учебные заведения, безраздельно подчиненные церкви. Во главе университетов стояли отцы-настоятели (ректоры), во главе факультетов – деканы. Студенты сначала обучались на подготовительном факультете искусств (артистическом), затем переходили на один из основных факультетов: богословский, юридический или медицинский.

Математика входила составной частью в семь свободных искусств (*artis liberalis*), изучавшихся на факультете искусств. Весь цикл этих искусств распадался на два концентра. Первый, составлял тривиум: грамматика, риторика, т. е. искусство устно выражать мысли, и диалектика, или умение вести спор. Второй концентр – квадривиум, включал в себя арифметику, геометрию, астрономию и музыку, т. е. теорию гармонических интервалов. Уровень математических познаний выпускников университетов был низок; во многих европейских университетах вплоть до XVI в. от лиц, претендовавших на звание магистра по математике требовалась только клятва, что он знает шесть книг евклидовых «Начал». Система средневекового образования в течение нескольких веков была необходимой, но недостаточной предпосылкой развития математической науки.

При таком положении дел, естественно, математические знания не совершенствовались в европейских учебных заведениях. Они привносились извне. В малой части это были сохраненные остатки математики римлян, или греческо-византийских государств. В большей же части научные знания приобретались путем перевода сочинений с арабского языка на латинский. Таким путем европейцы познакомились с «Началами» Евклида, «Альмагестом» Птолемея и др. трудами античных математиков, с рядом сочинений математиков Средней Азии и Ближнего Востока.

Некоторое оживление в математике наступило в XIII в. в связи с двумя факторами: борьбой против схоластики[13] и богословия, начатой Роджером Бэконом (1214-1294), и математическими трудами Леонардо Пизанского (ок. 1200 г.).

Около 1202 г. Л. Пизанский написал «Книгу об абаке», которая является подлинной энциклопедией математических знаний народов, живших на берегах Средиземного моря. Более 200 лет она являлась непревзойденным образцом математических сочинений для европейцев и подготовила новые успехи математики в эпоху Возрождения.

«Книга об абаке» состоит из 15 отделов. В первых семи изложены исчисление целых чисел по позиционной десятичной системе и операции с обыкновенными дробями. Отделы 8-11 содержат приложения к коммерческим расчетам: простое и сложное тройное правило, пропорциональное деление, задачи на определение монетных проб. Разнообразный набор задач, решаемых с помощью простого и двойного ложных положений, суммированием арифметических прогрессий и квадратов натуральных чисел, нахождением целочисленных решений неопределенных уравнений первой степени, составляет отделы 12 и 13. 14-й отдел посвящен вычислению квадратных и кубических корней и операциям с «биномиями», т. е. с выражениями вида $a \pm \sqrt{b}$. Завершается «Книга об абаке» 15-м отделом, содержащим краткое изложение алгебры и альмукабалы, близкое к алгебре Хорезми, а также задачи на непрерывные числовые пропорции и геометрические задачи, сводящиеся к приложению теоремы Пифагора.

Другое сочинение Л. Пизанского «Практическая геометрия», написанное около 1220 г., посвящено измерению площадей многоугольников и объемов тел вплоть до объема шара. Доказательства теорем взяты из работ Евклида и Архимеда; встречаются задачи, свидетельствующие о знании Леонардо начал тригонометрии. Известно еще одно сочинение Л. Пизанского по теории чисел. В нем идет речь о свойствах чисел, суммах вида

---

[13] **Схола́стика** (греч. σχολαστικός – учёный, *Scholia* – «школа») – систематическая европейская средневековая философия, сконцентрированная вокруг университетов и представляющая собой синтез христианского (католического) богословия и логики Аристотеля.

$$\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \sum_{k=0}^{n} (2k+1),$$

а также об отыскании рациональных решений уравнений $y^2 = x^2 + a$, $z^2 = x^2 - a$.

Время, протекшее после работ Л. Пизанского вплоть до эпохи Возрождения (XV-XVI вв.), в историю математики не внесло как будто ярких идей, больших открытий, коренных преобразований. В эти «вспомогательные» столетия в математике происходил интересный и малоизученный процесс накапливания предпосылок. Математические знания распространялись среди все более широких кругов ученых. Идеи и результаты, накопленные в сочинениях Л. Пизанского и др. математиков, содержание переводимых книг античных авторов, наличие большого числа поставленных и осознанных, но еще не решенных теоретических и практических задач – все это влекло к новому научному подъему.

В этих условиях наметились два главных направления развития математики, в которых последняя достигла наибольших успехов. Это были: серьезное усовершенствование алгебраической символики и оформление тригонометрии как особой науки.

Профессор Парижского университета Николай Орезм, иногда Орем (Nicole Oresme) (1323-1382) обобщил понятие степени, введя дробные показатели степени, правила производства операций над ними и специальную символику, предваряя фактически идею логарифма.

$$\boxed{\frac{1\cdot p}{2\cdot 27}} = 27^{\frac{1}{2}}, \quad \boxed{\frac{1\cdot p}{3\cdot 3}} = 3^{\frac{1}{3}}, \quad \boxed{\frac{2\cdot p}{3\cdot 8}} = 8^{\frac{2}{3}} \quad \text{и т. д.}$$

В конце XV в. бакалавр Парижского университета Никола Шюке, помимо дробного показателя степени, ввел также отрицательные и нулевые показатели, отрицательные числа, а также внес усовершенствования в алгебраическую символику. В этой символике нет еще специального символа для неизвестного, а большинство символов образовано путем сокращения слов (синкопическая алгебраическая символика).

Например: $a^k\overline{m}$ обозначает ax^{-k} ($\overline{m}$ – сокращение слова *minus*). Знаком корня служит R_x (от слова *radix* – корень), знаком сложения – $\overline{p}$. Так, выражение $\sqrt[4]{24+\sqrt{37}}-20x^{-2}$ в символике Шюке имело бы вид $\overline{R}^4{}_x 24\overline{p}\,\overline{R}^2{}_x 37\overline{m}20^2\overline{m}$.

Большой вклад в формально-символическое усовершенствование алгебры внесли в XV и XVI вв. коссисты – математики Южной Германии, воспринявшие эти идеи из Италии. Название коссистов происходит от итальянского слова *cosa*, т. е. вещь, как обозначалось неизвестное в уравнениях. Они разработали несколько систем символов, все более удобных для записи математических действий, а некоторые из них высказали в своих сочинениях идеи, близкие к понятию логарифма.

Новый шаг был связан с успехами в алгоритмически-оперативной части, связанной с решением нового класса алгебраических уравнений – кубических.

В 1461 г. появилось сочинение немецкого математика Иоганна Мюллера (1436-1476), более известного под именем Региомонтануса, «Пять книг о треугольниках всякого рода», в котором впервые тригонометрия была отделена от астрономии и трактована как самостоятельная часть математики.

В этой книге систематически рассмотрены все задачи на определение треугольников, плоских и сферических, по заданным элементам. При этом Региомонтанус расширил понятие числа, включив в него иррациональность, возникающую в случае геометрических несоизмеримостей, и прилагая алгебру к решению геометрических задач. Тем самым была существенно нарушена античная традиция и открыто новое понимание предмета тригонометрии и ее задач.

Региомонтан продолжил начатую ранее другими учеными работу по составлению таблиц тригонометрических функций. Его таблица синусов имела частоту через каждую минуту и точность до седьмого знака. Для этого величину радиуса образующей окружности он брал равной 10^7, так как десятичные дроби еще не были известны. Он ввел в практику тригонометрические функции, получившие в XVII в. названия тангенса и котангенса, составив таблицу их значений.

Таким образом, в течение V-XV вв. в Европе постепенно сложилась система обучения, включавшая в себя математику. Ученые-математики и студенты университетов усваивали достижения античной Греции, Византии, арабоязычных народов Ближнего Востока и Средней Азии через посредство широко распространившейся практики перевода арабских рукописей научного содержания на латинский язык – универсальный язык науки средневековья. Математика развивалась в связи с практическими запросами техники и мореплавания, в связи с чем вначале медленный темп научной жизни к концу рассматриваемого периода заметно ускорился. Большое стимулирующее воздействие на развитие математики оказали прогрессивные течения средневековой философии, идеологическая борьба против засилья церкви, феодалов, против застывших схоластических догм.

Определение места математики в системе наук стабилизировало ее положение и ускорило процесс создания в математике фундамента основных знаний, накопления предпосылок для новых успехов. Совокупность воздействующих на математику факторов оказалась таковой, что в ней определились наибольшие успехи в создании формально-символической стороны алгебры и в тригонометрии. Был высказан и пущен в научный обиход, особенно в XV-XVI вв., ряд мыслей, имеющих большое значение для последующего: обобщение понятия числа, обобщение понятия степени, предвестники систем логарифмов. Необходим был практический успех, хотя бы небольшой, но практический, чтобы вся масса накопленных предпосылок пришла во все ускоряющееся движение.

СРС

Задание 11. Изучите следующие вопросы самостоятельно. Сделайте краткий конспект.

1). Математика средневековой Руси;

2). Математика эпохи Возрождения.

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 115-126.

Контрольные вопросы к теме 4

1. Что служило основным источником научной информации для европейских ученых?
2. Что обозначалось термином «арабская математика»?
3. Какой была система счисления у арабоязычных народов?
4. Какими вычислительными приемами и алгоритмами владели арабские математики?
5. Чему посвящено сочинение Хорезми «Китаб аль-Джебр валь-Мукабала»? Что означает в переводе его название?
6. В чем сущность метода нахождения геометрических решений уравнения Хорезми?
7. Укажите две важнейшие характерные особенности арабской математики.
8. Каковы достижения математиков стран Ближнего Востока и Средней Азии в тригонометрии?
9. Что было большим недостатком алгебры средневекового Востока (задерживало развитие алгебры)?
10. Когда начало входить в употребление название науки – «тригонометрия»?
11. Какие арабские математики помещены историками в длинном ряду предшественников неевклидовой геометрии, подвергавших логическому анализу систему аксиом и постулатов геометрии Евклида?
12. Кто были хранителями математических знаний в Европе в V-XI вв.?
13. Когда в Европе появились первые университеты?
14. Изложите краткую аннотацию «Книги об абаке» Л. Пизанского.
15. Чему посвящено сочинение Л. Пизанского «Практическая геометрия»?
16. Какие два главных направления развития математики существовали в эпоху Возрождения?
17. Каковы достижения Н. Орезма в усовершенствовании алгебраической символики?
18. Каковы достижения Н. Шюке в усовершенствовании алгебраической символики?
19. В чем состоит вклад в формально-символическое усовершенствование алгебры в XV и XVI вв. коссистов?
20. В работе какого математика впервые тригонометрия была отделена от астрономии и трактована как самостоятельная часть математики? Каковы его достижения в тригонометрии?

Рекомендованная литература
для самостоятельной работы студентов к теме 4

1. Абельсон И.Б. Рождение логарифмов / И.Б. Абельсон. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 232 с.
2. Гиршвальд Л.Я. История открытия логарифмов / Л.Я. Гиршвальд. – Харьков: Изд-во ХГУ им. А.М. Горького, 1952. – 32 с.
3. История математики. Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 353 с.
4. История отечественной математики в четырех томах. Т. 1. С древнейших времен до конца XVIII в. – К.: Наукова думка, 1966. – 492 с.
5. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2002. – 304 с.
6. Матвиевская Г.П. Развитие учения о числе в Европе до XVII века / Г.П. Матвиевская. – Ташкент: Фан, 1971. – 231 с.
7. Матвиевская Г.П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке / Г.П. Матвиевская. – Ташкент: Фан, 1967. – 344 с.
8. Матвиевская Г.П. Учение о числе на средневековом ближнем и среднем востоке / Г.П. Матвиевская. – Ташкент: «ФАН» Узбекской ССР, 1967. – 344 с.
9. Стиллвелл Д. Математика и ее история / Д. Стиллвелл. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 529 с.
10. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1984. – 283 с.
11. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII века / Г.Г. Цейтен. – М.-Л.: ГТТИ, 1938. – 470 с.
12. Юшкевич А.П. История математики в средние века / А.П. Юшкевич. – М.: Физмат-гиз, 1961. – 449 с.

Тема 5
ПРОЦЕСС СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

План

5.1. Начало периода математики переменных величин.

5.2. Возникновение аналитической геометрии.

5.3. Интеграционные и дифференциальные методы в математике XVII века.

5.4. Появление анализа бесконечно малых.

5.1. НАЧАЛО ПЕРИОДА МАТЕМАТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

В истории математики XVII век занимает особое, весьма значительное место. Он открывает новый период этой истории – период математики переменных величин. В это столетие произошло изменение форм существования математики. На смену энтузиастам-одиночкам, представлявшим счастливые исключения, пришли научные организации и общества. С 1662 г. начало свою деятельность Лондонское королевское общество, играющее и ныне роль национальной Академии наук. В 1666 г. организована Парижская академия. Тем было положено начало эпохе организации научных учреждений и обществ, явившихся плодотворной формой коллективного труда ученых над трудными проблемами науки при государственном покровительстве наукам.

Переписка ученых и появлявшиеся изредка в малом числе экземпляров книги не удовлетворяли требованиям научного общения. XVII век принес решающие изменения и в этом вопросе, положив начало научной периодике. С 1665 г. в Лондоне выходят «Philosophical Transactions»; одновременно в Париже появился «Journal des Sgavans» (существовал до 1792 г.). Тем же целям служил с 1682 г. основанный Г.В. Лейбницем в Лейпциге журнал «Acta Eruditorum» (существовал до 1731 г.).

Изменение практического положения, идейных основ и организационной структуры и роли математики происходило наряду с глубокими качественными изменениями в ее содержании. Изучение чисел, постоянных величин, фигур дополняется изучением движений и преобразований, функциональных зависимостей. Меняется внутреннее содержание математики, все более приобретающей облик математики переменных величин.

С XVII в. берут начало все, или почти все, математические дисциплины, входящие ныне в классический фонд современного высшего математического образования. В трудах Р. Декарта и П. Ферма начала формироваться аналитическая геометрия как метод выражения числовыми соотношениями размеров, форм и свойств геометрических объектов, существенно использующий метод координат. В разнообразных формах стал возникать математический анализ. Вначале это было дифференциальное и интегральное исчисление, принявшее к 1665-1666 гг. в сочинениях И. Ньютона (опубликовано лишь в XVIII в.) вид теории флюксий, а в сочинениях Г.В. Лейбница (опубликованных в 1682-1686 гг. и позднее) вид исчисления дифференциалов. Тотчас после возникновения математического анализа механические и физические задачи стали записываться в виде дифференциальных уравнений, задача решения которых стала с тех пор едва ли не самой главной задачей всей математики. Почти в то же самое время в математическом анализе появились первые задачи, вводящие в его высшие области. В частности, речь идет о вариационных задачах, попытки решения которых привели впоследствии к появлению вариационного исчисления – самой ранней по времени части функционального анализа.

В неразрывной связи с анализом формировались в отдельную область математики его геометрические приложения. Еще в начале XVII в., в 1604 г., И. Кеплер вывел формулу радиуса кривизны. Позднее, в 1673 г., Х. Гюйгенс дал математическое выражение эволют и эвольвент. Многие дифференциально-геометрические факты, открытые и доказанные в XVII в., послужили надежной основой для выделения и обоснования новой области математики – дифференциальной геометрии.

В XVII в. было положено начало учению о перспективе и проективной геометрии в сочинениях Ж. Дезарга (1593-1661) и Б. Паскаля (1623-1662). Первую научную форму приобрела теория вероятностей, особенно благодаря открытию Я. Бернулли (1654-1705) простейшей формы закона больших чисел.

Наконец, элементарная математика приобрела завершенную форму благодаря исчезновению риторической алгебры и замене ее символической, а также изобретению логарифмов.

В XVII в. главным и определяющим является то, что математика преобразуется, превращаясь в математику переменных величин, происходит расширение ее предмета за счет включения в него движения и средств его математического отображения.

5.2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аналитическая геометрия Декарта. Поворотным пунктом в математике XVII в. была декартова переменная величина. Ознакомимся с последней частью сочинения Р. Декарта «Рассуждение о методе», которое носит название «Геометрия».

В основу всей «Геометрии» Р. Декарта положены две идеи: введение переменной величины и использование прямолинейных (декартовых) координат. В согласии с его унифицирующей тенденцией, переменная величина вводится в двоякой форме: в виде текущей координаты точки, движущейся по кривой, и в виде переменного элемента множества чисел, соответствующих точкам данного координатного отрезка.

«Геометрия» состоит из трех книг. *Первая книга «О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями»* начинается с кратких разъяснений только что изложенных общих принципов. Затем следуют правила составления уравнений геометрических кривых. Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все как данные, так и искомые линии. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми линиями, заметить зависимость между ними так, чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это и приводит к уравнению, служащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому. Доказывается, что все геометрические задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки, сводятся к решению уравнений не выше 2-й степени. Общие правила своей аналитической геометрии Декарт не излагает подробно в общем виде, а демонстрирует их при решении трудных задач.

СРС ***Задание 12.*** Выпишите в качестве примера такой задачи решение задачи Паппа:

«На плоскости даны несколько (n) прямых. Найти геометрическое место точек, для которых произведение отрезков, проведенных из них под одинаковыми углами $n/2$ прямых, находилось бы в данном отношении к произведению отрезков, проведенных тем же способом к другой половине прямых».

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 132.

Вторая книга «О природе кривых линий» посвящена более подробному рассмотрению кривых различных порядков, их классификации и выявлению их свойств. Все кривые Р. Декарт делит на два класса в зависимости от того, возможно ли провести их исследование средствами, которыми он располагал. В соответствии с этим в математику оказалось возможным допускать лишь такие кривые, которые описываются непрерывным движением (циркулем или линейкой) или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими. Остальные кривые получили название механических (позднее у Г.В. Лейбница трансцендентных) и исключены из класса допустимых кривых. Их свойства могут быть открыты лишь случайно благодаря специфическим приемам, не носящим систематического характера.

Все допустимые кривые, таким образом, могут быть построены с помощью некоторого шарнирного механизма. Относительно них без доказательства высказано утверждение, что они выразимы алгебраическими уравнениями. Тем самым Р. Декарт предвосхитил одну из главных теорем кинематики механизмов (доказанную в 1876 г. английским математиком А.Б. Кемпе), гласящую, что с помощью плоских шарнирных механизмов, в которых движение первых звеньев полностью определяет движение остальных, можно описывать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной. Р. Декарт еще не в силах построить общую теорию кривых рода $n \geq 2$.

Значительную часть второй книги составляют теоремы о проведении нормалей и касательных к алгебраическим кривым. Свой ***метод нормалей*** он распространил на конические сечения и на так называемые декартовы овалы. Р. Декарт подчеркивал значение высказанных теорем для оптики. Книгу замыкает предложение о возможности распространения метода Р. Декарта на трехмерный случай. Высказывается при этом идея представления пространственной кривой с помощью проектирования ее на две взаимно-перпендикулярные плоскости, общая прямая которых является одной из осей координат. Однако эта идея оказалась у Р. Декарта одиночной, не развитой; к тому же в его рассуждения вкралась ошибка. Он в этом единственном предложении аналитической геометрии в пространстве утверждает, что проекции нормали к пространственной кривой являются нормалями к проекциям кривой, что неверно даже для плоской кривой, не говоря уже о наличии в общем случае целой нормальной плоскости. Нет у Р. Декарта и речи о трех координатах точки в пространстве и об уравнениях поверхностей.

Задача *третьей книги «О построении телесных, или превосходящих телесные, задач»* – построение общей теории решения уравнений и использование для этой цели наряду с алгебраическими средствами геометрических мест. Алгебраическая символика Р. Декарта уже несущественно отличается от современной. Всякое уравнение мыслится приведенным к виду $P_n(x)=0$, где $P(x)$ – полином с целыми коэффициентами, расположенный по убывающим степеням неизвестного x. Из рассмотрения проблемы делимости $P(x)$ на $x-a$, где a – корень уравнения, Р. Декарт делает глубокий вывод, что число корней уравнения равно числу единиц в наивысшем показателе степени x. Он при этом учитывает корни действительные (положительные), ложные (отрицательные) и те, которые можно вообразить (мнимые и комплексные). Доказательства этого вывода он дать еще не может. Еще много лет не мог дать доказательства и К.Ф. Гаусс.

Р. Декарт показал, что уравнение имеет столько положительных корней, сколько знакоперемен в ряду коэффициентов, и столько отрицательных – сколько повторений знака. Он ввел также приемы преобразования коэффициентов уравнения, чтобы добиться необходимого изменения его корней: увеличения, уменьшения или изменения знака.

Замечательной по глубине замысла является постановка проблемы приводимости, т. е. представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения таких же функций. Р. Декарт показал, что уравнение 3-й степени решается в квадратных радикалах (с помощью циркуля и линейки), лишь если оно приводимо. Вопрос о приводимости уравнения 4-й степени он свел к вопросу о приводимости его кубической резольвенты. Если дано уравнение

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

то его можно записать в виде

$$\left(x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right)\left(x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right) = 0,$$

где вспомогательное y определяется из уравнения

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0,$$

кубического относительно y^2. Р. Декарт не дает этому утверждению доказательства.

Решение уравнений 3-й и 4-й степени геометрическими средствами у Р. Декарта сводится к задачам о построении (вставке) двух средних пропорциональных и о трисекции угла. Подобно арабским математикам, но, по-видимому, совершенно самостоятельно, Р. Декарт практически решает эти уравнения с помощью пересечения двух конических сечений. Затем он распространил этот метод на уравнения третьего рода (5-й и 6-й степени), подбирая пересечения окружности и движущейся специальным образом подобранной кривой.

Итак, первое сочинение по аналитической геометрии – «Геометрия» Р. Декарта – сыграло огромную роль в дальнейшем развитии математики XVII в. Аналитическая геометрия Р. Декарта имела еще много недостатков. Прежде всего, область этой науки была еще чрезмерно сужена априорными требованиями, проистекающими скорее из философских источников, чем из потребностей метода, ограничена только алгебраическими кривыми. Неудачной оказалась классификация алгебраических кривых по жанрам (родам), а не по степеням уравнений, их выражающих. Р. Декарт не довершил проникновения в геометрию алгебраического аппарата, не распространил свой метод на изучение свойств кривых по свойствам соответствующих уравнений. Координатные оси в «Геометрии» еще неравноправны; проводится только одна ось, а другая координата восстанавливается по мере необходимости. Поведение кривой изучается только в первом квадранте, остальные квадранты не учитываются. Однако «Геометрия» Р. Декарта означала шаг принципиального значения в перестройке математики, и это значение так велико, что делает это сочинение классическим.

Аналитическая геометрия Ферма. Одновременно с Р. Декартом аналогичную систему взглядов развил в специальном сочинении французский математик Пьер Ферма (1601-1665).

Идеи аналитической геометрии, т. е. введение прямолинейных координат и приложение к геометрии алгебраических методов, сосредоточены в небольшом сочинении П. Ферма «Введение в теорию плоских и пространственных мест», ставшем известным с 1636 г., но напечатанном вместе с другими сочинениями в 1679 г. Исходными пунктами этой работы явились сочинения древних, особенно Аполлония, по изучению геометрических мест. Те геометрические места, которые представлялись прямыми или окружностями, назывались плоскими, а представляемые коническими сечениями – пространственными. Задачей Ферма в этом сочинении было показать, что уравнениям 1-й степени соответствуют прямые, а коническим сечениям – уравнения 2-й степени.

Метод координат вводится так же, как у Р. Декарта: задается одна ось – ось абсцисс, на ней откладываются от выбранного начала отрезки, соответствующие значениям одной переменной. Значения другой переменной, также изображаемые отрезками, восстанавливаются из конца первого отрезка под выбранным для данной задачи углом (чаще всего прямым). Затем П. Ферма выводит уравнения прямой, окружности и всех конических сечений.

Вначале он доказывает, что уравнение прямой, проходящей через начало координат, будет иметь вид $ax = by$. Затем последовательно выводятся: уравнение окружности в прямоугольных координатах с центром в начале координат; гиперболы, отнесенной к асимптотам; параболы, отнесенной к диаметру и касательной в конце его; эллипса (гиперболы) в случае, когда осями будут сопряженные диаметры.

Замечательно, что П. Ферма рассматривает задачу и с другой стороны. Он исследует общие виды уравнений 1-й и 2-й степени, преобразованием координат (перенос начала и поворот оси) приводит их к каноническим формам, облегчая тем самым их геометрическое толкование.

Пр Например, пусть дано уравнение $2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$. Перепишем его в виде $(x + y)^2 + x^2 = a^2$.

Выберем новые оси: $x+y=0$, $x=0$. Новые координаты будут: $x_1 = x\sqrt{2}$, $y_1 = x+y$. Новое уравнение $\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2$. По Аполлонию, замечает Ферма, эта кривая – эллипс, отнесенный к сопряженным диаметрам.

Распространение аналитической геометрии на изучение пространственных геометрических мест П. Ферма проводил путем изучения пересечений поверхностей плоскостями. Однако пространственные координаты и у него еще отсутствуют, а аналитическая геометрия в пространстве остается незавершенной.

«Введение» П. Ферма показывает, что он, по-видимому, последовательнее Р. Декарта внедрял координатный метод, особенно приемы преобразования координат. Однако это сочинение не оказало на математику столь значительного влияния, как декартова «Геометрия». Причин этому было две. Во-первых, «Введение» было напечатано очень поздно, а до этого времени было известно лишь узкому кругу корреспондентов Ферма. Во-вторых, оно было изложено тяжеловесным, затруднительным для понимания языком алгебры Виета.

Дальнейшее развитие аналитической геометрии показало, что идея Декарта о едином методе, в котором соединятся методы алгебры и геометрии, осуществилась не так, как это ему представлялось. Аналитическая геометрия вошла в систему математических дисциплин, не поглотив алгебру. Последняя продолжала самостоятельное развитие, превращаясь в общую теорию уравнений. Что же касается аналитической геометрии, то в первые 50-70 лет после появления она только переживала период утверждения и признания в обстановке горячих споров о правомерности, удобствах и возможностях ее методов. Факты этой науки накапливались вначале медленно. К 1658 г. был решен вопрос о полукубической параболе, в чем приняли участие В. Нейль (1637-1670), Г. ван Гейрат (род. 1633 г.) и П. Ферма. В 1679 г. Ф. Лагир (1640-1718) впервые нашел способ писать уравнения поверхностей. Тем не менее, только к 1700 г. А. Паран (1666-1716) смог вывести уравнение сферической поверхности и касательной плоскости к ней. В систематической форме использовал и несколько развил аналитическую геометрию И. Ньютон в сочинении «Перечисление кривых 3-го порядка» (1704).

Облик, близкий к современному, придал аналитической геометрии Л. Эйлер, посвятив этому второй том «Введения в анализ» (1748). Ему предшествовал только А.К. Клеро (1713-1765), распространивший аналитическую геометрию на 3-мерное пространство, с помощью введения трехосной прямолинейной системы координат. Название – аналитическая геометрия – ведет свое начало от французского математика академика С.Ф. Лакруа (1764-1848), с конца XVIII в.

Появление в математике аналитической геометрии существенно облегчило формирование анализа бесконечно малых. С другой стороны, она стала необходимым средством построения механики у Ньютона, Лагранжа и Эйлера, весьма эффективным при решении многих задач математического естествознания. В математике XVII в. возникновение аналитической геометрии знаменовало появление возможностей для создания анализа переменных величин. Эти возможности, вскоре были реализованы, так как наиболее важные задачи были таковы, что вызывали острую необходимость срочного перехода к открытию методов и общих теорий математического анализа.

СРС

Задание 13. Изучите самостоятельно вопрос «Усовершенствование вычислительных методов и средств в XVII веке». Сделайте краткий конспект.
Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 140-151.

5.3. ИНТЕГРАЦИОННЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИКЕ XVII ВЕКА

В математике XVII в. самым большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Сформировалось оно в ряде сочинений Ньютона и Лейбница и их ближайших сотрудников и учеников. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших, революционных преобразований, быстро изменивших все лицо математики и поднявших ее роль в системе естественнонаучных знаний человечества. Однако появление анализа бесконечно малых не было делом рук одного или нескольких ученых. Оно в действительности было завершением длительного процесса, внутриматематическая сущность которого состояла в накоплении и выделении элементов дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов.

Побудительными причинами этого процесса были в первую очередь запросы механики, астрономии, физики. Эти науки не только предъявляли к математике требования решения того или иного класса задач. Они обогатили ее представления о непрерывных величинах и непрерывных движениях, о существе и видах функциональных зависимостей. В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывались инфинитезимальные методы – основа математики переменных величин.

Для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в. сложились достаточные предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры и вычислительной техники; введение в математику переменной величины и координатного метода; усвоение инфинитезимальных идей древних, особенно Архимеда; накопление методов решения задач на вычисление квадратур, определения центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т. д.

В решении задач такого рода, в поисках общих методов их решения, а следовательно и в создании анализа бесконечно малых, принимали участие многие ученые: Кеплер, Галилей, Кавальери, Торричелли, Паскаль, Валлис, Роберваль, Ферма, Декарт, Барроу и многие другие. Создание элементов математического анализа представляло собой многосторонний творческий труд большого числа ученых.

Для удобства изучения этого сложного процесса разделим методы, содержащие крупицы анализа бесконечно малых, на две группы. Сначала рассмотрим те из них, в которых проявляются элементы позднейшего интегрального исчисления; их называют интеграционными. Затем рассмотрим дифференциальные методы, т. е. методы решения задач на определение касательных и т. п., тех, что решались позднее средствами дифференциального исчисления.

Интеграционные методы. Вначале эти методы вырабатывались, накапливались и выделялись в ходе решения задач на вычисление объемов, площадей, центров тяжестей и т. п. Древние задачи Архимеда пересматривались вновь и вновь, изучались его инфинитезимальные методы, выяснялись их математические возможности. Интеграционные методы слагались в то время как методы определенного интегрирования. Процесс формирования и внедрения в математику этих методов был очень бурным и скоротечным; уже через 50-60 лет со времени появления первой работы он привел к образованию интегрального исчисления.

Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Иоганна Кеплера (1571-1630).

Метод использования бесконечно малых величин Кеплер изложил в сочинении «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии» (1615). Состоит оно из трех частей: часть теоретическая, специальная стереометрия австрийской бочки, правила для измерения вместимости бочек. Для нас интерес представляет теоретическая часть. Начинается она со «Стереометрии правильных кривых тел». Это – просто пересказ сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре». Кеплер принимает античный метод исчерпывания, которым пользовался Архимед, но отбрасывает заключительный этап приведения к противоречию. Он хочет разгадать замысел Архимеда, приведший того к получению столь замечательных результатов, освободить его от наслоений, вызванных формальными требованиями строгости. Этот замысел, по мнению Кеплера, состоит в том, что любая фигура или тело представляется в виде суммы множества бесконечно малых частей. Круг, например, состоит из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник. Все треугольники имеют одинаковую высоту (радиус круга), а сумма их оснований равна длине окружности. Таким же образом шар оказывается составленным из бесконечного множества конусов, вершины которых сходятся в центре шара, а основания образуют поверхность шара.

Метод суммирования актуально бесконечно малых Кеплер распространяет на несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, рассмотренные у Архимеда.

От правильных кривых тел Архимеда Кеплер переходит к изучению тел, образованных вращением круга около прямой, не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений. Всего он рассмотрел 92 вида тел вращения, называя их по внешнему виду лимонами, яблоками, вишнями, турецкими чалмами и т. п. и даже вообще желваками.

Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Во-первых, изучаемое тело делилось на бесконечное число частиц, «ломтей», занимающих равноправные положения в теле. Эти части тела перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого возможно вычислить. Если непосредственное суммирование оказывалось невозможным провести, то они предварительно заменялись другими частицами, эквивалентными данным. Разъясним этот метод на примере.

В теореме 18 Кеплер доказал, что всякое кольцо кругового или эллиптического сечения равновелико цилиндру, высота которого равна длине окружности, описываемой центром сечения, а основание – сечению кольца. Метод доказательства: кольцо (тор) рассекается на доли плоскостями, проходящими через центр тора перпендикулярно поверхности. Каждый разновысокий ломтик заменяется цилиндриком с тем же основанием и с высотой, равной среднему арифметическому наибольшей и наименьшей высоты. Столбик из этих цилиндриков дает наглядное доказательство теоремы. Далее Кеплер обсуждает возможные обобщения, связанные с формой сечения кольца, приходя к выводу, что теорема верна для всех сечений, симметричных относительно вертикали, проведенной через центр сечения.

Тем не менее, плодотворность суммирования элементов, вычитанная у Архимеда Кеплером, была очевидной. Первая же попытка создать регулярный алгоритм оперирования с бесконечно малыми стала весьма популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого предприятия и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий. Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Бонавентурой Кавальери (1598-1647). Но делом его жизни, имевшим наибольшее значение для развития математики, был ***метод неделимых***, задуманный как универсальный метод геометрии.

Идея общего метода неделимых впервые высказана Б. Кавальери в 1621 г. В рукописи, представленной им при занятии профессорской должности в 1629 г., уже имеет место систематическое применение неделимых.

Итогом многолетнего усовершенствования метода неделимых явилась книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635).

Метод неделимых изобретен для определения размеров плоских фигур и тел. Как фигуры, так и тела представляются составленными из элементов, имеющих размерность на единицу меньше. Так, фигуры состоят из отрезков прямых, проведенных параллельно некоей направляющей прямой, называемой регула. Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными, имеющими название парных. Касательные параллельны регуле; за регулу может быть принята одна из них.

В геометрических телах неделимыми являются плоскости, параллельные некоторой плоскости, избранной в качестве регулы. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служат две парные касательные плоскости, параллельные регуле. Часто одна из них избирается в качестве регулы.

Идею своего метода Кавальери образно выражал, предлагая читателям представить паука, непрерывно ткущего геометрию из неделимых.

Совокупность всех неделимых, вводимая Кавальери, по существу вводит понятие определенного интеграла. Однако логические трудности, связанные с пониманием неделимого, составления площадей из линий, не имеющих ширины, и тел из бесконечно тонких плоскостей и т. п. не дают еще возможности судить о совокупностях всех неделимых. Поэтому Кавальери вынужден рассматривать отношения тел и фигур, ограничиваясь случаями, когда отношения неделимых постоянны. Таким образом, *сущность геометрии неделимых Кавальери* можно сформулировать так: плоские фигуры и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур (или объемов тел) равно этому отношению.

Эти утверждения практически эквивалентны современным умозаключениям типа: даны две фигуры, ограниченные на рис. 13 осью x, прямыми $x = a,\ x = b$ и соответственно $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$.

Отношение площадей

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} y_{1k}}{\sum_{k=1}^{\infty} y_{2k}} = \frac{\int_a^b f_1(x)\,dx}{\int_a^b f_2(x)\,dx}$$

Если $\dfrac{y_1k}{y_2k} = a = const$ для любого k, то и $\dfrac{S_1}{S_2} = k.$

Кавальери рассматривал и отношения степеней неделимых. Например, он ввел совокупность квадратов неделимых и доказал теорему: сумма квадратов неделимых параллелограмма втрое больше суммы квадратов неделимых треугольника, образованного в результате проведения диагонали (рис. 14).

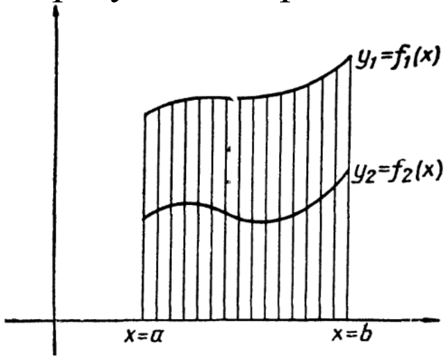


Рисунок 13 – Две фигуры

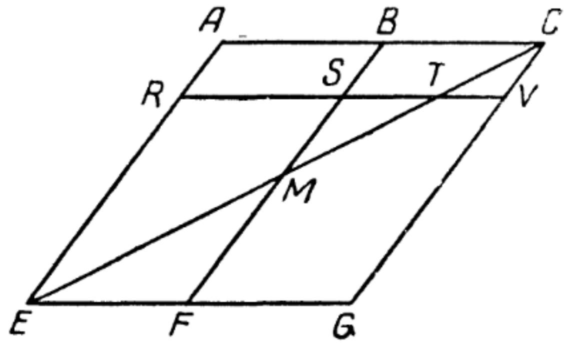


Рисунок 14 – Иллюстрация к примеру

Введем для краткости обозначения:

$$AC = a,\ RT = x,\ TV = y,\ RS = \frac{a}{2} = b,\ ST = z.$$

Тогда $x = b + z, y = b - z$ и сумма квадратов частей неделимых $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$. Суммируем все неделимые, обозначив сумму квадратов неделимых символом []:

$$[AEC]+[CGE]=2[ABFE]+2[BCM]+2[FEM].$$

Заметим, что

$$[AEC]=[CGE];\ [ABFE]=\frac{1}{4}[ACGE];\ [BCM]=[FEM]=\frac{1}{8}[ACE],$$

что нетрудно понять, вообразив над каждым линейным элементом квадрат и рассматривая их совокупности. Следовательно

$$[ACE]=\frac{1}{4}[ACGE]+\frac{1}{8}[ACE]+\frac{1}{8}[ACE];\ [ACE]=\frac{1}{3}[ACGE].$$

В переводе на язык интегрального исчисления Кавальери доказал, что

$$\int_0^a x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^a a^2dx$$

или иначе

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{n}\right)^2(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{na^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

Эту теорему Кавальери сумел обобщить на случай суммирования более высоких степеней неделимых, вплоть до 9-й, решив таким образом группу задач, эквивалентных вычислению определенных интегралов вида $\int_0^a x^n dx$, для n=1, 2,...,9. То, что у Кавальери рассматриваются не выражения, эквивалентные интегралам, а их отношения, дела принципиально не меняет. Достаточно выбрать в качестве единого знаменателя интеграл, соответствующий сумме неделимых.

Другим обобщением метода являлось введение криволинейных неделимых. Однако у этого метода были свои недостатки. Во-первых, он был непригоден для измерения длин кривых, так как соответствующие неделимые (точки) оказывались безразмерными. Во-вторых, невыясненность понятия неделимого, невозможность его рационального объяснения создавала для всей теории атмосферу необоснованности. В-третьих, развитие метода сильно задерживалось из-за того, что Кавальери в соответствии со сложившимися в его время представлениями о научной строгости избегал применять символику и приемы алгебры.

Тем не менее, определенное интегрирование в форме геометрических квадратур в первой половине XVII в. уже зарекомендовало себя. Все усилия отныне были направлены на уточнение его и на достижение возможно более общих результатов.

Математики первой половины XVII в. с большим удивлением и энтузиазмом убеждались, какое большое количество, казалось бы, разнородных задач геометрии и механики приводилось к квадратурам. С каждым годом, с каждым новым результатом все более выявлялась общность операций, которые приходилось применять при решении этих задач. Геометрический эквивалент определенного интегрирования, возникший как специфический метод геометрии, частично воспринятый от Архимеда, постепенно приобретал черты общего метода математики. В нем все больший удельный вес приобретали численные методы и элементы грядущего анализа бесконечно малых.

В этом отношении характерным примером являлись работы английского математика Дж. Валлиса (1616-1703), профессора Оксфордского университета (с 1649 г.), одного из основателей (с 1663 г.) Лондонского королевского общества.

Задание 14. Ознакомьтесь самостоятельно, с тем как Дж. Валлис, отправляясь от метода Кавальери, перевел на арифметический язык отношения сумм неделимых. Сделайте краткий конспект.

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 163.

Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропейских стран. Методы интегрирования охватывали к 60-м годам XVII в. обширные классы алгебраических и тригонометрических функций. Нужен был только один толчок – рассмотрение всей совокупности методов с единой точки зрения, чтобы перевернуть всю интеграционную проблематику и создать интегральное исчисление.

Дифференциальные методы. В математике XVII в. наряду с интеграционными методами складывались и методы дифференциальные. К дифференциальным методам относят, по образцу определения интегральных методов, те, в которых содержатся элементы будущего дифференциального исчисления. Вырабатывались эти элементы при решении задач, которые в настоящее время решаются с помощью дифференцирования. Такие задачи были в то время трех видов: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций и отыскание условий существования у алгебраических уравнений кратных корней. К этой группе тесно примыкают запросы механики, вытекающие из необходимости в случае неравномерных движений, определять скорость в любой точке траектории, не говоря о более сложных задачах.

Научное наследие древних и средневековых авторов в этой области не было столь определенным и значительным, как в случае интегральных методов. Задачи о касательной рассматривались не систематически, единообразных приемов выработано не было. Общим, по-видимому, было стремление понимать касательную как прямую, имеющую с кривой одну общую точку и обладающую свойствами локальной односторонности. В области экстремальных задач существовали лишь ограничения, накладываемые на условия задачи, чтобы она имела решение в области рациональных и действительных чисел, или геометрических отрезков. Эти ограничения часто содержат указания на экстремальные значения. Например, когда алгебраическое равнение имеет кратные корни, кривые, пересечением которых уравнение решается, не пересекаются, а касаются друг друга. Таким образом, некоторая взаимосвязанность дифференциальных задач к XVII в. уже была отмечена.

Уже в школе Галилея для нахождения касательных и нормалей к кривым систематически применялись ***кинематические методы***. При этом касательная появляется как диагональ параллелограмма, сторонами которого являются горизонтальная и вертикальная составляющие скорости[14].

Этот кинематический метод дал начало рассмотрению различных бросаний и сложных движений и к определению касательных в любой точке траектории. Систематическое изложение метода и его главнейших применений дал в 1640 г. французский математик Ж. Роберваль. Несмотря на важность кинематического метода, он был очень неудобен, так как исходил из индивидуальных особенностей кривых и поэтому был недостаточно алгоритмичен. Поэтому больше перспектив для определения касательных и нормалей в то время представлял ***метод нормалей*** Декарта, содержащийся во второй книге его «Геометрии».

СРС

Задание 15. Изучите метод нормалей Декарта. Сделайте краткий конспект.

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 165-166.

Накопление элементов дифференциального исчисления наиболее явную форму приняло у П. Ферма. В 1638 г. он сообщил в письме Декарту, что решил задачу определения экстремальных значений функции $f(x)$. Ферма составлял уравнение

[14] Например, см. книгу: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 165.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

и после преобразований в левой части полагал $h=0$. Вопреки мнению позднейших исследователей, которые видели в этом идеи исчисления бесконечно малых, в действительности Ферма нашел это условие и аналогичное

$$\left.\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|_{y=x}=0$$

еще алгебраическими путями.

Так же близок к дифференциальному исчислению ***метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым***. На малой дуге MN алгебраической кривой $f(x)=0$ путем проведения секущей SMN строится характеристический треугольник MNP (рис. 15). $\Delta MNP \sim \Delta MRS$. Отсюда $SR=\frac{MR\cdot MP}{PN}$, или в более привычных нам символах $SR=\frac{f(x)\cdot h}{f(x+h)-f(x)}$.

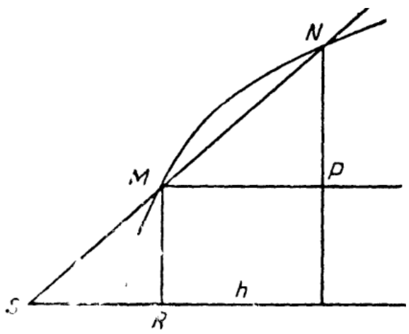


Рисунок 15 – Характеристический треугольник MNP

Затем Ферма переходит от секущей к касательной, полагая $h=0$, получая тем самым $S_t=\frac{y}{y'}$.

Позднее он распространил этот метод определения касательных на случай неявной функции $f(x, y)=0$.

Полученное им выражение легко переводится в привычное нам:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Все функции Ферма – алгебраические полиномиальные. В случаях, когда в исследуемых функциях попадались иррациональности, он освобождался от них возведением обеих частей уравнения в степень. Впрочем, в этом узком, сравнительно, классе функций метод Ферма определения касательных и экстремальных значений общий, символика – единообразная. К сожалению, Ферма не стремился публиковать свои работы. Ему было достаточно научной переписки. Притом он пользовался трудно доступными для понимания алгебраическими средствами Виета с его громоздкой символикой. Видимо, поэтому не сделал он последнего, уже небольшого, шага на пути к созданию дифференциального исчисления.

К середине XVII в. накопился достаточно большой запас средств решения задач, ныне решаемых с помощью дифференцирования. Однако не было еще выделено особой операции дифференцирования, понятий, равнозначных понятиям производной и дифференциала. Не была ясна связь дифференциальных и интеграционных методов. Математический анализ формировался в рамках и в терминах алгебры, геометрии, механики – сложившихся уже к тому времени наук. Так всякое новое математическое исчисление всегда проходит период формирования в пределах уже существующей системы математических наук, используя их средства.

СРС

Задание 16. Изучите самостоятельно вопрос «О связи дифференциальных и интеграционных методов». Сделайте краткий конспект.
Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 1. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1960. – С. 167-170.

5.4. ПОЯВЛЕНИЕ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Во второй половине XVII в. начала складываться новая область математики – анализ бесконечно малых. Оно революционизировало всю математику, превратив ее в математику переменных величин. Первым этапом существования анализа было формирование дифференциального и интегрального исчисления. Последнее возникло как самостоятельный отдел математики почти одновременно в двух разновидностях: в виде теории флюксий в трудах И. Ньютона и его английских последователей и в виде исчисления дифференциалов Г.В. Лейбница.

Теория флюксий. Наиболее ранней формой анализа является теория флюксий, открытие которой принадлежит Исааку Ньютону (1642-1727). Он разработал метод, названный им методом или теорией флюксий.

В методе флюксий изучаются переменные величины, вводимые как абстракции различных видов непрерывного механического движения. Называются они *флюентами*, т. е. текущими, от латинского слова *fluere* – течь. Все флюенты являются зависимыми переменными; они имеют общий аргумент –

время. Точнее, речь идет о математическом абстрагированном аналоге времени – некоей воображаемой абстрактной равномерно текущей независимой величины, к которой отнесены все флюенты.

Далее вводятся скорости течения флюент, т. е. производные по времени. Названы они *флюксиями*. Так как флюксия представляет собой переменную, то можно находить флюксию от флюксии и т. д. Символы первой, второй и т. д. флюксий, если флюенту обозначить y, будут: $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ и т. д. Для вычисления мгновенных скоростей – флюксий потребовались бесконечно малые изменения флюент, названные Ньютоном *моментами*. Символ момента времени 0; момент флюенты y, следовательно, запишется: $0\dot{y}$, т. е. произведение мгновенной скорости на момент времени. По существу момент флюенты – это ее *дифференциал*. Иногда, когда рассуждения исходят из заданной флюксии, обозначенной, допустим, вводятся специальные символы флюент: $\grave{y}$, или $\square y$ (символ, указывающий на квадратуру). Символы Ньютона не так удобны, как символы дифференциалов, ведущие свое происхождение от Лейбница и распространенные в наше время. Однако они еще сохранились, например, в механике.

В теории флюксий решаются две главные задачи, сформулированные как в механических, так и в математических терминах:

1. Определение скорости движения в данный момент времени по заданному пути. Иначе: определение соотношения между флюксиями из заданного соотношения между флюентами.

2. По заданной скорости движения определить пройденный за данное время путь. В математических терминах: определить соотношение между флюентами по заданному соотношению между флюксиями.

Первая задача, так называемая прямая задача теории флюксий, представляет задачу дифференцирования неявной, в общей постановке, функции и получения дифференциального уравнения, выражающего элементарные закономерности природы. Вторая – обратная задача теории флюксий – есть задача интегрирования дифференциальных уравнений, поставленная в самом общем виде. В частном виде в этой задаче речь идет о нахождении первообразных функций. Таким образом, интегрирование в теории флюксий вводится вначале в виде неопределенного интегрирования.

Ньютон получил большинство результатов теории флюксий в течение 60-70-х годов XVII в. Однако он не спешил с публикацией написанных им на эту тему работ. Он неохотно давал согласие на публикацию даже тогда, когда вспыхнул спор о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления между ним и Лейбницем.

Исчисление дифференциалов. Анализ бесконечно малых возник почти одновременно в двух разных, независимых друг от друга формах. Первой по времени изобретения была ньютонова теория флюксий. Однако первые публикации по математическому анализу были посвящены другому виду исчисления – исчислению дифференциалов. Автор нового исчисления Г.В. Лейбниц (1646-1716).

В чисто математическом плане лейбницево исчисление складывалось в общих чертах из следующих посылок:

1). Задачи суммирования рядов (с 1673 г.) и привлечение систем конечных разностей;

2). Решение задач о касательных, характеристический треугольник Паскаля и постепенный перенос соотношений между конечными элементами на произвольно, а затем бесконечно малые;

3). Обратные задачи на касательные, суммирование бесконечно малых разностей, открытие взаимообразности дифференциальных и интеграционных задач (примерно к 1676 г.).

Все эти годы Лейбниц предпринимал многочисленные попытки создать удобную символику. Он приходит к мысли о символе *d* (сокращение слова *differentia* – разность) для обозначения бесконечно малой разности. Вслед за Кавальери и Паскалем он представлял интеграл как сумму «всех» ординат, которых бесконечно много, и записывает его символом *omny* или чаще *omnl*. Позднее он заменил *omn* на $\int$, исходя из начальной буквы слова *Summa*. Взаимообразность задач он тоже старался отражать в символах: если $\int l = ax$, то $l = \dfrac{ax}{d}$. Вскоре он пришел к мысли, что лучше писать *d(ax)*; ведь «*dx*» это то же, что $\dfrac{x}{d}$, т. е. разность между ближайшими *x*. Но из $d(ax) = l$ получается, что дифференциал *d(ax)* будто бы равен конечной величине *l*. Так постепенно выяснилась необходимость усовершенствовать символ интеграла, включив в него символ дифференциала аргумента: $\int ydx$.

В 1684 г. в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» Лейбниц опубликовал первый мемуар об анализе бесконечно малых:

«Новый метод максимумов, минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины и особый для этого род исчисления». Мемуар менее 10 страниц. В нем нет доказательств. Но дифференциальное исчисление в нем впервые на страницах научного журнала появляется как объект математического исследования в виде, во многом напоминающем современную его структуру.

Дифференциал аргумента dx принят за совершенно произвольную величину. Дифференциал функции dy определен равенством $dy = \frac{ydx}{S_t}$, где S_t – подкасательная к кривой в точке (x, y). Введены символы: dx и dy. Сформулированы правила дифференцирования постоянной величины, суммы функций, разности, произведения, частного, степени, корня. Отмечена инвариантность вида первого дифференциала от выбора аргумента. Дифференциалы понимаются вначале как величины, пропорциональные мгновенным приращениям величин. Правда, позднее дифференциалы вновь определяются как бесконечно малые разности.

Мемуар 1684 г. был трактатом о дифференциальном исчислении. Через два года, в 1686 г., вышло в свет другое сочинение Лейбница «О глубокой геометрии» («De geometria recondita»), в котором сосредоточены правила интегрирования многих элементарных функций. Для обозначения операции интегрирования введен символ $\int$, истолковываемый как сумма дифференциалов, а также подчеркнута его взаимообратность с операцией дифференцирования.

Активно пропагандировали новое исчисление и способствовали его распространению, помимо Лейбница, его ученики и последователи, среди которых братья Бернулли: Яков (1654-1705) и Иоганн (1667-1748).

В 1693 г. Лейбниц распространил новое исчисление на трансцендентные функции путем разложения их в ряды с помощью ***метода неопределенных коэффициентов***.

В последующих работах Лейбница охвачены по существу все начальные отделы дифференциального и интегрального исчисления. Так, в 1695 г. он опубликовал правило дифференцирования общей показательной функции и формулу многократного дифференцирования произведения

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \ldots$$

Тогда же ему удалось обобщить понятие дифференциала на случаи отрицательного и дробного показателя. В течение 1702-1703 гг. были разработаны приемы интегрирования рациональных дробей.

С помощью нового исчисления математикам конца XVII-начала XVIII в. удавалось решать быстро возрастающее число трудных и практически важных задач.

Символика и термины Лейбница оказались очень хорошо продуманными; они были несложными и отражали существо дела, помогали пониманию и позволяли оперировать с ними по сравнительно простым правилам. Многие из них дошли до наших дней. От Лейбница ведут свое происхождение термины: дифференциал, дифференциальное исчисление, функция, координаты, дифференциальное уравнение, алгоритм (в смысле, аналогичном современному пониманию) и многие другие, а также большая часть символов. Практические успехи и разработанность исчисления достигли такого уровня, что в 1696 г. появился первый учебник дифференциального исчисления и его приложений к геометрии: «Анализ бесконечно малых» Г.Ф. Лопиталя.

Большое место в сочинениях по истории математики этого времени обычно занимает спор между последователями И. Ньютона и Г.В. Лейбница о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления. Уделим упомянутому спору о приоритете несколько фраз.

По-видимому, Ньютон и Лейбниц открыли свои формы исчисления независимо друг от друга. Оба опирались на опыт многочисленных предшественников, в котором накопилось достаточно предпосылок для их открытий. Оба отразили, исходя из разных посылок, общую потребность науки в анализе бесконечно малых. Ньютон, видимо, добился успеха раньше, Лейбниц – несколько позже. Однако приоритет в публикации, преимущества в удобстве алгоритмов и символов, заслуги в активной пропаганде нового исчисления принадлежат Лейбницу.

Контрольные вопросы к теме 5

1. Какой век положил начало научной периодике?
2. С какого века берут начало все, или почти все, математические дисциплины, входящие ныне в классический фонд современного высшего математического образования?
3. Краткая аннотация книг «Геометрии» Р. Декарта.
4. Построение Р. Декартом общей теории решения уравнений.
5. В каком сочинении П. Ферма сосредоточены идеи аналитической геометрии?
6. Почему сочинение П. Ферма «Введение в теорию плоских и пространственных мест» не оказало на математику столь значительного влияния, как декартова «Геометрия»?
7. Кто придал аналитической геометрии облик, близкий к современному?
8. Что в математике XVII в. считается самым большим достижением?
9. Укажите предпосылки для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в.?
10. Укажите самый ранний по времени опубликования интеграционный метод. В сочинениях какого математика он появился?
11. Какие методы использовал И. Кеплер?
12. Кто автор метода неделимых? Для чего он был изобретен? В чем сущность геометрии неделимых?
13. Недостатки метода неделимых.
14. Какие методы применялись для нахождения касательных и нормалей к кривым?
15. Кто автор метода нормалей?
16. Метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым.
17. Какая теория является наиболее ранней формой анализа? Кому она принадлежит?
18. Что называют флюентами, флюксиями, моментами в теории флюксий?
19. Какие две главные задачи решаются в теории флюксий?
20. Символика Лейбница.
21. Какова научная ценность мемуара Лейбница об анализе бесконечно малых, опубликованном в 1684 г. в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum»?
22. Какие термины ведут свое происхождение от Лейбница?
23. Что известно о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления между последователями И. Ньютона и Г.В. Лейбница?

Рекомендованная литература
для самостоятельной работы студентов к теме 5

1. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 368 с.
2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
3. История математики. Т. 2. Математика XVII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 302 с.
4. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2002. – 304 с.
5. Марков С.Н. Курс истории математики: учеб. пособие / С.Н. Марков. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1996. – 248 с.
6. Медведев Ф.А. Развитие понятия интеграла. М.: Либриком, 2013. – 424 с.
7. Стиллвелл Д. Математика и ее история / Д. Стиллвелл. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 529 с.
8. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1984. – 283 с.
9. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII века / Г.Г. Цейтен. – М.-Л., ГТТИ, 1938. – 470 с.
10. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках / Г.Г. Цейтен. – М.-Л.: Объединенное научно-техн. изд. НКТП СССР, 1938. – 470 с.

Тема 6
ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В XVIII ВЕКЕ

План

6.1. ИСХОДНЫЕ ПУНКТЫ МАТЕМАТИКИ XVIII В.

В истории математики XVIII век является периодом создания математики переменных величин. В начале века математики в своих исследованиях могли исходить уже из весьма значительного конкретного материала. Его основу и наиболее актуальную часть составлял анализ бесконечно малых, возникший в Англии в виде ньютоновского исчисления флюксий, а на континенте Европы в виде лейбницевского исчисления дифференциалов. Совокупность методов решения прямых задач этих исчислений, составляющих ныне основную часть дифференциального исчисления, была в основном создана. Дифференциальное исчисление заняло место одной из частей классической основы математического анализа. Появились первые учебники, систематически излагающие его методы и результаты.

В области обратных задач, т. е. интегрального исчисления, время подведения итогов еще не наступило, так как было сделано еще не так много. В области неопределенного интегрирования продолжалась разработка приемов интегрирования в элементарных функциях. Так, например, идея интегрирования дробно-рациональных функций при помощи разложения их на простейшие дроби была высказана Лейбницем лишь в начале XVIII в. (1702-1703). О перестройке интегрального исчисления на базе понятия определенного интеграла еще не могло быть и речи.

По мере накопления приемов интегрирования усиливалась потребность в исследовании простейших трансцендентных функций и в обогащении их класса. Геометрические методы исследования, основанные на изучении площадей и абсцисс, зависящих друг от друга определенным образом, оказывались недостаточными, негибкими. Их дополняли методы представления функций степенными рядами и усовершенствования символической формы их выражения.

Наряду с формированием основы математического анализа – дифференциального и интегрального исчисления – к началу века появились результаты и в его высших областях: теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении. Интегрирование первых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, к которым приводили задачи математического естествознания, пробовали осуществлять с помощью лишь алгебраических и элементарных трансцендентных функций. Отдельные результаты были достигнуты. Однако вскоре математики убедились, что на таком пути решить сколько-нибудь широкий круг уравнений не удается. Задача была трансформирована и решение дифференциальных уравнений стали отыскивать в квадратурах.

Арсенал приемов интегрирования дифференциальных уравнений был еще невелик. В него входили: разделение переменных, отдельные случаи нахождения интегрирующего множителя, решение однородного уравнения первого порядка подстановкой $y = xt$. И. Бернулли в 1697 г. проинтегрировал уравнение, носящее теперь его имя, $dy + P(x)ydx = Q(x)y^n dx$, преобразовав его в линейное дифференциальное уравнение первого порядка с помощью подстановки $y = \nu^{\frac{1}{1-n}}$. Этот способ был, впрочем, известен также Г.В. Лейбницу и Я. Бернулли. На рубеже века И. Бернулли сумел дать решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$Qx^n \frac{d^n y}{dx^n} + ... + Bx^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ax \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

понижая его порядок с помощью интегрирующего множителя вида x^p. Сколько-нибудь систематической разработки теории дифференциальных уравнений еще не было, но задача эта стояла как первоочередная.

В области вариационного исчисления математики XVII в. сумели накопить некоторый запас задач особого рода – вариационных, – осознать их своеобразие, найти решения ряда элементарных задач. Задача создания общего метода выдвинулась на первый план и в этой части математического анализа.

В ходе энергичной работы в различных областях математического естествознания быстро росло число задач, решаемых с помощью методов еще нового тогда анализа бесконечно малых. Крепла уверенность, что дифференциальные уравнения отражают если не все, то во всяком случае главнейшие закономерности природы. Решение дифференциальных уравнений представлялось многим ученым универсальным средством познания. Однако этот могучий арсенал приемов нес в своих основах неразрешенное противоречие между растущими практическими успехами и логической несообразностью, необоснованностью приемов оперирования с бесконечно малыми величинами и особенно отбрасывания их. Этому противоречию суждено было в скором будущем проявиться, и притом в резкой форме.

Алгебра, на которую опирался новый анализ, к концу XVII в. приобрела достаточно усовершенствованный буквенно-символический аппарат. Ее практические возможности, кроме решения в радикалах уравнений первых четырех степеней и некоторых приближенных методов, существенно расширились за счет установления многих фактов общей теории алгебраических уравнений и элементов теории определителей. Центральной проблемой алгебры сделалась проблема отыскания общего метода решения алгебраических уравнений любой степени. Понятие решения таких уравнений в значительной степени еще сливалось с задачей представления корней уравнений посредством той или иной комбинации радикалов.

Арифметические вычислительные методы к этому времени обогатились за счет использования логарифмов и соответствующих многочисленных таблиц. Начали появляться вспомогательные вычислительные устройства, среди которых наиболее совершенными были арифмометры Шиккарда, Паскаля, Лейбница и др. и логарифмические шкалы. Пестрота и разнообразие, неравномерность развития, всегда присущие науке в любой момент времени, в арифметике проявились в отставании понятия отрицательного числа и даже в неравноправном положении десятичных дробей сравнительно с обыкновенными.

В составе геометрии помимо элементарных частей и тригонометрии ученые XVIII в. могли использовать аналитическую геометрию, не очень еще совершенную, созданную в 30-е годы

XVII в. Декартом и Ферма. К ней примыкала совокупность геометрических приложений дифференциального исчисления, впоследствии выделившаяся в особый вид геометрии – дифференциальную геометрию.

К началу XVIII в. накопился значительный запас сравнительно еще элементарных представлений теоретико-вероятностного характера. Начальные соображения ряда ученых, например Кардано и Тартальи о числе способов получения желаемого количества очков при игре в кости, Луки Пачиоли, относительно задачи разделения ставки, позволяли предвидеть возможность математического изучения случайных явлений. В последующем Паскаль, Ферма, Я. Бернулли и др. нащупали в хаосе случайных событий определенные количественные закономерности, из которых самой существенно важной была простейшая форма закона больших чисел. Вынужденная узость конкретного материала (азартные игры, отдельные таблицы с результатами наблюдений) и элементарность методов (арифметико-комбинаторных) воспринимались как временное и преодолимое препятствие.

Объем математических сведений, которыми должен был располагать квалифицированный математик конца XVII – начала XVIII в., был, таким образом, довольно велик. Видимо, в силу именно этого обстоятельства, начиная со второй половины XVII в. начали появляться многотомные сочинения, имеющие целью охватить всю математику, изложить ее в целом, систематически. Например, в 1661 г. в Вюрцбурге вышел в свет однотомный «Курс математики или полная энциклопедия всех математических дисциплин» К. Шотта. Через 13 лет, в 1674 г., «Курс или мир математики» лионца Дешаля потребовал уже трех томов. Еще через 20 лет, в 1693 г., «Курс математики» Озанама появился в пяти томах.

Тенденция к созданию единой системы математики в последующие века не ослабевала, являясь непременным спутником дальнейшего роста математики. В наши дни выразителем подобных устремлений является, например, многотомное сочинение «Элементы математики», коллективный автор которого (группа математиков, преимущественно французских) выступает под общим псевдонимом Никола Бурбаки.

Об условиях развития математики в XVIII в. Темпы развития науки в это время быстро нарастают. Промышленная революция, образование мирового рынка, связанные с этим нужды мореплавания, кораблестроения, военной техники, теплотехники, гидроэнергетики и т. п., практические нужды общества ставят перед наукой быстро усложняющиеся задачи. Помимо задач механики и астрономии перед физико-математическим комплексом наук встали проблемы создания математического аппарата исследований электромагнитных явлений и теплоты.

Решение научно-технических и даже просто научных задач становится делом государственной важности. Таблицы положений луны, солнца, звезд, проблема изобретения хронометра высокой точности, показания которого не зависели бы от качки корабля, нахождение методов отображения сферы на плоскость как важнейшая часть картографии и др. приобретают необычайную актуальность, срочность. В то же время владение средствами нового анализа создает обстановку возможности решения подобных задач, их доступности усилиям ученых.

Для целей научного исследования в крупнейших городах Европы создаются специальные учреждения – академии наук, субсидируемые государством. Постепенно возрастает роль высших учебных заведений, ставшая особенно заметной к концу XVIII в. В обществе появляется заметная прослойка ученых-профессионалов, в том числе профессионалов-математиков, главным делом жизни которых являются научные исследования и преподавание. В связи с этим происходит заметная демократизация состава ученых. В самом деле, например, величайший математик XVIII в. Л. Эйлер был сыном сельского пастора, Ж.Л. Лагранж происходил из семьи офицера, П.С. Лаплас и М.В. Ломоносов – крестьянского происхождения, Ж. Даламбер не имел родной семьи. Число подобных примеров можно значительно увеличить.

6.2. ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИКИ

В течение XVIII в. существенно изменилось содержание математики. Самые большие, коренные изменения произошли в математическом анализе. Во много раз увеличилось количество входящих в него фактов. По своему содержанию анализ трансформировался. Из метода, придуманного для решения определенного класса задач, он преобразовался в анализ функций, приобрел структуру, близкую к современной. В течение XVIII в. от классического анализа постепенно отпочковался ряд дисциплин, получивших самостоятельное развитие. В первую очередь приобрела самостоятельность теория дифференциальных уравнений, наиболее интенсивно разрабатываемая в силу ее практической ценности. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений получила систематическое развитие, начиная с работ И. Бернулли и особенно Д. Риккати. В то же время ряд практических задач выдвинул проблему решения уравнений с частными производными. Первые успехи были достигнуты в решении задач о колебаниях струны, мембраны, столба воздуха в трубе и т. п. Поэтому наиболее ранние теоретические успехи относятся к методам интегрирования уравнений гиперболического типа.

На базе расширения понятия функции на область комплексного аргумента, широкого применения разложения функций в ряды начала создаваться теория функций комплексного переменного. В ней был открыт ряд фактов, в том числе формулы Муавра и Эйлера. Открытие и применение конформного отображения существенно продвинуло эту область анализа и еще больше подчеркнуло ее своеобразие.

Геометрические приложения анализа также выделились в самостоятельную дисциплину – дифференциальную геометрию. Крупнейшие ученые эпохи – Эйлер, Клеро, Монж, Менье и др. – работали в этой области, стремясь создать общую дифференциально-геометрическую теорию, способную исследовать пространственные объекты: пространственные кривые и поверхности.

Из совокупности методов решения класса вариационных задач сложилось особое исчисление – вариационное. Вначале его составляли только так называемые прямые методы, созданные Эйлером. Во второй половине века было открыто исчисление, основанное на введении нового понятия – вариации.

Кроме этих больших направлений в анализе получили серьезное продвижение: теория рядов, исчисление конечных разностей, теория специальных функций и др.

Структура математики, разумеется, не исчерпывалась в то время анализом бесконечно малых со всеми его, теперь уже многочисленными, ответвлениями. Настойчивые попытки исследования общей теории алгебраических уравнений привели к разработке теории детерминантов, теории делимости многочленов, линейной алгебры и др. В самом конце столетия, в 1799 г., появилась замечательная книга Руффини «Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени». Доказательство было не совсем строгим, но в нем были новые идеи, вводящие в современную нам алгебру. Руффини, в частности, ввел понятие группы операций и фактически связал некоторые свойства группы с проблемой разрешимости уравнений в радикалах.

Весьма существенно пополнилась совокупность геометрических дисциплин. В нее уже входила аналитическая геометрия, принявшая к середине века облик, весьма близкий к современному нам как по символике, так и по объему. Вместе с учением о перспективе сложилась к концу века начертательная геометрия, ставшая тотчас же важнейшей частью высшего технического и математического образования. Привлекали интерес ряда ученых проективно-геометрические идеи Дезарга, что подготовило почву для Понселе, который в начале XIX в. создал стройное здание проективной геометрии. Весьма интересные исследования проводились в области тригонометрии и элементарной, или, точнее говоря, синтетической геометрии.

В настоящем перечне составных частей комплекса математических наук XVIII в. нельзя обойти молчанием теорию чисел. Несколько обособленное положение этой дисциплины не мешало тому, что она постоянно находилась в центре внимания крупнейших ученых, прилагавших огромные усилия для решения ее трудных, но заманчиво просто сформулированных задач. XVIII век многое дал теории чисел: найдено общее решение неопределенных уравнений второй степени, сформулирован закон взаимности для квадратичных вычетов, доказана иррациональность π и e и т. д. Наконец, в XVIII в. было положено начало научной разработке теоретико-вероятностных проблем, еще тесно сплетенных с задачами элементарного комбинаторного анализа.

Из европейских государств наибольшая активность в математике наблюдалась во Франции, где творили Даламбер, Лагранж, Лаплас, Монж, Лежандр и многие другие выдающиеся математики. Следует отметить английских математиков – Тейлора, Маклорена, Стерлинга, немецких – Ламберта, Гаусса и др. Ведущее место в математике XVIII в. занимала Россия благодаря деятельности Л. Эйлера, Д. Бернулли и других петербургских академиков.

СРС **_Задание 17._**

1. Подготовьте сообщение по теме «Жизнь и творчество Л. Эйлера» (С. 16-20).
2. Изучите самостоятельно следующие вопросы:
   2.1). Преобразование основ анализа бесконечно малых (С. 21-48).
   2.2). Развитие аппарата математического анализа (С. 49-78).
   2.3). Создание вариационного исчисления (С. 79-95).
   2.4). Развитие геометрии (С. 96-122).

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – 336 с.

6.3. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ

Декарт, связавший в единой науке – аналитической геометрии – методы алгебры и геометрии, считал, что он создал единую науку, синтезировавшую и как бы поглотившую обе эти дисциплины. Однако использование алгебраического аппарата в аналитической геометрии не повело к упразднению алгебры. Алгебра развивалась в дальнейшем своим оригинальным путем, имея собственную научную проблематику. Этой проблематикой оказалась по преимуществу теория алгебраических уравнений. Последняя включала в себя как формирование общей теории уравнений, так и накопление способов численного и графического их решения. Научная разработка подобных проблем приводила одновременно и к перестройке основ алгебры, связанной с расширением понятия числа, и к усовершенствованию алгебраического буквенно-символического аппарата. Развитие этих двух сторон алгебры, по существу определяющих ее содержание и предмет, достигло к концу XVIII в. такого состояния, что сделало необходимым и возможным переход к качественно новым проблемам этой науки, связанным с возникновением теории Галуа и теории групп.

Самостоятельность путей развития алгебры определилась уже к началу XVIII в., когда в 1707 г. вышла в свет **«Всеобщая арифметика» И. Ньютона**. В ней алгебра излагалась в тесной связи с развитием вычислительных методов, как высшая стадия арифметики; геометрические вопросы были отнесены в область приложений. С самого начала Ньютон вводит операции как над буквенно-символическими выражениями, так и над числами (целыми и дробными). Введя читателя в технику тождественных алгебраических преобразований, Ньютон затем знакомит его с методами решения уравнений. На большом числе примеров, взятых из геометрии, механики и других наук, он демонстрирует сведение задачи к составлению алгебраического уравнения, корень которого будет являться решением задачи. Замыкают книгу данные общей теории уравнений, а также графическое решение последних с помощью геометрического построения корней.

«Всеобщая арифметика» является краткой записью лекций по алгебре, которые Ньютон читал в Кембриджском университете в 1673-1683 гг. В ней нет доказательств. Она не представляет собрания всех алгебраических достижений Ньютона. В других его работах содержится немало открытий в области алгебры. Среди них: обобщение формулы степени бинома на случай дробно-рациональных показателей; способ численного решения уравнений, известный под его именем и поныне и др.

Вслед за «Всеобщей арифметикой» Ньютона появился ряд монографий, содержащих систематическое построение алгебры. «Трактат об алгебре» Маклорена (1748) являлся еще по преимуществу комментарием к книге Ньютона, в которой не было приведено доказательств. Последующие же сочинения, в особенности знаменитая **«Универсальная арифметика» Эйлера** (продиктованная слепнущим Эйлером около 1767 г.), показали возросшую степень выделения алгебры как самостоятельной науки. Ее влияние на определение научной проблематики алгебры и на структуру курса алгебры в университетах было очень большим. Монографический характер этой книги и цели, которые ставил перед подобными сочинениями их автор, позволяют по ее содержанию судить о состоянии алгебры во второй половине XVIII в.

«Универсальная арифметика» состоит из двух частей. В трех отделах первой части Эйлер уделил основное внимание обобщению правил решения арифметических задач и развитию буквенно-символического аппарата алгебры. Так, в первом отделе разъяснены операции над числами и одночленами, над радикалами, комплексными числами. Здесь же введены логарифмы.

Второй отдел посвящен операциям над многочленами. Кроме того, даются правила извлечения корней из чисел и алгебраических выражений (полиномов). Наконец, вводятся ряды как средство выражения дробно-рациональных функций и биномов с дробными и отрицательными показателями степени.

Третий отдел по содержанию самый разнохарактерный. В нем введены: действительное число (посредством алгоритма попеременного вычитания), многоугольные числа, пропорции и прогрессии (как арифметические, так и геометрические), периодические десятичные дроби и задачи на проценты.

Методам решения алгебраических уравнений и их общей теории посвящен первый отдел второй части. Здесь собраны методы решения алгебраических уравнений первых четырех степеней, а также систем линейных уравнений. Кроме того, рассмотрены способы приближенного вычисления корней алгебраических уравнений.

Последний отдел (второй отдел «Универсальной арифметики») включает в себя преимущественно методы нахождения целочисленных решений неопределенных уравнений первой и более высоких степеней. К ним присоединены решения других задач теоретико-числового характера. Так, здесь рассмотрена великая теорема Ферма и даны ее доказательства для $n = 3$ и $n = 4$. Введены подстановки Эйлера, обращающие квадратный трехчлен в точный квадрат.

Таким образом, предмет алгебры в XVIII в. определился. Она превратилась в науку об алгебраических уравнениях.

В течение XVIII в. понятие числа переживало период медленного развития. Оно постепенно обогащалось, серьезно отставая, однако, от вычислительной практики и от приложений математического анализа.

Понятие действительного числа включало в себя: натуральные числа, положительные дроби, иррациональности. Последние имели и дошедшее до нас от времен античности общее определение через отношение с привлечением геометрических соображений: число есть то, что относится к единице, как один отрезок прямой к другому, принятому за единицу. Однако общая концепция иррационального числа завоевала себе права гражданства лишь во второй половине XVIII в.

Большие споры еще кипели вокруг понятия отрицательного числа. В разноречивом хоре суждений преобладали противопоставления отрицательных чисел положительным. Находились даже ученые (Мазер, 1758; Френд, 1796), не признававшие отрицательных чисел, равно как и мнимых. Правила действий с отрицательными числами не имели убедительного доказательства. Лишь в следующем, XIX веке удалось представить отрицательные числа включенными в единую числовую систему и дать этому представлению убедительное доказательство.

Мнимые числа в алгебре появляются в виде корней уравнений. Их изучение, однако, продвинулось не в алгебраических трактатах, а под давлением настоятельных необходимостей математического анализа. Именно в рамках анализа постепенно отыскивались и внедрялись правила формальных операций с мнимыми и комплексными числами. В 40-х годах Даламбер и Эйлер доказали, что всякое выражение, содержащее мнимые величины, приводится к виду $\alpha+\beta i$ (где α и β – действительные). Очевидная полезность комплексных чисел вызывала усиление внимания к вопросу об их сущности. Однако эта проблема оставалась нерешенной. Первый, кто разработал (по-видимому в интересах геодезической и картографической практики) способ геометрической интерпретации комплексных чисел точками на плоскости, был датчанин, землемер Вессель (1797 г.). Однако его работа осталась незамеченной, равно как и аналогичная интерпретация Ж. Аргана (1806). Только когда в 20-х годах XIX в. Гаусс и Коши ввели и обосновали операции над числами вида $\alpha\pm\beta i$, ввели термин «комплексное число», нашли «модуль» (Коши, 1821) или «норму» (Гаусс, 1828) комплексного числа, определили понятие сопряженности комплексных чисел, положение последних в математике существенно упрочилось. Комплексные числа вошли в алгебру.

Практически приемы решения алгебраических уравнений, накапливаясь, открывали перспективы для развития теоретической части алгебры. Будущее этой науки постепенно раскрывалось в разнообразных теоретических исследованиях, группирующихся вокруг двух проблем (разрешимости алгебраических уравнений в радикалах и доказательства основной теоремы алгебры).

Жирар (1629) и Декарт (1637) впервые установили, что алгебраическое уравнение может иметь столько корней, сколько единиц имеет его наивысшая степень. В XVIII в. постановка этой проблемы трансформировалась. Теперь уже требовалось доказать, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет именно n корней (действительных и комплексных). В качестве эквивалентного утверждения предлагалось доказать разложимость левой части уравнения в произведение линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами. Над решением этой и других связанных с ней проблем трудились Даламбер, Эйлер, Лагранж, Гаусс и многие другие математики.

Накопление предпосылок нового этапа развития алгебры в XVIII в. достигает кульминационного пункта в исследованиях Лагранжа, нашедших отражение в его «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» (1771-1772). В этом сочинении Лагранж критически пересмотрел все накопившиеся к тому времени методы и попытки решения алгебраических уравнений.

Алгебра, таким образом, развивалась в течение XVIII в. как наука о решении алгебраических уравнений. В ней получили известное завершение проблемы, связанные с элементарно-математическими средствами решения уравнений. Были разработаны основные предпосылки для создания теории Галуа и теории групп. Алгебра на рубеже XIX в. находилась накануне коренной перестройки, сделавшей ее соединением ряда алгебраических наук, предметом изучения которых стали объекты сложной и абстрактной природы: группы, поля, кольца и т. д.

СРС

Задание 18. Изучите самостоятельно следующие вопросы: «История развития теории чисел» (С. 138-150); «Методы теории вероятностей и комбинаторного анализа» (С. 150-154). Сделайте краткий конспект.

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – 336 с.

Контрольные вопросы к теме 6

1. Сформулируйте центральную проблему алгебры конца XVII в.
2. Когда начали появляться многотомные сочинения, имеющие целью охватить всю математику, изложить ее в целом, систематически? Приведите примеры.
3. Каковы условия развития математики в XVIII в.?
4. Какие изменения произошли в содержании математического анализа в XVIII в.?
5. Какие изменения происходили с геометрическими дисциплинами в XVIII в.?
6. Какие изменения произошли в содержании теории чисел в XVIII в.?
7. Что собой представляет «Всеобщая арифметика» И. Ньютона? Что в ней излагается?
8. Укажите открытия Ньютона в области алгебры.
9. Каково значение «Универсальной арифметики» Эйлера на алгебру как науку?
10. Краткая аннотация «Универсальной арифметики» Эйлера.

11. Какие представления существовали в алгебре XVIII в. о понятии отрицательного числа?
12. Какие представления существовали в алгебре XVIII в. о мнимых числах?
13. Как трансформировалась в XVIII в. постановка проблемы о количестве корней алгебраического уравнения?

Рекомендованная литература для самостоятельной работы студентов к теме 6

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
2. История математики. Т. 3. Математика XVIII столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1972. – 498 с.
3. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2002. – 304 с.
4. Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды (от Эйлера до Лебега) / А.Б. Паплаускас. – М.: Наука, 1966. – 276 с.
5. Симонов Н.И. Прикладные методы анализа у Эйлера / Н.И. Симонов. – М.: Гостехиздат, 1957. – 170 с.
6. Стиллвелл Д. Математика и ее история / Д. Стиллвелл. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 529 с.
7. Стройк Д. Очерк истории дифференциальной геометрии (до XX столетия) / Д. Стройк / Пер. с англ. – Изд. 3. – М.: URSS, 2010. – 80 с.
8. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1984. – 283 с.
9. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках / Г.Г. Цейтен. – М.-Л.: Объединенное научно-техн. изд. НКТП СССР, 1938. – 470 с.

Тема 7
НАЧАЛО ПЕРИОДА СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

План

7.1. О развитии математики в XIX в.
7.2. Возникновение основных понятий современной алгебры.
7.3. Перестройка основ математического анализа.
7.4. Преобразование геометрии.

7.1. О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В XIX В.

В истории математики XIX в. знаменует начало нового периода, получившего (согласно периодизации А.Н. Колмогорова) название периода современной математики. Понятие современной математики, равно как и выделение соответствующего периода ее развития, разумеется, несколько неопределенно. Оно, по-видимому, не может быть иным, так как развитие науки постоянно меняет представления о современности ее главных теоретических идей и практических достижений. Условимся здесь включать в период современной математики такой отрезок времени, начало которого отмечено совершением в математике таких преобразований, которые послужили главной причиной приведения ее к современному состоянию.

Характерные особенности нового периода развития математики с большой определенностью стали появляться в самом начале XIX в. Имеются в виду работы Абеля и Галуа о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Они выдвинули на первое место в алгебре ряд весьма абстрактных общих понятий, среди которых первое место безусловно принадлежало понятию группы. Создание и развитие теории Галуа и теории групп сделалось одной из главных задач новой алгебры.

Открытие в 20-30-х годах XIX в. Лобачевским, а также Я. Больяи и Гауссом основных фактов неевклидовой гиперболической геометрии, а в 60-70-х годах – отыскание их интерпретаций вызвали в системе геометрических наук преобразования поистине революционного характера. Значение последних состояло не только в изменении лица геометрии; оно вышло за пределы этой области математики, а затем и за пределы математики вообще.

Система дисциплин, составляющих математический анализ, подверглась в своих основах глубокой перестройке на основе создаваемой теории пределов и теории действительного числа. К концу XIX в. логические средства анализа пополнились специфическими разновидностями гипотетико-условных суждений, применяющих аппарат особых неравенств (так называемый ε, δ – аппарат). Это придало выводам и приложениям анализа новый, более высокий уровень математической строгости.

Наряду с развитием аппарата классического математического анализа и его приложений из него выделились самостоятельные математические дисциплины. Прежде всего, это огромные области дифференциальных уравнений, а также теорий функций действительного и соответственно комплексного переменного.

Отмеченные выше явления не исчерпывают всей картины развития математики в XIX в. Они выбраны в качестве примеров главных, определяющих линий этого развития. Прежде чем перейти к более детальному их рассмотрению, отметим еще три характерные черты, имеющие общий для большинства математических наук характер.

Во-первых, расширение содержания предмета математики. Оно обусловлено тем, что во всех математических науках происходил процесс обобщения основных понятий, замены одних понятий другими, более общими. Этот процесс происходил как следствие возросших требований смежных наук, когда исследовать огромное количества задач оказывалось возможным лишь с иных, более общих, точек зрения. Большое количество задач возникало также внутри математики в результате внутренних логических потребностей развития теории.

Среди исследований, возникших в результате запросов математической теории, было в те времена особенно много таких, которые отражают усиление внимания к обоснованию математики. Это является второй характерной чертой математики XIX в. Попытки обоснования математики в целом или отдельных ее частей столь же многочисленны, как и в XVIII столетии. Но они приняли теперь иное направление. В них производился критический пересмотр исходных понятий (определений) и утверждений (аксиом); делались попытки построения строгой системы определений и доказательств; производился критический пересмотр логических приемов математических доказательств.

Третьей характерной особенностью развития математики в XIX в. является значительное расширение области приложений, в основном обусловленное увеличением возможностей аппарата математического анализа. В математическое естествознание вслед за механикой и оптикой вошли задачи термодинамики и электромагнитных явлений. Резко возросли математические запросы техники: баллистики, машиностроения и др.

7.2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Проблемы общей теории алгебраических уравнений. Современная алгебра – чрезвычайно широкая и разветвленная область математики. Она объединяет большое число самостоятельных научных дисциплин. Их общим предметом являются алгебраические операции, представляющие собой далеко идущие абстракции операций элементарной алгебры. Эти операции определяются в многообразных множествах. Последние выбираются для исследования преимущественно из соображений их приложимости. При этом оказывается необходимым заботиться о сохранении известной близости свойств определенных в них операций и свойств операций над числами. Так выделился класс алгебраических образований, наибольшее значение среди которых приобрели поля, кольца, группы и структуры. Алгебра взаимодействует с другими областями математики, участвуя в образовании новых, «пограничных», дисциплин (топологическая алгебра, теория групп и алгебр Ли и т. п.).

Столь общие воззрения на природу и состав алгебры сложились лишь в XX в. Вплоть до XIX в. основной задачей алгебры являлось решение алгебраических уравнений, понимаемое как нахождение корней уравнения с помощью рациональных операций и операции извлечения корня. В поисках общей формулы математики перепробовали громадное количество методов и к самому концу XVIII в. были вынуждены прибегнуть к фактическому рассмотрению полей и групп, еще не вводя этих понятий явно.

Буквально на рубеже XVIII и XIX вв. в алгебре были сделаны открытия необычайной важности. Они сопровождались введением в эту науку ряда новых понятий (в первую очередь, понятия группы), легших в основу современной алгебры. Эти открытия повели к преобразованию всей алгебры в течение XIX в. Имеются в виду результаты К.Ф. Гаусса, Н.Г. Абеля и Э. Галуа, относящиеся к доказательству основной теоремы алгебры, доказательству неразрешимости в радикалах уравнений степени $n \geq 5$ и созданию теории Галуа.

Карл Фридрих Гаусс сделал свои первые открытия в алгебре еще совсем молодым человеком во время обучения в Геттингенском университете (1795-1798). В марте 1796 г., занимаясь задачей отыскания корней уравнения $x^n - 1 = 0$, он обнаружил связь между этой задачей и делением окружности на равные части, доказав, что правильный 17-угольник можно вписать в круг с помощью циркуля и линейки. Соответствующий алгебраический факт, что уравнение $x^{17} - 1 = 0$ разрешимо в квадратных радикалах, Гаусс обобщил вскоре, найдя критерий возможности такой разрешимости (уравнение разрешимо для простого n вида $n = 2^{2^k} + 1$) и дав его геометрическую интерпретацию.

При доказательстве этой группы предложений Гаусс развил методы, послужившие одной из исходных точек при создании теории Галуа, по собственному признанию ее автора. Так, например, Гаусс явно высказал, что цель его исследований полинома

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$$

состоит в том, чтобы последовательно разлагать полином на множители вплоть до линейных, обнажая при этом структуру уравнения.

В 1799 г. Гаусс получил степень доктора за диссертацию, посвященную доказательству основной теоремы алгебры. Спустя много лет он вернулся к этой теореме и дал (в 1815, 1816 и 1849 гг.) три новых доказательства[15].

Другое из замечательных алгебраических открытий начала XIX в. – доказательство неразрешимости в радикалах уравнения 5-й степени. Поиски подходящей формы иррациональности для решения того или иного класса алгебраических уравнений сменились уверенностью, что, по-видимому, это невозможно. Задача обернулась; необходимым оказалось исследовать наиболее общие выражения, содержащие радикалы, с тем чтобы выяснить, могут ли они быть выражениями корней алгебраического уравнения 5-й степени.

СРС ***Задание 19.*** Подготовьте сообщение на тему «Жизнь и творчество К.Ф. Гаусса».

Первый реальный успех выпал на долю скромного молодого норвежского математика ***Нильса Генрика Абеля*** (1802-1829). За время своей короткой жизни он успел сделать так много открытий в

[15] Подробнее о доказательстве Гаусса основной теоремы алгебры см. в книге: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – С.162-165.

математике, что по праву может считаться одним из наиболее выдающихся математиков XIX в. Начав с доказательства невозможности решения в радикалах уравнения 5-й степени, Абель произвел вслед за тем основополагающие исследования в области теории аналитических функций. Он также исследовал ряд классов специальных функций, в первую очередь эллиптических и гиперэллиптических.

Еще в школе (около 1820 г.) Абель заинтересовался проблемой разрешимости уравнений в радикалах. Одно время ему казалось, что он дал доказательство разрешимости в радикалах уравнения 5-й степени. Вскоре выяснилось, что это доказательство содержало ошибку. Но ошибочное доказательство сослужило свою хорошую службу. Абель получил государственную стипендию и возможность поехать в Европу для усовершенствования в математике.

Исправленное доказательство появилось в 1824 г. в «Мемуаре об алгебраических уравнениях, где доказывается невозможность разрешимости общего уравнения пятой степени». В нем Абель стремился доказать, что наиболее общие выражения, содержащие радикалы, не могут быть корнями общего алгебраического уравнения 5-й степени. Это доказательство Абеля имело недостаток – оно опиралось на предположение, что корни резольвенты должны рационально выражаться через корни данного уравнения.

Наконец, в 1826 г. в работе Абеля «Доказательство невозможности алгебраической разрешимости уравнений, степень которых превышает четвертую» многовековая проблема получила удовлетворительное разрешение. Здесь Абель рассматривал уравнения 5-й степени с переменными коэффициентами. Решения он трактовал как выражения корней через алгебраические функции коэффициентов. Этот вид функций образуется из аргументов посредством конечного числа четырех арифметических операций и операции извлечения корня, показателем которого является простое число[16].

Третье замечательное алгебраическое открытие начала XIX в. – **возникновение теории Галуа**. Абель не смог дать общий критерий разрешимости уравнений с числовыми коэффициентами в радикалах. Но решение и этого вопроса не заставило себя долго ждать. Оно принадлежит французскому математику Эваристу Галуа (1811-1832). За

[16] Подробнее о результатах Н.Г. Абеля о доказательстве неразрешимости в радикалах уравнений степени $n \geq 5$ см. в книге: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – С.166-169. Ознакомиться с доказательством Абеля можно в книге: Чеботарев Н.Г. Теория Галуа / Н.Г. Чеботарев. – Т.1. – М.-Л.: ГТТИ, 1936.

свою короткую жизнь (21 год) Галуа успел написать мало работ. В русском издании его работы, рукописи и черновые записи заняли лишь 120 страниц в книге маленького формата. Но значение этих работ огромно.

СРС

Задание 20. Подробнее о замыслах и результатах Э. Галуа рассмотрите самостоятельно. Сделайте краткий конспект.
Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – С. 170-173.

Э. Галуа в 1830 г. ввел термин «группа» – адекватное современному, хотя и не столь формализованное определение. Его идея изучения структуры алгебраических полей и сопоставления с ними структуры групп конечного числа подстановок была плодотворной основой современной алгебры. Однако она не сразу получила признание.

Перед роковой дуэлью, оборвавшей его жизнь, Галуа в течение одной ночи сформулировал свои важнейшие открытия и переслал их другу О. Шевалье для публикации в случае трагического исхода. Это письмо было опубликовано вскоре после смерти Галуа, однако идеи, содержащиеся в нем, не нашли отклика. Только через 14 лет, в 1846 г., Лиувилль разобрал и опубликовал все математические работы Галуа. В середине XIX в. в двухтомной монографии Серре, а также в работе Э. Бетти (1852) впервые появились связные изложения теории Галуа. И только с 70-х годов XIX в. идеи Галуа начали получать дальнейшее развитие.

Это развитие происходило в разных направлениях. В области классической основы, наиболее близкой собственным идеям Галуа, новые задачи группировались вокруг проблемы классификации алгебраических иррациональностей и установления их арифметической природы.

Современная теория Галуа превратилась в сложную разветвленную математическую дисциплину, включающую в себя обширный материал о связях между свойствами уравнений, алгебраических чисел и групп.

СРС

Задание 21. Изучите следующий вопрос самостоятельно «Возникновение теории групп». Сделайте краткий конспект.
Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – С. 173-177.

Из богатой и разнообразной истории алгебры XIX в. была выделена сравнительно небольшая область формирования некоторых основных понятий. В создании соответствующих теорий – группы, поля, а позже кольца и структуры – отражается главное содержание изменений, происшедших в алгебре в течение XIX – начала XX в. Эти изменения предопределили основные направления развития алгебры в первой половине XX в.

Во второй половине XIX в. велись весьма активные исследования теории инвариантов уравнений, т. е. выявления функций их коэффициентов, сохраняющих свои значения при том или ином заданном классе преобразований. На этом пути развития выросла более общая теория форм, нашедшая применение не только в алгебре, но и в других областях математики: теории чисел, дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии, механике и др., а также в их приложениях.

7.3. ПЕРЕСТРОЙКА ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Усиление роли теории пределов. Математический анализ к XIX в. развился в разветвленную систему дисциплин, продолжая занимать центральное место в математике. Неиссякающий поток новых теоретических результатов и непрерывно расширяющаяся область приложений обусловили то, что в общей структуре математики особое место заняли именно аналитические дисциплины.

Математическое естествознание обогащало свое содержание главным образом за счет анализа, в первую очередь дифференциальных уравнений. Методы анализа глубже проникли в физику, захватив помимо механики и оптики теорию электрических, магнитных и тепловых явлений. В механике были подвергнуты разработке кроме точек и их систем непрерывные среды. Разнообразные области техники: паровые машины, артиллерия, техника строительства и др. – получали новые методы аналитического исследования важнейших задач. В связи с этим структура и содержание математического анализа подверглись глубокой перестройке.

Стандарт логической строгости, сложившийся в математическом анализе во второй половине XVIII в., отставал от приложений. Работа по обоснованию этой области математики, проделанная Эйлером, Даламбером, Лагранжем и др., не привела к преодолению отставания. Теоретические исследования требовали новых, более тонких аналитических методов, опирающихся на ясные и строго определенные исходные положения. Задача критического пересмотра системы определений и логических приемов доказательств приобрела для математического анализа еще большую актуальность. От ее решения зависело теперь слишком много. Поэтому исследования, имеющие целью обосновать математический анализ, занимали в математике XIX в.

весьма заметное место.

В современной структуре математического анализа одно из центральных мест принадлежит понятию предела. Его значение огромно.

Понятия предела и перехода к нему фактически существуют в математике с давних пор. Первоначальная теоретическая форма предельных суждений имелась еще у древних греков в виде метода исчерпывания. В этом методе еще нет ни понятия предела, ни единой отражающей сущность этого понятия символики. Однако единообразное проведение метода с обязательным, хоти и неявно осуществляемым предельным переходом дает возможность увидеть в нем неразвитую форму позднейшей теории пределов.

Вплоть до Ньютона в истории математики можно отметить лишь наличие отдельных фактически производимых предельных переходов, совокупность которых медленно расширяется. Ньютону мы обязаны первой попыткой развить теорию пределов как логическую основу созданного им в виде теории флюксий дифференциального и интегрального исчисления. Он же ввел специальный термин: *limes* (предел), не давая ему формального определения, по-видимому как интуитивно ясному. Теория Ньютона опубликована в его знаменитых «Математических началах натуральной философии». Здесь она носила название «метода первых и последних отношений», и об этом методе утверждалось, что с его помощью все последующее доказывается. Однако метод первых и последних отношений не давал оперативной основы для практического пользования бесконечно малыми.

Математики XVIII в. испробовали множество способов обоснования анализа бесконечно малых. Неудовлетворительность почти всех этих способов быстро делалась очевидной. Только по отношению к методам, основанным на понятии предельного перехода, критика не обнаруживала существенных логических пробелов. Сторонники метода пределов: Даламбер, Люилье, Гурьев и др. – с большой настойчивостью отстаивали его, разъясняя роль и смысл понятия предела.

Для внедрения в анализ предельных рассмотрений требовалось, чтобы они служили средством разработки стоящих перед этой наукой проблем, вошли в его оперативную практику. На этом пути предстояло преодолеть большие трудности, связанные: *а*) с необходимостью определять существование пределов; *б*) с отсутствием алгоритма вычисления пределов; *в*) с отсутствием математического выражения пределов, позволяющего оперировать с ними, и соответствующей символики.

Первая из указанных трудностей (не говоря уже об остальных) отнюдь не носила абстрактно-теоретического характера, как это могло бы показаться. В математике накопилось большое количество проблем, решение которых сводилось к решению вопросов существования. Таковы, например: *а*) вопрос о существовании корней алгебраических уравнений; *б*) о существовании сумм бесконечных рядов чисел; *в*) о существовании сумм бесконечных рядов функций; *г*) о существовании интегралов функций, как действительного, так и комплексного переменного. Для решения всех этих проблем совокупность известных предельных переходов, индивидуально определенных ранее, была совершенно недостаточна.

В конце XVIII – начале XIX в. сочинения большого числа математиков отражали уже, с различной степенью решимости и последовательности, объективную необходимость построения теории пределов как основы математического анализа и коренной перестройки последнего. Наибольшие заслуги в осуществлении этого принадлежат О. Коши.

Деятельность О. Коши в области обоснования математического анализа. Процесс перестройки оснований математического анализа на базе теории пределов отчетливо проявился в 20-х годах XIX в., прежде всего в знаменитых лекциях Огюстена Луи Коши (1789-1857), которые он читал в Политехнической школе в Париже.

Задание 22. Подготовьте сообщение о жизни и деятельности О. Коши.
Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – С. 182-183

В Политехнической школе Коши читал лекции по математическому анализу. Весь курс лекций был опубликован в трех книгах: «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (2 тома, 1826, 1828). Эти книги имеют особое значение потому, что в них впервые математический анализ последовательно строится на основе теории пределов. Они знаменуют начало коренной перестройки основ этой науки – перестройки, непосредственно предшествующей ее современному состоянию.

«Курс анализа» Коши, называемый иногда «Алгебраическим анализом» (в соответствии с текстом подзаголовка), посвящен изучению элементарных функций как вещественного, так и комплексного переменного, включая учение о бесконечных рядах. В этом отношении Коши следовал установившимся в XVIII в. благодаря Эйлеру традициям:

предпослать собственно дифференциальному и интегральному исчислению учение о функциях. Значение такого сочинения в структуре анализа очевидно. Классификация функций, разложение их в степенной ряд, в бесконечные произведения, частные приемы преобразования функций необходимы для успешного применения к ним операций дифференцирования и интегрирования. Последние два вида операций рассматривались как специфические для анализа бесконечно малых. Все предшествующие им преобразования функций, хотя и совершаемые как над конечным, так и над бесконечным числом объектов, получили поэтому специфически-смешанное название: «Алгебраический анализ».

Алгебраический анализ Коши уже во многом напоминает современное изложение основ математического анализа. В нем впервые вводится бесконечно малая величина как переменная, предел которой равен нулю. Непрерывность функции рассматривается как наличие соответствия бесконечно малого приращения функции бесконечно малому приращению аргумента. С большой тщательностью изложен вопрос о сходимости бесконечных рядов, существование которой обусловливается наличием предела сумм конечного числа членов с обязательной строгой аналитической оценкой остаточного члена.

Коши поставил на достаточно прочную основу исследование признаков сходимости рядов. Этому предшествовали лишь немногие открытия: интегральный признак (Маклорен, 1742) и недостаточно строго сформулированный признак Даламбера (1768). В лекциях Коши указан ряд достаточных признаков сходимости.

Теория рядов обогатилась в лекциях Коши установлением области сходимости степенных рядов $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ как для действительных, так и для комплексных значений аргумента. Для последних определен в 1844 г. круг сходимости.

К сожалению, у Коши нет еще представления о равномерной сходимости ряда в интервале. Из-за этого в алгебраический анализ попала неправильная теорема: сходящийся ряд непрерывных функций в области сходимости представляет сам непрерывную функцию. Вскоре (1826) эту ошибку отметил и исправил Абель. Понятие равномерной сходимости было введено в 1848 г. Дж. Стоксом и Л. Зейделем.

Во второй книге Коши – «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823) изложено дифференциальное и интегральное исчисление функций действительного переменного. Заметную часть лекций по интегральному исчислению заняли разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена. Точной оценке остаточного члена и выводу его различных аналитических форм Коши уделил много места и в других своих исследованиях.

Указанные лекции Коши (третья часть их посвящена геометрическим приложениям математического анализа) имели очень широкое последействие. Теория пределов через их посредство начала завоевывать положение основы всего анализа. Эта идея постепенно получала распространение.

СРС

Задание 23. Изучите следующие вопросы самостоятельно. Сделайте краткий конспект.

1). «Усовершенствование Б. Больцано основ теории функций» (С. 188-194);
2). «Построение теории действительного числа и теории множеств» (С. 194-200);
3). «Развитие аппарата и приложений математического анализа в XIX в.» (С. 201-227);
4). «Создание теории функций комплексного переменного» (С. 227-257).

Источник: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – 336 с.

7.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ

Геометрические науки к началу XIX в. Геометрия к началу XIX в. представляла уже большой комплекс дисциплин, выросших из анализа и обобщения данных о пространственных формах тел, использующих методы других областей математики и в силу этого тесно переплетенных с ними. Помимо элементарных частей в геометрию входили почти все те части, которые и ныне составляют структуру ее высших областей, развитие которых является актуальной задачей современной математики.

Аналитическая геометрия, возникшая еще в XVII в., завершила большой путь развития и определила свое место как часть геометрии, изучающая фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями с помощью координатного метода и использующая методы алгебры. Помимо ее учебной и прикладной роли в ней самой наметились тенденции развития, состоящие в усовершенствовании и обобщении координатного метода, а также в усилении аналитичности при исследовании геометрических образов, что особенно важно для приложений. Первая из этих тенденций нашла воплощение во введении различных избыточных координат (имеются в виду однородные координаты, представляющие отношения двух переменных к третьей), проективные, т. е. линейные, комбинации однородных координат, введенные Г. Дарбу тетрациклические и пентасферические координаты и др. Вторая из тенденций привела к включению в аналитическую геометрию векторных методов.

Дифференциальная геометрия заняла видное место в геометрии к концу XVIII в. Характерное для этой части геометрии использование понятий и методов дифференциального исчисления обусловило прочные и далеко идущие связи ее с математическим анализом и с многочисленными прикладными задачами. В начале XIX в. для дифференциальной геометрии раскрылись новые возможности развития, благодаря введению Гауссом (1824) внутренней геометрии поверхностей. В процессе создания общей теории поверхностей дифференциальная геометрия приобрела новые связи, преимущественно с неевклидовыми геометриями.

Казалось бы, приостановившиеся в своем развитии со времен Дезарга и Паскаля методы изучения свойств фигур, инвариантных относительно проектирования, в 20-х годах XIX в. сформировались в работах Ж. Понселе и др. в новую область геометрии – ***проективную геометрию***. Выделение проективных свойств фигур в отдельный класс и установление соответствий между метрическими и проективными свойствами явились предметом многих исследований, осуществлявшихся как синтетическими методами (Штейнер, Шаль, Штаудт й др.), так и аналитическими (Мёбиус, Штуди, Картан и др.). В систему современной геометрии проективная геометрия вошла как часть, обладающая высокой общностью, могущая включить в единую систему многие геометрические теории. Такому положению проективная геометрия обязана влиянию геометрии Лобачевского и последующих исследований А. Кэли и Ф. Клейна.

Изменения, внесенные в геометрию со стороны указанных ее областей, весьма значительны. Однако коренная перестройка всего содержания геометрии и ее структуры определялась не этими изменениями. Принципиально новое содержание было внесено в нее геометрией Лобачевского.

Открытие геометрии Лобачевского. Создатель неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский (1792-1856). Отправным пунктом исследований Лобачевского по неевклидовой геометрии была аксиома о параллельных. Как известно, дедуктивно построенная система евклидовой геометрии опирается на некоторую совокупность аксиом. Последняя из этих аксиом (фигурирующая в «Началах» Евклида в качестве пятого постулата) стоит как бы особняком. За ней в силу сложности формулировки не было признано свойство очевидности, и в течение многих веков предпринимались попытки дать ее доказательство, разумеется, безуспешные.

СРС *Задание 24.* Подготовьте сообщение о жизни и деятельности Н.И. Лобачевского.

Геометрия, в зависимости от того, используется ли аксиома о параллельных или нет, делится на две части. Та часть, куда входят предложения, не опирающиеся на эту аксиому, носит название абсолютной геометрии. Лобачевский, который вначале пытался дать доказательство упомянутой аксиомы, вскоре убедился в возможности расчленения геометрии на абсолютную и неабсолютную и осуществил его. Вслед за этим он попробовал заменить аксиому о параллельных ее отрицанием: он предположил, что через точку, не лежащую на данной прямой, может проходить более чем одна прямая, лежащая в одной плоскости с прямой и не пересекающаяся с ней при продолжении. При этом он обнаружил, что формального противоречия не получается, а система выводов складывается в новую геометрию, отличную от евклидовой, но столь же логически строгую и последовательную, несмотря на непривычность, странность ее утверждений.

День рождения неевклидовой геометрии настал 11 (23) февраля 1826 г. на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета Лобачевский доложил о своем сочинении: «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Через три года, в 1829 г., он издал это сочинение в расширенном виде под названием: «О началах геометрии». В последующем, в течение всей жизни, Лобачевский развивал свою новую геометрию, опубликовав ряд работ: «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1838), «Пангеометрия» (1855).

Попытки доказать аксиому о параллельных приведением к противоречию имели место и до работ Лобачевского. Саккери (1733) даже получил ряд предложений, которые затем ошибочно признал противоречивыми, а следовательно, аксиому о параллельных – доказанной. И. Ламберт около 1766 г. (опубликовано в 1786 г.), следуя по тому же пути, не смог ни примириться с получающейся системой выводов, ни опровергнуть ее. Аналогичные исследования предпринимали Ф. Швейкарт (1818) и Ф. Тауринус (1825). Однако только венгерский математик Я. Больяи (1802-1860) ясно выразил ту же мысль, что и Лобачевский, и к 1832 г., независимо от последнего, развил систему неевклидовой геометрии, выпустив сочинение: «Аппендикс, т. е. приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную». После смерти Гаусса (1855) выяснилось, что он тоже открыл начальные факты геометрии Лобачевского, но молчал о них, из боязни уронить свою научную репутацию. Он даже не решился поддержать молодого Я. Больяи, когда тот прислал ему свою работу. Подлинное мужество ученого, свойственное Лобачевскому, особенно ярко проявилось в обстановке непризнания и нападок, созданной вокруг его работ, и не преодоленной им до самой смерти.

Геометрия Лобачевского в абсолютной своей части не отличается по существу от геометрии Евклида. В той же части, которая использует аксиому о параллельных, дело обстоит иначе. К этой части относятся теоремы о: 1) расположении параллельных прямых; 2) сумме углов в треугольниках и многоугольниках; 3) площадях; 4) вписанных в окружность и описанных многоугольниках; 5) подобии и конгруэнтности фигур; 6) тригонометрии; 7) теореме Пифагора; 8) измерении круга и его частей. В этих пунктах двумерная геометрия Лобачевского отличается от евклидовой планиметрии[17].

В сочинениях Лобачевского была построена система, не содержащая логических погрешностей и столь же богатая фактами, как и геометрия Евклида. Тем самым было показано, что мыслима не только одна система геометрии и что другие системы можно получать путем видоизменений и обобщений основных положений геометрии Евклида. Однако прием, оказанный геометрии Лобачевского, был более чем обескураживающим. На его сочинения академики (в том числе Остроградский) давали отрицательные отзывы, в печати появились пасквили[18] на Лобачевского. Требовалось незаурядное мужество и вера в научную достоверность и значимость своих исследований, чтобы противостоять этому. Лобачевский проявил необходимые качества, боролся настойчиво, но умер в 1856 г. непонятым и непризнанным.

Становление аксиоматического метода в геометрии. Идея Лобачевского о том, что логически мыслима не одна геометрия Евклида, получила во второй половине XIX в. подтверждение; возникли многочисленные геометрические системы. Воплотилась в жизнь в виде разнообразных интерпретаций, а затем и приложений и другая его идея – что истинность геометрии проверяется лишь опытом и что расширяющийся опыт потребует введения не только евклидовой

[17] Подробнее с некоторыми особенностями геометрии Лобачевского можно ознакомиться в кн.: Рыбников К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Т. 2. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. – 336 с. – С. 263-265.

[18] *Па́сквиль* (от нем. *Pasquill*, из итал. *pasquillo*) – сочинение, содержащее карикатурные искажения, клевету и злобные нападки, цель которых оскорбить и скомпрометировать какое-либо лицо и т. п.

геометрии. Истинная природа пространства может оказаться и неевклидовой.

Одна из идей Лобачевского состояла в том, что новые геометрии могут быть построены путем видоизменения и обобщения системы аксиом и вообще исходных положений евклидовой геометрии. Эта идея повлекла целую серию исследований по основаниям геометрии. Еще в 1866 г. Г. Гельмгольц ввел движение в качестве основного понятия геометрии. Г. Кантор (1871) и Р. Дедекинд (1872) исследовали аксиому непрерывности. Паш (1882), добиваясь решения проблемы включения метрической геометрии в проективную, глубоко исследовал две группы аксиом: порядка и принадлежности (по позднейшей классификации аксиом, осуществленной Д. Гильбертом). Вслед за Пашем эти группы аксиом исследовали Д. Пеано (1889) и Пиери (1899). Наконец, в 1899 г. появилось первое издание «Оснований геометрии» Д. Гильберта, в котором впервые была изложена полная и достаточно строгая система аксиом геометрии.

Таким образом, к концу XIX в. в геометрии укоренился аксиоматический метод. С того же времени аксиоматический метод распространился и на другие области, сделавшись одним из основных методов современной математики. Геометрические теории оказались едва ли не самой удобной частью математики для становления аксиоматического метода. Вместо громоздкой системы определений, аксиом и постулатов, принятой в «Началах» Евклида, теперь сделалось возможным ввести лишь совокупность аксиом, которая и служит описанием основных понятий и их свойств. В геометрии же сложились первые требования логической строгости, которым должны удовлетворять аксиомы: требования их совместности и полноты. Совместность включила в себя требования независимости и непротиворечивости. Последняя доказывается построением интерпретаций и по существу эквивалентна этому построению. Независимость какой-либо аксиомы устанавливается заменой ее отрицанием с последующим построением интерпретаций с целью доказать непротиворечивость новой системы. Полнота системы аксиом получила общепринятое понимание как свойство определять систему объектов с точностью до изоморфизма. В отличие от геометрии, аксиоматика теории групп, например, не может быть полной, так как существуют группы с неизоморфной структурой.

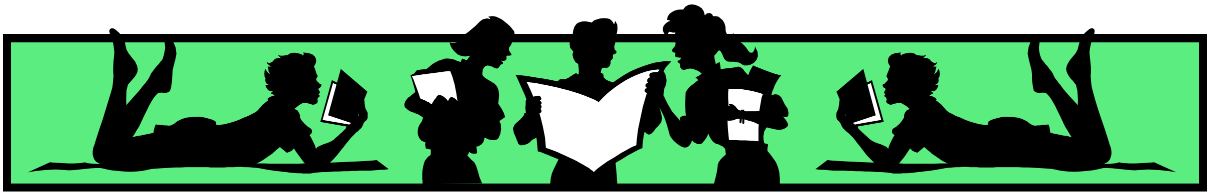
Аксиомы геометрии, как и вообще математические аксиомы, не являются вечными априорными истинами. Критерий их истинности лежит в практике; на каждом этапе исторического развития математики выявляется их относительность. Большая роль аксиоматического метода не может затенить реальное происхождение аксиом, не может служить основанием для их идеалистических оценок.

Контрольные вопросы к теме 7

1. Какой отрезок времени принято включать в период современной математики?
2. Создание и развитие каких теорий сделалось одной из главных задач новой алгебры?
3. Укажите три характерные черты математики XIX в.
4. Укажите открытия К.Ф. Гаусса в алгебре.
5. Укажите открытия Н.Г. Абеля в алгебре.
6. Укажите три замечательных алгебраических открытия начала XIX в.
7. Какой математик ввел термин предел, не давая ему формального определения?
8. Кому принадлежат наибольшие заслуги в построении теории пределов как основы математического анализа и коренной перестройки последнего?
9. Почему книги Коши «Курс анализа», «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» и «Лекции по приложениям анализа к геометрии» имеют особое значение?
10. Чему посвящен «Курс анализа» Коши?
11. Каковы открытия Коши в теории рядов?
12. Что составляет основу содержания второй книги Коши «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых»?
13. Какие тенденции наметились в развитии аналитической геометрии?
14. Кто является создателем неевклидовой геометрии?
15. Какую дату считают днем рождения неевклидовой геометрии?
16. Какой математик ясно выразил ту же мысль, что и Лобачевский, и независимо от последнего, развил систему неевклидовой геометрии, выпустив сочинение «Аппендикс»?
17. В каких пунктах двумерная геометрия Лобачевского отличается от евклидовой планиметрии?
18. Кто в 1866 г. ввел движение в качестве основного понятия геометрии?
19. В какой работе впервые была изложена полная и достаточно строгая система аксиом геометрии? Укажите ее автора.
20. Когда в геометрии укоренился аксиоматический метод?

Рекомендованная литература
для самостоятельной работы студентов к теме 7

1. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 368 с.
2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
3. Гильберт Д. Основания геометрии / Д. Гильберт / Пер. с 7-го немецкого издания И.С. Градштейна, под ред. П.К. Рашевского. – М.-Л.: ГТТИ, 1948. – 491 с.
4. Делоне Б.Н. Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского / Б.Н. Делоне. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – 128 с.
5. Каган В.Ф. Лобачевский / В.Ф. Каган. – Изд. 2-е, доп. – М.-Л.: Изд. Академии наук СССР, 1948. – 525 с.
6. Каган В.Ф. Лобачевский и его геометрия / В.Ф. Каган. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 305 с.
7. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф. Клейн, Ч. 1. – М.-Л., ОНТИ, 1937. – 436 с.
8. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2002. – 304 с.
9. Марков С.Н. Курс истории математики: учеб. пособие / С.Н. Марков. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1996. – 248 с.
10. Маркушевич А.И. Очерки по истории теории аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. – 128 с.
11. Математика XIX века. Теория аналитических функций. Под ред. А.Н. Комагорова и А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1981. – 270 с.
12. Медведев Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке / Ф.А. Медведев. – М.: Наука, 1965. – 231 с.
13. Стиллвелл Д. Математика и ее история / Д. Стиллвелл. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 529 с.
14. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1984. – 283 с.



ЛИТЕРАТУРА

1. Гильмуллин М.Ф. История математики: учеб. пособие / М.Ф. Гильмуллин. – Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2009. – 212 с.
2. Коломийцев В.Ф. Методология истории: (от источника к исслед.) / В.Ф.Коломийцев. – М.: Росспэн, 2001. – 191 с.
3. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калилнград: ФГУИПП «Янтарній сказ», 2002. – 304 с.
4. Марков С.Н. Курс истории математики: учеб. пособие / С.Н. Марков. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1996. – 248 с.
5. Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Изд-во УРАО, 2011. – 384 с.
6. Пиковер К. Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики / К. Пиковер; пер. с анг. С.А. Иванова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 539 с.
7. Родионов М.А. История математики: взаимосвязь общенаучного и методического аспектов: учеб. пособие / М.А. Родионов, Е.В. Марина; под. Ред. д.п.н., проф. М.А. Родионова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. – 172 с.
8. Рыбников К.А. История математики. В 2-х томах, переизд. / К.А. Рыбников. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – 496 с.
9. Стиллвелл Д. Математика и ее история / Д.Стиллвелл. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 266 с.
10. Чечулин В.Л. История математики и ее методология (структуры и ограничения): монография / В.Л. Чечулин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2015. – 154 с.
11. Шмигевський М.В. Видатні математики / М.В.Шмигевський. – Х.: Видав. гр. «Основа», 2004. – 164 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Рекомендовано Ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 10 26.12.2016 г.)

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для студентов направления подготовки
44.04.01 Педагогическое образование
(Профиль: математическое образование)

Составитель: И.В. Гончарова
Компьютерный дизайн: И.В. Гончарова

Адрес издательства:
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24. г. Донецк, 283055

Подписано в печать 28.01.2017 г.
Формат 60×84/16. Бумага офисная.
Печать – цифровая. Усл.-печ. л. 6,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 04 - февраль.17.
Донецкий национальный университет
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
Свидетельство про внесение субъекта
издательской деятельности в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004г.