

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Физико-технический факультет
Кафедра компьютерных технологий

Н.А. Володин
В.К. Толстых

*Развитие теоретических основ
оптимизации и идентификации параметров
в слитках и отливках*

УДК 536: 621
ББК К3-9в661.5 + К61-9
В68

Володин, Н.А., Толстых, В.К. Развитие теоретических основ оптимизации и идентификации параметров в слитках и отливках [Электронный ресурс]: монография / Н. А. Володин, Толстых, В.К.; ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет". – Донецк: ДонНУ, 2017. – Электронные данные (1 файл).

Рассматриваются и решаются прикладные задачи оптимизации и идентификации параметров в слитках и отливках: минимизация термонапряжений в непрерывном слитке с учетом ограничений на температуру, объем жидкой лунки, степень дисперсности дендритной структуры; идентификация эффективного коэффициента теплопроводности в затвердевающей отливке. Для решения поставленных задач привлекается прямой экстремальный подход. Приводятся тестовые и прикладные расчеты, демонстрирующие высокую эффективность выбранного подхода.

Для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области оптимизации и идентификации параметров теплофизических систем.

Рецензенты: д.т.н., проф. В.Н. Павлыш;
д.т.н., проф. А.П. Ковалев.

УДК 536: 621
ББК К3-9в661.5 + К61-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В СЛИТКАХ И ОТЛИВКАХ	
1.1. Непрерывный слиток и задачи оптимизации	9
1.2. Анализ критериев качества оптимизации	30
1.3. Идентификация теплофизических параметров в моделях формирования отливок	38
2. НАПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ	
2.1. Традиционные подходы к задачам оптимизации и идентификации	42
2.2. Прямой экстремальный подход	50
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА	
3.1. Градиент неявно заданного функционала	57
3.2. Градиент в задаче оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка	60
3.3. Градиент в задаче идентификации теплофизических параметров	67
4. РАЗРАБОТКА ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ И КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ	
4.1. Конечно-разностная аппроксимация уравнений	72
4.2. Расчет теплофизических параметров металла	78
4.3. Оптимизация теплоотвода по заданному температурному полю металла	83
4.4. Оптимизация теплоотвода с ограничением	91

5. ОПТИМИЗАЦИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ В СЛИТКАХ И ОТЛИВКАХ

5.1. Минимизация термонапряжений с ограничением на температуру	97
5.2. Минимизация термонапряжений с ограничением на объем жидкой лунки	104
5.3. Минимизация термонапряжений с ограничением на температуру и объем жидкой лунки	108
5.4. Минимизация степени дисперсности в непрерывном слитке при ограничении на температуру	112
5.5. Расчеты оптимальных режимов охлаждения применительно к слиткам Днепровского металлургического комбината	116
5.6. Идентификация эффективного коэффициента теплопроводности при формировании отливки	121
ЛИТЕРАТУРА	125

ВВЕДЕНИЕ

Теплофизические процессы играют определяющую роль во многих промышленных технологиях. Прежде всего, следует отметить химико-технологические процессы, где перенос как кондуктивный, так и конвективный, являются доминирующими при получении той или иной продукции. Значительное место теплопередача занимает и в различных сферах металлургического производства. Правильная организация процессов тепломассопереноса при формировании слитков и отливок, а также при термической обработке изделий позволяет экономить энергию и получать высококачественную продукцию.

Проблемы современной науки и техники необычайно расширили область практических приложений теории теплофизики и поставили перед ней ряд новых, исключительно сложных задач. Необходимость их решения и практического использования получаемых результатов требует применения разнообразных методов современной науки, в том числе и новейших достижений теории оптимального управления.

Как правило, современные объекты теплофизики являются системами с распределенными параметрами. При этом математические уравнения, описывающие тепловые процессы, являются дифференциальными уравнениями в частных производных, а управляющие параметры – это функции пространства и времени.

Традиционные методы оптимизации, такие как принцип максимума, динамическое программирование, вариационное исчисление, проблема моментов для систем с распределенными параметрами являются весьма громоздкими, не говоря уже о низкой наглядности всей процедуры достижения конечного результата.

Представляется целесообразным для решения задач оптимизации теплофизических систем использовать прямой экстремальный подход [59],

основанный на непосредственной минимизации целевого функционала специальными экстремальными методами.

Классические конечномерные экстремальные методы (градиентные, Ньютона и т.п.) для оптимизации систем с распределенными параметрами или не эффективны, или не применимы, что демонстрируют многие тестовые расчеты, в том числе и приведенные в данной работе.

Суть проблемы заключается в том, что классические экстремальные методы могут гарантировать достаточное приближение к точному решению за конечное число итераций, только если искомое управление – *конечномерный* вектор, а целевая функция не сильно отличается от выпуклой квадратичной. В задачах же теплофизики искомыми параметрами – управлениями являются пространственно-временные функции. Такие задачи оптимизации являются *бесконечномерными*. Классические экстремальные методы здесь могут требовать бесконечно много итераций для достижения требуемой точности.

Данное обстоятельство послужило причиной разработки и применения новых бесконечномерных экстремальных алгоритмов [59, 62] для решения оптимизационных задач теплофизики. В монографии рассматриваются задачи оптимизации теплофизических процессов при формировании непрерывного цилиндрического слитка. Данная проблема является актуальной для металлургии [52 - 57]. Качество слитков существенным образом зависит от гидродинамических и теплофизических процессов, протекающих в кристаллизующемся слитке. Условия теплопередачи являются определяющими для кинетики затвердевания, при формировании кристаллической структуры, физической и химической неоднородности слитка.

Качество непрерывного слитка, в основном, определяется режимом теплосъема в зоне вторичного охлаждения (ЗВО). В работах [36, 43, 47, 52-56 и др.] такие задачи решались либо перебором рациональных режимов охлаждения и выбора из них наиболее удачного, либо как задачи

оптимизации теплоотвода в классе постоянных или кусочно-постоянных функций.

В настоящей монографии исследуется задача оптимального теплоотвода в ЗВО непрерывного слитка с целью минимизации термических напряжений (ТН) и тем самым предотвращения разрушения металла. Задача оптимизации формулируется для управления - функции по всей длине ЗВО с целевым функционалом относительно градиента температур в твердой части слитка [14-21, 42, 45, 52, 64, 70]. Показано, что данную задачу оптимизации нельзя решать без дополнительных ограничений, поскольку минимизация интегрального значения градиента температур переведет слиток в двухфазное состояние. В монографии рассматриваются ограничения на температуру выхода слитка из ЗВО, на объем жидкой лунки, на уровень дисперсности дендритной структуры [14-21, 42, 45, 64, 70]. Учет всех ограничений осуществляется в виде штрафных функционалов, добавляемых к квадратичному целевому функционалу, определяющему интегральное значение градиентов температур в твердой фазе непрерывного слитка.

Вторая задача связана с идентификацией теплофизических параметров в моделях формирования отливок. Точность математического моделирования процессов затвердевания, в основном, определяется точностью задания значительного числа параметров, входящих в уравнения конвекции и тепломассопереноса. Такие уравнения довольно громоздки, при численном решении требуют значительных компьютерных ресурсов и не гарантируют желаемой точности.

Вычислительные затраты могут быть снижены путем введения эффективных коэффициентов теплопроводности и диффузии. Это позволяет отказаться от расчета уравнений конвекции и существенно снизить число экспериментально определяемых параметров [8, 63]. Такие коэффициенты не могут быть измерены непосредственно. Их достоверные значения могут быть получены только в процессе параметрической идентификации.

Во второй задаче обсуждается возможность упрощенного моделирования процессов кристаллизации отливок без явного учета конвективного переноса, а с эффективными коэффициентами в уравнениях теплопроводности. Рассматривается задача идентификации эффективного коэффициента теплопроводности, как функции времени, на основе локализованного наблюдения за температурой отливки.

Последний раздел содержит примеры конкретных численных решений задач оптимизации и идентификации, сформулированных в первом разделе. Последний параграф раздела содержит расчеты оптимальных тепловых потоков применительно к металлу, получаемому в условиях Днепровского металлургического комбината (г. Днепропетровск). Полученные результаты свидетельствуют об эффективности данного подхода для решения задач оптимизации и идентификации параметров в слитках и отливках.

Авторы выражают глубокую признательность проф., д.т.н. Ф.В. Недопекину за полезные советы при обсуждении теплофизических проблем в рассматриваемых задачах, а также проф., д.т.н. В.Н. Павлышу, устранившему погрешности изложения и сделавшему ряд ценных замечаний в процессе подготовки рукописи к изданию.

Раздел 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В СЛИТКАХ И ОТЛИВКАХ

1.1. Непрерывный слиток и задачи оптимизации

Одна из важнейших задач современной металлургии - получение качественного металла. Перспективный путь ее решения в широком применении непрерывного литья металлов [6, 52, 55]. Непрерывная разливка стали является одним из наиболее прогрессивных технологических процессов металлургии, получивших в последнее время широкое распространение [49 - 51].

Разливка стали и ее затвердевание являются завершающими звеньями в цепи основного металлургического процесса. С ними связана совокупность многих явлений физического, химического, механического характера, формирующих стальную слиток. Условия протекания указанных явлений составляют технологический режим разливки и затвердевания стали. Одним из таких режимов является разливка стали в кристаллизаторы непрерывного действия, определяющая возможность непрерывного ведения процесса формирования слитка. Освоение способа непрерывного литья стали явилось одним из наиболее примечательных достижений современной металлургической техники [28, 53].

На рис. 1.1 приведена принципиальная схема установки для непрерывного вертикального литья металла. Жидкий металл заливается сверху в кристаллизатор (1) (первичный охладитель), где за счет интенсивного охлаждения по периметру слитка затвердевают лишь поверхностные слои металла, образуя, так называемую, твердую корочку или оболочку вокруг слитка (2), имеющего жидкую фазу по центральной оси. Поэтому за кристаллизатором следует зона вторичного охлаждения (ЗВО) (3). В результате форсированного поверхностного охлаждения того или

иного вида заготовка затвердевает по всему объему и остывает до требуемой температуры на выходе из ЗВО. Дальнейшее охлаждение происходит на участке остывания слитка, на воздухе. При движении слитка от кристаллизатора к вторичному охладителю внутри слитка остается лунка жидкого металла, которая по мере продвижения вниз затвердевает, проходя двухфазное жидкокристаллическое состояние. Рассмотрим основные преимущества непрерывной разливки по сравнению с другими способами литья металла.

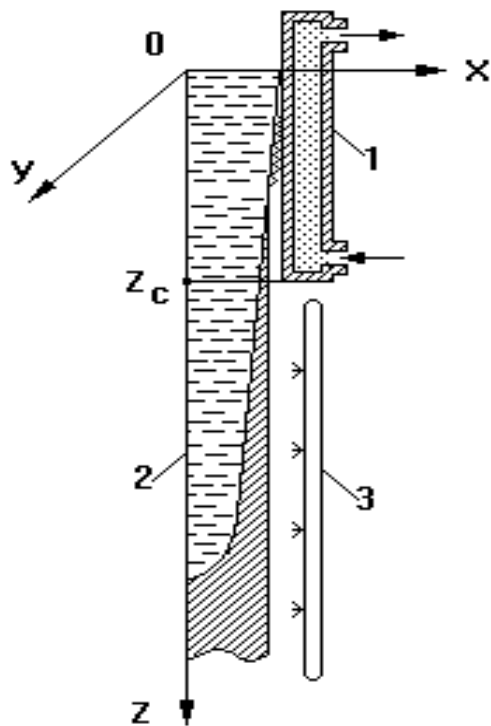


Рис.1.1. Принципиальная схема установки непрерывного вертикального литья металла.
1 - кристаллизатор,
2 - слиток,
3- вторичный охладитель

При разливке металла в изложницы каждый слиток имеет в верхней части зону, обогащенную различными ликвирующими составляющими металла и пораженную усадочной раковинной, которая должна быть удалена при прокатке на обжимных станах. В результате отходы на головную и донную части в обычном слитке составляют 15-20% [36]. При непрерывной разливке стали усадочная раковина образуется лишь в конечном участке непрерывного слитка, поэтому возможно значительное снижение отходов и увеличение выхода годного металла [36].

Другим важным преимуществом непрерывной разливки является возможность отливать слитки небольших сечений, т.е. получать непосредственно из жидкого металла заготовку для дальнейшего передела на готовый продукт в результате прокатки, ковки, штамповки. Немаловажным преимуществом является то, что при непрерывном способе литья длина получаемого слитка может во много раз превышать длину кристаллизатора, в то время как при обычном способе производства, длина слитка соответствует длине формы (изложницы) [30-36].

Машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) отличаются большим разнообразием и выполняются в настоящее время по различным принципиальным схемам. Применяемые и разрабатываемые МНЛЗ различаются, в основном, направлением технологической оси машины, т.е. расположением непрерывного слитка в процессе литья (вертикальное, радиальное, горизонтальное или наклонное с движущимися и неподвижными кристаллизаторами) [30]. Рассмотрим назначение кристаллизаторов.

Кристаллизатор является важнейшим узлом МНЛЗ. Его основное назначение - обеспечить максимальный теплосъем от кристаллизующегося металла для формирования прочной оболочки слитка для того, чтобы она не разрушалась под действием ферростатического давления при выходе из кристаллизатора. При этом конструкция кристаллизаторов должна обеспечивать [36]:

- высокое качество слитков из стали многих марок;
- стабильность процесса разливки;
- необходимую скорость вытягивания слитка;
- достаточно высокую стойкость, обеспечивающую рентабельную работу установки;
- безопасность работы.

Работа МНЛЗ стабилизируется постоянством уровня металла в кристаллизаторе. Это необходимо для поддержания жесткого материального

баланса между количеством поступающего жидкого металла и нагрузкой машины (скорость вытяжки, умноженная на сечение заготовки) [36].

Ниже кристаллизатора расположена ЗВО (см. рис.1.1), где происходит дополнительное охлаждение слитка. В общем случае конструкция и режим работы вторичного охлаждения определяются маркой стали, сечением заготовки, а также скоростью разливки.

Как подчеркивается в работе [36] правильная организация теплового режима в ЗВО имеет важное значение, так как именно она определяет в значительной мере качество получаемой заготовки, а также образование внутренних трещин, осевой рыхлости и т.д.

Весьма существенным фактором является протяженность ЗВО. Суммарная длина кристаллизатора и ЗВО должна быть не меньше, чем глубина жидкой фазы в стальной заготовке для вертикальных МНЛЗ [30, 36, 54].

Непрерывная разливка стали получает широкое распространение и является одним из наиболее прогрессивных технологических процессов металлургии в настоящее время [28, 53]. Хотя сейчас в установках непрерывной разливки получают слитки более высокого качества по сравнению со старым способом разливки в изложницы, задача полного устранения различных дефектов, прочности непрерывных слитков остается пока нерешенной [52, 54].

Проблема получения качественных непрерывных слитков при затвердевании металлических расплавов является весьма актуальной. В настоящее время стоит задача определения оптимальных условий затвердевания слитков с целью управления формированием их структуры и свойств, которые связаны со многими сложными физическими и химическими явлениями [1, 7, 33, 36, 43, 47, 52, 54]. Рассмотрим основные дефекты и причины, приводящие к ним в процессе непрерывной разливки стали.

В зависимости от местоположения дефектов их подразделяют на наружные и внутренние. К числу наружных дефектов относятся продольные и поперечные трещины, заливины и завороты металла, подкорковые газовые пузыри и т.д. Из числа внутренних дефектов основными являются трещины и поры, осевая рыхлость и неметаллические включения, ликвационная неоднородность и т.д. [36].

Характерная особенность слитков, получаемых при непрерывном литье, состоит в образовании в них пористости, ухудшающей качество металла [32].

В.А.Ефимов в работе [31] указал, что решающее влияние на формирование физической и структурной неоднородностей стальных слитков оказывает интенсивность их охлаждения, характеризующаяся градиентом температур в затвердевшей корке ∇T и величиной интервала кристаллизации ΔT_k между температурами ликвидуса и солидуса. Если

$\frac{\nabla T}{\Delta T_k} \ll 1$, затвердевание происходит последовательно, а усадка проявляется

в виде сосредоточенной усадочной раковины. При $\frac{\nabla T}{\Delta T_k} \gg 1$, что характерно

для последних стадий затвердевания слитков из сталей, образующих двухфазную зону, происходит объемная кристаллизация, сопровождающаяся зарождением кристаллов по всему затвердевающему объему расплава и рассредоточением в нем усадочных пустот в виде пористости.

Результаты анализа работ [53,54] указывают на то, что пористость возрастает при увеличении скорости непрерывного литья, температурного интервала кристаллизации расплава и при уменьшении интенсивности отвода тепла в ЗВО, поскольку при этом происходит рост протяженности переходной зоны и растягивающие усилия, действующие на металл, становятся более значительными. С увеличением разветвленности дендритной структуры проницаемость переходной зоны убывает. Из-за этого

фильтрационное движение расплава замедляется, и он не успевает заполнять области разрежения, возникающие при усадке твердой фазы в процессе кристаллизации. Это приводит к увеличению относительной пористости, в качестве которой принимается величина εS_k , где ε - относительная усадка, S_k - сечение жидкой фазы, при котором давление в расплаве становится меньше давления газа, растворенного в расплаве [54].

Таким образом, рост пористости происходит при уменьшении проницаемости и увеличении протяженности двухфазной зоны в затвердевающем непрерывном слитке. В первом случае расплав не успевает заполнить области разрежения, возникающие при усадке твердой фазы в процессе кристаллизации, во втором - растягивающие усилия, действующие на расплав, становятся более значительными. Как отмечается в работах [52 - 54], для уменьшения пористости параметры процесса затвердевания необходимо выбирать так, чтобы протяженность двухфазной зоны была минимальной.

Среди тех и других дефектов наиболее распространенным и опасным дефектом являются трещины - нарушения сплошности тела. Наличие их в непрерывном слитке связано с проблемой правильного соотношения, с одной стороны, характеристик прочности кристаллизующегося материала и, с другой, - комплекса силовых факторов, воздействующих на слиток во время его затвердевания.

Для формирующегося слитка характерно одновременное существование условий кристаллизации и деформирования и, как следствие, существование деформируемой области, содержащей жидкую и твердую фазы. В связи с этим для анализа условий прочности кристаллизующегося слитка существенны две области - двухфазная область и область твердой фазы.

Механическое поведение кристаллизующегося слитка в двухфазной области связано с наличием фаз с резко различными механическими

свойствами. Оно является интересным примером механического поведения среды на границе своего термического разрушения. В общем случае двухфазная область слитка представляет собой гетерогенную систему с непрерывно изменяющимся соотношением жидкой и твердой фаз.

В работе [33] показано, что с повышением температуры предел прочности сталей плавно уменьшается и при переходе через солидус, вместе с появлением жидкой фазы, резко падает. Существенное влияние на механические свойства стали в двухфазном состоянии оказывают вредные примеси - сера и фосфор.

Разрушение сталей в двухфазном состоянии является хрупким и происходит путем зарождения и роста кристаллизационных трещин. В условиях формирования непрерывного слитка эти трещины подразделяются по местоположению в сечении на поверхностные, промежуточные, угловые и осевые [38]. Среди поверхностных трещин различают продольные и поперечные. Первые чаще встречаются на слитках прямоугольного и круглого сечения, вторые - на слитках круглого и квадратного сечения. Наиболее распространены промежуточные и осевые трещины. Первые имеют вид цепочек, расположенных либо перпендикулярно граням, либо по радиусу. Вторые поражают сердцевину слитка и имеют характерный паукообразный вид. Часть трещин, образующихся в течение кристаллизации, залечивается путем заполнения их остающейся жидкой фазой.

Горячие трещины образуются в слитке, затвердевающем в интервале температур, когда он находится в двухфазном состоянии и обладает низкими механическими свойствами. Известно, что нижняя температурная граница эффективного интервала затвердевания находится вблизи температуры солидуса, а верхняя - в зоне температур, при которых в расплаве образуется сплошной кристаллический скелет и начинают проявляться свойства твердого тела - линейная усадка, прочность, пластичность, и т.д. [50]. Поскольку основные механические свойства металла в этот период низки и не всегда компенсируют линейную усадку, то небольшое сопротивление

последней вызывает отрыв и отход кристаллов друг от друга. В том случае, когда возникшие межкристаллитные пространства не подпитываются жидкой фазой, возникают горячие трещины [9].

Корка, неравномерно формирующаяся по периметру слитка, находится в условиях постоянной механической нагрузки под действием внутренних и внешних факторов. К первым относятся напряжения, вызываемые силами тяжести и высокими разностями температур, а ко вторым- напряжения, образующиеся за счет трения поверхностей слитка и кристаллизатора, сил обжатия тянущими клетями, ферростатического давления. При этом ТН существуют как в двухфазной области, так и в затвердевшей оболочке слитка.

Расчеты с помощью разработанной [33] модели изотропного упругого тела показали, что увеличение абсолютной неравномерности ведет к сдвигу распределения ТН на различных участках утонченной и утолщенной корки помимо изменения в них абсолютных значений напряжений [50]. При этом на одном и том же расстоянии от поверхности слитка напряжения могут иметь усиления в районе фазовой границы для утонченного участка корки. Последнее приводит при достижении предела прочности материала вблизи точки солидуса к образованию трещин. Дальнейшее нагружение дефектного участка растягивающими деформациями, при условии превышения их над максимально допустимыми, может привести в области, близкой к температурам поверхности слитка, к полному разрыву оболочки.

Поскольку максимум неравномерности фронта затвердевания имеет место при выходе из кристаллизатора и в верхней части ЗВО, то прорыв затвердевшей оболочки в этом случае вызывает аварийную обстановку МНРС [36].

Способность двухфазного тела к деформации можно приблизительно оценить способностью его воспринимать межзеренную деформацию. Эта деформационная способность и служит характеристикой сопротивляемости двухфазной структуры механическому разрушению. В настоящее время еще

не имеется возможности описать ее с общих позиций непрерывного изменения свойств двухфазного тела внутри интервала кристаллизации от жидкого до полностью твердого состояния. Трудность заключается в том, что такое описание должно включить суммарное влияние многих факторов и, в особенности, влияния соотношения фаз, их топологию и специфическое влияние друг на друга.

Для количественного анализа процесса деформирования двухфазного тела в рамках механики сплошных сред необходимо знание его реологической модели. Работы в этом направлении находятся в начальной стадии [33]. Поэтому в данной монографии не исследуются проблемы качества непрерывного литья, определяемые только двухфазным состоянием слитка.

Механическое поведение кристаллизирующегося слитка в области твердой фазы зависят от кинетики кристаллизации и механических свойств стали в широком интервале температур ниже солидуса. В настоящее время известны многочисленные исследования этих свойств для углеродистых и легированных сталей [58]. Имеется выражение температурной зависимости сопротивления деформации σ металлов и сплавов [58]:

$$\sigma = \sigma^0 \exp(-bT),$$

где b и σ^0 - постоянные величины.

Монотонный характер этой зависимости может нарушаться вследствие рекристаллизации, деформационного старения и аллотропических превращений. Кроме температуры, сопротивление деформации сталей зависит еще от скорости деформирования. Подобные зависимости в настоящее время получены для многих сталей в широком диапазоне скоростей деформаций и интервале температур вплоть до линии солидуса.

Таким образом, имеющиеся экспериментальные данные позволяют сделать ряд следующих заключений [33]. Предел прочности сталей монотонно снижается с ростом температуры вплоть до солидуса. Характер

разрушения сталей зависит от температуры, скорости деформации и величины зерна.

Другой аспект проблемы прочности непрерывного слитка заключается в исследовании характера и уровня механического нагружения слитка в специфических условиях его формирования. Силовые факторы, способствующие нагружению слитка, можно подразделить на внутренние и внешние. К внутренним относятся ТН и напряжения, вызванные силой тяжести слитка. К внешним - напряжения, возникающие в слитке за счет сил трения и обжатия в кристаллизаторе и за счет сил бокового гидростатического давления столба жидкого металла. В этих условиях комплексное решение задачи о напряженном состоянии формирующегося непрерывного слитка оказывается затруднительным. Однако, воздействие отдельных силовых факторов может быть проанализировано достаточно полно.

На качество и наружные размеры непрерывного слитка оказывают большое влияние механические и ТН. Оболочка слитка, затвердевающего в процессе непрерывной разливки, находится в напряженном состоянии, которое вызывается следующими причинами [27]:

- ферростатическим давлением жидкого металла на оболочку и усадочными явлениями в этой оболочке при интенсивном охлаждении;
- процессом вытягивания заготовки, которому препятствуют силы трения корочки о стенки кристаллизатора;
- возникновением ТН вследствие перепада температур в корочке заготовки и неравномерного ее охлаждения по периметру и высоте.

Известно [27], что влияние интенсивности вторичного охлаждения заметно сказывается до определенной толщины корочки (55-60 мм). При последующем нарастании твердой фазы влияние охлаждения нивелируется термическим сопротивлением затвердевшего слоя металла. Поэтому, на верхние секции вторичного охлаждения дают наибольшее количество воды. Основное назначение нижних секций - не допускать разогрева поверхности

слитка. Поэтому в верхней части ЗВО, под кристаллизатором отмечается и более высокий темп падения температуры поверхности, что вызывает ТН, направленные противоположно действию ферростатического напора жидкого металла. Однако в процессе разливки в условиях высоких температур деформации оболочки не происходит. Она проявляется после прекращения подачи металла в кристаллизатор, когда температура поверхности слитка падает более интенсивно. В нижней части ЗВО температура поверхности падает незначительно или поддерживается постоянной, скорость охлаждения у фронта затвердевания становится больше, чем в наружных слоях.

Знаки напряжений меняются, внутренние слои претерпевают усадку в большей мере, чем наружные, что наряду с влиянием ферростатического давления способствует раздутию слитка.

Возникновение ТН и деформаций в твердой фазе слитка можно условно подразделить на две стадии: возникновение напряжений и деформаций до момента полного затвердевания слитка и остаточные напряжения в слитке (потенциальные деформации) к моменту выравнивания температур по его сечению. Исследование уровня нагружения слитка на каждой стадии имеет самостоятельное значение и связано с общей проблемой анализа ТН в затвердевающих средах.

Роль ТН при решении проблемы качества слитка является одной из определяющих [33, 52, 54]. При этом, важное значение приобретает вопрос правильного выбора режима охлаждения затвердевающего слитка. В настоящее время стоит задача определения оптимальных условий затвердевания слитков с целью управления формированием их структуры и свойств [1, 7, 33, 36, 43, 47, 52 - 54].

Основным физическим параметром, в значительной мере предопределяющим структуру и свойства затвердевающего металла, является температура. От ее распределения в расплаве зависят поля концентраций различных примесей (при заданном химическом составе), размеры и

строение переходной зоны твердо-жидкого состояния, усадка (определяет фильтрацию жидкого металла через “лес” дендритов и кинетику порообразования), распределение ТН. Таким образом, распределение температуры и ее градиентов в огромной степени влияют на формирование структуры и свойств литого металла. Поэтому критерии оптимальности, связанные с температурным полем затвердевающего расплава, являются первичными.

В монографиях Соболева В.В. и Трефилова П.М. [52 - 54] приводятся и обсуждаются первичные и вторичные критерии оптимальности процесса затвердевания слитка. Первичные критерии, представляют собой функционалы температурного поля, а вторичные критерии - связаны с полями концентраций, давления и ТН. Первичные критерии оптимальности являются базовыми, каждый из них выражает определенное требование к тепловым режимам затвердевания слитков.

Полная задача оптимизации температурных полей по управляющим факторам, в частности, по граничным условиям, не решена. Основная трудность для традиционных в теплофизике методов исследования процессов заключается в обратном характере задач оптимизации. Известно, что такие задачи некорректны в классическом смысле, они требуют применения специальных алгоритмов регуляризации. Авторы монографии [52] отмечают: «Поэтому нашей целью является фактически определение, строго говоря, не оптимальных, а по возможности рациональных режимов охлаждения и затвердевания слитков при непрерывном литье».

В работах [14-21,23,45,64,70] впервые для задач оптимизации формирования непрерывных слитков применен прямой экстремальный подход. Поставлена и решена задача оптимального управления теплоотводом в ЗВО по функционалам, рекомендованным в работах [52-54]. Полученные результаты подтверждают целесообразность и эффективность применения прямого экстремального подхода [59] к задачам оптимизации процессов затвердевания слитков.

Перейдем к конкретной постановке задачи оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка.

Согласно работам [52 - 54], для снижения ТН и предотвращения образования трещин, необходимо уменьшать градиенты температур по толщине корочки слитка, т.е. необходимо минимизировать следующий функционал:

$$J_1 = \int_0^Z \int_{-\xi}^{\xi} \int_{-a}^a (T_x^2 + T_y^2)^{1/2} dx dy dz, \quad (1.1)$$

где x, y - горизонтальные координаты, z - вертикальная координата, выходящая из начала слитка и направленная вниз по его оси (см. рис. 1.1), Z - нижняя граница слитка, ξ - поперечная координата линии солидуса в сечении слитка, компоненты градиента температур $T_x = \frac{\partial T}{\partial x}, T_y = \frac{\partial T}{\partial y}$.

Функционал (1.1) является первым в ряду первичных критериев оптимальности согласно классификации [52 - 54].

Основным фактором, влияющим на значение критерия оптимальности (1.1), является величина теплосъема в ЗВО слитка. Остановимся немного подробнее на технической стороне реализации процедуры вторичного охлаждения.

На сегодняшний день различают несколько способов теплоотвода – воздушный, водяной струйный и форсуночный, водяной кессонный. Последний способ считается наиболее перспективным. Здесь охладитель подается снизу в зазор между кожухом и слитком. В результате этого, поверхность слитка охлаждается равномерно по периметру его поперечного сечения проточным теплоносителем, протекающим в зазоре между слитком и кожухом в направлении, противоположном его движению.

Комбинированные способы теплоотвода применяются для создания различного оттока тепла по длине формирующегося слитка. Конкретный вид функции $u(z)$ оттока тепла из ЗВО определяется условием минимума

критерия оптимальности (1.1). Для того чтобы реализовать ту или иную функцию $u(z)$ отвода тепла, конструируют сложные кессонные охладители.

Современные конструкции вторичного охлаждения позволяют управлять оттоком тепла при формировании непрерывного слитка. Это означает, что минимум функционала (1.1) можно и целесообразно отыскивать в классе, практически, произвольных, а не только постоянных или кусочно-постоянных функций.

Теперь перейдем к описанию процесса теплопереноса в слитке, который позволит нам связать поток $u(z)$ с критерием оптимальности J_1 .

Формирование непрерывного слитка является сложным необратимым процессом, состоящим из ряда простых явлений, взаимодействующих между собой. Его необратимость связана с переносом тепла и массы, с внутренним движением в твердой и жидкой фазах. Оболочка слитка может быть изолированной - исключая обмен энергией и массой, закрытой - допускающей лишь обмен энергией и, наконец, открытой - прозрачной для энергии и массы. В связи с этим формирующийся слиток можно считать гетерогенной системой, где внешней средой является струя расплава, кристаллизатор, а также ЗВО и воздушная среда. Эта система заключена в открытую оболочку, представляющую совокупность условий контакта слитка с окружающей средой. В условиях установившегося процесса вытягивания непрерывного слитка окружающая среда находится в стационарном термическом состоянии и механическом равновесии.

Для внутреннего состояния слитка в общем случае характерно наличие двух фаз - твердой и жидкой, разделенных переходной двухфазной областью. В дальнейшем эту область, представляющую собой совокупность растущих кристаллов вместе с окружающей жидкостью, будем называть двухфазной зоной.

В жидкой фазе системы протекают процессы конвективного и диффузионного переноса массы и энергии, где движущими силами являются

струя металла, градиенты температур и избыточная концентрация примесей перед границей двухфазной зоны, градиент плотности расплава, обусловленный неоднородными полями температур и концентраций.

Затвердевание сплавов, используемых в промышленности, происходит в интервале температур ликвидус - солидус с образованием двухфазной зоны. На этот процесс, в первую очередь, влияют условия теплоотвода, а также химический состав стали, склонность к ее ликвации, температура и скорость разлива, размеры сечения слитка. При затвердевании стали образуются следующие структурные зоны: мелких равноосных кристаллов; столбчатых кристаллов; переходная, равноосных кристаллов; крупных равноосных кристаллов; осевая, V-образной неоднородности [44, 50]. Теоретически начало образования кристаллов связано с некоторым переохлаждением расплава ниже температуры ликвидуса, в результате чего образуются центры кристаллизации, которые дают начало для роста кристаллов.

Практически при затвердевании стали в промышленных условиях из-за наличия значительного количества неметаллических включений, играющих роль центров кристаллизации, переохлаждение составляет очень небольшую величину и можно считать, что начало двухфазной квазиравновесной зоны соответствует температуре ликвидуса. Полное окончание кристаллизации, соответствующее окончанию выделения теплоты кристаллизации, может быть принято по температуре солидуса [50], хотя и здесь должно иметь место некоторое переохлаждение. Образование и рост кристаллов внутри двухфазной квазиравновесной зоны обуславливают получаемую макроструктуру слитка.

Картина физических явлений, протекающих в двухфазной зоне, состоит из совокупности взаимосвязанных процессов теплопереноса; вязкого течения расплава по межкристаллическим промежуткам под действием фазовой усадки, тепловой и концентрационной гравитации; вязко - упруго - пластического деформирования растущих кристаллов в условиях неоднородного поля температур и поля давлений в остающейся жидкости.

В твердой фазе происходит перенос энергии к внешней границе слитка; протекают диффузионные процессы, снижающие химическую неоднородность фазы и процессы упругой деформации и вязкого и пластического течения среды. Здесь также действуют силы тяжести и трения в кристаллизаторе совместно с силами обжатия в тянущей клетке.

Перечисленные явления, действующие в разных областях слитка, сопрягаются на границах двухфазной зоны. Неодинаковые условия их протекания с учетом внешних воздействий имеют и различные исходы в отношении кинетики затвердевания и возникающей макроскопической структуры тела слитка - времени затвердевания; размеров и формы кристаллов; распределения по объему легирующих элементов сплава; наличия остаточных напряжений, пор, трещин и т.д. [33].

Теоретический анализ условий затвердевания слитка при непрерывном литье [48] в общем случае должен базироваться на сопряженной системе уравнений, описывающих различные физические процессы: конвективное движение расплава в незатвердевшей части слитка; зарождение и рост кристаллов в переохлажденной части расплава; перераспределение части примесей, газов и легирующих элементов расплава и т.д. Недостаточная изученность ряда физических явлений, сложность получающейся в общем случае системы дифференциальных уравнений, отсутствие точных значений многих параметров модели, которые заменяются эмпирическими константами и зависимостями, имеющими весьма ограниченную область применения и ограниченная мощность вычислительных машин вынуждают упрощать математическую формулировку задачи, описывающую кристаллизацию слитка.

Поэтому, в настоящей монографии для анализа теплового режима формирования непрерывного слитка используется упрощенный вариант этой модели, что вполне оправдано в связи с характерными особенностями рассматриваемых процессов. Формирование слитка обусловлено совместным протеканием процессов затвердевания и кристаллизации, которые являются

двумя неразрывными сторонами сложного процесса перехода металла из жидкого состояния в твердое.

Кристаллизация - это процесс формирования структуры металла с учетом всех сопровождающих его явлений. Под затвердеванием понимают процессы теплопереноса в условиях фазового превращения. В любой момент затвердевание и кристаллизация характеризуются одной и той же скоростью протекания, но роль их в процессе перехода из жидкого в твердое состояние неодинакова. Процесс кристаллизации связан с условиями возникновения и роста кристаллических зародышей, а процесс затвердевания, связанный прежде всего с теплоотводом, определяет окончательное формирование твердой фазы слитка.

Таким образом, теплоперенос в условиях фазового превращения определяет обе стороны процесса перехода металла из жидкого в твердое состояние. Тепловые условия в слитке (в частности, температурное поле слитка) являются главными факторами.

Процесс теплопереноса в слитке описывается в приближении “квазиравновесной” двухфазной зоны [54, 66, 67]. Эта теория не учитывает кинетическое и концентрационное переохлаждение расплава, т.к. их величины для реальных условий малы. По данным [30, 54, 66, 67] величина переохлаждения не превышает 1К. Поскольку эта величина во много раз меньше перепадов температур в затвердевающих непрерывных слитках, составляющих десятки и сотни градусов, то при математическом моделировании ею можно пренебречь. В указанной теории выявлена высокая скорость роста твердой фазы при малых отклонениях от равновесных условий. Это позволяет считать, что жидкая и твердая фазы находятся в равновесии в каждом элементарном объеме двухфазной зоны. Внутри двухфазной зоны в каждом физически малом объеме, содержащем обе фазы, концентрация жидкости и температура связаны условием равновесия, т.е. уравнением линии ликвидуса расплава:

$$T_L = T_L(\rho),$$

где T_L - температура ликвидуса, ρ - концентрация растворенного элемента. Это означает, что внутри двухфазной зоны нет переохлажденной жидкой или перегретой твердой фазы.

В систему уравнений теории квазиравновесной двухфазной зоны входят уравнения теплопроводности и переноса массы в жидкой части двухфазной области. Решение такой системы с соответствующими начальными и граничными условиями позволяет определить температурное поле в слитке, поле концентраций и доли твердой фазы. Однако решение этой системы уравнений также встречает ряд трудностей, основной из которых является отсутствие надежных данных некоторых параметров, входящих в эти уравнения [30].

Как уже отмечалось, наиболее разумно выделить из всех происходящих в непрерывном слитке процессов явление, играющее наиболее важную роль. Поскольку движущая сила затвердевания непрерывного слитка есть отвод тепла от его боковой поверхности, определяющими будут процессы теплообмена между поверхностью слитка и окружающей средой, теплоперенос внутри слитка с учетом скрытой теплоты кристаллизации.

Актуальной задачей технологии непрерывного литья является получение качественных стальных слитков круглого сечения, используемых в качестве заготовок для трубо- и колесопрокатного производства. При этом слиток и происходящие в нем процессы являются осесимметричными. Общая схема непрерывной разливки приведена на рис. 1.2. Система координат выбрана так, что плоскость $z = 0$ совпадает с зеркалом расплава, а ось z направлена вниз вдоль вытягиваемого слитка.

Слиток в процессе вытяжки проходит четыре зоны охлаждения: плотного контакта ($0 < z < z_1$), пульсирующего контакта ($z_1 < z < z_2$), газового зазора ($z_2 < z < z_c$), и вторичного охлаждения ($z_c < z < Z$) [49, 50].

На боковой поверхности слитка теплообмен определяется законом Ньютона, поэтому в зоне кристаллизатора задаются граничные условия третьего рода. В ЗВО задаются граничные условия второго рода, с неизвестным потоком u , который является функцией координаты z . Ввиду симметрии рассматривается область $0 \leq r \leq R$, где R - радиус слитка. При $r = 0$ задается условие симметрии температурного поля.

Уравнение для определения поля температур слитка имеет вид [52]:

$$C\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \text{ на } \Sigma = \{r, z : 0 < r < R, 0 < z < Z\}.$$

Эксперименты и расчеты показывают, что характерное время переходного процесса, определяемое временем установления стационарных условий кристаллизации непрерывных слитков, много меньше продолжительности цикла вертикального непрерывного литья [6, 53]. Поэтому для исследования тепловых режимов затвердевания рассматриваемых слитков следует решать стационарную тепловую задачу [51, 57]. При непрерывном литье конвективный теплоперенос вдоль оси слитка я на полтора - два порядка превышает кондуктивный осевой перенос тепла. Вследствие этого при анализе стационарных температурных полей членом со второй производной T по z в уравнении теплопроводности можно пренебречь. Также полагается, что влияние термоконвекции вынужденных циркуляционных потоков от воздействия струи и диффузия в твердой фазе пренебрежимо малы или достаточно точно учитываемы эффективными значениями теплоемкости и теплопроводности слитка [53].



Рис. 1.2. Схема непрерывного цилиндрического слитка

Поэтому уравнение теплопереноса, при вышеуказанных допущениях, принимает вид [53]:

$$C\rho V \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \quad (r, z) \in \Sigma = [0, R] \times [0, Z], \quad (1.2)$$

где $T(r, z)$ - температура слитка, V - скорость литья (скорость вытягивания слитка), $\rho(T)$ - плотность слитка, $C(T)$ и $\lambda(T)$ - эффективные теплоемкость и теплопроводность, которые в жидкой, двухфазной и твердой зонах равны:

$$\rho = \rho_l(1 - \xi) + \rho_s \xi; \quad \lambda = \lambda_l(1 - \xi) + \lambda_s \xi;$$

$$C = \begin{cases} C_l, & T \geq T_l; \\ C_l(1-\xi) + C_s\xi - W \frac{\partial \xi}{\partial T}, & T_l > T > T_s; \\ C_s, & T \leq T_s; \end{cases}$$

Здесь индексы l и s обозначают известные табличные значения параметров, соответственно, для жидкого и твердого состояния слитка. Температуры T_s и T_L - температуры солидус и ликвидус. Переменная ξ - доля твердой фазы, определяемая по уравнению для неравновесного рычага [41, 44, 54]:

$$\xi = 1 - \left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_L} \right)^{-\frac{1}{1-k}}, \quad (1.3)$$

где T_0 - температура заливаемого металла постоянная и равна $T_L + T'$, где T' - температура перегрева металла перед разливкой, k - равновесный коэффициент распределения примеси.

Под эффективной теплоемкостью и теплопроводностью подразумеваются такие C и λ , при которых без учета термоконвекции, вынужденных циркуляционных потоков и диффузии математическая модель (1.2) является достаточно точной. Введение эффективных параметров позволяет существенно упростить математическую модель и облегчить построение вычислительных алгоритмов, поскольку при этом нет необходимости рассчитывать гидродинамику и диффузию в слитке [41, 54].

Точное значение любых параметров модели, в том числе и эффективных, необходимо находить из решения задачи параметрической идентификации. В работе [8] решена задача идентификации коэффициента теплопроводности $\lambda(t)$ футеровки плавильной печи. Для этого был применен прямой экстремальный подход [59, 60], предлагаемый для решения задачи оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка.

Граничные условия для уравнения (1.2) имеют вид:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad T \Big|_{\substack{0 \leq r \leq R \\ z=0}} = T_0, \quad \lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma(T - T_c),$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_S = u, \quad S = \{r, z : r = R, z_c < z < Z\}, \quad (1.4)$$

где z_c - нижняя граница кристаллизатора (см. рис. 1.2), T_c - температура воды в кристаллизаторе, γ - коэффициент теплопередачи в зоне кристаллизатора, $u(z)$ - поток тепла в ЗВО.

Краевые условия (1.4) определяют процессы теплообмена на боковой поверхности слитка. Коэффициент теплопередачи γ является функцией продольной координаты z .

Выражения для тепловых потоков на поверхности в кристаллизаторе нетрудно представить в виде соотношения, входящего в граничные условия (1.4) с коэффициентом теплоотдачи, зависящим от температуры. Поэтому запись краевых условий в виде (1.4) универсальна и полностью соответствует реальным условиям, если считать, что величина γ является, в общем случае, функцией координаты z и температуры [54].

Таким образом, задача оптимизации процесса затвердевания непрерывного слитка и, в частности, оптимизация полей температур слитка формулируется следующим образом. Необходимо найти оптимальный поток тепла $u(z)$, в граничном условии (1.4), который минимизирует ТН в форме функционала (1.1).

Сформулированная задача оптимального управления решается прямыми алгоритмами минимизации целевых функционалов [59], при наличии дополнительных ограничений на объем жидкой лунки, температуру выхода металла из ЗВО, совместного ограничения и ограничения на степень дисперсности дендритной структуры слитка. Данные ограничения будут рассмотрены в следующем параграфе.

1.2. Анализ критериев качества оптимизации

Остановимся подробнее на первичных критериях оптимальности, на основе которых в настоящей монографии определяются оптимальные режимы охлаждения непрерывного слитка. Согласно [54] структура и свойства металла зависят от значений температуры, ее градиентов и их комбинаций в твердой фазе S' непрерывного слитка.

Первичные критерии оптимальности вводятся на основании качественных рекомендаций о желаемом характере распределения температуры в затвердевающих непрерывных слитках. Время выхода на установившиеся условия затвердевания непрерывных слитков во многих практически важных случаях на порядок меньше продолжительности характерного цикла непрерывного литья [28, 52, 54], поэтому зависимостью температуры от времени можно пренебречь и рассматривать стационарные поля. Это всегда справедливо при непрерывной разливке стали. Перейдем к математической формулировке критериев качества оптимальности.

Согласно работам [52 - 54], для снижения ТН и предотвращения образования трещин, необходимо уменьшать градиенты температур по толщине корочки слитка, т.е. необходимо минимизировать следующий функционал:

$$J_1 = \int_0^Z \int_{\xi}^a \int_{\xi}^b (T_x^2 + T_y^2)^{1/2} dx dy dz, \quad (1.5)$$

где x, y - горизонтальные координаты, z - вертикальная координата, выходящая из начала слитка и направленная вниз по его оси (см. рис. 1.1), Z - нижняя граница слитка, ξ - поперечная координата линии солидуса в

сечении слитка, компоненты градиента температур $T_x = \frac{\partial T}{\partial x}, T_y = \frac{\partial T}{\partial y}$.

Функционал (1.5) является первым в ряду первичных критериев оптимальности согласно классификации [52 - 54].

В переходной зоне твердо-жидкого состояния при кристаллизации образуются парогазовые полости в виде пузырьков, что приводит к возникновению пористой структуры непрерывного слитка [54]. Результаты исследований [53, 54] указывают на то, что пористость слитка возрастает при уменьшении интенсивности отвода тепла в ЗВО, поскольку при этом происходит рост протяженности переходной зоны твердо-жидкого состояния и растягивающие усилия, действующие на металл, становятся более значительными. Очевидно, что рост протяженности переходной зоны влечет за собой увеличение объема двухфазного состояния. Объем жидкой лунки, определяемой по температуре солидус в непрерывном слитке, зависит от объема двухфазного состояния. Поэтому, для уменьшения пористости необходимо организовывать такие режимы охлаждения в ЗВО, при которых объем жидкой лунки будет минимальным [52 - 54].

Объем жидкой лунки в работах [52 - 54] определяется следующим функционалом:

$$J_2 = \int_0^H \varphi dz, \quad (1.6)$$

где H - глубина жидкой лунки по температуре солидус, φ - площадь сечения жидкой фазы при текущем z .

Теперь сформулируем общие требования к охлаждению слитка. Обычно они формулируются в виде условий к температурному полю поверхности слитка.

Согласно работам [29, 30, 49]:

- температура поверхности непрерывного слитка должна снижаться в ЗВО непрерывно вплоть до окончания затвердевания с целью снижения до минимума растягивающих напряжений во внутренних слоях;

- распределение температуры по периметру слитка должно быть равномерным;

- температура поверхности заготовки в конце ЗВО должна быть не выше $T = 950^{\circ}C$ [26].

Последнее требование можно рассматривать как ограничение на температуру слитка при выходе из ЗВО:

$$T \leq T_{\max}. \quad (1.7)$$

Это ограничение, как сказано выше, присутствует на поверхности слитка. При этом, никаких ограничений на температуру слитка по всему сечению не вводится. Поэтому можно распространить это ограничение по всему сечению слитка при выходе из ЗВО. Тогда ограничение на температуру по сечению слитка будет иметь вид:

$$T \Big|_{\substack{0 < r < R \\ z = Z}} \leq T_{ad}, \quad (1.8)$$

где T_{ad} максимально допустимая температура, равная T_{\max} .

Ограничение (1.8) на температуру слитка может быть реализовано в виде штрафного функционала, добавляемого к минимизируемым целевым функционалам. Задача штрафного функционала возрастать при приближении найденной температуры $T(0 < r < R, Z)$ к максимально допустимой температуре T_{ad} , и тем самым “отбрасывать решение назад”, от температуры T_{ad} . При этом целевой функционал принимает вид:

$$J = J_{old} + \chi J_F, \quad (1.9)$$

где J_{old} -исходный (“старый”) целевой функционал, который является критерием качества оптимизации без ограничения на температуру (1.8), J_F - штрафной функционал, χ -весовой коэффициент, определяющий степень влияния штрафного функционала. В качестве исходного (“старого”) функционала может присутствовать функционал J_1 (если ставится цель минимизировать градиенты температуры в твердой корочке слитка) или функционал J_2 (если стоит задача минимизации объема жидкой лунки).

Из выражения (1.9) видно, что явная форма ограничения на температуру в данном случае исчезает. В настоящей монографии ограничение (1.8) реализуется в виде функционала:

$$J_F = \int_0^R I_F dr, \quad (1.10)$$

где I_F - штрафная функция, относительно аргумента T с параметром T_{ad} . Конкретный вид штрафной функции может быть довольно произвольным. Выбор функции I_F - это дело вкуса и интуиции каждого исследователя. Различают три типа штрафных функций – внешние, внутренние и смешанные. Первые из них должны возрастать (штрафовать решение) при нарушении ограничения. Вторые же возрастают при приближении к границе допустимого множества состояний и достигают бесконечно большой величины на границе. Смешанные штрафы обеспечивают конечное возрастание функции I_F при приближении и при переходе через границу допустимого множества.

В настоящей монографии используется внешняя штрафная функция, которая должна возрастать (штрафовать решение) при нарушении ограничения (1.8), т.е. когда температура в завершении ЗВО превышает максимально допустимую температуру $T(0 < r < R, z = Z) > T_{ad}$. Внешний штраф определяется в виде функции:

$$I_F = \begin{cases} (T - T_{ad})^2, & T > T_{ad}; \\ 0, & T < T_{ad}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Целевой функционал (1.5) в цилиндрической системе координат принимает вид:

$$J_3 = \int_{S'} \left| \frac{dT}{dr} \right| dS', \dots dS' = r dr dz, \quad (1.12)$$

где S' - область твердой фазы слитка в ЗВО (черные точки на рис. 1.2). Функционал (1.12) не дифференцируем. В работах [52 - 54] для оптимизации

теплофизических процессов при затвердевании непрерывных слитков вводятся только не дифференцируемые функционалы температурного поля. Примером может служить функционал (1.12). В настоящей монографии исследуется задача оптимизации относительно дифференцируемой квадратичной формы критерия (1.12), т.е. далее мы будем рассматривать целевой функционал:

$$J_4 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz, \quad (1.13)$$

где θ - функция Хевисайда, r_s - радиус границы твердой фазы.

Постановка задачи оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка рассмотрена в параграфе 2 этого раздела. В этом же параграфе проанализируем введенные критерии оптимальности. Для этого кратко сформулируем задачу оптимизации. Необходимо найти оптимальный поток $u(z)$ в ЗВО, который минимизирует ТН в форме функционала (1.13).

В работах [52 - 54] вводится функционал (2.8) с целью уменьшения градиентов температуры по толщине корочки слитка для предотвращения образования трещин. Однако, как отмечалось в параграфе 1, задача в этих работах решается как прямая, в результате которой находятся рациональные режимы охлаждения непрерывных слитков. Здесь же отметим, что в настоящей монографии задача минимизации функционала (1.13) рассматривается как обратная.

Очевидно, что минимум функционала (1.13) достигается при $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$,

что обеспечит оптимальный теплоотвод $u(z)$, при котором исчезнет твердая фаза (жидкая лунка распространяется на весь слиток). Это означает, что целевой функционал (1.13) обязательно должен минимизироваться при некоторых дополнительных ограничениях. На необходимость введения ограничений при минимизации функционала (2.9) указано в работах [14 - 21,

23, 70], в которых приведена новая корректная формулировка задачи оптимизации полей температур непрерывного слитка.

В настоящей монографии, как и в работах [15, 20, 45, 70], принято ограничение на температуру слитка при выходе из ЗВО (1.8). Как отмечалось выше, реализацию этого ограничения будем осуществлять посредством введения штрафного функционала J_F . Тогда задача минимизации функционала (1.13) с учетом ограничения на температуру выхода слитка из ЗВО (1.8) преобразуется в задачу минимизации функционала:

$$J_5 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz + \chi \int_0^R I_F dr. \quad (1.14)$$

Из выражения (1.14) видно, что явная форма ограничения (1.7) в этом случае исчезает.

Рассмотрим функционал (1.6), который определяет объем жидкой лунки. Для решения задачи оптимизации необходимо определять градиент целевого функционала ∇J_2 , для определения которого необходимо варьировать целевой функционал, в частности функционал (1.6), по температуре T . В функционале (1.6) площадь сечения жидкой фазы ϕ зависит от температуры, но эта зависимость в явной форме неизвестна. Поэтому, возникают сложности с вариацией этого функционала, т.к. она будет содержать производную $\frac{\partial \phi}{\partial T}$, которая неявно зависит от температуры.

Поэтому запишем этот функционал в виде:

$$J_6 = \int_0^R \int_0^Z \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz. \quad (1.15)$$

Но вариация этого функционала по температуре равна нулю, т.к. в такой форме функционал не зависит T . Поэтому тета-функция θ должна зависеть от температуры T . Окончательно получим:

$$J_7 = \int_0^R \int_0^Z \theta(T - T_s) \theta(z - z_c) r dr dz, \quad (1.16)$$

где $\theta(T - T_s) = 1$, при $T \leq T_s$ и $\theta(T - T_s) = 0$ в противном случае.

Как уже отмечалось, в работах [52 - 54] вводится функционал (1.6) определяющий объем жидкой лунки и рассматривается задача об организации режимов охлаждения в ЗВО, при которых объем жидкой лунки будет минимальным для уменьшения пористости слитка.

Очевидно, что минимизация объема жидкой лунки в форме функционала (1.16) приведет к очень высоким градиентам температуры в твердой части слитка, и очень низкой (отрицательной!) температуре слитка. Последнее следствие является далеким от реальности. Поэтому задача минимизации объема жидкой лунки в форме функционала J_7 без ограничений не имеет смысла.

Имеет смысл использовать требование минимальности объема жидкой лунки в форме функционала (1.16) в качестве ограничения в задаче минимизации ТН в форме функционала (1.13). Действительно, как уже отмечалось, при минимизации ТН в твердой части слитка, возрастает объем жидкой лунки, а при минимизации объема жидкой лунки в форме функционала (1.16) возрастают ТН в твердой части слитка.

Исходя из этого, задачу минимизации ТН в твердой фазе слитка можно сформулировать следующим образом. Необходимо найти оптимальный поток в ЗВО, который минимизирует ТН при ограничении на объем жидкой лунки в виде функционала:

$$J_8 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz + \chi_1 I_7. \quad (1.17)$$

В работах [14, 42] впервые рассмотрена задача минимизации ТН в форме функционала (1.17) с ограничением на объем жидкой лунки. Как будет показано далее, при минимизации функционала (1.17) температура слитка на выходе из ЗВО превышает предельно допустимую температуру T_{ad} . Чтобы слиток не разогревался на выходе из ЗВО, необходимо учесть ограничение

(1.8) в форме штрафного функционала J_F . Тогда минимизируемый функционал J_8 примет вид:

$$J_9 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz + \chi_1 I_7 + \chi_2 J_F. \quad (1.18)$$

Важным показателем качества литого металла является плотность кристаллического строения, т.е. дисперсность дендритной структуры, которая формируется при затвердевании в двухфазной переходной зоне. Повышенная дисперсность дендритного строения ухудшает качество слитка [4] и для того чтобы добиться оптимального распространения дендритных осей, необходимо минимизировать функционал, характеризующий степень дисперсности дендритной структуры [1]:

$$J_{10} = \int_0^R \int_0^Z \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} \theta(r - r_L) \theta(r - r_s) r dr dz. \quad (1.19)$$

Задача формулируется следующим образом. Необходимо найти оптимальный поток тепла $u(z)$ в граничном условии (1.4), который минимизирует уровень дисперсности в форме функционала J_{10} . При этом необходимо получить и минимальные градиенты температур в твердой части металла. Кроме того, необходимо учесть ограничение на температуру выхода металла из ЗВО, которая не должна превышать $T_{\max} = 1223 K$ [26, 27]. Последнее ограничение учитывалось в виде штрафного функционала (1.10).

Таким образом, получаем функционал $J_{11} = \chi_0 J_8 + \chi_2 J_{10} + \chi_1 J_2$, т.е.

$$J_{11}(u) = \chi_0 \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) r dr dz + \\ + \chi_2 \int_0^R \int_0^Z \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} \theta(r - r_L) \theta(z - z_s) r dr dz + \chi_1 J_2. \quad (1.20)$$

Проанализируем возможность определения оптимальных режимов охлаждения $u(z)$ для разных значений весовых коэффициентов χ_0, χ_1, χ_2 .

Пусть $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Тогда задача заключается в определении такого теплового потока $u(z)$ в ЗВО при реализации которого, в твердой части слитка будут наблюдаться минимальные градиенты температур. Очевидно, что в этом случае минимум функционала (1.20) достигается при $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$.

Это означает, что минимизация функционала J обеспечит оптимальный теплоотвод, при котором исчезнет твердая фаза, слиток перейдет в двухфазное состояние. Поэтому, результаты минимизации функционала J при $\chi_1 = \chi_2 = 0$ не представляют практического интереса.

В этом параграфе введены и проанализированы критерии качества, на основании которых будут рассчитаны оптимальные режимы охлаждения непрерывного слитка.

1.3. Идентификация теплофизических параметров в моделях формирования отливок

В настоящее время эффективность использования математического моделирования как метода исследования гидродинамики и тепломассопереноса в затвердевающих отливках является общепризнанной. Целью математического моделирования кристаллизации отливок является создание эффективных автоматизированных технологических режимов, обеспечивающих формирование качественных литых заготовок, т.е. решение задачи оптимального управления тепловыми процессами в системах автоматизированного проектирования и автоматизированных системах управления тепловыми процессами.

Известно, что точность математического моделирования процессов затвердевания, в основном, определяется точностью задания параметров-коэффициентов, входящих в уравнения конвекции и тепломассопереноса. Такие уравнения довольно громоздки, при численном решении требуют значительных компьютерных ресурсов и не гарантируют желаемой точности расчетов из-за многочисленных эмпирических, полуэмпирических параметров-коэффициентов. Решение задач оптимизации, автоматизации на их основе может быть не эффективным.

Значительное снижение вычислительных затрат может быть достигнуто введением эффективных коэффициентов теплопроводности и диффузии, что позволяет отказаться от расчета уравнений конвекции и существенно снизить число экспериментально определяемых параметров. Естественно, что такие коэффициенты не могут быть измерены непосредственно. Их достоверные и точные значения могут быть получены из решения соответствующих задач параметрической идентификации.

Параметрическая идентификация модели – это определение оптимальных значений параметров модели по результатам наблюдений за функционированием моделируемого объекта. В этом параграфе мы рассмотрим постановку задачи идентификации эффективного коэффициента теплопроводности λ_e стальной отливки.

В изложницу заливается жидкий металл при температуре T_0 . Постановка задачи осуществляется при следующих предположениях: между заготовкой и литейной оснасткой имеет место идеальный контакт (отсутствие теплоизоляционной смазки); отсутствие тепловой конвекции в расплаве; отсутствие движения расплава; соотношение линейных размеров отливки позволяет рассматривать задачу в одномерной постановке.

Процесс теплопередачи в начальной стадии затвердевания отливки описывается уравнением:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0, \quad (t, x) \in (t_a, t_b) \times (x_0, x_1), \quad (1.21)$$

где C , ρ теплоемкость и плотность расплава, соответственно, T - температура, x_0 - центр отливки, x_1 - граница «отливка-оснастка», x_2 - граница «оснастка-окружающая среда».

Поскольку эффективная теплопроводность λ_e в расплаве, при $x \in (x_0, x_1)$, считается однородной, а в стенке изложницы при $x \in (x_1, x_2)$ известной и равной λ_1 , то можно записать

$$\lambda(x, t) = \lambda_1 + [\lambda_e(t) - \lambda_1] \theta(x - x_1). \quad (1.22)$$

При этом уравнение (1.21) преобразуется к виду:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (\lambda_e - \lambda_1) \delta(x_1 - x) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (t, x) \in \Sigma. \quad (1.23)$$

Здесь Θ , δ - функция Хевисайда и дельта-функция, соответственно.

Граничные условия следующие:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0, \quad \lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_2} = -\alpha(T - T_{cp}), \quad (1.24)$$

где α - известный коэффициент теплоотдачи, T_{cp} - температура окружающей среды.

Начальное условие:

$$T(t_a, x) = T_a(x), \quad x \in [x_0, x_2]. \quad (1.25)$$

Качество идентификации эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_e(t)$ будем оценивать по расхождению экспериментально определенной температуры расплава $T_e(t)$ в некоторой точке x_c . При этом критерий качества параметрической идентификации принимает вид функционала

$$J(\lambda_e) = \int_{t_a}^{t_b} [T(t, x_c) - T_e(t, x_c)]^2 dt. \quad (1.26)$$

Большинство обратных задач, к числу которых относятся задачи идентификации, являются некорректными. Именно это обстоятельство в течение длительного времени сдерживало развитие методов их решения. В настоящей монографии задача идентификации эффективного коэффициента теплопроводности расплава λ_e решается как экстремальная задача: необходимо найти параметр $\lambda_e(t)$ в уравнении (1.21), доставляющий минимум функционалу (1.26).

Новые экстремальные алгоритмы, используемые далее для прямой минимизации функционалов, позволяют относительно просто контролировать корректность решения обратных задач. В работах [59, 62] доказаны регуляризирующие свойства таких алгоритмов. Именно регуляризация последовательных приближений искомых параметров позволяет достичь корректного решения в задачах идентификации.

Раздел 2

НАПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Традиционные подходы к задачам оптимизации

Получение качественного металла - одна из ключевых задач современной технологии непрерывного литья. Многие свойства металла формируются в процессе их затвердевания [1, 4 - 6, 10, 24]. Поэтому важно разработать методы определения оптимальных условий затвердевания с целью выработки рекомендаций по управлению формированием структуры и свойств литого металла [52 - 54]. Эти рекомендации можно установить по так называемым априорным критериям оптимальности температурных полей в кристаллизующихся расплавах, решая прямую задачу оптимизации и используя в качестве управляющих параметров интенсивность теплоотвода, внешние воздействия и т.д. [11, 52 - 54]. Такой подход развивается в [5, 7, 10, 35, 36, 40, 43, 47, 52 - 56, 68] применительно к металлу, получаемому при непрерывном литье.

В настоящее время важной задачей является определение теплофизических параметров и режимов охлаждения непрерывных слитков, при которых была бы минимальной вероятность образования дефектов в слитке.

Как отмечается в работе [30] для освоения повышенных скоростей разливки и получения качественных отливок необходимо всестороннее исследование теплофизических процессов при затвердевании непрерывных слитков, а также его напряженно-деформированного состояния с целью

определения оптимальных тепловых режимов в зависимости от различных параметров непрерывной разливки. В связи с большими трудностями выбора и поддающихся расчету критериев до настоящего времени еще не создана достаточно общая и обоснованная методика определения оптимальных режимов затвердевания непрерывных слитков.

Имеются два основных подхода для решения задач оптимизации процесса затвердевания [5, 40, 52, 54].

Первый подход, при котором исследуемый объект представляют в виде “черного ящика“, опирается на аппарат математической статистики, теории распознавания образов и кибернетики. При этом не требуется подробный анализ сложных явлений, происходящих в затвердевающих слитках, о которых наши знания пока весьма ограничены. В этом случае нужно установить корреляционные связи между управляемыми параметрами на входе системы и параметрами на ее выходе, определяющими качество готовой продукции. При непрерывном литье в качестве входных параметров могут быть использованы скорость литья, температура перегрева металла перед разливкой, интенсивность теплосъема в кристаллизаторе и ЗВО, связанную с использованием конкретного теплоносителя, теплофизические свойства металла, температура охлаждающего агента, гидродинамика охлаждения и т.д. В качестве выходных величин, характеризующих качество готовой продукции, можно принять параметры, определяющие уровень дисперсности структуры, ликвации, пористости, наличие трещин, строение и количество неметаллических включений, механические, электрические, магнитные свойства и т.д. в зависимости от названия металла.

Описанный подход “игры в черный ящик“, основанный на пассивной обработке статистических данных, может быть эффективно использован только в случае установившейся технологии. При ее изменении весь накопленный ранее статистический материал теряет практическую ценность и нужно начинать все сначала.

Второй, активный подход к проблеме оптимизации основан на тщательном изучении процессов, происходящих при затвердевании, и математическом моделировании их с помощью компьютеров. При этом можно сформулировать различные критерии, представляющие собой функционалы полей температур, концентраций, давления и т.д., которые могут служить мерой оптимальности конкретных физических процессов. Задача оптимизации в этом случае заключается в поддержании оптимальных значений критериев, что может выражаться в виде требования минимальности некоторых целевых функционалов, которые зависят от параметров управления (интенсивности теплосъема, внешних полевых воздействий и т.д.).

Такой подход основан на достаточно хорошем знании физико-химических процессов, протекающих при затвердевании расплавов, обладает гибкостью и может быть использован при анализе новых технологий и новых способов литья [52, 54]. Именно этот подход рассматривается в данной монографии.

В работах [5, 7, 10, 35, 36, 40, 43, 47, 52 - 56, 68], рассматриваемая задача нахождения оптимальных условий затвердевания непрерывных слитков является прямой, т.е. на данном множестве управляющих факторов (условий теплосъема, внешних воздействий и т.д.) определяются температурные поля в слитках, для установления степени оптимальности которых используются введенные критерии. При этом множество факторов управления (режимов охлаждения, внешних воздействий и т.д.) существенно ограничено рамками существующей технологии непрерывного литья и особенностями конструкции соответствующих технологических агрегатов.

В качестве примера рассмотрим анализ оптимальных тепловых режимов затвердевания непрерывных стальных цилиндрических слитков, проведенный в работе [52] на основании следующих критериев оптимальности:

$$I_1 = \int_0^H \int_{S_T} T_r r dr dz, \quad I_2 = \int_H^L \int_0^H \left| \frac{T_z}{T_r} \right| r dr dz,$$

$$I_3 = \int_0^L \int_{S_T} T_z \left[S_{Tn} \int_{S_T} T_z dr \right]^{-1} r dr dz,$$

$$I_4 = \int_0^L \int_{S_T} |T_{rz}| r dr dz, \quad I_5 = \int_0^H \varphi dz,$$

$$I_6 = \int_{\psi} \left[(T_r^2 + T_z^2)^{1/2} (1 + \xi_z^2)^{-1/2} [\xi_z] \right]^{-1/2}.$$

Здесь φ - площадь сечения жидкой фазы при текущем z , S_T , S_{Tn} - сечение и площадь сечения твердой фазы при текущем z , S - внешняя поверхность слитка от $z=0$ до $z=H$, где H - глубина жидкой лунки, ψ - объем двухфазной зоны, ограниченной поверхностями ликвидуса и солидуса, ξ - поперечная координата линии солидуса в сечении слитка, L - периметр поперечного сечения слитка, компоненты градиента температур

$$T_r = \frac{\partial T}{\partial r}, \quad T_z = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad T_{rz} = \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z}.$$

Критерий I_1 вводится, исходя из требования небольших градиентов температуры по толщине корочки слитка для предотвращения образования трещин и искажения профиля слитка. Введение критерия I_2 обусловлено потребностью обеспечения интенсивного поперечного отвода тепла из области слитка под лункой и стремлением к наиболее пологому профилю дна лунки, это необходимо для уменьшения осевой пористости. О степени выравнивания скорости охлаждения в поперечном сечении слитка можно судить по относительному отклонению величины T_z для различных элементов объема затвердевающего металла от ее среднего значения по сечению твердой части слитка. Эту равномерность охлаждения, которая необходима для предотвращения образования трещин и искажения профиля

слитка, определяет критерий I_3 . Критерий I_4 вводится, исходя из рекомендации о желательности приблизительной прямолинейности распределения кривых температуры в продольном сечении затвердевшей части слитка и примерной эквидистантности этих кривых. Это необходимо для предотвращения образования трещин и искажения профиля слитка. Критерий I_5 определяет объем жидкой лунки. Минимальность I_5 необходима для уменьшения осевой пористости. Минимальность критерия I_6 необходима для снижения ТН.

Введенные критерии качества используются для установления степени оптимальности тепловых режимов затвердевания непрерывных стальных слитков круглого сечения при различных распределениях теплосъема по высоте в ЗВО. При различных распределениях теплосъема в ЗВО рассчитаны критерии $I_1 - I_6$, которые сведены в соответствующую таблицу [52], в которой показаны значения указанных выше критериев оптимальности в зависимости от теплосъема α , постоянного по высоте ЗВО. В этой же таблице приведены значения глубины жидкой лунки H , которая уменьшается с ростом α . Все рассмотренные критерии, кроме I_5 , I_6 монотонно растут с увеличением α . Это связано с ростом соответствующих температурных градиентов. Уменьшение критерия I_5 при увеличении α обусловлено убыванием глубины жидкой лунки H . Скорость изменения всех критериев уменьшается с ростом α , происходит как бы их “насыщение”.

Далее приводятся значения критериев оптимальности и глубины жидкой лунки при различных параметрах линейного и кусочно-линейного распределений интенсивности теплосъема α по высоте слитка.

На основании рассчитанных значений критериев оптимальности анализируются режимы затвердевания следующим образом. По совокупности значений $I_1 - I_6$, а также из значений отдельных критериев,

подбираются режимы охлаждения, рациональные с точки зрения получения тех или иных свойств слитка. Например, наименьшие ТН в слитке должны возникать, когда критерий I_6 имеет наименьшие значения. Это значит, что для получения минимальных ТН в слитке интенсивность теплосъема в зоне вторичного охлаждения должна возрастать по высоте в направлении вытягивания непрерывного слитка. Этот результат согласуется с данными работы [68], в которой путем решения задачи Стефана с условием минимальности ТН [35] показано, что для этого необходимо создать режим с увеличивающейся вдоль оси слитка интенсивностью охлаждения.

Иногда исследователи решают задачи оптимизации для отдельных конкретных случаев, оценивают оптимальный режим охлаждения и дают рекомендации по его усовершенствованию на основании расчета величины ТН [30]. Очевидно, оптимальным можно считать такой тепловой режим, при котором обеспечивается максимальная скорость затвердевания, когда ТН в слитке не превышают допустимых пределов, определяемых эмпирическим путем.

Однако вследствие сложности процессов и их математического описания комплексное решение задачи о напряженном состоянии затвердевающего непрерывного слитка с одновременным учетом усадочных, термических и механических напряжений встречает значительные трудности [30]. Получение точного решения также затрудняется из-за недостатка данных по термомеханическим характеристикам сталей при высоких температурах. Имеющиеся в настоящее время математические модели напряженного состояния непрерывных слитков позволяют проводить качественное исследование режимов охлаждения, а также сравнительный анализ различных вариантов [30].

В качестве примера задачи оптимизации по определению и усовершенствованию оптимального режима охлаждения на основании расчета величины ТН рассмотрим алгоритм выбора оптимального режима

охлаждения непрерывного слитка, предложенный в работе [33]. Проведенный в этой работе анализ условий механического нагружения формирующегося слитка касается воздействия только одного силового фактора - наличия неоднородного температурного поля в теле слитка. Учет других силовых факторов- силы гидродинамического давления, силы трения в кристалле, сил обжатия в тянущей клетке в этой работе и в монографии не рассматривается. Вместе с тем роль ТН при решении проблемы качества является одной из определяющих. При этом важное значение приобретает вопрос правильного выбора режима охлаждения затвердевающего слитка. Перед его рассмотрением в работе [33] отмечаются следующие положения:

1. ТН, возникающие в теле слитка, знакопеременны.
2. Напряженное состояние затвердевающего слитка сильно зависит от формы его сечения. Выбирая в качестве сравнительного условия равенство периметров сечений слитков, можно расположить последние по убывающему значению максимальных растягивающих напряжений в сечении в следующий ряд: слиток сплошного круглого сечения, плоский слиток, полый слиток круглого сечения.

Далее, используя эти положения, определяется оптимальный режим теплообмена слитка в ЗВО. Отправным положением здесь является, с одной стороны, требование высокой скорости процесса вытягивания слитка, а с другой - требование выполнения условий прочности материала слитка. Оптимальный режим теплообмена достигается в условиях, когда интенсивность вторичного охлаждения в течении времени затвердевания слитка вызывает напряжения (в случае хрупкого материала) и деформации (в случае вязкого материала), близкие к предельным в соответствии с условиями прочности:

$$\varepsilon(T) < \varepsilon_{\max}, \text{ при } \varepsilon < \varepsilon_{\max}$$

$$\sigma(T) < \sigma_{\max}, \text{ при } \sigma < \sigma_{\max}$$

где ε -деформации, σ -напряжения.

Разрушение будет хрупким, если $\frac{\sigma}{E} = \varepsilon_{\max}$, и вязким, если $\frac{\sigma}{E} < \varepsilon_{\max}$.

Здесь E - модуль продольной упругости.

На основе этих представлений определены оптимальные режимы вторичного охлаждения плоского слитка и слитка круглого сечения. Для этого находится тепловой поток на поверхности слитков из решения задачи затвердевания слитка, постановка которой отвечает модели вырожденной двухфазной зоны. Это означает замену данной зоны некоторой гладкой изотермической поверхностью с сосредоточенным источником тепла.

Подведем итоги. В выше изложенных примерах определяются, вообще говоря, не оптимальные, а рациональные условия затвердевания непрерывных слитков. В работах [52, 54] оптимизация осуществляется относительно вектора с одной или двумя компонентами, т.е. в конечномерных пространствах.

В работе [33] определены оптимальные режимы затвердевания непрерывных слитков в результате решения задачи затвердевания при условиях, когда интенсивность вторичного охлаждения вызывает напряжения, близкие к предельным. В этой работе решение задачи также определяется в конечномерном пространстве. Оптимальные режимы затвердевания здесь суть вектор с одной компонентой.

В большинстве случаев задачи оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывных слитков подменялись задачами подбора “разумных” режимов охлаждения. Часто модели управления упрощаются до физически нереальных ситуаций – пространственно распределенные и нестационарные управляемые параметры модели заменяются константами. При этом задачи минимизации функционалов превращаются в задачи минимизации функций одной – двух переменных. В работах, в которых задача поставлена как оптимизационная в бесконечномерном пространстве, исследования касаются только

теоретических вопросов, а конкретные численные результаты, представляющие практический интерес, не получены.

Относительно существующих на сегодня методов идентификации параметров дифференциальных уравнений в частных производных следует отметить, что задачи идентификации во многих работах решаются с определением нескольких констант в классе полиномов, из тех или иных соображений задается вид идентифицируемой функции (например, квадратичной), затем подбираются константы этих функций, минимизирующие квадратичную невязку температур. Таким образом, определяется конечное число констант, а минимизируется не функционал, а функция, зависящая от этих констант, т.е. функция конечного числа переменных.

В настоящей монографии рассматривается решение задачи идентификации эффективного коэффициента теплопроводности стальной отливки в классе произвольных функций в результате бесконечномерной минимизации квадратичной невязки температур отливки:

$$J(\lambda_e) = \int_{t_a}^{t_b} [T(t, x_c) - T_e(t, x_c)]^2 dt.$$

Результаты идентификации будут рассмотрены в последнем разделе.

2.2. Прямой экстремальный подход

В настоящей монографии для решения задач оптимизации теплофизических процессов используется прямой экстремальный подход [59], основанный на непосредственной минимизации целевого функционала различными экстремальными методами. Он нагляден и относительно просто реализуем. Оптимальное значение управляющей функции (поток тепла в ЗВО, коэффициент теплопроводности) определяется итерационно в процессе

направленного спуска от некоторого начального приближения искомой функции в сторону минимума целевого функционала.

Прямой экстремальный подход состоит из двух, практически самостоятельных, подзадач. Первая – это определение градиента целевого функционала ∇J на пространственно-временной области определения управления, и вторая – минимизация целевого функционала на основе его градиента.

Особенностями теплофизических задач оптимизации является то, что управляющие параметры в таких задачах являются функциями, а целевой функционал зависит от этих функций не явно. Здесь определение градиента целевого функционала является непростой процедурой, она будет рассмотрена в разделе 3.

Сам градиент в таких задачах так же является функцией, а градиентные алгоритмы оптимизации на основе такого градиента превращаются в бесконечномерные методы оптимизации, применение которых в классическом виде не гарантирует достижимость оптимального управления с приемлемой точностью за конечное число итераций. Здесь необходимо привлечение нетрадиционных алгоритмов.

Будем использовать бесконечномерные градиентные алгоритмы минимизации с регулируемым направлением спуска [59], типа,

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k. \quad (2.1)$$

В конечномерном пространстве управлений, т.е. для $u \in E_n$, алгоритм (2.1) принимает вид:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \otimes \nabla J^k, \quad (2.1')$$

где \otimes – прямое произведение векторов $\alpha^k \in E_n$ и $\nabla J^k \in E_n$, например, если вектор-столбец $u \in E^2$, то данное произведение для двух векторов-строк α и ∇J расписывается как

$$\alpha \otimes \nabla J = \{\alpha_1, \alpha_2\} \otimes \{\nabla J_1, \nabla J_2\} = \{\alpha_1 \nabla J_1, \alpha_2 \nabla J_2\}.$$

В алгоритме (2.1) спуск осуществляется в направлении $-\alpha^k \nabla J$, с глубиной шага, определяемой числом b^k . В частном случае, если $\alpha^k \equiv 1$, алгоритм (2.1) является градиентным методом.

Параметр-функция $\alpha^k(\tau)$, с пространственно-временным аргументом $\tau \in S$ должен регулировать направление спуска, обеспечивая равномерное (почти всюду равномерное) на S приближение к искомому управлению. Поясним сказанное следующим примером.

Пусть функция $u(\tau)$ находится далеко от оптимального значения $u_*(\tau)$ для всех $\tau \in S$ а функция ∇J на некотором $s \subset S$ имеет существенно меньшие значения, чем на $S \setminus s$. Согласно конечномерной аналогии начального приближения и соответствующего поведения градиента, следует, что функционал J имеет овражный характер. Тогда следует увеличить значение функции α^k на S для обеспечения в алгоритме (2.1) ощутимых изменений управления $u^k(\tau)$ на s . Если не делать таких локальных коррекций, то в области S сходимость $u^k(\tau)$ к $u_*(\tau)$ будет практически отсутствовать. Это означает, что на S значение ∇J невозможно будет устремить к нулю за конечное (разумное) число итераций, т.е. будет отсутствовать стремление функции ∇J к нулю почти всюду на S .

Правильный выбор параметра $\alpha^k(\tau)$ на S позволяет осуществлять спуск к $\min J$ сразу для всех (почти всех) пространственно-временных точек $\tau \in S$. Такой спуск для функционалов близких к квадратичным будет реализовывать равномерную или п.в. S сходимость в малую окрестность точного решения $u_*(\tau)$. Заметим, что "правильный" выбор параметра $\alpha^k(\tau)$ с учетом чувствительности J к u для всех итераций метода (2.1) является непростой задачей.

Для учета разной чувствительности функционала J к управлению $u(\tau)$ можно использовать идею шаблонных приближений [59, 62]. Такие приближения позволяют адаптировать алгоритм (2.1) к конкретному виду функционала J на начальных итерациях. Если при этом выпуклость функционала J остается приблизительно постоянной вдоль всей минимизирующей траектории, то начальные шаблонные приближения будут

вполне достоверно отражать чувствительность J на всех последующих итерациях.

Удачно адаптированный алгоритм (2.1) приводит в относительно малую окрестность управления u подозреваемого на оптимальность. В такой окрестности функция ∇J существенно (равномерно или п.в. S) уменьшает свои локальные по τ значения на всей (почти всей) области S .

Сейчас рассмотрим два способа адаптации алгоритмов минимизации с регулируемым направлением спуска при помощи шаблонных приближений.

Первый. Идея шаблонных приближений заключается в следующем. Пусть приближения управления $u^k(\tau)$ и $u^{k+1}(\tau)$ описываются некоторыми известными, заранее выбранными функциями (шаблонные функции) $\phi^k(\tau)$ и $\phi^{k+1}(\tau)$, $\tau \in S$. Такие приближения будем называть шаблонными. Далее при помощи шаблонных приближений мы определим чувствительность функционала J к управлению u . Полученную информацию о чувствительности функционала будем хранить в параметре $\alpha(\tau)$ для того, чтобы корректировать необходимым образом направление спуска на последующих итерациях. При этом алгоритм (2.1) превратится в алгоритм адаптированный для минимизации конкретного функционала.

Для адаптации алгоритма минимизации на первых итерациях будем использовать следующий метод шаблонных приближений:

$$u^{k+1} = \phi^k - \beta^k \nabla J^k \quad \text{п.в. } S, \quad (2.2)$$

где

$$\beta^k(\tau) = \left| \frac{\phi^{k+1}(\tau) - \phi^k(\tau)}{\nabla J^k(\tau)} \right| \quad \text{п.в. } S. \quad (2.3)$$

Предполагается, что на данных итерациях $\nabla J \neq 0$ п.в. S .

Функция β^k обеспечивает заданное шаблонное приближение $u^{k+1} = \phi^{k+1}$, т.е. она реализует заранее выбранное направление спуска при любом значении градиента ∇J . Таким образом, параметр $\beta^k(\tau)$ будет учитывать чувствительность функционала J и на начальных итерациях гарантировать желаемое изменение управления $u(\tau)$ п.в. S .

Перейдем к обсуждению проблемы выбора шаблонов ϕ^k, ϕ^{k+1} . В первом способе адаптации алгоритма минимизации шаблонные аппроксимации ϕ^k, ϕ^{k+1} должны выбираться из требования ощутимого (вполне заметного) изменения управления на всем пространственно-временном множестве S . Например, если управление не закреплено ни в какой точке $\tau \in S$, то в качестве таких шаблонов можно выбрать постоянные по τ функции [62, 69]. Если управление закреплено в какой-либо точке $\tau \in S$, то в качестве шаблонов можно выбрать линейные по τ функции с изменяющимся углом наклона и всегда выходящие из одной и той же заданной точки закрепления [59].

Рассмотрим второй способ выбора шаблонных приближений. При итерации от $\phi^k(\tau)$ к $\phi^{k+1}(\tau)$, функция ∇J должна уменьшиться в одинаковое число раз для всех (почти всех) точек $\tau \in S$. В конечномерном случае такие шаблонные приближения обеспечивают спуск с коллинеарными друг к другу векторами ∇J^k . Очевидно, что если функция J является квадратичной и выпуклой, то такая траектория будет прямой линией, заканчивающейся в точке u_* .

Любой из шаблонных спусков по методу (2.1) необходимо заканчивать при подходе ко дну оврага.

Согласно критерию овражности [59] спуск п.в. S вдали от дна оврага сопровождается условием:

$$\operatorname{sgn} \nabla J^k = \operatorname{sgn} \nabla J^0 \text{ п.в. } S. \quad (2.4)$$

Нарушение данного условия означает попадание в область дна оврага. Поэтому при нарушении условия (2.4) шаблонный спуск следует заканчивать. Информацию о чувствительности функционала J , содержащуюся в параметре β^k , можно использовать для дальнейшего регулирования направления спуска по алгоритму (2.1), начиная с предыдущей итерации, еще не лежащей на дне оврага, т.е. принимаем

$$\alpha^{k-1}(\tau) = \beta^{k-2}(\tau). \quad (2.5)$$

Следующие итерации могут выполняться с неизменяющимся параметром α методом минимизации со спуском, регулируемым относительно градиента:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k, \text{ п.в. } S. \quad (2.6)$$

или со спуском, регулируемым относительно сопряженных градиентов:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k p^k, \text{ п.в. } S, \quad (2.7)$$

где $p^k = \nabla J^k - \frac{\|\nabla J^k\|^2}{\|\nabla J^{k-1}\|^2} p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^0$, α^k - п.в. S положительная и ограниченная функция.

Алгоритм (2.7) обладает более высокой скоростью сходимости по сравнению с алгоритмом (2.6). Необходимо помнить, что алгоритм (2.7) требует периодического "очищения" направления спуска от накапливающихся погрешностей, т.е. в процессе минимизации необходимо иногда задавать направление спуска $p^k = \nabla J^k$.

Описанные методы выбора параметра $\alpha(\tau)$ при помощи шаблонных аппроксимаций позволяют не только сократить путь к оптимальному управлению, но и исключить некоторые погрешности вычислений и возможных экспериментальных данных. Многие погрешности в вычислении градиента целевого функционала ∇J учитываются (адаптируются) функцией $\beta(\tau)$, а следовательно и функцией $\alpha(\tau)$ в алгоритмах

минимизации (2.6), (2.7). Как показывают тестовые расчеты [59] такая адаптация к погрешностям оказывается очень эффективной.

Шаг итераций – число b^k можно выбирать по методу [59, 60].

Итак, окончательно запишем полученные алгоритмы:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k, \text{ п.в. } S. \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \text{если } J^{k+1} \leq J^k, & \text{тогда } b^{k+1} = b_1 b^k, b_1 > 1; \\ \text{если } J^{k+1} > J^k, & \text{тогда повторяется предыдущая} \\ & \text{итерация, при } b^{k+1} = b_2 b^k; b_2 < 1/b_1. \end{cases}$$

b_1 : $\text{sgn } \nabla J^{k+1} \neq \text{sgn } \nabla J^k$ п.в. S для некоторых итераций вблизи управления, подозреваемого на оптимальное.

Следующий метод имеет более высокую скорость сходимости:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k p^k, \text{ п.в. } S, \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \text{если } J^{k+1} \leq J^k, & \text{тогда } b^{k+1} = b_1 b^k, b_1 > 1; \\ \text{если } J^{k+1} > J^k \text{ или } (\nabla J^k, \alpha^k p^k) \leq 0, & \text{тогда повторяется предыдущая} \\ & \text{итерация, при } b^{k+1} = b_2 b^k; b_2 < 1/b_1. \end{cases}$$

b_1 : $\text{sgn } \nabla J^{k+1} \neq \text{sgn } \nabla J^k$ п.в. S для некоторых итераций вблизи

управления, подозреваемого на оптимальное.

Здесь $p^k = \nabla J^k - \frac{\|\nabla J^k\|^2}{\|\nabla J^{k-1}\|^2} p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^k$, α^k - п.в. S

положительная и ограниченная функция.

Раздел 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА

3.1. Градиент неявно заданного функционала

Согласно [59], рассмотрим один из возможных способов определения градиента (производной Фреше) целевого функционала $J(u)$ для задачи оптимального управления. В нашем случае $u = u(z)$ - поток тепла в ЗВО, или $u = \lambda(t)$ - эффективный коэффициент теплопроводности в задаче идентификации параметра в модели формирования отливки.

В теплофизических задачах оптимального управления аргумент u присутствует в функционале J всегда неявно. При этом J зависит явно только от состояния теплофизической системы, то есть от температуры

$T(r, z) \in V(S')$, где $S' \subseteq \Sigma$, Σ - пространственно-временная область функционирования системы, V - пространство состояний системы. Будем считать, что состояние системы корректно определяется через управление $u(\tau) \in U(S)$. Пространственно-временная область S' определения целевого функционала и S определения управления, в общем случае, не совпадают друг с другом. Пусть пространство состояний V и управлений U - действительные гильбертовы с интегрируемым квадратом, т.е. $V = L_2$ и $U = L_2$.

Запишем уравнения системы в общей символической форме:

$$B(\tau, T, u) = 0 \in V(\Sigma, \partial\Sigma), \quad (3.1)$$

где B обозначает дифференциальные операторы системы, определенные на пространственном множестве Σ вместе с операторами на соответствующих частях границы $\partial\Sigma$.

Критерий качества управления запишем в виде:

$$J(u) = \int_{S'} I dS', \quad (3.2)$$

где $I(T)$ - заданная функция аргумента T .

Рассматриваемый метод определения градиента ∇J является модернизацией классического метода множителей Лагранжа. Он включает в себя следующие этапы [59].

1. Линеаризация задачи управления в некоторой точке u . Данная процедура реализуется варьированием целевого функционала J и уравнений системы.

Вариации управления δu , согласно (3.1), вызывают вариации состояния δT .

В результате варьирования (3.1) и (3.2) получаем:

$$\delta B = B'_T \delta T + B'_u \delta u = 0 \in V(\Sigma, \partial\Sigma), \quad (3.3)$$

$$\delta J = (I'_T, \delta T)_{V^*(S')} \in R. \quad (3.4)$$

Круглые скобки с индексами $V^*(S')$ и $U^*(S')$ представляют собой скалярные произведения в сопряженных пространствах V^* и U^* на множестве S' .

Выражения (3.3) и (3.4) принадлежат разным пространствам. Уравнение (3.3) линеаризованной системы принадлежит функциональному пространству состояний V , а линеаризованный функционал (4) – числовому пространству R .

2. Отображение линеаризованных уравнений системы при помощи соответствующих линейных функционалов $\tilde{f} \in V^*(\Sigma, \partial\Sigma)$ (множители Лагранжа) из пространства V в пространство R . При этом из уравнения (3.3) получаем:

$$(\tilde{f}, \delta B)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} = (\tilde{f}, B'_T \delta T + B'_u \delta u)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} = 0 \in R. \quad (3.5)$$

Поскольку здесь значение \tilde{f} может быть произвольным, то зависимость вариации δT от δu в системе (3.5) исчезает и мы можем перейти к следующему этапу.

3. Преобразование отображений вариаций системы (3.5) к отображениям независимых вариаций δT и δu (аналог тождества Лагранжа):

$$(\tilde{f}, \delta B)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} = (B_T^* \tilde{f}, \delta T)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} + (B_u^* \tilde{f}, \delta u)_{U^*(S)} = 0 \in R, \quad (3.6)$$

где B_T^* , B_u^* - некоторые сопряженные операторы.

Теперь условия (3.4), (3.6) задачи управления (3.1), (3.2) записаны в одинаковых пространствах.

4. Объединение элементов задачи оптимизации в одинаковых пространствах. Поскольку линейным пространствам свойственна аддитивность их элементов, то можно записать:

$$\delta J = \left(B_T^* \tilde{f} + I'_T \Big|_{S'}, \delta T \right)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} + \left(B_u^* \tilde{f}, \delta u \right)_{U^*(S)}. \quad (3.7)$$

5. Выделение градиента целевого функционала. Учитывая тот факт, что первая вариация – это главная линейная часть приращения функционала, получаем, что коэффициенты при аргументах δT и δu представляют собой компоненты градиента ∇J , т.е.

$$\delta J = (\nabla_T J, \delta T)_{V^*(\Sigma, \delta\Sigma)} + (\nabla_u J, \delta u)_{U^*(S)} \in R. \quad (3.8)$$

На данном этапе преобразований целесообразно устранить неоднозначную связь между вариациями управления δu и состояния δT . Это можно сделать, если задать значение линейного функционала $\tilde{f} = f$ из условия:

$$B_T^* f + I'_T|_{S'} = 0. \quad (3.9)$$

Данное условие называется сопряженной задачей.

Теперь первая вариация целевого функционала выражается только через вариацию управления:

$$\delta J = (B_u^* f, \delta u)_{U^*(S)}, \quad (3.10)$$

откуда следует, что градиент целевого функционала – это

$$\nabla J = B_u^* f \in U^*(S). \quad (3.11)$$

Значение ∇J определяется через решение f линейной сопряженной задачи (3.9).

3.2. Градиент в задаче оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка

В этом параграфе мы получим градиент целевых функционалов (1.18) - (1-20). Как было отмечено в первом разделе, методом определения градиента в настоящей монографии является модернизированный классический метод множителей Лагранжа [59].

Уравнение теплопереноса (1.2) для более компактных дальнейших преобразований с целью получения градиента ∇J удобно записать в виде:

$$C\rho V \frac{\partial T}{\partial z} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0, \quad (r, z) \in \Sigma. \quad (3.12)$$

Граничные условия (1.4) имеют вид:

$$\operatorname{grad} T \Big|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad T \Big|_{\substack{0 \leq r \leq R \\ z=0}} = T_0, \quad \lambda_s \operatorname{grad} T \Big|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma(T - T_c),$$

$$\lambda_s \operatorname{grad} T \Big|_S = u, \quad (3.13)$$

Теперь перейдем к определению градиента ∇J . Уравнение (3.12), линеаризованное относительно $\delta T \in \Omega(\Sigma)$, имеет вид:

$$e = \frac{\partial C\rho}{\partial T} \delta T V \frac{\partial T}{\partial z} + C\rho V \frac{\partial \delta T}{\partial z} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \delta T \operatorname{grad} T - \lambda \operatorname{grad} \delta T \right) = 0 \in \Omega(\Sigma). \quad (3.14)$$

Граничные условия принимают вид:

$$\operatorname{grad} \delta T \Big|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad \delta T \Big|_{\substack{0 \leq r \leq R \\ z=0}} = 0, \quad \lambda_s \operatorname{grad} \delta T \Big|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma \delta T,$$

$$\lambda_s \operatorname{grad} \delta T \Big|_S = \delta u, \quad (3.15)$$

Линеаризованные функционалы (1.13), (1.14), (1.16), (1.20) принимают вид:

$$\delta J_5 = - \int_0^R \int_0^Z 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) \right] \theta(z - z_c) \delta T dr dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{z_c}^Z 2R \frac{\partial T}{\partial r} \delta T dz + \int_0^R \chi I'_F \delta T dr = \\
= & -2 \left(\left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) \right] \theta(z - z_c), \delta T \right)_{\Omega(\Sigma)} + \\
& + \left(2R \frac{\partial T}{\partial r}, \delta T \right)_{\Omega(S)} + (\chi I'_F, \delta T)_{\Omega(S')}, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_4 = & - \int_0^R \int_0^Z 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) - \right. \\
& \left. - \chi \delta(T - T_s) \right] \theta(z - z_c) \delta T dr dz + \int_z^Z 2R \frac{\partial T}{\partial r} \delta T dz = \\
= & -2 \left[\left(\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \chi \delta(T - T_s) \right) \theta(z - z_c), \delta T \right]_{\Omega(\Sigma)} + \left(2R \frac{\partial T}{\partial r}, \delta T \right)_{\Omega(S)}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_9 = & - \int_0^R \int_0^Z 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) - \right. \\
& \left. - \chi_1 \delta(T - T_s) \right] \theta(z - z_c) \delta T dr dz + \int_{z_c}^Z 2R \frac{\partial T}{\partial r} \delta T dz + \chi_2 \int_0^R I'_F \delta T dr = \\
= & -2 \left(\left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \chi_1 \delta(T - T_s) \right] \theta(z - z_c), \delta T \right)_{\Omega(\Sigma)} + \\
& + \left(2R \frac{\partial T}{\partial r}, \delta T \right)_{\Omega(S)} + (\chi_2 I'_F, \delta T)_{\Omega(S')}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{11} = & \int_0^R \int_0^Z 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) - \right. \\
& \left. \chi_1 \delta(T - T_s) \right] \theta(z - z_c) \delta T dr dz + \\
& + \int_0^R \int_0^Z \left[r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(B \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \right. \\
& \left[B \frac{\partial T}{\partial r} (\delta(r - r_s) + \delta(r - r_L)) \right] \theta(z - z_c) \delta T dr dz + \\
& \int_{z_c}^Z \left[2R \frac{\partial T}{\partial r} - B \theta(r - r_s) \theta(r - r_L) \frac{\partial T}{\partial r} \right] \delta T dz - \\
& \int_0^R B \frac{\partial T}{\partial r} \theta(r - r_s) \theta(r - r_L) \delta T dr = \\
= & \left(2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) \right] \theta(z - z_c), \delta T \right)_{\Omega(\Sigma)} + \\
& \left(2 \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) - \chi_1 \delta(T - T_s) \right] \theta(z - z_c), \delta T \right)_{\Omega(\Sigma)} + \\
& + \left(\left[r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(B \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right] \theta(z - z_c), \delta T \right)_{\Omega(\Sigma)} + \\
& + \left(\left[B \frac{\partial T}{\partial r} (\delta(r - r_s) + \delta(r - r_L)) \right] \theta(z - z_c), \delta T \right)_{\Omega(\Sigma)} + \\
& + \left(\left[2R \frac{\partial T}{\partial r} - B \theta(r - r_s) \theta(r - r_L) \frac{\partial T}{\partial r} \right], \delta T \right)_{\Omega(S)} + \\
& + \left(B \frac{\partial T}{\partial r} \theta(r - r_s) \theta(r - r_L), \delta T \right)_{\Omega(S')} \tag{3.19}
\end{aligned}$$

где

$$B = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

а производная штрафной функции (1.11) имеет вид:

$$I'_F = \begin{cases} 2(T - T_{ad}), & T > T_{ad}; \\ 0, & T < T_{ad}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Для отображения линеаризованного уравнения (3.14) в пространство R введем линейный функционал $f \in \Omega(\Sigma)$. Умножим скалярно данный функционал на уравнение (3.14):

$$(f, e)_{\Omega(\Sigma)} = \int_0^R \int_0^Z f e d r d z = 0 \in R. \quad (3.21)$$

Преобразуем данное выражение к виду скалярного произведения относительно вариации δT . Для этого необходимо преобразовать следующие слагаемые:

$$f C \rho V \frac{\partial \delta T}{\partial z} = \frac{\partial C \rho V \delta T}{\partial z} - C \rho V \frac{\partial f}{\partial z} \delta T;$$

$$f \operatorname{div} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \operatorname{grad} T \delta T \right) = \operatorname{div} \left(f \frac{\partial \lambda}{\partial T} \delta T \operatorname{grad} T \right) - \operatorname{grad} f \operatorname{grad} T \frac{\partial \lambda}{\partial T} \delta T;$$

$$f \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \delta T) = \operatorname{div}(f \lambda \operatorname{grad} \delta T) - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} f \delta T) + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} f) \delta T.$$

Полученные дополнительные слагаемые, содержащие оператор дивергенции, в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса легко интегрируются по r и по z в выражении (3.21). Окончательно, с учетом (3.15), выражение (3.21) принимает вид:

$$(f, z)_{\Omega(\Sigma)} = \int_0^R \int_0^Z \left[-C \rho V \frac{\partial f}{\partial z} + f V \frac{\partial C \rho}{\partial T} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \delta T d r d z +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{z_c} \left[f\gamma + \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \right] \delta T dz + \int_{z_c}^Z \left[-f\delta u + \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \delta T \right] dz + \\
& + \int_0^R [fC_s \rho_s V + \chi I'_F] \delta T dr. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Теперь можно объединить выражение (3.22) с линеаризованным функционалом (3.16). Для того, чтобы избавиться от компоненты градиента ∇J , принадлежащей сопряженному пространству состояний Ω , потребуем:

$$\begin{aligned}
& C\rho \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f + \\
& + 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r-r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r-r_s) \right] = 0, \quad (r, z) \in \Sigma. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

На границах области потребуем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma f, \quad \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_S = -2r \frac{\partial T}{\partial r}, \\
f \Big|_{z=Z} = -\frac{\chi}{C\rho V} I'_F. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

При этом вариация целевого функционала (1.13) принимает вид:

$$\delta J_4 = - \int_S f \delta u dz = (\nabla J, \delta u)_{\Omega(S)}, \tag{3.25}$$

откуда следует, что градиент – это функция

$$\nabla J = -f \text{ на } S. \tag{3.26}$$

Проводя аналогичные преобразования для функционалов (1.17), (1.18), (1.20) и их вариаций (3.17) - (3.19) получим соответствующие задачи для

определения множителя $f(r, z)$, через который по формуле (3.26) определяется градиент:

для функционала (1.17):

$$\begin{aligned}
 & C\rho \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f + \\
 & + 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) + \right. \\
 & \left. + \chi \delta(r - r_s) \right] = 0, \quad (r, z) \in \Sigma. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_C}} = -\gamma f, \quad \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_s = -2r \frac{\partial T}{\partial r}, \\
 f \Big|_{z=Z} = 0. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

для функционала (1.18):

$$\begin{aligned}
 & C\rho \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f + \\
 & + 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) + \right. \\
 & \left. + \chi \delta(r - r_s) \right] = 0, \quad (r, z) \in \Sigma. \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_C}} = -\gamma f, \quad \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_s = -2 \frac{\partial T}{\partial r}, \\
 f \Big|_{z=Z} = -\frac{\chi}{C\rho V} I'_F. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

для функционала (1.20):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) + c \rho \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial c \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f + A = 0, \quad (3.31)$$

где

$$\begin{aligned} A = & \left\{ \theta(r - r_L) \theta(r - r_S) r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(B \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\ & + B \frac{\partial T}{\partial r} (\delta(r - r_L) + \delta(r - r_S)) + \\ & + 2 \chi_0 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_S) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_S) \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ z_c < z < Z}} = 0, \quad \left. \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=R \\ z_c < z < Z}} = -(2 \chi_2 + B \theta(r - r_S) \theta(r - r_L)) \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\left. f \right|_{\substack{0 < r < R \\ z=Z}} = - \frac{B \frac{\partial T}{\partial z} \theta(r - r_S) \theta(r - r_L)}{c \rho} - \frac{2 \chi_2}{c \rho} (T - T_{\max}), \quad (3.32)$$

Градиент (3.26) целевых функционалов (1.17), (1.18), (1.20) находится через решение f линейных сопряженных задач (3.23), (3.27), (3.29) и (3.31) с соответствующими граничными условиями (3.24), (3.28), (3.30) и (3.32). Очевидно, что данные задачи так же имеют эллиптический тип, как и исходная (1.2).

Таким образом, в этом параграфе мы нашли аналитические выражения для расчета градиента ∇J от неявно заданных функционалов $J(u)$ для задачи оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка, сформулированной во втором параграфе первого раздела. Градиент ∇J выражается через решения соответствующих линейных уравнений того же типа, что и исходное уравнение.

3.3. Градиент в задаче идентификации теплофизических параметров

Найдем градиент целевого функционала в задаче идентификации эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_e(t)$ стальной отливки. Подробная постановка данной задачи имеется в первом разделе. Кратко ее напомним.

Процесс теплопередачи в начальной стадии затвердевания отливки описывается уравнением:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0, \quad (t, x) \in \Sigma, \quad (3.33)$$

где C , ρ теплоемкость и плотность расплава, T - температура.

Теплопроводность в расплаве считается однородной, а в стенке изложницы известной - λ_1 , поэтому можно записать

$$\lambda(x, t) = \lambda_1 + [\lambda_e(t) - \lambda_1] \theta(x - x_1), \quad (3.34)$$

где λ_e - эффективный коэффициент теплопроводности расплава. При этом уравнение (3.33) преобразуется к виду:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (\lambda_e - \lambda_1) \delta(x_1 - x) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (t, x) \in \Sigma. \quad (3.35)$$

Граничные условия задавались в виде:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0, \quad \lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_2} = -\gamma(T - T_{cp}), \quad (3.36)$$

где α - известный коэффициент теплоотдачи, T_{cp} - температура окружающей среды. В этих выражениях через x_0 обозначена координата центра отливки; x_1 - координата «отливка-оснастка»; x_2 - граница «оснастка-окружающая среда».

Начальное условие имеет вид:

$$T(t_a, x) = T_a(x), x \in [x_0, x_2]. \quad (3.37)$$

Качество идентификации эффективного коэффициента теплопроводности λ_e оценивается функционалом:

$$J(\lambda_e) = \int_{t_a}^{t_b} [T(t, x_c) - T_e(t, x_c)]^2 dt, \quad (3.38)$$

где T_e - экспериментально определенная температура расплава в точке x_c .

Задача идентификации формулируется следующим образом. Необходимо найти функцию $\lambda_e(t)$ в уравнении (3.33), которая доставляет минимум функционалу $J(\lambda_e)$. Перейдем к определению градиента ∇J .

Уравнение (3.33) для дальнейших преобразований, удобно записать в виде системы с формальной переменной q :

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0, (t, x) \in \Sigma, \quad (3.39)$$

$$q - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0, (t, x) \in \Sigma.$$

Система уравнений, линеаризованная относительно $\delta T \in V(\Sigma)$, $\delta u \in V(\Sigma)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} e_1 &= C\rho \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \frac{\partial \delta q}{\partial x} = 0 \quad \in V(\Sigma), \\ e_2 &= \delta q - \frac{\partial T}{\partial x} \delta \lambda - \lambda \frac{\partial \delta T}{\partial x} = 0 \quad \in V(\Sigma). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$\delta q|_{x=x_0} = 0, \quad \delta q|_{x=x_2} = -\gamma \delta T, \quad (3.41)$$

$$\delta T(t_a, x) = 0. \quad (3.42)$$

Линеаризованный функционал (3.38) принимает вид:

$$\delta J = \int_{t_a}^{t_b} 2(T(t, x_c) - T_e(t, x_c)) \delta T dt = (2(T - T_e), \delta T)|_{V^*} \in R. \quad (3.43)$$

Для отображения линеаризованной системы (3.40) в пространство R введем линейный функционал-вектор $f = \{f_1, f_2\} \in V^*(\Sigma)$. Умножим скалярно данный функционал на вектор $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$:

$$(f, e) = \int_{t_a}^{t_b} \int_{x_0}^{x_2} (f_1 e_1 + f_2 e_2) dt dx = 0 \in R. \quad (3.44)$$

Преобразуем выражение (3.44) к виду скалярного произведения относительно вариаций δT , δq . Для этого необходимо преобразовать следующие слагаемые:

$$f_1 C \rho \frac{\partial \delta T}{\partial t} = \frac{\partial C \rho f_1 \delta T}{\partial t} - C \rho \frac{\partial f_1}{\partial t} \delta T;$$

$$f_1 \frac{\partial \delta q}{\partial x} = \frac{\partial f_1 \delta q}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta q;$$

$$f_2 \lambda \frac{\partial \delta T}{\partial x} = \frac{\partial f_2 \lambda \delta T}{\partial x} - \frac{\partial f_2 \lambda}{\partial x} \delta T.$$

Полученные дополнительные слагаемые в виде производных легко интегрируются по x и t в выражении (3.44). Окончательно, с учетом (3.41), (3.42), получаем:

$$\begin{aligned} (f, e) = & \int_{t_a}^{t_b} \int_{x_0}^{x_2} \left[\left(-C \rho \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2 \lambda}{\partial x} \right) \delta T - f_2 \frac{\partial T}{\partial x} \delta \lambda + \left(f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \delta q \right] dx dt + \\ & \int_{x_0}^{x_2} C \rho f_1 \delta T|_{t_b} dx - \int_{x_0}^{x_2} C \rho f_1 \delta T|_{t_a} dx - \int_{t_a}^{t_b} (f_1 \delta q + \lambda f_2 \delta T)|_{x_2} dt + \\ & + \int_{t_2}^{t_b} (f_1 \delta q + \lambda f_2 \delta T)|_{x_0} dt = 0 \in R. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Теперь можно объединить выражение (3.45) с линеаризованным функционалом (3.43). Для того чтобы избавиться от компоненты, принадлежащей сопряженному пространству $V^*(\Sigma)$, потребуем:

$$\begin{aligned} C\rho \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial \lambda f_2}{\partial x} - 2(T - T_e) &= 0 \in V^*(\Sigma), \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 &= 0 \in V^*(\Sigma). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Исключая из уравнений (3.46) линейный функционал f_2 , с учетом (3.34), получаем уравнения для определения функционала f_1 . Далее удобно ввести обозначение $f \equiv f_1$, в итоге получаем:

$$\begin{aligned} C\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\lambda_e - \lambda_1) \delta(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x} - \\ - 2(T - T_e) \delta(x - x_c) &= 0 \in V^*(\Sigma) \end{aligned} \quad (3.47)$$

В конечный момент времени и на обеих границах потребуем:

$$f|_{t=t_b} = 0; \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_2} = -\gamma f. \quad (3.49)$$

При этом вариация функционала принимает вид:

$$\delta J = \int_{t_a}^{t_b} \int_{x_0}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \delta \lambda dt dx = (\nabla J, \delta \lambda)_{U^*(S)}, \quad (3.50)$$

где градиент

$$\nabla J = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (t, x) \in (t_a, t_b) \times x_*, \quad (3.51)$$

где x_* - некоторая координата внутри отливки. Конкретное значение x_* должно определяться в результате анализа управляемости, а точнее – идентифицируемости.

Нетривиальное решение сопряженной задачи (3.47) – (3.49) возможно только при $x_c < x_* < x_1$. Это объясняется наличием δ - функции в

уравнении (3.47) при линеаризованном целевом функционале. Именно этот свободный член является источником нетривиального решения. При интегрировании уравнения (3.47) δ -функция преобразуется к \mathcal{G} -функции отличной от нуля справа от x_c . Следовательно, параболическая система (3.47)-(3.49) при приблизительном численном решении может иметь гарантированное существенно ненулевое (нетривиальное) решение f справа от x_c .

Таким образом, эффективное значение коэффициента теплопроводности $\lambda_e(t)$ идентифицируемо на S по целевому функционалу (3.38), если $S = (t_a, t_b) \times x_*$, $x_c < x_* < x_1$.

Раздел 4

РАЗРАБОТКА ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ И КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ

4.1. Конечно-разностная аппроксимация уравнений

В предыдущих разделах монографии обсуждались проблемы оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка. Во втором параграфе первого раздела сформулирована

задача определения оптимального теплового потока в ЗВО с целью предотвращения образования трещин в теле непрерывного слитка.

Сформулированная задача содержит нелинейное эллиптическое уравнение теплопереноса. В настоящее время не существует аналитических методов решения таких уравнений.

Для получения решения уравнений (1.2), (3.23), (3.27), (3.29), (3.31) с соответствующими граничными условиями (1.4), (3.24), (3.28), (3.30), (3.32) привлечем метод конечных разностей. Применение конечно-разностной схемы требует замены области непрерывного изменения аргументов областью их дискретного изменения, а также формулировки конечно-разностных аналогов этих дифференциальных уравнений и граничных условий.

Заметим, что уравнение теплопереноса (1.2) является нелинейным, а уравнения (3.23), (3.27), (3.29), (3.31) для определения множителя $f(r, z)$ - линейные. А тип этих уравнений одинаковый. Поэтому все дальнейшие рассмотрения будем проводить для модельного уравнения:

$$k_1 \frac{\partial F}{\partial z} - k_2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - k_3 \frac{\partial F}{\partial r} - k_4 - k_5 = 0, \quad (4.1)$$

с граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=R} = k_6 F + k_7, \quad F|_{z=0, Z} = k_8. \quad (4.2)$$

Если в уравнении (4.1) и граничных условиях (4.2) коэффициенты будут равны:

$$k_1 = C\rho V, \quad k_2 = \lambda, \quad k_3 = \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r},$$

$$k_6 = -\frac{\gamma}{\lambda_T}, \quad k_7 = \frac{\gamma T_{kp}}{\lambda_T}, \quad k_8|_{z=0} = T_0,$$

то уравнение принимает вид (1.2), а граничные условия соответствуют граничным условиям в кристаллизаторе (1.4). Если $k_6 = 0$ и $k_7 = \frac{u}{\lambda_T}$ то граничные условия (1.4) соответствуют граничным условиям в ЗВО ($z_c < z \leq Z$).

При аналогичном значении коэффициента k_1 и следующих значениях коэффициентов $k_2 - k_8$:

$$k_2 = -\lambda, \quad k_3 = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\lambda}{r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r}, \quad k_4 = \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} V,$$

$$k_5 = 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) \right],$$

$$k_6 = 0, \quad k_7 = -2r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad k_8|_{z=Z} = -\frac{\chi}{C\rho V} I'_F,$$

уравнение (4.1) и граничные условия (4.2) принимают вид, соответственно (3.23), (3.24).

Если в уравнении (4.1) и граничных условиях (4.2) коэффициенты $k_7 - k_4$, k_6 , k_7 будут равны предыдущим значениям, а коэффициенты k_5 и k_8 изменить на

$$k_5 = 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) + \chi \delta(T - T_s) \right],$$

$$k_8 = 0,$$

то уравнение (4.1) и граничные условия (4.2) принимают вид, соответственно (3.27), (3.28).

При аналогичных значениях $k_1 - k_7$ и значении

$$k_8|_{z=Z} = -\frac{\chi}{C\rho V} I'_F,$$

уравнение (4.1) принимает вид (3.28), а граничные условия (4.2) принимают вид (3.30).

$$\text{При} \quad k_1 = c\rho V, \quad k_2 = -\frac{\lambda}{C\rho V}, \quad k_3 = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{\lambda}{r},$$

$k_4 = -V \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}$, $k_5 = A$, уравнение (4.1) принимает вид (3.31), а граничные условия (4.2) принимают вид (3.32).

Таким образом, модельное уравнение (4.1) с граничными условиями (4.2) полностью соответствует уравнениям (1.2), (3.23), (3.27), (3.28), (3.31) с соответствующими граничными условиями (1.4), (3.24), (3.28), (3.30), (3.32) при соответствующих коэффициентах $k_1 - k_8$.

Для построения конечно-разностного аналога эллиптическое уравнение (4.1) преобразуем к формальному параболическому виду, а именно, член с первой производной по $z - k_1 \frac{\partial F}{\partial z}$ преобразуем к производной по времени

[47]. С учетом того, что скорость литья $V = \frac{\Delta z}{\Delta t}$ - величина постоянная,

запишем эту производную в виде $k_1 \frac{\Delta F}{\Delta t}$. В этом выражении $k_1 = C\rho[V]$, где

$[V]$ - безразмерное значение скорости литья. Тогда уравнение (4.1) можно рассматривать как параболическое.

Введем равномерные координатные сетки Ξ_r, Ξ_z :

$$\Xi_r = \sum_{i=1}^N \Delta r_i, \Xi_z = \sum_{j=1}^{NZ} \Delta z_j,$$

где $\Delta r, \Delta z$ - шаги по координатам r и z , соответственно.

Для построения конечно-разностного аналога дифференциального уравнения (4.1) используем широко известную, абсолютно устойчивую схему Кранка-Николсона [2]:

$$\begin{aligned} k_1 \frac{F_i^{j+1} - F_i^j}{\Delta z} - k_2 \frac{F_{i-1}^j - 2F_i^j + F_{i+1}^j + F_{i-1}^{j+1} - 2F_i^{j+1} + F_{i+1}^{j+1}}{2(\Delta r)^2} - \\ - k_3 \frac{F_{i+1}^j - F_{i-1}^j + F_{i+1}^{j+1} - F_{i-1}^{j+1}}{4\Delta r} - \\ - k_4 \frac{F_{i+1}^j + F_{i-1}^j + F_{i+1}^{j+1} + F_{i-1}^{j+1}}{4} - k_5 = 0. \end{aligned}$$

Благодаря тому, что вторая производная $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ аппроксимируется полусуммой значений производных на двух последовательных шагах по координате z , схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta z^2, \Delta r^2))$.

Запишем предыдущее уравнение в каноническом виде, удобном для решения методом прогонки:

$$A_i F_{i-1}^{j+1} - C_i F_i^{j+1} + B_i F_{i+1}^{j+1} = \tilde{F}_i, \quad (4.3)$$

где

$$A_i = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Delta r} \left(\frac{k_3}{2} - \frac{k_2}{\Delta r} \right) - \frac{k_4}{2} \right]; \quad B_i = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Delta r} \left(\frac{k_2}{\Delta r} - \frac{k_3}{2} \right) + \frac{k_4}{4} \right];$$

$$C_i = -\left(\frac{k_1}{\Delta z} + \frac{k_2}{(\Delta r)^2} \right); \quad \tilde{F}_i = -A_i F_{i-1}^j - \left(\frac{k_2}{(\Delta r)^2} - \frac{k_1}{\Delta z} \right) F_i^j - B_i F_{i+1}^j + k_5.$$

Решение системы алгебраических уравнений (4.3) будем искать в виде соотношения:

$$F_i^j = \eta_{i+1} F_{i+1}^j + \nu_{i+1}, \quad (4.4)$$

где коэффициенты η_i и ν_i определяются из рекуррентных соотношений:

$$\eta_i = \frac{B_i}{C_i - A_i \eta_{i-1}}; \quad \nu_i = \frac{A_i \nu_{i-1} - \tilde{F}_i}{C_i - A_i \eta_{i-1}}. \quad (4.5)$$

Для уравнений (4.3) граничные условия записываются в общем виде:

$$F_0^j = \eta_0 F_1^j + \nu_0; \quad F_N^j = \eta_N F_{N-1}^j + \nu_N.$$

Сравнивая эти выражения с граничными условиями (4.2), записанными в конечно-разностном виде

$$F_0^j = F_1^j; \quad F_{N-1}^j = \frac{1}{1 - k_6 \Delta r} F_{N-1}^j + \frac{k_7 \Delta r}{1 - k_6 \Delta r}$$

получим значения коэффициентов $\eta_0, \nu_0, \eta_1, \nu_N$:

$$\eta_0 = 1; \nu_0 = 0; \eta_1 = \frac{1}{1 - k_6 \Delta r}; \nu_N = \frac{k_7 \Delta r}{1 - k_6 \Delta r}.$$

Таким образом, зная η_0 и ν_0 , и, применяя формулы прямой прогонки (4.5), определяем все прогоночные коэффициенты η_i и ν_i . Граничное значение F_N^j определяем из соотношения

$$F_N^j = \frac{\nu_N + \eta_N \nu_{N-1}}{1 - \eta_N \eta_{N-1}}. \quad (4.6)$$

Формулы (4.4) и (6.6) представляют собой формулы обратной прогонки, позволяющие определить значения F_i^j при всех значениях i .

В дальнейшем для расчетов принимаются значения шага сетки по радиусу слитка - $\Delta r = 0.002$ м и шага по длине слитка $\Delta z = 0.02$ м. Поскольку уравнение теплопроводности (1.2) нелинейное, то на каждом шаге Δz осуществляются итерации для уточнения значений параметров C, ρ, λ . В.Н. Павлыш в работе [46] для гидродинамических процессов показал, что в условиях принятой точности достаточно 1 итерации. Как показали расчеты, для уравнения (1.2) необходимо делать 3 итерации.

4.2. Расчет теплофизических параметров металла

В этом параграфе мы рассмотрим сравнение основных теплофизических характеристик непрерывного слитка, полученных в результате численного эксперимента, с литературными и экспериментальными данными с целью проверки адекватности выбранной теплофизической модели и численных методов расчета.

Поле температур непрерывного слитка в настоящей монографии описывается уравнением теплопереноса (1.2):

$$C\rho V \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \quad (r, z) \in \Sigma. \quad (4.7)$$

где $T(r, z)$ - температура слитка, V - скорость литья (скорость вытягивания слитка), $\rho(T)$ - плотность слитка, $C(T)$ и $\lambda(T)$ - эффективные теплоемкость и теплопроводность, которые в жидкой, двухфазной и твердой зонах равны:

$$\rho = \rho_l(1 - \xi) + \rho_s \xi; \quad \lambda = \lambda_l(1 - \xi) + \lambda_s \xi$$

$$C = \begin{cases} C_l, & T \geq T_l; \\ C_l(1 - \xi) + C_s \xi - W \frac{\partial \xi}{\partial T}, & T_l > T > T_s; \\ C_s, & T \leq T_s; \end{cases}$$

Здесь индексы l и s обозначают известные табличные значения параметров, соответственно, для жидкого и твердого состояния слитка. Температуры T_s и T_L - температуры солидус и ликвидус. Переменная ξ - доля твердой фазы, определяемая по уравнению для неравновесного рычага (1.3):

$$\xi = 1 - \left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_L} \right)^{\frac{1}{1-k}}, \quad (4.8)$$

где T_0 - температура заливаемого металла постоянная и равна $T_L + \Delta T$, где ΔT - температура перегрева металла перед разливкой, k - равновесный коэффициент распределения примеси.

Литературные и экспериментальные данные, которые используются для сравнения теплофизических параметров непрерывных слитков, содержат сведения по коэффициенту теплоотдачи в зоне вторичного охлаждения, а не

тепловому потоку u . Поэтому в (1.4) заменим граничное условие второго рода, содержащее тепловой поток u на условие третьего рода, содержащее коэффициент теплоотдачи γ' в ЗВО. Таким образом, граничные условия для уравнения (4.7) имеют вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T \Big|_{\substack{0 \leq r \leq R \\ z=0}} = T_0, \quad \lambda_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = -\gamma(T - T_c), \\ \lambda_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_S = -\gamma'(T - T'_c), \quad S = \{r, z : r = R, z_c < z < Z\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где z_c - нижняя граница кристаллизатора (см. рис. 2.1), T_c , T'_c - температура воды в кристаллизаторе и ЗВО, соответственно, γ - коэффициент теплоотдачи в зоне кристаллизатора.

Для определенности получены и сопоставлены с данными [54] глубина жидкой лунки по температуре ликвидуса H_L и солидуса H сплошных цилиндрических слитков разных диаметров из стали марки Ст10. Длина кристаллизатора составляла 0.9 м. В зоне плотного контакта ($0 \leq z \leq z_1$) коэффициент теплоотдачи $\gamma = 1500 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$, в зоне пульсирующего контакта ($z_1 \leq z \leq z_2$) $\gamma = [1500 - 1100(z - z_1) \times (z_2 - z_1)^{-1}] \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$, в зоне газового зазора ($z_2 \leq z \leq z_3$) $\gamma = 400 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$, в ЗВО $\gamma = 1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$. В этих расчетах приняты следующие значения координат: $z_1 = 0.1 \text{ м}$, $z_2 = 0.2 \text{ м}$, $z_3 = 0.75 \text{ м}$.

В табл. 4.1 приведены значения H_L и H (в колонках 1 - использована модель (4.7),(4.9), в колонках 2 данные [51]) при различных диаметрах D , скоростях разливки V и температурах перегрева ΔT .

Таблица 4.1. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей параметров непрерывного литья слитков от скорости литья и температуры перегрева металла

$D, м$	$V, м/мин$	$\Delta T, ^\circ C$	$H_L, м$		$H, м$	
			1	2	1	2
0.2	0.6	20	2.65	2.92	3.50	3.87
0.2	0.8	20	3.47	3.78	4.66	5.08
0.2	1.0	20	4.95	5.30	5.75	6.26
0.2	1.2	20	5.97	6.36	6.98	7.45
0.17	0.6	10	2.32	2.64	2.84	3.13
0.17	0.8	10	3.44	3.81	3.75	4.13

Как следует из анализа таблицы, данные [54] отличаются от расчетных не более чем на 10%. Это расхождение связано с тем, что температурное поле слитка в данной монографии определяется из несколько модифицированной, по сравнению с работой [54], физически обоснованной модели [41].

На рис. 4.1 показано изменение температуры вдоль поверхности слитка диаметром 0.2 м при $z_3 = 1.4 м$, $\Delta T = 20^\circ C$. Кривые 1 и 2 соответствуют данным [50], полученными при коэффициенте теплообмена в ЗВО 1000 Вт/(м²К) и 500 Вт/(м²К), соответственно. Соответствующая температура, рассчитанная по модели (3.7), (3.9) обозначена через 1' и 2'.

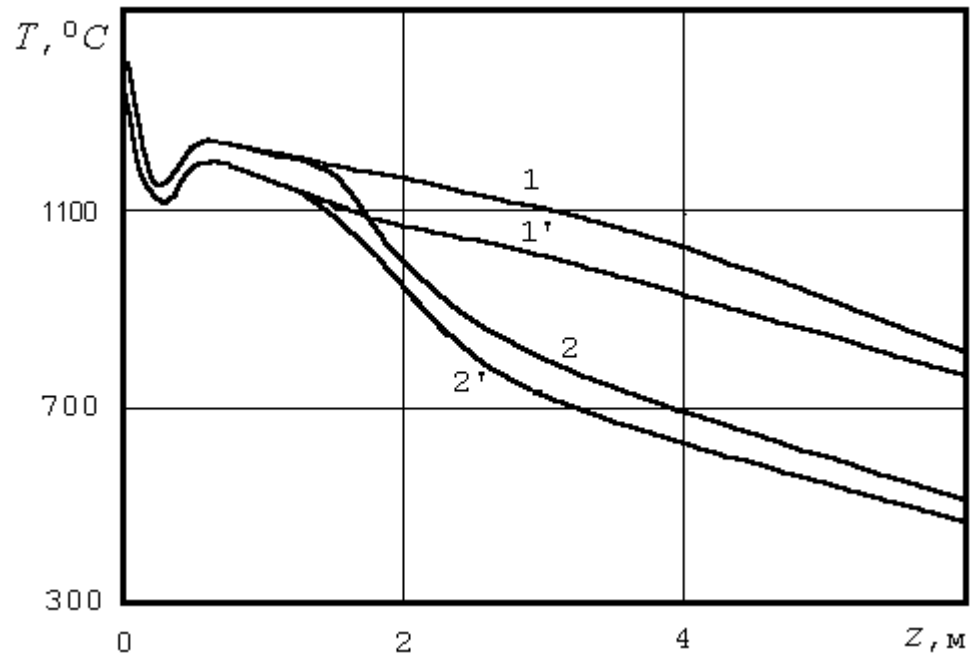


Рис . 4.1. Распределение температуры на поверхности по высоте слитка :

$$1,1' - V = 1 \text{ м / мин ; } \alpha_4 = 1000 \text{ Вт / (м}^2 \text{ К)};$$

$$2,2' - V = 1 \text{ м / мин ; } \alpha_4 = 500 \text{ Вт / (м}^2 \text{ К)};$$

Как показывают расчеты, температура поверхности слитка уменьшается с увеличением интенсивности теплосъема γ в ЗВО. Расчетное поле температур отличается от данных [51] не более чем на 10%.

Проведем сравнение поверхностной температуры, полученной в соответствии с моделью (4.7), (4.9), с данными комплекса численных и промышленных экспериментов по замерам температуры поверхности непрерывнолитой блюмовой заготовки на ДМК [25].

В соответствии с [25] коэффициент теплоотдачи от слитка сечением 335×400 мм на ДМК (эффективный радиус 206.6 мм) изображен на рис.4.2. Реальная поверхностная температура заготовки из стали 20ГР при скорости разливки $V = 0.6$ м/мин изображена кривой 1 на рис. 4.3. Кроме того, на эту кривую нанесены результаты непосредственных замеров температуры (обозначены через *) [68]. Кривой 2 на рис.4.3 изображена температура поверхности слитка, полученная в результате вычислительного

эксперимента согласно модели (4.7), (4.9) для слитка с эффективным радиусом 206.6 мм. Как следует из рисунка характер изменения температуры такой же как и в эксперименте, а отличие в температурах составляет не более 19%. Такое расхождение связано с несоответствием геометрической модели и натурального эксперимента (трехмерный, прямоугольный слиток).

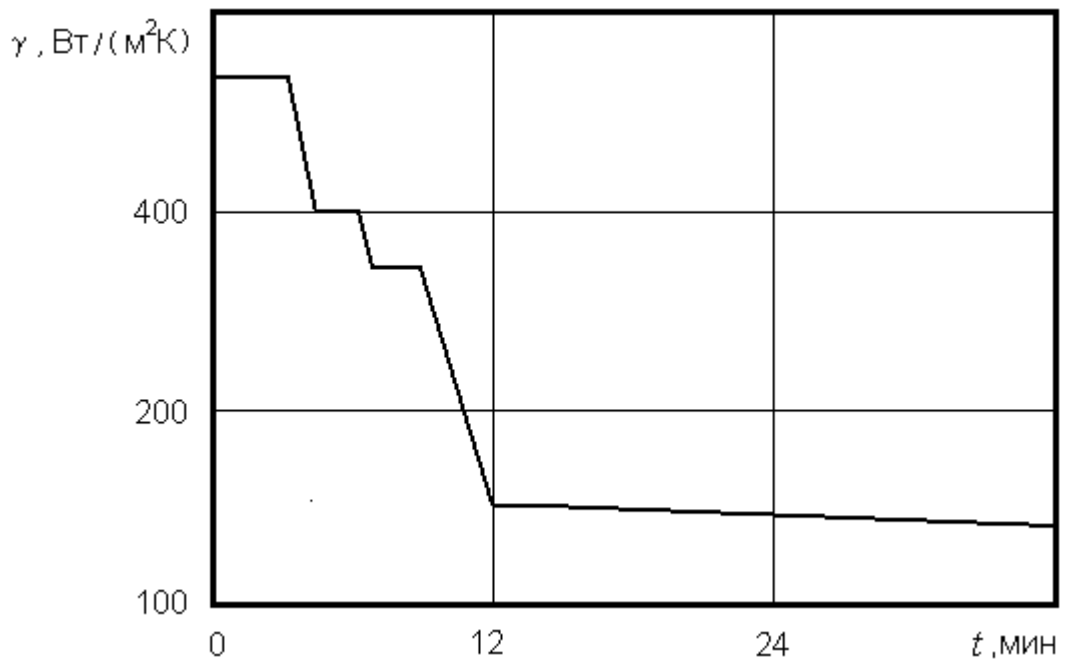


Рис. 4.2. Коэффициент теплоотдачи как функция времени затвердевания заготовки сечением 335x400 мм

Проведенное сравнение показывает, что результаты расчетов и экспериментов хорошо согласуются между собой. Это говорит о том, что используемую теплофизическую модель (4.7), (4.9) можно успешно применять для определения оптимальных условий затвердевания стальных слитков при непрерывном литье.

4.3. Оптимизация теплоотвода по заданному температурному полю металла

Во втором параграфе второго раздела поставлена задача оптимизации теплофизических процессов при формировании непрерывного слитка, которая формулируется следующим образом. Необходимо найти поток тепла в граничном условии (1.4), который минимизирует ТН в форме функционала (2.20):

$$J_1 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz, \quad (3.10)$$

где θ - функция Хевисайда, r_s - радиус границы твердой фазы.

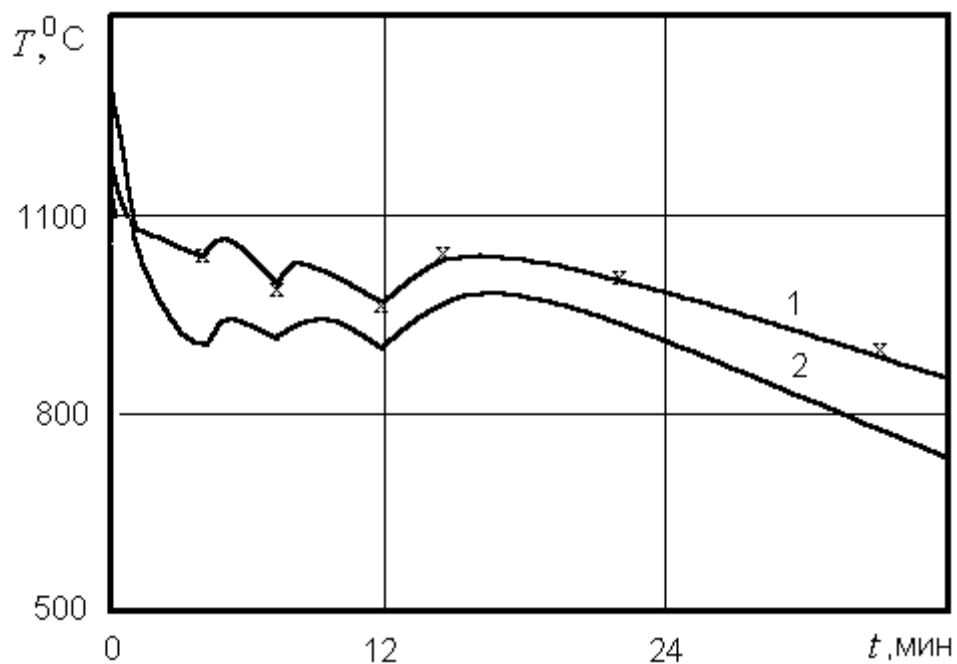


Рис. 4.3. Режим затвердевания заготовки стали 20ГР сечением 335 x 400 мм.

Во втором разделе описаны экстремальные алгоритмы оптимизации. Здесь мы рассмотрим тестовую задачу для исследования эффективности описанных во втором разделе алгоритмов, применительно к задаче оптимизации теплофизических процессов при формировании непрерывного слитка. Перейдем непосредственно к постановке тестовой задачи [19].

Пусть известно оптимальное температурное поле слитка $T_*(r, z)$. Предполагается, что при данной температуре вероятность образования механических дефектов в слитке невелика. Расчеты, проведенные в первом параграфе показали, что температурное поле слитка зависит от величины теплосъема в ЗВО. Поэтому, регулируя поток в ЗВО, можно получить требуемое поле температур $T_*(r, z)$.

Как отмечалось выше, температурное поле слитка определяется в результате решения квазилинейного эллиптического уравнения теплопроводности (1.2):

$$C\rho V \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, (r, z) \in \Sigma. \quad (4.11)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad T \Big|_{\substack{0 \leq r \leq R \\ z=0}} = T_0, \quad \lambda_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma(T - T_c),$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_S = u, \quad S = \{r, z : r = R, z_c < z < Z\}. \quad (4.12)$$

Тестовая задача оптимизации теплофизических процессов при формировании непрерывного слитка формулируется следующим образом. Необходимо найти оптимальный поток тепла $u(z)$ в граничных условиях (4.12), который минимизирует целевой функционал:

$$J_2 = \int_0^R \int_0^Z (T - T_*)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz. \quad (4.13)$$

Тестовые расчеты организовывались следующим образом. Задавался поток тепла в ЗВО $u_*(z)$, который входит в граничное условие (4.12) и в результате решения задачи (4.11), (4.12) рассчитывалось соответствующее поле температур $T(r, z)$. Данная температура принималась за оптимальную T_* . Далее предполагалось, что поток, при котором получена данная температура неизвестен. Поэтому решалась обратная задача о нахождении потока $u(z)$, доставляющего минимум целевому функционалу (4.13).

Градиентный метод наискорейшего спуска имеет вид:

$$u^{k+1}(z) = u^k(z) - b^k \nabla J^k, \quad b^k > 0. \quad (4.14)$$

Градиент ∇J получается в результате применения методики, изложенной в параграфе 3.1, применительно к целевому функционалу (4.13). Объединяя выражение (3.21) с линеаризованным функционалом (4.13)

$$\delta J_2 = \int_0^R \int_0^Z 2(T - T_*)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz \quad (4.15)$$

и, избавляясь от компоненты градиента ∇J , принадлежащей сопряженному пространству состояний, получаем задачу для определения множителя $f(r, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) + C \rho V \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial C \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f + \\ + 2(T - T_*) \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) = 0, \quad (r, z) \in \Sigma. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad \lambda_s \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma f, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_s = 0, \\ f|_{z=Z} = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Градиент определяется через решение задачи (4.16), (4.17) из выражения (2.37):

$$\nabla J^k = -f. \quad (4.18)$$

Метод наискорейшего спуска (4.14) для минимизации функционала J_2 реализовывался приблизительно с условием (1.3):

$$\begin{cases} \text{если } J^{k+1} \leq J^k, & \text{тогда } b^{k+1} = b_1 b^k, b_1 > 1; \\ \text{если } J^{k+1} > J^k, & \text{тогда повторяется предыдущая} \\ & \text{итерация, при } b^{k+1} = b_2 b^k; 0 < b_2 < 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

В выражении (4.19) принималось $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.5$. Начальное значение параметра шага b^0 задавалось из условия не более 20% первого изменения потока (2.2):

$$b_0 = \min_z \left| \frac{0,2u^0(z)}{\nabla J^0(z)} \right|, \quad (4.20)$$

где начальное приближение потока $u^0(z) = 200 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \text{с})$.

На рисунке 4.4 показана сходимость теплового потока $u(z)$ к точному решению u_* на 5, 15 и 100 итерациях. Видно, что градиентный метод наискорейшего спуска (его приблизительная реализация) (4.14), (4.19) не сходится к точному решению u_* за значительное число итераций. От итерации к итерации сходимость метода существенно замедляется. В табл. 3.2 приведены некоторые значения целевого функционала (4.13) и невязки решений $\Delta u^k = \|u^k - u_*\|$. Здесь $\|u^k - u_*\|$ означает норму разности потока на k -ой итерации и оптимального значения потока u_* и вычисляется по формуле:

$$\|u^k - u_*\| = \left[\int_{z_c}^z (u^k - u_*)^2 dz \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.21)$$

Вряд ли следует ожидать существенного улучшения решения при дальнейшем увеличении числа итераций, к тому же разумным числом следует считать число итераций не более 100. После 100 итераций максимальное расхождение найденной и требуемой температур в слитке составляет $\max|T - T_*| = 42^\circ\text{C}$.

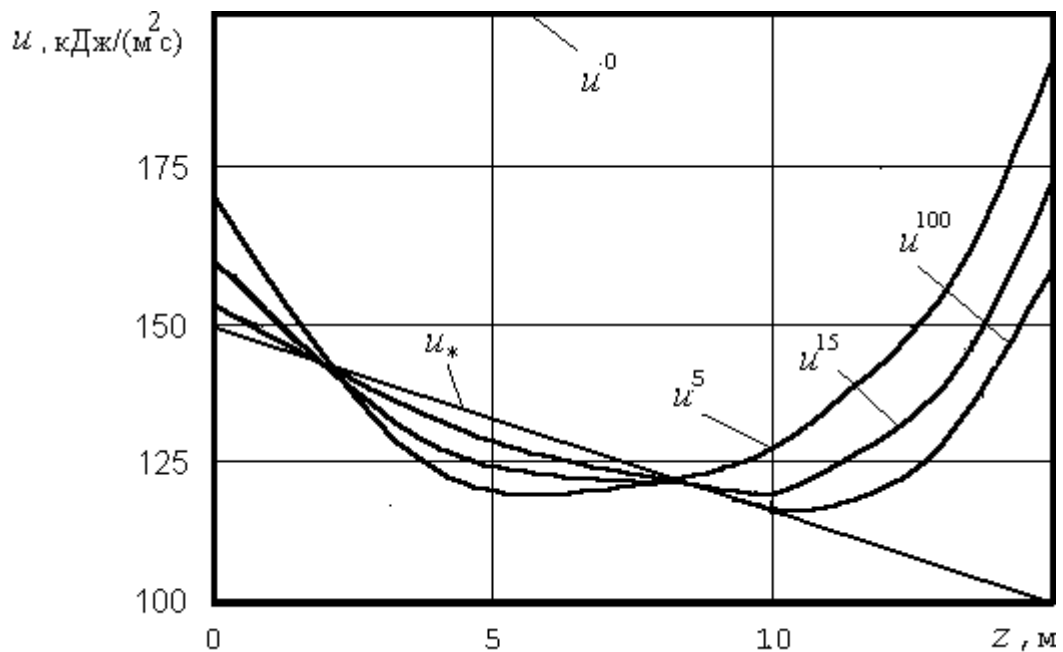


Рис. 4.4 – Сходимость теплового потока к точному решению u_* при использовании метода (4.14), (4.19)

Часто в градиентных алгоритмах минимизации используют не метод наискорейшего спуска, а так называемый метод монотонного убывания [59], в котором принимают параметр $b^k = b^0$ постоянным на всех итерациях. Как показывают расчеты (таблица 4.2) такой метод дает существенно худшие результаты. Действительно, после 100 итераций $\max|T - T_*| = 63^\circ\text{C}$, что существенно хуже предыдущего результата.

Не удалось, по существу, улучшить решение и применением метода сопряженных градиентов:

$$u^{k+1}(z) = u^k(z) - b^k p^k(z), \quad (4.22)$$

где $p^k = \nabla J^k - \frac{\|\nabla J^k\|^2}{\|\nabla J^{k-1}\|^2} p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^k$.

Таблица 4.2. Минимизация целевого функционала J_2 различными экстремальными алгоритмами

Ите- ра- ция	Метод Наискорейшего Спуска		Метод монотонного убывания		Метод сопряженных градиентов		Метод (4.23)	
	$J^k, 10^5$	$\Delta U^k, 10^4$	$J^k, 10^5$	$\Delta U^k, 10^4$	$J^k, 10^5$	$\Delta U^k, 10^4$	$J^k, 10^5$	$\Delta U^k, 10^4$
0	33000	19	33000	19	33000	19	33000	19
10	78	6.5	300	9.8	31	5.4	0.92	0.3
20	14	4.5	130	7.9	4.2	3.0	0.27	0.1
30	7.5	3.6	65	6.7	1.5	2.0	0.26	0.08
40	4.3	3.6	40	5.9	0.7	1.5	0.26	0.08
50	3.0	2.5	27	5.4	0.3	1.7	0.26	0.08
100	1.2	2.1	9.1	3.9	0.3	1.2	0.26	0.08

Решение представлено в табл. 4.2 и на рис. 4.5. Параметр шага b^k вычислялся при $b_2 = 0.4$. Кроме того, нижняя строка условия (4.19), для очищения направления p^k от накапливающихся погрешностей, дополнялась на каждой 5 -ой итерации условием $p^{k-1} = \nabla J^{k-1}$. Минимизация методом сопряженных градиентов практически заканчивалась для 100 итераций. В сравнении с предыдущими методами он не существенно изменил невязку потоков, что наглядно демонстрирует рис.4.5, однако уменьшил

максимальное расхождение найденной и требуемой температур слитка которое составило $\max |T - T_*| = 37^\circ\text{C}$ после тех же 100 итераций.

Таким образом, результаты решения тестовой задачи, полученные традиционными градиентными методами минимизации целевого функционала (4.13) свидетельствуют о низкой эффективности данных методов. Как следует из рисунков 4.4, 4.5 точное решение недостижимо за значительное число итераций.

Теперь рассмотрим решение тестовой задачи прямым экстремальным методом с регулируемым направлением спуска к оптимальному потоку u_* (2.1):

$$u^{k+1}(z) = u^k(z) - b^k \alpha^k(z) \nabla J^k. \quad (4.23)$$

Здесь глубина спуска на каждой итерации вдоль выбранного направления минимизации $\alpha^k(z) \nabla J^k b^k$ определяется числом b^k по методу (4.19). Функция $\alpha^k(z) > 0$. Если $\alpha^k(z) = 1$, то алгоритм (4.23) принимает вид алгоритма метода наискорейшего спуска (4.14). Функция $\alpha^k(z)$ регулирует направление спуска и определяется на первой итерации из условия не более 20% изменения потока (2.6):

$$\alpha^k(z) = \left| \frac{0,2u^0(z)}{\nabla J^0(z)} \right|. \quad (4.24)$$

Решение представлено в табл. 4.2, а на рис. 4.6 показана сходимость искомого потока тепла к оптимальному значению потока u_* для итераций 5, 10, 20. На последней итерации решение практически совпадает с точным тестовым значением u_* , при максимальном расхождении найденной и оптимальной температур $\max |T - T_*| = 0.3^\circ\text{C}$. Имеется быстрая

равномерная сходимость, в отличие от традиционных алгоритмов минимизации (4.14), (4.22), в которых шаг b^k принимался постоянным на всех итерациях. Из таблицы 4.2 следует, что на 20-ой итерации целевой функционал J_2 уменьшился в $12.2 \cdot 10^4$ раза, а невязка решений Δu в 190 раз, что является более лучшим результатом, по сравнению с традиционными методами минимизации (4.14), (4.22). Например, при применении метода сопряженных градиентов (3.22) целевой функционал J_2 уменьшился за те же 20 итераций в $0.79 \cdot 10^4$ раза, невязка решений Δu в 6.3 раза.

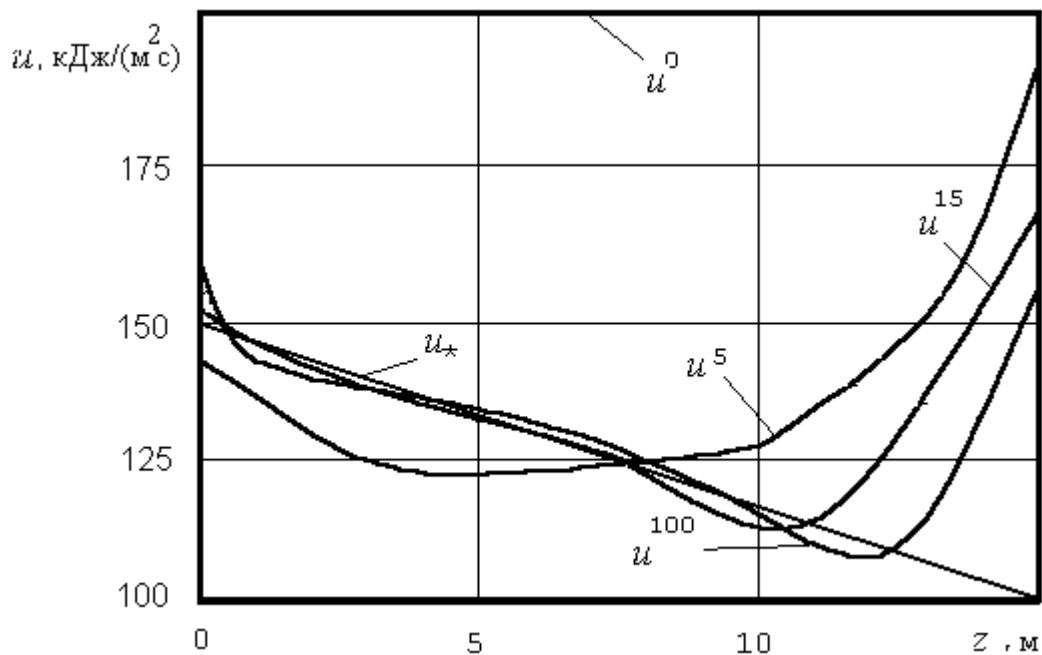


Рис. 4.5. Сходимость теплового потока к точному решению u_* при использовании метода (4.22)

Данные результаты подтверждают высокую эффективность прямого экстремального метода (4.23) для решения задач оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка с квадратичным целевым функционалом.

4.4. Оптимизация теплоотвода с ограничением

В первом разделе поставлена задача оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка. Задача заключается в определении потока тепла в граничном условии (1.4), который минимизирует ТН в форме функционала (1.13). Из анализа функционала (1.13) ясно, задача должна решаться только при дополнительных ограничениях. Дело в том, что минимизация функционала (3.10) обеспечит тепловой поток в ЗВО, при котором жидкая лунка распространится на весь слиток [52, 53].

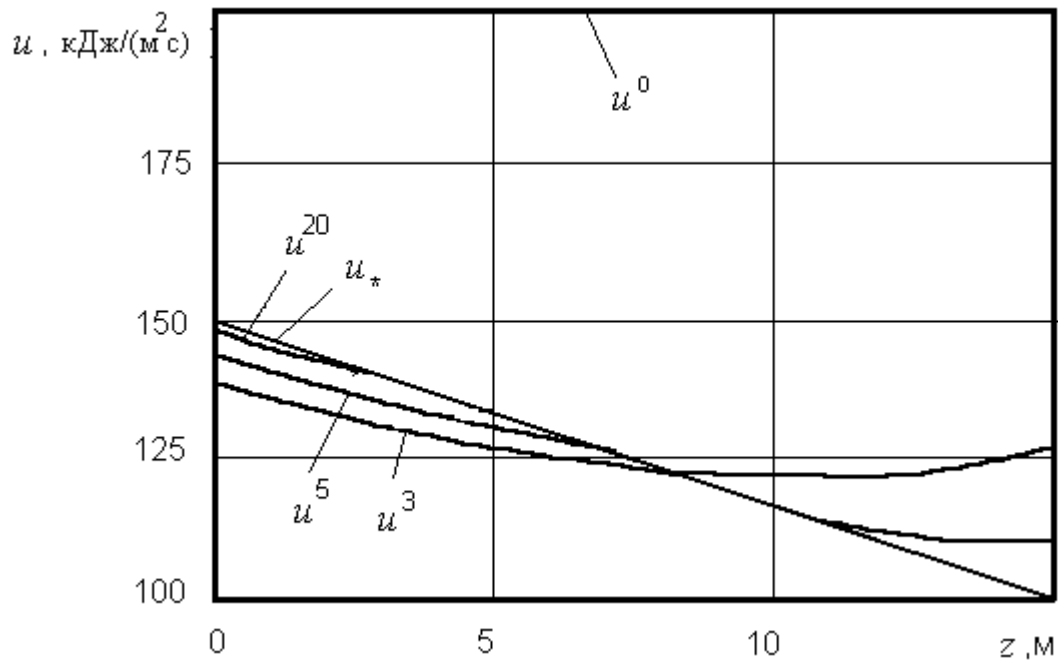


Рис .4.6. Сходимость теплового потока к точному решению u_* при использовании метода (4.23).

Как отмечалось во втором параграфе первого раздела температура поверхности слитка в ЗВО не должна превышать $T_{\max} = 950^{\circ}\text{C}$. Это требование можно рассматривать как ограничение на температуру поверхности слитка при выходе из ЗВО (1.7):

$$T \leq T_{\max}. \quad (4.25)$$

Это ограничение, присутствует на поверхности слитка. При этом, как уже отмечалось во второй главе никаких ограничений на температуру слитка по всему сечению не вводится. Поэтому можно распространить это ограничение по всему сечению слитка при выходе из ЗВО. Тогда ограничение на температуру по сечению слитка будет иметь вид:

$$T \Big|_{\substack{0 < r < R \\ z = Z}} \leq T_{ad}, \quad (4.26)$$

где T_{ad} максимально допустимая температура, равная T_{\max} .

Ограничение (4.26) может быть реализовано в виде штрафного функционала, добавляемого к целевому функционалу J_2 . Штрафной функционал имеет вид (1.10):

$$J_F = \int_0^R I_F dr, \quad (4.27)$$

где I_F -штрафная функция, относительно аргумента T с параметром T_{ad} . Конкретный вид штрафной функции может быть довольно произвольным.

В настоящей монографии, как отмечалось во второй главе, применяется параболическая штрафная функция (1.11):

$$I_F = \begin{cases} (T - T_{ad})^2, & T > T_{ad}; \\ 0, & T < T_{ad}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Тестовая задача оптимизации теплофизических процессов при формировании непрерывного слитка с ограничением (4.26) на температуру слитка формулируется следующим образом. Необходимо найти оптимальный

поток тепла $u(z)$ в граничном условии (4.12), который минимизирует целевой функционал:

$$J_3 = \int_0^R \int_0^z (T - T_*)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz + \chi \int_0^R I_F dr, \quad (4.29)$$

где χ - весовой коэффициент, определяющий степень влияния штрафного функционала. Из выражения (4.29) видно, что явная форма ограничения (4.26) на температуру в данном случае исчезает. Очевидно, что при $\chi = 0$ целевой функционал J_3 превращается в функционал J_2 .

Решение задачи будем искать прямым экстремальным методом с регулируемым направлением спуска (4.23), в котором градиент целевого функционала J_3 определяется из выражения (4.18), после решения соответствующей задачи (4.16) для определения множителя $f(r, z)$. Граничными условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=0}^{0 < z < Z} &= 0, & \lambda_s \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=R}^{0 < z < z_c} &= -\gamma f, & \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_s &= 0, \\ f|_{z=Z} &= -\frac{\chi}{C\rho V} I'_F. \end{aligned} \quad (4.30)$$

где I'_F - производная штрафной функции (4.28):

$$I'_F = \begin{cases} 2(T - T_{ad}), & \text{если } T > T_{ad}, \\ 0, & \text{если } T \leq T_{ad}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Функция $\alpha(z)$ определяется на первой итерации по формуле (4.24). Параметр b^k определялся согласно (4.19) при $b_1 = 1.2$ и $b_2 = 0.4$.

Тестовые расчеты организовывались таким же образом, как и для задачи без ограничения (минимизация функционала J_2). Задавался поток

тепла в ЗВО u_* (см. рисунок 4.7), который входит в граничное условие (4.12) и в результате решения задачи (4.11), (4.12) рассчитывалось соответствующее поле температур, которое принималось за оптимальное T_* . Температура выхода слитка из ЗВО $T_*(r, Z)$ обозначена кривой 1 на рис. 4.8. Как видно из рисунка температура поверхности слитка $T(R, Z)$ больше максимально допустимой T_{ad} , что противоречит ограничению (4.26). Поэтому мы вынуждены решать задачу минимизации функционала (4.29).

Начальное приближение потока $u^0 = 200 \text{кДж}/(\text{м}^2\text{с})$, которому соответствует температура $T(r, Z)$, изображенная на рис. 4.8 кривой 2. Эта температура после первой итерации не превосходит T_{ad} , т.е. удовлетворяет ограничению (4.26), поэтому, в этой ситуации штрафной функционал J_F , определяемый функцией I_F “не работает”. В этой ситуации осуществляется минимизация целевого функционала J_3 без учета J_F . Однако, при приближении потока $u(z)$ к оптимальному $u_*(z)$, температура $T(r, z)$ на 3-й итерации превосходит максимально допустимую температуру T_{ad} , поэтому здесь “включается” штрафной функционал. В результате функционал J_3 возрастает, поэтому параметр b^k уменьшается и, согласно алгоритму (4.19), повторяется предыдущая итерация с уменьшенным в b_2 раз шагом b^k . Шаг b^k уменьшается до тех пор, пока функционал J_3 не перестанет возрастать. После этого, выбор шага b^k осуществляется по первой строке алгоритма (4.19). Алгоритм (4.23) сошелся за 22 итерации. Полученный оптимальный тепловой поток обозначен кривой 1 на рисунке 4.7, а температура кривой 3 на рис.4.8.

Таким образом, мы определили тепловой поток по заданному температурному полю слитка с ограничением на температуру выхода слитка из ЗВО. Полученная температура поверхности слитка $T(R, Z)$ не превышает

максимально допустимую температуру 950°C . Этот результат свидетельствует о том, что прямой экстремальный подход позволяет решать задачи оптимального управления теплофизическими процессами с ограничениями.

В заключение раздела можно сделать следующие выводы:

Проведенное сравнение теплофизических характеристик непрерывного слитка, полученных с использованием модели (4.7), (4.9), с литературными и экспериментальными данными показывает, что результаты расчетов и экспериментов хорошо согласуются между собой. Это говорит о том, что используемую теплофизическую модель можно успешно применять для определения оптимальных условий затвердевания стальных слитков при непрерывном литье;

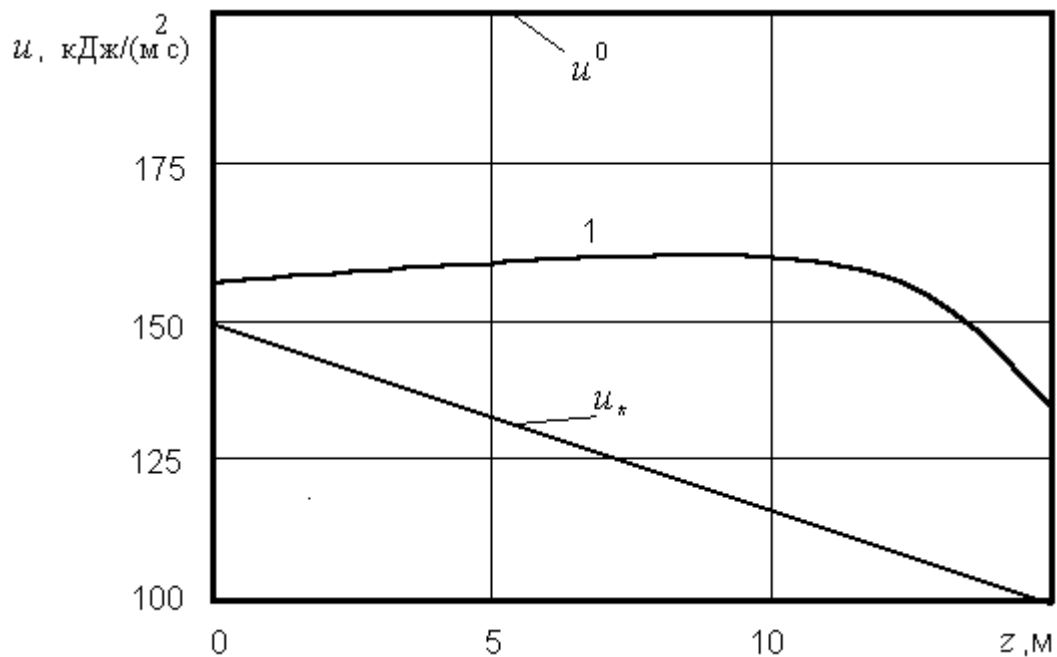


Рис .4.7. Решение задачи удержания температурного поля слитка при ограничении на температуру выхода слитка из ЗВО.

Как следует из рис. 4.8 температура слитка $T(r, Z)$ (кривая 3) при $r < 5.6$ см превышает предельно допустимую температуру T_{ad} , что допускается при использовании штрафной функции I_F . Поэтому штрафной функционал J_F , определяемый такой функцией называется внешним. Вблизи поверхности слитка при $r > 5.6$ см, ограничение (3.26) не нарушается.

Для задачи оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка традиционные методы, основанные на градиентных алгоритмах оптимизации не эффективны;

Высокоэффективным является прямой экстремальный подход, который осуществляет быструю равномерную сходимость искомого потока к оптимальному.

Прямой экстремальный подход является высокоэффективным для задач как с ограничениями так и без ограничений.

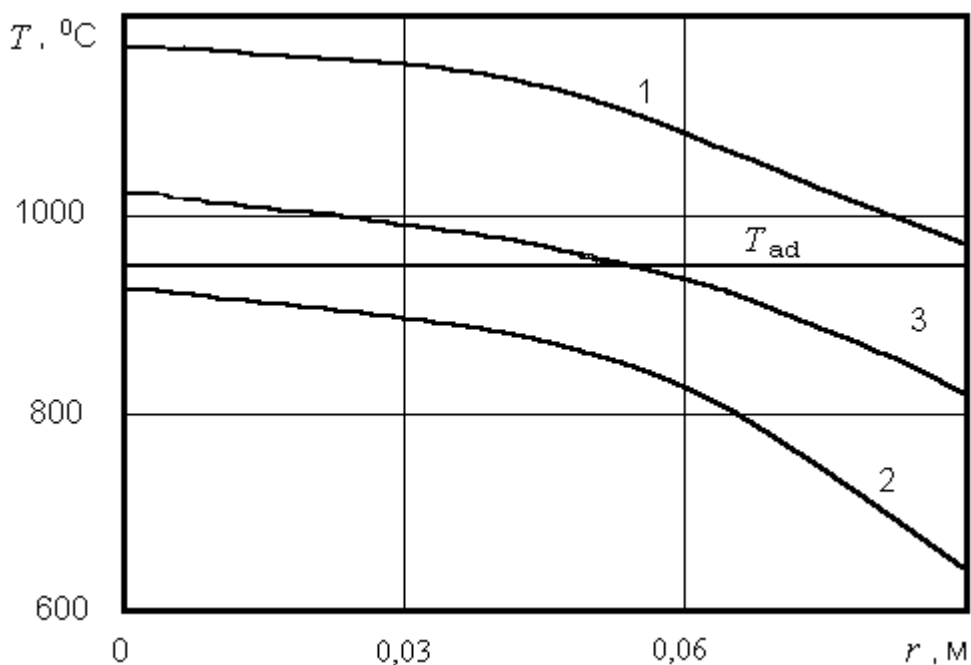


Рис. 4.8. Температура слитка на выходе из ЗВО для тестовой задачи с ограничением. Кривые 1, 2,

3 соответствуют потокам u_* , u^0
и кривой 1 на рис.4.7.

Раздел 5

ОПТИМИЗАЦИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ В СЛИТКАХ И ОТЛИВКАХ

5.1. Минимизация термонапряжений с ограничением на температуру

В первом параграфе первого раздела поставлена задача оптимизации теплофизических процессов при формировании непрерывного слитка цилиндрического сечения. Кратко напомним постановку задачи. Необходимо найти оптимальный поток тепла в граничном условии (1.4), который минимизирует ТН в форме функционала (1.13):

$$J_0 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz. \quad (5.1)$$

Как уже отмечалось во втором разделе, минимизация ТН в форме функционала (5.1) приведет к тому, что слиток перейдет в двухфазной состояние. Это означает, что целевой функционал J_0 обязательно должен минимизироваться при некоторых дополнительных ограничениях. В этом параграфе мы рассмотрим решение задачи при ограничении на температуру выхода слитка из ЗВО, которая не должна превышать T_{ad} .

Ограничение на температуру T_{ad} (1.8), как отмечалось в первой главе, реализуется в виде функционала (1.10):

$$J_F = \int_0^R I_F dr, \quad (5.2)$$

где I_F - штрафная функция, которая имеет вид:

$$I_F = \begin{cases} (T - T_{ad})^2, & T > T_{ad}; \\ 0, & T \leq T_{ad}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Тогда задача минимизации ТН с учетом ограничения (1.8) на температуру выхода слитка из ЗВО формулируется следующим образом. Необходимо найти поток $u(z)$ в граничном условии (1.4), который минимизирует ТН в форме функционала (1.14):

$$J_1 = \int_0^R \int_0^z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz + \chi \int_0^R I_F dr. \quad (5.4)$$

Во втором параграфе третьего раздела был получен градиент целевого функционала J_1 , который определяется из выражения:

$$\nabla J = -f, \quad (5.5)$$

где $f(r, z)$ - сопряженная переменная, определяемая из уравнения (3.23):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) + C\rho \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f + \\ & + 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) \right] = 0, \quad (r, z) \in \Sigma, \end{aligned} \quad (5.6)$$

с граничными условиями (3.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} &= 0, & \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} &= -\gamma f, & \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_s &= -2r \frac{\partial T}{\partial r}, \\ f \Big|_{z=Z} &= -\frac{\chi}{C\rho V} I'_F. \end{aligned} \quad (5.7)$$

В первом параграфе четвертого раздела описан метод решения исходной нелинейной (1.2) - (1.4) и линейной (5.6) - (5.7) задач. Для получения решения использовалась неявная широко известная конечно-разностная схема Кранка-Николсона второго порядка точности [2] с 45 шагами по радиусу слитка и со 750 шагами по длине слитка. Принимались

следующие значения шага сетки по радиусу слитка $\Delta r = 0.002$ м и шага сетки по длине слитка $\Delta z = 0.02$ м.

В этом и следующих параграфах определение оптимальных режимов охлаждения непрерывных слитков с целью управления теплофизическими процессами проводились согласно описанному во втором параграфе второго раздела алгоритму оптимизации с применением прямого итерационного экстремального подхода с регулируемым направлением спуска:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k, \quad (5.8)$$

где число b^k определяет глубину спуска в направлении $\alpha^k \nabla J^k$, и определяется формулой (2.2). Функция $\alpha^k(z)$ регулирует направление спуска, может осуществлять быструю равномерную сходимость к оптимальному потоку тепла и определяется на первой итерации из выражения:

$$\alpha^k(z) = \min_z \left| \frac{0,2u^0(z)}{\nabla J^0(z)} \right|. \quad (5.9)$$

Результаты первых трех параграфов этого раздела получены со следующими значениями параметров. Длина ЗВО $Z = 15$ м, длина кристаллизатора $z_c = 1.0$ м, температура воды в кристаллизаторе $T_c = 20^\circ\text{C}$, Скорость литья $V = 0.013$ [м/с]. Диаметр слитка 18 см из стали СТЗ, для которой температура ликвидуса $T_L = 1523^\circ\text{C}$, температура солидуса $T_s = 1460^\circ\text{C}$, скрытая теплота кристаллизации $W = 272$ кДж/кг, равновесный коэффициент распределения примесей $k = 0.4$, $C_l = 838$ Дж/(кг · К), $C_s = 661$ Дж/(кг · К), $\rho_l = 7000$ кг/м³, $\rho_s = 7620$ кг/м³, $\lambda_l = 26.5$ Вт/(м · К), $\lambda_s = 30.3$ Вт/(м · К).

Задача минимизации ТН в форме функционала (5.4) была решена методом (5.8) с $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.3$ и весовым коэффициентом $\chi = 5 \cdot 10^3$ при

начальном приближении потока в ЗВО $u^0 = 400 \text{ кДж}/(\text{м}^2\text{с})$. Исследуем влияние ограничения (1.8) на получаемые оптимальные значения тепловых потоков. Для этого рассчитаем тепловые потоки для разных допустимых температур T_{ad} .

На рис. 5.1 показаны полученные оптимальные тепловые потоки $u(z)$ в ЗВО $z \in (z_c, Z)$ для допустимых температур $T_{ad} = 950^\circ\text{C}$ и $T'_{ad} = 1050^\circ\text{C}$. Минимизирующий алгоритм (5.8) практически закончил сходимость за 20 итераций.

При максимально допустимой температуре $T_{ad} = 950^\circ\text{C}$ функционал J_1 (5.4) уменьшился в 2.8 раза, а критерий ТН J_0 (5.1) - в 3.1 раза. Полученный оптимальный тепловой поток $u(z)$ обозначен кривой 1 на рисунке 5.1. Температура при найденном оптимальном значении потока увеличилась по сравнению с начальным приближением потока u^0 . Как следствие этого - увеличение глубины жидкой лунки по температуре ликвидуса до $H_L = 7.7\text{ м}$, а по температуре солидуса до $H = 9.8\text{ м}$ (глубина лунки при начальном приближении потока u^0 составляла $H_L = 6.7\text{ м}$ и $H = 7.5\text{ м}$).

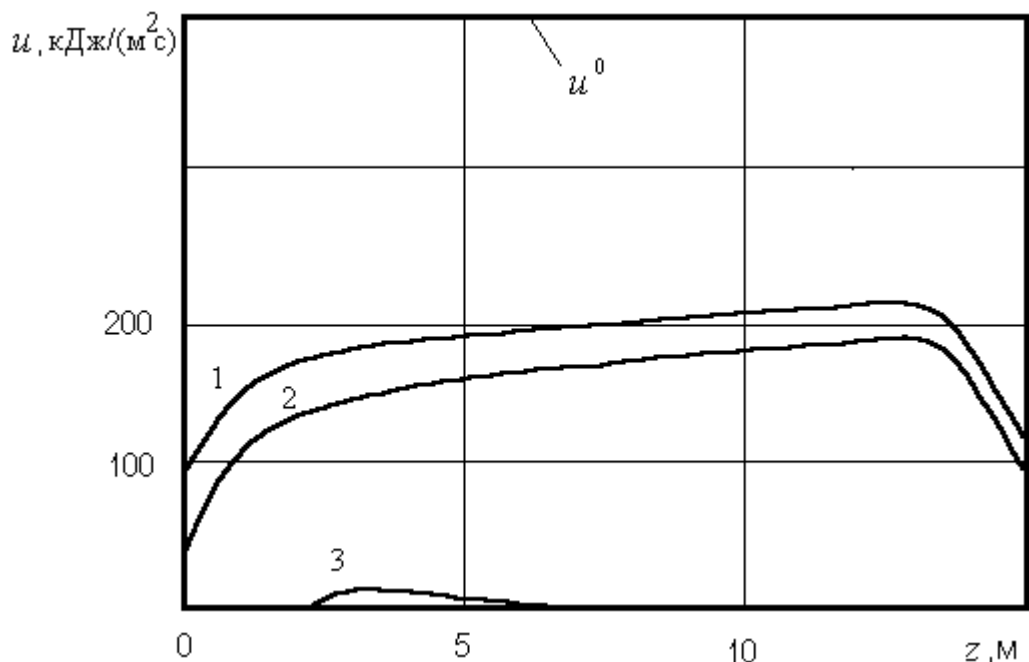


Рис. 5.1. Оптимальные тепловые потоки в ЗВО для максимально допустимых температур:

1. - $T_{ad} = 950^{\circ}\text{C}$; 2. - $T'_{ad} = 1050^{\circ}\text{C}$;

3. – без ограничения на температуру.

Если максимально допустимую температуру выхода слитка из ЗВО увеличить до $T'_{ad} = 1050^{\circ}\text{C}$, то мы получим новое значение оптимального теплового потока $u(z)$ обозначенного кривой 2 на рисунке 5.1. При этом существенно снижаются ТН в затвердевшей части S' слитка (см. рис. 2.1), критерий J_0 уменьшается в 3.8 раза. Данный факт имеет естественное объяснение, чем медленнее мы охлаждаем слиток, тем меньшим ТН он подвергается, что и подтвердили расчеты.

В обоих случаях управления внутри слитка при $r < 0.06\text{ м}$ на выходе из ЗВО, т.е. при $z = Z$, температура T превышает максимально допустимые значения (рис. 5.2), что допускается при учете ограничения (1.8) в виде функционала J_F , с функцией I_F (5.3). Вблизи поверхности слитка, при $r > 0.06\text{ м}$ и $z = Z$, ограничение (1.8) на максимально допустимую температуру T_{ad} не нарушается. Это означает, что поток тепла в данной области может быть снижен для уменьшения ТН, что и демонстрируют концы кривых на рис.5.1. Здесь потоки тепла резко снижаются. Таким образом, полученные оптимальные потоки тепла в ЗВО имеют физический смысл.

Для обеспечения стабильности процесса непрерывной разливки толщина затвердевшей корочки на выходе из кристаллизатора должна быть не менее 25% радиуса слитка [30]. При найденном оптимальном тепловом потоке (кривая 1 на рис. 5.1) поверхность слитка на выходе из кристаллизатора разогревается на 129°C , но толщина твердой корочки равна 2.4 см, что составляет 26.6% радиуса слитка (9 см). От начала ЗВО до координаты $z = 2.5\text{ м}$ поверхностная температура слитка увеличивается на

125°С, затем плавно убывает до координаты $z \cong 14.5$ м. В завершающей части ЗВО температура поверхности слитка практически стабилизируется (рис. 5.3). Это связано с тем, что в завершающей части ЗВО тепловой поток $u(z)$ резко снижается (кривая 1 на рис.5.1).

На основании полученных результатов оптимального теплоотвода в зоне вторичного охлаждения непрерывного слитка можно рекомендовать реализовывать поток тепла в виде функции, растущей от кристаллизатора по мере вытяжки слитка и резко убывающей в завершающей фазе вторичного охлаждения. Во избежание прорыва твердой корочки слитка сразу за кристаллизатором, функция теплоотвода должна начинаться не с нулевого значения, а со значения приблизительно равного потоку тепла в конечной зоне кристаллизатора.

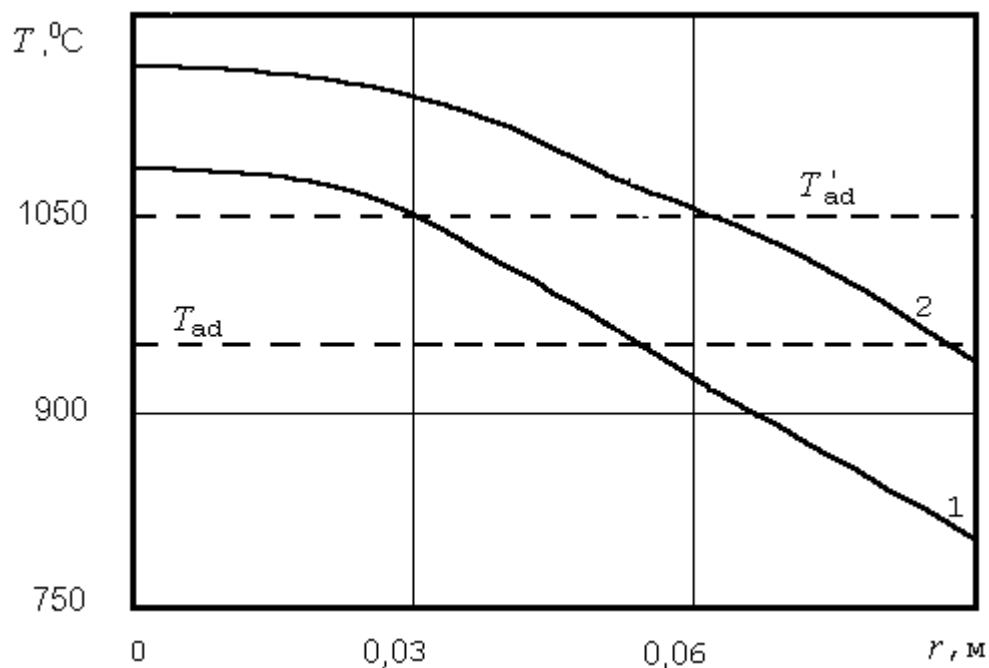


Рис. 5.2. Температура слитка $T(r, Z)$ в завершении ЗВО для максимально допустимых температур:

1. - $T_{ad} = 950^\circ\text{C}$;
2. - $T'_{ad} = 1050^\circ\text{C}$;

Если ограничение (1.8) на температуру отсутствует, то ТН за 10 итераций снижаются в 30 раз по сравнению с их начальным значением J^0 . По-существу ТН исчезают. При этом функция оптимального теплового потока $u(z)$ принимает принципиально новый вид - кривая 3 на рисунке 5.1. При таком “оптимальном” потоке твердая фаза слитка остается только возле кристаллизатора, т.е. $S' \approx 0$. Во всей остальной части ЗВО слиток находится в двухфазном состоянии при температуре солидуса с градиентом $\nabla T = 0$.

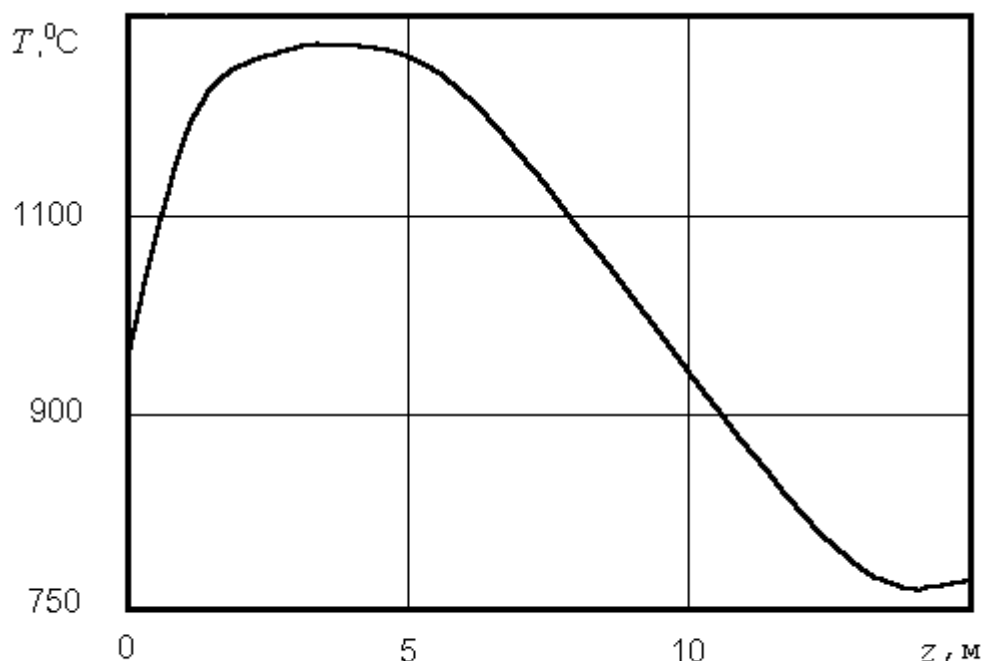


Рис. 5.3 – Температура поверхности слитка $T(R, z)$ в ЗВО при оптимальном тепловом потоке 1 рис. 5.1

Таким образом, мы видим, что ограничение на максимально допустимую температуру выхода слитка существенно влияет на вид оптимального теплового потока $u(z)$ и на ТН в слитке. Ограничение (1.8) для обширного круга задач минимизации ТН при непрерывной разливке стали введено и исследовано в работах [14 - 21, 45, 70]. До этого времени, как отмечалось в первом разделе, данные задачи оптимизации исследовались без

каких-либо ограничений, что, как показали результаты расчетов, принципиально недопустимо. В дальнейшем максимально допустимую температуру выхода слитка из ЗВО изменять не будем и примем равной 950°C .

В следующем параграфе рассмотрим результаты минимизации ТН в слитке при ограничении на объем жидкой лунки.

5.2. Минимизация термонапряжений с ограничением на объем жидкой лунки

Как следует из расчетов, проведенных в параграфе 5.1, при минимизации ТН в форме функционала (5.1) возрастает протяженность переходной зоны твердо-жидкого состояния. В первой главе отмечалось, что при возрастании объема жидкой лунки возрастает пористость слитка. Согласно [52 - 54], для уменьшения пористости параметры процесса затвердевания непрерывного слитка необходимо выбирать так, чтобы протяженность двухфазной зоны была минимальной. Объем жидкой лунки зависит от объема двухфазного состояния. Поэтому, объем жидкой лунки можно рассматривать как ограничение при минимизации ТН в форме функционала (5.1).

В этом параграфе рассмотрим результаты решения задачи минимизации ТН при ограничении на объем жидкой лунки. Напомним кратко постановку задачи. Необходимо определить оптимальный поток тепла в ЗВО, который минимизирует ТН в форме функционала (1.17):

$$J_2 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz + \\ + \chi \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(T - T_s) \theta(z - z_c) r dr dz. \quad (5.10)$$

Во втором параграфе третьего раздела был получен градиент целевого функционала (5.10), который определяется из выражения (4.5), в котором сопряженная переменная $f(r, z)$ определяется из уравнения (3.27):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) + C \rho V \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial C \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f + 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) - \chi \delta(r - r_s) \right] = 0, \quad (r, z) \in \Sigma, \quad (5.11)$$

с граничными условиями (3.28):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad \lambda_s \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma f, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_s = -2r \frac{\partial T}{\partial r}, \\ f|_{z=Z} = 0. \quad (5.12)$$

Поиск оптимального потока тепла в ЗВО будем осуществлять согласно описанному в параграфе 2 второго раздела алгоритму методом (2.5).

Начальное приближение потока $u^0 = 400 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \text{с})$. За 17 итераций, при весовом коэффициенте $\chi = 3 \cdot 10^7$ и $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.4$, алгоритм (2.5) сошелся. Полученный оптимальный поток $u(z)$ представлен на рис. 5.4. При этом, ТН, представленные функционалом J_0 , уменьшены в 6.6 раз, а объем жидкой лунки увеличился в 1.1 раза. Этого и следовало ожидать - при уменьшении теплового потока $u(z)$ объем жидкой лунки должен расти, а градиенты температуры по сечению слитка уменьшаться. Глубина жидкой лунки при таком оптимальном потоке увеличилась по сравнению с начальным приближением u^0 ($H = 7.3 \text{ м}$, $H_L = 6.7 \text{ м}$) до значения $H = 8.4 \text{ м}$ ($H_L = 6.3 \text{ м}$).

Полученный результат имеет физический смысл. Объем жидкой лунки определяется тепловым потоком в области от начала ЗВО до завершения лунки. Очевидно, что при уменьшении теплового потока $u(z)$ объем лунки

возрастает, а при возрастании - убывает. Для градиентов температуры (ТН) эта зависимость является обратной. Поскольку минимизация ТН осуществляется при ограничении на объем жидкой лунки, то поток $u(z)$ имеет максимальное значение от начала вторичного охлаждения до завершения лунки, т.к. при возрастании теплоотода объем лунки уменьшается. В этой области слитка ТН будут относительно высокими, поскольку при высоком теплоотводе наблюдаются высокие значения градиентов температуры, от величины которых и зависят ТН. В области от лунки до завершения ЗВО минимизация ТН осуществляется без никаких ограничений, поэтому поток $u(z)$ в данной области имеет меньшее значение, чем в области жидкой лунки, поскольку при уменьшении потока должны уменьшаться градиенты температуры.

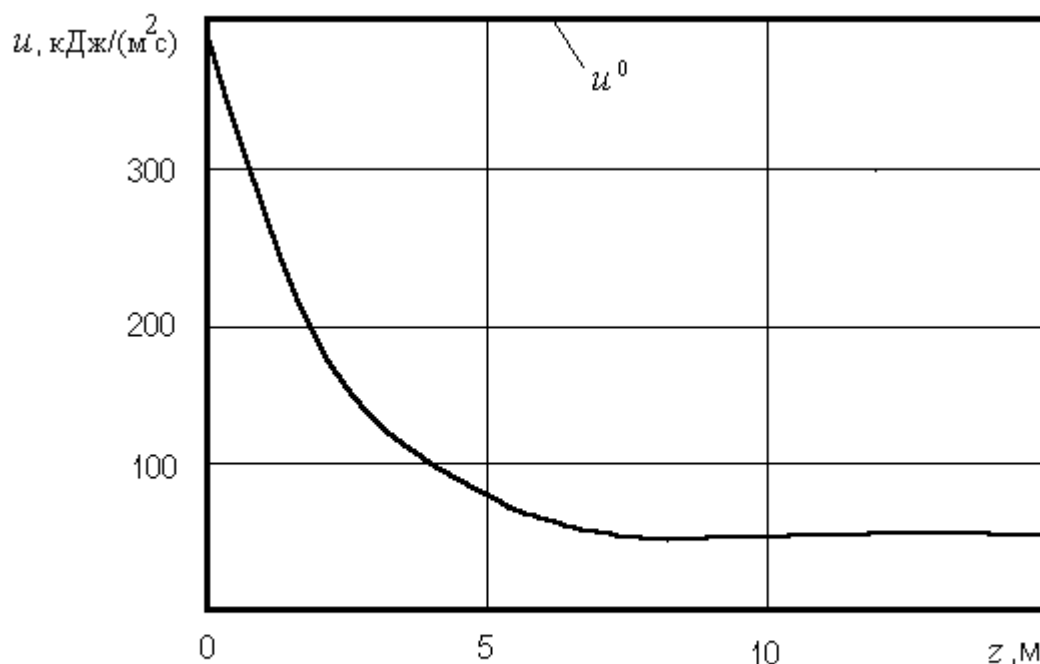


Рис. 5.4 – Оптимальный тепловой поток в ЗВО при ограничении на объем жидкой лунки

Полученный результат превосходит с точки зрения минимальности ТН. Действительно, функционал (5.1), определяющий ТН, уменьшился в 6.6 раз, а в задаче с ограничением на температуру выхода слитка из ЗВО всего лишь в 3.1 раза.

При найденном оптимальном тепловом потоке (см. рис. 5.5) поверхность слитка на выходе из кристаллизатора разогревается на 54°C . В связи с тем, что поток в начале ЗВО имеет максимальное значение и далее уменьшается до $z \cong 7.0\text{ м}$, температура поверхности слитка увеличивается (см. рис. 5.6). Далее, при $z > 7.0\text{ м}$, температура поверхности слитка плавно уменьшается до 1165°C , поскольку в этой области оптимальный поток $u(z)$ практически стабилизируется.

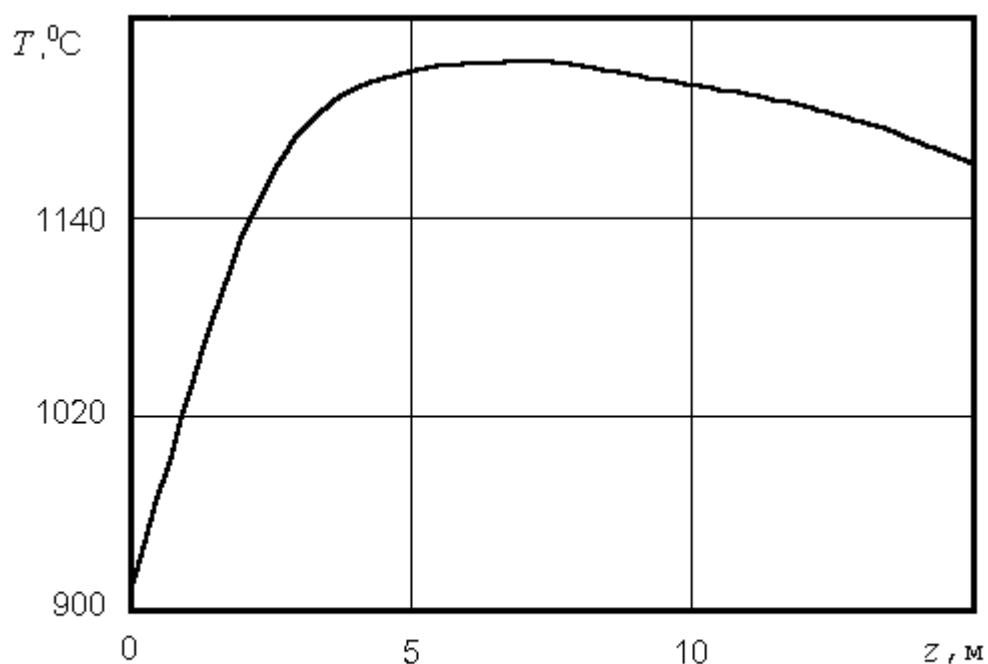


Рис. 5.5. Температура поверхности слитка $T(R, z)$ в ЗВО при оптимальном тепловом потоке рис. 5.4

Ограничение на объем жидкой лунки в задачах минимизации ТН при непрерывной разливке стали введено и исследовано впервые в работах [14, 18, 23, 45, 70].

Но этот результат имеет один существенный недостаток. Согласно [23], температура поверхности слитка в завершении ЗВО должна быть не выше $T_{ad} = 950^\circ \text{C}$. Однако, при найденном оптимальном потоке тепла $u(z)$ (рис. 5.4), температура поверхности слитка при выходе из ЗВО существенно превышает максимально допустимую температуру T_{ad} (рис. 5.6). Поэтому, для данной задачи возникает необходимость введения ограничения на температуру выхода слитка из ЗВО. Решение этой задачи рассмотрим в следующем параграфе.

5.3. Минимизация термонапряжений с ограничением на температуру и объем жидкой лунки

В этом параграфе рассмотрим результаты решения задачи минимизации ТН при совместном ограничении на объем жидкой лунки и температуру выхода слитка из ЗВО. Напомним кратко постановку задачи. Необходимо определить оптимальный поток тепла $u(z)$, который минимизирует ТН в форме функционала:

$$J_3 = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r - r_s) \theta(z - z_c) r dr dz + \\ + \chi_1 \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(T - T_s) \theta(z - z_c) r dr dz + J_F. \quad (5.13)$$

Во втором параграфе третьего раздела был получен градиент целевого функционала (5.13), который определяется из выражения (3.26), в котором $f(r, z)$ - сопряженная переменная, определяемая из уравнения (3.29), с граничными условиями (3.30).

Поиск оптимального потока тепла в ЗВО будем осуществлять согласно описанному в параграфе 2 второго раздела алгоритму методом (2.1).

Начальное приближение потока $u^0 = 400 \text{ кДж}/(\text{м}^2\text{с})$. За 21 итерацию, при весовых коэффициентах $\chi_1 = 3 \cdot 10^7$, $\chi = 5 \cdot 10^7$ и $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.4$, алгоритм (2.1) сошелся. Полученный оптимальный поток $u(z)$ представлен на рис. 5.7. Глубина жидкой лунки изменилась, по сравнению с предыдущим расчетом и составила $H = 7.9 \text{ м}$, а глубина жидкой лунки, полученной по температуре ликвидуса имеет такое же значение, как и в задаче с ограничением на объем жидкой лунки $H_L = 6.3 \text{ м}$. Напомним, что при начальном приближении потока u^0 глубина жидкой лунки составляла $H = 7.3 \text{ м}$ ($H_L = 6.7 \text{ м}$).

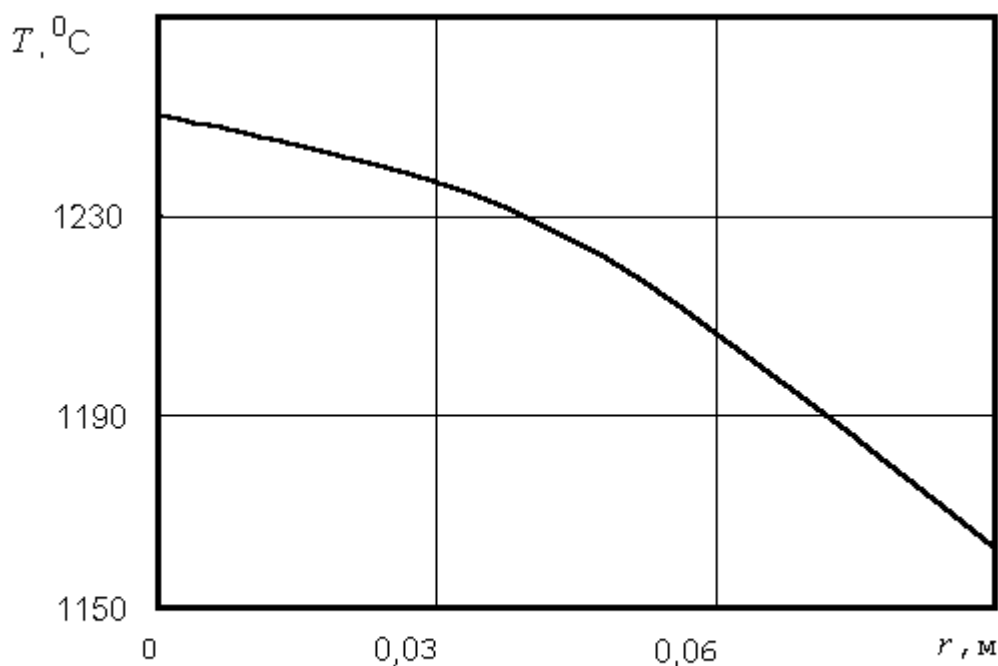


Рис. 5.6. Температура слитка $T(r, Z)$ в завершении ЗВО при оптимальном тепловом потоке рис. 5.4

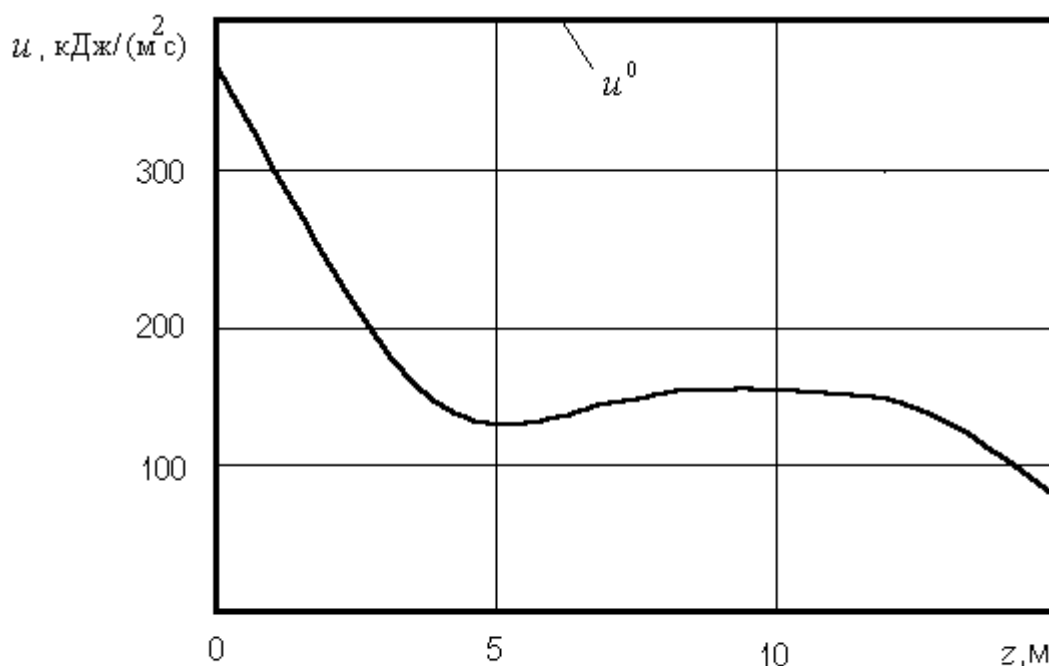


Рис. 5.7 – Оптимальный тепловой поток в ЗВО при ограничении на температуру и объем жидкой лунки

При найденном оптимальном тепловом потоке (см. рис. 5.7) поверхность слитка на выходе из кристаллизатора разогревается на 61°C . В связи с тем, что поток в начале ЗВО имеет максимальное значение и далее уменьшается до $z \cong 5\text{ м}$, температура поверхности слитка увеличивается (рис. 5.8). Далее, при $z > 5\text{ м}$, температура поверхности слитка плавно уменьшается, поскольку области $5\text{ м} < z < 10.5\text{ м}$, оптимальный поток $u(z)$ увеличивается. В завершении ЗВО при $z > 10.5\text{ м}$, поток $u(z)$ плавно уменьшается (рис. 5.8), а температура поверхности слитка при $z > 14.5\text{ м}$ практически стабилизируется.

Объем жидкой лунки определяется теплоотводом в области от начала ЗВО до завершения лунки. Очевидно, что при уменьшении теплового потока $u(z)$ объем лунки возрастает, а при возрастании - убывает. Для градиентов температуры (ТН) эта зависимость обратная. Поскольку минимизация ТН осуществляется при ограничении на объем жидкой лунки, то поток $u(z)$

имеет максимальное значение от начала вторичного охлаждения до завершения лунки, т.к. при возрастании теплоотода объем лунки уменьшается. В этой области слитка ТН будут относительно высокими, поскольку при высоком теплоотводе наблюдаются высокие значения градиентов температуры, от величины которых и зависят ТН. В области $5\text{ м} < z < 11.5\text{ м}$ поток $u(z)$ возрастает по длине слитка.

Как и в первом параграфе, внутри слитка при $r < 0.06\text{ м}$ на выходе из ЗВО при $z = Z$ температура превышает максимально допустимое значение T_{ad} (см. рис. 5.9). Вблизи поверхности слитка, при $r > 0.06\text{ м}$ ограничение (2.4) на максимально допустимую температуру не нарушается. Это означает, что поток тепла в области $z > 11.5\text{ м}$ может быть снижен для уменьшения ТН, что и демонстрирует конец кривой на рис. 5.7.

Совместное ограничение на температуру выхода слитка из ЗВО и объем жидкой лунки в задачах минимизации ТН при непрерывной разливке стали введено и исследовано в работах [18, 23, 45, 70].

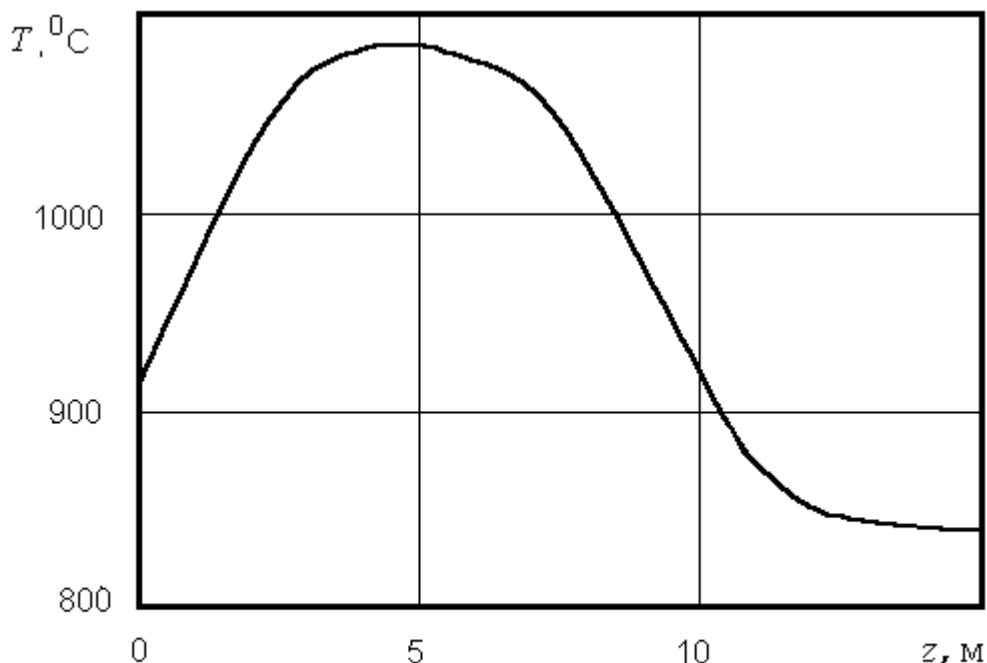


Рис. 5.8 – Температура поверхности слитка $T(R, z)$ в ЗВО при оптимальном потоке рис. 5.7

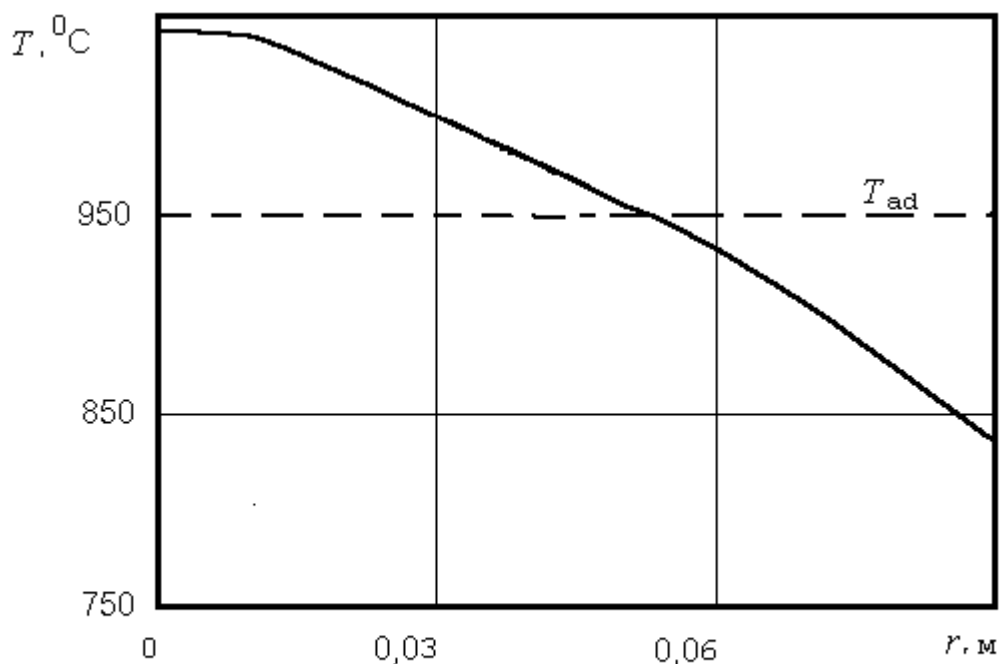


Рис. 5.9 – Температура слитка $T(r, Z)$ в завершении ЗВО при оптимальном потоке рис. 5.7

На основании полученного результата оптимального теплоотвода в ЗВО непрерывного слитка можно рекомендовать реализовывать поток тепла в виде функции, убывающей от кристаллизатора до завершения жидкой лунки, далее растущей по мере вытяжки слитка и убывающей в завершающей фазе ЗВО.

5. 4. Минимизация степени дисперсности в непрерывном слитке при ограничении на температуру

В этом параграфе рассмотрим результаты решения задачи минимизации степени дисперсности при ограничении на температуру. Напомним кратко постановку задачи. Необходимо определить оптимальный

поток тепла в ЗВО, который минимизирует уровень дисперсности в форме функционала (1.20):

$$\begin{aligned}
 J_{11}(u) = & \chi_0 \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \Theta(r - r_s) r dr dz + \\
 & + \chi_2 \int_0^R \int_0^Z \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} \Theta(r - r_L) \Theta(z - z_s) r dr dz + \chi_1 J_2.
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Во втором параграфе третьей главы был получен градиент целевого функционала (5.14), который определяется из выражения (4.5), в котором сопряженная переменная $f(r, z)$ определяется из уравнения (3.31):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) + c \rho \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} - V \frac{\partial c}{\partial T} \rho \frac{\partial T}{\partial z} f + A = 0, \tag{5.15}$$

где

$$\begin{aligned}
 A = & \left\{ \Theta(r - r_L) \Theta(r - r_s) r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(B \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\
 & + B \frac{\partial T}{\partial r} (\delta(r - r_L) + \delta(r - r_s)) + \\
 & + 2 \chi_0 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Theta(r - r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r - r_s) \right],
 \end{aligned}$$

с граничными условиями (3.32):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ z_c < z < Z}} = 0, \quad \left. \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{\substack{r=R \\ z_c < z < Z}} = -(2\chi_2 + B\Theta(r - r_s)\Theta(r - r_L)) \frac{\partial T}{\partial r}.$$

$$f|_{\substack{0 < r < R \\ z=Z}} = - \frac{B \frac{\partial T}{\partial z} \Theta(r-r_S) \Theta(r-r_L)}{c \rho} - \frac{2 \chi_2}{c \rho} (T - T_{\max}), \quad (5.16)$$

Поиск оптимального потока тепла в ЗВО будем осуществлять согласно описанному во втором параграфе второго раздела алгоритму методом (2.1).

$$u^{k+1}(z) = u^k(z) - b^k \alpha^k(z) \nabla J(u^k; z), \quad (5.17)$$

где b^k - шаг спуска в направлении $\alpha^k \nabla J^k$ определяется из выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } J^{k+1} \leq J^k, \text{ тогда } b^{k+1} = b_1 b^k, b_1 > 1; \\ \text{если } J^{k+1} > J^k, \text{ тогда повторяется предыдущая} \\ \text{итерация, при } b^{k+1} = b_2 b^k; 0 < b_2 < 1. \end{array} \right.$$

В расчетах принималось $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.5$. Функция $\alpha^k(z)$ регулирует направление спуска с целью обеспечения равномерной сходимости к оптимальному значению функции $u(z)$. В работе она вычислялась на первой итерации из выражения:

$$\alpha^k(z) = \left| \frac{0,2u^0(z)}{\nabla J(u^0; z)} \right|.$$

Проанализируем возможность определения оптимальных режимов охлаждения $u(z)$ для разных значений весовых коэффициентов χ_0, χ_1, χ_2 .

Пусть $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Тогда задача заключается в определении такого теплового потока $u(z)$ в зоне вторичного охлаждения при реализации которого в твердой части слитка будут наблюдаться минимальные градиенты температур. Очевидно, что в этом случае минимум функционала (5.14)

достигается при $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$. Это означает, что минимизация функционала J

обеспечит оптимальный теплоотвод, при котором исчезнет твердая фаза,

слиток перейдет в двухфазное состояние. Поэтому, результаты минимизации функционала J при $\chi_1 = \chi_2 = 0$ не представляют практического интереса.

Задача минимизации уровня дисперсности J_1 без ограничений, т.е. при $\chi_0 = \chi_2 = 0$ нельзя считать корректно поставленной. Дело в том, что сопряженная задача (6), (7) имеет нетривиальное (ненулевое) решение только в области $z_c < z < z_s$, поскольку $f(r, z)$ полностью определяется свободным членом A , который в данной области ненулевой. Поэтому определить оптимальный тепловой поток $u(z)$ возможно только в области $z_c < z < z_s$. В области $z > z_s$ задача не управляема. В связи с этим, рассмотрим результаты минимизации дисперсности дендритной структуры с ограничениями на градиенты температур в твердой корочке слитка и температуру выхода металла из ЗВО.

Результаты получены со следующими значениями параметров. Длина ЗВО $Z = 15\text{ м}$, длина кристаллизатора $z_c = 1\text{ м}$, температура воды в кристаллизаторе $T_c = 20^\circ\text{ C}$, скорость литья $V = 0,7\text{ м/мин}$, диаметр слитка $D = 0,2\text{ м}$ из стали СТЗ, равновесный коэффициент распределения примесей $k_0 = 0,4$. Начальное приближение потока $u_0 = 400\text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

Оптимальный тепловой поток при коэффициенте теплопередачи $\gamma = 800\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ и весовых коэффициентах $\chi_0 = 1, \chi_1 = 2 \cdot 10^5, \chi_2 = 5 \cdot 10^3$ изображен на рис. 5.10 (кривая 1). Минимизирующий алгоритм (5) практически закончил сходимость к 19-й итерации. В результате минимизации функционала J он уменьшился в 1,03 раз, градиенты температур уменьшились в 2,25 раза, степень дисперсности увеличилась в 1,13 раза.

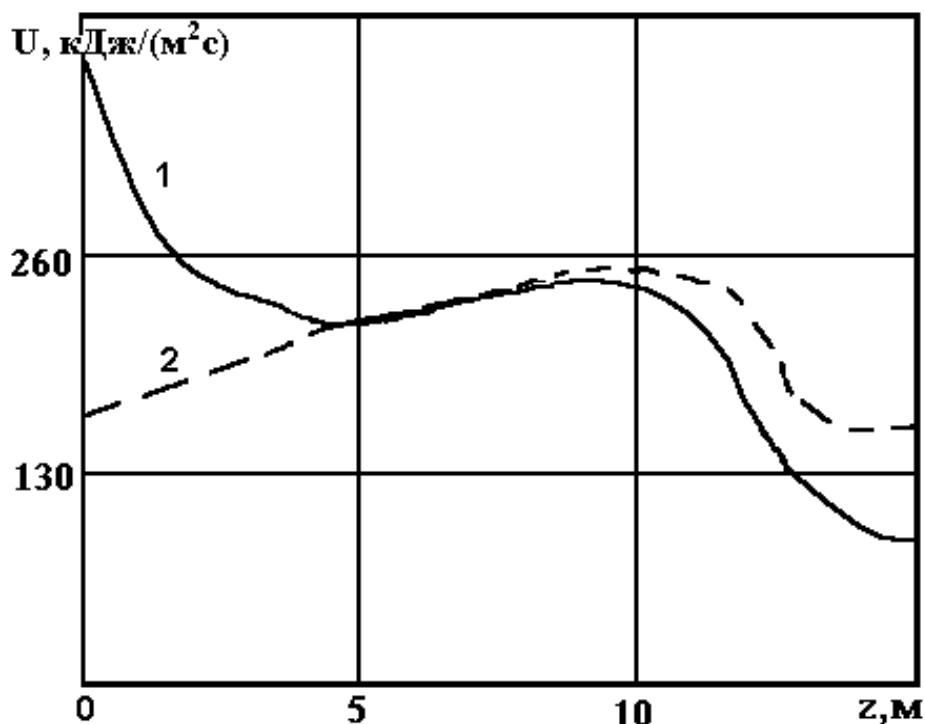


Рис. 5.10 - Оптимальные режимы охлаждения непрерывного слитка:

1. При $\chi_0 = 1; \chi_1 = 2 \cdot 10^5; \chi_2 = 5 \cdot 10^3$.

2. При $\chi_0 = 1; \chi_1 = 0; \chi_2 = 5 \cdot 10^3$.

Для того чтобы показать влияние учета дисперсности дендритов на оптимальное решение были проведены расчеты минимизации J при отсутствии J_1 , т.е. при $\chi_0 = 1$, $\chi_1 = 0$ и $\chi_2 = 5 \cdot 10^3$. Кривая 2 показывает полученный оптимальный поток. При этом J за те же 19 итераций уменьшился в 1,91 раз, градиенты температур уменьшились в 2,51 раза. Уровень дисперсности полученного оптимального режима охлаждения вырос в 1.08 раз по сравнению с предыдущим оптимальным режимом. Из сравнения кривых видно, что требование минимизации дисперсности J_1 существенно влияет на оптимальное решение в начале ЗВО. Тепловой поток, без требования минимальности J_1 , плавно возрастает и обеспечивает более низкие градиенты температур по сравнению с первым решением.

На выходе из ЗВО вблизи поверхности слитка, т.е. при $r > 0,06$ и $z = Z$, ограничение на температуру в виде штрафа I_F не нарушается. Это означает, что поток тепла в данной области может быть снижен для уменьшения градиентов температур, что и подтверждает полученный режим охлаждения в заключении ЗВО (кривая 2).

Таким образом, сформулирована задача оптимизации теплофизических параметров цилиндрического слитка и разработан алгоритм их оптимизации относительно тепловых потоков в ЗВО. Такие потоки обеспечивают минимальные градиенты температур в твердой корочке слитка и минимальную дисперсность дендритов с требуемой температурой поверхности слитка на выходе из ЗВО.

5.5. Расчеты оптимальных режимов охлаждения применительно к слиткам Днепровского металлургического комбината

В параграфах 5.1-5.4 определены и проанализированы оптимальные тепловые потоки в ЗВО, при которых вероятность образования трещин в непрерывном слитке минимальна. В этом параграфе мы получим оптимальные режимы охлаждения непрерывного слитка стали 20Тр сечением 335x400 мм для Днепровского металлургического комбината (ДМК).

На ДМК применяется установка криволинейного типа. Для этой установки длина зоны вторичного охлаждения составляет 6 м. Для непрерывного слитка сечением 335x400 мм эффективный радиус составляет 100 мм.

Длина кристаллизатора составляет 1 м. Слиток в процессе вытяжки проходит две зоны охлаждения - кристаллизатор, в котором коэффициент теплоотдачи равен $\gamma = 550 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{с})$, а температура воды $T_c = 25^\circ\text{C}$ и ЗВО, в которой необходимо определить оптимальный тепловой поток как

функцию продольной координаты z . Далее слиток охлаждается на воздухе. В этих расчетах приняты следующие значения координат: кристаллизатор $0 < z \leq z_c = 1 \text{ м}$, ЗВО $z_c < z \leq Z = 6 \text{ м}$.

Для стали марки 20Гр температура ликвидус $T_L = 1510^\circ\text{C}$, температура солидус $T_S = 1434^\circ\text{C}$, скрытая теплота кристаллизации $W = 357 \text{ кДж/кг}$, теплоемкость, плотность и теплопроводность жидкой и твердой фазы, соответственно, равны $C_l = 840 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, $C_s = 460 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, $\rho_l = 7200 \text{ кг/м}^3$, $\rho_s = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_l = 25 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\lambda_s = 51.7 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

На ДМК технологическая скорость разливки для слитка сечением 335x400 мм изменяется в пределах от 0.6 до 0.8 м/мин, а температура перегрева расплава перед разливкой $\Delta T = 15^\circ\text{C}$.

На рисунке 5. 11 представлены полученные четыре расчетные зависимости оптимальных тепловых потоков в ЗВО, в зависимости от скорости разливки с шагом 0.1 м/мин. Кривая 1 соответствует скорости $V = 0.6 \text{ м/мин}$, 2 - $V = 0.7 \text{ м/мин}$, 3 - $V = 0.8 \text{ м/мин}$.

На рисунке 5. 12 приведена температура поверхности слитка при полученных оптимальных тепловых потоках. Обозначения на рис. 5.12 соответствуют рис.5.11. Как следует из рисунка, поверхностная температура слитка в завершении ЗВО для всех скоростей разливки не превышает 950°C .

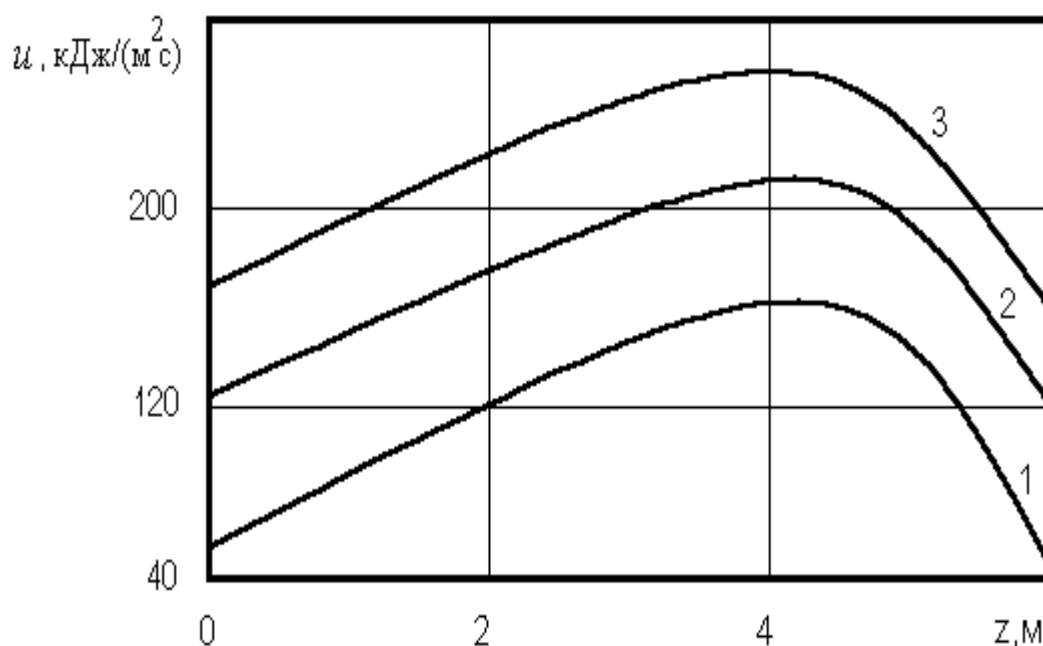


Рис. 5.11 - Оптимальные тепловые потоки для скоростей V :

1 - $V = 0.6$ м/мин;

2 - $V = 0.7$ м/мин;

3 - $V = 0.8$ м/мин

Теперь сравним полученный режим затвердевания при скорости разливки $V = 0.6$ м/мин, с реальным режимом, применяемом на ДМК (см. рис. 4.2). При реальном тепловом режиме затвердевания целевой функционал J_0 имеет значение $5.6 \cdot 10^7$, а при оптимальном (кривая 1 на рис. 4.10) - $3.8 \cdot 10^7$. Таким образом при найденном оптимальном тепловом потоке ТН должны уменьшиться в 1.47 раза по сравнению с тепловым потоком, реализуемым на ДМК. Причем, при реальном тепловом режиме затвердевания температура выхода слитка из ЗВО равна 987°C , что превышает максимально допустимую температуру 950°C . При определенных оптимальных режимах температура выхода слитка из ЗВО не превышает 950°C (см. рис. 5.11), а толщина корочки на выходе из кристаллизатора не менее 26.9% радиуса слитка. Перегрев поверхности

слитка на выходе из кристаллизатора для скоростей разливки $V = 0.6$ м/мин, $V = 0.7$ м/мин и $V = 0.8$ м/мин, составляет, соответственно 95°C , 100°C и 165°C .

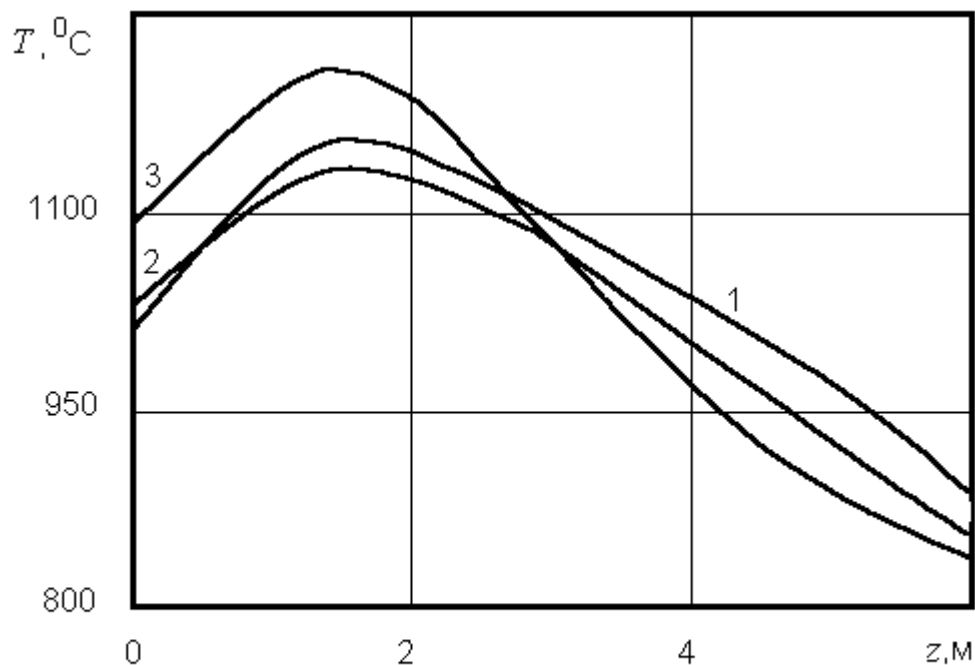


Рис.5.12 Температура поверхности слитка $T(R, z)$ для скоростей разливки: 1 - $V = 0.6$ м/мин; 2 - $V = 0.7$ м/мин; 3 - $V = 0.8$ м/мин

На основании анализа результатов решения задачи определения оптимальных тепловых потоков в ЗВО, определяющих минимальный уровень ТН в теле заготовки сечением 335x400 мм, можно сделать вывод о предпочтительности предлагаемых режимов, заключающихся в том, что потоки тепла следует реализовать в виде функций, значения которых плавно растут от величины теплового потока на выходе из кристаллизатора и убывают в завершении ЗВО. Причем при всех исследованных режимах разливки максимумы расчетных функций находятся на расстоянии приблизительно равном 75 % длины ЗВО.

В заключение можно сделать следующие выводы и рекомендации по оптимальным тепловым потокам в ЗВО для предотвращения образования трещин в непрерывном слитке:

Поток тепла в ЗВО можно организовывать в виде функции, растущей от кристаллизатора по мере вытяжки слитка и резко убывающей в завершающей фазе вторичного охлаждения. Во избежание прорыва твердой корочки слитка сразу за кристаллизатором, тепловой поток должен начинаться не с нулевого значения, а со значения приблизительно равного потоку тепла в конечной зоне кристаллизатора. Этот результат получен при ограничении на температуру выхода слитка из ЗВО;

В случае отсутствия ограничения найденный “оптимальный” тепловой поток приводит к тому, что твердая фаза слитка остается только возле кристаллизатора. Во всей остальной части ЗВО слиток находится в двухфазном состоянии;

Таким образом, ограничение на максимально допустимую температуру выхода слитка существенно влияет на вид оптимального теплового потока;

Найден оптимальный поток тепла в ЗВО с ограничением на объем жидкой лунки, который реализуется в виде функции, убывающей от завершения кристаллизатора примерно до 30% длины ЗВО, далее не изменяющийся до завершения ЗВО. Но в этом случае температура поверхности слитка при выходе из ЗВО существенно превышает максимально допустимую температуру 950°C , что противоречит требованиям [25];

Рекомендуется реализовывать поток тепла в виде функции, убывающей от кристаллизатора примерно до 30% длины ЗВО, далее растущей по мере вытяжки слитка и убывающей в завершающей фазе ЗВО. Этот поток получен при двойном ограничении на температуру выхода слитка из ЗВО и объем жидкой лунки.

Во многих работах аналогичные задачи решались методом подбора возможных рациональных режимов охлаждения, которые определялись в виде вектора с одной, максимум двумя компонентами. Разумеется, определенные таким образом режимы не будут являться оптимальными. Оптимальные режимы охлаждения необходимо определять только из решения задач бесконечномерной минимизации целевых функционалов, определяющих свойства слитка. Как продемонстрировали расчеты, оптимальные режимы охлаждения непрерывных слитков целесообразно находить в виде функций по длине ЗВО. Полученные оптимальные потоки тепла в ЗВО физически обоснованы и представляют практический интерес.

5.6. Идентификация эффективного коэффициента теплопроводности

В третьем параграфе первого раздела обсуждалась проблема идентификации теплофизических параметров в моделях формирования отливок. Без знания точных математических моделей невозможно управлять качеством слитка. Одним из параметров, меняющимся в процессе затвердевания металла и не поддающимся непосредственному измерению является эффективный коэффициент теплопроводности. В третьем параграфе третьего раздела был получен градиент функционала, определяющего качество идентификации. В данном параграфе мы рассмотрим конкретное численное решение поставленной задачи.

Исходная и сопряженная параболические задачи решались численно по широко известной неявной конечно-разностной схеме Кранка-Николсона второго порядка точности с тридцатью шагами по пространству и со ста шагами по времени. Расчеты проводились при следующих значениях: шаг по пространству $\Delta x = 0,01$ м, шаг по времени $\Delta t = 0,4$ с, $\alpha = 580$ Вт/(м²К), $C = 650$

Дж/(кг К), $\rho=6950$ кг/м³, $T_{cp}=27^0$ С, $T_a=1400^0$ С. Толщина стенки литейной оснастки 0,03 м, а отливка имела радиус $x_1 - x_0=0,08$ м. Шаг по времени выбирался из условия

$$\frac{\lambda}{C\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0,5,$$

в частности, при $\Delta t=1,2$ с значение выражения в данном условии составляет 0,39.

Для данной задачи тестовые расчеты организовывались по следующей схеме. Задавалось некоторое значение эффективного коэффициента теплопроводности (прямая сплошная линия на рис. 5. 13) и решалась прямая задача (1.23), (1.24). Найденная температура принималась за эксперименталь-

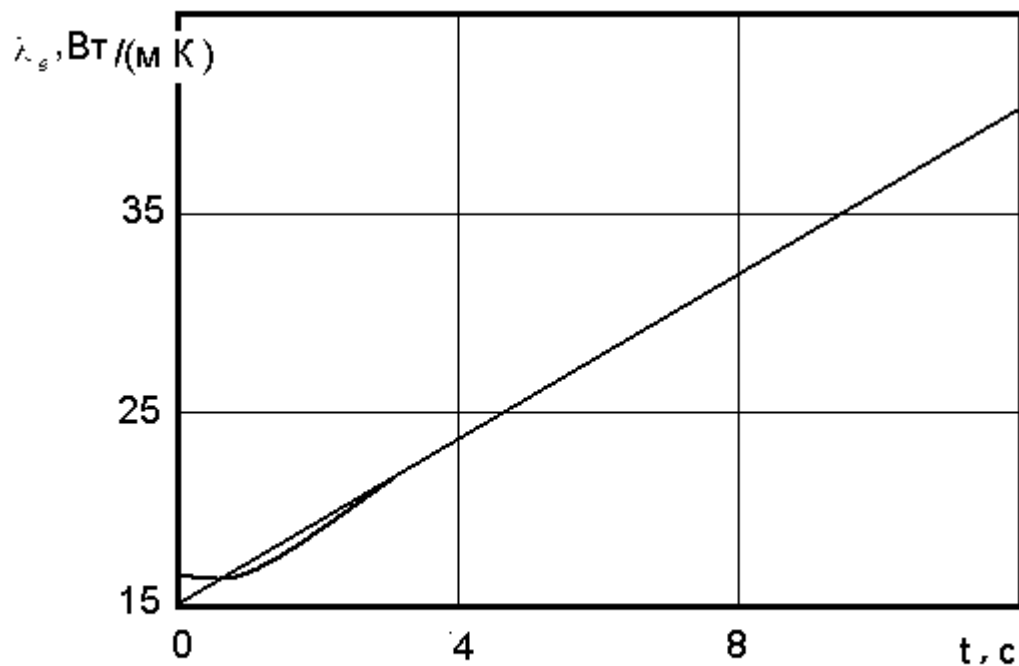


Рис. 5. 13 – Решение тестовой задачи идентификации коэффициента теплопроводности

ную T_e , на основе которой по алгоритму (2.5) решалась обратная задача о нахождении функции $\lambda_e(t)$, доставляющей минимум функционалу

$$J(\lambda_e) = \int_{t_a}^{t_b} [T(t, x_c) - T_e(t, x_c)]^2 dt.$$

На рис. 5.14 приведены результаты идентификации эффективного коэффициента $\lambda_e(t)$ за 21 итерацию для реального процесса затвердевания стального расплава в изложнице на основе экспериментальных данных [8, 63]. Максимальное расхождение температур составило всего лишь $\max|T - T_e| = 6^\circ\text{C}$. Это высокая точность моделирования процессов затвердевания.

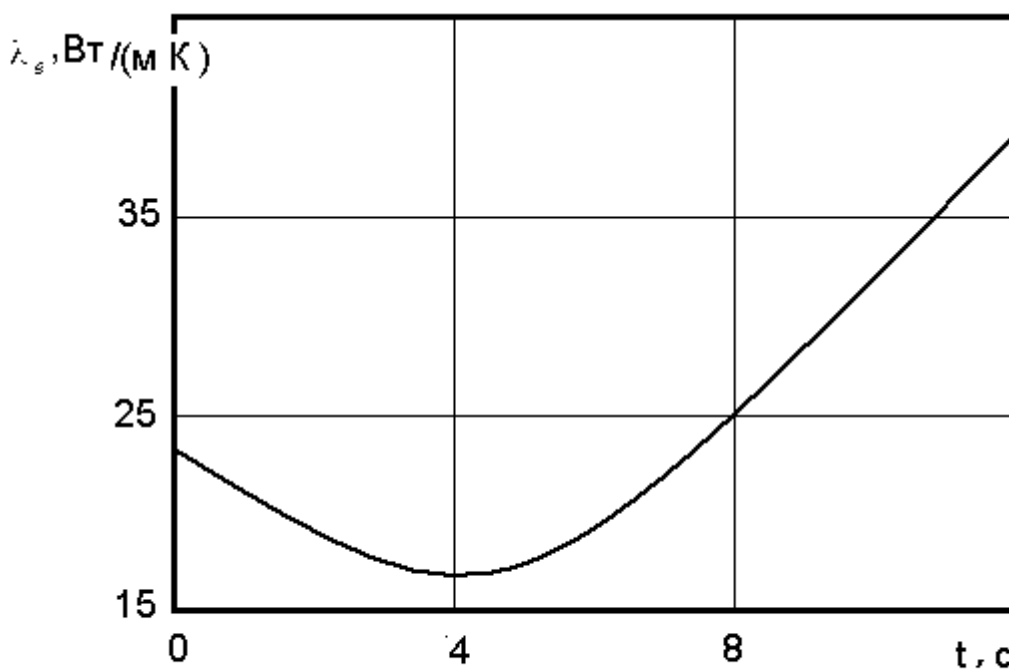


Рис. 5. 14 – Идентифицированный коэффициент теплопроводности по экспериментальным данным [8]

Задавалось начальное приближение $\lambda^0 = 5$ Вт/(м·К). Данному приближению соответствовало максимальное расхождение температур

$\max|T - T_e| = 224^\circ\text{C}$ за время идентификации $t_a - t_b = 12$ с.

Идентифицированное значение $\lambda_e(t)$ отмечено пунктирной кривой на рис.

5.13 . При идентификации по методу (2.1) максимальное расхождение температур за 25 итераций составило $\max|T - T_e| = 4^\circ\text{C}$, а по методу (2.5) за 17 итераций - $\max|T - T_e| = 1^\circ\text{C}$. Данные результаты подтверждают высокую эффективность прямого экстремального подхода при решении задач идентификации теплофизических параметров.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности упрощенного моделирования с эффективными параметрами сложных процессов затвердевания в отливках. Хорошую точность моделирования обеспечивают алгоритмы параметрической идентификации, основанные на прямом экстремальном подходе [59], что позволяет рекомендовать их как для определения теплофизических параметров, так и для решения задач оптимального управления теплофизическими процессами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации . –Рига: Зинатне, 1979.- 180 с.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен: том 1. - М.: Мир, 1980. - 384 с.
3. Афанасьев Н.Н., Шалдырван В.А. Об одной задаче оптимального охлаждения массивного тела. Республиканский межведомственный сборник “Математическая физика”. Выпуск 5, с. 11-14.
4. Баландин Г.Ф. Теоретические основы формирования отливки. Ч. 2. - М.: Машиностроение, 1979. - 334 с.
5. Берзинь В.А., Желваков В.Н., Клявинь Я.Я. и др. Оптимизация режимов затвердевания непрерывного слитка. Рига: Зинатне, 1977. –148 с.
6. Бойченко М.С., Рутес В.С., Фульмахт В.В. Непрерывная разливка стали. - М.: Металлургия, 1961. - 302 с.
7. Борисов В.Т., Виноградов В.В., Тяжелникова И.Л. - Оптимизация теплофизических процессов литья: Научн. тр. /Институт проблем литья АН УССР, Киев, 1977. С. 32 - 50.
8. Бородин В.С., Володин Н.А., Толстых В.К. Идентификация параметров в моделях формирования отливок //Процессы литья. 1995. № 1, с. 96 - 101.
9. Бочвар А.А. Металловедение. - М: Металлургия, 1986.
10. Бровман М.Я., Сурин Е.В. Оптимальные режимы вторичного охлаждения на УНРС. – Сталь. 1965. №1. С. 31 - 32.
11. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. - 568 с.
12. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988. - 552 с.
13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

14. Володин Н.А. Оптимизация теплового режима затвердевания непрерывного слитка по критерию минимальности термических напряжений // Вестник аспирантов и студентов ДонГУ, Серия А: Естественные науки, 1998, №1. С. 87-91.
15. Володин Н.А. Управление режимами охлаждения непрерывного слитка с учетом дисперсности дендритной структуры // Наукові праці ДНТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. Випуск 90.- 2005.- С.49-54.
16. Володин Н.А., Черноног В.Е. Оптимальные режимы охлаждения непрерывнолитого металла с учетом дисперсности дендритной структуры // Известия Вузов. Черная металлургия, 2001.- №5.-С.75-76.
17. Володин Н.А., Недопекин Ф.В., Толстых В.К., Черноног В.Е. Минимизация степени дисперсности в непрерывном слитке при ограничении на температуру // Промышленная теплотехника.- 2003.- Т.25. №1.-С.88-91.
18. Володин Н.А., Недопекин Ф.В., Толстых В.К. Минимизация термических напряжений при непрерывной разливке стали // Тез. 7 конф. Моделир. и исслед. устойчивости систем. Киев. 1996. С. 31.
19. Володин Н.А., Недопекин Ф.В., Толстых В.К. Оптимальное управление охлаждением непрерывного слитка // Известия ВУЗов. Черная металлургия. 1997. № 1. С. 75 - 76.
20. Володин Н.А., Недопекин Ф.В., Толстых В.К. Оптимальное управление теплофизическими процессами при формировании непрерывного слитка // Тез. 1 межд. конф. Численные методы в гидравлике и гидродинамике. Донецк. 1994. с. 106.
21. Володин Н.А., Недопекин Ф.В., Толстых В.К. и др. Оптимизация термических напряжений при формировании непрерывного слитка // Тез. докл. проф. - препод. состава по итогам науч. - исслед. и метод. работы: физика, математика. Донецк. 1995. с. 26 - 27.

22. Володин Н.А., Толстых В.К. О применении градиентного метода оптимизации к задаче теплового управления реактором // Автоматика. 1993. № 1. С. 40 - 44.
23. Володин Н.А., Толстых В.К., Недопекин Ф.В. Оптимальное управление процессом затвердевания непрерывного слитка // Тез. межгос. конф. Компьютерное моделирование. Днепродзержинск. 1997. С. 18.
24. Германн Э. Непрерывное литье. - М.: Metallurgy, 1961. - 814 с.
25. Гресс А.В. Моделирование рациональных режимов водовоздушного охлаждения блюмовых заготовок на МНЛЗ криволинейного типа // Тез. межгос. конф. Компьютерное моделирование. Днепродзержинск. 1997. С. 15.
26. Дюдкин Д.А. Качество непрерывнолитой стальной заготовки. - Киев: Техника, 1988.
27. Дюдкин Д.А., Крупман Л.И., Максименко Д.М. Усадочные раковины в стальных слитках и заготовках. - М. Metallurgy, 1983.
28. Евтеев Д.П. Колыбалов И.П. Непрерывное литье стали.- М.: Metallurgy, 1984. - 200 с.
29. Евтеев Д.П., Соколов Л.А., Лебедь В.И. О выборе граничных условий при расчетах затвердевания слитка // Сталью 1975. № 1, С. 32 - 34.
30. Емельянов В.А. Тепловая работа машин непрерывного литья заготовок. М.: Metallurgy, 1988.
31. Ефимов В.А. Разливка и кристаллизация стали. - М.: Metallurgy, 1976. - 552 с.
32. Журавлев В.А. О макроскопической теории кристаллизации сплавов. - Изв. АН СССР. Сер. "Металлы". 1975. № 5. С. 93 - 99.
33. Журавлев В.А., Китаев Е.М. Теплофизика формирования непрерывного слитка. - М.: Metallurgy, 1978. - 216 с.
34. Зигель О.Д. Непрерывная разливка стали // Тр. 1 Всесоюзн. конф. по непрер. разливке стали. М.: АН СССР. 1956. С. 164-175.

35. Иванцов Г.П., Поляк Б.Т. Режим охлаждения плоского слитка при непрерывной разливке, обеспечивающий минимальные термические напряжения в его корке. - В кн.: Кристаллизация металлов. М.: Изд-во АН СССР. 1960. с. 139 - 149.
36. Краснов Б.И. Оптимальное управление режимами непрерывной разливки стали. - М.: Metallurgia, 1975. - 312 с.
37. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. Новосибирск.: Наука. 1970. 659 с.
38. Лапотышкин Н.М., Лейтес А.В. Трещины в стальных слитках.- М.: Metallurgia, 1969.-112 с.
39. Лыков А.В. Теплообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. – 480 с.
40. Малый С.А. Об оптимальном управлении процессом вытягивания изделий из расплава.-Изв. АН СССР.Техн.кибернетика,1964.№6.с.164-168.
41. Недопекин Ф.В. Математическое моделирование гидродинамики и теплопереноса в слитках. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та. 1995. 236 с.
42. Недопекин Ф.В., Толстых В.К., Володин Н.А. и др. Минимизация термических напряжений в непрерывном слитке с ограничением на объем жидкой лунки // Промышленная теплотехника. 1997. Т. 19, № 6. С. 53-57.
43. Никитенко Н.И., Евтеев Д.П., Соколов Л.А., Сновида Н.Р. - Оптимизация теплофизических процессов литья: Науч. тр. /Институт проблем литья АН УССР. Киев 1977. С. 79 - 86.
44. Огурцов А.П., Недопекин Ф.В., Белоусов В.В. Процессы формирования стального слитка. Математическое моделирование заполнения и затвердевания. Днепропетровск. 1994.
45. Огурцов А.П., Недопекин Ф.В., Толстых В.К., Володин Н.А. Прямая оптимизация теплофизических процессов. – Донецк: Изд. “Юго-Восток”, 1997. – 150 с.

46. Павлыш В.Н. Развитие теории и усовершенствование технологии процессов воздействия на угольные пласты. – Донецк: РВА ДонНТУ 2005. – 347 с.
47. Самойлович Ю.А. Оптимизация теплофизических процессов литья: Науч. тр. /Институт проблем литья АН УССР. Киев. 1977. С. 59-65.
48. Самойлович Ю.А. Системный анализ кристаллизации слитка. - Киев: Наукова думка, 1983. 246 с.
49. Самойлович Ю.А. Формирование слитка. - М.:Металлургия,1977.- 158с.
50. Скворцов А.А., Акименко А.Д., Ульянов В.А. Влияние внешних воздействий на процесс формирования слитков и заготовок. - М.: Metallurgy, 1991. - 216 с.
51. Соболев В.В., Трефилов П.М. Исследование температурных полей в затвердевающих полых цилиндрических слитках при непрерывной разливке. - Изв. АН СССР. Сер. “Металлы”1980, № 4. с. 61 - 69.
52. Соболев В.В., Трефилов П.М. Оптимизация тепловых режимов затвердевания расплавов.- Красноярск: Изд-во КГУ, 1986. - 152 с.
53. Соболев В.В., Трефилов П.М. Процессы теплопереноса при затвердевании непрерывных слитков. - Красноярск: Изд-во Красноярского университета, 1984. - 264 с.
54. Соболев В.В., Трефилов П.М. Теплофизика затвердевания металла при непрерывном литье. - М.: Metallurgy, 1988.- 160 с.
55. Соболев В.В., Федченко А.И., Максимов Л.Н. и др. Исследование оптимальных условий охлаждения непрерывных стальных слитков квадратного сечения. - Изв. АН СССР. Металлы, 1981. № 5. с. 69 - 80.
56. Соболев В.В., Федченко А.И., Трефилов П.М. Анализ оптимальных условий затвердевания непрерывных слитков. - В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. “Современные проблемы создания высококачественных сталей и уменьшения отходов в черной металлургии”. М.: Изд-во института стали и сплавов. 1981. с. 58.

57. Соболев В.В., Федченко А.И., Трефилов П.М. Затвердевание непрерывных слитков квадратного сечения. - Сталь 1980. № 4. с. 292 - 294.
58. Соколов Л.Д. Общий вид температурной зависимости сопротивления деформации металлов. Горький: НТО Машпром. 1961.
59. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. - Донецк: Изд. "Юго-Восток", 1997.-177 с.
60. Толстых В.К. Градиентный метод оптимального управления распределенными системами //Диф. уравнения. 1991. Т.27. №2.С. 303-312.
61. Толстых В.К. Новый метод минимизации функционалов для задач оптимизации с уравнениями в частных производных // Тез. 1 междунар. конф. Числ. методы в гидравлике и гидродинамике. 1994. С. 112.
62. Толстых В.К. О применении градиентного метода к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т. 26. № 1. С. 137 - 140.
63. Толстых В.К., Володин Н.А. Определение коэффициента теплопроводности в затвердевающих отливках // Инженерно-физический журнал.- 2003.-Т.76.-№2.- С.163-165.
64. Толстых В.К., Володин Н.А., Черноног В.Е. Оптимальное управление потоком тепла в затвердевающем металле, находящемся в многофазном состоянии, с целью улучшения характеристик твердой фазы // Теплофизика высоких температур.-2003.- Т.41.- №3.- С.461-464.
65. Толстых В.К. Прямой подход для оптимизации сложных систем (новые условия оптимальности) // Тез. 7 конф. Моделир. и Исслед. устойчивости систем. Киев. 1996. С. 134.
66. Флемингс М. Процессы затвердевания. - М.: Мир, 1977. 423 с.
67. Чалмерс Б. Теория затвердевания. - М.: Металлургия, 1968. 288 с.

68. Черепанов А.Н., Полякова В.И. Математическое моделирование режима охлаждения непрерывного слитка при условии минимальности термических напряжений. - Изв. АН СССР. Сер. "Металлы". 1980. № 2. с.63 - 75.
69. Tolstykh V.K. Minimizing in Hilbert Spaces // Abs. Sump. Operations Research/ - Passau-Germany: Springer. – 1995.- P. 45.
70. Tolstykh V.K., Volodin N.A. Optimal control by heat flow in continuous casting steel. Proc. Sump. Operations Research, Braunschweig, Germany, 1996. P. 480 - 483.

МОНОГРАФИЯ

*Рекомендовано Ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 3 31.03.2017 г.)*

Володин Николай Александрович,
Толстых Виктор Константинович

**Развитие теоретических основ
оптимизации и идентификации параметров
в слитках и отливках**

Адрес издательства:

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24. г. Донецк, 283055
