Міжнародна програма
«ЕВРИСТИКА ТА ДИДАКТИКА ТОЧНИХ НАУК»
International program
«HEURISTICS and DIDACTICS of EXACT SCIENCES»
Международная программа
«ЭВРИСТИКА И ДИДАКТИКА ТОЧНЫХ НАУК»

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблеми і дослідження

DIDACTICS of MATHEMATICS:
Problems and Investigations

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ:
проблемы и исследования

Міжнародний збірник наукових робіт
International Collection of Scientific Works
Международный сборник научных работ

Випуск 16

Засновники:

Донецька школа евристики та точних наук Донецької фірми наукоємних технологій (Фірми ТЕАН) Національної академії наук України

Національний педагогічний університет ім.М.П.Драгоманова

Донецький національний університет

Інститут педагогіки Академії педагогічних наук України

Донецьк Фірма ТЕАН 2001

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р
Д44

Збірник заснований професором Юрієм Олександровичем Палантом у 1993 році.

Рекомендовано до друку Вченою радою Донецького національного університету 30.11.2001 (протокол №9).

Д44 **Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. –** Вип. 16. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2001. – 176 с. (Міжнародна програма «Евристика та дидактика точних наук»).

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-08-4 (Фірма ТЕАН, Україна)

Викладено нові підходи до деяких питань методики навчання математики. Роботи присвячено використанню евристичних методів навчання, стимулюванню творчої діяльності учнів.

Изложены новые подходы к некоторым вопросам методики обучения математике. Работы посвящены использованию эвристических методов обучения, стимулированию творческой деятельности учащихся.

New approaches to some methods of training mathematics problems are described. The publications concern the use of heuristic methods in teaching sciences, stimulation of creative activity of students in the field of constructing and solving problems.

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-08-4 (Фірма ТЕАН, Україна)

ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕННЯ ЛЕКЦІЙ З МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Л.І. Нічуговська, канд. економ. наук, доцент
Полтавський кооперативний інститут

Згідно з “Положенням про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах” [1] лекція розглядається, як основна форма проведення навчальних занять у вищому навчальному закладі, і призначена для засвоєння теоретичного матеріалу.

Зокрема, лекція з математичних дисциплін для студентів економічних та управлінських спеціальностей розкриває перспективи використання математичних засобів і методів математичного моделювання для дослідження соціально-економічних процесів та розв’язання багатьох практичних задач.

Крім того, на математичних лекціях у студентів розширюється науковий світогляд, тому що є можливість акцентувати увагу на витоках і розвитку її основних понять, простежувати зв’язки з практикою, розвивати навички абстрагування, доводити до свідомості універсальність математичних абстракцій, демонструючи їх можливості до трансформації знань при вивченні якісно відмінних явищ і процесів у мінливому середовищі.

Слід відмітити, що традиційно лекція у процесі навчальної діяльності вищої школи займає одне із центральних місць, одночасно виступаючи як організаційна форма, так і одиниця навчального процесу, якій відведено майже половину аудиторного часу. І це не випадковість, тому що саме лекція може бути проведена для аудиторії з будь-якою кількістю студентів, тобто безпосередня її організація не викликає ускладнень. Крім того, лекція дозволяє представити інформаційний блок певної теми у логічній послідовності; зробити огляд існуючих методологічних підходів до постановки, аналізу і рішення проблем, що розглядаються, висловивши при цьому власну позицію викладача; окреслити перспективні напрямки подальшої творчої діяльності, стимулюючи мислення студентів необхідністю подальшого осмислення висвітлених питань.

Ми погоджуємось з А.М.Алексюком в оцінці позитивних якостей лекцій за наступними позиціями:

1. Лекція (порівняно з підручником) має значно більші можливості врахування специфіки аудиторії, новітніх наукових досягнень.
2. Живе слово, інтонація, міміка та жести викладача створюють неповторне емоційне забарвлення, справляють емоційний вплив на слухачів.
3. Прямий контакт з аудиторією посилює увагу слухачів.
4. Під час лекції можлива критична оцінка матеріалу.
5. Лекція дає можливість економити час: за дві академічні години студент отримує інформацію, на самі тільки пошуки якої довелося б витратити набагато більше часу.
6. Лекція має особливе професійно-педагогічне значення для тих студентів, які готуються до професійної діяльності викладача [1, с.175].

Але, на нашу думку, при проведенні будь-якої лекції або лекції з математичних дисциплін необхідно враховувати, що:

- аудиторія студентів, як правило, виконує роль пасивних слухачів;
- інформаційний потік спрямований тільки в бік студентів;
- ефективне слухання та творче переосмислення математичної інформації можливе тільки при досить високій концентрації уваги присутніх в лекційній аудиторії, що досить проблематично, особливо, коли потік студентів достатньо великий (більше 100 осіб);
- зворотній зв’язок з аудиторією досить обмежений;
- лекція – це публічний виступ викладача, тому її форма суттєво корегується суб’єктивними рисами характеру лектора, рівнем його математи-

чної культури, методичної підготовки та сукупного інтелектуального потенціалу слухачів.

Можна констатувати, що, не зважаючи на класичну традиційність лекції у вищому закладі освіти, вважати її досконалою, найбільш ефективною формою навчання для студентів математичних дисциплін, особливо з використанням математичного моделювання, досить проблематично.

Але лекція у вищому закладі освіти, як домінуюча форма організації навчального процесу існує тому, що саме вона дає початок процесу навчання певної дисципліни (розділу, теми тощо), визначає необхідні варіанти здійснення всіх видів і форм навчання, розглядає логічний їх взаємозв'язок, тобто виконує проблемно-установчу функцію, що забезпечує мотивацію, активізацію та управління пізнавальною діяльністю студентів у процесі подальшої самостійної роботи в контексті даної теми, і тому потребує невтомного пошуку резервів підвищення її ефективності.

Відомо, що будь-яке заняття зі студентами у рамках навчального процесу має наступні структурні позиції, а саме: організація процесу, визначення його мети, мотивація, актуалізація опорних знань, подача матеріалу теми, закріплення засвоєного, завдання для самостійної роботи, контроль, причому найбільша увага приділяється визначенню мети даного заняття у контексті навчальних цілей усього курсу.

Стосовно навчання математичним дисциплінам студентів економічних спеціальностей вищого закладу освіти, чітке визначення бажаних результатів дуже важливе, оскільки для розділів і тем, де застосовується математичне моделювання, як допоміжний засіб обґрунтування оптимального вибору при прийнятті управлінського рішення, традиційні навчальні цілі, наприклад:

- поліпшити знання студентів з теми "Елементи матричної алгебри" розглядом моделі міжгалузевого балансу;

- поглибити розуміння студентами таких фундаментальних понять, як закони розподілу неперервних випадкових величин;
- вдосконалити мислення студентів розв'язуванням нестандартних завдань економічного змісту;
- посилити інтерес студентів до теми "Лінійні моделі та їх застосування в економічних дослідженнях";
- допомогти студентам адекватно оцінити тему "Динамічні моделі математичного програмування";
- розглянути обчислювальні алгоритми знаходження оптимального рішення у подвійному симплекс-методі;
- визначити алгоритм розв'язування транспортних задач тощо.

Тобто "поліпшити", "поглибити", "вдосконалити", "допомогти", "знайти" тощо відходять на другий план, поступаючись першим місцем цілям "вміти". Отже, отримання математичних знань, розуміння їх можливих застосувань, знання математичних процедур та обчислювальних алгоритмів, зберігаючи свій високий рейтинг, перестають бути кінцевою метою математичної освіти студентів економічних та менеджерських спеціальностей вищих закладів освіти. Саме вміння використовувати математичні знання як необхідний інструмент аналізу складних та нечітко виражених проблем і формують аналітичну здатність майбутнього фахівця економічного спрямування, яка передбачає необхідність:

- розвинути відчуття безумовного та відносного, загального та особливого, притаманного різноманітним економічним ситуаціям;
- навчитися логічно, послідовно, чітко та аргументовано думати, тобто розвивати критичне мислення;
- уміти на основі неповної інформації спрогнозувати можливі варіанти динаміки чинників, що впливають на розвиток економічної ситуації, та сформулювати аргументований план дій;

- представляти результати свого аналізу таким чином, щоб переконати свою аудиторію (уявне керівництво компанії, можливих інвесторів тощо) у правильності своїх рішень;

Це потребує специфічної організаційної стратегії, націленої на створення знань нової якості в навчальному процесі.

Перш за все, виникає необхідність ефективного використання лекційного навчального часу, що передбачає планування лекційних занять, в якому буде чітко визначений взаємозв'язок тем та розділів (модулів) дисципліни "Математика для економістів", де можливе використання математичного моделювання.

Важливо виділити головну проблему не тільки однієї лекції, а й цілої теми або розділу, маючи чітке уявлення про співвідношення необхідної та другорядної інформації, вивільнивши час на проблемний теоретичний аналіз базових ідей фундаментальних економічних дисциплін у поєднанні з математичними засобами для моделювання реально існуючих ситуацій.

Наприклад, курс "Вища математика" для студентів економічних спеціальностей першого курсу починається з розділу "Лінійна алгебра". Отже, тема першої лекції - "Матриці, дії з ними", і тому теоретична концепція лекції може містити наступні позиції:

1. Проблемний аналіз теми (її прикладна значимість), основні питання, інформаційний блок, типові приклади, а саме:

підприємство виготовляє три види продукції A, B та C і при цьому використовує два типи сировини: S_1 та S_2.

Норми затрат сировини та їх відповідна вартість на одиниці відповідних видів продукції характеризуються матрицею D та вектор-рядком $\vec{v} = (30, 40)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ D = & \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \end{array}$$

(Наприклад, елемент матриці a_{23} означає, що на виготовлення одиниці продукції виду C витрачається 7 одиниць сировини S_2).

Визначити затрати сировини та її відповідну вартість при виготовленні наступних обсягів продукції, а саме: $\vec{P} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 210 \\ 150 \end{pmatrix}$

Зауважимо, що використано приклад економічного змісту, тобто ми намагались з першої лекції формувати прикладний фон навчання математичним дисциплінам і, рухаючись шляхом сходження від простого до складного, запропонував як надзавдання – модель міжгалузевого планування потреб та пропозицій, що у матричній формі має вигляд $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}$ або $\bar{x} - A\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow E\bar{x} - A\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow (E - A)\bar{x} = \bar{y}$, де E – одинична матриця, A – матриця прямих витрат, вектор $\vec{x}$ - вектор валового випуску,
вектор $\vec{y}$ - вектор кінцевого споживання.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Якщо обернена матриця $(E - A)^{-1}$ існує, то $\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y}$

Зауважимо, що в моделях міжгалузевого балансу обернена матриця $C = (E - A)^{-1}$ має важливий економічний зміст, який полягає в тому, що матрицю C вважають матрицею повних витрат, тобто елемент c_{ij} - це обсяг продукції *i-ої* галузі, яку їй необхідно виготовити, щоб галузь *j* випустила одиницю кінцевого продукту. Як приклад можна запропонувати задачу наступного змісту.

Таблицею задані показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості.

Галузеві пропозиції	*Галузеві потреби*			Потреби інших галузей	Кількість цих пропозицій
	1	2	3		
1	20	40	30	10	100
2	30	20	90	60	200
3	40	100	60	100	300
Витрати праці	20	60	120		

1) Необхідно визначити матрицю потреб-пропозицій А;
2) скільки продукції повинна виробляти кожна галузь, якщо через три роки потреби інших галузей зростуть до 24, 75 та 120 на продукції галузей 1, 2, 3 відповідно.

Крім того, можна ввести поняття економічної продуктивності матриці та критерії її продуктивності, які тісно переплітаються з поняттями матричної алгебри, а саме: матриця $A \geq 0$ (всі компоненти матриці невід'ємні, що витікає з економічного змісту матриці A) називається продуктивною, якщо для будь-якого вектора $\overline{y} \geq 0$ існує вектор $\overline{x} \geq 0$, який задовольняє рівняння $\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y}$. Матриця $A \geq 0$ продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $(E - A)^{-1}$ існує і невід'ємна.

Отже, використовуючи міжгалузеву модель Леонтьєва, можна урізноманітнити завдання економічного змісту, а саме:

1. Дослідити продуктивність матриці $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Маємо $E - A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}6 \\ -0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; $\Delta |E - A| = 0{,}08$. Одержуємо обернену матрицю $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7{,}5 \\ 10 & 8{,}75 \end{pmatrix}$, елементи якої невід'ємні числа. Отже, матриця A – продуктивна.

При цьому доцільно розглянути поняття запасу продуктивності матриці. Нехай $A \geq 0$ - продуктивна матриця.

Запасом продуктивності матриці А називають таке число $\alpha > 0$, при якому всі матриці виду λA, де $1 < \lambda < 1 + \alpha$, продуктивні.

2. Визначити, який запас продуктивності має матриця $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Скориставшись критерієм продуктивності для матриці, тобто існуванням невід'ємної матриці $(E - A)^{-1}$, можна запропонувати самостійно дослідити продуктивність матриць виду λA.

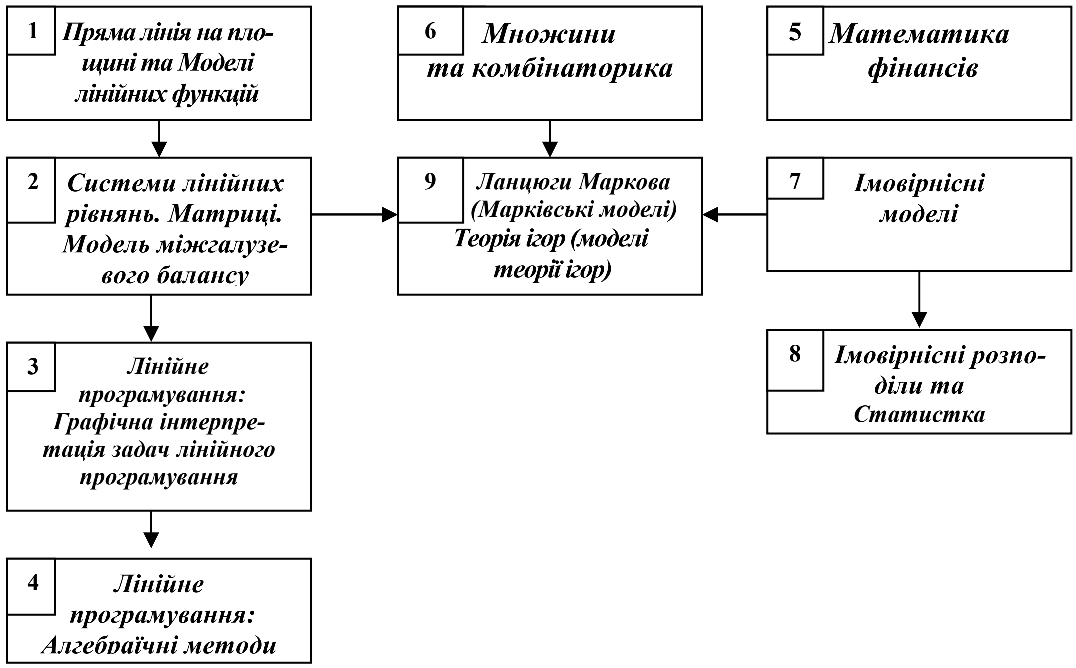
Така композиція матеріалу лекції вимагає концентрації уваги студентів, активної розумової діяльності, пов'язаної з інтенсивним обчислювальним процесом і при цьому започатковує індивідуальну базу математичних понять, термінів (матриця, матриця-стовпчик або вектор-стовпчик, квадратна, одинична, обернена матриці, поняття визначника (його властивості), методи обчислення тощо).

Крім того, починається поповнення словникового запасу словами типу "матриця потреб і пропозицій", "продуктивність матриці", "запас продуктивності матриці", що має безпосереднє відношення до словника економічних термінів.

Отже, ми вийшли на позицію, що потребує ефективного засвоєння матеріалу, тобто сформували інформативну базу, актуалізували знання, продемонстрували їх типове застосування, сформували активну розумову діяльність та підготували, як ми вважаємо, до самостійної роботи з даної теми. Тому необхідний ефективний зворотний зв'язок, який може полягати у відповідях студентів на концептуальні питання згідно теми в кінці лекції, навчального завдання для самостійного опрацювання у вигляді роздаткового матеріалу за умови 10-15-хвилинного тесту на початку наступної лекції та індивідуального тестування (комп'ютерна версія) на практичному занятті в кінці повного вивчення даної теми.

Особливо треба підкреслити, що лекції з математичних дисциплін з використанням математичного моделювання для студентів економічних та менеджерських спеціальностей повинні мати чітко визначену структуру, за опорні точки якої можна використовувати певні типи математичних моделей та їх логічний зв'язок з розділами (темами) відповідних курсів, щоб допомагати студентам застосовувати фундаментальний математичний апарат як інструмент для аналізу конкретних економічних ситуацій, або ж приводити до розуміння теоретичних положень.

Один із варіантів такого структурного зв'язку представлено схемою.



Таким чином, для вироблення навичок застосування математичних методів і моделей в практику економічної діяльності майбутнього спеціаліста економічного спрямування необхідно активно реалізовувати принцип неперервності, тобто намагатись, по можливості, на кожній лекції дисципліни "Математика для економістів" хоча б згадувати назви базових економіко-математичних моделей, демонструвати фрагменти побудови певних їх етапів, ставити концептуальні питання тощо, створювати проблемні ситуації, виводячи аудиторію на дискусію, на ефективний зворотний зв'язок.

Отже, резюмуючи вищевикладене, можна підкреслити, що при проведенні лекцій з математичних дисциплін з використанням математичного моделювання: по-перше, істотно змінюється роль викладача кафедри вищої математики, тому що він виступає в ролі об'єднуючої ланки між двома фундаментальними дисциплінами – вищою математикою та фаховими дисциплінами і має використовувати стратегію навчання, дещо відмінну від класичного викладання математичних курсів, роблячи акцент на наступних позиціях:

- підготовці додаткового матеріалу для лекційного курсу;
- розробці опорних конспектів-схем лекцій по основним темам курсу, які видаються студентам як мінімум за тиждень до лекції;
- підготовці разом із студентами словника основних економічних термінів і понять;
- створенню банку математичних моделей та їх типових застосувань;
- підготовці ілюстративного блоку у вигляді слайдів, які, як показує практика, можуть виконувати роль інформативної довідки, необхідної схеми, певного визначення, формулювання теореми, графічної інтерпретації тощо;
- створенню тестових завдань, контрольних питань різного типу, завдань, ситуаційних задач, проблемних ситуацій, враховуючи рівневу диференціацію знань студентів;
- організації самостійної роботи (аудиторної та позааудиторної) та її методичного забезпечення;
- чіткому визначенню навичок та вмінь студентів згідно даної навчальної теми;

по-друге, для студента створюється система керованого навчального процесу відповідно до цілей і завдань, які визначаються викладачем і підтримуються студентом. При цьому реалізується активний зворотній зв'язок, за якого викладач має уявлення про успіхи або труднощі майже кожного студента. Напевне, найголовніше при такому підході – це почуття відповідальності за навчальну діяльність, яке поступово формується у студентів. Атмосфера співпраці між викладачем та студентами, яка започатковується саме у спілкуванні на лекціях, знаходить своє продовження на практичних заняттях, при індивідуальному спілкуванні на консультаціях тощо.

1. Положення про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах. – К.: МО України, 1993.
2. Алексюк А.М. Педагогіка вищої школи: Модульне навчання. – К., 1993.

Резюме. Рассматриваются особенности проведения лекций по математическим дисциплинам с использованием математического моделирования для студентов экономических специальностей.

Summary. The features of lectures realization on mathematical disciplines with use mathematical modelling for the students of economic specialities are considered.

ФОРМИРОВАНИЕ МИРОВОЗЗРЕНИЯ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В.М.Дрибан, доцент, Г.Г.Пенина, канд. эконом. наук, профессор
Донецкий государственный университет экономики и торговли им.М. Туган-Барановского

В процессе преподавания общенаучных, общетехнических и специальных дисциплин нередко основное внимание обращается лишь на полноту и глубину знаний учебного материала, на овладение навыками и умениями и не проявляется при этом достаточной заботы о формировании у студентов научного мировоззрения. Между тем формирование научного мировоззрения – одна из важнейших задач вуза.

Любая учебная дисциплина, в том числе дисциплины математического цикла, имеют мировоззренческий потенциал. Правда, использовать его в процессе преподавания для ряда дисциплин сравнительно несложно, для математики – достаточно трудно. К тому же в существующих учебниках по математике либо вовсе не уделяется, либо уделяется совершенно недостаточное внимание мировоззренческим и философским аспектам науки.

Тем большая роль в решении поставленной задачи принадлежит преподавателю. Лектор должен проанализировать читаемый курс с целью выявления основных идей, методов, теорем, понятий, на примере которых он имеет возможность сознательно влиять на формирование у студентов диалектико-математического мировоззрения. Для достижения этой цели (при чтении дисциплин математического цикла будущим экономистам и инженерам) мы используем следующие приемы.

1. Постоянно акцентируем внимание на том, что хотя математика и оперирует абстрактными понятиями, но в большинстве они возникли (прямо или опосредствованно) из практических потребностей людей и находят многочисленные приложения в изучении реального мира, в жизни общества. В связи с этим следует, где это возможно, освещать геометрический и физический смыслы изучаемых понятий и теорем, их практическое применение, добиваясь устойчивой ассоциации между абстрактными математическими понятиями и их материализованным содержанием.

Мы считаем, что главным в этом плане является предельно неформальное изложение математического материала. Студенты должны усвоить, что стройность и упорядоченность математики есть, в конечном итоге, отражение глубоких связей и закономерностей материального мира. Однако в этом вопросе нужна известная осторожность. На наш взгляд, на вводной лекции преподаватель должен рассказать студентам о “чистой” математике, и в головах студентов не должна укрепиться мысль, что разделы математики, лишенные приложений, не имеют права на существование. Одним из убедительных примеров содержательности внутреннего развития математики и пользы от этого не только для нее самой, но и для приложений, является создание древнегреческими математиками теории конических сечений, которая не находила своего применения “две тысячи лет, пока Кеплер не воспользовался ею для создания точной теории движения небесных тел, а от этой теории Ньютон затем создал механику, служащую основой всей физики и техники” [2].

2. Показываем разнообразные приложения одной и той же математической модели, что подводит студентов к пониманию единства материального мира и законов, управляющих его движением. Идентичность количественных отношений в явлениях различной физической природы и есть конкретные проявления единства материального мира.
3. Большое внимание уделяем ознакомлению студентов на конкретных примерах с диалектическими методами научного мышления: индукцией и дедукцией, анализом и синтезом, аналогией, обобщением и др.
4. Обращаем внимание в соответствующих местах курса на отражение в математике общих связей и закономерностей диалектики (законов перехода количественных изменений в качественные, единства и борьбы противоположностей, отрицания отрицания, различных философских категорий).

Высшая математика изучается раньше философии, поэтому преподаватель должен предварительно (в нужном месте) кратко и в общих чертах ознакомить студентов с соответствующими законами и категориями, проиллюстрировав их простыми и известными студентам примерами из области физики, химии (переход воды в пар при нагревании и т.д.). Показывая отображение философских законов и категорий в математике, не следует, на наш взгляд, увлекаться чрезмерным “философствованием”. Это вряд ли может быть понято студентами младших курсов.

5. Прослеживаем, по мере возможности, исторический процесс формирования основных понятий и методов математики, стремимся показать математику в ее движении и развитии. Обязательно знакомим студентов в популярной форме с апориями Зенона, с историей возникновения геометрии Лобачевского, с результатами Абеля и Галуа в задаче о ре-

шении уравнений пятой степени и выше, с континуум-гипотезой Кантора и результатами Геделя и Коэна.

Кратко проиллюстрируем, как некоторые вышеперечисленные приемы формирования диалектико-материального мировоззрения можно реализовать в процессе преподавания математического анализа.

При изложении программных вопросов математического анализа преподаватель должен постоянно помнить о той большой методологической и философской нагрузке, которую несут понятия, теоретические результаты и практические выводы этого раздела математики. Математический анализ по своей сущности являет пример диалектики. "Именно здесь мы приучаемся к математическому исследованию явлений природы и процессов техники в их живой изменчивости, а не в статической неподвижности. Именно здесь величины исследуются в их взаимной зависимости, а не в отрыве друг от друга. Нигде с такой наглядностью, как здесь, мы не видим в действии переход количества в качество, диалектический синтез первоначально антагонистических противоположностей и другие законы диалектики" [3].

Если начинать изложение математического анализа с понятия функциональной зависимости, то следует учесть, что это понятие достаточно подробно изучалось в школе. Вряд ли имеет смысл детально повторять основные определения и т.д. Полезнее, на наш взгляд, за счет сэкономленного времени остановиться на истории возникновения современного определения функции, показать сложный путь развития и совершенствования этого, казалось бы, простого понятия.

Методологическая значимость понятия функциональной зависимости очень велика, потому что с его помощью математика получает возможность изучать взаимосвязи самых различных явлений действительности, позволяет видеть величины в их изменении, в их взаимообусловленности, в нем в математической форме выступает причинно-следственная связь различных явлений реального мира. И об этом надо прямо сказать студентам.

Следует обратить внимание на то, что появление в математике переменных величин – одно из великих идейных завоеваний в науке XVII в. Эта идея (сейчас кажущаяся такой простой) настолько подняла значение математики, что уже в XVIII в. Лаплас заявил, что “…если бы какой-нибудь идеальный ум знал все силы, действующие в природе, и если бы при том он был достаточно всеобъемлющ, чтобы подвергнуть все эти данные математическому анализу – тогда такой ум постиг бы в одной формуле движения величайших мировых тел и малейшего атома”.

Выделяя аналитический способ, как основной способ задания функции в математическом анализе, важно подчеркнуть, что понятие функции порождается не ее аналитическим выражением, а закономерностями реального мира, что понятие функции шире, глубже и содержательнее, чем понятие ее аналитического выражения.

История создания и развития математического анализа богата примерами, показывающими столкновение идей и концепций, относящихся не только к внутренним вопросам математики, но и к философским и мировоззренческим аспектам. Здесь прежде всего надо подчеркнуть, что возникновение математического анализа напрямую связано с практическими потребностями людей. XVII век – начало расцвета капитализма. Необходимость развития мореплавания вызвала повышенный интерес к астрономии и оптике. Кораблестроение, устройство плотин и каналов, необходимость создания различных машин и механизмов, военное дело и т.д. содействовали развитию механики. В свою очередь, эти и другие науки не могли дальше развиваться на старой математической основе. Жизнь требовала решительного обновления математики. Это обновление произошло под знаком введения переменной величины.

Вначале установление каждого отдельного факта требовало специального подхода, но постепенно стали появляться общие методы для решения однотипных задач, устанавливались связи между задачами разных типов, выявились общие математические понятия, лежащие в основе решения разнообразных задач и т.д. По словам Лейбница, “после таких успехов науки недоставало только одного – нити Ариадны в лабиринте задач, именно аналитического исчисления по образцу алгебры”. Необходимо было установить в общей форме основные понятия нового исчисления и их взаимосвязи, ввести подходящую символику и установить алгоритмы для вычислений. Это и было выполнено Ньютоном и Лейбницем независимо друг от друга и притом по-разному. Возникла “новая математика” – дифференциальное и интегральное исчисления.

Парадоксальность сложившейся ситуации состояла в том, что большое количество результатов, правильность которых блестяще подтверждалась практикой, было получено без строгих доказательств. Взгляд Лейбница на бесконечно малые как на актуально малые величины был логически несостоятелен. Их рассматривали как величины статические, не равные нулю и в то же время абсолютно меньшие любой конечной величины, Лейбниц и его ученики обращались с бесконечно малыми как с величинами конечными. Было удивительно, что такой логически противоречивый взгляд на бесконечно малые оказался очень удобным и продуктивным в практическом отношении.

Сложившаяся ситуация привела к тому, что сторонники идеалистических и религиозных представлений облекали бесконечно малые в мистические одежды, а для трезвых умов “новая математика” была воплощением нелепостей. Действительно, если бесконечно малые есть нули, то каким образом, суммируя их, можно получить конечную величину? Если же это не нули, то на каком основании их можно отбрасывать при вычислениях (Лейбниц пренебрегал бесконечно малыми высших порядков)?

Положение значительно осложнялось еще и тем обстоятельством, что наряду с блестящими достижениями при пользовании методом бесконечно малых все чаще и чаще математики стали приходить к противоречивым выводам.

Становилось ясным, что следует или отчетливо определить понятие бесконечно малой или просто отказаться от пользования ими. Конфуз достиг высшей степени после выступления философа епископа Беркли, который ехидно предлагал математикам выход из положения, определив бесконечно малые как “призраки усопших количеств”.

После выступления Беркли (1734 г.) работа по обоснованию “новой математики”, т.е. по преодолению логических противоречий, направляется на уяснение понятия предела переменной. Но лишь математики начала XIX века – в особенности Коши – сделали из понятия предела настоящий фундамент для последовательного построения математического анализа в целом, окончательно изгнав из него всякую мистику. Так был преодолен один из кризисов основ математики.

Преподаватель должен подчеркнуть, что история становления математического анализа – яркий пример того, что противоречие является источником развития процесса познания. “Найти подходящее орудие для разрешения той или иной задачи – это еще не все; большое значение имеет и тот момент, когда, пользуясь этим орудием, мы наталкиваемся на неразрешимые задачи. Пытаясь найти их решение, мы невольно расширяем область анализа путем создания новых символов и новых теорий. Таким именно образом всегда шло развитие математики” [1].

Здесь важно подчеркнуть, что противоречие является источником не только развития процесса познания, но и развития объективного мира. Всякое развитие есть возникновение тех или иных противоречий, их разрешение и возникновение новых противоречий.

В разделе “Ряды” весьма поучительна в методологическом плане известная дискуссия о “сумме” членов ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

о которой, на наш взгляд, нельзя не рассказать студентам. Применяя к такой “бесконечной сумме” правила действий с конечными суммами, математики получали значения $0, 1, {}^1\!/_2$ (это надо продемонстрировать студентам, попросив их найти ошибку в вычислениях (проблемная ситуация!)).

Курьезную попытку оправдать равенство

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2}$$

представляла собой ссылка на “закон справедливости”, якобы существующий в мире (Лейбниц), а равенство

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2}$$

рассматривалось как “чудесный символ создания мира из ничего” (Гранди).

Эйлер рассматривал ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

и полагая $x = -3$, получил равенство

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$$

Студентам интересно и полезно будет узнать, что подобные результаты часто приводили даже крупных математиков к нелепым (с современной точки зрения) выводам. Так, Эйлер, взяв разложение

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots,$$

при $x = -1$ получил

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \qquad (1)$$

Затем Эйлер рассмотрел ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

и получил при $x = 2$

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots \tag{2}$$

Эйлер заключил, что сумма ряда, стоящего в правой части равенства (2), должна превышать сумму ряда (1), а поэтому $-1 > \infty$. Некоторые современники Эйлера на этом основании утверждали, что отрицательные числа, которые больше бесконечности, отличаются от отрицательных чисел, меньших нуля. Эйлер же считал, что бесконечность разделяет положительные и отрицательные числа так же, как и нуль. Вызывает удивление тот факт, что Эйлер и некоторые его современники, благодаря гениальной интуиции, получили целый ряд первоклассных результатов в теории рядов, исходя из неправильных предпосылок.

Попытки разрешить противоречия, подобные описанным выше, привели в конце концов к созданию строгой теории рядов, которая существенно обогатила математику. Д.Гильберт в знаменитом докладе на втором Всемирном конгрессе математиков отметил, что "всякая научная область жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития…"

Полезно подчеркнуть, что история становления и развития математического анализа показывает, как тесно могут переплетаться между собой математика и философия.

Остановимся на конкретных примерах, позволяющих продемонстрировать перед студентами отражение в математическом анализе одного из основных законов материалистической диалектики – закона перехода количественных изменений в качественные.

1. Сумма бесконечно большого числа бесконечно малых не обязательно является бесконечно малой (неограниченное увеличение количества может дать новое качество).
2. Соотношения между бесконечно малыми и бесконечно большими (условная форма записи $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$). При неограниченном уменьшении (увеличении) количества получаем новое качество.

3. Неопределенности $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ и др. Например, в случае неопределенности $\frac{0}{0}$ числитель, уменьшаясь, “старается уменьшить дробь”, но знаменатель, уменьшаясь, “старается увеличить дробь”, т.е. влияния уменьшений числителя и знаменателя на дробь – противоположности. В результате такой “борьбы противоположностей” (закон единства и борьбы противоположностей!) при неограниченном уменьшении количества может получиться новое качество (число, не равное нулю, бесконечность или отсутствие предела, конечного или бесконечного).
4. Производная. Та же философская трактовка, что и в предыдущем примере. Если $y = const$, то $y' = 0$. Там, где нет диалектики, движения, не может появиться новое качество.
5. Идея приближенного равенства $\Delta y \approx dy$ при малых Δx в предельной условной формулировке: в бесконечно малом переменное есть постоянное, кривое есть прямое (неограниченное уменьшение количества дает новое качество).
6. Достаточное условие экстремума функции, использующее первую производную. Пусть $f'(c) = 0$, на интервале $[a, c)$ $f'(x) > 0$, на интервале $(c, b]$ $f'(x) < 0$. Изменение количества x на интервале $[a, c)$ не приводит к изменению качества (функция возрастает). При переходе через $x = c$ происходит скачкообразное изменение качественного поведения функции (возрастание сменяется убыванием). Точка $x = c$ является мерой, нарушение которой обусловливает качественное изменение в поведении функции.
7. Достаточное условие существования точки перегиба графика функции (при переходе через точку c, в которой $y''(x) = 0$, происходит скачкообразное изменение качественного поведения графика функции).

8. Определение длины дуги как предела длины вписанной ломаной при стремлении к нулю длины каждого из ее звеньев (при этом число звеньев стремится к бесконечности).
9. Понятия определенного, двойного, тройного и криволинейных интегралов в условной формулировке как сумм бесконечно большого числа бесконечно малых величин (сравнить с п. 1).
10. Понятие суммы ряда как качественное изменение понятия суммы при бесконечном числе слагаемых.
11. Разложение функций в ряд Тейлора: сумма бесконечного числа степенных функций дает качественно более сложные функции.
12. Ряд Фурье: сумма бесконечного числа тригонометрических функций может дать качественно более простые функции.
13. Ряды Фурье: сумма бесконечного числа непрерывных функций может дать функцию разрывную.

Не вызывает сомнения, что методика формирования научного мировоззрения студентов в процессе преподавания математических дисциплин должна стать составной частью методики преподавания математики.

1. Борель Э. Основные идеи алгебры и анализа. – М.: Государств. изд-во, 1927. – С.111.
2. Крылов А.Н. Воспоминания и очерки. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С.589.
3. Хинчин А.Я. Педагогические сочинения. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. – С.145.

Резюме. Розглянуто деякі прийоми формування наукового світогляду студентів у процесі викладання математичного аналізу.

Summary. Some methodological skills of students’ scientific outlook formation in the process of teaching mathematical analysis are investigated.

УПРАВЛЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТОЙ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Н.В.Ванжа, преподаватель,
Полтавский университет потребительской кооперации Украины

Самостоятельная работа студентов над теоретическим материалом опирается на сформированные умения анализировать, сравнивать, выделять существенное, обобщать, прогнозировать, делать выводы, и начинается, по нашему мнению, на лекции в процессе её конспектирования. Успешность этой работы зависит от умения студентов грамотно конспектировать лекцию.

Выделим два основных умения, которыми должны овладеть студенты.

1. Умение выборочно конспектировать. Студенты должны понимать, что писать лекцию дословно нецелесообразно, это быстро утомляет и ослабляет мышление. Надо записывать главное, используя условные знаки, сокращенные обозначения, делая схематические рисунки. Преподаватель может помочь студенту, выделяя голосом, темпом речи наиболее существенный материал, который нужно записать.
2. Рациональное ведение конспекта. Необходимо оставлять широкие поля для последующей самостоятельной работы или же писать только с одной стороны листа. Желательно использовать дополнительные цвета для выделения заголовков, формул, определения основных понятий. Обязательно нужно записывать рекомендуемую лектором литературу для самостоятельной работы.

Работу над лекцией желательно начинать в тот же день, когда она была прочитана. При этом в процессе ее обработки необходимо закончить оформление лекции (дописать незаконченные слова, устранить недочеты), выявить и выделить непонятный или требующий уточнения материал. Эффективность дальнейшей работы студента над лекцией определяется, на наш взгляд, выполнением следующих условий:

а) осознание студентами значимости материала для профессиональной подготовки;

б) наличие простора для самостоятельной работы студента (т.е. после лекции не возникает ощущения, что все понятно и на все вопросы получены ответы);

в) тесный контакт и совместная работа лектора и ассистентов по организации самостоятельной деятельности студентов.

Мы предлагаем стимулировать самостоятельную работу студентов над темой лекции такими способами:

1. Перед студентом нужно поставить задачу обобщения, систематизации теоретического материала лекции. Результаты работы могут быть оформлены в виде сравнительных таблиц или опорных конспектов. В этом случае необходимо систематизировать математический материал в виде упрощенных рисунков, условных знаков, логических схем.

Составлению опорного конспекта студентов необходимо специально обучать. На первом практическом занятии преподавателю следует составить опорный план по материалу лекции вместе со студентами. Такой план, на наш взгляд, должен отвечать двум основным требованиям:

а) информативность и компактность, т.е. содержать максимум информации на небольшой площади (помещаться на одной страничке тетради);

б) содержать основные, принципиально важные сведения (формулы, графические образы, понятия).

Мы считаем, что такой план должен быть ориентирован на предстоящее практическое занятие. Обязательным условием для составления опорных планов является наличие плана практических занятий у студентов. Опорный план целесообразно составлять в конспекте практических занятий. Контроль следует осуществлять на практическом занятии при проверке теоретической подготовки студентов.

2. Отдельные пункты, вопросы плана следует отдать на самостоятельное изучение. Задачи для самостоятельной работы могут включать в себя проведение несложных доказательств, поиск дополнительных теоретических сведений (в этом случае должна быть указана необходимая литература), выполнение практических исследовательских заданий.

Излагая, например, тему «Система линейных уравнений с *m* неизвестными» преподаватель может выделить следующие вопросы темы:

1. Система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными;
2. Система *n* линейных уравнений с *m* неизвестными;
3. Теорема Кронекера-Капелли;
4. Система линейных однородных уравнений;
5. Метод Гаусса;
6. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

Содержание последнего пункта выходит за рамки обязательной программы курса высшей математики для студентов экономических специальностей, однако имеет важнейшее прикладное значение, так как иллюстрирует приложение систем линейных уравнений для балансового анализа, осуществляемого в сфере макроэкономики. Этот вопрос, по нашему мнению, целесообразно предложить студентам для самостоятельной работы.

Обязательно нужно продумать формы контроля за самостоятельной работой над лекционным материалом. Чаще всего, как показало наше исследование, студентов предупреждают, что материал самостоятельной работы будет включен в экзаменационные билеты. Однако, в этом случае значительная часть студентов откладывает эту работу на конец семестра, что усугубляет перегрузку студентов перед экзаменами. Мы считаем, что контроль за самостоятельной работой студентов должен быть оперативным. Вопросы, изученные самостоятельно, должны проверяться во время коллоквиума, а также рассматриваться на практическом занятии при опросе теории. В отдельных случаях, при выполнении практических исследовательских заданий достаточно обсуждения результатов на практическом занятии.

Например, при изложении темы «Одномерные случайные величины» после введения понятия выборочной средней и выборочной дисперсии студентам может быть предложено такое задание: вычислить $\bar{x}_B$ и $Д_B$ оценок студентов курса на экзамене по высшей математике. (Выборкой является отдельная группа, генеральной совокупностью – поток). На практическом занятии целесообразно сравнить выборочные оценки с соответствующими генеральными и сделать вывод об адекватности выборочных оценок и репрезентативности выборки.

От семестра к семестру задания для самостоятельной работы должны усложняться. Следует предлагать студентам несколько источников информации, давать задания, требующие анализа, обобщения изученной литературы. Задания для самостоятельной работы должны быть разнообразными, так как разные типы заданий, как показывает опыт, формируют и развивают различные умения и навыки самостоятельной деятельности.

Задание найти и самостоятельно изучить указанный теоретический материал способствует развитию следующих умений и навыков:

- умение находить нужную информацию, используя современный справочно-библиотечный аппарат, а также компьютерные банки данных;
- владение техникой ознакомительного, выборочного чтения;
- умение обрабатывать и усваивать материал на основе мыслительных операций анализа, синтеза, выведения, сравнения, обобщения и др.;
- умение составлять план, конспект или обзор изученных источников.

Отметим, что обработка математической информации, по нашему мнению, невозможна без использования карандаша и бумаги. Ход рассуждений автора должен быть восстановлен студентом на бумаге по памяти, причем необходимо самостоятельно провести все доказательства, оставленные автором читателю.

Самостоятельное доказательство теорем, следствий, свойств развивает уже сформированные в определенной мере умения дедуктивных рассуждений, логическое мышление.

При выполнении практических и экспериментальных заданий студенты овладевают такими умениями и навыками, как:

- планирование эксперимента;
- систематизация результатов наблюдения и группировка данных;
- выполнение простейших расчетов;
- представление результатов в табличной или графической форме;
- оформление результата в виде реферата или доклада.

Очевидно, что не все типы заданий одинаково приемлемы при изучении различных математических дисциплин. К примеру, при изучении курса высшей математики затруднительно давать студентам экспериментальные задания, а в курсе математического программирования предлагать самостоятельно доказывать теоретические положения.

3. Предложить студентам тематику рефератов, эссе по курсу математических дисциплин. Темы могут носить обзорный, исторический, прикладной, проблемный, исследовательский характер. Перечень тем должен быть известен в начале семестра, чтобы каждый студент, желающий заняться этой работой, мог выбрать себе то, что ему интересно. При желании одну тему могут взять 2-3 человека. Темы рефератов по курсу высшей математики могут быть, к примеру, такими:

1. Жорданова форма матрицы.
2. Практические задачи нахождения экстремума функции.
3. Исторические аспекты понятия «Определенный интеграл».
4. Применение метода неопределенных коэффициентов.

В эссе предполагается наличие личностной оценки автора, поэтому темы сочинений должны давать больше простора авторской мысли:

1. Математика – источник основных идей в экономике.

2. Потребности введения понятия функции нескольких переменных.
3. Сравнительная характеристика методов решения систем линейных уравнений.
4. Использование метода наименьших квадратов в экономике.

Мы считаем, что было бы полезно дать возможность всем студентам потока ознакомиться с лучшими работами. С этой целью можно на последних одной-двух лекциях семестра провести студенческие конференции, где аудитория выберет три лучших доклада и выдвинет их на общеинститутскую студенческую научную конференцию. Ведущий лектор может поощрить авторов доклада, выставив им высокую оценку за экзамен еще до начала сессии.

Такая деятельность, на наш взгляд, с одной стороны развивает творческие способности авторов работ, а с другой – повышает мотивацию изучения математических дисциплин всех студентов.

В методической литературе выдвинута идея об опережающей самостоятельной работе по отношению к лекции. Обычно такая работа сводится к повторению содержания предыдущей лекции. Опытные педагоги настоятельно рекомендуют студентам читать или хотя бы просматривать до лекции материал новой темы в учебнике, а также контрольные вопросы к этой теме. Однако, на практике такие студенты встречаются крайне редко. Мы предлагаем способ организации самостоятельной работы, направленной на предстоящую лекцию, который заключается в следующем. В конце текущей лекции студенты получают задание: решить конкретную задачу или провести статистический эксперимент, или собрать эмпирические данные. Следующая лекция начинается с анализа этой информации. Приведем пример использования с этой целью статистического эксперимента.

Накануне изучения темы «Предельные теоремы теории вероятности» студентам можно предложить провести дома опыт по бросанию игрального кубика и записать результаты: сколько было опытов, сколько раз произошло событие A – {*выпадание тройки*}. На лекции перед введением теоремы Бернулли $\left(\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1\right)$ отдельные результаты записываются на доске, после чего сравнивают значение выражения $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ для каждого случая. Смысл теоремы Бернулли становится очевидным: если число испытаний достаточно велико, то отклонение относительной частоты от вероятности становится сколь угодно малым.

Очевидно, что для организации систематической опережающей работы необходимо разработать комплекс проблемных вопросов, задач, заданий, которые будут стимулировать самостоятельную деятельность студента, направленную на предстоящую лекцию. Опыт педагогов и наше исследование свидетельствуют, что опережающая самостоятельная работа является эффективным средством активизации познавательной деятельности студента на лекции.

Важным аспектом управления самостоятельной работой студентов является обеспечение методической помощи студентам при самостоятельном изучении ими теоретического материала. Мы видим три направления решения этой проблемы:

1) подготовка соответствующих учебно-методических пособий;
2) использование современных компьютерных обучающих программ;
3) четкая организация консультаций.

Отметим, что необходимы учебно-методические пособия, которые не только излагают отдельную тему или вопрос, но также обучают студента рациональным способам овладения знаниями.

Среди всего разнообразия компьютерной продукции для активизации самостоятельной работы студентов при изучении теоретического материала мы рекомендуем выбирать пособия, которые не просто являются электронным аналогом вузовских учебников, но также выполняют тренинговые и контрольные функции.

Такими, к примеру, являются программы Донецкого государственного института искусственного интеллекта. Мы апробировали на кафедре высшей математики и физики в Полтавском университете потребительской кооперации мультимедиа обучающую программу «Высшая математика».

Данное пособие включает четыре тома:
1. Дифференциальное исчисление; 2. Интегральное исчисление; 3. Дифференциальные уравнения; 4. Аналитическая геометрия.

Введение к каждому тому содержит исторические сведения о математических открытиях и ученых-математиках. Оглавление включает название разделов с расширением на темы и подтемы, что позволяет быстро найти нужный материал.

В конце каждой темы и всего раздела предлагаются упражнения для проверки усвоения материала. Рядом с заданием высвечивается четыре подсказки, которые можно вызвать при необходимости: Теория, Анализ, Обучение, Результат.

Выбрав подсказку Теория, студент попадает на ту страницу электронного пособия, которая содержит теоретический материал, необходимый для решения этого задания. Подсказка Анализ дает подробное решение этого задания с пояснением. Подсказка Обучение помогает студенту самостоятельно выполнить задание в пошаговом режиме, предлагая на выбор несколько вариантов каждого шага. Выбирая на каждом этапе правильный ответ, студент постепенно продвигается к окончательному ответу. Неправильный ответ – отсылает повторить теоретический материал. Подсказка Результат сразу выдает готовый ответ. В процессе решения машина фиксирует количество ошибок и обращений за помощью, что позволяет осуществить контроль (и самоконтроль) за работой студента.

Компьютерные пособия незаменимы для изучения таких трудных для студентов-нематематиков разделов и тем, как «Аналитическая геометрия», «Предел функции» и др.

Выразительные иллюстрации с движущейся графикой, сопровождаемые звуковым пояснением, делают работу с данными пособиями интересной и эффективной.

Консультации, цель которых состоит в организации помощи студентам при изучении теоретического материала, должны решать, по нашему мнению, в основном задачи методического плана:

- обучение студентов навыкам самообразовательной деятельности;
- дополнение, углубление, уточнение полученных теоретических знаний;
- осуществление контроля за ходом выполнения заданий;
- общее руководство при написании рефератов, сочинений (помощь в составлении плана, определении структуры работы, подборе литературы).

Консультации дают возможность студенту непосредственно в личной беседе с преподавателем получить ответы на интересующие его вопросы. Преподаватель, в свою очередь, в результате неформального общения со студентом сможет лучше узнать его индивидуальные особенности, оценить трудности, с которыми сталкиваются студенты при изучении отдельных вопросов темы. Такая обратная связь дает материал для совершенствования методики преподавания дисциплины.

Опыт нашей практической работы подтверждает эффективность данных методов управления самостоятельной деятельностью студентов при изучении теоретического материала.

Резюме. В статті розглянуті методи управління самостійною діяльністю студентів при вивченні теоретичного матеріалу.

Summary. The article is about the methods of management of student’s independent work studeing theoretic material.

ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ЗІ СТУДЕНТАМИ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ЕКОНОМІЧНОГО ПРОФІЛЮ

Л.С. Пуханова, ст. викладач
Донецький національний технічний університет, м.Красноармійськ

Досвід вчителів-новаторів, власний досвід, результати експерименту дають підставу стверджувати, що однією з ефективних форм вивчення теоретичного матеріалу в вищій школі є лекція. "Лекція – основна форма проведення навчальних занять у вищому навчальному закладі, призначена для засвоєння теоретичного матеріалу" [1].

Аналіз підходів до визначення цього методу, власні дослідження дозволяють уточнити це поняття. Лекція – це логічно витриманий, системно послідовний комплекс усних методів навчання (інформаційне повідомлення, пояснення, розповідь, бесіда), спрямований на реалізацію студентами репродуктивної або продуктивної творчої активності. Для педагогів-практиків таке визначення лекції важливе тому, що, по-перше, в ньому наголошується, що лекційний метод поєднує в собі низку усних методів навчання; по-друге, це поєднання має бути логічно витриманим і системним, бо воно відображає особливість і специфіку лекційного методу; по-третє, виконана спроба розгляду лекції крізь призму навчально-пізнавальної активності, що зумовлює як відповідну її будову, так і відбір змісту навчального матеріалу. В своїй структурі лекції будуються на основі поєднання фактичного та логічного принципів, а в окремих лекціях можлива перевага одного з них. Зовнішня структура лекції – вступ, виклад, заключна частина. Це необов'язкові складові кожної лекції, однак, "логічна стрункість, зіставляння і взаємозв'язок окремих частин лекції – необхідні умови її успіху" [2].

Традиційну, встановлену роками вузівську лекцію невиправдано обходять увагою, роблячи спроби заміщення її самостійною роботою, скороченням лекційного курсу.

Розглянемо особливості організації процесу засвоєння теоретичного матеріалу щодо ефективності оптимізації лекційного методу в навчальному процесі.

Організацію вивчення теоретичного матеріалу варто розпочинати з логіко-дидактичного аналізу провідних тем. Тема програми з теорії ймовірностей та математичної статистики є дидактичною одиницею навчального матеріалу, яка дозволяє розкрити логічний зміст взаємопов'язаних між собою питань, з'ясувати рівень строгості обґрунтування фактів, що розглядаються, чітко сформулювати мету вивчення теми в цілому, основні питання, намітити можливі ефективні варіанти реалізації методів і прийомів, форм і засобів навчання, продумати систему контролю й оцінки засвоєної системи знань, навичок і вмінь.

Виконуючи логіко-дидактичний аналіз теми, необхідно сформулювати основні теоретичні результати вивчення теми, враховуючи їх рівень узагальнення і обґрунтування, тобто види означень з їх логічними структурами, види теорем, специфіку методів їх доведення, типологію ймовірнісно-статистичних задач. Це перша особливість постановки навчальних задач. Другою суттєвою особливістю постановки навчальних задач при вивченні теоретичного матеріалу є відбір, з'ясування складу виконання навчальних дій і прийомів розумової діяльності. Постановка навчальних завдань з вивчення теоретичного матеріалу визначає певною мірою вибір засобів та методів навчання. Специфіка формування дій розв'язування навчальної задачі залежить від їх операційного складу, від рівня навченості та научуваності групи в цілому і кожного студента зокрема, від наявних засобів навчання, від особистості викладача тощо.

Щодо питання вибору методів і прийомів навчання, то залежно від поставленої мети і змісту навчального матеріалу, доцільно варіювати методи як за джерелами навчання, так і за видами діяльності викладача й студентів.

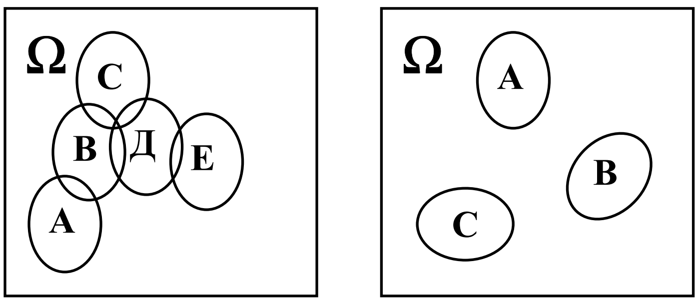
Під час вивчення теоретичного матеріалу доцільні лише комбінації форм і методів, які приведуть до ефективності процесу пізнання.

Навчальна лекція для студентів економічних спеціальностей повинна включати в себе такі моменти:

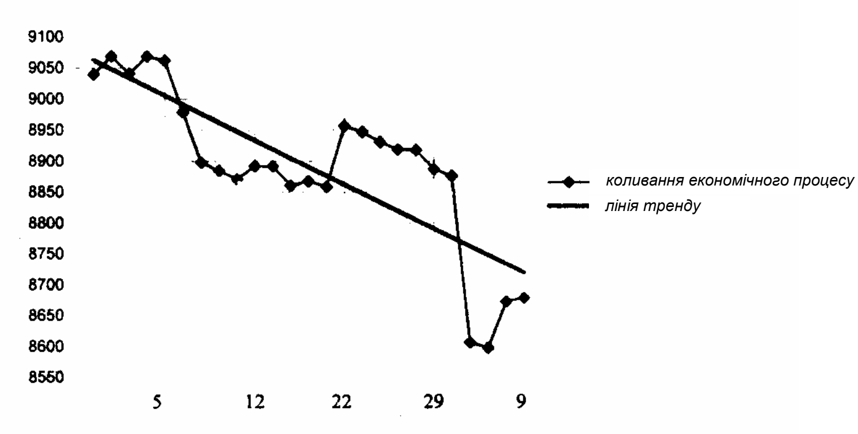
- розширення відомих інтерпретацій математичних понять;
- спеціальна інтеграція деяких математичних понять;
- елементи математичного моделювання;
- вибір прикладів прикладного змісту.

Коротко проаналізуємо структуру формування теоретичних знань через призму розвиваючого навчання.

Один з найважливіших етапів – ґрунтовна, некваплива робота з означеннями математичних понять, введенням нових термінів. Означення – не просто об'єктивна реальність, дана нам у підручнику, не просто речення, яке треба запам'ятати. Кожне поняття теорії ймовірностей та математичної статистики — це перш за все картинка (див. мал. 1), модель (див. мал. 2) або відчуття, що асоціативно виникають у зв'язку з деяким словом, до яких вміємо підібрати відповідний словесний опис.



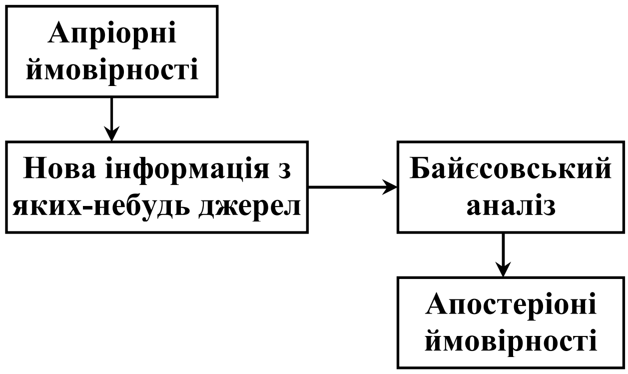
Мал. 1. Поняття сумісності та несумісності



Мал. 2. Динаміка коливань спадкової величини та тренд

Очевидний вплив на міцність засвоєння, розвиток логіки, уяви, усного мовлення студентів, акцентування на глибокому аналізі означень робить процес засвоєння теоретичного матеріалу свідомим, розкутим, позбавленим традиційного зубріння. Це, в свою чергу, дозволяє компенсувати додаткові витрати часу за рахунок прискорення темпу вивчення властивостей проаналізованих понять – теорем.

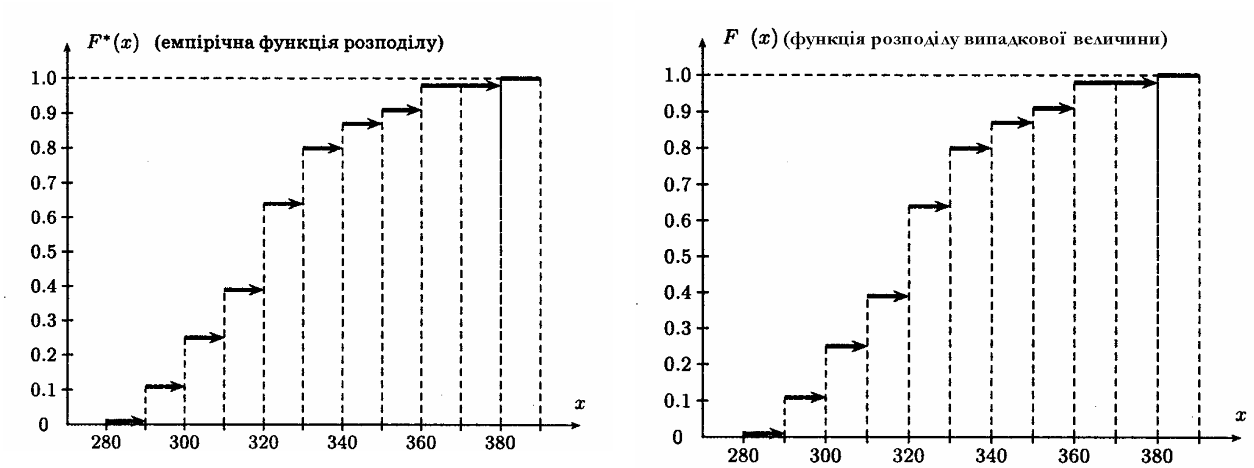
При роботі з формулюваннями теорем ефективно діє прийом аналізу умов через «розхитування моделей» (що буде, якщо з формулювання теореми Муавра-Лапласа вилучити слова “при досить великій кількості випробувань n та малому p”). Крім того, доцільно зосереджуватися на класифікації основних теорем: чи є вони ознаками, властивостями або критеріями понять; необхідними або достатніми умовами. Корисне також створення простих, наочних схем, з яких випливає взаємозв’язок і місце використання компонентів (див. мал. 3). Але головним чинником, який забезпечує провідну роль теоретичних знань є розуміння того, що цінність становить не тільки результат теореми або нова формула, а й саме доведення. Їх усвідомлення на рівні опорних асоціацій дозволяє ставити питання про самостійне придумування доведень, математичну творчість студентів. Наприклад, теореми додавання та множення ймовірностей можна довести, не заглядаючи до підручника, якщо розуміти класичні означення ймовірності.



Мал. 3. Послідовність переоцінки ймовірностей

Звісно, розвиваючий, творчий підхід до вивчення теорії не вичерпується роботою з формулюванням та доведенням теорем. Упорядкування і, навіть, алгоритмізація вивчення споріднених тем теорії ймовірностей та математичної статистики допомагає студентам усвідомити принципи дослідницької роботи, підводить до розуміння принципів постановки математичних проблем.

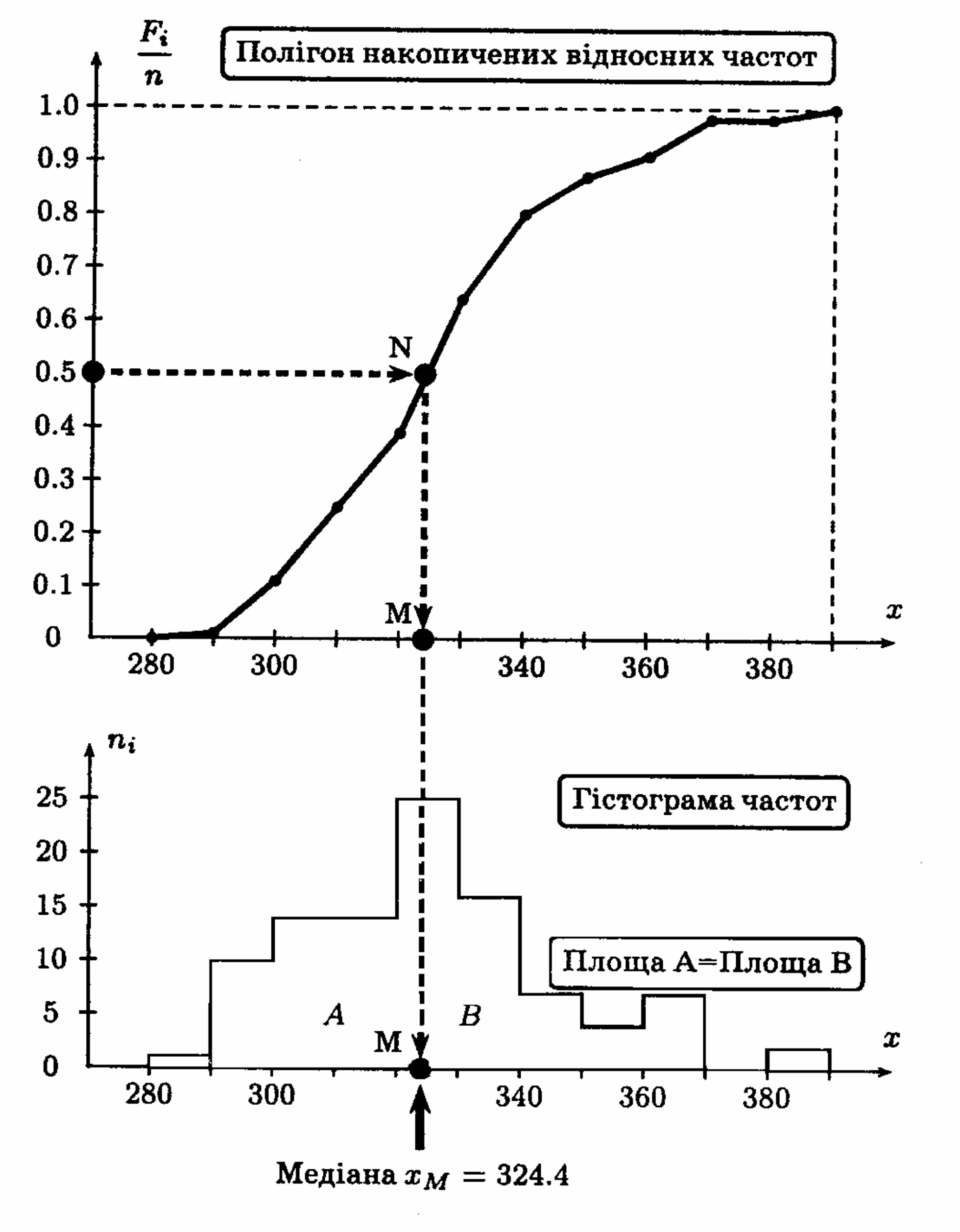
Наприклад, введення і алгоритм дослідження функцій розподілу випадкової величини та емпіричної функції розподілу залишаються фактично незмінними (див. мал. 4). Вдале використання системно-модульного підходу призводить до того, що після другої зустрічі зі схемою побудови; та дослідження студенти починають усвідомлювати не тільки зміст конкретної теми курсу, а й принцип її побудови, новий матеріал стає до певної міри передбачуваним для студентів, виникають «опорні точки» у розділах, які ще не вивчалися, а отже, у курсі теорії ймовірностей та математичної статистики вцілому. Крім того, навички дослідницької роботи сприяють формуванню наукового світогляду.



Мал. 4. Функції розподілу

Кодуванню нових теоретичних знань необхідно навчати студентів у процесі введення нової ймовірнісно-статистичної інформації за допомогою спеціальних процедур. До таких процедур ми відносимо дії змістово-графічного коду інформації, тобто побудова діаграм, всіх видів полігонів, графіків та ін (див. мал. 5).

Змістово-графічним формам ми віддаємо перевагу, оскільки за даними психофізіології такі структури значно швидше і міцніше, ніж словесні, закарбовуються у довготривалій пам'яті людини, а також легше відтворюються і утримуються в оперативній пам'яті.

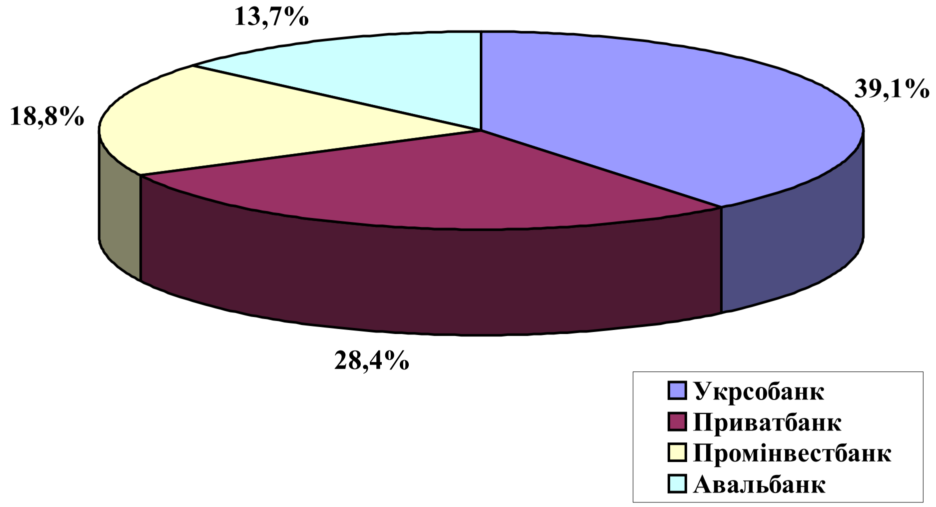


Мал. 5

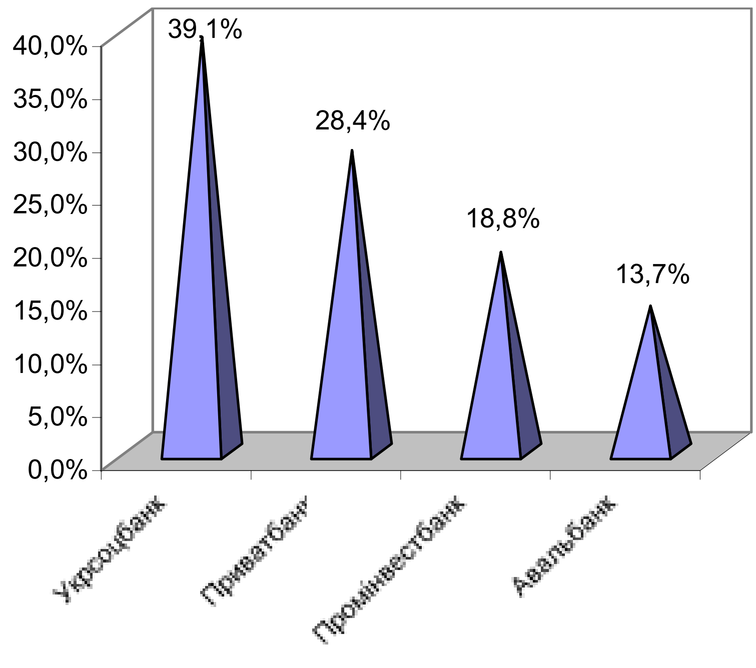
Наприклад, за частотами і частками номінального ряду розподілу можно побудувати об'ємні секторні діаграми (див. мал. 6 та мал. 7).

Розподіл вкладів населення в банки держави 2000р.

Рівень освіти	Кількість осіб	
	тис.чол. (частоти)	відсоток (частки)
Укрсоцбанк	9433,2	39,1%
Приватбанк	6857,5	28,4%
Промінвестбанк	4525,6	18,8%
Авальбанк	3308,8	13,7%

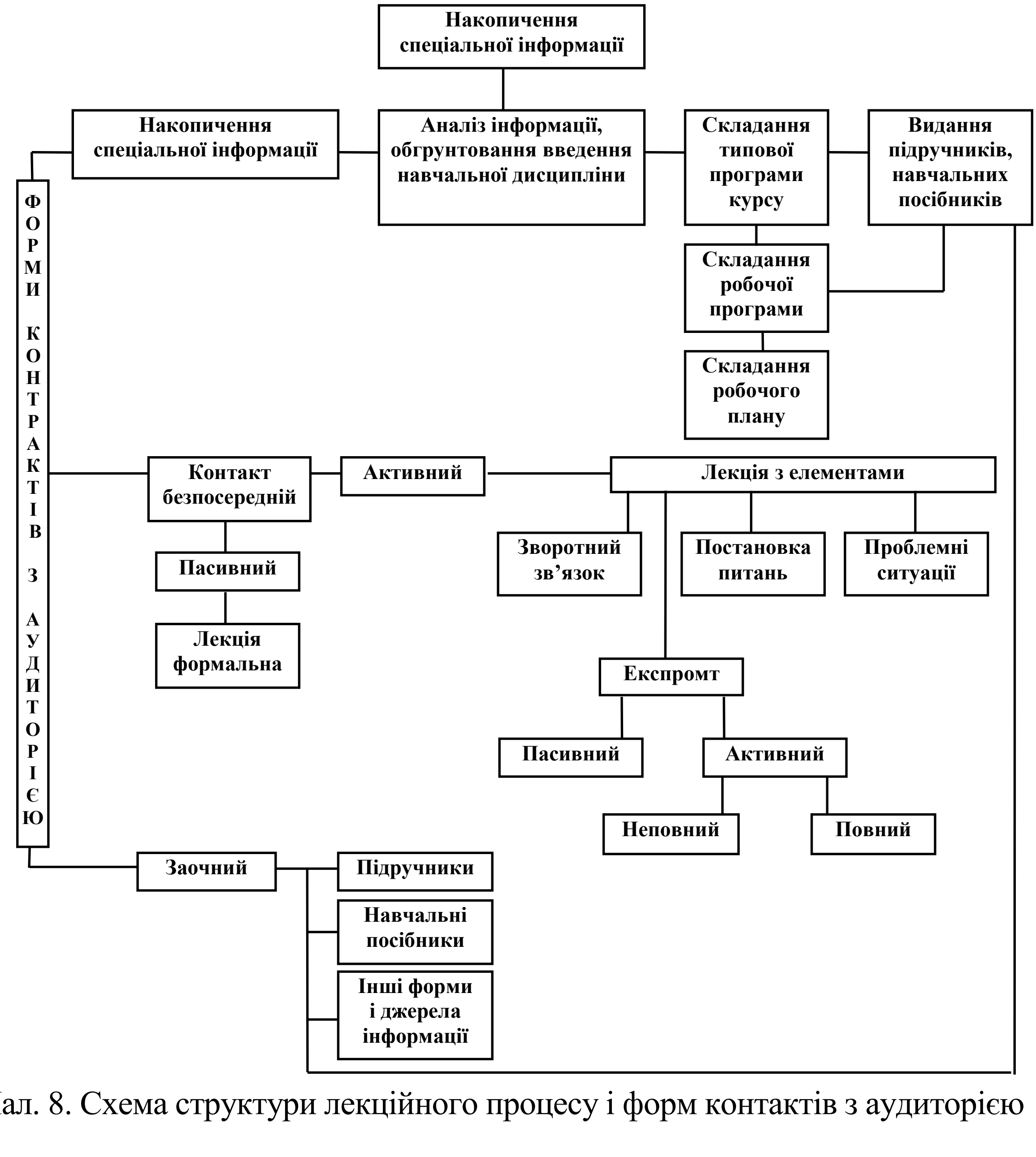


Мал. 6



Мал. 7

Моделювання лекційного курсу, аналіз і значення окремих його елементів є необхідною умовою вдосконалення й оптимізації всього навчального процесу. Розробка структурно-логічних схем лекційного елемента дає можливість моделювання найраціональнішого розміщення окремих складових його частин, виявлення їх значущості і необхідності застосування. Для такого аналізу пропонуємо один з варіантів моделі організації лекційного курсу, який включає аналіз форм контактів викладача з аудиторією під час проведення лекції. Ці форми на різних стадіях формування лекційної роботи різні. Це зумовлює необхідність проведення аналізу структури лекційного процесу і форм контактів лектора з аудиторією в їх взаємозв'язку (див. схему на мал. 8).



Мал. 8. Схема структури лекційного процесу і форм контактів з аудиторією

1. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.
2. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.

Резюме. Изучается влияние особенностей организации процесса обучения теоретического курса теории вероятностей и математической статистики на интересе к этой дисциплине и на формирование мотивации учения.

Summary. Influence of features of the organization of process training of a theoretical rate of probability theory and mathematical statistics on interest to this discipline and on formation of motivation training is studied.

СИСТЕМА ЗАСОБІВ І СПОСОБІВ ФОРМУВАННЯ ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ У ПРОЦЕСІ ОЦІННОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Л.І.Ломако, канд. педагог. наук, доцент,
Донецький національний університет

Система освіти на всіх ступенях її структури повинна ставити за основну мету формування творчої особистості. Особливого значення це набуває, коли мова йде про підготовку майбутніх вчителів.

Найважливішим проявом творчих якостей особистості є ціннісне ставлення до предметів і явищ навколишньої дійсності. Оцінка (усвідомлення цінності) обумовлюється системою світоглядних знань особистості, її життєвим і соціальним досвідом, але формується і виявляється лише в процесі активної оцінної діяльності. Певна увага цій діяльності повинна приділятись у навчальному процесі вищих педагогічних закладів. В умовах вільного вибору, який характеризує сучасні спроби гуманізації освіти, особистість, зокрема та, що формується, часто губиться, втрачає самостійність, не вміє визначити і цивілізовано виявити своє ціннісне ставлення. Тому гостро відчувається потреба навчити студентів основним діям і прийомам раціонального оцінювання, допомогти позбавитися стереотипів мислення. На чому грунтуються підходи до організації такої діяльності?

Ціннісне пізнання визначається в філософії (В.Брожик, В.О.Василенко, О.Г.Дробницький, О.А.Івін, М.С.Каган, В.П.Тугаринов та ін.) як особливий тип пізнання, в основі якого лежить оцінка – усвідомлення цінності предметів і явищ навколишньої дійсності. Різниця між цінністю і оцінкою полягає в тому, що перша має об’єктивний характер, оцінка ж є відображенням суб’єктивного ставлення до цінності. Термін “оцінка” виконує подвійну функцію: означає думку, судження про ступінь цінності об’єкта, а також акт усвідомлення його цінності (процес оцінювання). Оцінка – є складним соціально-психологічним явищем, важливим структурним компонентом свідомості. Психологи (Б.Г.Ананьєв, В.М.Мясищев, С.Л.Рубінштейн, П.М.Якобсон та ін) розглядають оцінну діяльність як процес ціннісного ставлення до навколишнього, його творчого освоєння.

Оцінна діяльність містить у собі ряд компонентів: мотиваційний – це мотивація, особистісне значення, що надається використанню оцінних дій; когнітивний – це система засвоєних особистістю “соціальних знань”: понять, правил, оцінок, норм цінностей; операціональний – сукупність узагальнених раціональних прийомів оцінної діяльності, а саме: цілепокладання, оцінного аналізу, порівняння, узагальнення, кожний з яких виконує специфічну функцію, служить формуванню особистісного значення засвоюваних соціальних цінностей і норм, побудові оцінного до них ставлення.

Як показують результати досліджень, глибокому і всебічному, творчому оцінюванню сприяють насамперед не засвоєння певних понять, правил, оцінок, або чіткі приписи щодо виконання у певному порядку системи дій і операцій для оцінки конкретних предметів, явищ, а сформованість у особистості широких пізнавально-оцінних операціональних структур. У процесі ціннісного пізнання можна умовно виділити два рівні – чуттєвий і раціональний. На чуттєвому рівні оцінка здійснюється через емоційні переживання, наявну систему світоглядних знань і досвіду. На раціональному – чуттєва оцінка поглиблюється, уточнюється, а інколи змінюється у зв’язку з розширенням знань про об’єкт оцінки, усебічним його аналізом, узагальненням, формуванням цілісного уявлення про те, що оцінюється. Щоб здійснити оцінку на раціональному рівні, потрібно зафіксувати первинне емоційне враження про об’єкт оцінки, визначити мету оцінки, доповнити інформацію про об’єкт оцінки, провести аналіз оцінюваного з урахуванням первинного враження та нової інформації (виділити основні елементи, порівняти з еквівалентом, визначити суперечності), узагальнити знання в оцінному судженні з доведенням його істинності. Дана структура оцінювання інваріантна для більшості навчальних предметів і відображає цілісний розгорнутий процес оцінного пізнання.

Вивчення готовності вчителів Донецької області до оцінної діяльності показує, що більшість з них (98% з 293 опитаних) розуміють важливість і актуальність досліджуваної проблеми, але систематичну роботу по організації оцінної діяльності проводять лише 24% з них. Однією з причин цього є те, що більшість з них недостатньо чітко уявляють сам процес оцінної діяльності, а саме не знають які дії і мислительні операції мають першорядне значення для неї. Лише 2% опитаних змогли вірно визначити усі дії, необхідні для оцінювання, а 16%-частково.

Це підтверджує необхідність застосування у навчальному процесі педагогічних закладів певних засобів і способів, спрямованих на організацію активної оцінної діяльності студентів. При їх розробці, крім описаних вище підходів, необхідно враховувати і положення системного підходу до вивчення об’єктів, який отримав широкий розвиток в педагогічних дослідженнях (Т.А.Ільїна, Ф.Ф.Корольов, А.Т.Куракін, Л.І.Новікова та ін.). Системний підхід передбачає, що специфіка складного об’єкту (системи) не вичерпується особливостями “елементів, що його складають, а міститься насамперед у характері зв’язків і відносин між ними”, надає певну загальну спрямованість дослідженню об'єкта як складного функціонуючого цілого, виділення частин і елементів в їх специфічних зв'язках всередині цього цілого.

Таким чином, для формування творчого мислення студентів в процесі оцінної діяльності необхідна система засобів і способів її організації. Така система передбачає розв'язання наступних завдань: створити у студентів позитивну мотиваційно-потребнісну сферу оволодіння оцінними діями на раціональному рівні; забезпечити засвоєння знань про теоретичні основи і конкретні способи дій у ході оцінювання до рівня, що забезпечує творче застосування засвоєних знань і способів дій.

Як зазначалось вище, оцінна діяльність ґрунтується на єдності емоційно-ціннісного, понятійно-логічного і операціонально-діяльнісного факторів. Той, хто навчається, погано засвоює те, що не має для нього особистісного значення, що не торкається його почуттів, особистого досвіду (О.М.Леонтьєв). Тільки усвідомлена об'єктивна потреба в умінні оцінювати перетворюється в мотив, що безпосередньо обумовлює діяльність того, хто навчається в цьому напрямку. Отже роботу з організації оцінної діяльності необхідно починати із збудження інтересу до уміння обгрунтовувати судження, що висловлюються, здійснювати оцінку на раціональному рівні, а через нього і виховання потреби в активному застосуванні даного вміння.

Для усвідомлення потреби в раціональній оцінці необхідні і знання про діяльність, що має відбутися, які не приходять самі собою, а формуються внаслідок активної діяльності. Тільки поставлений в умови, коли розв'язати ту чи іншу ситуацію неможливо без знань про конкретні способи діяльності, а часто і творчо використовувати отримані знання, той, хто навчається на практиці переконується в необхідності таких знань. Таким чином, необхідна робота по засвоєнню теоретичних основ оцінної діяльності і знань про її операціональний склад. Прийоми запровадження знань про оцінну діяльність розрізняються в залежності від рівня і характеру пізнавальної діяльності студентів на певному етапі навчання.

Практичний досвід здійснення дій і операцій, що входять до структури оцінної діяльності, а надалі і навички творчого підходу набуваються в процесі виконання певних завдань. При цьому оцінне завдання ми розглядаємо як засіб організації оцінної діяльності, заснований на її послідовному варіюванні і ускладненні з тим, щоб той, хто навчається, свідомо враховуючи вплив цих факторів, міг набути досвід успішного здійснення даної діяльності в різних умовах. Основна функція таких завдань полягає в послідовному оволодінні і творчому використанні дій і мислительних операцій, необхідних для раціонального оцінювання. З цією метою використовуються завдання, що передбачають аналіз запропонованих висновків і оцінок чи вибір з них, порівняння чи узагальнення кількох оцінних суджень, розв'язання проблемно-оцінних ситуацій тощо. Використання таких завдань можливо не тільки під час практичних чи семінарських занять, але і під час лекцій, особливо, коли останні здійснюються на основі проблемного викладу, у формі диспуту, дискусії. Форма завдань обумовлена особливостями матеріалу, що вивчається. Найбільш доцільні оцінні завдання на заняттях з дисциплін суспільно-політичного циклу, де студенти стикаються з прямою необхідністю в оцінці подій, явищ, процесів, що відбуваються, діяльності видатних особистостей тощо. Але широкі можливості відкриваються для оцінної діяльності на заняттях з будь-якого предмету. Оцінювання вчить людину мислити, висловлювати власні думки, погляди, спостереження, умовиводи, що так необхідно для організації евристичної діяльності.

Спираючись на психологічні дослідження, в яких суб'єкт – суб'єктні відносини виділяються, як найбільш значущі в теоретичній моделі оцінно-мислительного акту (А.В.Брушлінський, Б.Ф.Ломов, О.М.Матюшкін, Я.О.Пономарьов, О.К.Тихомиров, Ж.Піаже та ін.) можна вважати, що ефективність формування операціонально-оцінних структур підвищується в комунікативних ситуаціях, що характеризуються сумісною діяльністю, взаємодією і спілкуванням суб'єктів. При цьому внутрішні діалоги співрозмовників переплітаються у зовнішньому, переходять у нього (М.М.Бахтін). Це дає змогу розібратися у своїх поглядах, проаналізувати почуття. Мовне спілкування (діалог) організується насамперед за допомогою колективних і групових завдань. При цьому використовуються такі методи колективної діяльності як бесіда, дискусія, диспут, полеміка, сюжетно-рольова гра, вибір яких обумовлений особливостями викладаємого матеріалу, формою занять тощо.

Викладені підходи до розробки засобів і способів організації оцінної діяльності студентів є однією зі спроб теоретичного обгрунтування і практичного вирішення проблеми. Але практичне застосування цих засобів і способів насамперед передбачає творчий підхід учителя і учнів до їх відпрацьовування і реалізації. В той же час необхідно враховувати, що представлена система являє собою частину цілісного процесу навчання у вузі, який є її середовищем. Тому вона взаємодіє з іншими методами, засобами навчання, її реалізація залежить від конкретних умов навчання, в тому числі підготовки викладачів і студентів, змісту виучуваного матеріалу, рівня його освоєння тощо. Надалі закріплення сформованих за допомогою даної системи способів дій і відповідних їм мотивів залежить від соціального середовища, організації різних сторін життя і діяльності суспільства.

Резюме. В статье обоснована необходимость системного подхода к разработке средств и способов формирования творческого мышления будущих учителей в процессе оценочной деятельности, характеризуются основные средства и способы предлагаемой системы: теоретические знания об оценочной деятельности; специально организованные оценочные задания; различные способы диалогического общения.

Summary. The article explains the necessity of sistematic approach to the research of means of the future teachers' creative thinking formation in the process of appreciation activity, the main means of the system under consideration are characterized. The description is given to theoretical knowledge of appreciation activity; to specially arranged appreciation tasks; to different ways of conversational intercourse.

ДО ПИТАННЯ ПРО МЕТОДИЧНУ ПІДГОТОВКУ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ НА ЗАОЧНОМУ ВІДДІЛЕННІ ПЕДВУЗУ

Л.Ф.Михайленко – аспірантка, О.І.Матяш – канд. педагог. наук, доцент, Вінницький Державний педагогічний університет ім.М.Коцюбинського

Реформування освіти відкриває нові можливості для подальшого удосконалення підготовки спеціалістів з вищою освітою.

У положенні про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах, вказано: "Навчання у вищих навчальних закладах здійснюється за такими формами: денна (стаціонарна); вечірня; заочна (дистанційна); екстернат.

Можливе поєднання різних форм навчання... Вечірня, заочна та дистанційна форми навчання є формами здобуття певного рівня освіти або кваліфікації без відриву від виробництва" [4].

Заочна форма навчання необхідна для людей, які змушені поєднувати трудову діяльність з навчанням. Нами було проведене анкетування студентів-заочників фізико-математичного факультету. В опитуванні брало участь 70 студентів-заочників 4 та 5 курсів. Аналіз анкет показав, що 80% респондентів працюють в школах області вчителями математики, 12% – в школі, але не вчителем математики, 8% не працюють в школі взагалі, і не планують працювати. 90% опитаних висловили побажання збільшити кількість годин на шкільний курс математики з методикою її викладання і вважають цей предмет основним у підготовці вчителя математики. Вони прийшли до вузу не лише за документом про вищу освіту, а й з великою кількістю запитань саме в галузі педагогіки і методики викладання математики.

За останнє десятиріччя в Україні публікацій, досліджень стосовно заочної педагогічної освіти майже немає. У 80-ті роки таких публікацій також було не багато. У 1980 році з'являється стаття Т.І.Кобзарєвої "Вища заочна педагогічна освіта на Україні". У 1986 році А.Є.Мусін ділиться досвідом проведення НДРС серед заочників-учителів. У цьому ж році Н.Є.Соколова розповідає про самоосвіту студентів-заочників при написанні контрольних робіт. М.В.Гамезо та Г.М.Спіжанкова висвітлюють основні напрями удосконалення вищої педагогічної освіти без відриву від виробництва. У 1986 році вийшов збірник наукових праць за редакцією В.М.Кузнєцова "Совершенствование подготовки специалистов без отрыва от производства". У 1989 році В.А.Нікітін розповідає про шляхи підвищення ефективності заочної і вечірньої педагогічної освіти. У 1990 році Ю.Г.Круглов піднімає питання заочної педагогічної освіти в "Учительській газеті" у статті "Образование "по почте" та у журналі "Советская педагогика" [3]. Сьогодні у Росії випускається щомісячний журнал "Высшее образование в России", який на своїх сторінках піднімає проблеми заочної освіти в цілому [2]. А щоквартальний журнал ЮНЕСКО "Перспективы: вопросы образования" висвітлює питання заочної освіти за кордоном. В Україні проблеми вищої освіти розкриває Вісник Академії педагогічних наук України "Педагогіка і психологія". Аналізуючи літературу та знаючи практику роботи заочного відділення ми зробили висновок, що заочна форма навчання має свої позитивні та негативні риси в порівнянні з стаціонарною формою підготовки вчителя математики.

У системі заочного навчання існує ряд серйозних проблем:

- серед вступників на заочне відділення більшість має відносно низькі знання;
- успішність заочників, як правило, значно нижча, ніж студентів денних відділень. Одна з причин: студенти-заочники не мають навиків самостійно опрацьовувати навчальну та методичну літературу;
- майже відсутнє забезпечення навчальною та методичною літературою, сучасними засобами навчання, обчислювальною технікою;

- при заочному навчанні кількість аудиторних годин скорочена в кілька разів в порівнянні з денною формою навчання;
- складний соціально-економічний стан в державі впливає на регулярність у відвідуванні консультпунктів;
- заочна освіта, в більшості випадків є платною. Це, очевидно, підвищує вимоги до її якості. Організація пізнавальної діяльності студента-заочника має іншу структуру на відміну від студента денної форми навчання. Технології викладання на заочному відділенні повинні мати свою специфіку;
- кількість часу, який студент-заочник може в міжсесійний період присвятити навчанню, на багато менший ніж у студентів стаціонарної форми навчання.

За роки свого існування заочна форма навчання змінювалась, вдосконалювалась, стверджувалась. Заочна система освіти практикується багатьма розвинутими країнами (США, Японія, Франція та інші). При ЮНЕСКО діє Міжнародна рада з заочної освіти. За заочною формою готуються в Україні значна частина спеціалістів (учителів близько 40%) [1]. Багаторічна практика підготовки спеціалістів за заочною формою навчання підтвердила її ефективність і право на існування спираючись на такі позитивні моменти:

- перш за все, поєднання трудової та освітньої діяльності за спеціальністю дозволяє більш свідомо ставитись до навчання, формує вміння співвідносити теорію з практикою. Заочники розцінюють знання, отримані в вузі, як засіб для розв‘язання професійних і життєвих проблем. Мотиви вступу в інститут у заочників, в більшості випадків, професійно спрямовані. Володіючи цими якостями, заочник, навіть поступаючись у знаннях випускнику денного відділу, часто більш перспективний. У випускників-заочників спостерігається більша оперативність, самостійність, впевненість;

- заочна освіта вчителя зближує його з учнями, адже він сам протягом п‘яти років знаходиться в ролі учня. Зникають психологічні бар‘єри між учителем і учнем, встановлюються стосунки взаємної довіри, вчитель стає ближчий і уважніший до своїх вихованців, оскільки йому зрозумілий їх психологічний стан;
- випускників-заочників, у багатьох випадках, не потрібно влаштовувати на роботу, відпадає необхідність адаптації на новому місці роботи.

У систему методичної підготовки вчителя математики в педагогічному вузі традиційно входять: курс методики викладання математики, відповідний лабораторний практикум, педагогічні практики в школі, виконання курсової роботи, в окремих випадках, виконання дипломної роботи. На ефективність системи методичної підготовки вчителя, з нашої точки зору, впливають:

- оптимальне визначення та єдність цілей, завдань, змісту, форм і методів організації методичної підготовки;
- забезпечення за допомогою обраних форм і методів засвоєння майбутніми учителями необхідних знань і навичок;
- розвиток творчої активності майбутніх учителів;
- вивчення передового педагогічного досвіду, організація досліджень і нових напрямів у навчанні й вихованні учнів;
- формування потреби у підвищенні рівня теоретичної та практичної підготовки майбутніх вчителів.

Дослідження взаємозв‘язків між цими складовими в умовах заочного навчання, критерії ефективності кожної ланки системи методичної підготовки, можливі нові складові такої системи в сучасних умовах – це об‘єкт нашого дослідження. В сучасних умовах реформування школи, актуальним вважаємо сучасне бачення мети і технології підготовки вчителя математики. В умовах переходу школи на 12-річну загальну середню освіту та переходу на 12-бальну шкалу оцінювання навчальних досягнень учнів, з метою гуманізації освіти, переорієнтації процесу навчання з інформативної форми на розвиток особистості дитини, особистості з високим рівнем загальної культури і самосвідомості, насамперед повинна приділятись увага якісному поліпшенню освіти, зокрема підготовці вчителя, як людини, яка впроваджує ці новації в життя. Тобто, по-перше, слід скоригувати навчальні плани та програми підготовки вчителів, зокрема заочного відділення, згідно з реформуванням школи. По-друге, повинна змінитись сама технологія підготовки вчителя, адже запит держави до його особистості, його умінь та навичок значно зростає.

Проблему вбачаємо в протиріччі: з одного боку, потреба держави і суспільства у існуванні творчих, кваліфікованих вчителів, спроможних якісно втілити в життя ідеї реформування шкільної, зокрема математичної освіти, а з іншого – реальний стан методичної підготовки таких вчителів, зокрема, на заочному відділенні педвузу.

Мета дослідження: розробити, теоретично обґрунтувати і експериментально перевірити систему методичної підготовки вчителя математики на заочному відділенні педвузу.

Серед шляхів підвищення ефективності підготовки професійно-компетентного вчителя математики на заочному відділенні вбачаємо:

1) коригування навчальних планів і програм;
2) забезпечення студентів сучасною якісною літературою спеціального призначення з врахуванням специфіки заочного відділення;
3) поліпшення організації навчального процесу (ширше впроваджувати дистанційну і кореспондентську форми навчання);
4) відбір ефективних методів навчання, специфічних для заочного навчання.

Гіпотеза дослідження: успішній реалізації сучасних вимог суспільства до рівня і якості методичної підготовки вчителя математики на заочному відділенні педвузу може сприяти науково-обґрунтована система методичної підготовки, яка враховує специфіку роботи заочного відділення та сучасні технології навчально-пізнавальної діяльності.

Відповідно до мети та гіпотези дослідження поставлені такі завдання:

1) проаналізувати стан досліджуваної проблеми: навчальні плани, кращий вітчизняний та закордонний досвід роботи заочних відділень, що готують вчителів математики;
2) з‘ясувати психолого-педагогічні особливості формування методичних знань та умінь при заочній системі освіти;
3) розкрити мету, зміст та вимоги до методичної підготовки вчителя математики в сучасних умовах розвитку школи;
4) розробити, теоретично обґрунтувати й експериментально перевірити систему методичної підготовки вчителя математики на заочному відділенні педвузу.

Вважаємо, що дослідження, спрямоване на пошук ефективної системи методичної підготовки вчителя математики на заочному відділенні в сучасних умовах розвитку школи, є актуальним, результати такого дослідження матимуть важливе практичне значення для сучасної школи.

1. Гончаренко С. Український педагогічний словник. – К.: Либідь, 1997.
2. Зимаков И., Мельник Б., Семина И. Заочное образование в современной России // Высшее образование в России. – 1995. – №1.
3. Круглов Ю.Г., Жильцов П.А. Заочное педагогическое образование: состояние и перспективы // Советская педагогика. – 1990. – №9.
4. Як здобути вищу освіту: Права та гарантії. – К.: Четверта хвиля, 1998.

Резюме. Аргументируется актуальность проблемы методической подготовки учителя математики на заочном отделении педагогического вуза в условиях реформирования школ, в частности математического образования.

Summary. The actual problem of systematic training of a teacher of Mathematics in distance learning department at Teachers‘ Training College in modern school reforming period specially in Mathematics is argued here.

О РЕШЕНИИ МЕТОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В КУРСЕ «МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ»

А.Л.Ищенко, преподаватель, Южно-украинский государственный педагогический университет им. К.Д.Ушинского, г. Одесса

В процессе подготовки будущих учителей математики формирование профессиональных умений и навыков является основной целью курса методики преподавания математики.

Однако, количество часов, предназначенных на изучение этого курса невелико, а занятия в основном проводятся в информационном стиле. Практические занятия в большинстве случаев являются продолжением лекций, поскольку необходимо изложить полный объем материала. На самостоятельную работу студентов времени отводится мало, и методика преподавания становится в основном словесной наукой, лишь частично проходящей через практическое преломление. Влажность решения методических задач трудно переоценить, ведь они являются и целью, и средством формирования профессиональных качеств будущего учителя математики. Поэтому, на наш взгляд, методические задачи можно с успехом использовать на лекционных, семинарских, лабораторных и практических занятиях.

Решение этих задач на лекциях может служить средством иллюстрации основных положений темы. На семинарских занятиях студентам можно предположить ряд методических задач после обсуждения темы занятия с целью поиска способов их решения. На практических занятиях около 80% аудиторного времени целесообразно уделить для коллективного, индивидуального (по мере подготовленности студентов) решения системы методических задач. Для закрепления умений и навыков решения методических задач можно использовать лабораторные занятия, поскольку, получив допуск к выполнению работы, то есть ответив преподавателю на основные вопросы темы, студенты самостоятельно решают систему методических задач, пользуясь лишь краткой инструкцией к решению.

Использование специально подобранной системы методических задач для итогового контроля знаний, умений и навыков студентов, как показывает практика, дает положительный результат. Ведь нужно не только продемонстрировать на экзамене или зачете знание теоретического материала, но и умение применять его в разных условиях (от уровня знакомства, отображения до творческого). Зачастую это требует дополнительного прорабатывания материала, использования дополнительной литературы, что, безусловно, способствует более глубокому осмыслению материала, совершенствованию умений и навыков студентов.

Заметим, что общий подход к решению методических задач является традиционным: понимание постановки задачи; составление плана решения задачи и его осуществление; изучение полученного решения.

Рассмотрим подробнее методику решения методических задач на примере изучения одной из тем курса общей методики преподавания математики «Математические понятия. Методика их изучения».

При изучении данной темы полезно рассмотреть следующую задачу.

Задача №1. С помощью кругов Эйлера изобразите множество равносторонних и равнобедренных треугольников. Сравните объем и содержание этих понятий.

Изучая условие этой задачи, студенты отвечают на ряд вопросов:

- Что дано?

Даны два множества: множество равносторонних и множество равнобедренных треугольников.

- Что неизвестно?

Неизвестно, как изобразить их с помощью кругов Эйлера, и каковы объем и содержание этих понятий.

На этом этапе решения задач также уместны традиционные для процесса решения любой задачи вопросы: можно ли выполнить требования задачи (ответить на поставленный вопрос) и достаточно ли для этого данных в задаче, нет ли противоречий в условии.

При необходимости делают краткую запись условия:

$A = \{x$ I x – треугольники с тремя равными сторонами $\}$;

$B = \{y$ I y - треугольники с двумя равными сторонами $\}$;

U – универсальное множество (множество всех треугольников).

Задание множеств *A* и *B* с помощью перечисления характеристических свойств и диаграмма (см. рис.1) помогут ответить на поставленные в задаче вопросы.

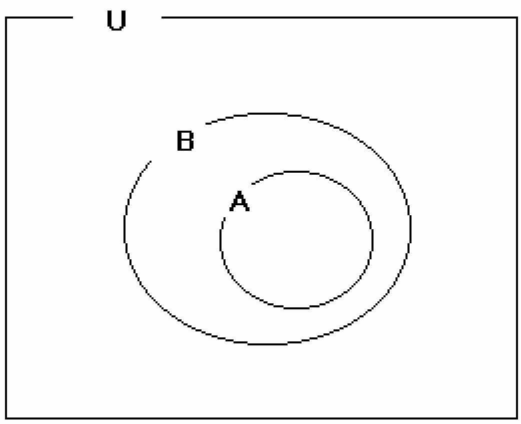


Рис. 1

Для проверки правильности решения необходимо повторить определение собственного подмножества данного множества. Построение диаграммы может быть использовано при решении других задач (например № 2, 3 данной статьи).

На следующем этапе решения задачи 1, необходимо найти связь между данными задачи и требованием, а, при необходимости, полезно рассмотреть вспомогательные задачи. Понадобится знание определений объема и содержания понятий.

Осуществив план решения задачи, изучают найденное решение, отвечая на вопросы: можно ли проверить результат, можно ли его получить иначе (другим способом), можно ли использовать полученный результат или метод решения в какой-нибудь другой задаче?

В качестве других задач можно использовать следующие.

Задача №2. Сформулируйте определение прямоугольника и квадрата. Какое из них являются родовым? Какое – видовым?

Задача №3. Как связаны объем и содержание понятий?

Рассмотренный пример показывает, что методические и математические задачи можно решать по общей схеме, а значит к методическим задачам применимо понятие системы задач, тренировочных задач и т.д.

В качестве примера предлагаем в систему методических задач, по выбранной нами теме, включить:

– задачи на установление вида определения;
– задачи на установление равносильности определений одного и того же понятия;
– задачи на установление типов ошибок в определениях и выборе метода их устранения;
– задачи, в которых требуется сформировать понятие различными методами;
– задачи, в которых требуется подобрать систему заданий, подводящих под понятие.

При рассмотрении методов формирования математических понятий в школе целесообразно проиллюстрировать их на одном из понятий школьного курса математики, например, равнобедренном треугольнике.

Применяя конкретно-индуктивный метод формирования этого понятия, прежде всего необходимо провести анализ эмпирического материала, то есть рассмотреть некоторое множество геометрических фигур (см. рис.2).

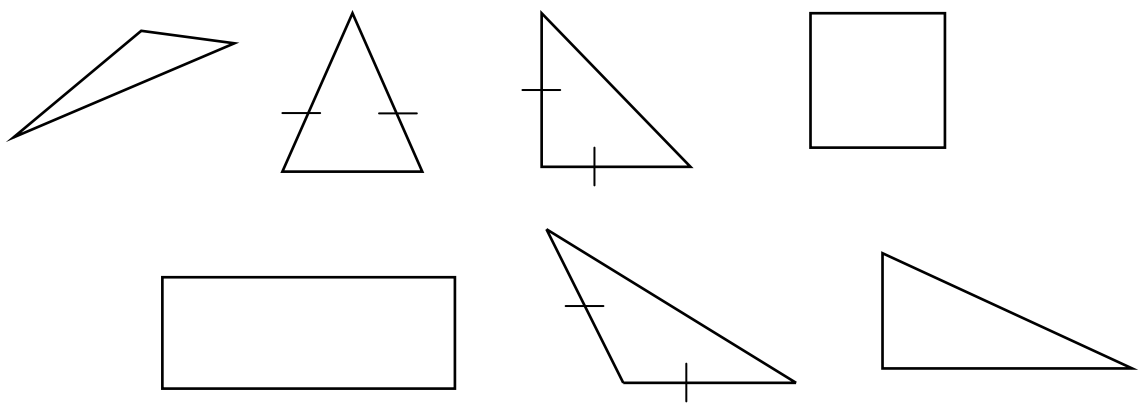


Рис. 2.

Измерить и сравнить длины сторон выбранных треугольников из предложенных фигур, выделить группу фигур, имеющих общий признак, сформулировать определение. Закрепление полученного определения можно провести на примерах и контрпримерах, подводя под определение равнобедренного треугольника ряд разнообразных математических объектов.

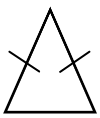
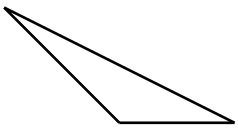
При абстрактно-дедуктивном методе введения этого же понятия, прежде всего, формулируется определение: «Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны». Затем приводятся примеры и контрпримеры, в которых варьируются существенные и несущественные свойства формируемого понятия.

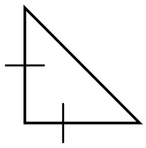
Затем, как и при конкретно-индуктивном методе, переходят к осуществлению дальнейшего усвоения понятия, определения в процессе их использования.

Подведение под понятие равнобедренного треугольника осуществляется по известной схеме: перечисление свойств, зафиксированных в определении; установление логической связи между родовыми и видовыми отличиями; проверка наличия у объекта, подводимого под определение, свойств и их связей; формулирование вывода. Заметим, что знание этапов формирования понятий различными методами и подведение объекта под понятие – это самостоятельные методические задачи в рассматриваемой теме.

Для иллюстрации решения последней можно провести следующую таблицу (таблица 1).

Таблица 1.

Объект	Свойства объекта		Вывод
пример	треугольник	Равенство двух сторон	Равнобедренный треугольник
2,5	–	–	–
	+	+	+
	+	–	–

	+	+	+

Для организации дифференцированного обучения студентов методические задачи следует разделять на задачи 1-го уровня, 2-го уровня и 3-го уровня сложности. Такое разделение отражает уровни сформированности деятельности. Поэтому, к примеру, 1 уровень – уровень знакомства и отображения, 2 уровень – умений и навыков, 3 уровень – уровень творчества.

В связи с этими методическими задачами первого уровня, следует считать задачи на распознание объектов по виду, описанию, характерным свойствам, то есть задачи об объектах математики и связям между ними. Их решение осуществляется в основном на базе усвоения теоретических положений и практических примеров. Например:

Задача №4. Поясните структуру «генетического» определения.

К задачам второго уровня предлагаем отнести такие, при решении которых студент проявлял бы умение и навыки выполнения действий по правилам, имеющим обобщенный характер, которые не могут быть сведены к объединению элементарных действий или операций. Например:

Задача №5. Составьте логико-структурную схему понятия «гомотетия». Каким образом можно ее использовать на уроке?

Методическими задачами третьего уровня назовем такие из них, для решения которых необходимы умения ориентироваться в нестандартных ситуациях, выделять неявные связи между элементами условия и требования, или находить способ решения, не являющийся очевидной конкретизацией какого-либо общеизвестного правила (или выполнить одновременно и то, и другое). Это, к примеру, задачи вида:

Задача №6. Охарактеризуйте прием выведения следствий при поиске решения задачи. Приведите примеры.

Проверку решения методических задач необходимо осуществлять с учетом всех существующих требований, предъявляемых к решению задач: оно должно быть безошибочным, полным, обоснованным и, по возможности, рациональным.

Безошибочным считаем решение методической задачи, которое не содержит никаких ошибок. Ошибки в решении таких задач бывают логические, графические, терминологические и ситуационные.

Логические возникают в результате нарушения законов логики. Графические – в рисунках, которые выполняют студенты при решении задач. Терминологическими ошибками называют неправильное использование терминологии, а ситуационными – ошибки, возникающие в результате неправильного понимания ситуации, описанной в задаче.

По степени важности различают, как известно, грубые, негрубые ошибки и недочеты.

Грубыми в решении методических задач будем называть те ошибки, которые свидетельствуют о том что студент не усвоил основ теории, о незнании приемов решения методических задач, основных правил, теорем, формул школьного курса математики. К грубым отнесем также ошибки в терминологии, вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

Негрубыми следует считать ошибки, допущенные вследствии невнимательности, неправильного использования символов, а также отсутствие объяснений.

К недочетам отнесем нерациональное решение, описки, недостаточность объяснений в решении.

Если одна и та же ошибка (недочет) встречается несколько раз, то ее следует рассматривать как одну ошибку (недочет).

Обоснованным будем называть такое решение методической задачи, которое содержит пояснение всех основных шагов решения задачи. Требование полноты решения может быть отнесено лишь к некоторым методическим задачам, так как далеко не для всех задач можно представить все возможные решения. Рациональным будем называть самое изящное решение, то, которое быстрее всего приводит к цели. Однако, снижать отметку рекомендуем только за явно нерациональное решение сравнительно несложных задач уровня А и некоторых задач уровня В, так как оно свидетельствует о поверхностном понимании задачи.

Решение каждого задания следует оценивать отдельно, при этом задания уровня А могут быть оценены максимально в 2 балла, уровня В – в 4 балла, уровня С – в 6 баллов. Разумеется, задачу, решенную с ошибками, недочетами, неточностями необходимо оценить меньшим количеством баллов.

Считаем, что за грубую ошибку целесообразно снимать половину максимально возможной отметки, за негрубую – четверть, за недочет – третью часть.

За отсутствие обоснований считаем допустимым снижение отметки вдвое, за неполное обоснование – на четверть максимальной отметки.

Если задача может быть решена рационально, а студент привел громоздкое, сложное решение, считаем необходимым снизить отметку на четвертную часть от максимально возможной. Аналогично рекомендуем поступать и в случаях, когда дано неполное решение задачи, хотя не составляет труда привести все ее возможные решения.

Если задача не решена вообще, выставляется 0 баллов.

Сообщение студентам результатов решения задач производится сразу, если они устные, и после проверки, в случае письменной работы.

Система методических задач, составленная соответствующим образом, может быть использована при проведении итогового контроля.

В этом случае работа над методическими задачами может быть продолжена и после проверки их решения, если оно содержит недочеты, негрубые ошибки. Это – работа над ошибками.

Если итоговая работа студента не может быть засчитана, то ему можно предложить другой вариант (систему методических задач) для пересдачи.

Как показывает практика, решение методических задач в процессе изучении курса «Общей методики преподавания математики» способствует совершенствованию, углублению знаний, умений и навыков студентов.

Что же касается требований к оформлению решения методической задачи, считаем, что оно должно быть лаконичным, содержать примеры и необходимые иллюстрации.

Задача уровня А, например, может быть оформлена следующим образом (фрагмент работы студента):

Задача 1. Какие понятия называют сравнимыми?

Решение. Сравнимыми называют понятия, у которых содержания или объемы имеют общие части.

Если содержание двух понятий имеют общую часть, это означает, что множества признаков предметов или явлений, отображенных в этих понятиях, имеют одинаковые элементы.

Рассмотрим это на примере параллельных и скрещивающихся прямых.

Признаки понятия «параллельные прямые»:

1. Прямые.
2. Не пересекаются.
3. Лежат на одной плоскости.

Признаки понятия «скрещивающиеся прямые»:

1. Прямые.
2. Не пересекаются.
3. Не лежат на одной плоскости.

Видим, что множество признаков этих понятий имеют два общих элемента.

Если объемы двух понятий имеют общую часть, то это означает, что множество объектов, отображенных в этих понятиях имеют общие элементы.

Например, рассмотрим понятия равнобедренного и прямоугольного треугольников. Множество объектов, которые отображены в этих понятиях, имеют общий элемент (объект) – равнобедренный прямоугольный треугольник.

Существуют понятия, объем которых является частью объема другого понятия. Первое из них называют видовым, а второе – родовым.

Примером таких понятий может служить понятия натурального и рационального чисел. Каждое натуральное число является рациональным. Натуральное число – видовое понятие, а рациональное – родовое.

Задача 2. (Уровень B). Каким требованиям должны удовлетворять олимпиадные задачи?

Решение. На олимпиадах по математике в большинстве случаев предлагается решить 5 задач. Из них одна – две задачи должны быть посильными для большинства участников олимпиады. На школьных олимпиадах эти задачи должны достигать уровня наиболее сложных задач текущих контрольных работ. Если ученик решит даже только эти задачи, то это будет придавать ему уверенности в своих силах.

Остальные задачи должны быть повышенной сложности. Решить их смогут далеко не все участники олимпиады. Однако те ученики, которые смогут решить хотя бы одну из них, должны быть отмечены за успешное участие в олимпиаде.

Решение задач уровня C может быть оформлено по усмотрению студента, так как эти задачи носят, как правило, творческий характер.

1. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.
2. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
3. Килина Н.Г. Сборник задач по методике преподавания математики. – Киров: КГПИ им. В.И.Ленина, 1975. – 82 с.

4. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики // Под ред. Е.И.Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223с.
5. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе. – Минск: Вышейшая шк., 1990. – 267с.
6. Саранцев Г.И. Сборник упражнений по методике преподавания математики в школе. – М.: Просвещение, 1983. – 80 с.
7. Федин Н.Г., Мишин В.И. Сборник вопросов и упражнений по методике преподавания математики. – М.: Просвещение, 1967. – 111 с.

Резюме. У статті розглядається методика рішення задач за темою "Математичне поняття. Методика їх вивчення", що сприяє формуванню професійних вмінь та навичок майбутніх вчителів.

Summary. The article considers the method of methodic tasks solution on the topic of "Mathematic concepts. The methodic of their study". This methodic helps to form future teachers professional abilities and skills.

ПРИНЦИПИ ФОРМУВАННЯ БАЗОВОГО ЗМІСТУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

В.О.Швець, канд.педагог. наук, доцент
Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, м.Київ

Державною національною програмою "Освіта" ("Україна XXI століття"), яка була прийнята в 1992 р. на з'їзді працівників освіти, передбачалося розробити державні стандарти змісту і обсягів всіх рівнів освіти, соціально необхідного мінімуму гуманітарної, природничо-математичної підготовки випускників освітніх закладів різних типів [1, 2]. Впродовж наступних років створювалися проекти таких нормативних документів, як відомо, Міністерством освіти і АПН України. Зокрема був створений в 1997 році "Державний стандарт загальної середньої освіти в Україні: освітня галузь "Математика" (Проект) [3], (надалі "Стандарт").

Як зазначалося, в цьому документі, він "задає норму кінцевого результату навчання лише на рівні обов'язкового, мінімального, загальнокультурного змісту і відповідних до цього рівня вимог до математичної підготовки учнів, нижче яких не може опускатися жоден учень незалежно від типу і профілю навчального закладу, в якому він навчається” [3, с.14].

Назвемо такий зміст “мінімальним змістом” (МЗ), а вимоги до його засвоєння – “обов’язковими результатами навчання” (ОРН). Визначені МЗ і ОРН повинна забезпечувати кожна із профільних шкіл, у тому числі і загальноосвітня, оскільки їх засвоєння дає змогу учню успішно вивчати не тільки математику, а й суміжні з нею дисципліни, вивчення яких без математики неможливе. Отже, вимоги стандарту (мінімальний зміст і обов’язкові результати навчання) – той “прожитковий мінімум” учня, який визначає його освіту як середню і який є достатній для успішного навчання на кожному ступені – початкова, основна, старша школа.

Нагадаємо, що МЗ проектувався в “Стандарті” на основі наступних принципів:

– науковість, що виражається у відповідності змісту галузі основам математичної науки і високорозвиненим технологіям виробництва;

– доступність, що означає відповідність змісту і обсягу галузі віковим особливостям розвитку учнів, раціональне поєднання логічної строгості і наочності, природодоцільності навчання;

– гуманітаризація змісту та гуманізація навчально-виховного процесу вивчення математики;

– диференційована реалізованість, коли зміст математики має забезпечувати на різних ступенях навчання рівневу і профільну диференціацію;

– варіативність змісту навчання, що реалізується різноманітністю освітніх програм, розроблених на основі державного стандарту освітньої галузі, розширення і поглиблення змісту навчання і правом вчителя і навчального закладу на свободу вибору таких програм;

– діагностико-прогностичка реалізовність, суть якої полягає в тому, що зміст математики має сприяти виявленню математичних і загальноінтелектуальних здібностей учнів з метою їх обгрунтованої орієнтації на профіль навчання або вибір спеціальності;

– <u>безперервність</u> математичної освіти та її <u>наступність</u> між різними ступенями навчання” [3, с.17].

Після опублікування “Стандарту” пройшло чотири роки. За цей час, у відповідності до його вимог, зменшилась кількість годин на вивчення математики в школі, з’явились нові навчальні програми [4, 5, 6] та підручники, що містять у собі як невід’ємну частину МЗ та ОРН. В одних із них, наприклад, [7, 8], зміст навчального матеріалу мало відрізняється від МЗ, в інших, наприклад [9], значно більший за МЗ.

Оскільки “Стандарт” не формує освітній процес на рівні вчителя і школи, то вчитель змушений сам, поряд з обов’язковими результатами навчання, забезпечувати підвищений рівень у загальноосвітній і профільній, чи поглиблений – в школах і класах з поглибленим вивченням математики. Така ноша в умовах сьогодення не кожному педагогу-математику під силу.

Як показує практика значна частина вчителів орієнтує учнів на засвоєння МЗ і досягнення ОРН, мотивуючи це тим, що обсяг навчального матеріалу великий, а часу на його вивчення замало. Зауваження слушне, однак, орієнтація учнів на засвоєння МЗ і досягнення ОРН призводить до багатьох небажаних наслідків.

Один з них – недостатня математична підготовка тієї чималої частини випускників, які продовжують навчання у вищих закладах освіти, де математика – фундаментальна дисципліна (математичні факультети університетів і педвузів, технічні, економічні університети тощо). Переважно це випускники загальноосвітніх та професійних шкіл, математика в яких вивчалась не на поглибленому рівні. Саме про них і йде мова. Отже, існує потреба у визначенні ширшого і глибшого за (МЗ) змісту і вищих за (ОРН) результатів навчання. Назвемо їх відповідно “базовий зміст” (БЗ) і “підвищені результати навчання” (ПРН). Базовий тому що, має стати основою для вивчення математики на наступній ступені навчання – вища школа, а підвищені – тому що, будучи вищими за (ОРН), дають змогу вступнику успішно вивчати не тільки вищу математику, а й профілюючі дисципліни, до змісту яких входять далеко не прості математичні істини. Частково, на наш погляд, такий зміст і відповідно вимоги знаходять своє вираження в програмі з математики для тих, хто вступає до вищих закладів освіти. Однак, стверджувати, що ця програма повністю описує БЗ і ПРН, з очевидних причин не можна.

Для визначення МЗ розробниками "Стандарту" була запропонована вище згадана система принципів проектування змісту освітньої галузі. Очевидно, що для визначення БЗ вона повинна бути дещо іншою, оскільки має проектуватися зміст математичної освіти не для всіх учнів, а лише для їх частини.

Що це за принципи? Аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури, досвіду становлення математичної освіти в Україні та досвіду вивчення математики у вітчизняній середній і вищій школі переконують нас в тому, що такими принципами мають бути.

1. Принцип науковості, який полягає в тому, що навчальний матеріал, який становить базовий зміст шкільної освіти, повинен відповідати рівню сучасної науки, подаватись учням в певній дидактичній системі як теоретичний курс (що відображає наукову систему), в певній послідовності, що зберігає зв'язок понять, тем, розділів в середині кожного предмета, а також міжпредметні зв'язки.

2. Принцип доступності, суть якого в тому, що запропонований базовий зміст освіти має бути доступний учням, оволодіватись ними свідомо, викликати активну, напружену, розумову діяльність на кожному з етапів навчання.

3. Принцип утилітарності (від лат. utilitas – корисний, вигідний), суть якого полягає в тому, що розроблений базовий зміст освіти повинен мати прикладний характер, задовольняти майбутні практичні і професійні потреби суб'єкта навчання.

4. Принцип паралельної дії, суть якого в тому, що створений базовий зміст повинен розвивати і виховувати учня. Формувати в нього особистісні якості. Згідно даного принципу запропонована учню математика повинна мати не тільки прикладну і практичну значущість, але й загальнокультурну, сприйматись ним як елемент високої загальної культури.

5. Принцип уніфікації (від. лат. unio – єдність + facere – робити, приводити щось до єдиної норми, робити однаковим). За цим принципом розроблений базовий зміст математичної освіти має бути інваріантною частиною змісту освіти шкіл будь-якого типу (ліцеїв, гімназій, загальноосвітніх шкіл, шкіл з поглибленим вивченням окремих предметів, тощо), орієнтований на кращі міжнародні стандарти, враховувати історичний досвід, практичні потреби.

Розроблений за названою вище системою принципів, БЗ в порівнянні з МЗ має бути розширенням і поглибленням останнього, достатнім для засвоєння математики у вищих закладах освіти. Так як МЗ формується в “Стандарті” лише за окремими змістовими лініями, то (БЗ) має включати в себе і доповнювати як ці лінії так і нові, які в (МЗ) не ввійшли. Мова йде, наприклад, про лінії “Координати і вектори”, “Геометричні перетворення площини і простору”, “Геометричні побудови” тощо.

У профільній школі (БЗ) варто доповнювати варіативною частиною, зміст якої відповідає профілю навчання. В такому разі (БЗ) у всіх типах шкіл буде однаковим, а варіативна частина – різна.

Виділення у змісті шкільної математичної освіти (МЗ) і (БЗ), розробка варіативної частини для різних профілів навчання дає змогу здійснювати як рівневу, так і профільну диференціацію. В такому разі одним із критеріїв диференціації буде відповідний зміст, запропонований (чи вибраний) учню у відповідності до його здібностей, потреб та інтересів. Це буде гуманно стосовно дитини, а принцип гуманізації навчання буде проявлятись не на словах, а на ділі.

Очевидно, що розроблені як базовий так і мінімальний змісти мають чітко виділятись (розмежовуватись) в програмі з математики для середніх закладів освіти та в навчальних посібниках і підручниках. Це, по-перше, дасть змогу вчителю вчасно визначитись з обсягом навчального матеріалу, який потрібно донести певній категорії учнів, а, по-друге, пред'явити рівень вимог до засвоєння відповідного навчального матеріалу.

Нами запропонована система принципів формування базового змісту математичної підготовки. Наступний крок – розробка самого змісту, вимог до його засвоєння (ПРН), про це – в наступних публікаціях.

1. Державна національна програма "Освіта" ("Україна XXI століття") (Проект). – Київ: Райдуга, 1992. – 70 с.
2. Державна національна програма "Освіта" ("Україна XXI століття"). Заходи щодо реалізації Державної національної програми "Освіта" ("Україна XXI століття"): Затв. Постановою Кабінету Міністрів України від 03.11.93. №896 // Освіта. – 1993. – № 44-46.
3. Державний стандарт загальної середньої освіти в Україні: Освітня галузь "Математика" (Проект). – К.: Генеза, 1997. – 63с.
4. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів: Математика, 5-11 класи. – К.: Шкільний світ, 2001. – 62 с.
5. Програма для класів гуманітарного напряму: Математика, 10-11 класи. – К.: Вид-во "Шкільний світ", 2001. С.38-48.
6. Програма для класів з поглибленим вивченням математики, 8-11 класи. – К.: Шкільний світ, 2001. – 36 с.
7. Бевз Г.П. Алгебра: Проб. підруч. для 7-9 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 2001. – 303 с.
8. Бурда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. Математика 10-11. – К.: Освіта, 1997. – 224 с.
9. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт.навч.закладів / М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук. – К.: Зодіак – ЕКО, 2001. – 608 с.

Резюме. В статье предложены принципы формирования базового содержания школьного курса математики.

Summary. The article deals with the main principles of forming the basic course of mathematics in comprehensive school.

ПОНЯТТЯ ЯК ОБ'ЄКТИ ЗАСВОЄННЯ

Н.А.Тарасенкова, канд. педагог. наук, доцент
Черкаський державний університет

Під поняттям розуміють форму мислення про сукупність істотних та неістотних властивостей певного об'єкта (предмета).

У загальному розумінні "властивість – те, що притаманне предметам, що відрізняє їх від інших предметів чи робить їх схожими на інші предмети (наприклад, твердість, пружність, шорсткість, теплопровідність тощо)" [2, с.457]. Істотними є властивості, без яких об'єкт (предмет) не може існувати. Сукупність істотних властивостей об'єкта (предмета) виражає його якісну визначеність. Неістотними є такі властивості об'єкта (предмета), які можуть належати або за деяких обставин не належати об'єкту (предмету), але відсутність яких не призведе до того, що даний об'єкт (предмет) перестане існувати [2, с.336].

Процес виділення істотних властивостей об'єкта (предмета) та їх відокремлення від неістотних властивостей називають *визначенням поняття*. Мета визначення поняття полягає в тому, щоб відповісти на запитання, чим саме є даний об'єкт (предмет), що відображується у понятті. Для цього необхідно навести у стверджувальній формі його істотні властивості. Результати визначення поняття, як правило, виражають деякою словесною конструкцією, яку називають *означенням поняття*, або дефініцією.

Усі істотні властивості поняття загалом утворюють його зміст, а усі об'єкти, що відносяться до даного поняття, складають його обсяг. В означення поняття включають такі його істотні властивості, кожна з яких є необхідною, а усі разом – достатньою умовою для того, щоб відокремити об'єкти, що належать до даного поняття, від об'єктів, що не належать до нього.

Наприклад, зміст поняття "прямокутник" утворюють усі властивості чотирикутника, а також усі специфічні властивості паралелограма, оскільки кожне з цих понять є родовим для прямокутника. Крім того, до змісту поняття “прямокутник” входять і такі його властивості, які не притаманні тим паралелограмам, що не є прямокутниками. Ці властивості називають видовими властивостями. Для прямокутника серед них можна виділити: рівність усіх кутів; перпендикулярність сторін; рівність діагоналей тощо. Поняття паралелограма є найближчим родовим поняттям для прямокутника, тоді як поняття чотирикутника не є таким.

В означення поняття “прямокутник”, якщо він визначається через найближчий рід – паралелограм, увійдуть лише ті його видові властивості, які разом дозволять відокремити прямокутники від паралелограмів, що не є прямокутниками.

Обсяг поняття “прямокутник” – це множина усіх прямокутників. До нього входять й усі квадрати, оскільки квадрат є окремим видом прямокутника.

В курсі математики основної школи найбільш поширеними є означення таких видів: 1) через найближчий рід та видові відмінності (наприклад, означення ромба чи неправильного дробу); 2) генетичні (наприклад, означення кола або лінійної функції); 3) через перелік (наприклад, так визначають поняття множини дійсних чисел); 4) заперечувальні (наприклад, означення паралельних прямих); 5) неявні, коли поняття визначається через систему аксіом (наприклад, такими є поняття точки, прямої, площини, поняття натурального числа тощо). Часто поняття, які визначаються через систему аксіом, виступають первісними поняттями певної математичної теорії, тобто такими поняттями, які неможливо визначити через інші її поняття. Тому первісні математичні поняття інакше називають неозначуваними поняттями.

Проте, не всім поняттям курсу математики основної школи даються означення. З дидактичних міркувань більшість понять курсу математики 5-6 класів та ряд понять курсів алгебри й геометрії 7-9 класів вводяться через опис і характеристику, розкриваються через порівняння [4, с.62].

А.В.Усова зазначає [9, 12], що поняття є знанням не тільки істотних властивостей (сторін) предметів і явищ навколишньої дійсності, але й знанням суттєвих зв’язків та відношень між ними. За зв’язками та відношеннями між поняттями можна виділити два великих класи: порівняних й непорівняних понять, а серед порівняних видів понять: класи сумісних й несумісних понять.

Одним з видів несумісних понять є суперечні поняття – два поняття, сума обсягів яких повністю вичерпує обсяг спільного родового поняття, а видові властивості мають протилежний характер. Прикладом таких понять у планіметрії є паралельні прямі та прямі, що перетинаються.

У процесі навчання математики суперечні поняття відіграють особливу роль. З одного боку, у термінах суперечних понять формулюються заперечувальні означення. Отже, їх використання у цьому аспекті є об’єктивно необхідним. Інший аспект використання суперечних понять ми пов’язуємо з наступним.

Визначаючи поняття, ми фактично проводимо поділ множини об’єктів, що становить обсяг родового поняття, на дві підмножини. Одну з них утворює обсяг поняття, що визначається, а в другу підмножину входять усі інші об’єкти з обсягу родового поняття, що не відносяться до даного поняття. З точки зору логіки, друга підмножина є доповненням обсягу даного поняття в універсальному класі, яким виступає обсяг родового поняття. Таке доповнення утворює обсяг поняття, суперечного до даного.

У шкільному курсі математики суперечні поняття, які належать до певних понять, в одних випадках, виступають основними об’єктами засвоєння. Наприклад, поняття неправильного дробу, що є суперечним до поняття правильного дробу, вивчається спеціально на рівні визначення. В других випадках, суперечні поняття несуть супровідне дидактичне навантаження. Наприклад, непрямокутний трикутник як окреме поняття спеціально не вивчається, але визначаючи прямокутний трикутник, як правило, наголошують на тому, що усі інші трикутники не є прямокутними, а також розглядають велику кількість прикладів непрямокутних трикутників. В інших випадках (а їх більшість) суперечні поняття навіть не згадуються.

Ми вважаємо, що будь-яке знання може набути дієвості лише за умов його формування як конструкту “позитив – негатив”. Тому кожне поняття курсу математики основної школи повинно розкриватися разом з описом, характеристикою чи просто відзначенням існування або ілюстрацією деяких об’єктів у обсязі поняття, що є суперечним по відношенню до даного. Отже, першочерговою є потреба відповідних уточнень і змін в існуючих методиках формування понять.

У зв’язку зі сказаним, особливого значення ми надаємо таким поняттям, як “приклад”, “контрприклад” та “вільний об’єкт”.

Прикладом поняття є будь-який об’єкт з обсягу даного поняття. Наведення прикладів є ілюструванням поняття. Така дія є необхідною як у процесі введення поняття, так і під час відпрацювання вмінь застосовувати поняття у різних ситуаціях [4, 63].

Під контрприкладом до поняття ми розуміємо матеріальний чи матеріалізований об’єкт, який ілюструє недостатнє означення цього поняття. Наприклад, у шкільному означенні кола можна виділити дві видові властивості: 1) фігуру утворюють усі точки площини з певною властивістю; 2) точки кола є рівновіддаленими від певної точки. У помилковому означенні цього поняття може бути відсутньою або перша, або друга, або обидві разом видові властивості. Отже, можна сформулювати принаймні три помилкові означення кола, а значить утворити принаймні три контрприклади. У першому випадку контрприкладом до поняття кола буде дуга кола, у другому – круг, а у третьому – сектор круга. Як бачимо, контрприклади – це об’єкти з обсягу суперечного поняття до даного.

Якщо у формулюванні означення кола пропустити слово “фігура”, що є назвою родового поняття, також отримаємо помилкове означення.

Таку помилку доцільно проілюструвати за допомогою вільного об'єкта, наприклад, дерева за вікном, стільця, крейди тощо. Вільні об'єкти по відношенню до даного поняття є об'єктами, що виходять за межі обсягу родового для нього поняття. Можна сказати, що вільні об'єкти – це приклади поняття, непорівнянного з даним поняттям.

Характеризуючи поняття як об'єкт засвоєння, здебільшого мають на увазі його логічну складову: сутність, зміст, обсяг тощо. Проте, неможливо розкрити сутність поняття поза його матеріалізації, а тим більше організувати його засвоєння. Оскільки аналіз будь-якої абстракції є можливим лише через оболонку тієї форми, в якій вона уречевлюється, то логічну складову поняття необхідно розглядати у єдності з його візуальною складовою – формою уречевлення поняття.

Усі засоби уречевлення ідеального можна віднести до понять "знак" і "символ". Загальнонаукове розуміння цих понять відображено у наступних означеннях.

Знак – це матеріальний предмет (явище, подія), що виступає в якості представника деякого предмета, властивості чи відношення й використовується для здобуття, зберігання, переробки й передачі сповіщень (інформації, знань) [3, с.458]. Слово "знак" загальнослов'янське. Воно утворено за допомогою суфікса -къ від слова "знать" (стародавньо-індійське *jānātj* – "знає", готське *kunnan* – "знать", грецьке *gignōskō* – "впізнаю" та ін.) і має значення "відмітити, замітити".

Символ (від грецького *sy´mbolon* – знак, розпізнавальна прикмета): 1) у науці (логіці, математиці та ін.) – те саме, що й знак; 2) у мистецтві – універсальна естетична категорія, що розкривається через співставлення з суміжними категоріями художнього образу, з однієї сторони, знака й алегорії, з іншої [1, с.385].

У математиці певні знаки й символи відносять до спеціального поняття "математичний знак". В означеннях цього поняття знаки й символи ототожнюють, ставлячи особливий акцент на їх прагматичній функції – перевагах використання таких замісників у порівнянні з природною мовою.

Сукупність знаків і символів, що використовуються у навчанні, ми називаємо знаково-символічними засобами (ЗСЗ).

Для уречевлення понять курсу математики основної школи використовуються різні ЗСЗ. Вони дозволяють зафіксувати сутність певного поняття у розгорнутому чи згорнутому вигляді.

Найголовнішим способом розгорнутого уречевлення поняття є текст, утворений засобами природної мови. У тексті сутність поняття набуває знаково-символічної реальності буття. В курсі математики основної школи у якості таких текстів виступають *означення* різних видів та *описи*, які є мовною фіксацією результатів чи ходу й результатів застосування певних прийомів розкриття сутності поняття.

У вигляді тексту-опису фіксуються хід та результати використання таких прийомів: а) прийому пояснення – розкриття сутності поняття через етимологію його назви; б) прийому опису – розкриття сутності через приклади; в) прийому характеристики – розкриття характерних ознак, властивостей поняття; г) прийому порівняння – розкриття сутності поняття через його співставлення з іншим поняттям.

Результати застосування прийому визначення поняття фіксуються у формулюванні означення. У навчанні математики в школі використовуються два види формулювань означень: строге й нестроге формулювання.

Строге формулювання означення поняття є логічно упорядкованим та стилістично досконалим текстом, що будується за певними правилами логіки та природної мови. Логічну структуру строгого формулювання означення поняття схематично можна відобразити так:

означуване поняття $\rightarrow$ *родове поняття* $\rightarrow$ *видові відмінності*.

Строге формулювання означення не містить надмірностей та експресивного наповнення, воно є лаконічним й інформаційно повним, кожне його слово є істотним компонентом тексту. Стилістичні модифікації допустимі, але обмежені.

Нестроге формулювання означення поняття (означення “своїми словами”) може бути логічно не упорядкованим і, здебільшого, стилістично недосконалим текстом. У навчальному процесі такий вид формулювання означення виконує певні дидактичні функції як на етапі введення поняття, так і на інших етапах формування поняття. На нашу думку, дидактично виважене використання нестрогих формулювань означень має бути узаконеним у шкільній практиці.

У процесі визначення кожному поняттю привласнюють *термін* – словесне позначення поняття. У загальному розумінні термін (лат. *terminus* – границя, кінець) – слово або словосполучення, що є точною назвою строго визначеного поняття науки, техніки та ін. Терміном називається й спеціальне слово та вираз, що прийняте для позначення чогось у тому чи іншому середовищі, професії тощо. У формальній логіці термінами називають суб’єкт і предикат судження, суб’єкт і предикат посилок у силогізмі [2, с.518-519]. Однією з головних якостей наукового терміна повинна бути його стійка однозначність – якщо не дотримувати раз встановленого значення терміна, неминучою стає неоднозначність, яка робить мову незрозумілою.

Слова, терміни у процесах мислення виражають сутність понять, служать так би мовити “представниками” понять у свідомості [9, с.46], тому термін потрібно вважати *словесним* або *термінологічним кодом* поняття.

Терміни математичних понять є мовними ЗСЗ. Їх множина є підмножиною усіх термінів, що використовуються у математиці й разом називаються математичною термінологією.

Термін є атрибутом будь-якого способу розгорнутої фіксації сутності поняття у науковій теорії. Проте, у курсі математики основної школи терміни присвоюються тільки тим поняттям, що виступають для учнів відкритими об’єктами засвоєння. Для понять, що залишаються впродовж вивчення курсу неявними для учнів об'єктами засвоєння, здебільшого терміни не присвоюються. Такими є, наприклад, поняття сумірних та несумірних відрізків, поняття рівняння чи нерівності з параметром тощо. На пропедевтичному етапі формування поняття часто його термін також не вводиться. Наприклад, у 5–6 класах функціональна пропедевтика проводиться поза навчання відповідної термінології.

Логіко-математичний символічний аналог терміна також є певним кодом математичного поняття. Його доцільно називати *логіко-математичним кодом* поняття. Наприклад, поняття "множина натуральних чисел" (термінологічний код) позначається символом "N" (логіко-математичний код), а поняття "координата точки A на координатній прямій" (термінологічний код) позначається символом "$A(x)$" (логіко-математичний код).

Математика як наука поряд з розгорнутими текстами, утвореними засобами природної мови, широко використовує тексти, написані математичною мовою – за допомогою логіко-математичних знаків і символів (вони також є представниками мовних ЗСЗ) і спеціальних синтаксичних правил. Завдяки перекладу на штучну мову математичні тексти набувають більш компактного вигляду. Проте, означення поняття, зафіксоване засобами логіко-математичної мови, залишається розгорнутим. У курсі математики основної школи такий спосіб уречевлення математичних понять на сучасному етапі не використовується.

Для згорнутого уречевлення математичних понять окрім термінів та логіко-математичної символіки застосовуються й інші ЗСЗ.

Таким чином, ряд математичних понять мають відмітну особливість у тому, що разом зі словесним чи символічним аналогом їх позначають ще й графічно – за допомогою креслення, малюнка, схеми, графіка тощо. Наприклад, для більшості геометричних понять шкільного курсу математики відповідний малюнок є невід'ємною складовою поняття – його атрибутом.

Процедуру створення графічного образу можна назвати візуалізацією поняття. У її основі лежить мисленнєве перекодування словесного матеріалу у просторово-графічну форму. Графічна інтерпретація разом з терміном утворює новий, *словесно-графічний код* поняття. Такий код, у загальному випадку, є більш **ємним** за змістом та більш пластичним у порівнянні з термінологічним кодом поняття. За умов сформованого словесно-графічного коду поняття його графічна інтерпретація набуває самостійності, перетворюючись на *графічний код* поняття.

У ряді наших робіт [5-8 та ін.] показано, що у процесі навчання геометрії об’єктивно необхідно формувати й використовувати не тільки термінологічні, словесно-графічні чи графічні коди понять, як це прийнято, але й змістово-графічні інтерпретації геометричних понять, які за певних умов формуватимуться в учнів як *змістово-графічні коди*. На нашу думку, поза цього не може бути досягнута одна з кінцевих цілей процесу формування кожного поняття – створення згорнутої структури відповідного знання.

Поняття арифметико-алгебраїчної складової курсу математики основної школи дещо відрізняються від геометричних понять. Для їх позначення здебільшого використовується буквено-цифрова символіка, а для кодування – *змістово-аналітичні інтерпретації*. Наприклад, для позначення конкретного від’ємного числа використовується додатне число, протилежне до даного, й знак “мінус” поперед нього: -1; $-\frac{23}{45}$; $-6,789$.

Взагалі, *змістово-аналітичним кодом* від’ємного числа є запис:

“$-a$ при $a > 0$, або a при $a < 0$” (1).

Обидві складові цієї конструкції ($-a$ при $a > 0$; a при $a < 0$) та їх єдність повинні стати формою самостійності учнів, інакше поняття від’ємного числа не можна вважати сформованим. Відсутність *змістово-аналітичного коду* від’ємного числа в досвіді учнів спричиняє їх численні труднощі й помилки при засвоєнні та застосуванні інших понять курсу алгебри – модуля числа, квадратного кореня з числа, логарифма числа тощо.

Проте, оскільки поняття від’ємного числа вводиться у 6-му класі на прикладах й на рівень строгого означення не виводиться, то більшість учнів ототожнює від’ємне число з будь-яким числом (або буквою, що його позначає у загальному вигляді), попереду якого (якої) стоїть знак “–”. Саме цей знак і тільки він набуває для учнів змісту істотної ознаки від’ємного числа.

Фактично, в учнів стихійно формується деякий *зоровий топографічний образ* (ЗТО) від’ємного числа, який можна представити наступною конструкцією:

“–   ”   (2).

У ній значущими є два зорово окреслені й відокремлені компоненти, топографія (абриси й взаємне розміщення) яких у даному зоровому ряді є цілком визначеною й жорсткою.

Взагалі, зоровий топографічний образ певного поняття ми розглядаємо як об’єкт зорового сприйняття, що відіграє роль початкового стимулу процесу зорового упізнавання поняття. ЗТО може співпадати з певним кодом поняття, але може і не співпадати з ним. Випадки співпадання найчастіше пов’язані з графічним чи змістово-графічним кодом поняття, а розбіжності – зі змістово-аналітичним кодом. У випадку співпадання ЗТО є адекватним поняттю. Він виступає оболонкою кодової структури поняття, тому зорове упізнавання поняття відбувається без вад. Частковий ЗТО не може бути адекватним поняттю. Він нерідко відіграє провокуючу роль у зоровому аналізі. Самостійне зорове упізнавання поняття, здебільшого, не відбувається.

Зоровий топографічний образ від’ємного числа (2) є частковим. Проте, появу саме його в досвіді учнів поряд з названим вище підкріплює й зоровий ряд традиційного оформлення запису (1). У ньому зорово відокремлюється від іншого лише знак мінус, що йде у запису найпершим. Решта запису зорово зливається. Отже, топографія запису має бути такою, щоб його істотні складові були відокремлені й зорово сприймалися як окремі.

За нашими даними, значно менше проблем викликатиме запис, оформлений за матричним принципом:

$$\text{“}-a \quad \text{при } a > 0$$
$$\text{або}$$
$$a \quad \text{при } a < 0\text{”} \qquad (4).$$

Створення і правильне використання адекватного ЗТО поняття має бути предметом особливої турботи вчителя. Як на уроках геометрії, так і на уроках алгебри важливо правильно будувати зоровий ряд, на базі якого відбуватиметься формування поняття. Особливо ретельно потрібно продумувати топографію записів, взаємне розміщення мовного і немовного матеріалу. Добираючи приклади, контрприклади й вільні об’єкти, потрібно враховувати те, що їх візуальні форми також виступатимуть невід’ємними складниками зорового ряду навчання й, напевне, об’єктами засвоєння.

Найбільшої уваги у цьому розумінні потребують ті поняття, оболонки кодових структур яких не містять просторово-графічних елементів. Серед них більше за все арифметичних та алгебраїчних понять. До графічних інтерпретацій цих понять у курсі математики основної школи звертаються не часто. Винятком, можливо, є поняття функції та ті її види, що вивчаються в курсі математики 7–9 класів. Проте, на рівень згорнутих структур ці знання виводяться лише у незначної кількості учнів.

Окремі причини того ми вбачаємо у відсутності в досвіді учнів змістово-графічного та змістово-аналітичного кодів відповідних понять, а також спайки цих кодів, що проявляється у помилках упізнавання й перекодування. У візуальному аналізі учні нерідко керуються частковими ЗТО. За нашими спостереженнями, якостей адекватних ЗТО набувають записи змістово-аналітичних інтерпретацій лише тих функцій, що не мають додатково зазначених обмежень на коефіцієнти (наприклад, лінійної функції “$y = kx + b$”). А от для аналітично заданої квадратичної функції “$y= ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$” зоровим топографічним образом, як правило, виступає запис:

“$y = ax^2 + bx + c$”, не адекватний сутності поняття. Графічні інтерпретації функцій (абстрактні ескізи графіків), а у випадку конкретних коефіцієнтів – змістово-графічні інтерпретації (наближені до точних графіки) для учнів здебільшого набувають кодових якостей й упізнаються, в основному, правильно.

Взагалі, графічні та змістово-графічні інтерпретації понять відносяться до невербальних ЗСЗ. Перший вид інтерпретацій є представником просторових двовимірних іконічних ЗСЗ, а другий – представником субстратно-субстанціональних (сутнісних) іконічних ЗСЗ. Записи змістово-аналітичних інтерпретацій понять за рахунок певної топографії ми відносимо теж до невербальних ЗСЗ, а саме, до класу довільних сутнісних ЗСЗ. При формуванні поняття потрібно враховувати, що вони також виступатимуть об’єктами засвоєння й прямо чи опосередковано впливатимуть на результативність цього процесу.

1. БСЭ. В 30 томах. – Т.23. – М.: Советская Энциклопедия, 1976. – 640 с.
2. Кондаков Н.И. Логический словарь. – М.: Наука, 1971. – 638 с.
3. Математическая энциклопедия. – Т.2. – М.: Советская Энциклопедия, 1979. – 1104 с.
4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-Еко, 2000. – 512 с.
5. Тарасенкова Н.А. Деякі функції системи вправ за готовими малюнками // Математика в школі. – 1999. – №4. – С.36-38.
6. Тарасенкова Н.А. Не верь глазам своим // Математика в школе. – 1998. – №5. – С.19-24.
7. Тарасенкова Н.А. Опыт визуальной ориентации как один из факторов успешного решения планиметрической задачи // Евристика та дидактика точних наук: Міжнар. збірн. наук. робіт. Вип. 7. – Донецьк, 1997. – С.26-29.
8. Тарасенкова Н. А. Пропедевтический этап обучения поиску дополнительных построений // Математика в школе. – 2000. – №4. – С.32-35.
9. Усова А. В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 176 с.

Резюме. Раскрываются особенности понятий как объектов усвоения при изучении курса математики основной школы.

Summary. The features of concepts as objects of a digestion are uncovered at analysis of a course of mathematics of the basic school.

ПОВЫШЕНИЕ УРОВНЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

С.А.Гуцанович, канд. пед. наук, преподаватель,
гимназия №10, г. Минск, Беларусь

В условиях дифференцированного обучения учащихся математике существенное значение приобретает научно обоснованная и экспериментально апробированная методика, позволяющая выявлять и развивать способности школьников с учетом их уровня подготовки по предмету и индивидуально-личностных особенностей. Поскольку к настоящему времени имеют место достаточно различные точки зрения и направления исследования критериев умственного развития подрастающего поколения, то возникает проблема разработки такой теоретической модели и на ее основе методической системы, которая бы не противоречила, а успешно дополняла современную систему школьного математического образования новыми положениями.

В центре теоретической модели и в качестве ее интегрирующего элемента целесообразно рассмотреть понятие «умственное развитие по математике» или понятие «математическое развитие», которое является видовым к родовому понятию «умственное развитие» и включает в себя, прежде всего, понятия «математическая подготовка» и «математические способности». На основе такой классификации под математическим развитием следует понимать необратимый, многонаправленный процесс качественных изменений в умственной деятельности с учетом количественного накопления знаний, формирования умений и навыков по предмету. Интегративным показателем является уровень математического развития, который определяется двумя основными составляющими: уровнем математической подготовки и уровнем математических способностей.

Приведенная позиция не противоречит ранее проведенным отечественным и зарубежным исследованиям по проблеме установления критериев умственного развития подрастающего поколения в отношении различных учебных дисциплин [1].

При установлении уровней математической подготовки следует учитывать степень сформированности, с одной стороны, знаний, умений и навыков по предмету в отдельности и тесной взаимосвязи, а с другой – приемов умственной деятельности. В процессе проведения диагностики с целью дифференциации учащихся в данном направлении целесообразно выделить четыре уровня: творческий, прикладной, общекультурный и недостаточный. В качестве точки отсчета целесообразно брать общекультурный уровень, находясь на котором, ученик должен показать базовый минимум обязательных результатов обучения математике существующих стандартов. В свою очередь, целесообразно рассматривать особенности развития каждого компонента структуры математических способностей ученика с последующей классификацией уровней: высокий, выше среднего, средний, ниже среднего, низкий. Отправным пунктом является средний уровень качественного характера мыслительной деятельности школьников определенного возраста. Комплексное определение как уровня математической подготовки, так и уровня математических способностей дает возможность провести достаточно гибкую градацию школьников и выделить девять уровней математического развития: уровень математической одаренности, креативный, эвристический, генеративный, прагматический, латентный, формальный, дескриптивный и инфантильный (см. таблица 1).

Таблица 1**.** Уровни математического развития учащихся

		Уровни математических способностей учащихся				
Уровни математической подготовки учащихся		**Высокий**	**Выше среднего**	**Средний**	**Ниже среднего**	**Низкий**
	Творческий	Математическая одаренность	Креативный	Эвристический	——	——
	Прикладной	Креативный	Эвристический	Генеративный	Прагматический	——
	Общекультурный	Эвристический	Генеративный	Прагматический	Формальный	Формальный
	Недостаточный	Латентный	Латентный	Дескриптивный	Дескриптивный	Инфантильный

Уровень математической одаренности характеризуется целостным проявлением математических способностей в деятельности и обеспечивает ее успешное и качественное выполнение.

Креативный уровень предполагает наличие нестандартного мышления, которое проявляется в математической деятельности в виде результатов высокого качества. Продуктивная деятельность при этом выходит за пределы существующих у школьника знаний.

Творческую деятельность, но в пределах существующих знаний, характеризует эвристический уровень. На этом уровне могут также находиться школьники, которые имеют общекультурный уровень подготовки, но достаточно высокий уровень математических способностей.

Учащиеся, которые имеют генеративный уровень, могут успешно осуществлять математическую деятельность в достаточно широкой прикладной сфере, например, в инженерии, экономике и других областях.

Возможность более узкого и ограниченного использования математики на практике допускает прагматический уровень.

На формальном уровне находятся учащиеся, в сознании и памяти которых привычное, внешнее выражение математических положений и фактов доминирует над содержательной их стороной. Это проявляется в том, что учащиеся владеют только простыми алгоритмами при решении задач, ограниченными знаниями основных понятий курса математики.

Латентный – это скрытый, невидимый, внешне непроявляющийся уровень математического развития. Для данного уровня характерно то, что школьник, имея потенциально высокие способности к изучению математики, не владеет необходимым минимумом объема материала, входящего в обязательные результаты обучения. Его наиболее трудно выявить у учащихся.

Дескриптивный уровень имеют учащиеся, которые владеют математикой в описательном аспекте.

Наиболее низкий уровень математического развития – инфантильный. Для учащихся, которые находятся на этом уровне, необходимы более глубокие диагностические исследования со стороны дефектологов по специальной программе.

Выявление уровня математического развития дает возможность более глубоко подойти к индивидуальности каждого ученика с учетом идей дифференцированного обучения, видеть эффективность реального применения новых технологий, их практическое значение.

Но при этом возникает проблема о выявлении причин, которые обусловили тот или иной уровень и проведение возможной коррекционной работы в его повышении.

Поскольку повышение уровня математического развития учащихся имеет тесную взаимосвязь дидактики математики с другими областями знаний, то возникает потребность в рассмотрении педагогического мониторинга на методологическом уровне как междисциплинарного явления. В целом, под педагогическим мониторингом понимают форму организации, сбора, хранения, обработки и распространения информации о деятельности определенной педагогической системы, которая бы обеспечивала непрерывное слежение за ее состоянием и прогнозированием дальнейшего развития [2].

Одна из важнейших задач педагогического мониторинга заключается в разработке теоретико-технологического алгоритма, позволяющего охарактеризовать систему до и после определенного воздействия. При повышении уровня математического развития учащихся целесообразно выделить четыре основных этапа.

Первый этап является организационно-методическим. Здесь выделяются лица, которые принимают непосредственное и косвенное участие в процессе выявления и повышения уровня математического развития учащихся. Одному учителю математики такую работу провести достаточно сложно. Поэтому к данной деятельности можно привлечь методических работников, администрацию, социально-психологическую и медицинскую службы школы, студентов при прохождении педагогической практики. В отдельных случаях целесообразно создать специальные экспертные группы, на основе которых могут быть сформированы мониторные группы.

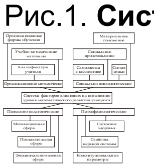
На данном этапе систематизируются и подвергаются анализу диагностические методики, включая тесты, опросники, анкеты, составляются варианты контрольных заданий и вопросов, подготавливается соответствующее нормативно-методическое обеспечение.

Комплексно-диагностическим является второй этап, который продолжается от нескольких дней до двух-трех недель в зависимости от объема проводимой работы. Здесь осуществляется постановка педагогического диагноза, включая количественную и качественную обработку полученных результатов. Важное значение следует отвести сравнению результатов, полученных при статистической обработке с нормативными данными существующих стандартов, установлению причинно-следственных зависимостей, обусловивших определенный уровень математического развития учащихся. На данном этапе может осуществляться дополнительная работа в лабораторных условиях, завершающей стадией которого является систематизация полученных данных в нормативно-методическое обеспечение и занесение их в базу данных компьютера.

Третий этап имеет коррекционно-развивающий характер. Он является более продолжительным чем другие этапы и длится около года в обычных классах и полгода в профильных математических классах. На данном этапе осуществляется формирование гетерогенных и гомогенных групп. Важной составной частью является выработка наиболее эффективных методов, форм, приемов обучения учащихся математике. План педагогических действий по реализации диагностических данных должен быть гибким в зависимости от реальных условий функционирования учебного заведения.

Стержневым элементом данного этапа является учет факторов, которые в большей мере зависят от личности учащегося, а также параметров, обусловленных внешними обстоятельствами, где индивидуальные характеристики обучаемого играют второстепенную роль. Для системы математического образования целесообразно выделить четыре группы факторов: организационно-методические, психолого-педагогические, психофизиологические, социально-психологические (см. рис. 1).

Рис.1. **Система факторов, влияющих на повышение уровня матем. развития уч-ся**



Для успешного осуществления данного этапа педагогического мониторинга разработаны соответствующие методики и рекомендации по их использованию, а также специальный журнал для служебного пользования, который состоит из двух частей: первая включает в себя список учащихся определенного класса и ряд столбцов для учета различных показателей, а вторая ориентирована на внесение рекомендаций по повышению уровня математического развития каждого школьника. В свою очередь, дополнительно к журналу могут отдельно вестись более подробные записи как в отношении отдельных учащихся, так и в целом о всем классе. В данном направлении значительную помощь учителю математики могут оказать социально-психологические работники.

В отдельных случаях внутри данного этапа может быть проведена промежуточная диагностика. Она предполагает анализ результатов проведенной работы, уточнение реальных достижений, сопоставление их с существующими стандартами школьного математического образования.

Завершающим циклом педагогического мониторинга является четвертый этап – итогово-диагностический. Его основной задачей является получение информации о результатах работы на предыдущих этапах, установление степени ее эффективности. Ведущее значение должно отводиться сопоставлению полученных данных уровня математической подготовки и уровня математических способностей учащихся с первоначальными. На основе использования специального программного обеспечения целесообразно осуществлять построение графиков и таблиц, отражающих картину повышения или, напротив, снижения уровня математического развития учащихся. Существенным моментом является прогнозирование дальнейших действий по совершенствованию методической работы в отношении отдельных учащихся и класса в целом. При этом педагогический прогноз может быть краткосрочным, среднесрочным и долгосрочным в зависимости от степени проведенной работы и квалификации ее участников.

Педагогическим мониторинг как педагогический феномен находится в стадии формирования. В отношении повышения уровня математического развития учащихся он является эффективным и продуктивным подходом. При его реализации на практике формируются и совершенствуются многие методические умения учителей математики.

1. Гуцанович С.А. Дидактические основы математического развития учащихся: Монография. – Минск: БГПУ им. М.Танка, 1999. – 301 с.
2. Майоров А.Н., Сахарчук Л.Б., Сотов А.В. Элементы педагогического мониторинга и региональных стандартов в управлении. – С.-П.: Санкт-Петербурский гос. ун-т пед. мастерства, 1992. – 80 с.

Резюме. Йдеться про організацію педагогічного моніторингу, що сприяє підвищенню рівня математичного розвитку учнів.

Summary. The organization of pedagogical monitoring, which conduces pupils promotion mathematical development level is given in the article.

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ТА МЕТОДИЧНІ ВИМОГИ ДО ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ШКОЛЯРІВ

Л.І.Малихіна, асистент,
Кіровоградський державний педагогічний університет

ім. В.Винниченка

Одним із головних завдань загальноосвітньої школи є необхідність створення умов формування творчої особистості, що прагне до максимальної реалізації своїх можливостей, саморуху, саморозвитку, здатна до свідомих вчинків у різноманітних життєвих ситуаціях. Риси характеру формуються в підлітковому віці – це пора досягнень, становлення власного «Я», зайняття нової соціальної позиції, переосмислення відношення до навчання, самоосвіти.

У підлітків провідною є навчальна діяльність. Завдяки їй відбувається формування основних психічних процесів і якостей особистості, з'являється здатність володіти знаннями. На цьому етапі значно змінюється система організації навчання і характер його перебігу. Відбувається своєрідна перебудова процесу учіння, що визначається ступенем його самостійності.

Розглянемо вікові й індивідуальні особливості розвитку пізнавальних психічних процесів, які необхідно знати вчителю для успішного навчання школярів. Передумовою успішної навчально-пізнавальної діяльності учня є рівень розвитку його *уваги*. Увага – це форма організації психічної діяльності людини, яка полягає в зосередженості, спрямованості свідомості на певні об'єкти. Вона нерозривно пов'язана з певною діяльністю. К.Д.Ушинський образно говорив, що уява – це “ті єдині двері”, через які знання входять у свідомість дитини [4].

Особливості спрямованості уваги школярів пов'язані з виникненням і диференціацією їх потреб та інтересів. Увага дитини активізується, коли вона бачить своє просування вперед у розумовому розвитку, відчуває власну значимість, необхідність. У спілкуванні з ними вчителі повинні не моралізувати, а радити, не категорично заперечувати, а активізувати можливі спроби школяра розв'язати задачу власноруч, самостійно логічно побудувати доведення тощо. Вияв уважності залежить від рівня розвитку ряду пізнавальних процесів підлітка, зокрема відчуттів і сприймань, пам'яті й мислення, мовлення і уяви.

У підлітковому віці відчуття й сприймання функціонують і розвиваються в єдності, у певному взаємозв'язку. Відчуття стають різноманітними, тоншими; сприймання – змістовнішим, самі процеси відчуття й сприймання – цілеспрямованими психічними діями. Під час навчальної діяльності перед учнем ставиться спеціальна мета – не тільки сприйняти ті чи інші предмети, явища в цілому, а й виділити певні деталі ознак чи властивостей. У сприйманні підлітка аналіз і синтез взаємодіють, хоча їх співвідношення залежить від змісту й характеру навчальних завдань.

Осмисленість сприймання виразно виявляється при перегляді учнями різних видів наочності. Так, у VII класі – наочність: схеми, графіки, моделі фігур тощо, – потребує іншого співвідношення образу слова й думки в їх сприйманні. Спеціальними дослідженнями доведено, що наочність запропонована підліткам в одних і тих самих формах, може мати "негативне" значення [2, 3]. Постійне використання на уроках геометрії фігур певної форми без зміни ракурсу збіднює їхнє сприймання. Обмеження унаочнення одними й тими самими конкретними фігурами без зміни їх неістотних ознак, наприклад, положення, навіть заважає учням розв'язувати геометричні задачі. Тому вчителі можуть запропонувати учням назвати предмети, що мають прямокутну, квадратну, круглу, циліндричну, трапецевидну чи пірамідальну форму, форму многокутника чи трикутника, "перетворити", "перебудувати" одну форму в кілька інших. У процесі навчальної діяльності здатність усвідомлювати сприйняте, осмислювати його допомагає розвивати у школярів зокрема мову. Наочна графічна схема, таблиця, карта активно сприймається, коли окремі її частини пояснити словесно.

Дані психолога В.А.Крутецького свідчать, що сприймання і спостереження підлітків залежать від змісту об'єкта й суб'єктивних умов, за яких вони відбуваються. Вони можуть бути глибокими, всебічними, тонкими і чіткими або ж поверховими й частковими. Це залежить від ступеня розвитку процесуальних можливостей учнів, їхнього ставлення до сприймання [1]. У підлітків виявляються певні суперечності між зрослими можливостями сприймати досить складні об'єкти й умінням здійснювати сприймання, спостереження. Саморегуляція сприймання в них буває ще не досконалою. Учень нерідко сприймає якусь одну сторону об'єкта, внаслідок чого вона виступає надто перебільшеною, спотворює сприймання, іноді обмежується поверховим аналізом об'єкта, сприймаючи найбільш яскраве, цікаве, незвичне, але нехарактерне, неістотне. Часто дитина фіксує тільки загальні ознаки об'єкта – тоді сприймання не набуває точності, потрібної для розв'язання пізнавальної задачі. Наприклад, розв'язуючи задачу з геометрії, учень сприймає трикутник як трикутник взагалі, тоді як для її розв'язування треба встановити, який він саме (прямокутний, рівнобедрений тощо). Усі ці недоліки сприймання зумовлюються тим, що учень не вміє ним керувати. Він захоплено слухає, вдивляється, але при цьому може не знати, що і як слід виділити у сприйманому, як розповісти про результати своїх спостережень. Щоб допомогти школярам позбутися такої вади у сприйманні, можна використати такі завдання: порівняйте дві подібні фігури і знайдіть в них відмінне; порівняйте два різних предмети і знайдіть між ними спільне; назвіть істотні й другорядні ознаки даних предметів; назвіть деталі предмета; скажіть, що істотне, а що неістотне для об'єкта. Сприймання значно поліпшується, коли підліток думає, узагальнює, класифікує.

Важливою умовою навчання учнів є розвиток їх *пам'яті*, тобто здатності людини запам'ятовувати, зберігати й відтворювати образи сприймання і відчуття, думки й поняття, рухи і дії, почуття й слова, накопичувати так званий індивідуальний психічний досвід.

Значну роль у запам'ятовуванні учнів відіграють умовно-символічні позначення (формули, схеми, графіки тощо). Результати запам'ятовування виражаються у взаємозв'язаних уявленнях про певні об'єкти. У підлітковому віці формується готовність і відповідне уміння користуватися прийомами запам'ятовування й відтворення (поділ тексту на смислові частини; виділення опорних пунктів; складання плану; перечитування того, що потрібно завчити; запис думок; виділення логічної схеми, мнемонічні правила тощо).

При заучуванні навчального матеріалу важливу роль відіграють також мнемонічні прийоми, які полегшують його запам'ятовування (встановлення зв'язку з уже знайомими фактами, використання спеціальних схем, умовних знаків тощо). Наприклад, опорні схеми й конспекти В.Ф.Шаталова, структурно-логічні схеми (листи-вкладиші) В.П.Іржавцевої. Таким прийомам учнів потрібно спеціально навчати.

Змінюються не тільки способи заучування, а й способи пригадування. Одним із таких способів є складання письмово або подумки плану, який допомагає обдумувати відтворюване, аналізувати його, оживляти й систематизувати потрібні асоціації. Такий план особливо потрібний, коли доводиться пригадувати чималий за обсягом матеріал, який вимагає певної логіки викладу.

Не можна говорити про розумове зростання підлітка, не охарактеризувавши розвитку його *мислення*. Мислення як складний процес відображення предметів і явищ навколишньої дійсності в їхніх суттєвих ознаках, зв'язках і відношеннях у підлітковому віці зазнає великих змін. Недаремно підлітковий вік називають "віком дерзань і пошуків". Учень прагне дошукатися причини того, чи іншого явища, пізнати природу навколишніх речей, зрозуміти їхнє призначення і функції. Це бажання підлітка слід всіляко підтримувати, скеровувати в потрібному напрямку.

Мислення підлітка стає більш доказовим. Доведення істинності засвоєних знань – логічні міркування й умовиводи в цьому віці стає потребою, необхідним компонентом засвоєння. Проте не всі учні й не завжди вміють користуватися логічними прийомами. Наприклад, деякі школярі відчувають значні труднощі при доведенні теорем, бо не завжди усвідомлюють сам метод міркування, не вміють ним користуватися, або не відчувають потреби в обґрунтуванні міркувань, які вважають очевидними (особливо пов’язаних з наочністю). Їх міркування часто мають індуктивний характер, тобто вони міркують від часткового до загального, менше міркують за аналогією. Слід корегувати відповідь учня, стимулювати його детальніше й частіше розповідати, тактовно вказувати на допущені неточності у словесному викладі, у послідовності викладу тощо.

Важливо визначити основні зміни у мисленні підлітків, які характеризують його розвиток. По-перше, вони полягають у дальшому вдосконаленні операцій порівняння пізнавальних об’єктів, їх аналізу й синтезу, виділення істотних і абстрагування від неістотних ознак, узагальнення істотних ознак, по-друге – у формуванні понять, суджень та умовиводів і оперуванні ними. Мислення підлітка з конкретного поступово стає абстрактним.

У школярів часто виникають труднощі при встановленні причинно-наслідкових зв’язків. При цьому вони легше визначають причини подій чи явищ, ніж логічні наслідки.

Подібні труднощі свідчать про те, що абстрактне мислення підлітка ще формується, перебуває у стадії свого становлення. Вони швидше переборюються, якщо методи навчання та спілкування передбачають, наприклад, формування у дітей уміння підводити одиничні поняття під загальні. З цією метою учням слід пропонувати знайти загальне поняття для одиничних геометричних фігур, типів задач тощо. Наприклад, поняття “рівнобедрений”, “прямокутний”, “рівнобічний” підвести під поняття “трикутник”, “прямокутник”, “ромб”, “коло”, “трапеція” – під загальне поняття “геометрична фігура”.

У підлітків уже формуються такі якості мислення, як послідовність, гнучкість, точність, широта, самостійність і критичність. Ці якості виявляються в тому, наскільки доказово й системно викладають учні свої думки, чи зберігають їх логічний зв’язок і логічну стрункість, як швидко переходять від мисленого аналізу одних понять до інших. Про самостійність мислення свідчить спроможність підлітка розв’язувати задачі, доступні для учнів даного віку, без сторонньої допомоги; розбиратись у нових фактах, явищах, подіях, спираючись на набуті раніше знання; знаходити нові, оригінальні шляхи розв’язування завдань.

Ускладнення цілей навчання позитивно впливає на *уяву*, що потрібна для їх досягнення. Уява як психічний процес полягає у створенні образів предметів і явищ дійсності, які людина ніколи не сприймала. Вона відіграє важливу роль у створенні абстрактного матеріалу з математики, у різних видах творчої діяльності. Слід спрямовувати увагу учнів на практичний, життєвий зміст матеріалу, що вивчається, залучати до творчості в гуртках, на факультативах тощо.

Захоплення навчальною діяльністю й прагнення до неї виникає тоді, коли діяльність імпонує інтересам і можливостям підлітка, має не лише виконавський характер, а й елементи творчості, винахідливості, потребує кмітливості. Учні люблять важкі завдання, але при цьому необхідні такі умови і така організація їх діяльності, щоб вона успішно виконувалася й результативно закінчувалася. Така діяльність супроводжується напруженням сил, виявленням активності, ініціативи, наполегливості, радості від успіхів.

Підліток вражає дорослих з одного боку своєю ерудицією, самостійністю в розумовій діяльності, винахідливістю і дотепністю, а з другого – безпорадністю при виконанні дуже простих завдань. Причина такої особливості розвитку пізнавальної сфери учня зумовлена складністю процесу утвердження нових, більш досконалих форм пізнання навколишньої дійсності. У всіх пізнавальних процесах – відчуттях, сприйманнях, пам’яті, мисленні, уяві – внаслідок активної навчальної діяльності, продуктивного процесу учіння, поповнення досвіду відбувається перехід від елементарного поверхового відображення до відображення внутрішніх суттєвих сторін предметів і явищ.

Таким чином, для ефективної організації навчально-пізнавальної діяльності учнів учитель повинен уникати одноманітності й шаблонів, враховувати досвід та успіхи школярів у навчанні, вікові й індивідуальні особливості їх характеру.

Дослідження і досвід педагогів, психологів та дидактів показують, що самостійна діяльність тільки тоді дає позитивний ефект, коли враховуються рушійні сили особистості і в першу чергу мотиви (Щукіна Г.І., Шамова Т.І., Маркова А.К., Буряк В.К., Слєпкань З.І. та ін.). Мотиви учіння формуються на основі потреб та інтересів. Активність учнів у оволодінні знаннями збуджується пізнавальними потребами. Якщо учень не усвідомлює потреби в учінні, якщо у нього немає пізнавальної потреби, він, як правило, не проявляє розумової активності.

Для того, щоб учні на уроці уважно слухали пояснення, активно цілеспрямовано працювали, потрібно створити позитивний емоційний настрій, безпосередньо пов'язаний із прагненням до пізнавальної діяльності, враховуючи, що особливо вабить дітей цього віку нове, невідоме, непережите. Завдання повинно задаватися так, щоб учні сприйняли його як свою власну пізнавальну й практичну мету та активно прагнули до кращих успіхів. Це і створює в них найбільш цінний і значимий мотив їх діяльності.

Стійкий пізнавальний інтерес формується при поєднанні емоційного і раціонального у навчанні. Це особливо важливо у процесі навчання математики, оскільки її зміст побудовано на логічній основі, що обмежує вплив на емоційну сферу школярів. Чітка постановка пізнавальних завдань уроку, наведення яскравих прикладів й фактів під час пояснення нової теми, глибока змістовність викладу, використання у навчальному процесі системи різнорівневих самостійних робіт, творчих завдань сприяють цілеспрямованому розвитку пізнавального інтересу до математики.

Дієвим засобом формування й розвитку стійкого пізнавального інтересу є також створення у процесі навчання проблемних ситуацій і розгортання на їх основі активної пошукової діяльності учнів. Під час створення проблемних ситуацій учитель протиставляє нові факти складеній системі знань і загострює це в протиріччі між знанням й незнанням, яке спонукає учнів до активної розумової діяльності, викликає прагнення зрозуміти суть того, що вивчається. У цьому випадку активна пошукова діяльність учнів підтримується безпосереднім, глибоким, внутрішнім інтересом.

З метою емоційного впливу на учнів учителі розповідають цікаві, хвилюючі епізоди з історії науки, пошуку наукової істини, пропонують для розв'язування цікаві нестандартні задачі, що вимагають кмітливості й винахідливості, задачі парадоксального характеру, які потребують прояву інтуїції, домислу тощо. Посильність та варіативність завдань дозволяють викликати в учнів позитивні емоції: радість успіху від самостійного розв'язання складної задачі, віра в свої сили, почуття власної гідності, значимості під час виконання дорученого колективом завдання, успішного переборення труднощів, які зустрічаються, тощо, які теж мають великий вплив на формування інтересів школярів.

Важливою умовою розвитку інтересу до предмету є відношення між учнями й учителем, які складаються у процесі навчання. Виховання пізнавального інтересу до математики багато в чому залежить від особистості вчителя, його педагогічної майстерності, такту. Учитель повинен уміти тактовно пред'являти учням необхідні вимоги, послідовно ускладнювати пізнавальні задачі, спонукати учнів до пошуку різних способів розв'язання пізнавальних задач, уміти створити атмосферу повної довіри, співучасті, співпереживання. Усе це дає можливість учням спокійно подумати над завданням, знайти помилку, її причину, порадіти своєму успіху та успіхам товаришів. Діловий, захоплюючий, доброзичливий стиль відносин з учнями дозволяє досягати значних успіхів у їх навчанні й розвитку.

Таким чином, необхідною передумовою організації самостійної діяльності учнів є також формування й розвиток позитивної мотивації учіння – складного процесу, який включає формування пізнавальних потреб і виховання стійких пізнавальних інтересів, передбачає використання різних прийомів у системі засобів розвиваючого навчання і правильного стиля відносин між учителем й учнями.

Під впливом складнішого змісту навчання в середніх класах відбуваються певні зміни не лише в мотиваційній. а й в операційній стороні розумової діяльності підлітка. Зокрема, підвищується рівень абстрагування й узагальнення, відбувається перехід від конкретних до абстрактних узагальнень, відповіді учнів стають більш усвідомленими, обгрунтованими, логічно досконалими. Помітно зростає перехід дій у внутрішній мислений план. Це обумовлюється змістом навчального матеріалу, його обсягом. Засвоєння матеріалу потребує більш раціональних, рухливих і максимально узагальнених дій. Такими діями є внутрішні, розумові дії.

Перехід до систематичного вивчення основ наук вимагає встановлення зв’язку між новими знаннями й раніше здобутими, між знаннями з різних предметів, уміння бачити в них певну систему. Учні 7-9-х класів значно швидше, ніж молодші школярі встановлюють зв’язки, які дають змогу визначати загальне в різноманітних фактах і специфічне в окремому явищі. Розумовий розвиток підлітка характеризується накопиченням і знань, і розумових прийомів, добре “відшліфованих” і міцно закріплених, які можна віднести до інтелектуальних умінь. Тому в підлітковому віці вміння вчитися передбачає оволодіння не лише необхідними навичками й уміннями, а і мислительними прийомами, за допомогою яких вони виявляються. Цих прийомів учнів потрібно спеціально навчати.

Узагальнені прийоми розумової діяльності поділяються на алгоритмічні й евристичні. Алгоритмічні – це прийоми розумового правильного мислення, яке повністю відповідає законам формальної логіки, наприклад, алгоритми розв’язування типових задач, правила конструювання означення поняття через родо-видові відмінності, правило-орієнтир, класифікації тощо.

Оволодіння учнями прийомами розумової діяльності алгоритмічного типу сприяє вдосконаленню репродуктивного мислення, яке є важливим компонентом творчої діяльності, і слугує тим фондом знань, на основі яких учень може розв'язувати нові для нього задачі, засвоювати більш складні прийоми. Але довготривалі вправи алгоритмічного характеру формують установку на дію за готовим зразком, сковують пошук рамками уже відомих прийомів, створюють "бар'єр накопиченого досвіду". Алгоритмічна діяльність не вичерпує творчого мислення, тому формування алгоритмічних прийомів повинне поєднуватися із спеціальним навчанням прийомам евристичного типу.

Евристичні прийоми стимулюють пошук розв'язання нових проблем, відкриття нових для учня знань, спрямовують думку на проникнення в суть змісту, включають у процес міркування наочно-образне мислення, яке полегшує сприйняття ситуації, що описується в умові задачі.

Таким чином, гармонійне поєднання алгоритмічного й евристичного у навчанні сприяє раціональній організації самостійної діяльності школярів у процесі навчання математики.

Необхідною умовою правильної організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів є чітка, конкретна постановка завдання. Приступаючи до самостійної роботи, учні повинні точно уяснити собі мету її, усвідомити, чого вони мають досягти.

На наш погляд, усвідомленню учнем цілей сприяє чітка визначеність кола питань, які вивчаються, обсягу роботи на урок, декілька уроків, які охоплюються темою. Крім того учням треба дати перелік того, що вони повинні знати й уміти з даної теми. Усвідомлення й прийняття мети забезпечує включення школяра в навчальну ситуацію, створює готовність учня до засвоєння знань і бачення перспективи вивчення певної теми.

Ураховуючи аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми нашого дослідження та усе сказане вище, можна сформулювати такі методичні вимоги до організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів:

1. Кожна самостійна робота повинна відповідати меті та завданням матеріалу, що вивчається, передбачати поетапне просування від незнання до знання.

Такий підхід до визначення суті самостійної роботи зобов'язує вчителя проводити її на уроках у певній системі, постійно ускладнюючи завдання, послідовно й планомірно навчаючи учнів необхідних прийомів самостійної навчальної діяльності з урахуванням їх підготовленості та пізнавальних можливостей.

2. Типи та види самостійних робіт повинні відповідати реальним навчальним можливостям учнів та рівням їх самостійності.

На уроках слід систематично пропонувати школярам пошуково-творчі завдання для розвитку їх розумових дій, а також створювати умови для прояву художніх, конструктивних творчих здібностей, оригінальності думки з метою саморозвитку особистості.

3. Методична система організації самостійної діяльності школярів повинна відповідати принципам розвиваючого навчання (З.І.Калмикова) й дидактичним принципам (Л.В.Занков).
4. Відбір організаційних форм (фронтальна, групова, індивідуальна) та їх гармонійне поєднання повинні здійснюватися з урахуванням цілей і завдань навчання, специфіки матеріалу (особливості навчального предмету, зміст матеріалу), що вивчається, особливостей класу в цілому та окремих його учнів.
5. Методична система організації самостійної діяльності учнів повинна відповідати вимогам диференціації та індивідуалізації навчання.

1. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1988. – 431 с.
2. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. – К.: Рад. школа, 1980. – 143 с.
3. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие. – К.: Рад.школа,1983.-192с.

4. Ушинский К.Д. Педагогические сочинения / Сост. С.Ф.Егоров. – М.: Педагогика, 1988. – Т.1. – 416 с.

Резюме. В статье рассмотрены некоторые возрастные и индивидуальные особенности развития познавательных психических процессов, а также пути их формирования у подростков. Сформулированы основные методические требования к организации самостоятельной учебно-познавательной деятельности школьников.

Summary. This article discusses some age and individual peculiarities of cognitive psychological processes and ways of their formation among teenagers. Basic methodological reguirements and organization of extra-curricula activities of pupils are formulated here.

О ТЕМАТИКЕ НАУЧНЫХ РАБОТ ШКОЛЬНИКОВ

Л.М.Лиманская, ассистент,
В.В.Лиманский, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Донецкий национальный университет

Введение

Ведение школьниками научно-исследовательской работы в области математики – эффективный метод развития их творческих способностей. Существуют примеры, когда известные ученые-математики уже в школьные годы получали интересные результаты, заслуживающие внимания профессионалов. Менее изучен вопрос методики организации научной работы школьников более повседневного уровня. В настоящее время многие учебные заведения и учреждения, занимающиеся вопросами просвещения, уделяют этому повышенное внимание. Так, в лицее при Донецком национальном университете в математической группе каждый учащийся обязан вести некоторую научно-исследовательскую работу под руководством сотрудников университета. В Украине проводятся конференции научных работ школьников сначала на областном уровне, а затем и на республиканском. Хорошо известно, какое внимание этому движению уделял замечательный ученый и педагог Ю.А.Палант. Юрий Александрович на протяжении многих лет был председателем Малой Академии наук в Донецкой области. Многие его ученики подготовили работы, отмеченные дипломами конференций различного уровня (областных, Всеукраинских, при высших учебных заведениях). О работах некоторых его учеников будет рассказано в настоящей статье. Ряд высших учебных заведений (МГУ, МЭИ, МФТИ, Санкт-Петербургский университет) ежегодно проводят конференции для школьников, одна из целей которых – профориентационная работа.

Представляется интересным сравнить влияние на развитие творческих способностей школьников математических олимпиад и исследовательской работы. Наряду с положительными сторонами многие авторы отмечают и отрицательные черты математических олимпиад. Так, Н.Н.Константинов в статье «Турнир городов и математическая олимпиада» [1] отмечает «законсервированность стиля олимпиад» и «возникновение особой профессии олимпиадчика – профессора по решению особого типа задач». Далее автор пишет, что «некоторые олимпиадчики, в особенности провинциалы, с трудом переключаются на математику, имеющую научную ценность». Олимпиады породили две противоположные традиции в подборе задач: научную и антинаучную. «Антинаучная традиция породила многочисленные задачи-уроды, претендующие на оригинальность, но фактически назойливо повторяющие одни и те же математические фокусы. Команду школьников можно специально натренировать на задачи этого рода и добиться эффектных внешних результатов, но такая деятельность не имеет никакого отношения к пропаганде математики».

Для объективности заметим, что соревновательный характер многих конференций научных работ школьников постепенно порождает сходные отрицательные черты. Целью настоящей статьи является обсуждение тематики научных работ школьников, перспективной для ее использования, а также общих принципов такой деятельности.

§1. Некоторые общие принципы организации научной работы школьников

1. Любая научная работа начинается с изучения литературы по рассматриваемому направлению. Поэтому литературная основа имеет первостепенное значение. Это может быть и школьный учебник или сборник задач, и сборник задач повышенной трудности (например, олимпиадный), и популярная книга по математике, и отдельные разделы учебников по высшей математике, и даже отдельные места из серьезных монографий и работ. Особую роль в этом плане играют статьи в специализированных журналах для школьников, таких, как «Квант», «У світі математики», «Математика в школе», «Математическое просвещение».

2. Для начала работы желательна постановка задачи, имеющая несколько уровней трудности, чтобы было возможно движение от простого к сложному. Хорошо иметь систему задач, решение которых постепенно вводит школьника в тематику и проясняет смысл и степень трудности проблемы.

3. Очень сложен вопрос новизны результатов. Уровень работ передового края математики настолько высок, что добраться до принципиально новых математических проблем непросто. В то же время существует масса конкретных, сравнительно простых задач, решения которых либо не найти в доступной литературе, либо представляется интересным получение новых с методической точки зрения их изложений. Наличие новизны в изучаемой проблеме является, конечно же, весьма желательным.

4. С предыдущим пунктом связана возможность использования компьютера. Даже в известных темах существуют многочисленные направления, позволяющие применять вычислительную технику. Зачастую школьнику трудно провести тонкое теоретическое исследование. Однако всегда есть возможность алгоритмизировать некоторые фрагменты рассуждений и вычислений, просчитать частные случаи. Совсем замечательно и важно с общей точки зрения, когда применение компьютера становится неотъем-

лемым моментом исследования. О возможности использования ЭВМ будет особо говориться в настоящей работе.

§2. Обобщение известных результатов

Большинство новых теорем в математике появляются не на голом месте, а являются обобщением уже известных частных случаев, или будут аналогами установленных результатов. В математических кругах бытует негативное отношение к так называемому «обобщенчеству», т.е. получению теорем, более общих, чем известные, с целью написания новых работ, а не установлению новых фактов или поиску новых идей. Тем не менее, на уровне школьных исследований поиск утверждений, более общих, чем известные, – это прием, исключительно полезный и важный с точки зрения развития математической культуры школьника. Особое место здесь занимает перенос результатов из планиметрии в стереометрию и далее в многомерную геометрию. Рассмотрим примеры из работ бывших школьников: Лиманского Димы (ФМШ №17 г. Донецка, научный руководитель заслуженный учитель Украины В.И.Лысов) и Серова Саши (лицей при ДонНУ, научный руководитель В.В.Лиманский, один из авторов настоящей работы).

Хорошо известна следующая теорема из планиметрии.

Теорема 1. В треугольнике ABC имеет место векторное равенство

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OH},$$

где O – центр описанной около треугольника ABC окружности, а H – его ортоцентр (точка пересечения высот).

На первом этапе работы Дима, в то время еще ученик 9 класса, рассматривал известные теоремы геометрии треугольника с точки зрения возможности их доказательства при помощи теоремы 1. Так были получены, например, теоремы о прямой Эйлера, об окружности девяти точек, свойства точек, симметричных ортоцентру относительно сторон треугольника и середин его сторон, равенство $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$ и некоторые другие результаты. Работа была представлена на республиканскую конференцию Малой Академии наук школьников (Киев, 1993 г.) и была отмечена поощрительным дипломом.

В дальнейшем были рассмотрены возможности переноса этих результатов из геометрии треугольника в геометрию тетраэдра. Здесь ситуация меняется, поскольку в тетраэдре высоты, вообще говоря, не пересекаются в одной точке. Если это так, то такой тетраэдр называется ортоцентрическим, и для него оказывается справедливой

Теорема 2. Если $ABCD$ – ортоцентрический тетраэдр, O – центр описанной около него сферы, H – его ортоцентр, то имеет место векторное равенство

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=2\overline{OH}$.

Если высоты тетраэдра не пересекаются в одной точке, то равенство из теоремы 2 можно использовать для определения точки H . В работе эта точка была названа псевдоортоцентром. Были получены аналоги (часто видоизмененные) теоремы о прямой Эйлера, равенства $OH^2=$ $=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$ (в тетраэдре получается, что $OH^2=4R^2-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6}a_i^2$, R – радиус описанной сферы, a_i – длины ребер), теоремы об окружности девяти точек и др. Выяснилось, что псевдоортоцентр совпадает с так называемой точкой Монжа. Работа была представлена на республиканскую конференцию Малой Академии наук школьников (Киев, 1995 г.) и была отмечена дипломом II степени. Основные ее результаты опубликованы в статье [2].

Саша Серов рассматривал эту тему в многомерных пространствах. Были получены обобщения отмеченных выше результатов на случай произвольного симплекса. Получен, например, следующий критерий ортоцентричности симплекса.

Теорема 3. Симплекс Δ^n с множеством вершин $S=\{A_0,A_1,\ldots,A_n\}$ ортоцентричен (т.е. его высоты пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда линейные оболочки множеств вершин S_1 и S_2 ортогональны. Здесь $S = S_1 \cup S_2$ – дизъюнктное разбиение.

Работа докладывалась на конференции в Москве (организатор – МЭИ) и была отмечена дипломом I степени.

§3. Диофантовы уравнения

Эта тема предоставляет большие возможности для подбора задач, в том числе и совершенно не изученных. Выдающийся математик А.Н.Колмогоров писал, что бóльшая часть проблем математики находится либо в области банального, либо в области неприступного, и только в узкой прослойке между этими зонами делаются математические открытия [7]. В теме «Решение уравнений в целых числах» легко сформулировать совершенно неприступные задачи. Однако в случае удачных формулировок исследователя ждут красивые результаты, для получения которых можно использовать самые разнообразные методы, в том числе с применением ЭВМ.

Примером довольно удачной постановки задачи может служить работа учащегося лицея Володи Скобелева (научный руководитель Л.Л.Оридорога) [3]. В работе исследуются решения в целых числах уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = kx_1x_2\ldots x_n$. Хотя полного описания решений этого уравнения не получено, создается впечатление о возможности дальнейшего развития исследований.

Рассмотрим еще один пример. В журнале «Квант» опубликована статья М.Г.Крейна «Диофантово уравнение А.А.Маркова» [5]. Речь идет о решениях в целых числах уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Легко показать, что все его решения получаются из решений с положительными компонентами изменением у двух из этих компонент знаков. Если известно какое-либо решение, то, зафиксировав две переменные, получаем приведенное квадратное уравнение относительно третьей переменной с целыми коэффициентами. Поэтому получается второе решение, названное смежным. Таким образом, образуется граф, вершины которого – решения, а ребра соединяют смежные решения. В статье показано, что для решений с положительными компонентами граф будет бесконечным деревом, в каждой вершине которого (за исключением двух) сходятся три ребра.

Подобного рода уравнений очень много; например, уравнения вида $x^2 + y^2 + z^2 = Axyz + B(xy + xz + yz) + C(x + y + z)$. Однако в общем случае граф решений будет не обязательно связным. Представляется интересным исследовать число компонент связности этого графа и их характер. Например, при $B = 0$ можно показать, что, за исключением некоторой конечной зоны в Z^3, решения ведут себя так же, как у уравнения Маркова. Теперь можно применить компьютер, рассчитав на нем граф в этой конечной зоне. Здесь ЭВМ применяется не в виде необязательного упражнения в программировании, а в виде необходимого этапа исследования.

§4. Комбинаторная геометрия и целочисленная арифметика

Сказанное в начале предыдущего пункта полностью относится и к комбинаторной геометрии, и к целочисленной арифметике. Здесь еще бóльший простор для постановок задач, решаемых с применением компьютера, в том числе и для младших школьников. Например, задачи выбора среди точек с целочисленными координатами на плоскости и в пространстве геометрических фигур с заданными свойствами. Такие задачи связаны с прямым или направленным перебором большого количества вариантов, и решать их без применения вычислительной техники затруднительно.

Рассмотрим более теоретическую тему. В статье В.В.Вышенского «Комбінаторні варіації на геометричні теми» [6] изучается решение задачи подсчета числа треугольников данного периметра с целыми сторонами. В работе дано полное ее исследование. Существует много сходных задач, где получение окончательных формул, по-видимому, невозможно. Например, задача подсчета числа прямоугольных целочисленных треугольников заданного периметра. Если $2p$ – периметр такого треугольника (а он обязательно четный), то его стороны могут быть записаны в виде $u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$. Здесь u, v – натуральные числа, $u > v$. Получаем, что $u(u+v) = p$. Следовательно, задача сводится к определению количества таких разложений на два множителя натурального числа p, что бóльший множитель $u+v$ заключен в пределах $\sqrt{p} < u+v < \sqrt{2p}$. Если разложение p в произведение простых делителей имеет вид $q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_m^{k_m}$, то задача (при фиксированных $q_1, q_2, \ldots, q_m$) приводит к подсчету количества целочисленных точек $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathrm{R}^m$ в области $0 \le z_i \le k_i$, $\sum_i k_i \log q_i < \sum_i 2z_i \log q_i < \left(\sum_i k_i \log q_i\right) + \log 2$. Задача, вероятно, не имеет решения в виде простой формулы даже при $m = 2$. Однако можно получить приближенные формулы, вычислив многомерный объем описанной выше области. Вычисления на компьютере здесь можно использовать для проверки степени приближенности результата.

§5. Развитие олимпиадных задач в темы научных работ

Дополним приведенную ранее цитату из статьи Н.Н.Константинова еще одним фрагментом, характеризующим этот вид деятельности положительно: «В соответствии с научной традицией, для олимпиад сочиняются и подбираются красивые и занимательные задачи, в которых в концентрированном виде присутствуют яркие математические факты и идеи… Хорошие олимпиадные задачи имеют и чисто научное значение – математики иногда формулируют новые интересные факты и связи в форме таких задач. Иногда эти задачи помогают по-новому посмотреть на давно известные вещи».

За время проведения математических олимпиад накоплен огромный материал в виде текстов заданий этих соревнований. Здесь можно найти массу сюжетов, которые разворачиваются в интереснейшие темы исследований. Будет приведен только один пример. В сборнике [4] даны формулировки и решения двух задач: №№ 302 и 660. Эти задачи являются частными случаями общего вопроса, который можно сформулировать так: являются ли данные подстановки системой образующих симметрической группы S_n? Более общий вопрос: как описать все системы образующих S_n? Решение этого вопроса – важная и интересная задача комбинаторной теории групп. С этой же темой связана задача из олимпиады «Турнир городов» 2001 года: «В ряд стоят 23 коробочки с шариками, причем для любого числа n от 1 до 23 есть коробочка, в которой ровно n шариков. За одну операцию можно переложить в любую коробочку еще столько же шариков, сколько в ней уже есть, из какой-нибудь другой коробочки, в которой шариков больше. Всегда ли можно такими операциями добиться, чтобы в первой коробочке оказался 1 шарик, во второй – 2 шарика и так далее, в 23-й – 23 шарика?

§6. Неравенства

Роль неравенств в математике чрезвычайно велика. Например, доказательство неравенств тесно связано с вычислениями наибольших и наименьших значений функций. Так, из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом ($\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ при $x \geq 0, y \geq 0$) следует, что функция $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$ при $x \geq 0, y \geq 0$ имеет наименьшее значение, которое больше или равно нулю. А так как при $x = y$ $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 0$, то это наименьшее значение в точности есть нуль.

Большим специалистом в теории неравенств был Юрий Александрович Палант. Некоторым своим ученикам он предлагал задачи на исследование поведения функций вблизи точек экстремума. Пример такой задачи

– изучение условий, при которых выполнено неравенство $\frac{x+y}{2} < \sqrt{xy} + \varepsilon$; $x \geq 0, y \geq 0$. Ряд учеников Юрия Александровича были отмечены дипломами на различных конференциях. Так, работа Гали Дудьевой была отмечена дипломом I степени на республиканской конференции научных работ школьников (Киев, 1993 г.). Работа Павла Чуракова отмечена дипломом III степени на конференции в Москве.

1. Константинов Н.Н. Турнир городов и математические олимпиады// Математическое просвещение.– 1997.– Третья серия, вып. 1.– С.164-174.
2. Limansky Dm. Anatomy of variations of problem // International Distance Conference "Heuristic methods in teaching of mathematics". – Proceedings. Part I, Donetsk, 1997.– P.19-20.
3. Скобелев В.В. Об одном типе диофантовых уравнений//Труды Института прикладной математики и механики. – Т.5. – Донецк, 2000. – С.127-131.
4. Українські математичні олімпіади (довідник). – К.: Вища школа, 1993. – 416 с.
5. Крейн М. Г. Диофантово уравнение А.А.Маркова // Квант. – 1985. – №4. – С.13-16.
6. Вишенський В. В. Комбінаторні варіації на геометричні теми//У світі математики. – 2000.– Т.6., вип. 2. – С. 25-40.
7. Колмогоров А. Н. Математика – наука и профессия. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

Резюме. У статті обговорюється тематика наукових робіт школярів, що є перспективною для використання, а також загальні принципи такої діяльності.

Summary. In clause the subjects of scientific works of the schoolchildren being perspective for their use, and also general principles of such activity are discussed.

RESEARCH AND TRAINING POTENTIAL OF THE OLYMPIAD TASKS

(ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ И ОБУЧАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ)

Dr. Peter Samovol,

Ben-Gurion University of Negev, Beer- Sheva, Israel
Mark Applebaum,
Kaye College of Education, Beer- Sheva, Israel

Pedagogical problem

It is a well-known fact that the system of classes and lessons, due to its conventionality, forces teacher to stick generally to teaching ready-made schemes and solving typical exercises. Consequently, because of it a pupil is very rarely granted an opportunity of comprehending mathematics in its diversified manifestations as the integral and unified science. And the intricate and breath-taking process of mathematical discovery is at all discarded during mental education and development. As a result, many school graduates recollect mathematics as *a science of obsolete rules and remembering-resisting instructions.* Such school "intellectual trauma" can avert an individual from studying mathematics for a very long time. Consequently, doubtless becomes the very possibility of successful school instruction.

We have an apparent problem before us.

Its essence stems from considerable difficulties associated with conveying researcher experience from a researcher to a teacher, from a teacher to a student. Sometimes, it is extremely hard to overcome these hardships. And the reason is as follows.

In real life, we often encounter the situations when something, even seemingly simple, cannot be made instead of some other person. For instance, you cannot sleep, eat, recover from illness instead of somebody. In all these cases, the result of action cannot be separated from its doer. It belongs to him and him only. Student's learning and research activity is also in the list.

In other words, success of teaching is in the least measure dependable on teacher's professional skill to present the material. And in the highest measure - on student's ability of self-training, and his ability of becoming immersed in the intellectual self-excitation state.

We solve this challenge in our everyday teaching practice supported by the huge research and teaching potential of the **Olympiad tasks.**

It is good to remind that the Olympiad tasks are traditionally called such tasks, which at different times have been offered to schoolchildren at various competitions, contests, mathematical combats, etc. These tasks differ in quality from the standard textbook ones, primarily, by the presence of vivid mathematical idea, peculiar folklore grace, hard-to-achieve but surprisingly brilliant, sometime insight solution.

G. Polya noted that in the complex of conventional problems a teacher is imperative to include several of them, which, though slightly more challenging and time-consuming, nevertheless, possess genuine mathematical grace and profound contents. [5]

The Olympiad problems nearly always meet these requirements.

Moreover, many mathematicians and specialists think that the meditation over the solution of an Olympiad problem is nearly always a piece of "genuine" mathematics which provides sufficiently vivid, though a little limited, image of the science idea, method, and esthetics.

In this connection, Boris Delonney, a bright representative of the Moscow mathematical school of thought, said once: "Great research discovery differs from a difficult Olympiad problem only in that five hours are sometimes sufficient to solve the problem, whereas it takes you the whole life to obtain a notable research result".

On the other hand, we should not, however, think that the integrity of the Olympiad tasks can serve as an adequate model of "great" mathematics. More probably, we deal here with the "research natural reserve". In reality, a mathematician generally speculates over the never-before-solved problem, which means that he is even unaware whether the problem has any solution at all. Add here the fact that he would probably be forced to devise his own techniques and theoretical skills to find the solution. Still, on the other hand, the best tasks of the mathematical Olympiads are genuine pieces of art. During meditations and search for their solutions a student passes principally the same route and enjoys the same feeling so familiar to any professional mathematician.

It is evident that if a young researcher can experience the entire spectrum of feelings peculiar to any trailblazer, and can enjoy the pleasure of powerful intellectual self-excitement, he can be anticipated to actively continue his research activities. Nevertheless, numerous facts from the biographies of many outstanding mathematicians convince us that rigid and in most cases, unnatural, conditions of the mathematical contest are not necessary for the acquaintance with certain interesting problems and achievement of high scientific results.

Their top achievements in the science stem from prolonged and profound inner contemplation rather than from fast operating ingenuity. [l]

The practice shows that modern curricula pay insufficient attention to the development of this quality in schoolchildren.

Our Didactic Principles.

The major didactic principles in our work are:

"The variativity principle in teaching mathematics".

The principle essence is described by G.Polya [5] who states that "it is better (from the viewpoint of development of a personality thinking) to solve one problem by a number of various techniques than to solve several similar or even dissimilar problems».

In this process, we have a rare opportunity of comparing different solutions from various viewpoints:

– conventionality or ingenuity;

– is the amount of calculations large (much to count and write) or not?

– is the solution available to all and everybody, or only to the population familiar with a certain theory?

– is the chosen allegory of the problem restated conditions clear to all students, or only to the author? And so on...

Didactical content of individual and group work is selected by the teacher, basing on concrete training objectives and abilities of the group members.

The creativity principle.

If a teacher wants to follow this principle in his work, he should not only train his student in understanding of the problem-underlying idea but to make an attempt of exercising with the idea, of coining a new phrase, a new plot for it In other words, to try and formulate new problems on the idea's basis. It might happen that a student will not be able to solve the problem you have made, without an assistance. This fact is not a rarity in the history of mathematics. Up to now there are the problems formulated over a hundred years ago but still unsolved, though many great brains attempted to do it.

Besides, the problem offered to a student can be only a «top of an iceberg» for the more general issue. And having solved the problem, it is worth contemplating whether the result can be generalized?

The sequence of operations schematically looks like:

A new problem => analysis of the problem conditions => solution of the problem => an attempt to generalize the result => coining of the idea underlying the problem conditions or its solution => search for new possibilities of the idea application => statement of a new problem.

The above described creativity concept can be called "the aerobatics flying" of student activity in his self-education progress. It is hard to be implemented, particularly in its advent. However, the expediency of its realization is beyond all doubts.

We can demonstrate on below given examples our experience in this direction. The group of schoolchildren included mathematically inclined children.

Example (8 grade. Olympiads Zota 2000. Rehovot, Israel.)

Let us consider a number $N = 1 + 2^n + 3^n + 4^n$.

What is the potential amount of zeros for the termination of number N decimal representation?

Solution.

Only the methodological analysis of the problem is given here.

1) Scientific experiment («Throwing a "touchstone").

n	2^n	3^n	4^n	$N=1+2^n+3^n+4^n$
1	2	3	4	10
2	4	9	16	30
3	8	27	64	100
4	16	81	256	354

Undoubtedly, the examples given are insufficient. However, we can immediately define from the table that the desired quantity of zeroes can be equal to zero, to a unity and to two. Let us try to continue our experiment.

n	2^n	3^n	4^n	$N=1+2^n+3^n+4^n$
5	32	243	1024	1300
6	64	729	4096	4890
7	128	2187	16384	18700

No changes for the answer.

Plausible hypothesis: The desired maximal potential quantity of zeros is exactly two.

The hypothesis validation.

a) With $n=2\cdot k+1,\ k\in N$, we have:

$$N=1+2^n+3^n+4^n=1+2\cdot 4^k+3\cdot 9^k+4\cdot 16^k\equiv 1+0+3\cdot 1=4(\mathrm{mod}8) \qquad (8)$$

b) With $n=2\cdot k,\ k\geq 2$, we have:

$$N=1+2^n+3^n+4^n=1+4^k+9^k+16^k\equiv 1+0+1=2(\mathrm{mod}8) \qquad (9)$$

It means that number $N=1+2^n+3^n+4^n$ is not divisible by 8. Therefore, this number N can under no n values be divisible by 1000, i.e. to have three zeros at the end of decimal representation. The hypothesis is substantiated by the proof.

Hence, and supported by the table data we arrive at the conclusion: **Two zeroes.**

2) For advanced students. (Research continuation.)

Let us try to determine the amount of numbers of the desired nature.

Prove that there is an infinite amount of natural n values for each of which $N=1+2^n+3^n+4^n$ number will be divisible by 100.

<u>Proof</u>

$$N=1+2^n+3^n+4^n=1+2\cdot 4^k+3\cdot 9^k+4\cdot 16^k\equiv 1+2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 0\equiv 0(\mathrm{mod}4) \qquad (10)$$

Let us analyze the possibilities of division of

$N=1+2^n+3^n+4^n=(1+4^{2\cdot k+1})+(2^{2\cdot k+1}+3^{2\cdot k+1})$ by 25.

We will use the formula:

$$a^{2\cdot k+1}+b^{2\cdot k+1}=(a+b)\cdot(a^{2\cdot k}-a^{2\cdot k-1}\cdot b+a^{2\cdot k-2}\cdot b^2-\ldots-a\cdot b^{2\cdot k-1}+b^{2\cdot k}),$$

Since $1\equiv 1\ (\mathrm{mod}5)$, $4\equiv -1\ (\mathrm{mod}5)$

We have:

$$1^{2\cdot k+1}+4^{2\cdot k+1}=(1+4)\cdot(1^{2\cdot k}-1^{2\cdot k-1}\cdot 4+1^{2\cdot k-2}\cdot 4^2-\ldots-1\cdot 4^{2\cdot k-1}+4^{2\cdot k})\equiv$$

$$\equiv 5\cdot(1\cdot(2\cdot k+1))\ (\mathrm{mod}5)$$

Similarly, as $3\equiv -2\ (\mathrm{mod}5)$, we have:

$$2^{2\cdot k+1}+3^{2\cdot k+1}=(2+3)\cdot(2^{2\cdot k}-2^{2\cdot k-1}\cdot 3+2^{2\cdot k-2}\cdot 3^2-\ldots-2\cdot 3^{2\cdot k-1}+3^{2\cdot k})\equiv$$

$\equiv 5\cdot(2^{2\cdot k}\cdot(2\cdot k+1))\ (\bmod 5)$

It remains to prove that integer *P*,

$P=2\cdot k+1+(2\cdot k+1)\cdot 2^{2\cdot k}=(2\cdot k+1)\cdot(1+4^{k})$, is not always divisible by 5. For instance, when *k = 4.*

However, with odd k or with $(2\cdot k+1)\vdots 5$, we have:

$$N=1+2^{n}+3^{n}+4^{n}=((1+4^{2\cdot k+1})+(2^{2\cdot k+1}+3^{2\cdot k+1}))\vdots 25 \qquad (11)$$

It follows from (10)-(11) that $N=1+2^{n}+3^{n}+4^{n}$ can terminate with two zeroes.

It takes place every time when $k=\dfrac{5\cdot z-1}{2},\ z\in N$ or when *k* is odd.

The last statement permits to ascertain that the idea and the solution as a whole is found for the new problem:

3) New problem No. 2*

Solve the equation jn integers: $1+2^{n}+3^{n}+4^{n}=10^{z}\cdot t$

4) New problem No. 2**

Find at least three solutions to the integer equation:

$$1+2^{n}+3^{n}+4^{n}+\ldots+p^{n}=\frac{1+p}{2}\cdot p\cdot x,\quad n,x,p-\text{int}\,egers.$$

Hint: prove that the equation left-hand side is divided by $1+2+3+\ldots+p$ with odd *n.*

Development of intellectual endurance in an individual.

I.F.Sharygin has substantiated the essential necessity of using super-complicated problems and exercises in training schoolchildren. "We must constantly work at limiting and even over-limiting heights. Long and intensive work over a sufficiently hard problem and subsequent (both in case of success and in failure) investigation of the solution are more beneficial than tens of one-step and stereotype examples".[6, p.3]

Our practical work, remarks of our colleagues, and corresponding observations conform that even purely technical training skills are more efficient when they are taught through the attractive material.

We can note that when the problem complexity level exceeds conventional average school level then another problem is added to purely methodological ones, i.e. the pedagogical problem. Its essence - how can student's attention be retained on the problem under study for a sufficiently long period?

It is a well-known fact that many pupils have absolutely insufficient intellectual endurance for mathematical studies. Such students cannot cope with the proposed problem, firstly, not because of the lack of requisite mathematical faculties but because the corresponding personal qualities have not been developed to the proper extent. In such a student, the most valuable and essential feature is lost during the problem solution – the stage of search for a given problem solution.

We have questioned 75 pupils – graduates of the school highest level of education (5 points). Each of them was offered to recollect whether there was an event in their lives when:

a) they had to speculate over the problem offered by the teacher for above three hours?

b) they had to revert to the search of a definite problem solution for several days?

Only 8% of those questioned said that fact *a)* did occur in their learning experience. Four percent of students replied positively to question *b).* In doing this, two of the students could actually recollect and state the problem essence.

Thus we see that the Olympiad problems possess huge potentials for the efficient training students in research skills, for the upgrading of their mathematical training, for the formation of positive character features in them.

Such problems have deep and positive impressing effect of the developing personality, as well. They bear the powerful charge of reckless, competitive energy and attraction. This last statement seems to us very promising for the conduct of further profound research.

1. Agakhanov, N., Kuptsov, L., Nesterenko, Y. Mathematical Olympiads for Schoolchildren, Moscow, Prosveshcheniye, 1997.
2. Eisenberg, T. On Building Self-Confidence in Mathematics. «Teaching Mathematics and its applications», 1991. – Volume 10 No. 4, pp.154-160.
3. Leman, A..Collection of problems of the Moscow mathematical Olympiads, Moscow, Prosveshcheniye, 1965.
4. Olympiads Zota. Rehovot. – Israel, 2000.
5. Polya, G. Mathematical Discovery. – John Wiley & Sons, INC., New York – London, 1965.
6. Sharygin, I. Optional Course in Mathematics.-Moscow, Prosveshcheniye, 1991.
7. Ufnarovski, V. Mathematical Aquarium. – «Stiinca»,1987.

Резюме. В статье обсуждается проблема обучения школьников навыкам научно-исследовательской деятельности. Дидактическим содержанием для решения данной проблемы избраны некоторые виды олимпиадных задач. Обоснована целесообразность данного выбора. Объяснение сопровождается комментариями и примерами из педагогической практики.

Резюме. У статті обговорюється проблема навчання школярів навичкам науково-дослідної діяльності. Дидактичним змістом для рішення даної проблеми обрані деякі види олімпіадних задач, обгрунтована доцільність даного вибору. Пояснення супроводжується коментаріями та прикладами з педагогічної практики.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ И ШКОЛЬНИКОВ – II

М.З.Двейрин, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Донецкий национальный университет

Введение

Ознакомление учащихся общеобразовательной школы с элементами математического моделирования очень важно для формирования у них правильного представления о роли математики в развитии других наук. Помимо этого, математическое моделирование связывает их знания в области математики, других школьных предметов и возможности компьютера в единое мощное средство решения практических задач, способствует реализации прикладной направленности школьного курса математики. В настоящее время ознакомление с математическим моделированием предусматривается программой в специализированных школах и классах с углубленным изучением математики. Однако изучение элементов математического моделирования в школе затруднено ввиду отсутствия хорошей литературы по этой теме. Настоящая статья представляет собой попытку в какой-то степени восполнить этот пробел. Ее следует рассматривать как продолжение предыдущей статьи автора [1] с таким же названием.

Как меньше промокнуть во время дождя?

Представим себе, что, встав утром, быстро собравшись на занятия и выйдя на улицу, Вы вдруг обнаружили, что идет дождь, довольно холодный и неприятный. Как быть? Мокнуть под дождем, естественно, не хочется, но и опоздать, а тем более пропустить любимый предмет – тоже. Мог бы помочь зонт, но недавно Вы выручили в подобной ситуации своего товарища, и зонт к Вам еще не вернулся. И вот перед Вами встала задача – как попасть в родную школу (для тех, кто постарше – университет и т.п.), промокнув при этом как можно меньше? Возникает мысль – подождать, пока дождь прекратится или заметно ослабеет. Однако непродолжительное наблюдение (а долгое Вы не можете себе позволить – некогда!) показывает, что дождь не собирается ни прекращаться, ни стихать. Экстравагантные решения – идти вместе с девушкой, у которой есть зонт или накрыться учебником (как и многие, еще более оригинальные, пришедшие в Вашу голову) мы также отбросим. Что же остается? Что еще Вы можете сделать, чтобы меньше промокнуть? Правильно, Вы еще можете побежать как можно быстрее! Если Вы не математик, то, скорее всего, Вы удовлетворитесь найденным решением. Математик тоже вряд ли станет долго рассуждать под дождем, но затем непременно задумается – верно ли, что чем быстрее будешь бежать, тем меньше промокнешь? Очевидно, что если скорость движения очень мала, то Вы промокнете так, как будто Вы просто стоите под дождем. Если же Вы движетесь достаточно быстро, то промокнете меньше. Но, может быть, есть некоторая наилучшая (оптимальная) скорость движения? Чтобы ответить на этот вопрос, попытаемся, как и в предыдущем разделе, перевести задачу на язык математики (построить математическую модель).

Прежде всего, нам нужно найти критерий, с помощью которого мы сможем судить, какая скорость движения лучше, а какая – хуже. Естественно в качестве такого критерия взять количество воды (обозначим его N), которое попадет на Вас на всем пути движения. После этого выбор оптимальной скорости движения равносилен решению сугубо математической задачи – найти такую скорость передвижения, при которой N, как функция от скорости, примет наименьшее значение. Для этого нам нужно найти явное выражение для зависимости количества воды N от скорости движения v. И хотя сейчас трудно представить, что это вообще возможно, мы все же попытаемся это сделать. Сначала давайте поймем, от чего зависит N. Все факторы, влияющие на то, как сильно Вы промокнете, естественно разбить на несколько групп:

- параметры пути;
- параметры дождя;
- Ваши параметры (параметры человека).

Параметры пути, влияющие на величину N очевидны, – это его протяженность L и форма. Параметры дождя – это направление, скорость движения капель, а также его интенсивность. Направление движения и скорость полета капель можно охарактеризовать вектором скорости капель $\vec{u}$. Однако наш опыт свидетельствует, вектор скорости капель еще не определяет то, насколько сильным является дождь. Нужно еще учесть, как часто падают капли и как они велики. Оказывается, это можно охарактеризовать, введя всего один параметр! Положим ρ – количество воды в 1 м^3 воздуха во время дождя. Теперь, зная скорость $\vec{u}$, с которой эта вода падает, мы можем судить, какое количество воды попадет на данную поверхность за известное время. Параметры человека должны отражать его габариты, т.к. очевидно, что чем человек больше, тем больше капель на него падает при прочих одинаковых условиях. Прежде чем решить, как это описать математически, введем некоторые предположения, которые упростят нашу задачу:

- на Вашем пути нет поворотов, т.е. это отрезок прямой;
- расстояние L, которое предстоит пройти, не очень велико;
- дождь идет с постоянной интенсивностью;
- капли дождя падают в той же вертикальной плоскости, в которой Вы движетесь;
- ветер дует с постоянной скоростью.

Из того, что все условия не изменяются во времени, следует, что оптимальная скорость движения тоже постоянна, т.е. нам предстоит найти не неизвестную функцию, а неизвестное число, что гораздо проще. Кроме того, из предположений о том, что путь представляет собой прямую и дождь идет в плоскости движения следует, что дождь поливает идущего спереди и сверху или сзади и сверху, но не сбоку. Но очевидно, что количество воды, падающей сверху на идущего, должно быть прямо пропорционально площади его проекции $S_г$ на горизонтальную плоскость и не должно существенно зависеть от формы этой проекции. Аналогично количество воды, попадающей на идущего спереди или сзади, прямо пропорционально площади его проекции $S_{\text{п}}$ «вид спереди». Поэтому с точки зрения количества воды, которое попадет на человека, идущего под дождем, его можно считать имеющим форму прямоугольного параллелепипеда с площадью основания $S_{\text{г}}$ и площадью передней грани $S_{\text{п}}$.

Математическое соотношение составим на основе закона сохранения – количество воды, попавшей на идущего (теперь это движущийся параллелепипед), есть сумма количества воды, попавшей на верхнее основание и попавшей на переднюю (заднюю) боковую грань:

$$N = N_{\text{г}} + N_{\text{п}}.$$

Теперь нам предстоит выяснить характер зависимости слагаемых в правой части равенства от введенных нами параметров. С этой целью введем систему координат, которую выберем плоской. Это возможно благодаря нашему предположению о том, что путь прямолинеен и дождь идет в плоскости движения (см. рис. 1).

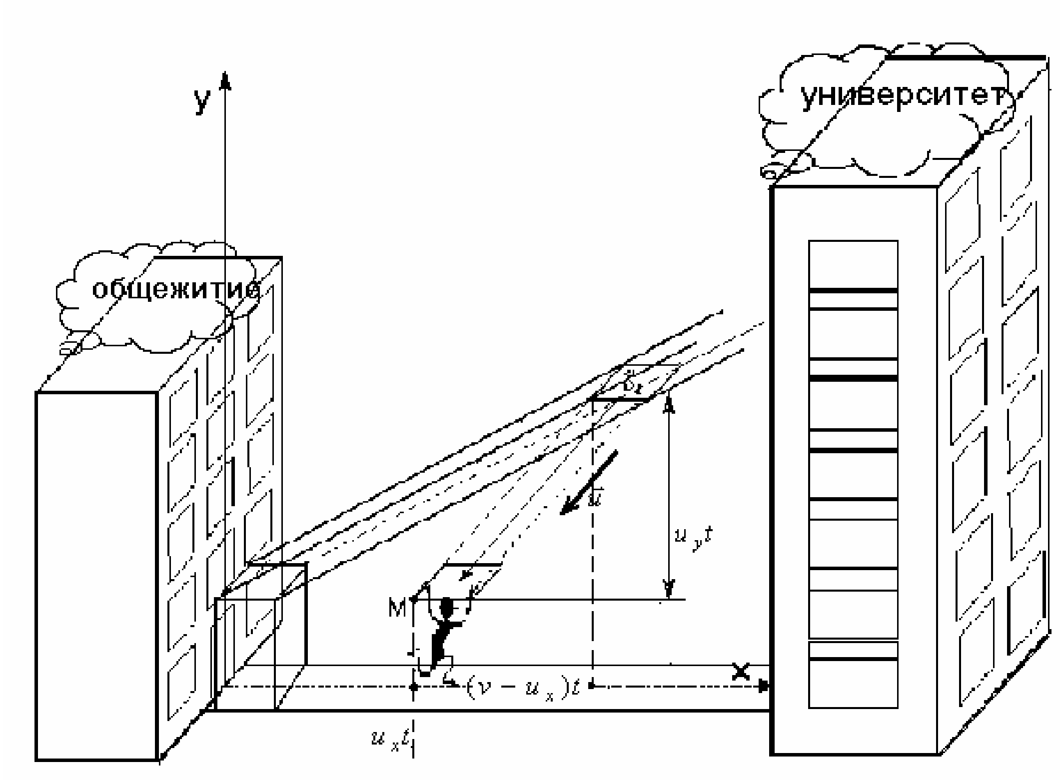


Рис. 1

Из предположения о том, что дождь идет в плоскости движения следует также, что вектор $\vec{u}$ можно представить в виде $\vec{u} = (u_x,\ u_y)$, где u_x – скорость движения капли в направлении оси OX, u_y – вертикальная составляющая скорости падения капли (удобно считать ее положительной, хотя ось OY и направлена вверх). Займемся вначале выражением для $N_{\text{г}}$. Проследим путь капли, падающей через время t (будем считать $t \le L/v$) от момента выхода на улицу в точку M на горизонтальной грани параллелепипеда. За это время капля пролетит по вертикали расстояние $y = u_y t$ и опустится в точку M с абсциссой $x_M = vt$, пролетев по горизонтали расстояние $-u_x t$ (скорость u_x в нашем случае отрицательна). Следовательно, в начальный момент абсцисса капли была $x = (v - u_x)t$. Из соотношений $x = (v - u_x)t$, $y = u_y t$, исключив t, получим $y = \dfrac{u_y}{v - u_x} x$. Это значит, что все капли, которые упадут в точку M, в начальный момент лежат на отрезке прямой с концами в точках (0, 0) и $((v - u_x)\dfrac{L}{v},\ u_y \dfrac{L}{v})$, отвечающих $t = 0$ и $t = \dfrac{L}{v}$. Понятно, что капли, которые опустятся в другие точки верхней грани, лежат на параллельных отрезках такой же длины. Эти отрезки в совокупности образуют наклонный параллелепипед с основанием $S_{\text{г}}$, высотой $u_y \dfrac{L}{v}$ и объемом $V_1 = S_{\text{г}} u_y \dfrac{L}{v}$. Следовательно, $N_{\text{г}}$ равно количеству воды в параллелепипеде и его можно подсчитать так:

$$N_{\text{г}} = \rho V_1 = \rho S_{\text{г}} u_y \frac{L}{v}. \qquad (1)$$

Аналогично все капли, которые попадут на переднюю грань, в момент выхода под дождь расположены в наклонном параллелепипеде с основаниями площадью $S_{\text{п}}$ и высотой $(v-u_x)\dfrac{L}{v}$ (см. рис. 2).

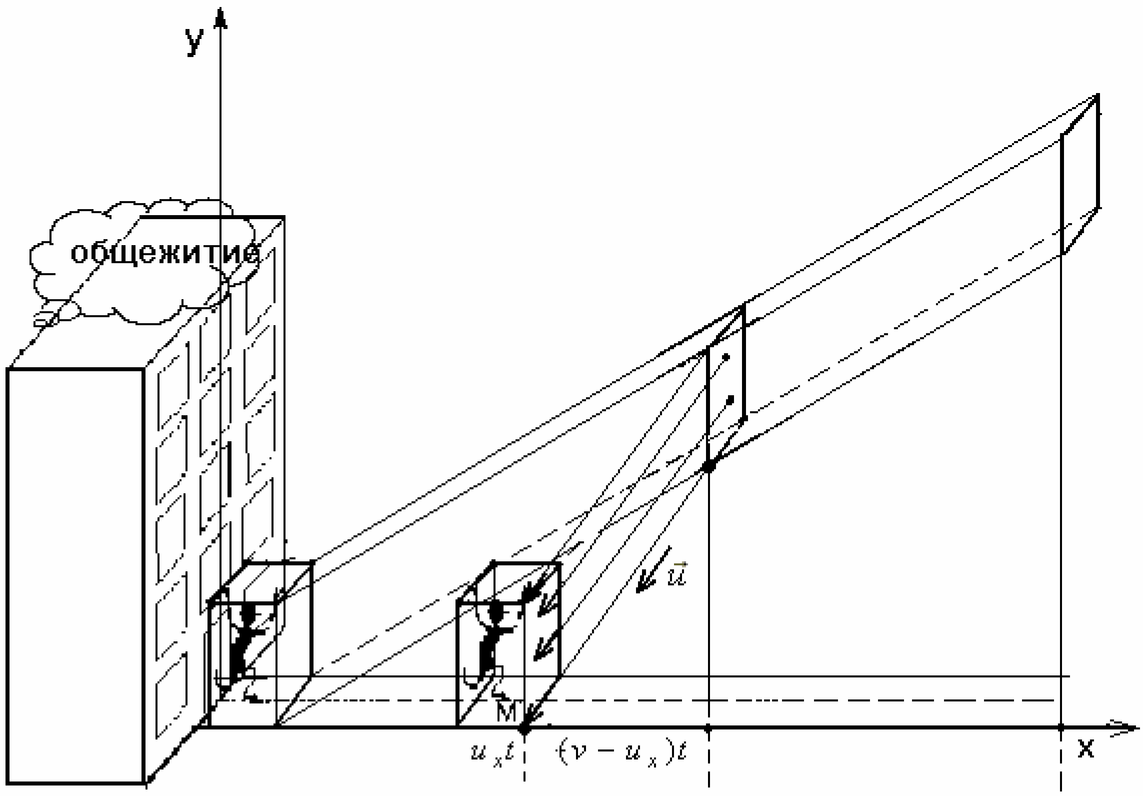


Рис. 2

Поэтому:

$$N_{\text{п}} = \rho\, V_2 = \rho S_{\text{п}}(v-u_x)\frac{L}{v}. \qquad (2)$$

Если же дождь идет в спину, что возможно лишь при $u_x > v$, то, рассуждая подобным образом, получим

$$N_{\text{п}} = \rho S_{\text{п}}(u_x - v)\frac{L}{v}. \qquad (3)$$

Соотношения (2) и (3) можно записать одной формулой

$$N_{\text{п}} = \rho S_{\text{п}}\left|u_x - v\right|\frac{L}{v}. \qquad (4)$$

Тогда, $$N = \rho S_{\text{г}} u_y \frac{L}{v} + \rho S_{\text{п}} |u_x - v| \frac{L}{v} = \rho \frac{L}{v} (S_{\text{г}} u_y + S_{\text{п}} |u_x - v|). \qquad (5)$$

У нас появилась характеристика, с помощью которой мы можем судить, какая скорость движения предпочтительней. Однако не всякая скорость движения достижима для человека, к тому же движение в противоположном направлении лишено смысла. На математическом языке это означает, что должны выполняться условия $v \le v_{\max}$ и $v > 0$, где $v_{\max}$ – наибольшая скорость, которую способен развить данный человек. Теперь выбор оптимальной скорости движения равносилен решению следующей математической задачи:

Найти значение v, при котором функция $N(v)$ ***принимает наибольшее значение при дополнительном условии*** $\boldsymbol{v \in (0, v_{\max}]}$**.** (6) Сформулированная задача и представляет собой математическую модель выбора оптимальной скорости движения человека под дождем. Для ее практического использования необходимо **идентифицировать параметры модели** ρ, $S_{\text{г}}$, $S_{\text{п}}$, u_x, u_y, L. Это трудоемкий процесс, требующий разработки соответствующей методики, проведения многочисленных экспериментов и обработки их результатов. Поэтому **очень важно уменьшить количество параметров, которые следует идентифицировать. Мы проведем исследование математической модели с целью ее упрощения**. Прежде всего заметим, что функции $f(v)$ и $cf(v)$, отличающиеся постоянным положительным множителем c, принимают наименьшее значение в одной и той же точке. Это позволяет в полученной математической модели заменить функцию

$$N(v) = \rho \frac{L}{v} (S_{\text{г}} u_y + S_{\text{п}} |u_x - v|)$$

функцией $N_1(v) = (S_{\text{г}} u_y + S_{\text{п}} |u_x - v|)/v$, не зависящей от ρ и L, быстрое определение которых (особенно ρ) сложно и ограничило бы возможности применения построенной модели. Однако определение четырех оставшихся параметров тоже затруднительно. Два из них – проекции вектора $\vec{u}$ – зависят только от погоды и одинаковы для всех, попавших под этот дождь. Их можно попытаться получить у метеорологов. А вот площади $S_г$ и $S_п$ у каждого человека свои и необходимость их измерения во время дождя делает использование модели практически невозможным. Попытаемся преодолеть эту проблему следующим путем. Представим $N_1(v)$ в виде $N_1(v) = S_п\ (K\ u_y + |u_x - v|)/v$, где $K = S_г/ S_п$. Мы можем заменить $N_1(v)$ на функцию $N_2(v) = (K\ u_y + |u_x - v|)/v$, отличающуюся лишь положительным множителем. У нас стало еще на один параметр меньше! К тому же новый параметр K для разных людей различается незначительно. Соотношение $S_г/ S_п$ зависит, главным образом, от типа анатомического сложения (астенический, нормальный, гиперстенический). Если предварительно найти средние значения K отдельно для каждого типа сложения, причем отдельно для мужчин и женщин, то при применении модели достаточно будет выбрать соответствующее значение из таблицы, содержащей всего 6 чисел.

В результате **исследования модели математическими методами** она упростилась и приняла следующий вид:

Найти значение v, при котором функция $N_2(v) = (K\ u_y + |u_x - v|)/v$ ***принимает наибольшее значение при дополнительном условии***

$$\boldsymbol{v \in (0,\ v_{\max}]}. \qquad (7)$$

Пришло время подумать о том, как решать полученную задачу – разработать алгоритм получения требуемой информации с помощью математической модели. Школьный опыт подталкивает к исследованию функции $N_2(v)$ на экстремум с помощью производной. Однако этот способ не слишком хорош из-за неудобств, связанных с необходимостью дифференцировать модуль, присутствующий в выражении $N_2(v)$. Мы предложим другой путь, обычно осуждаемый недавно познавшими дифференциальное исчисление – построить график $N_2(v)$ по точкам и выбрать среди них точку с наименьшим значением. Главный недостаток такого пути, состоящий в том, что мы не знаем, как ведет себя функция между известными точками графика в данном случае нас не беспокоит, поскольку график нашей функции составлен из дуг двух гипербол:

– при $v < u_x$ $\qquad N_2(v) = \dfrac{Ku_y + u_x}{v} - 1,$

– при $v > u_x$ $\qquad N_2(v) = \dfrac{Ku_y - u_x}{v} + 1,$

свойства которых, в частности монотонность, нам хорошо знакомы. Нетрудно составить программу для компьютера (Обязательно сделайте это! Вы столкнетесь с некоторыми новыми для себя ситуациями. Кстати, при v близких к нулю, Вас ждут прерывания – как быть с этим?), которая вежливо попросит нас ввести K, u_x, u_y, построит на экране график $N_2(v)$ по нескольким сотням точек (компьютеру это нетрудно, да и кривая получится более плавной) и подскажет наилучшую скорость передвижения. Примерный результат приведен на рис. 3.

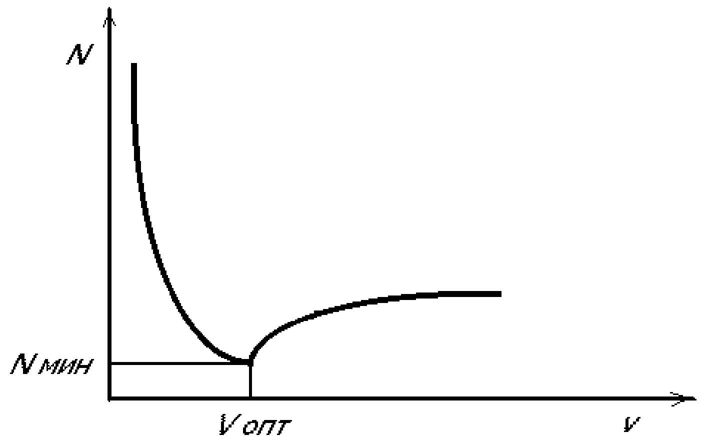


Рис. 3

Вопросы и задания для самостоятельной работы:

1. Придумайте другую характеристику, позволяющую судить об оптимальности скорости движения.

2. Найдите вид функции $N(v)$ в случае, когда координата u_x вектора $\vec{u}$ положительна и $v > u_x$.

3. На какие грани движущегося параллелепипеда будет попадать вода в случае, когда координата u_x вектора $\vec{u}$ положительна и $v < u_x$? Найдите вид функции $N(v)$ в этом случае.

4. Найдите вид функции $N(v)$ в случае, когда вектор $\vec{u}$ не параллелен плоскости, в которой происходит движение (т.е. капли дождя попадают на идущего еще и сбоку).

1. Двейрин М.З. Элементы математического моделирования для будущих учителей и школьников/ Дидактика математики: проблемы и исследования: Международный сборник научных работ. – Вып. 14. – Донецк: ТЕАН, 2000. – С. 100-111.

Резюме. Викладено фрагмент (друга лекція) посібника з елементів математичного моделювання для школярів і студентів, що готуються стати викладачами математики у школі. Матеріал призначений для використання у першу чергу, на заняттях гуртків та факультативів. Плануються подальші публікації.

Summary. This article deals some materials for school education in mathematical modeling.

КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

Д.М.Лила, асистент,
Черкаський державний університет ім. Б. Хмельницького

В основі розв’язування прикладних задач, в тому числі й фізичних, за допомогою диференціальних рівнянь лежить загальна **ідея лінеаризації** – заміни розглядуваних функцій на малих проміжках зміни аргументу лінійними функціями. “Лінійність процесу в малому” дозволяє, вважаючи швидкість зміни величин, які описують процес, постійною на протязі малого проміжка часу Δt, застосовувати до них відомі фізичні закони. Так одержують наближену рівність. Якщо ж розділити обидві її частини на Δt і перейти до границі, коли $\Delta t \to 0$, то отримаємо точну рівність, яка міститиме в собі похідну по часу деякої (шуканої) функції. Це один із способів побудови диференціальної моделі фізичної задачі.

Простіша конструкція моделі дозволяє скласти диференціальне рівняння відразу в диференціальній формі, замінюючи приріст Δt на диференціал dt, а приріст функції – відповідним диференціалом. Тоді при побудові диференціального рівняння ми робимо ніби “миттєвий знімок” процесу в даний момент часу, а при розв’язуванні рівняння за цими “миттєвими знімками” – відновлюємо його хід.

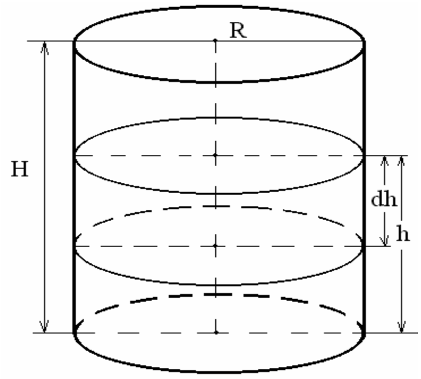
При паралельному застосуванні описаних прийомів розв’язування прикладної задачі внутрішні пружини процесу стануть для учнів видимими, а його опис – зрозумілим. Сама ж схема розв’язування збереже таку послідовність логічно завершених етапів: 1) підготовчий етап (встановлення змінних величин, відшукання відповідних фізичних законів, вибір незалежної змінної та її функції, визначення початкових і (або) крайових умов); 2) формалізація (побудова математичної моделі, фаза математизації задачі); 3) розв’язування математичної задачі всередині побудованої моделі; 4) інтерпретація одержаного математичного результату.

Покажемо один із можливих прикладів конструювання системи задач, що зводяться до диференціальних рівнянь, яка, на нашу думку, передбачає широкі міжпредметні зв’язки, стимулювання дослідницької діяльності учнів, несе в собі елемент розвиваючого навчання.

За основу цієї системи взято відому задачу про витікання рідини через невеликий отвір у дні посудини. Використовуючи механічний зміст похідної, доцільно розглянути питання про швидкість зниження рівня рідини в посудині, а значить, зорієнтувати учнів на складання диференціального рівняння для відшукання залежності висоти стовпа рідини над отвором від часу.

Задача 1. В дні циліндричного бака висотою H і радіусом основи R, наповненого водою, зроблено невеликий круглий отвір площею S (мал. 1). Знайти закон зміни рівня води в баці в залежності від часу та час, за який витече вся вода, якщо третина води витікає за час t_1.

Підготовчий етап. Якщо б витікання води було рівномірним, то розв'язання задачі було б коротким – зміна рівня води прямо пропорційна часу; вся вода витікає за $3t_1$ с. Однак, спостереження показують, що спочатку вода витікає швидше, а потім – повільніше в залежності від рівня води, що знижується. Тому виберемо час t за незалежну змінну, а рівень води $h(t)$ – залежною змінною від часу. Початкові умови: при $t = 0$ $h(0) = H$. Крайові умови: при $t = t_1$ $h(t_1) = \frac{2}{3}H$.



Мал.1

При описі процесу необхідно врахувати залежність між швидкістю витікання v і висотою h стовпа рідини над отвором. Як показав італійський фізик Торрічеллі, ця швидкість виражається формулою $v = \sqrt{2gh}$ або з урахуванням в'язкості $v = k\sqrt{2gh}$, де $g = 9{,}8\frac{м}{с^2}$ – прискорення вільного падіння, а k – "безрозмірний" коефіцієнт (для води $k \approx 0{,}6$).

Фаза математизації передбачає два способи ведення міркувань (простіший і складніший). *Складніші міркування*: візьмемо проміжок часу Δt від t до $t + \Delta t$; нехай в момент часу t висота стовпа води була $h(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$ стала рівною $h + \Delta h$, де Δh – "приріст висоти", $\Delta h < 0$ (рівень понизився). Об'єм води, що витікає протягом часу спостереження з бака, дорівнює об'єму циліндра висотою $-\Delta h$ і площею основи πR^2, тобто $\Delta V = -\pi R^2 \Delta h$. Ця вода вилилась у вигляді циліндричної трубки, що має площу основи S, а висота її дорівнює шляху, який проходить "нижня основа”, захоплюючи за собою всі наступні, за час Δt. В момент часу t швидкість води дорівнювала $k\sqrt{2gh}$, а в момент часу $t+\Delta t$ – $k\sqrt{2g(h+\Delta h)}$. Якщо Δt мале, то Δh теж мале, і тому ці значення швидкості майже не відрізняються, а значить шлях тих частинок води, які перші покинули отвір, пройдений за час Δt виражається формулою $(k\sqrt{2gh}+\alpha)\Delta t$, де $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha = 0$. Отже, об’єм води, що вилилась в циліндричну трубку, обчислюється так: $\Delta V = (k\sqrt{2gh}+\alpha)S\Delta t$. Прирівнявши два одержані вирази для одного і того ж самого об’єму води, маємо рівняння :

$$-\pi R^2 \Delta h = \left(k\sqrt{2gh}+\alpha\right)S\Delta t. \qquad (1)$$

Поділивши обидві частини рівності (1) на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, матимемо, в зв’язку з тим, що $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha = 0$ і $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = h' = \dfrac{dh}{dt}$, диференціальне рівняння:

$$-\pi R^2 \frac{dh}{dt} = k\sqrt{2gh}S. \qquad (2)$$

Простіший спосіб міркувань: зробимо “миттєвий знімок ” процесу витікання води на протязі нескінченно малого проміжку часу dt, якому відповідає нескінченно мала зміна висоти рівня води dh, не зафіксувавши при цьому жодних змін швидкості її витікання. Прирівнюючи два вирази для об’єму води, що встигла витекти, зразу одержимо диференціальне рівняння в диференціальній формі:

$$-\pi R^2 dh = k\sqrt{2gh}Sdt. \qquad (3)$$

Розв’язування математичної задачі. Розв’язуємо диференціальне рівняння (2) або (3). Відокремлюючи змінні, запишемо:

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{k\sqrt{2g}S}{\pi R^2}dt. (4)$$

Інтегруємо (позначили $\dfrac{k\sqrt{2g}S}{\pi R^2} = A$): $\qquad 2\sqrt{h} = -(At+C),$

$$h = \left(\frac{At+C}{2}\right)^2 \qquad (5)$$

або

$$t = -\frac{2\sqrt{h}+C}{A}. \qquad (6)$$

Стала A залежить від розмірів і форми отвору, в'язкості рідини і інших фізичних параметрів, а C – стала інтегрування. Визначаємо обидві сталі, виходячи з початкових та крайових умов. Для цього підставляємо в (6) $t=0, h=H$ і одержуємо $C=-2\sqrt{H}$. Уточнюємо залежність: $t=\dfrac{2(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{A}$.

Підставляємо в цю рівність $t=t_1, h=\dfrac{2}{3}H$, щоб знайти A. Маємо:

$$A=\frac{2\sqrt{H}\left(1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)}{t_1}, \tag{7}$$

а час повного витікання води з бака (при $h=0$):

$$t=3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right). \tag{8}$$

Інтерпретація результату. Звичайно, формули (5), (6) не є точними, бо не враховано при розв'язуванні задачі на витікання рідини ні явища капілярності, ні завихрення в потоці, ні інших факторів (модель дає наближення першого порядку), але таке наближення все ж точніше, ніж отримане в припущенні сталості швидкості витікання.

Підставивши в (7) $A=\dfrac{k\sqrt{2g}S}{\pi R^2}$, виразимо t_1, а потім на основі (8) запишемо формулу для t: $t=\dfrac{2\pi R^2\sqrt{H}}{kS\sqrt{2g}}$. Розмірність виразу, яким подається час витікання, $\dfrac{L^2\sqrt{L}}{L^2\sqrt{\dfrac{L}{T^2}}}=T$ співпадає з розмірністю часу. Отже, дану задачу розв'язано, і тепер розглянемо цикл задач цього ж змісту.

Задача 2. Вода, яка заповнює резервуар даної форми та даних розмірів, витікає через малий круглий отвір площею S у дні. Коефіцієнт витікання k дорівнює $0{,}6$. Встановити залежність рівня води x від часу і обрахувати час її повного витікання.

Форму резервуара будемо змінювати від “простої” до “складної” (зміна форми вільної поверхні рідини, вибір способу знаходження її площі та інтегрування відповідного диференціального рівняння, аналіз фізичного результату, пошук оптимальних умов протікання процесу), маючи за мету реалізацію елементів проблемно-евристичного методу навчання.

1) Резервуар має форму прямокутного паралелепіпеда $a \times b \times H$.

$-\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{2g}Sk}{ab}dt$ – диференціальне рівняння, яким моделюємо задачу,

$x = \left(\sqrt{H} - \dfrac{\sqrt{g}Sk}{\sqrt{2}ab}t\right)^2$ – його частинний розв’язок, $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} \cdot \dfrac{ab}{Sk}$ – час повного витікання.

2) Резервуар має форму кругового циліндра R, H (мал.1).

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{\pi R^2}{Sk}. \tag{9}$$

3) Такий же резервуар, але розташований горизонтально.

$\sqrt{2R - x}dx = \dfrac{\sqrt{g}Sk}{\sqrt{2}H}dt$; $\quad x = 2R - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9gS^2k^2}{H^2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$; $\quad t = \dfrac{8R^{\frac{3}{2}}H}{3\sqrt{g}Sk} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2R}{g}} \cdot \dfrac{4RH}{3Sk}$.

4) Резервуар утворено з попереднього осьовим перерізом.

$x = 2R - \left(R^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3\sqrt{2g}Sk}{4H}t\right)^{\frac{2}{3}}$; $\quad t = \sqrt{\dfrac{2R}{g}} \cdot \dfrac{2RH\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)}{3Sk}$.

5) Резервуар – півсфера радіусом R.

$\left(x^{\frac{3}{2}} - 2Rx^{\frac{1}{2}}\right)dx = \dfrac{\sqrt{2g}Sk}{\pi}dt$; $\quad t = \sqrt{\dfrac{2R}{g}} \cdot \dfrac{7\pi R^2}{15Sk}$.

6) а) Резервуар – зрізаний круговий конус R, r, H (R – радіус більшої основи, на якій стоїть резервуар, r – радіус меншої основи, H – висота).

$-\left(\dfrac{R}{x^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{R - r}{H}x^{\frac{3}{4}}\right)^2 dx = \dfrac{\sqrt{2g}Sk}{\pi}dt$; $\quad t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} \cdot \dfrac{\pi\left(8R^2 + 4Rr + 3r^2\right)}{15Sk}$.

б) Конічний резервуар, утворений з попереднього ($r = 0$). $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{8\pi R^2}{15Sk}$.

в) Змінене положення резервуара із задачі 6а).

$$\left(\frac{r^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(R-r)r}{H}x^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{R-r}{H}\right)^2 x^{\frac{3}{2}}\right)dx = -\frac{\sqrt{2g}Sk}{\pi}dt\,; \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{\pi\left(3R^2 + 4Rr + 8r^2\right)}{15Sk}.$$

г) Лійкоподібний резервуар ($r = 0$).

$$x = \left(H^{\frac{5}{2}} - \frac{5\sqrt{2g}H^2 Sk}{2\pi R^2}t\right)^{\frac{2}{5}}; \qquad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{\pi R^2}{5Sk}.$$

7) Резервуар у формі горизонтального еліптичного циліндра з півосями a та b і твірною H (b – вертикальна піввісь).

$$-\sqrt{2b-x}\,dx = \frac{\sqrt{2g}Skb}{2aH}dt\,; \quad x = 2b - \frac{1}{2}\left(\frac{9gS^2k^2b^2}{a^2H^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}; \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2b}{g}} \cdot \frac{4aH}{3Sk}.$$

8) Резервуар – зрізаний еліпсоїд обертання висотою H, радіусом найбільшого колового перерізу R і радіусом основ r.

$$-\left(\frac{r^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4\left(R^2 - r^2\right)}{H}x^{\frac{1}{2}} - \frac{4\left(R^2 - r^2\right)}{H^2}x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{\sqrt{2g}Sk}{\pi}dt\,; \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{\pi\left(8R^2 + 7r^2\right)}{15Sk}.$$

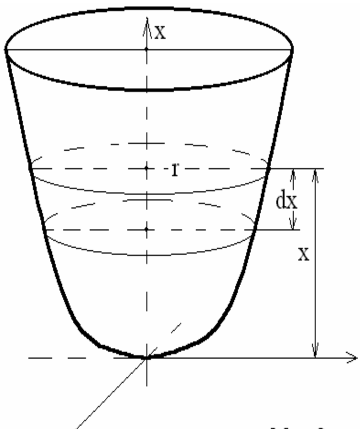
Для порівняння часу витікання води з цих резервуарів, виразимо всі параметри посудин через фіксовані висоту H_0 і об'єм V_0 та проведемо обчислення із запропонованими даними: $S = 10^{-3}\,м^2, V_0 = 1{,}9м^3, H_0 = 1м$.

Час витікання води з резервуарів, що мають форму прямокутного паралелепіпеда та кругового циліндра (задачі 1 та 2), дорівнює 1431 с, горизонтальних кругового та еліптичного циліндрів (3 та 7) – 1214 с, горизонтального кругового півциліндра (4) – 1110 с, півсферичної посудини (5) - 1104 с. Оптимальні ж умови витікання води створюються в лійкоподібній посудині (6г) – мінімальний час (858 с) та обернутій вершиною вгору (6б) – максимальний час (2289 с).

Для повноти системи задач, об'єднаних спільною ідеєю, доцільно розглянути у процесі навчання ще дві задачі, перша з яких ілюструє зв'язок між фізичним змістом та геометрією, а друга – властивостями поверхневого шару та механікою рідини.

Задача 3. Знайти форму посудини, в якій рівень води знижується з сталою швидкістю, якщо вода витікає з посудини через малий круглий отвір площею S у дні.

Ми мали рівняння $dt = -\frac{S(x)}{kS\sqrt{2gx}}dx$ (де через $S(x)$ позначено площу вільної поверхні води), яке описувало процес витікання води з довільного резервуара (задача 2). Виразимо з нього x, поклавши $\frac{dx}{dt} = v_x = a$ і вважаючи резервуар поверхнею обертання, так що $S(x) = \pi r^2$ (мал. 2). Отримуємо: $\sqrt{x} = -\frac{\pi r^2}{kS\sqrt{2g}}a$ або



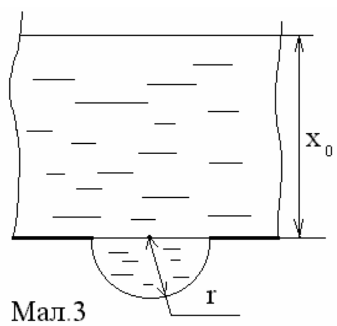
Мал.2

$$x = Cr^4, \qquad (10)$$

де $C = \frac{\pi^2 a^2}{2gk^2S^2}$. Рівність (10) означає, що форма поверхні посудини, яка забезпечує постійну швидкість витікання води, утворена обертанням кривої (10) навколо осі x.

Задача 4. Вода витікає з вертикального циліндричного бака висотою H і радіусом основи R через невеликий круглий отвір площею S у дні. Встановити залежність рівня води від часу і знайти час її витікання, враховуючи явище капілярності. Коефіцієнт витікання k.

Спочатку вияснимо, як впливають сили поверхневого натягу води на швидкість її витікання. Для цього проаналізуємо стан процесу, при якому воно припиняється (мал.3), прирівнявши гідростатичний тиск стовпа води висотою x_0 і тиск, зумовлений кривизною поверхні води в отворі: $\rho g x_0 = \frac{2\sigma}{r}$, де ρ – густина



Мал.3

води, σ – коефіцієнт її поверхневого натягу, r – радіус кривизни (вважатимемо його рівним радіусу отвору, тобто $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$). Звідси $x_0=\dfrac{2\sigma}{\rho gr}$, а умова припинення витікання $x=x_0$. Швидкість витікання води визначається з рівняння Бернуллі, яке в нашому випадку має вигляд

$$\rho gx=\frac{\rho v^2}{2}+\frac{2\sigma}{r}. \tag{11}$$

З нього випливає, що $v=\sqrt{2gx-\dfrac{4\sigma}{\rho r}}$ або $v=\sqrt{2gx-2gx_0}$. Записуємо диференціальне рівняння: $-\pi R^2dx=\sqrt{2gx-2gx_0}Skdt$ або

$$-\frac{dx}{\sqrt{2gx-2gx_0}}=\frac{Sk}{\pi R^2}dt\ , \tag{12}$$

розв'язком якого є залежність

$$x=x_0+\left(\sqrt{H-x_0}-\frac{\sqrt{g}Sk}{\sqrt{2}\pi R^2}t\right)^2. \tag{13}$$

Тривалість витікання води визначимо, підставивши в (13) замість x значення $x_0=\dfrac{2\sigma}{\rho gr}=\dfrac{2\sigma\sqrt{\pi}}{\rho g\sqrt{S}}$. Маємо :

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}-\frac{4\sigma\sqrt{\pi}}{\rho g^2\sqrt{S}}}\cdot\frac{\pi R^2}{Sk}. \tag{14}$$

Останній результат варто порівняти з формулою (9). Це дасть можливість, добираючи величини S, R, H проаналізувати, як і за яких умов впливають капілярні явища на перебіг досліджуваного фізичного процесу.

Резюме. Делается попытка составления системы задач физического содержания для решения посредством дифференциальных уравнений, учитывающая эвристику в обучении.

Summary. An attempt is being made to compile a sums system of physical content meant for solution by means of differential equation, taking into consideration heuristics in teaching.

ТВОРЧА ДІЯЛЬНІСТЬ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ЛОГІЧНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Л.В.Ізотова, аспірантка,
Херсонський державний педагогічний університет

Сучасний погляд на математику як на специфічну інтелектуальну діяльність виводить на перший план у навчанні озброєння учнів методами і прийомами математичної діяльності, формування творчої особистості в процесі цієї діяльності.

Однією з актуальних проблем сучасної школи є розвиток логічного мислення учнів як одного з видів мислення.

Знання логіки забезпечує взаєморозуміння між учителем і учнями, допомагає розвитку творчого мислення останніх. Учитель, враховуючи пізнавальні можливості кожного учня, повинен навчити їх мислити логічно: виконувати умовивід без наочної опори, порівнювати міркування, перевіряючи їх правильність, узагальнювати та робити висновки.

Розвиток активності, самостійності, ініціативи, творчого відношення до справи – це вимоги самого життя, які визначають, у більшості, той напрям, у якому слід удосконалювати навчально-виховний процес.

Пошуки шляхів активізації пізнавальної діяльності учнів, їх розумової активності, особливо творчого компоненту їхнього мислення - задача, яку треба вирішувати педагогам, психологам, методистам та вчителям.

На нашу думку, одним із шляхів розв`язання цієї проблеми є впровадження системи завдань з логічним навантаженням (цікавих завдань) під час вивчення математики. Роль цих завдань полягає в активізації розумової діяльності учнів, вони сприяють виявленню у дітей активної думки, творчості. Тобто, це завдання, які вимагають від учнів уміння одержати самостійний висновок на основі спостережень, аналізу умов виконання того чи іншого завдання, вміння послідовно та логічно мислити, здогадуватись, розумово напружуватись, а значить – творчо розвиватись.

Пропонуємо виділити таку систему завдань і вправ:

1) вправи, спрямовані на формування основних розумових дій (аналізу, синтезу, порівняння та інших);

2) вправи на формування операцій математичної логіки (кон`юнкції, диз`юнкції, імплікації), використання логічних зв'язків і слів, побудова умовиводів;

3) комбінаторні задачі.

До першого виду вправ можна віднести ***вправи на порівняння***. Серед них: порівняння предметів із зазначенням подібності та відмінності, додавання недостаючих елементів, зоровий та розумовий аналіз різних предметів або об`єктів, вправи на пошук закономірностей, які несуть, крім того, у собі цілий ряд зорових операцій(аналіз і синтез, узагальнення).

Наприклад: порівняй два числа 16 і 61, два вирази 17+1 і 71+1.

Для того, щоб провести повне порівняння, учням необхідно відповісти на два питання: Чим схожі числа (вирази)? Чим відрізняються числа (вирази)? А потім зробити обгрунтований висновок.

Приклади міркування учня. Числа 16 і 61. Чим вони схожі? Обидва двоцифрові, в обох для запису числа використовуються дві однакові цифри 1 і 6.

Чим відрізняються? Позиційним значенням цифри: в числі 16 одиниця стоїть у розряді десятків, а в числі 61-у розряді одиниць, теж саме і з цифрою 6. У числі 16 – у розряді одиниць, у числі 61 – у розряді десятків. Тому 16<61, або 61>16.

До вправ, спрямованих на формування основних логічних операцій, належать ***вправи на класифікацію***.

Серед таких вправи на вміння давати словесну характеристику даному класу, поділяти об`єкти на класи за заданою основою, вибирати основу для класифікації, перевіряти результати виконаної класифікації.

Наприклад:

Поділи числа на дві групи: 15, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40.

У цій задачі учням необхідно розв`язати дві проблеми:

– вибрати основу для класифікації;

– розділити подані числа на дві групи у відповідності з основою класифікації.

Вчитель може підказати дітям вибір основи, тому що задачі на класифікацію є одними із складних і вимагають виконання кількох операцій. При сформованості цього вміння учні самі зможуть ділити об`єкти на класи. У даному випадку числа можуть бути поділені на дві групи:

1. Парні (24, 28, 30, 32, 36, 40) і непарні (15, 25, 35).

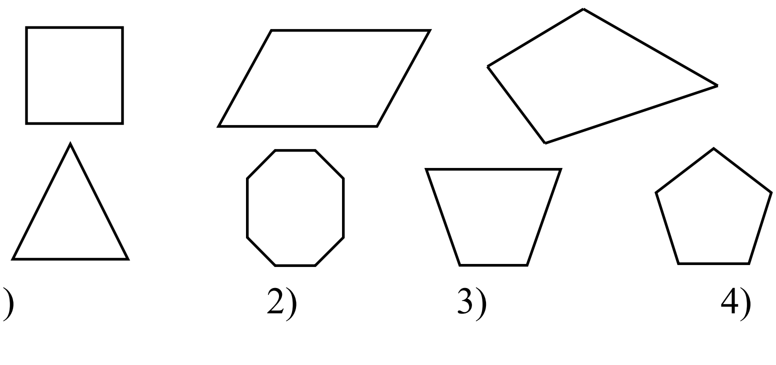
2. Числа, які діляться і не діляться на 5, і т.д.

Під час виконання цієї вправи треба слідкувати за тим, щоб кожне число належало тільки одній групі.

Серед вправ, які найбільш повно включають у собі різні логічні операції, можна виділити ***вправи на пошук закономірностей***. Розв'язування подібних завдань розвиває у дітей вміння узагальнювати за виділеною ознакою, порівнювати спільні ознаки одного роду з ознаками іншого, здійснювати пошук розв`язування задачі.

Завдання, які ми пропонуємо далі, формують вміння класифікувати математичні поняття, які задані в графічній формі. Процедура їх виконання така: розглядаючи об'єкти верхнього рядка, знаходимо їх спільну ознаку, потім відзначаємо в нижньому рядку той об'єкт, який також має ту саму ознаку, або виключаємо із даних об'єктів той, який не має спільної ознаки. Розв'язування подібних задач сприяє формуванню в учнів таких елементів творчої діяльності, як перенесення знань і вмінь у нову ситуацію, бачення нової проблеми у знайомій ситуації, структури об'єкта, альтернативи розв'язання.

Приклад. Подумайте, що об'єднує фігури верхнього ряду. Виберіть серед фігур нижнього ряду ту, яка до них підходить.



1) 2) 3) 4)

Вправи, спрямовані на формування операцій математичної логіки, складають другу групу завдань. Розуміння учнями суті логічних операцій, відповідних зв`язкам *і*, *або* важливо для розрізнення кон’юнктивно-диз’юнктивних зв`язків між ознаками понять. Заперечення є елементом багатьох міркувань, і багато помилок пов`язано з невмінням правильно виконувати заперечення.

Робота над виявленням логічних слів (кванторів) допомагає з’ясувати логічний зміст висловлення, правильне відношення між реченнями. Наприклад: задача з використанням операції заперечення та кванторів існування, спільності. Учням пропонується ряд логічних зворотів, істинність яких треба підтвердити. Для якого малюнка вірне висловлення:

1) у жодному будинку немає вікон;

2) не всі будиночки без вікон;

3) є будиночки не без вікон;

4) є будинок, який має вікна;

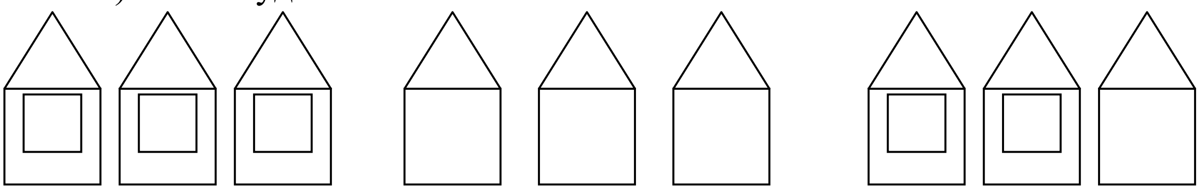
5) є будинок без вікон;

6) всі будинки без вікон;

7) немає будинків без вікон;

8) в кожному будинку є вікна;

9) не всі будинки мають вікна.



1 2 3

Щоб розв`язати цю задачу, учню необхідно не тільки проаналізувати кожен з малюнків (1-3), але й кожний будинок на кожному з малюнків і дійти до висновку, який співпадає з даним висловленням і малюнком. Причому міркування учня має бути приблизно таким:

1. Уважно читаю перше висловлення, визначаю для себе, що воно означає.

2. Аналізую перший малюнок, висновок - не підходить, тому що вже в першому будинку є вікно; другий малюнок: 1 будинок – не має вікна, 2, 3, – не має вікон, значить роблю висновок: дане висловлення відповідає мал.2, для нього воно істине. Для впевненості в правильності висновку учень повинен проаналізувати і мал.3: у першому будинку є вікно, значить (висновок) – не підходить. Інші висловлення аналізуються аналогічно.

***Комбінаторні завдання*.**

Комбінаторика – розділ математики, в якому із певної множини об`єктів обирають деяку підмножину в певному порядку. Комбінаторика тісно пов`язана з теорією ймовірності. Ці вправи розвивають вміння висловлювати здогадки, доводити справедливість певних тверджень перебором різних варіантів, є основою для формування ймовірних уявлень, і розв'язування їх передбачає, перш за все, маніпуляційну діяльність. В основному – це завдання та ігри для розвитку у дітей кмітливості та здогадки. Їх особливість у розв'язувані без використання формул: випадково або за допомогою прийому систематичного перебору, звідси їх варіативність розв`язування, існування кількох розв`язків. Для учнів початкових класів у цих задачах важливо побачити та осягти закономірність і раціональний спосіб перебору.

Приклади комбінаторних задач:

1. Скількома способами можна скласти букет із 3 квітів, якщо є білі та червоні гвоздики?

Цю задачу можна розв`язати, виконуючи практичну роботу. Учень повинен проаналізувати умову: 2 кольори (червоний і білий), але букет із 3 кольорів, значить (узагальнення) кожен із букетів буде мати крім червоної та білої гвоздики ще одну (червоного або білого кольору). В умові задачі не обумовлено про квіти, які повторюються і не повторюються, але учні прийдуть до цього висновку, а потім практичним способом складуть такі комбінації:

ЧББ, БЧЧ, БЧБ, ЧБЧ, ЧЧБ, ББЧ. При розв`язувані даної задачі учень виконує операції аналізу, синтезу, узагальнення, умовиводу.

2. За допомогою цифр 3,4,5, запиши всі можливі двоцифрові числа. Скільки їх?

3. Скількома способами можна посадити 4 учнів на 4 стільці?

Матеріал з логічним навантаженням різноплановий, але його об`єднує наступне:

– спосіб розв`язування цих задач невідомий. Розв`язування відбувається за допомогою методу спроб та помилок, які, в деяких випадках, можуть закінчитись здогадкою, що є знаходженням шляху до розв`язку;

– нестандартні задачі сприяють підтриманню інтересу до предмету і виконують роль мотиву діяльності учнів. Незвичайність змісту, способу подання задачі знаходять емоційний відгук у дітей і сприяють необхідності її розв`язування;

- задачі цього типу складені на основі знання законів логічного мислення.

Систематичне застосування задач такого виду сприяє розвитку розумових операцій і формуванню математичних уявлень дітей.

Але слід зауважити, що включення задач подібного виду в учбовий процес повинно бути природнім. Серед нестандартних задач багато задач навчального призначення, але подані вони не в звичайній формі. Задачі, які пропонуються учням, обов’язково повинні відповідати темі уроку і не бути засобом розваги та відпочинку. Тільки за таких умов вони будуть сприяти творчому засвоєнню знань, способів дій у незнайомій ситуації і баченню нової функції об’єктів.

Резюме. В статье рассмотрены упражнения и задания, которые способствуют формированию и развитию памяти, внимания, мышления; выделены

требования к системе упражнений и заданий, направленных на развитие познавательных процессов и внимания. Данный материал может быть использован учителями для самостоятельного составления аналогичных заданий.

Summary. One of the most imported tasks of mathematics in a primary school is the development of children`s abilities. There fore the aktual problem here is the searching for ways which will set in motion the mechanism of creative activity development and the personality of a pupil at the same time.

In the article the excercises and assignments are examined which make for forming and developing of memory, attention, thinking. The most valuable is the detachment of reguirements to the system of excercises and tasks directed to the development of cognitive processes and attention. The excercises and tasks given in the article can be used by teachers for independent constructing of analogous ones.

УМОВИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПОПЕРЕДНЬОГО КОНТРОЛЮ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ УЧНІВ АЛГЕБРИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

І.А.Дремова, аспірантка,
НПУ ім. М.П. Драгоманова, м.Київ

Попередній контроль результатів навчання здійснюється на орієнтовно-мотиваційному етапі пізнавального процесу і його цілі визначаються цілями цього етапу. З метою успішного опанування навчальною темою з алгебри, на орієнтовно-мотиваційному етапі необхідно актуалізувати в учнів відповідні опорні знання і способи навчально-пізнавальної діяльності, мобілізувати їх увагу, пам'ять, мислення, волю, почуття, викликати зацікавленість, створити установку діяти для досягнення поставлених цілей. Отже, підготовка учнів до сприйняття теми навчального матеріалу, до формування у них нових знань і способів навчальних дій, полягає у створенні зовнішніх і внутрішніх умов, сприятливих для підтримання їх високої працездатності під час навчально-пізнавальної діяльності, і охоплює пізнавальну сферу учнів, їх психічні особливості.

Одним із чинників, які допомагають розв’язувати поставлені завдання, є здійснення попереднього контролю.

Сформулюємо *цілі попереднього контролю* результатів навчання алгебри у загальному вигляді таким чином:

1) актуалізувати в учнів опорні знання, уміння та навички (способи навчальних дій), необхідні для опанування ними новим навчальним матеріалом теми;
2) перевірити і встановити рівень сформованості в учнів відповідних опорних знань, умінь та навичок (способів навчальних дій), необхідних для опанування ними теми нового навчального матеріалу , здійснити, в разі необхідності, корекцію;
3) допомогти кожному учневі з’ясувати для себе ступінь його готовності до вивчення навчального матеріалу нової теми, яких знань не вистачає і які “прогалини” слід ліквідувати для успішного здійснення навчально-пізнавальної діяльності;
4) сприяти формуванню позитивної мотивації опанування навчальною темою;
5) перевірити і встановити рівень усвідомлення і прийняття учнями цілей і завдань їх майбутньої навчально-пізнавальної діяльності, зорієнтувати у вимогах до знань, умінь та навичок, якими вони мають опанувати у результаті цієї діяльності, термінах і засобах контролю.

Конкретизація цілей попереднього контролю на орієнтовно-мотиваційному етапі під час вивчення певної навчальної теми передбачає передусім визначення *об’єктів попереднього контролю*. Відомо, що весь навчальний процес у дидактичному циклі, і зокрема його орієнтовно-мотиваційний етап, підпорядкований досягненню освітніх цілей вивчення конкретної навчальної теми. Останні мають бути виражені у вигляді конкретних результатів навчання, досягнення (недосягнення) яких можна було б встановити під час здійснення контролю. Називатимемо ці результати *запланованими*. Отже, запланованими результатами навчання визначається як побудова всього навчального процесу у дидактичному циклі, так і побудова тематичного контролю в цілому, і зокрема кожної його складової частини – попереднього, поточного і підсумкового.

З огляду на це, проаналізуємо заплановані результати навчання з точки зору попереднього контролю. Заплановані результати навчання, зокрема дидактичні цілі, містять знання, уміння та навички, яких мають набути учні протягом опанування даної навчальної теми. Проте, нові знання, уміння та навички не формуються на "порожньому" місці. Їх формування та розвиток відбувається на основі вже відомих учням знань і способів дій (ЗУН). Останні ми називаємо опорними. Тому на орієнтовно-мотиваційному етапі навчального процесу заплановані результати навчання будемо розглядати у процесі розгортання опорних ЗУН учнів. А це, в свою чергу, обумовлює вибір об'єктів попереднього контролю при вивченні алгебри. Методика визначення об'єктів тематичного, і зокрема попереднього, контролю, нами вже розглядалось у публікації [1].

Цілями попереднього контролю у навчальному процесі також детермінуються *специфічні вимоги* до змісту вимірників. Для того, щоб учні мали змогу якісно опановувати новими елементами змісту навчання, у них мають бути сформовані опорні знання, уміння та навички, які достатньо легко актуалізуються. Тому, зрозуміло, що у зміст завдань для попереднього контролю слід включати знання і способи дій, які є основою для сприйняття учнями нового навчального матеріалу і формування у них нових ЗУН. А вчитель має перевіряти рівень опанування учнями елементів змісту навчання, що утворюють опорні ЗУН, і, у разі потреби, вносити в актуалізовані знання та способи дій певні корективи.

Отже, оскільки основою для формування в учнів нових знань і способів дій є опорні ЗУН, то, з одного боку, має бути встановлений рівень опанування ними, а з іншого, вони потребують першочергової актуалізації. З огляду на це, завдання для попереднього контролю мають бути спрямовані не просто на репродуктивне відтворення навчального матеріалу, засвоєного раніше, а на актуалізацію тих знань, способів дій або їх певної послідовності, які дозволяють самостійно усвідомлювати структуру нового навчального матеріалу, виконувати відповідні дії з ним.

Відомо, що засвоєння учнями навчального матеріалу теми відбувається на різних рівнях навченості. Постає питання: на якому рівні слід контролювати опанування ними знань, умінь та навичок, які підлягають попередньому контролю? На нашу думку, відповідь на це запитання має бути така. Опорні знання, уміння та навички підлягають попередньому контролю, принаймні на *рівні обов'язкових результатів навчання*, сформульованих до відповідної теми, в якій безпосередньо вивчалися ці елементи. Чому? Тому що в обов'язкових результатах навчання зафіксований той "прожитковий мінімум" знань, умінь та навичок, опанування яким надає учням можливість систематизованого (а не епізодичного) засвоєння ЗУН і забезпечує їх повноцінне просування у навчанні.

На зміст завдань для попереднього контролю також впливають види пізнавальної діяльності, які мають здійснювати учні на цьому етапі навчального процесу. Дійсно, під час вивчення алгебри актуалізація опорних знань, умінь та навичок учнів передбачає пригадування ними і відтворення вже засвоєних знань, відновлення опанованих раніше способів дій, повторення відомих алгоритмів, тому зміст завдань для попереднього контролю має бути спрямований на реалізацію саме цих дій учнів, спонукати їх до самостійного здійснення навчальної і контролюючої діяльності, підвищувати мотивацію вивчення певної теми.

Таким чином, враховуючи попередні міркування, сформулюємо *вимоги до змісту вимірників об'єктів попереднього контролю*, які накладаються цілями реалізації останнього:

1) завдання мають перевіряти опанування учнями знаннями, уміннями та навичками, які є основою для формування запланованих результатів навчання;
2) кожне завдання має перевіряти опанування учнями однією або декількома взаємопов'язаними діями (синтезовані завдання);
3) кожне завдання має бути орієнтоване на відтворення знань, умінь та навичок або застосування їх за відомим алгоритмом;
4) рівень пропонованих для попереднього контролю завдань має відповідати принаймні рівню обов'язкових результатів навчальних тем, матеріал яких використовується як опорні ЗУН;
5) завдання, призначені для здійснення попереднього контролю, мають сприяти формуванню позитивної мотивації навчання учнів.

Врахування загальних вимог до засобів контролю, а також тих, що накладаються цілями реалізації орієнтовно-мотиваційного етапу навчально-пізнавальної діяльності, дає можливість виділити такі *типи завдань для попереднього контролю* результатів навчання алгебри в основній школі:

1. Розпізнавання математичних об'єктів. Наприклад, *пропонується серед наведених рядів чисел вибрати ті, що утворюють арифметичні прогресії.*
2. Відтворення означень основних понять, формул, залежностей, властивостей. Наприклад, *дати означення функції або записати властивості числових нерівностей.*
3. Застосування опорних ЗУН у знайомих ситуаціях, за відомим алгоритмом. Наприклад, *використовуючи формули скороченого множення розкласти вираз на множники*.

Достатньо велика кількість об'єктів попереднього контролю, специфічність змісту їх вимірників та відносна короткочасність орієнтовно-мотиваційного етапу детермінують форми пред'явлення перевірочних завдань і методику проведення попереднього контролю. На нашу думку, найбільш прийнятною формою пред'явлення завдань попереднього контролю достатньо великого обсягу є *тести*. Під тестом ми розуміємо теоретично обґрунтовану та експериментально перевірену систему завдань для контролю результатів навчання учнів.

Тестова методика здійснення попереднього контролю дозволяє при значній економії часу охопити контролем *всіх* учнів, виявити наявний рівень опанування ними опорних знань і способів навчальної діяльності в цілому і кожного учня окремо. Враховуючи достатню абстрактність повторюваного матеріалу, і передбачаючи можливі утруднення учнів, рекомендуємо використовувати тестові завдання закритої форми. Наявність у тестових завданнях закритої форми правильної відповіді дозволяє здійснити взаємо- або самоконтроль по закінченню тестування, що сприяє реалізації третьої і четвертої мети попереднього контролю.

Колективне обговорення результатів тестування дасть змогу вчителю встановити готовність учнів до сприйняття нового матеріалу, і тим самим реалізує першу і другу його цілі. Інтенсивна самостійна робота учнів (особливо підлітків) під час виконання тесту, як показує досвід, підвищує їх зацікавленість як результатами тестування, так і наступною навчально-пізнавальною діяльністю, позитивно впливає на формування мотивації навчання взагалі (реалізація п'ятої мети).

Проте, зауважимо, що з метою попереднього контролю можна також використовувати традиційні усні вправи, математичні диктанти, комбіноване опитування, методика проведення яких докладно описана у відповідній літературі. Та, на нашу думку, відбір або складання завдань для цих видів робіт має здійснюватися з урахуванням попередніх міркувань, а їх зміст має відповідати наведеним вище вимогам.

Попередній контроль не передбачає виставлення вчителем *бальних оцінок*, але й не виключає його оціночних суджень, спрямованих на підвищення мотивації учнів до навчання. Здійснюючи попередній контроль, вчитель отримує необхідну інформацію для керування навчально-пізнавальним процесом і залучає учнів до контролюючої діяльності шляхом взаємо- і самоконтролю. Саме на цьому етапі має превалювати внутрішній контроль.

За даними експериментальної перевірки результатів нашого дослідження, організація контролю на орієнтовно-мотиваційному етапі вивчення теми та його результати безпосередньо впливають на ефективність операційно-пізнавального етапу, створюють передумови реалізації поточного контролю.

1. Дремова І.А., Швець В.О. Планування тематичного контролю результатів навчання алгебри в основній школі // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Зб. Наук. праць: – Кривий Ріг, 2001. – Т.1. – С.71-83.
2. Иваницкий А.И. Тематический контроль и коррекция знаний по физике в старших класах средней школе: Дис. канд. наук / КГПИ им.А.М.Горького. – Киев, 1991. – 245 с.
3. Швец В.А. Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы: Дис. канд. наук / КГПИ им.А.М.Горького. – Киев, 1989. - 209с.

Резюме. На основе анализа целей предварительного контроля результатов обучения учащихся алгебре в основной школе определены условия его реализации, а также обоснованы требования к содержанию и форме предъявления заданий-измерителей.

Summary. By means of analysis preliminary control’s aims under algebra’s instruction of the basic school’s pupils was defined conditions it’s realization, was based demands to the maintenance and forms of tasks, which are produce for pupils.

МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ АВТОМАТИЗАЦІЇ РЕЦЕНЗУВАННЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧ

О.І Скафа, канд. педагог. наук, доцент
Донецький національний університет

Про корекцію результатів навчання

Навчальний процес є складною системою, в якій в органічній єдності здійснюється взаємоз'єднана діяльність вчителя і учня. В цій системі під керівництвом вчителя відбувається оволодіння учнем основами наук, способами діяльності, його розвиток.

Як відмічає Т.І.Шамова [1], задача вчителя складається у повідомленні знань, управлінні процесом засвоєння знань і способів діяльності. Задача учня складається в оволодінні системою знань, способами їх одержання, переробці, збереженні та застосуванні.

Функції навчаючого та навчаємого на різних етапах процесу засвоєння не залишаються незмінними.

На першому етапі засвоєння головною функцією вчителя є забезпечення мотивації, необхідної для успішного протікання процесу. На другому – вчитель вводить у навчальний процес нову інформацію, яку повинні засвоїти учні. На третьому та послідуючих етапах вчитель організовує засвоєння виданої інформації. Для цього він повинний увести задачі для самостійного рішення, але й забезпечити контроль та корекцію, необхідну деякій частині навчаємих.

Л.М.Фрідман [2] визначає цей етап як контрольно-корекційний і включає в нього:

а) узагальнення учбового матеріалу; б) організацію підсумкової контрольно-оцінної діяльності учня; в) коректировку результатів навчальної роботи учнів.

Таким чином, навчальна діяльність без контрольно-оцінного етапу, без потрібного узагальнення засвоєних знань, без необхідної корекції виявлених у всіх чи деяких учнів пробілів і недоліків, – без усього цього не стане плідною і при цьому не здійсниться повноцінного засвоєння знань.

Важливим елементом усього контрольно-оцінного етапу є корекція результатів навчання. Про необхідність корекції проголошується у роботах Н.Ф.Тализіної, І.С.Якіманської, З.І.Слєпкань, М.І.Бурди, Л.М.Фрідмана, Г.П.Бевза та ін.

Л.М.Фрідман [2] визначає коректировочний процес як невід'ємну частину контрольно-оцінного акту, структура якого має вид:

а) мета контрольно-оцінного акту; б) об'єкт контролю, оцінки й корекції; в) еталон, із котрим порівнюється, звіряється об'єкт; г) результат контролю; д) критерії оцінки; ж) оцінка у формі розгорнутої характеристики контролю з точки зору вибраного критерію; з) оцінка; і) засіб корекції; к) результат корекції як новий об'єкт контрольно-оцінної діяльності.

Однією з форм перевірки степені засвоєння навчального матеріалу є самостійні та контрольні роботи. Як правило, проведення таких робіт пов'язано з виконуванням а) – з) і дуже рідко використовується пункт і), а пункт к), в загалі, зовсім не виконується. Тобто, деякі вчителі при перевірці письмових робіт учнів проводять аналіз роботи, що складається у встановленні, якими вміннями не оволодів кожен з учнів, які навички ще не сформовані, але такий аналіз не завжди доходить до учня. Головним чином, аналізуючи роботу в класі, вчитель проводить загальний аналіз помилок і кожний учень не може одержати рецензію саме своєї роботи. Але ж як при цьому можливо здійснювати процес управління учбовою діяльністю? Як учню оволодіти основними вміннями виконувати ті чи інші дії, що відносяться до формування прийомів учбової евристичної діяльності? Як забезпечити індивідуальний підхід до навчання при організації коректировочного процесу?

Допомогти викладачеві організувати й управляти самостійною діяльністю учнів, здійснювати корекцію роботи учня на основі індивідуальних рекомендацій та завдань, з’ясувати питання про сформованість алгоритмічних прийомів розв’язування задач та основних розумових дій, що сприяють розвитку евристичної діяльності, скоротити час на аналіз помилок в роботі можуть розроблені нами автоматизовані програми корекції до самостійних і контрольних робіт.

Крім того, у наступний час розглядаються нові поняття навчання, що заперечують можливість "передачі освіти". Як відмічає А.В.Хуторський [3], знання, вміння і навички – не реальні предмети, які можна передавати. Вони утворюються в результаті активності учня, у ході його власної діяльності. Роль вчителя при цьому заключається у організації відповідної освітньої середи, де учень навчається. Тобто, розроблені програми індивідуального автоматизованого рецензування рішення задач, що включають словник помилок учня та рекомендації по їх усуванню, мають у своїй основі особистісну орієнтацію і відповідають індивідуальності навчальної траєкторії учня.

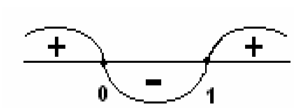
Таким чином, використання учнем програм корекції помилок після рішення відповідних задач стимулює його власну діяльність, він навчається, опираючись на особистісний потенціал, використовуючи відповідну технологію навчання.

Методика складання словника помилок

Розглянемо як приклад корекцію помилок, можливих при рішенні нерівності: $\frac{2-x}{x} \geq 1$. Наведемо кілька варіантів невірного рішення:

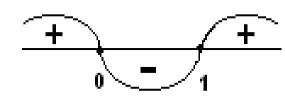
1. $(2-x \geq x) \Leftrightarrow (2 \geq 2x) \Leftrightarrow x \leq 1$.

2. $\left(\frac{2-x}{x} - 1 \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2-x-x}{x} \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2(1-x)}{x} \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{x} \geq 0\right) \Rightarrow$



$x \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty)$.

3. $\left(\frac{2-x}{x} - 1 \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2-2x}{x} \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{x} \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x} \leq 0\right) \Rightarrow$



$x \in [0;1]$.

4. $\left(\dfrac{2-2x}{x}-1\geq 0\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{2-2x}{x}\geq 0\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2-2x\geq 0\\ x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x>0\end{cases}$ 

$x\in(0;1]$.

Тут варіант 1 показує повне нерозуміння рішення дрібно-раціональної нерівності. При рішенні нерівностей не можна розглядати пропорцію. У варіанті 2 маємо 2 помилки: неправильне застосування методу інтервалів і неврахований той факт, що знаменник дробу не може звертатися в 0. У варіанті 3 помилка при включенні в рішення кінців інтервалу. Нарешті, у варіанті 4 зроблений нееквівалентний перехід. Аналіз відповідного розділу підручників «Алгебра – 7» [4, 5] показує, що можна підібрати до даних помилок відповідні вправи.

Ці вправи і рекомендуються учням для усунення помилок і закріплення навичок у рішенні задач. Таким чином, наша головна ідея полягає в наступному: до усіх контрольних (чи самостійних) робіт можна скласти програми корекції, що включають:

1) опис можливих помилок учнів;

2) рекомендації для виправлення помилок (посилання на теоретичний виклад питання; приклади вірного рішення аналогічних задач, вправ).

Помітимо, що такі завдання носять індивідуальний характер і визначаються помилками саме даного учня. а це відповідає сучасному підходу до організації процесу навчання і формуванню евристичної діяльності учнів у рамках особистісно-орієнтованого підходу до навчання.

Крім того, створення таких коригувальних програм відповідає шляху психолого-дидактичного аналізу помилок, відзначеного, наприклад, у роботі Я.А.Груденова [6].

Так, Н.К.Беденко [7], наприклад, аналізуючи помилки, що допускаються в рішенні логарифмічних і показникових нерівностей, виділяє наступні причини їхнього виникнення:

1. Відкидаються умови, що визначають область припустимих значень перемінної.
2. Неправильно визначається характер монотонності логарифмічної (показникової) функції.

Аналізуючи ці причини, ми тим самим можемо прогнозувати помилки.

М.В.Потоцький [8] пише, що треба зрозуміти хід думок учня, чому він допустив саме цю помилку, на якій стадії вона допущена? Звідси виникає вид допомоги, що може бути різним для кожного учня. В одних випадках досить слів: «Не квапся! Подумай!», в інших, треба натяком нагадати суть справи, у третіх, розповісти докладно і потім відіслати до підручника. Тобто., знаючи точно, де джерело помилки, її завжди можна виправити.

Отже, для створення програми необхідно мати опис усіх можливих помилок.

Основну частину словника помилок можна одержати шляхом аналізу елементарних навичок, необхідних для рішення задач визначеного типу.

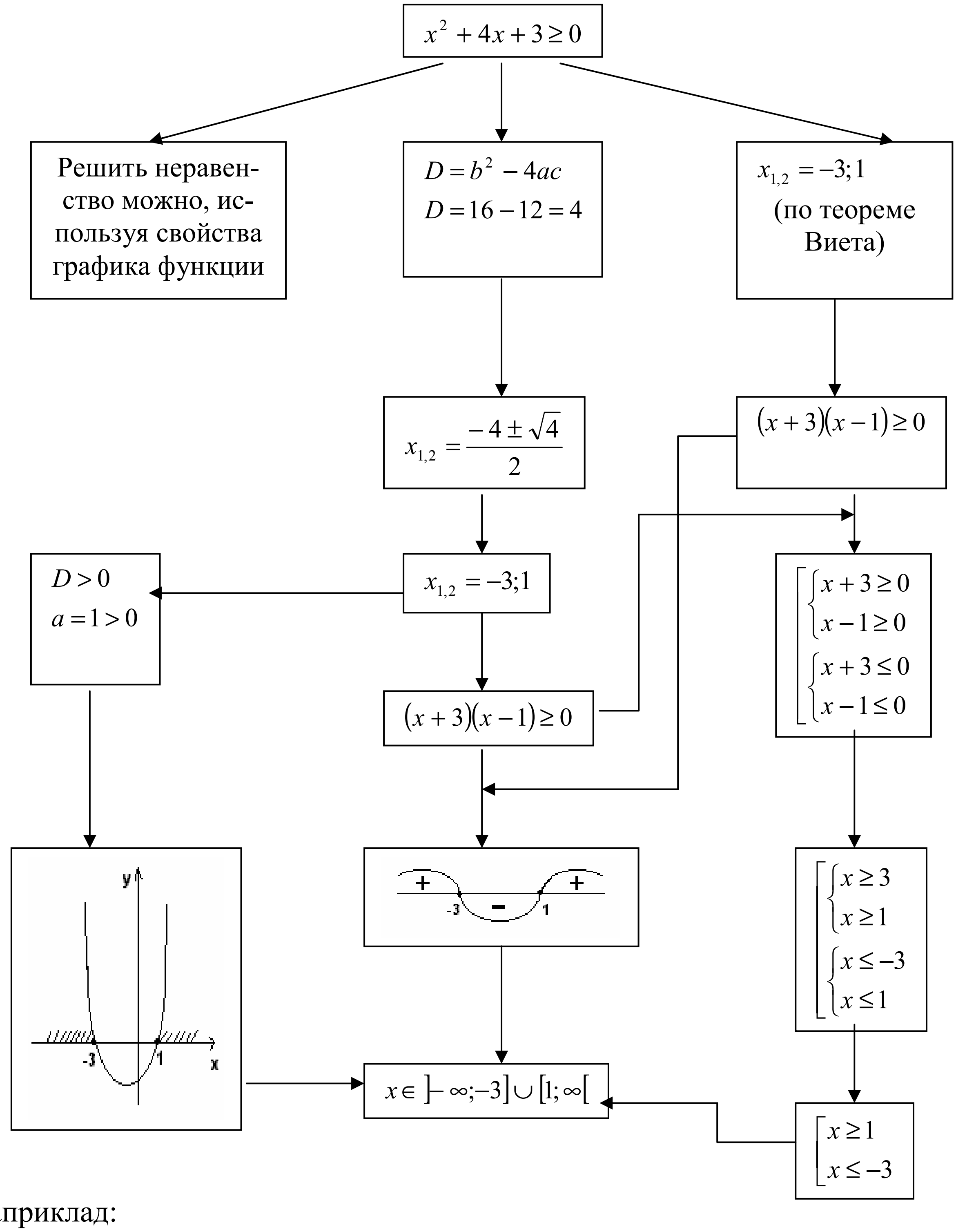
Це відповідає сучасному підходу до оцінювання письмових робіт з математики, викладеному Г.М.Литвиненко в роботі [9], про те, що: "Рішення задачі, вправи розбивається на окремі логічні кроки й операції...". Наприклад, як відзначає М.М.Мірошнікова [10], при рішенні логарифмічної нерівності $\log_2(x+1)+\log_2(11-x)<5$ повинні бути використані наступні елементи знань: уміння знайти область визначення логарифмічної функції, правило переносу доданків з однієї частини нерівності в іншу, монотонність логарифмічної функції і т.п. (усього 11 елементів знань). Потім словник доповнюється і виправляється з урахуванням реальних ситуацій.

Словник помилок можна одержати і шляхом аналізу «основного» варіанта розв'язку контрольної роботи, що дозволяє вичленити необхідні операції на рівні навичок та основні сформовані уміння.

Розташовуючи блок-схемою рішення задачі, можна також досить точно прогнозувати помилки, можливі при рішенні задачі.

Наприклад, розглядаючи блок-схему рішення квадратичної нерівності $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, ми можемо досить точно скласти список можливих помилок.

Блок-схема рішення квадратичної нерівності



Наприклад:

– невміння знаходити дискримінант квадратного тричлена;

– невміння розкладати квадратний тричлен на множники;

– незнання властивостей квадратичної функції;

– невміння застосовувати метод інтервалів і т.д.

Вище була приведена вимога повноти в описі можливих помилок. З іншого боку, природно вимагати спільності даного опису. Ці вимоги суперечливі. Дотримуючи їх, слід в описі помилок установити деяку рівновагу, щоб список помилок був досить повним, але їхній опис носив усе-таки досить узагальнений характер. Пояснимо сказане прикладом. Приведений вище опис помилок до рішення нерівності є повним. У момент навчання навичкам рішення нерівностей природно використовувати його саме в такому виді. Однак, надалі цей список підлягає «укрупненню», тому що подібна деталізація привела б до громіздкої програми, незручної для користувачів. У цій ситуації можна відмовитися від подробиць і обмежитися списком типу: «не вмієте застосовувати метод інтервалів», «перейшли не до еквівалентної нерівності» і т.п.

Прогнозуючи помилки до контрольної роботи, не слід забувати також про постановку питань, націлених на формування раціональних алгоритмів задачі. Варто обов'язково відзначати помилки, зв'язані з нераціональним рішенням, неповним.

Методика побудови блоку корекції

Другим елементом програми є блок корекції помилок. Він включає посилання на теоретичний виклад питання, приклади рішення задач, вправи. До цієї частини програми можна висунути наступні вимоги: достатню спільність, конкретність, волю вибору вказівок учнем у наявній у нього літературі. Приведені вимоги якоюсь мірою суперечливі. На різних етапах навчання їх приходиться врівноважувати по-різному. Пояснимо це на тім же прикладі з нерівністю.

Приведена вище рекомендація для програми корекції задачі $\frac{2-x}{x} \geq 1$ підібрана дуже конкретно, з обліком чотирьох описаних варіантів помилок, тобто при більшій узагальненості списку приходиться рекомендувати інші приклади задач (поняття еквівалентності нерівностей, розглянути серію різноманітних прикладів на знаходження області визначення нерівностей і т.п.). Таку програму можна рекомендувати вже при розв'язанні будь-яких нерівностей.

Пояснимо можливість вільного вибору літературних джерел при роботі з програмою, коли учень може знайти всі необхідні вказівки в наявній у нього літературі. Тому доцільно передбачити посилання на всі джерела, що рекомендуються за програмою для даної групи учнів. Оформлення доцільне у виді таблиці.

Таблиця 1.

Фрагмент програми корекції помилок

Рішення дрібно-раціональної нерівності

Код помилки	Роз'яснення помилки	рекомендації
1.01	Не вмієте вирішувати нерівності методом інтервалів	[5], Гл. 1, § 4, прикл. 1-3.
1.02	Не знаєте властивостей нерівностей	[4], Гл.1Х, § 49, вправи 24-28.
1.03	Не вмієте переходити до рівносильної нерівності	[5], Гл. 1, § 4, прикл. 4. [4], Гл.1Х, вправа 93
1.04	Не враховуєте область визначення нерівності	[5], Гл. 1, §4, прикл. 4..

При складанні програми можна дотримувати такої послідовності дій:

1. Аналіз основних понять, теорем, навичок, що повинні бути сформованими у учнів.

2. Аналіз навчальної літератури, збірників задач (включаючи і збірники, що містять розв'язки типових задач).
3. Аналіз дидактичних матеріалів (самостійних і контрольних робіт).
4. Розробка блок-схеми рішення типових задач, використання алгоритмів рішення задач.
5. Аналіз достатнього масиву самостійних і контрольних робіт.
6. Прогнозування типових помилок, їхня класифікація.
7. Підготовка роз'яснень помилок і підбор джерел для самостійної роботи.
8. Апробування і навчання програми.

Складена таким чином дидактична програма вводиться у пам'ять комп'ютера у вигляді стандартного словника типових помилок. Словник включає рекомендації за виправленням помилок з посиланнями на навчальну літературу. Тоді при перевірці контрольної чи самостійної роботи учня вчитель фіксує кожну помилку і проставляє їй той номер, що зафіксований у словнику помилок. Після окінчення цієї роботи чи сам вчитель, чи учень вводить необхідні дані з клавіатури комп'ютера і одержує готову рецензію. Необхідні дані – це прізвище та ім'я учня, тема контрольної роботи та номера помилок, що согласуються зі словарем. Далі вже готова рецензія видруковується на принтері. До використання комп'ютерної програми пред'являють такі вимоги: ОС MS Windows 9X, Access Microsoft Office – 97.

Таким чином, програми корекції допомагають вчителю організувати і керувати самостійною діяльністю учнів, вони забезпечують індивідуалізацію навчального процесу, при цьому «слабкі» мають можливість перебороти пробіли в знаннях, опанувати прийомами раціональної розумової діяльності, а «сильні» – поліпшити знання, розширити свій кругозір, задовольняти інтереси і схильності до наукових знань.

Програми корекції вчать виділяти головне в матеріалі підручника, зіставляти факти, явища, узагальнювати, тобто усвідомлено підходити до вивчення математики, сприяють розвитку пам'яті, умінню користуватися літературою, стежити за своїми помилками.

Застосування програм корекції дозволяє викладачу використовувати час для рішення цікавих, евристичних задач, надавши учню можливість самостійно опанувати технікою рішення стандартних задач; допомагає викладачу навчити учнів активній самостійній роботі з закріплення і поглиблення знань, умінь, навичок, а отже, і по придбанню нових знань.

1. Шамова Т.И. Активизация учения школьников. – М.: Педагогика, 1982. – 209 с.
2. Фридман Л.М. Количественный и качественный анализ учебной деятельности школьников / Под ред.В.В.Давыдова. – М.: Педагогика, 1982. – С.47-54.
3. Хуторской А.В. Современная дидактика. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 544 с.
4. Бевз Г.П. Алгебра 7 – 9. – К.: Освіта, 1996. – 303 с.
5. Алгебра – 9 / Под. ред. С.А.Теляковского. – М.: Просвещение, 1998. – 272 с.
6. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – 244 с.
7. Беденко Н.К. Систематизация знаний учащихся при заключительном повторении // Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе / Сост. Е.Г. Глаголева. – М.: Просвещение, 1980. – С.230-241.
8. Потоцкий М.В. Как помочь школьнику решать задачи? // Математика в школе. – 1974. – №1. – С.29-32.
9. Литвиненко Г.М. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з шкільного курсу математики / В міжнар. збір. наук. робіт Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2000. – С.50-62.
10. Мирошникова М.М. Опыт использования методики подбора контрольных заданий для системы "Прием". – М.: НИИВШ, 1984. – 40 с.

Резюме. В работе изложены методические основы создания и использования автоматизированной коррекции ошибок обучаемых при решении математических задач на основе индивидуальных рецензий

Summary. The method of organization automatic review mathematic problems solution is given in the article.

ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

О.П.Томащук, кандидат педагогічних наук, викладач, Міжрегіональна Академія управління персоналом

Поняття границі є основним, фундаментальним як в курсі математичного аналізу, так і в шкільному курсі математики. Пояснюється це тим, що такі поняття як неперервність, похідна, інтеграл грунтуються на основі цього поняття. Тому успішність оволодіння учнями початками аналізу великою мірою визначається тим, наскільки глибоко вони усвідомлюють суть поняття границі. Формування в учнів поняття границі, на нашу думку, найпростіше і найефективніше здійснювати на прикладі поняття границі послідовності. І тому заслуговує схвалення те, що в підручнику “Алгебра і початки аналізу” авторів М.І.Шкіля, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук [2], на відміну від такого ж підручника за редакцією А.М.Колмогорова [1], все ж таки знайшлося місце для викладення теми “Границя послідовності”. В той же час є незрозумілим те, що програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів це поняття не передбачається для вивчення.

Поняття границі послідовності, будучи найпростішим серед інших понять, що грунтуються на понятті “границя” (границя функції, неперервність функції, похідна, інтеграл тощо), в той же час є складним для розуміння його учнями. Тому вводити його доцільно конкретно-індуктивним методом, залучивши при цьому достатню кількість відповідних геометричних ілюстрацій. Реалізація цього методу може здійснюватися по-різному в залежності від того, яке означення вчитель хоче покласти в основу поняття границі послідовності (означення на мові околів чи означення на мові “ε-n_0”). Зрозуміло, що вибір вчителем того чи іншого означення залежить від рівня математичної підготовленості учнів класу, профілю класу.

Нижче пропонується методика, реалізація якої вчителем дозволить учням самостійно сформулювати означення границі послідовності як на мові околів, так і на мові “ε-n_0”.

Насамперед, слід ввести декілька понять, які необхідні при означенні границі послідовності на мові околів. Це поняття плюс і мінус нескінченно відділених точок, окіл скінченної і нескінченно віддаленої точок.

Озн.1 (плюс нескінченно віддаленої точки). Плюс нескінченно віддаленою точкою (позначають $+\infty$) називають таку точку числової прямої, що $x<+\infty$ для всіх дійсних чисел x.

Озн.2 (мінус нескінченно віддаленої точки). Мінус нескінченно віддаленою точкою (позначають $-\infty$) називають таку точку числової прямої, що $x>-\infty$ для всіх дійсних чисел x.

Озн.3 (околу скінченної точки). Околом скінченної точки a називають будь-який інтервал, що містить цю точку.

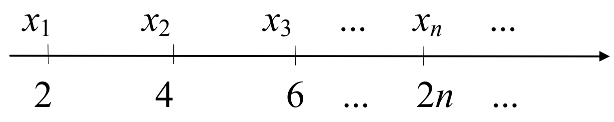
Озн.4 (ε-околу скінченної точки). ε-околом скінченної точки a називають інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$.

Озн.5 (околу плюс (мінус) нескінченно віддаленої точки). Околом плюс (мінус) нескінченно віддаленої точки називають інтервал $(b;\ +\infty)$ $((-\infty;\ b))$, де b – довільне дійсне число.

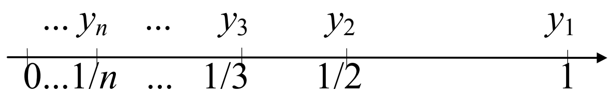
Зміст цих понять досить чітко розкривається за допомогою геометричних ілюстрацій, а тому вони без особливих труднощів засвоюються учнями.

Введення поняття границі послідовності конкретно-індуктивним методом передбачає розгляд кількох конкретних послідовностей. Наприклад, можна вибрати такі послідовності:

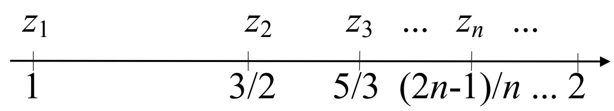
(x_n): 2, 4, 6, ..., $2n$, ...



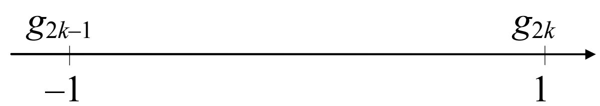
(y_n): 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ...



(z_n): 1, 3/2, 5/3, ..., $(2n-1)/n$, ...



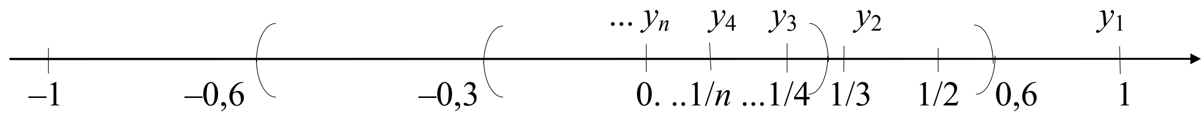
(g_n): $-1, 1, -1, 1, \ldots (-1)^n, \ldots$



Зобразивши члени цих послідовностей на координатних прямих, слід звернути увагу учнів на послідовності (y_n) і (z_n) і запропонувати їм виявити ту властивість, яка притаманна їм, і яку не мають послідовності (x_n) і (g_n). Керуючись ілюстраціями, учні помічають ту особливість, що члени послідовності (y_n) із зростанням їх номерів все ближче і ближче наближаються до числа 0, а члени послідовності (z_n) – до числа 2. У зв'язку з цим необхідно наголосити на необхідності "переведення" виявленої властивості послідовностей (y_n) і (z_n) на математичну мову.

Зрозуміло, що тут можна відразу проводити міркування, які приведуть до формулювання означення границі послідовності на мові "ε-n_0". Однак краще, на мою думку, спочатку підвести учнів до формулювання виявленої властивості на мові околів. Це пояснюється тим, що геометричний зміст поняття границі послідовності є досить очевидним, і тому, поклавши його в основу введення цього поняття, можна забезпечити формування в учнів чітких уявлень про поняття границі послідовності.

У подальших викладках доцільно перейти до розгляду лише однієї послідовності, наприклад – (y_n), залучивши при цьому поняття околу точки, з яким учні вже знайомі.



Зобразивши кілька ε-околів точки 0, вибираючи при цьому все менші і менші ε, учні помічають таку властивість послідовності (y_n): у кожному із зображених околів міститься нескінченна кількість членів послідовності (y_n) (це всі її члени, починаючи з деякого номера n_0), а за межами їх знаходиться скінченна кількість її членів. Крім того, очевидним для них є і той факт, що номер n_0 залежить від вибраного числа ε (чим менше ε вибирається, тим більшим є номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності (y_n) потрапляють у відповідний ε-окіл точки 0). Тому його позначають $n_0=n_0(\varepsilon)$.

Зрозуміло, що вже на цьому етапі можна сформулювати означення границі послідовності на мові околів.

Оскільки зроблені висновки ґрунтуються на наочних міркуваннях, то породжують в учнів природне запитання: чи в будь-якому ε-околі точки 0, навіть як завгодно малому, міститься нескінченна кількість членів послідовності (y_n) (всі її члени, починаючи з деякого номера), а за межами кожного з них – скінченна їх кількість. Чи, можливо, існує такий ε-окіл точки 0, в якому не виявиться жодного члена послідовності (y_n), тобто для всіх $n \in N$ члени y_n лежатимуть за межами цього околу? Щоб відповісти на поставлені запитання, слід з'ясувати разом із учнями, що означає висловлення: "всі члени послідовності (y_n), починаючи з деякого номера, містяться в ε-околі точки 0". А вона означає, що відстань точки 0 до кожного із членів y_n з номерами $n > n_0(\varepsilon)$ є меншою за ε, тобто $|y_n - 0| < \varepsilon$ для всіх $n > n_0(\varepsilon)$. Тому для того, щоб дати відповідь на поставлені запитання, треба з'ясувати, чи для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться відповідний номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ матиме місце нерівність $|y_n - 0| < \varepsilon$. А для цього необхідно розв'язати останню нерівність: $|y_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Необхідно зауважити учням, що число $\frac{1}{\varepsilon}$, взагалі кажучи, не є натуральним, тобто не є "номером". Тому за номер $n_0(\varepsilon)$ слід взяти його цілу частину, тобто покласти $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді для $\forall n > n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ матиме місце нерівність $|y_n - 0| < \varepsilon$.

Підводячи підсумок, слід зазначити, що яке б число $\varepsilon > 0$ не брали, обов'язково знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ (в даному випадку це число $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$) такий, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ справджуватиметься нерівність $|y_n - 0| < \varepsilon$, тобто всі члени послідовності (y_n) з номерами $n > n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ містяться в ε-околі точки 0. Далі необхідно зазначити, що в цьому випадку число 0 називають границею послідовності $(y_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ і записують $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ або $\frac{1}{n}\to 0$ $(n\to\infty)$.

Проведені міркування дозволять учням самостійно сформулювати такі означення:

Озн.6 (границі послідовності на мові околів). Число a називають границею послідовності (y_n), якщо в будь-якому околі точки a містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, тобто в будь-якому околі точки a міститься нескінчена кількість членів послідовності (y_n), а за межами його знаходиться не більше, ніж скінченна їх кількість. (Під поняттям не більше, ніж скінченна кількість членів розуміють скінченну кількість членів або жодного члена).

Озн.7 (границі послідовності на мові "ε-n_0"). Скінченне число a називають границею послідовності (y_n), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що нерівність $|y_n-a|<\varepsilon$ має місце для всіх $n>n_0(\varepsilon)$. При цьому позначають $a=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ або $y_n\to a$ $(n\to\infty)$. Після цього можна ввести символічний запис означення 7 границі послідовності:

$$a=\lim_{n\to\infty}y_n \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon): \quad |y_n-a|<\varepsilon \quad \forall n>n_0(\varepsilon).$$

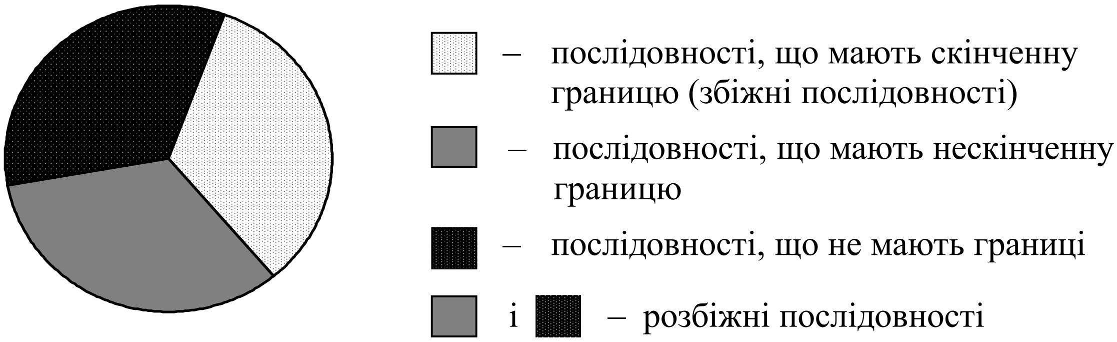
Необхідно наголосити учням, що перше означення границі послідовності є геометричним, а друге – аналітичним.

На основі означення 6 учні відразу ж зможуть встановити, що $+\infty$ є границею послідовності (x_n): $x_n=2n$ $\forall n$. Виходячи з цього означення, вони також вкажуть, при якій умові певне число a не буде границею заданої послідовності: *число a не є границею послідовності (y_n)*, якщо існує окіл цієї точки, за межами якого знаходиться нескінченна кількість членів послідовності (y_n). На основі цього, виходячи з суто геометричних міркувань, вони зможуть легко встановити, що послідовність (g_n): $g_n=(-1)^n$ $\forall n$ не має границі.

Спираючись на означення 7, слід розкрити учням суть поняття границі послідовності: *число a є границею послідовності* (y_n), *якщо її члени* *при досить великих номерах n як завгодно мало відрізняються від a (майже дорівнюють числу a).*

Особливостями запропонованої методики введення поняття границі послідовності є те, що припущення, висунуті на основі міркувань наочності, одержують відповідне аналітичне обгрунтування, учні самостійно приходять до формулювання різних означень границі послідовності. Тому вона приваблива принаймні з двох позицій. По-перше, ця методика передбачає активне включення учнів у процес підведення до поняття та формулювання його означення, що забезпечує свідоме оволодіння ними цим поняттям. По-друге, запропонована методика, яка передбачає паралельне використання як міркувань наочності, так і аналітичних викладок, що підтверджують ці міркування, дозволяє використати її (в повному обсязі або фрагментарно) в різних типах класів. Так, наприклад, підведення до поняття границі послідовності на основі лише геометричних міркувань з наступним формулюванням означення цілком придатне навіть для класів гуманітарного профілю. В повному обсязі запропонована методика введення поняття границі послідовності може бути використана як в математичних, так і в загальноосвітніх класах.

Далі доцільно ознайомити учнів з поняттями збіжної і розбіжної послідовностей. Це можна зробити так. Учням зазначити, що розглянуті приклади послідовностей підтверджують, що деякі послідовності можуть мати скінченні границі, а деякі нескінченні. Якщо границею послідовності є скінченне число, то вона називається *збіжною* (наприклад, послідовності $(y_n)=$[illegible] і $(z_n)=\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)$ є збіжними, оскільки їх границями є відповідно числа 0 і 2). Послідовність, яка не є збіжною, називається *розбіжною* (наприклад, $(x_n)=(2n)$ і $(g_n)=((-1)^n)$. Доцільно буде разом із учнями встановити співвідношення між збіжними, розбіжними послідовностями та послідовностями, що мають і не мають границі, і проілюструвати ці співвідношення, наприклад, таким малюнком:



Учнів необхідно також ознайомити з такими поняттями як нескінченно велика і нескінченно мала послідовності.

На уроках математики у класах математичного спрямування особливу увагу слід приділити формуванню в учнів навичок розв’язування задач такого типу: “довести, що число a є границею послідовності (y_n)”. На основі кількох розв’язаних задач необхідно разом із учнями скласти правило-орієнтир розв’язування задач такого типу, яке представляє собою послідовне виконання таких кроків:

1) вибирають довільне фіксоване $\varepsilon>0$;

2) нерівність $|y_n-a|<\varepsilon$ розв’язують відносно n, в результаті чого одержують нерівність $n>\varphi(\varepsilon)$, з якої випливає нерівність $|y_n-a|<\varepsilon$ ($\varphi(\varepsilon)$ – деякий вираз, залежний від ε);

3) за $n_0(\varepsilon)$ вибирають цілу частину $\varphi(\varepsilon)$, коли $\varphi(\varepsilon)>0$, тобто $n_0(\varepsilon)=[\varphi(\varepsilon)]$, коли $\varphi(\varepsilon)>0$, і 1 або будь-яке інше натуральне число, коли $\varphi(\varepsilon)\leq 0$. У будь-якому з цих випадків маємо, що для всіх $n>n_0(\varepsilon)$ справджується нерівність $|y_n-a|<\varepsilon$, а тому внаслідок довільності ε за означенням границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Деякі моменти слід обгрунтувати. Наприклад, чому у випадку, коли $\varphi(\varepsilon)\leq 0$, за $n_0(\varepsilon)$ можна взяти будь-яке натуральне число. Крім того, учням необхідно зауважити, що у більшості випадків розв’язування нерівності $|y_n-a|<\varepsilon$ відносно n викликає значні труднощі, а інколи цю нерівність взагалі неможливо розв’язати відносно n. Тому доводиться застосовувати так звану операцію “підсилення нерівності”. Саме цей момент (“підсилення нерівності”) досить часто є незрозумілим багатьом учням, що вимагає проведення відповідних пояснень.

На уроках математики для закріплення поняття границі послідовності не варто обмежуватися розглядом задач лише вказаного типу. Для глибокого усвідомлення учнями суті цього поняття корисними можуть бути задачі такого типу: “використовуючи означення границі послідовності, довести, що число a не є границею послідовності (y_n)”.

Доцільно розглянути деякі вправи, як наприклад: для чотирьох даних послідовностей, розв’язавши відносно n нерівність $|y_n-2|<\varepsilon$, одержали відповідно: 1) $n>(\varepsilon+1)/\varepsilon$; 2) $n<9/(1-3\varepsilon)$; 3) $n>(5+2\varepsilon)/\varepsilon$; 4) $n<\varepsilon/(\varepsilon+1)$. Для яких з цих послідовностей число 2 є границею?

Серед властивостей границь послідовностей необхідно розглянути такі: про єдиність границі, про границю суми, різниці, добутку і частки послідовностей.

Особливу увагу слід приділити знаходженню границь послідовностей, коли застосування властивостей про границю суми, різниці, добутку і частки послідовностей є неможливим. Тут слід розглянути приклади, коли застосування цих властивостей призводить до різноманітних невизначеностей: $\frac{\infty}{\infty}$, [illegible], $\infty-\infty$ тощо.

Розглядаючи невизначеності, особливу увагу слід концентрувати на невизначеності вигляду [illegible], розглянувши при цьому достатню кількість прикладів, які б підтверджували можливості існування скінченної границі послідовності $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, коли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Це важливо із пропедевтичних цілей, оскільки саме на невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$ грунтується поняття похідної, і учні досить часто не розуміють, чому існує і є скінченним числом $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, коли $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$.

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / За ред. А.М.Колмогорова. – К.: Освіта, 1994. – 352 с.
2. Алгебра і початки аналізу: Проб. підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995. – 608 с.

Резюме. В статье изложена методика преподавания темы "Предел последовательности" в общеобразовательных учебных заведениях.

Summary. The article deals with the methods of teaching the theme "Limit of Succession" in secondary educational establishments.

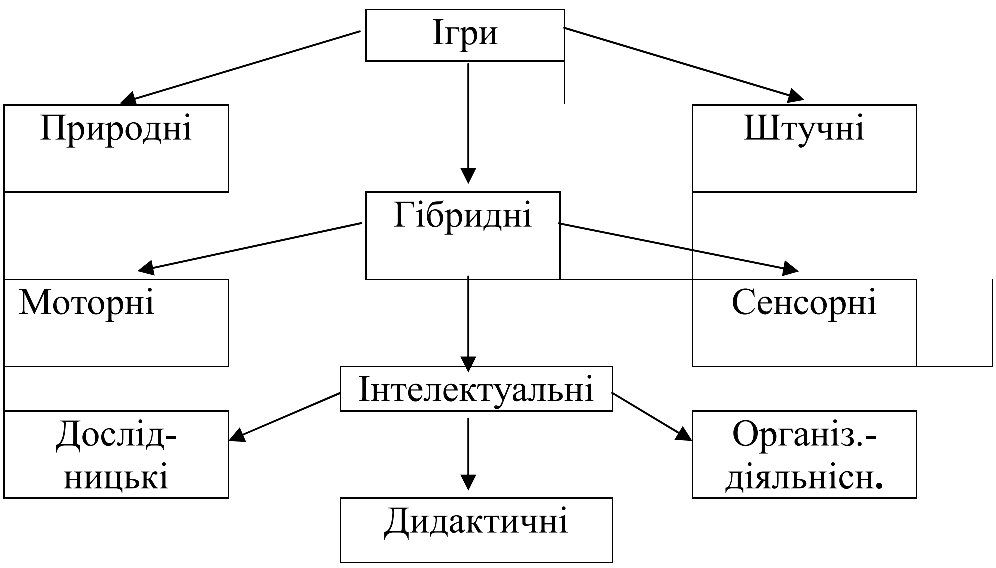
ДИДАКТИЧНІ ІГРИ, ЇХ ВИДИ, ЦІЛЬОВЕ ПРИЗНАЧЕННЯ І ФУНКЦІЇ В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

Л.В.Тополя, старший викладач,
НПУ імені М.П.Драгоманова, м. Київ

Основними видами діяльності людини є гра, навчання та праця, причому гра не тільки готує дитину до навчання і праці, а разом з ними сама є навчанням і працею. С.А.Шмаков дуже образно говорить про значення гри, називаючи її "восьмим" чудом світу [1].

У науково-методичній літературі можна зустріти різні класифікації ігор залежно від того, що покладено в основу цієї класифікації. Найбільш загальною та вдалою є класифікація В.Г. Семенова [2].

Класифікація ігор



Запропонована схема дозволяє зробити такі висновки.

1. Усі гібридні ігри за характером ведучих ігрових дій можна розділити на три групи: інтелектуальні, моторні й сенсорні. У реальній ігровій діяльності, як правило, присутні елементи всіх указаних ігор, але тільки один із них є відповідальним за розв'язання ігрових задач, решта – йому підкоряються та залежні від нього.

2. Усі структурні елементи гри займають вихідне положення, яке співпадає з їх положенням у структурі інших видів діяльності, зокрема, викладання та навчання, і саме це дозволяє поєднувати їх. Так, поєднання структур гібридної гри та навчання породжує ***дидактичну гру***, у якій поряд з розважальним компонентом обов'язково присутні навчально-творчі і виховні і саме їм надається перевага. Саме слово "дидактична" означає "наставницька, повчальна" [3, с. 168]. Суттєва ознака дидактичної гри, на відміну від ігор взагалі, – це наявність чітко поставленої мети навчання та відповідного їй педагогічного результату.

Дидактичні ігри залежно від ігрової мети можна поділити на **чотири види**: 1) *творчі ігри*, які базуються на внесенні елементів уявної ситуації та використовуються з метою повторення й узагальнення вивченого матеріалу; 2) *ігри-змагання,* що передбачають виявлення переможця (індивідуального або колективного) і які найчастіше використовуються у процесі вироблення вмінь та навичок; 3) ігри, які націлені на виконання цікавого, *захоплюючого* завдання та використовуються з метою розвитку пізнавального інтересу, прояву зацікавленості предметом; 4) ігри з використанням *роздаткового* матеріалу.

Складний характер дидактичної гри вимагає і ***багатоаспектного*** її розгляду, що дозволить побачити різні напрями для її класифікаціїї.

У ***процесуальному аспекті*** виділяються чотири напрями щодо класифікації дидактичних ігор: 1) за рівнем пізнавальної активності і самостійності учнів: *репродуктивні, конструктивні і творчі;* 2) за логікою чергування кроків гри (логічні ознаки): *індуктивні, дедуктивні, традуктивні*; 3) за способом прийняття ігрових рішень в часі: *дискретні*, які передбачають жорсткі інтервали прийняття ігрових рішень; *неперервні*, що дають постійну можливість взаємодії з ігровим підходом у принятті рішень; *комбіновані*, у яких допускається можливість отриманя інформації і прийняття рішення як дискретним, так і неперервним способом; 4) за часом перебігу гри в процесі включення її в навчання: *короткочасні*, за яких відбувається локалізоване включення гри в процес навчання; *довготривалі* – розподіл в часі з тривалим включенням у навчання; *"ділові"* – під час вивчення цілої теми, для професійної орфєнтації.

В ***управлінському аспекті*** можна виділити такі напрями класифікації: 1) за схемою організації контролю і самоконтролю: *усні, письмові, машинні*; 2) за способом оцінювання результатів і прийняття рішень: *вільні* – результати визначаються або вчителем або учнями; *жорсткі* – результати прийнятих рішень оцінюються моделлю гри; *контурні* – результати рішень фіксуються в процесі гри і підсумовуються в кінці; 3) за формою проведення гри: *колективні, групові, індивідуальні, мережеві.*

Соціально-психологічний аспект передбачає три напрями класифікації: 1) за характером ігрового процесу: *комбінаторні ігри*, які дозволяють в загальний хід гри включати додаткові умови; *азартні*, які включають прийоми підвищеної пізнавальної активності учнів, що викликають в них нетерпіння і жагуче бажання перемогти; *стратегічні*, які дають можливість учням включатися в тактику проходження гри; 2) за включенням виду гри в навчальний процес: *ігри-змагання*, які діють на почуття учня і створюють позитивний настрій у навчанні; *художні*, під час яких учні можуть виступати, виносячи на обговорення свої продумані відповіді*; загадково–виграшні*, які сприяють самостійному інтелектуальному мисленню і фантазії; 3) за співпаданням або неспівпаданням цілей суб'єктів гри: ігри, учасники яких мають *спільні цілі й інтереси*; ігри, учасники яких мають *спільні цілі й різні інтереси*; ігри, учасники яких мають *різні цілі й спільні інтереси.*

Основними структурними компонентами дидактичної гри є: 1) ігровий задум, який виражається в назві гри та в тій дидактичній задачі, яку треба розв'язати в ході гри; 2) правила, які визначають порядок дій і поведінки учнів у процесі гри; 3) ігрові дії, які регламентуються правилами гри і сприяють пізнавальній активності учнів; 4) пізнавальний зміст, що є основою дидактичної гри, і полягає у засвоєнні тих знань і вмінь, які застосовуються в процесі розв'язування навчальної проблеми, що визначається грою; 5) обладнання дидактичної гри, що включає також технічні та комп'ютерні засоби навчання, роздатковий матеріал, наочність; 6) результат, який є фіналом гри і надає їй завершеності, а також є показником рівня ігрових і навчальних досягнень учнів.

Усі структурні компоненти гри тісно взаємозв'язані, і відсутність одного з них може порушити гру або призвести до недосягнення мети гри та уроку.

Відповідно до функцій, які здатні виконувати дидактичні ігри, їх можна класифікувати так: 1) навчальні; 2) закріплюючі; 3) повторювальні; 4) узагальнюючі; 5) захоплюючі; 6) розвивальні.

Серед **основних вимог**, які ставляться перед дидактичною грою, варто назвати такі: 1) наявність навчальної задачі (формування, уточнення, систематизація, розвиток певних знань, умінь і навичок, розвиток мислення, виховання якостей особистості); 2) існування чітко сформульованої та вираженої проблеми з аргументацією мети і завдань діяльності учнів; 3) наявність учасників гри, спільне завдання яких – аналіз навчально-ігрової ситуації і прийняття рішень відповідно до призначеної для кожного учасника ролі; присутність учителя (керівника), завдання якого – інформування про хід гри, аналіз прийнятих учнями рішень, своєчасне корегування дій учнів тощо; 4) чіткий розподіл ролей серед учнів і визначення функцій кожного з них; відмінність між ролевими цілями (кожен учасник має певні обов'язки, які не слід виконувати іншому, інакше важко буде об'єктивно оцінити діяльність кожного учня); 5) наявність системи об'єктивних стимулів (або мотивів), які спонукують учасників активно працювати на кінцевий результат; 6) створення особливих навчальних умов, так званої ігрової ситуації; 7) об'єктивність та однорідність умов, правил та обмежуючих факторів для всіх учасників дидактичної гри; 8) наявність можливостей для вільного пошуку в грі, що має базуватися на творчості та самодіяльності учнів, носити колективний характер; 9) доступність завдань гри (мета гри має бути досяжною); 10) емоційність гри, наявність естетичного оформлення; 11) присутність елементів змагання між командами або окремими учасниками (що підвищує самоконтроль учнів, веде до чіткого виконання встановлених правил та активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів); 12) наявність невизначеності, часом, конфліктності, що надає грі полемічного характеру; 13) неможливість повної формалізації ситуацій; 14) наявність динамічності в діях учасників гри під час розв'язування ними завдань.

Дидактична гра, виконуючи пізнавальну, виховну та розвиваючу функції, сприяє мобілізації особистості на розв'язання задач при активній взаємодії з усіма учасниками гри відповідно з правилами і конкретними педагогічними умовами.

Для раціонального використання дидактичних ігор в навчально-виховному процесі необхідно враховувати особливості різних їх видів і покласти це в основу створення відповідних методик. Це сприятиме ефективності навчального процесу, оскільки правильно організовані і вдало здійснені дидактичні ігри виконують такі **дидактичні задачі**:

– забезпечують реалізацію особистісно-орієнтованого навчання насамперед через можливість стимулювання в учнів різних за природою мотивів;

– зменшують ймовірність появи негативних побічних продуктів навчання (втоми, нудьги тощо), або значно відсувають момент їх появи;

– розвивають в учнів елементарні дослідницькі навички, постійно захоплюючи гравця перспективою, зміною ролей, персонажів, наявністю потайних стимулів;

– дають нагоду учням відволіктися від цілеспрямованого натиску навчальної діяльності, домінуючих впливів, заглибитися у змодельоване грою середовище;

– розвивають їх розумові, психічні, вольові якості та функції;

– змінюють ставлення до оточуючого світу та пошук свого місця в ньому.

Дитячі ігри у процесі навчально-пізнавальної діяльності учнів, сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу, розвивають творчі здібності, навики організаціїї сумісної діяльності, виховують волю і характер дитини, наполегливість і посидючість, витримку і винахідливість, вміння володіти собою за будь-яких обставин.

Дидактична гра привчає учнів до самоконтролю, відповідального ставлення до прийнятих на себе обов’язків, чіткого слідування встановленим правилам. Емоційні переживання, які виникають в учня під час гри, сприяють максимальному розумовому напруженню, і максимальному прояву його можливостей.

Відчуття задоволення, яке отримує учень у процесі подолання труднощів дидактичної гри, дуже швидко переростає в інтерес до труднощів процесу навчання, що сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів. Крім того, з часом гра не викликатиме інтересу, якщо вона не передбачатиме подолання певних труднощів.

Іноді організована навчальна діяльність учнів на уроці може тільки вважатися дидактичною грою, але нею не буде. У зв’язку з цим виділимо **ознаки гри**, в тому числі **дидактичної**:

1. Відносно вільний прояв діяльності гравця в рамках правил гри.

2. Активна творча форма діяльності кожного учасника гри з урахуванням його розумових, фізичних, психічних можливостей.

3. Емоційна насиченість ігрової дії.

4. Направленість дії її учасників не тільки на результат, а й на процес.

1. Шмаков С.А. Игры учащихся – феномен культуры. – М.: Просвещение, 1994.
2. Семенов В.Г. Динамическая классификационная модель игры. – К.: АН СССР, 1984.
3. Д.Б.Ельконин. Психология игры. М.: Просвещение, 1978. – 324 с.

Резюме. В статье идет речь о видах, функциях и признаках дидактической игры.

Summary. The article deals with the forms, functions and sighs of didactic games.

ЗМІСТ

У ВАК України

Постановою Президії ВАК України від 10.11.99 №3-05 11 затверджено перелік наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт. До розділу "Педагогічні науки" включено наш збірник наукових праць "Дидактика математики: проблеми і дослідження" (Бюлетень ВАК України, 1999, №6), який є продовженням видання "Евристика та дидактика точних наук" міжнародного збірника наукових робіт. Нумерація випусків продовжується.

Наукове видання

**ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ПРОБЛЕМИ І ДОСЛІДЖЕННЯ
МІЖНАРОДНИЙ ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ**

Випуск 16

Рекомендовано до друку вченою радою Донецького національного університету 30.11.2001 (протокол №9).

Редакція збірника:

Науковий редактор – канд. пед. наук, доц. Скафа Олена Іванівна.
Тел.: (38)-(0622)-919244 (р.) (38)-(0622)-554429 (д.), код для СНД (0622).
E-mail: skafa@univ.donetsk.ua

Відповідальний секретар – ст. викл. Хорольська Олена Вікторівна
Тел.: (38)-(0622)-992375 (р.), (38)-(062)-3378985 (д.).
E-mail: Horol@bio.donetsk.ua

Адреса редакції збірника: Кафедра вищої математики та методики викладання математики. Донецький національний університет, вул. Університетська, 24, Донецьк, 83055, Україна

Узгоджені матеріали надсилати за адресою:
Хорольській О.В., пр.Миру, 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна

Підписано до друку 29.04.2001 р. Формат 60x90/16. Папір типографський. Друк Офсетний. Умовн. друк. арк. 11. Тираж 300 прим. Замовлення № _____

Видавництво Донецької фірми наукоємних технологій НАН України
(Фірми ТЕАН)
Україна, 83050, Донецьк, а/я 435. E-mail: tean@an.dn.ua
Надруковано: Лабораторія комп’ютерних технологій Донецького національного університету, 83055, м.Донецьк, вул. Університетська, 24