

ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ
*Основан
в 1997 году*

Серия А
**Естественные
науки**

3-4/2019

Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»

Главный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**.

Зам. главного редактора – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**.

Ответственный секретарь – канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**.

Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Тройский университет, США); д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences”

The Editor-in-Chief – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**.

The Deputy of the Editor-in-Chief – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**.

Executive Secretary – Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**.

The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr of of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA); Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, 83001

Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92.

E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – Математика; 01.02.00 – Механика; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки; 03.02.00 – Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Протокол № 10 от 24.12.2019 г.*

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Бондарев Б.В., Мельничук Н.Ю.* Гарантированное оценивание неизвестного параметра, линейно входящего в снос стохастического дифференциального уравнения Ито с периодическими коэффициентами 5
- Манов А.Д.* Принцип максимума для решений одной задачи Коши 12

Механика

- Белоконь Т.В.* О движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, в решениях уравнений динамики с тремя инвариантными соотношениями 18
- Глухов А.А., Номбре С.Б., Сторожев С.В., Шалдырван В.А.* Нечетко-множественные оценки для фазовых скоростей нормальных волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с разбросом значений физико-механических параметров 31
- Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит 37
- Калоеров С.А.* Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба 58
- Моисеенко И.А., Моисеенко В.А., Бобакова Р.В.* Распространение нормальных волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных двухслойных цилиндрах 80
- Приيمنко С.А., Сторожев С.В., Шалдырван В.А., Чан Ба Ле Хоанг.* Методика анализа факторов неопределенности в модели резонансных колебаний трехслойных композитных цилиндрических панелей 88
- Сторожев В.И., Нескородев Р.Н.* Ползучесть массивов анизотропных горных пород с выработками усложненной формы сечения 95

Химические науки

- Зубарева Т.М., Белоусова И.А., Гайдаш Т.С., Разумова Н.Г., Прокопьева Т.М., Михайлов В.А.* Кислотно-основные свойства фенолов в мицеллах ПАВ 107
- Лозинский Н.С., Мороз Я.А.* Высокотемпературные твердофазные реакции в оксидных системах с участием соединений рутения (IV) 114
- Тюрина Т.Г., Крюк Т.В., Лаврова А.И.* Получение сукцинамидов производных *n*-аминобензойной кислоты 127
- Хилько С.Л., Рогатко М.И.* Формирование поверхностных слоев солей гуминовых и гиматомелановых кислот на границе раздела жидкость-газ 134

- Хилько С.Л., Рогатко М.И., Шелест В.С., Макарова Р.А., Семенова Р.Г., Невечеря О.И., Хилько А.С. Формирование поверхностных слоев этоксилированных производных гуминовых кислот на границе раздела жидкость-газ 144

Биологические науки

- Кольченко О.Р., Корниенко В.О. Эколого-биологическая характеристика *Acer platanoides* L. в условиях г. Донецка 151
- Котенев П.Д. К познанию биологии *Adonis vernalis* Linnaeus, 1753 в Северном Алтае 162
- Кравсун Т.И., Федоркина И.А. Фитоиндикационная оценка состояния техногенной среды с помощью *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medic. 166
- Сафонов А.И., Гермонова Е.А. Комплексный показатель нарушенности экотопов по фитоиндикационному критерию в г. Донецке 171

CONTENTS

Mathematics

- Bondarev B.V., Melnichuk N.Y.* The guaranteed estimation of the unknown linear input parameter in the drift of the Ito's stochastic differential equation with the periodic coefficients 5
- Manov A.D.* Maximum principle for solution of a Cauchy problem 12

Mechanics

- Belokon T.V.* About the motions of the rigid body with the fixed point in solutions of equations of dynamic with three invariant relations 18
- Glukhov A.A., Nombre S.B., Storozhev S.V., Shaldyrvan V.A.* Fuzzy-set assessments for phase speeds of normal shear waves in an anisotropic functional-gradient layer with scatter errors of values of physical and mechanical parameters 31
- Kaloerov S.A.* Complex potentials of the bend theory of thin electromagnetic electric plates 37
- Kaloerov S.A.* Problems of electroelastic, magnetoelastic and elastic bend of thin plates, as particularities of the task of electromagnetoelastic bend 58
- Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A., Bobakova R.V.* Propagation of normal waves in functionally gradient transversally isotropic two-layer cylinders 80
- Priymenko S.A., Storozhev S.V., Shaldyrvan V.A., Tran Ba Le Hoang.* Method of analysis of uncertainty factors in the model of resonant vibrations of three-layer composite cylindrical panels 88
- Storozhev V.I., Neskorochev R.N.* Creep of massif anisotropic rocks with excavation of the complicated section form 95

Chemical sciences

- Zubareva T.M., Belousova I.A., Gaidash T.S., Razumova N.G., Prokop'eva T.M., Mikhailov V.A.* Acid-base properties of phenols in micelles of surface active compounds 107
- Lozynskyy M.S., Moroz Y.A.* High-temperature solid-phase reactions in oxide systems involving ruthenium (IV) compounds 114
- Tyurina T.G., Kryuk T.V., Lavrova A.I.* Synthesis of succinamides of p-aminobenzoic acid derivatives 127
- Khil'ko S.L., Rogatko M.I.* Formation of surface layers of humic and himatomelanic acids salts at liquid-gas interface 134

<i>Khil'ko S.L., Rogatko M.I., Shelest V.S., Makarova R.A., Semenova R.G., Nevecherya O.I., Khil'ko A.S.</i> Formation of surface layers of humic acids ethoxylated derivatives at the liquid-gas interface	144
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Biological sciences

<i>Kolchenko O.R., Kornienko V.O.</i> Ecological and biological characteristics of <i>Acer platanoides</i> L. in the conditions of Donetsk	151
<i>Kotenev P.D.</i> To the knowledge of biology <i>Adonis vernalis</i> Linnaeus, 1753 in Northern Altai	162
<i>Kravsun T.I., Fedorkina I.A.</i> Phytoindicative assessment of the industrial environment state using <i>Capsella bursa-pastoris</i> (L.) Medic.	166
<i>Safonov A.I., Germonova E.A.</i> A comprehensive indicator of ecotope disturbance by phytoindication criterion in Donetsk	171

М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.21

**ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА,
ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩЕГО В СНОС СТОХАСТИЧЕСКОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИТО С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

© 2019. *Б.В. Бондарев, Н.Ю. Мельничук*

В работе построен доверительный интервал для оценки неизвестного параметра в сносе стохастического дифференциального уравнения Ито в случае периодических коэффициентов. В работе используется техника мартингалных экспоненциальных неравенств, плотность вероятностных мер. В качестве оценки неизвестного параметра рассматривается оценка максимального правдоподобия. Построен интервал накрытия неизвестного параметра с гарантированной вероятностью накрытия.

Ключевые слова: оценка; неизвестный параметр; экспоненциальные неравенства; периодические коэффициенты; индикатор.

Введение. Вопросом оценки неизвестных параметров в сносе стохастического дифференциального уравнения посвящено значительное число исследований. Случай оцениваемого неизвестного параметра в сносе дифференциала, возмущённого винеровским процессом, подробно исследован в монографии Ибрагимова И.А. и Хасьминского Р.З. [1]. Случай диффузионных уравнений исследован в книгах Липцера Р.Ш. и Ширяева А.Н. [2], Линькова Ю.Н. [3]. В работе [4] рассмотрена задача оценки неизвестного параметра в периодическом коэффициенте сноса в условиях «слабого сигнала», то есть, когда при коэффициенте сноса стоит малый параметр. Оценке неизвестного параметра в системах со слабым сигналом и, в частности, при внутреннем и внешнем диффузионном зашумлении, посвящены работы Б.В. Бондарева и Ю.О. Куриловой [5, 6]. В данной работе рассматривается случай, когда неизвестный параметр линейно входит в снос стохастического дифференциального уравнения Ито с периодическими коэффициентами. Результаты для частного случая рассматриваемой задачи представлены в [7]. Данная статья является более общим и сложным случаем.

Постановка задачи. Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_{\theta_0}(t) = \theta_0 a(\xi_{\theta_0}(t))dt + \sigma(\xi_{\theta_0}(t))dW_1(t), \quad (1)$$

где θ_0 – неизвестный параметр, $\theta_0 \in \Theta$, Θ – некоторое ограниченное параметрическое множество, $W_1(t)$ – винеровский процесс. Коэффициенты $a(x)$, $\sigma(x)$ описываются неравенством

$$\frac{a^2(x)}{\sigma^2(x)} + \frac{\sigma^2(x)}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{2 - e^{-x}} \geq \rho^2 > 0. \quad (2)$$

Коэффициенты $a(x)$, $\sigma(x)$, как и в [8], – ограниченные, 1-периодические функции, имеющие производные первого порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера.

Плотность мер для (1) выписывается через соотношение

$$\frac{d\mu_{\theta}}{d\mu_{\theta_0}}(\xi_{\theta_0}(\cdot)) = \exp \left\{ (\theta - \theta_0) \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) - \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\}.$$

В качестве оценки неизвестного параметра возьмем выражение, которое является согласно [9] оценкой максимального правдоподобия:

$$\theta_T = \frac{\int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} d\xi_{\theta_0}(t)}{\int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt}.$$

Построим доверительный интервал для неизвестного параметра

$$\begin{aligned} P\{\sqrt{T}|\theta_T - \theta_0| > R\} &= P\left\{ \left[\sqrt{T}(\theta_T - \theta_0) > R \right] \cup \left[-\sqrt{T}(\theta_T - \theta_0) > R \right] \right\} = \\ &\leq P\{\sqrt{T}(\theta_T - \theta_0) > R\} + P\{-\sqrt{T}(\theta_T - \theta_0) > R\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Оценим первое слагаемое из правой части (3) следующим образом (второе слагаемое оценивается аналогичным образом):

$$\begin{aligned} P\{\sqrt{T}(\theta_T - \theta_0) > R\} &= \\ &= P\left\{ \sqrt{T} \frac{\int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t)}{\int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt} > R \right\} = P\left\{ \sqrt{T} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) > R \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Возьмем $z > 0$ и перепишем равенство (4) в виде

$$\begin{aligned} P\{\sqrt{T}|\theta_T - \theta_0| > R\} &= P\left\{ \frac{z}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) > Rz \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} = \\ &= P\left\{ \left[\frac{z}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{T}} \right)^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt > \left(Rz - \frac{z^2}{2} \right) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right] \cap \right. \\ &\quad \left. \cap \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right] \right\} + \\ &+ P\left\{ \left[\frac{z}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{T}} \right)^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt > \left(Rz - \frac{z^2}{2} \right) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right] \cap \right. \\ &\quad \left. \cap \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt > \varepsilon^2 \right] \right\} \leq \\ &\leq P\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\} + P\left\{ \frac{z}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{T}} \right)^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt > \left(Rz - \frac{z^2}{2} \right) \varepsilon^2 \right\}. \end{aligned}$$

Выше воспользовались неравенством Чебышева, при этом математическое ожидание от экспоненциального мартингала равно 1.

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \exp \left\{ \frac{z}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{T}} \right)^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} > \exp \left\{ \left(Rz - \frac{z^2}{2} \right) \varepsilon^2 \right\} \right\} \leq \\
 & \leq M \left\{ \exp \left\{ \frac{z}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{T}} \right)^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} \times \left(\exp \left\{ \left(Rz - \frac{z^2}{2} \right) \varepsilon^2 \right\} \right)^{-1} \right\} \leq \\
 & \leq \exp \left\{ \left(\frac{z^2}{2} - Rz \right) \varepsilon^2 \right\}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Минимизируя правую часть в (5) по z , ($0 < z < +\infty$), при $z^* = R$, получим оценку

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \exp \left\{ \frac{z}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{a(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma(\xi_{\theta_0}(t))} dW_1(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{T}} \right)^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} > \exp \left\{ \left(Rz - \frac{z^2}{2} \right) \varepsilon^2 \right\} \right\} \leq \\
 & \leq \exp \left\{ \left(\frac{R^2}{2} - R^2 \right) \varepsilon^2 \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{R^2}{2} \varepsilon^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, при некотором $z^* = R$ и некотором малом $\varepsilon > 0$ построен доверительный интервал для θ_0

$$P \left\{ \sqrt{T} |\theta_T - \theta_0| > R \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{R^2 \varepsilon^2}{2} \right\} + 2P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\}. \tag{6}$$

Заметим, что при значении параметра $\theta_0 = 0$, $\xi_0(t)$ сводится к опорному процессу

$$d\xi_0(t) = \sigma(\xi_0(t)) dW_1(t).$$

Оценим малые отклонения. Перейдем во втором слагаемом (6) к индикатору события и воспользуемся методом замены вероятностных мер:

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\} = M\chi \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right) \leq \\
 & \leq \exp \{ \varepsilon^2 T \} \times M\chi \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right) \times \exp \left\{ -\int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} \leq \\
 & \leq \exp \{ \varepsilon^2 T \} \times M\chi \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right) \times \exp \left\{ -\int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \right\} \times \\
 & \quad \times \exp \left\{ \theta_0 \int_0^T \frac{a(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} d\xi_0(t) - \frac{1}{2} \theta_0^2 \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} \leq \\
 & \leq \exp \{ \varepsilon^2 T \} \times M\chi \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right) \times \exp \left\{ \theta_0 \int_0^T \frac{a(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} d\xi_0(t) - \left(\frac{\theta_0^2}{2} + 1 \right) \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \exp\{\varepsilon^2 T\} \times \left(M \left(\chi \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right) \right)^p \right)^{1/p} \times \\ &\times \left(M \exp \left\{ q \theta_0 \int_0^T \frac{a(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} d\xi_0(t) - q \left(\frac{\theta_0^2}{2} + 1 \right) \int_0^T \frac{a^2(\xi_{\theta_0}(t))}{\sigma^2(\xi_{\theta_0}(t))} dt \right\} \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \exp\{\varepsilon^2 T\} \left(P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\} \right)^{\frac{2}{L^2+2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применяем в (7) неравенство Гёльдера, коэффициенты для показателей степеней которого подбираем следующим образом:

$$\frac{\theta_0^2}{2} q = \frac{\theta_0^2}{2} + 1,$$

откуда $q = \frac{\theta_0^2 + 2}{\theta_0^2}$.

Используя соотношение $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, нетрудно убедиться в том, что $\frac{1}{p} = \frac{2}{\theta_0^2 + 2}$.

Оценим θ_0 сверху, как $|\theta_0| < L$, при этом неравенство только усилится.

Далее рассмотрим функцию распределения

$$F(x) = P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt < x \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\} &= F(\varepsilon^2) = \int_0^{\varepsilon^2} dF(x) = \int_0^{\varepsilon^2} \exp\{\lambda x\} \cdot \exp\{-\lambda x\} dF(x) \leq \\ &\leq \int_0^{\varepsilon^2} \exp\{\lambda \varepsilon^2\} \cdot \exp\{-\lambda x\} dF(x) \leq \exp\{\lambda \varepsilon^2\} \int_0^{\varepsilon^2} \exp\{-\lambda x\} dF(x) = \\ &= \exp\{\lambda \varepsilon^2\} \cdot M \exp \left\{ -\lambda \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \right\}. \end{aligned}$$

Возьмем $\lambda = T$, тогда

$$P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\} \leq \exp\{T \varepsilon^2\} \cdot M \exp \left\{ -\int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \right\}. \quad (8)$$

Далее воспользуемся идеями, аналогичными представленным в работе [10]. Тогда из [11] функция $u(t, x) = M \exp \left\{ -\int_0^t \frac{a^2(\xi_0(\tau))}{\sigma^2(\xi_0(\tau))} d\tau \right\}$ является решением уравнения с частными производными параболического типа:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a^2(x)}{\sigma^2(x)} u(t, x),$$

$$u(0, x) = 1.$$

Введем функцию

$$V(t, x) = u(t, x) \cdot (2 - e^{-x})^{-1},$$

тогда $u(t, x) = V(t, x) \cdot (2 - e^{-x})$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $V(t, x)$ является решением вспомогательной задачи.

В нашем случае выполнено неравенство (2), тогда по теоремам сравнения из [12] выполнено $V(t, x) < V_1(t, x)$, где $V_1(t, x)$ является решением задачи:

$$\frac{dV_1(t, x)}{dt} = \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial^2 V_1(t, x)}{\partial x^2} + \sigma^2(x) \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial x} \frac{e^{-x}}{2 - e^{-x}} - \rho^2 V_1(t, x), V_1(0, x) = 1.$$

Нетрудно заметить, что $V_1(t, x) = \exp\{-\rho^2 t\}$. Таким образом, справедлива оценка:

$$u(t, x) \leq 2V_1(t, x) \leq 2 \exp\{-\rho^2 t\}. \quad (9)$$

Тогда используя (9), неравенство (7) может быть использовано в виде:

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\} &\leq \exp\{\varepsilon^2 T\} \left(P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a^2(\xi_0(t))}{\sigma^2(\xi_0(t))} dt \leq \varepsilon^2 \right\} \right)^{\frac{2}{L^2+2}} \leq \\ &\leq \exp\left\{ \varepsilon^2 T \left(1 + \frac{2}{L^2+2} \right) \right\} \cdot 2^{\frac{2}{L^2+2}} \exp\left\{ -\rho^2 T \frac{2}{L^2+2} \right\} = \\ &\leq \exp\left\{ \varepsilon^2 T \left(1 + \frac{2}{L^2+2} \right) \right\} \cdot 2^{\frac{2}{L^2+2}} \exp\left\{ -\rho^2 T \frac{2}{L^2+2} \right\} = \\ &\leq \exp\left\{ -T \left(\rho^2 \frac{2}{L^2+2} - \varepsilon^2 \left(1 + \frac{2}{L^2+2} \right) \right) \right\} \cdot 2^{\frac{2}{L^2+2}} \leq \exp\left\{ -T \rho^2 \frac{1}{L^2+2} \right\} \cdot 2^{\frac{2}{L^2+2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Неравенство (10) получено путем подбора ε^2 , где

$$\varepsilon^2 = \frac{\frac{1}{2} \rho^2 \frac{2}{L^2+2}}{1 + \frac{2}{L^2+2}}.$$

Пусть $R(T) = T^{\frac{1}{2}-\beta}$, $0 < \beta < 1$, тогда с точностью до $\frac{R(T)}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T^\beta}$ получим экспоненциально быстро убывающую оценку

$$P \left\{ |\theta_T - \theta_0| < \frac{1}{T^\beta} \right\} \geq 1 - 2 \exp \left\{ \frac{-T^{1-2\beta} \rho^2 \frac{1}{L^2+2}}{2 \left(1 + \frac{2}{L^2+2} \right)} \right\} - 2^{\frac{2}{L^2+2}} \exp \left\{ -T \rho^2 \frac{1}{L^2+2} \right\} \geq 1 - \gamma. \quad (11)$$

Таким образом, выбирая в (11)

$$\gamma > 2 \exp \left\{ \frac{-T^{1-2\beta} \rho^2 \frac{1}{L^2+2}}{2 \left(1 + \frac{2}{L^2+2} \right)} \right\} + 2^{\frac{2}{L^2+2}} \exp \left\{ -T \rho^2 \frac{1}{L^2+2} \right\},$$

можем утверждать, что при небольших T и заданной надежности $1-\gamma$, можно получить оценку с точностью $1/T^\beta$.

Выводы. В проведении гарантированного оценивания неизвестного параметра получили экспоненциально быстрое убывание справа, что говорит о достаточно высоком качестве построенной оценки для неизвестного параметра, линейно входящего в снос стохастического дифференциального уравнения Ито с периодическими коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский – М.: Наука, 1979. – 528 с.
2. Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш. Липцер, А. Н. Ширяев – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. Линьков Ю. Н. Асимптотические методы статистики случайных процессов / Ю. Н. Линьков – Киев: Наукова Думка, 1993. – 254 с.
4. Бондарев Б. В. Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом/ Б. В. Бондарев, С. М. Козырь // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 3. – С. 109–117.
5. Бондарев Б.В. Об оценке неизвестного параметра в слабом сигнале/ Ю.О. Курилина, Б.В. Бондарев // Донецкие чтения 2017: Русский мир как цивилизационная основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: Материалы Международной научной конференции студентов и молодых ученых (Донецк, 17-20 октября 2017 г.). – Том 1: Физико- математические и технические науки / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2017. – С. 84-86.
6. Бондарев Б.В. Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом при внутреннем и внешнем зашумлениях / Ю.О. Курилина, Б.В. Бондарев // Вестник ДонНУ. Сер.А: Естественные науки. – 2017. – № 3. – С. 3-11.
7. Мельничук Н.Ю. Об оценке неизвестного параметра при коэффициенте сноса уравнения Ито / Н.Ю. Мельничук, Б.В. Бондарев // Тезисы докладов научной конференции студентов факультета математики и информационных технологий: Сб. науч. и науч.- метод. работ. – Донецк: ДонНУ, 2019. – С.44.
8. Бондарев Б.В. Неравенства больших уклонений для оценок неизвестных параметров в стохастических системах / Б.В. Бондарев, А.А. Симогин // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 2. – С. 95–112.
9. Ибрагимов И.А. Асимптотическая теория оценивания / И.А. Ибрагимов, Р.З. Хасьминский. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
10. Бондарев Б.В. Об оценке неизвестного параметра коэффициента сноса уравнения, возмущённого гауссовским шумом / Б.В. Бондарев. // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 42. – С. 3–13.
11. Скороход А.В. Предельные теоремы для случайных блужданий / А.В. Скороход, И.П. Слободенюк. – К.: Наукова Думка, 1970. – 303 с.
12. Михлин С.П. Линейные уравнения в частных производных / С.П. Михлин. – М., 1977. – 430 с.

Поступила в редакцию 11.10.2019 г.

**THE GUARANTEED ESTIMATION OF THE UNKNOWN LINEAR INPUT PARAMETER
IN THE DRIFT OF THE ITO'S STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION
WITH THE PERIODIC COEFFICIENTS**

B.V. Bondarev, N.Y. Melnichuk

In the work in the case of periodic coefficients the confidence interval for the unknown parameter estimate in the drift coefficient of the stochastic differential equation is constructed. The technique of martingal exponential inequalities and closeness of probabilistic measures are used. As an estimate of the unknown parameter, the maximum likelihood estimate is considered. The interval of the unknown parameter covering with the guaranteed probability of the covering is constructed.

Keywords: estimation; unknown parameter; exponential inequalities; periodic coefficients; indicator.

Бондарев Борис Владимирович

Доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: bondarev.mart@gmail.com

Bondarev Boris Vladimirovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor;
Donetsk National University, Donetsk, DPR

Мельничук Наталия Юрьевна

Аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: nata-250396@yandex.ru

Melnichuk Nataliia Yuryevna

Postgraduate student of the Department of Probability and Mathematical Statistics
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.95

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

© 2019. А. Д. Манов

В данной статье доказывается принцип максимума для решений задачи Коши нелокального уравнения теплопроводности. Данный принцип максимума является обобщением принципа максимума для решений задачи Коши обычного уравнения теплопроводности. Метод доказательства связан с теорией положительно определённых функций и в частности с проблемой Шёнберга.

Ключевые слова: принцип максимума, дробный оператор Лапласа, положительно определённые функции, проблема Шёнберга.

Введение. Формулировка результата. Пусть $x, y \in \mathbf{R}^n$. Тогда $(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $\|x\|_2 := |x| := \sqrt{(x, x)}$ и $C_b(\mathbf{R}^n)$ – множество ограниченных и непрерывных на \mathbf{R}^n функций.

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, & t > 0, x \in \mathbf{R}^n; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

Хорошо известно, что если, например, $u_0 \in C_b(\mathbf{R}^n)$, то следующая функция является решением задачи (1):

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x - y, t) u_0(y) dy, \quad (2)$$

где

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ta^2|\xi|^2} e^{i(x, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4ta^2}}.$$

Если дополнительно наложить на решения задачи (1) условия непрерывности и ограниченности, то других решений нет (см., например, [1, Теорема 6.7], [2]). Для решений вида (2) справедлива следующая теорема (см. [1, Лемма 6.3], [2]).

Теорема А. (Принцип максимума). Пусть функция $u(x, t)$ имеет вид (2). Тогда справедливы неравенства:

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x) \leq u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x), \quad t > 0, x \in \mathbf{R}^n.$$

Кроме того, если для некоторых $t > 0$ и $x \in \mathbf{R}^n$ одно из неравенств обращается в равенство, то функция $u \equiv \text{const}$.

В последнее время особый интерес представляют уравнения с производными дробного порядка (см. [3, 4]). В частности, представляет интерес задача Коши для нелокального уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u = 0, & t > 0, x \in \mathbf{R}^n; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (3)$$

где дробный оператор Лапласа при $0 < s < 1$ на пространстве Шварца $S(\mathbf{R}^n)$ определяется следующим равенством:

$$F[(-\Delta)^s u](\xi) = |\xi|^{2s} u(\xi), u \in S(\mathbf{R}^n), \hat{u}(\xi) := F[u](\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x) e^{-i(x, \xi)} dx.$$

Известно (см., например, [3]), что если $u_0 \in C_b(\mathbf{R}^n)$, то решением задачи (3) является следующая функция:

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_s(x - y, t) u_0(y) dy, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_s(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-t|\xi|^{2s}} e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad 0 < s < 1.$$

В работе [3] (см. Лемма 3.2) рассмотрен один из вариантов принципа максимума для решений задачи (3). В данной работе мы докажем следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы А.

Теорема 1. Пусть функция $u(x, t)$ имеет вид (4). Тогда справедливы неравенства:

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x) \leq u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x), \quad t > 0.$$

Кроме того, если для некоторых $t > 0$ и $x \in \mathbf{R}^n$ одно из неравенств обращается в равенство, то функция $u \equiv \text{const}$.

Как будет видно из доказательства, теорема 1 справедлива для решений задач Коши более общего вида, где дробный оператор Лапласа можно заменить псевдодифференциальным оператором с символом специального вида. Отметим также, что метод доказательства теоремы 1 связан с теорией положительно определённых функций, в частности, с проблемой Шёнберга. Прежде чем сформулировать проблему Шёнберга фиксируем некоторые обозначения.

Пусть E – нетривиальное вещественное линейное пространство. Функция $f: E \rightarrow \mathbf{C}$ называется положительно определённой на E ($f \in \Phi(E)$), если при любом $m \in \mathbf{N}$, для любых точек x_1, \dots, x_m из E и для любой системы комплексных чисел c_1, c_2, \dots, c_m выполняется неравенство

$$\sum_{k, j=1}^m c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0.$$

Линейное пространство E и функцию $\rho: E \rightarrow \mathbf{R}$ с условиями $\rho(x) \geq 0$, $\rho(tx) = |t|\rho(x)$, $x \in E$, $t \in \mathbf{R}$, и $\rho(x) \neq 0$ на E , мы обозначим (E, ρ) . Символом $\Phi(E, \rho)$ обозначим класс всех непрерывных функций $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ таких, что функция $f \circ \rho \in \Phi(E)$.

Обозначим символом l_p^n пару (\mathbf{R}^n, ρ) , $n \in \mathbf{N}$, с функцией $\rho(x) := \|x\|_p$, $0 < p \leq \infty$, где $\|x\|_p^p := \sum_{k=1}^n |x_k|^p$ при $0 < p < \infty$ и $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Бесконечномерные пространства l_p определяются аналогично.

Проблема Шёнберга формулируется следующим образом: для заданной пары (E, ρ) требуется определить все такие $\lambda \in \mathbf{R}$, для которых функция $f(t) = e^{-t^\lambda}$ принадлежит классу $\Phi(E, \rho)$.

Хорошо известно, что

$$\exp(-t^\lambda) \in \Phi(E, \rho) \Leftrightarrow 0 \leq \lambda \leq \alpha(E, \rho),$$

где

$$\alpha(E, \rho) := \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \exp(-t^\lambda) \in \Phi(E, \rho) \right\}. \quad (5)$$

Величину (5) для данного (E, ρ) будем называть константой Шёнберга.

Для пространств l_p^n константы Шёнберга известны:

$$\alpha(l_p^n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n=1, 0 < p \leq \infty; \\ p, & \text{если } n \geq 2, 0 < p \leq 2; \\ 1, & \text{если } n=2, 2 < p \leq \infty; \\ 0, & \text{если } n \geq 3, 2 < p \leq \infty. \end{cases} \quad (6)$$

При $0 < p \leq 2$ этот результат был известен Шёнбергу, а в остальных случаях независимо и разными методами был доказан в 1991 Колдобским [5] и Заставным [6– 8] ($2 < p \leq \infty$, $n \geq 2$). Случай $p = \infty$ исследовали в 1989 Misiewicz [9] ($n \geq 3$) и Курицын [10] ($n = 2$).

Вспомогательные факты и утверждения. Доказательство теоремы 1. Отметим следующие свойства функций из $\Phi(E)$. Пусть $f, f_i \in \Phi(E)$. Тогда:

- 1) $|f(x)| \leq f(0)$, $\overline{f(x)} = f(x)$, $x \in E$;
- 2) $|f(x+y) - f(x)|^2 \leq 2f(0)(f(0) - \operatorname{Re} f(y))$, $x, y \in E$;
- 3) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, \overline{f} , $\operatorname{Re} f$, $f_1 f_2 \in \Phi(E)$, где $\lambda_i \geq 0$;
- 4) если для всех $x \in E$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$, то $g \in \Phi(E)$;
- 5) $|f(0)f(x+y) - f(x)f(y)|^2 \leq (f^2(0) - |f(x)|^2)(f^2(0) - |f(y)|^2)$, $x, y \in E$.

Свойства 1)–5) хорошо известны (см., например, [11–14]).

В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин (для $n=1$) доказали следующий критерий положительной определённости в \mathbf{R}^n : *Функция $f \in \Phi(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на \mathbf{R}^n такая, что*

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(u,x)} d\mu(u), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \text{где } (u,x) = u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [12, 14]. Как прямое следствие, мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье: *Если $f \in C(\mathbf{R}^n) \cap L(\mathbf{R}^n)$, то $f \in \Phi(\mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \hat{f}(u) \geq 0, u \in \mathbf{R}^n$, где*

$$\hat{f}(u) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(u,x)} f(x) dx, \quad u \in \mathbf{R}^n$$

и в этом случае $\hat{f} \in L(\mathbf{R}^n)$.

В [15] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если константа Шёнберга $\alpha(\mathbf{R}^n, \rho) > 0$, то $\rho \in C(\mathbf{R}^n)$. Если дополнительно $\rho(x) > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$, то при любом $0 < \lambda \leq \alpha(\mathbf{R}^n, \rho)$ преобразование Фурье функции $f_\lambda(x) := \exp(-\rho^\lambda(x))$ положительно в \mathbf{R}^n , т.е. $\hat{f}_\lambda(u) > 0, u \in \mathbf{R}^n$.*

Отметим, что для случая евклидовой нормы этот результат был известен ранее (см., например, Куттнер [16, Лемма 2], Линник Ю. В. [17] при $n=1$ и Голубов Б. И. [18, Лемма 2] при $n \geq 2$).

Доказательство теоремы 1.

Пусть $u_0 \in C_b(\mathbf{R}^n)$. Тогда выполняются неравенства:

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x) \leq u_0(y) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x). \quad (7)$$

Из (6) вытекает, что $\Gamma_s(x, t)$ при $0 < s < 1$ является преобразованием Фурье положительно определённой функции, и значит, неотрицательна на \mathbf{R}^n . Домножая неравенство (7) на $\Gamma_s(x-y, t)$ и интегрируя по всему \mathbf{R}^n получим неравенство:

$$\gamma(s, t) \inf_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x) \leq u(x, t) \leq \gamma(s, t) \sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x), \quad t > 0,$$

где $\gamma(s, t) := \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_s(x, t) dx$. Так как

$$e^{-t|\xi|^{2s}} = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_s(x, t) e^{-i(\xi, x)} dx,$$

то константа $\gamma(s, t) \equiv 1$. Основное утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что для некоторых $t_0 > 0$ и $x_0 \in \mathbf{R}^n$ выполняется равенство $u(x_0, t_0) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x)$. Отсюда вытекает, что

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x) - u_0(y) \right) \Gamma_s(x_0 - y, t_0) dy = 0.$$

Так как под интегралом стоит неотрицательная непрерывная функция, то

$$\left(\sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x) - u_0(y) \right) \Gamma_s(x_0 - y, t_0) = 0, \quad y \in \mathbf{R}^n.$$

В силу теоремы 2 выполняется неравенство $\Gamma_s(x_0 - y, t_0) > 0$, $y \in \mathbf{R}^n$, и значит,

$$u_0(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x), \quad \text{для всех } y \in \mathbf{R}^n$$

Отсюда и из (4) вытекает, что $u(x, t) \equiv \sup_{x \in \mathbf{R}^n} u_0(x)$.

Заключение. В заключении отметим, что если в задаче (3) заменить дробный оператор Лапласа псевдодифференциальным оператором с символом $\rho^\lambda(\xi)$ таким, что $0 < \lambda \leq \alpha(\mathbf{R}^n, \rho)$, то основное утверждение теоремы 1 остаётся верным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики / М. А. Шубин. – Москва: МЦНМО, 2003 – 303 с.
2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – Москва: Физматгиз, 1961 – 400 с.
3. A Widder's Type Theorem for the Heat Equation with Nonlocal Diffusion / B. Barrios, I. Peral, F. Soria, E. Valdinoci // Arch. Rational Mech. Anal. – 2014. – Vol. 213 – P. 631–650.
4. Greco A. Existence and convexity of solutions of the fractional heat equation / A. Greco, A. Iannizzotto // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2017. – Vol. 6, Iss. 16. – P. 2201–2226.
5. Колдобский А. Л. Задача Шенберга о положительно определенных функциях / А. Л. Колдобский // Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 3. – С. 78–85.
6. Заставный В. П. Положительно определенные функции, зависящие от нормы. Решение проблемы Шёнберга / В. П. Заставный // Донецк. Институт прикл. мат. и мех. АН Украины, Препринт – 1991. – 35 с.
7. Заставный В. П. Положительно определенные функции, зависящие от нормы / В. П. Заставный // Доклады РАН. – 1992. – Т. 325, № 5. – С. 901–903.
8. Zastavnyi V. P. Positive definite functions depending on the norm / V. P. Zastavnyi // Russian J. Math. Physics. – 1993. – Vol. 1, 4. – P. 511–522.
9. Misiewicz J. Positive definite functions on l_∞ / J. Misiewicz // Statist. Probab. Lett. – 1989. – Vol. 8. – P. 255–260.
10. Kuritsyn Y. Multidimensional versions and two problems of Schoenberg / Y. Kuritsyn // Problems of Stability of Stochastic Model, VNIISI. – 1989. – P. 72–79.
11. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions / Z. Sasvári. – Berlin: Akad. Verl., 1994. – 208 p.
12. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / Z. Sasvári. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 366 p.

13. Rudin W. Fourier Analysis on Groups / W. Rudin. – New York: Interscience, 1962. – 204 p.
14. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2.: Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах / Э. Хьюитт, К. Росс. – Москва : Мир, 1975. – 900 с.
15. Заставный В. П. О положительной определенности некоторых функций, связанных с проблемой Шёнберга / В. П. Заставный, А. Д. Манов // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102, 3. – С. 355 – 368.
16. Kuttner B. On the Riesz means of a Fourier series / B. Kuttner // J. London Math. Soc. – 1944. – Vol. 19, Iss. 2. – P. 77–84.
17. Линник Ю. В. Линейные формы и статистические критерии: I, II / Ю. В. Линник // Укр. матем. журн. – 1953. – Т. 5, 2,3. – С. 207–243, 247–290.
18. Golubov B. I. On Abel-Poisson type and Riesz means / B. I. Golubov // Analysis Math. – 1981. – Vol. 7. – P. 161–184.

Поступила в редакцию 11.10.2019 г.

MAXIMUM PRINCIPLE FOR SOLUTION OF A CAUCHY PROBLEM

A. D. Manov

In this paper we prove a maximum principle for solution of the Cauchy problem for the fractional heat equation. This maximum principle is a generalization of maximum principle for usual heat equation. The method of proof is related to theory of positive definite functions, in particular to the Schoenberg problem.

Keywords: maximum principle, fractional Laplacian, positive definite functions, Schoenberg problem.

Манов Анатолий Дмитриевич

Аспирант кафедры математического анализа и теории функций ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: mavov.ad@ro.ru

Manov Anatoliy Dmitrievych

postgraduate student,
Donetsk National University, Donetsk

М Е Х А Н И К А

УДК 531.38; 531.39

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С ТРЕМЯ ИНВАРИАНТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

© 2019. Т.В. Белоконь

В статье рассмотрены решения уравнений динамики твердого тела, которые характеризуются тремя инвариантными соотношениями линейного и дробно-линейного типа. Анализ движения тела основан на применении углов Эйлера, теоремы Пуансо, уравнениях П.В. Харламова и формулы Г.В. Горра.

Ключевые слова: инвариантные соотношения, углы Эйлера, теорема Пуансо, уравнение Харламова.

Введение. В динамике твердого тела имеющего неподвижную точку большое внимание уделяется геометрическому истолкованию движения тела. Начало геометрическим исследованиям положил Л. Пуансо [1], исследуя решения Л. Эйлера [2]. Геометрические методы исследования в механике подробно описаны во многих монографиях (см., например, [3, 4]). Теорему Л. Пуансо использовали многие ученые (обзор приведен в [4]). На развитие метода Пуансо большое внимание оказали уравнения П.В. Харламова [5], что отражено в монографии [6]. В статье [7] П.В. Харламов, при обсуждении перспектив развития задач динамики, большое внимание обращал на необходимость дальнейших исследований в области кинематического истолкования движения тела. Обзор результатов по изучению движений тела в различных силовых полях представлены в полном объеме в работах [8–10].

Развитие геометрических методов в динамике твердого тела происходит и в настоящее время. Г.В. Горр в статье [11] указал модифицированный метод Л. Пуансо и предложил кинематическую формулу, которая позволяет установить алгебраическую связь между углом прецессии тела и полярным углом, входящим в уравнения П.В. Харламова. В статьях [12–14] показана эффективность модифицированного подхода в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку и целесообразность комплексного подхода в геометрических задачах динамики [15]. Данный метод может быть использован и в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил [16, 17].

В динамике твердого тела построено большое количество решений [6–9], которые получают кинематическое истолкование движения тела или гиростата. Однако, в некоторых решениях аналогичные исследования не проводилось. Данная статья посвящена геометрическому изучению решений, которые характеризуются линейными и дробно-линейными инвариантными соотношениями (ИС), указанным в [18–21]. Определены углы Эйлера, уравнения подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости.

1. Динамические модели движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Рассмотрим первую задачу – задачу о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Уравнения движения запишем в виде

$$A\dot{\bar{\omega}} = (A\bar{\omega} \times \bar{\omega}) + s(\bar{e} \times \bar{v}), \quad \dot{\bar{v}} = \bar{v} \times \bar{\omega}, \quad (1)$$

где введены обозначения: $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A = (A_{ij}), (i, j = \overline{1,3})$ – тензор инерции, построенный в неподвижной точке O ; s – произведения веса тела и расстояния от неподвижной точки O до центра тяжести C ; $\bar{e} = (e_1, e_2, e_3) = \overline{OC} / |\overline{OC}|$. Точка над переменными обозначает относительную производную по времени t .

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2s(\bar{e} \cdot \bar{v}) = 2E, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 1, \quad A\bar{\omega} \cdot \bar{v} = k, \quad (2)$$

где E, k – произвольные постоянные.

Вторая задача – задача о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку. Если гиростатический момент $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ постоянен, то уравнение движения тяжелого гиростата таковы

$$A\dot{\bar{\omega}} = (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \times \bar{\omega} + s(\bar{e} \times \bar{v}), \quad \dot{\bar{v}} = \bar{v} \times \bar{\omega}, \quad (3)$$

Они имеют первые интегралы

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2s(\bar{e} \cdot \bar{v}) = 2E, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 1, \quad (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{v} = k. \quad (4)$$

Д. Гриоли обобщил уравнения (3), (4) при рассмотрении задачи о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил [22] (третья задача).

$$A\dot{\bar{\omega}} = A\bar{\omega} \times \bar{\omega} + \frac{\partial L(v_1, v_2, v_3)}{\partial \bar{v}} \times \bar{\omega} + \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial \bar{v}} \times \bar{v}, \quad (5)$$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times \bar{\omega}, \quad (6)$$

Запишем первые интегралы уравнений (5), (6)

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2U(v_1, v_2, v_3) = 2E, \quad A\bar{\omega} \cdot \bar{v} + L(v_1, v_2, v_3) = k, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 1. \quad (7)$$

В уравнении (5) через $\frac{\partial L(v_1, v_2, v_3)}{\partial \bar{v}}$, $\frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial \bar{v}}$ обозначены градиенты функций $L = L(v_1, v_2, v_3)$, $U = U(v_1, v_2, v_3)$. Если в уравнениях (5) и интегралах (7) эти функции имеют вид

$$L(v_1, v_2, v_3) = \bar{\lambda} \cdot \bar{v} - \frac{1}{2}(B\bar{v} \cdot \bar{v}), \quad U(v_1, v_2, v_3) = s(\bar{e} \times \bar{v}) - \frac{1}{2}(C\bar{v} \cdot \bar{v}), \quad (8)$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – постоянный вектор, то из (5)–(7) получим уравнения четвёртой модели [8, 10, 23, 24]

$$A\dot{\bar{\omega}} = (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \times \bar{\omega} + \bar{\omega} \times B\bar{v} + \bar{v} \times C\bar{v} + s(\bar{e} \times \bar{v}), \quad (9)$$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times \bar{\omega}, \quad (10)$$

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2s(\bar{e} \cdot \bar{v}) + C\bar{v} \cdot \bar{v} = 2E, \quad (11)$$

$$(A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{v} + \frac{1}{2}(B\bar{v} \cdot \bar{v}) = k, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 1, \quad (12)$$

Отметим, что матрица $C = (C_{ij}), (i, j = \overline{1,3})$ характеризует потенциальные силы, а матрица $B = (B_{ij}), (i, j = \overline{1,3})$ характеризует гироскопические силы, под действием которых

происходит движение гиростата. Уравнения (9), (10) с первыми интегралами (11), (12) допускают две механические интерпретационные модели. В первой модели заряженное и намагниченное тело-носитель движется в силовом поле, которое является суперпозицией центрального ньютоновского магнитного и кулоновского полей [8, 23, 24].

Вторая механическая модель может быть описана движением твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, так как существует линейное невырожденное преобразование переменных уравнений (9), (10), которое приводит к уравнениям движения второй модели [23–25].

2. Кинематические соотношения в истолковании движения гиростата, имеющего неподвижную точку. Пусть в результате интегрирования уравнений, указанных выше задачах, найдены решения:

$$\bar{\omega}_H(t) = \omega_1(t)\bar{i}_1 + \omega_2(t)\bar{i}_2 + \omega_3(t)\bar{i}_3, \quad (13)$$

$$\bar{v}_H(t) = v_1(t)\bar{i}_1 + v_2(t)\bar{i}_2 + v_3(t)\bar{i}_3, \quad (14)$$

где $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – единичные векторы подвижной системы координат $Oxyz$. Индекс у переменных $\bar{\omega}_H(t), \bar{v}_H(t)$ указывает на то, что эти векторы записаны в подвижной системе координат. В неподвижной системе координат $O_{\xi\eta\zeta}$ введем единичные векторы $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$ направленные по осям $O_{\xi}, O_{\eta}, O_{\zeta}$. Обозначим через θ, φ, ψ – углы Эйлера, которые определяют положение подвижной системы координат относительно неподвижной так, чтобы $\theta = \angle(\bar{i}_3, \bar{\varepsilon}_3)$. Тогда компоненты векторов (13), (14) таковы

$$v_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad v_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad v_3 = \cos \theta, \quad (15)$$

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (16)$$

При известных функциях (13), (14) углы Эйлера находятся из соотношений (15), (16) [4, 13–15]

$$\theta(t) = \arccos(\bar{v}_H(t) \cdot \bar{i}_3), \quad \varphi(t) = \arctg \frac{\bar{v}_H(t) \cdot \bar{i}_1}{\bar{v}_H(t) \cdot \bar{i}_2}, \quad (17)$$

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \frac{(\bar{\omega}_H(\tau) \times \bar{i}_3) \cdot (\bar{v}_H(\tau) \times \bar{i}_3) d\tau}{(\bar{v}_H(\tau) \times \bar{i}_3)^2}. \quad (18)$$

Как правило, интерпретация движения тела основана на теореме Пуансо [1], согласно которой движение тела представимо качением без скольжения подвижного аксоида вектора $\bar{\omega}_H(t)$ по неподвижному аксоиду вектора $\bar{\omega}_H(t)$

$$\bar{\omega}_H(t) = \omega_{\xi}(t)\bar{\varepsilon}_1 + \omega_{\eta}(t)\bar{\varepsilon}_2 + \omega_{\zeta}(t)\bar{\varepsilon}_3, \quad (19)$$

где [5]

$$\omega_{\xi}(t) = \bar{\omega}_H(t) \cdot \bar{v}_H(t), \quad \omega_{\eta}(t) = \omega_{\rho}(t) \cos \alpha(t), \quad (20)$$

$$\omega_{\rho}(t) = \omega_{\rho}(t) \sin \alpha(t), \quad (\omega_{\rho}^2(t) = \bar{\omega}_H^2(t) - \omega_{\xi}^2(t)),$$

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t \frac{(\dot{\bar{\omega}}_H(\tau) \cdot (\bar{v}_H(\tau) \times \bar{\omega}_H(\tau)))}{\omega_{\rho}^2(\tau)} d\tau. \quad (21)$$

Уравнение для $\alpha(t)$ из (21) получил П.В. Харламов [5], а все соотношения (20), (21) называются уравнениями Харламова.

В статье [11] Г.В. Горр указал кинематическую формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \frac{(\bar{\omega}_n(t) \times \bar{v}_n(t)) \cdot (\bar{v}_n(t) \times \bar{i}_3)}{\bar{i}_3 \cdot (\bar{\omega}_n(t) \times \bar{v}_n(t))} = F(\omega_n(t), v_n(t)), \quad (22)$$

которая позволяет вместо (21) использовать более простую формулу из (22)

$$\alpha(t) = \psi(t) + \operatorname{arctg} F(\omega_n(t), v_n(t)), \quad (23)$$

так как в равенство не входит в отличие от (21) производная $\dot{\bar{\omega}}_n(t)$.

Отметим, что соотношения (15)–(23) применяются в комплексном подходе истолкования движения тела, имеющего неподвижную точку [11–14, 17].

Замечание. В статье [11] предложен модифицированный метод Пуансо, который состоит в том, что вместо вектора $\bar{\omega}_n(t)$ вводится вектор $\bar{b}_n(t) = b(t)\bar{\omega}_n(t)$, где $b(t)$ – некоторая функция времени. Можно показать [11], что движение тела представимо, качением без скольжения аксоида с направляющей $\bar{b}_n(t)$ по неподвижному аксоиду с направляющей $\bar{b}_H(t)$. Данный подход позволяет в ряде случаев получить более наглядное представление о свойствах движения тела, имеющего неподвижную точку (см. [12, 14]). Например, показать, что движение тела в решении В.А. Стеклова направляющие линии, указанные выше, являются эллипсами [12].

3. Три линейных инвариантных соотношения. Введем вектор $\bar{x} = A\bar{\omega}$ – кинетический момент. Тогда вектор $\bar{\omega}$ можно записать в виде

$$\bar{\omega} = a\bar{x}, \quad (24)$$

где $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор. Полагая $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, зададим три инвариантных соотношения (ИС)

$$\begin{aligned} x_1 &= b_0 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3, \\ x_2 &= c_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3, \\ x_3 &= d_0 + d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3, \end{aligned} \quad (25)$$

где $b_i (i = \overline{0,3})$, $c_i (i = \overline{0,3})$, $d_i (i = \overline{0,3})$ – постоянные параметры.

В динамике твердого тела с постоянным гиростатическим моментом три ИС изучали С.А. Чаплыгин [26], П.В. Харламов [25], Х.М. Яхья [27], С.В. Скрыпник [18], Г.В. Горр, С.В. Скрыпник [19], Г.В. Горр, Е.К. Узбек [20, 21].

Условия существования ИС (25) исследовались и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с учетом переменности гиростатического момента (см. обзор [28]). Основным методом исследования ИС (25) являлся метод инвариантных соотношений [29], особенности которого изучены в [30] Без ограничения общности положим, что подвижная система является главной, т.е. $a_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$.

Обозначая $a_{11} = a_1$, $a_{22} = a_2$, $a_{33} = a_3$ для ω_i имеем ИС

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1(b_0 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3), \\ \omega_2 &= a_2(c_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3), \\ \omega_3 &= a_3(d_0 + d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3). \end{aligned} \quad (26)$$

В [25] показано, что случай (26) для уравнений (1) имеет место только для равномерных вращений тела.

Если рассматривать условия существования трех ИС для уравнений Д. Гриоли (5), (6), то в рамках решения обратной задачи для (5)–(7) можно использовать результат [30]. То есть при выполнении условия

$$\operatorname{div} \bar{x} = b_1 + c_2 + d_3 = 0 \quad (27)$$

уравнения (5),(6) имеют решение, которое характеризуется соотношениями (26).

4. Специальный класс трех ИС. Для рассмотрения ИС (25) запишем уравнения (9), (10) и интегралы (11), (12) в переменных \bar{x}, \bar{v}

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{x} + \bar{\lambda}) \times a\bar{x} + a\bar{\omega} \times B\bar{v} + \bar{v} \times C\bar{v} + s(\bar{e} \times \bar{v}), \quad (28)$$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times a\bar{x}, \quad (29)$$

$$\bar{x} \cdot a\bar{x} - 2s(\bar{e} \cdot \bar{v}) + \bar{v} \cdot C\bar{v} = 2E, \quad (\bar{x} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{v} + \frac{1}{2}(B\bar{v} \cdot \bar{v}) = k, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 1. \quad (30)$$

Одной из основных трудностей в задаче о трех ИС (26) является интегрирование уравнения Пуассона (29) на данных ИС. В скалярной форме из (29) получим

$$\dot{v}_1 = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2, \quad (31)$$

где $\omega_i (i = \overline{1,3})$ определены равенствами (26). В общем случае задача интегрирования уравнений (31) в силу геометрического интеграла $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ сводится к интегрированию неавтономной системы второго порядка. Рассмотрим сначала вариант [22]. Запишем условия существования решения [22] для уравнений (28), (29)

$$\begin{aligned} b_0 &= -\lambda_1, \quad c_0 = -\lambda_2, \quad d_0 = -\lambda_3, \quad b_2(a_2 - a_1) = a_2 B_{12}, \quad b_3(a_3 - a_1) = -a_1 B_{13}, \\ c_1(a_1 - a_2) &= a_1 B_{12}, \quad c_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2}, \quad d_3 = \frac{a_2 b_1}{a_1}, \quad B_{11} = \frac{b_1}{a_2 a_3} (a_2 a_3 - a_1 a_3 - a_1 a_2), \\ B_{22} &= \frac{b_1}{a_2 a_3} (a_1 a_3 - a_2 a_3 - a_1 a_2), \quad B_{33} = \frac{b_1}{a_2 a_3} (a_1 a_2 - a_2 a_3 - a_1 a_3), \\ s_i &= -(a_1 \lambda_1 b_i + a_2 \lambda_2 c_i + a_3 \lambda_3 d_i), \quad C_{ij} = -(a_1 b_i b_j + a_2 c_i c_j + a_3 d_i d_j) \quad (i \neq j), \\ C_{ii} &= -(a_1 b_i^2 + a_2 c_i^2 + a_3 d_i^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку в силу (26), (32), вектор угловой скорости имеет векторное представление

$$\bar{\omega} = -\bar{m} + a_1 b_1 \bar{v} + \bar{n} \times \bar{v}, \quad (33)$$

где

$$\bar{n} = (-a_2 c_1, a_1 b_3, -a_1 b_2), \quad \bar{m} = (a_1 \lambda_1, a_2 \lambda_2, a_3 \lambda_3), \quad (34)$$

то уравнения Пуассона (31) в случае (33) можно записать так

$$\dot{\bar{v}} = \bar{m} \times \bar{v} + \bar{n}(\bar{v} \cdot \bar{v}) - \bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{n}). \quad (35)$$

В статьях [20,21] доказано, что в случае $\bar{m} \cdot \bar{n} = 0$ ($a_2 c_1 \lambda_1 - a_2 b_3 \lambda_2 + a_3 b_2 \lambda_3 = 0$) уравнение (3) допускает первый интеграл

$$\frac{\bar{m}^2 + \bar{v} \cdot (\bar{n} \times \bar{m})}{\bar{m} \cdot \bar{v}} = c_0, \quad (36)$$

где c_0 – произвольная постоянная.

Для интегрирования (35) положим $\bar{m}_0 = \bar{m}/|\bar{n}|$, $\bar{n}_0 = \bar{n}/|\bar{n}|$, $\tau = |\bar{n}|t$, где τ – независимая переменная. Тогда, обозначая производную по τ штрихом, из уравнения (36) получим

$$\vec{v}' = \vec{m}_0 \times \vec{v} + \vec{n}_0 - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{v}, \quad (37)$$

где был использован геометрический интеграл $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$, поскольку интегрирование ведется на сфере Пуассона.

Пусть

$$\vec{v} = u \vec{n}_0 + v \vec{m}_0 + w(\vec{n}_0 \times \vec{m}_0). \quad (38)$$

Уравнение (37) допускает ИС и первый интеграл:

$$u^2 + m_0^2(v^2 + w^2) = 1, \quad \frac{w+1}{v} = c, \quad (39)$$

где c – произвольная постоянная, введенная вместо c_0 (см. равенство (36)). Для интегрирования уравнения полагаем [20]

$$u = R_0 \cos \beta, \quad R_0^2 = \frac{1+c^2-m_0^2}{1+c^2}. \quad (40)$$

С помощью равенства (38)–(40) уравнение (37) интегрируется в элементарных функциях от τ , так как для переменной β имеет место уравнение

$$\beta' = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \sin \beta, \quad (41)$$

где $\varepsilon_0 = -\frac{m_0 c}{1+c^2}$, $\varepsilon_1 = -R_0$.

Полагая $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > 0$, из (41) найдем зависимость $\beta(\tau)$

$$\beta(\tau) = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_0 \operatorname{tg} \mu_0 \tau}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2} - \varepsilon_0 \operatorname{tg} \mu_0 \tau}\right), \quad \mu_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2}}{2}. \quad (42)$$

Переменные v, w определим из равенств (39)

$$v(\tau) = \frac{c}{1+c^2} + \frac{R_0}{m_0 \sqrt{1+c^2}} \sin \beta(\tau), \quad w(\tau) = -\frac{1}{1+c^2} + \frac{c R_0}{m_0 \sqrt{1+c^2}} \sin \beta(\tau). \quad (43)$$

В равенствах (43) переменная $\beta = \beta(\tau)$ удовлетворяет уравнению (42).

При использовании уравнений (17)–(23) следует учитывать в какой подвижной системе координат построено исследуемое решение. Так как оно получено в главной системе координат ($a_{ij} = 0, i \neq j$), то в силу структуры решения (33), (38), в которое входят векторы $\vec{n}_0, \vec{m}_0, \vec{n}_0 \times \vec{m}_0$ ($\vec{n}_0 \cdot \vec{m}_0 = 0$) целесообразно соотношения (15)–(18) вводить на основании тройки ортогональных векторов $\vec{n}, \vec{m}, \vec{n} \times \vec{m}$. Выберем новый базис $\vec{i}_1^*, \vec{i}_2^*, \vec{i}_3^*$ следующим образом

$$\vec{i}_1^* = \frac{\vec{m}}{m}, \quad \vec{i}_2^* = \frac{1}{q_0}(\vec{n} \times \vec{m}), \quad \vec{i}_3^* = \frac{\vec{n}}{n} \quad (44)$$

где $q_0 = n m$. Тогда вводя обозначения

$$p_0 = a_1 b_1, \quad r_0 = \frac{m}{n}, \quad (45)$$

из равенств (33),(38) получим

$$\vec{v}_I = r_0 v(\beta) \vec{i}_1^* + r_0 w(\beta) \vec{i}_2^* + u(\beta) \vec{i}_3^* \quad (46)$$

$$\bar{\omega}_{II} = (-m + r_0(p_0v(\beta) - nw(\beta)))\bar{i}_1^* + r_0(nv(\beta) + p_0w(\beta))\bar{i}_2^* + p_0u(\beta)\bar{i}_3^* \quad (47)$$

В этом случае целесообразен переход от базиса $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ к базису $\bar{i}_1^*, \bar{i}_2^*, \bar{i}_3^*$.

Подставим выражения (46), (47) в формулу (18)

$$\frac{d\psi}{d\tau} = p_0 - \frac{mr_0v(\beta(\tau))}{1-u^2(\beta(\tau))}, \quad (48)$$

где учтено, что независимой переменной является τ . С учетом уравнения (41) из (48) найдем функцию $\psi(\beta)$:

$$\psi(\beta) = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{p_0(1-u^2(\beta)) - mr_0v(\beta)}{(1-u^2(\beta))(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \sin \beta)} d\beta. \quad (49)$$

Здесь

$$\varepsilon_0 = -\frac{r_0c}{1+c^2}, \quad \varepsilon_1 = -R_0 = \frac{1+c^2-r_0^2}{1+c^2} \quad (50)$$

Для изучения функции $\alpha(\beta)$ используем формулы (22), (46), (47)

$$\alpha(\beta) = \psi(\beta) + \operatorname{arctg} \frac{mr_0u(\beta)v(\beta)}{mr_0w(\beta) + n(1-u^2(\beta))}, \quad (51)$$

где

$$u(\beta) = R_0 \cos \beta, \quad v(\beta) = h_0 + h_1 \sin \beta, \quad w(\beta) = q_0 + q_1 \sin \beta, \quad (52)$$

$$h_0 = \frac{c}{1+c^2}, \quad h_1 = \frac{R_0}{r_0\sqrt{1+c^2}}, \quad q_0 = -\frac{1}{1+c^2}, \quad q_1 = \frac{cR_0}{r_0\sqrt{1+c^2}}. \quad (53)$$

При применении уравнений (20), которые определяют совместно с уравнением (51) неподвижный годограф, подставим выражения (46), (47) в функции $\omega_\zeta, \omega_\rho^2$ из (20)

$$\omega_\zeta(\beta) = p_0 - mr_0v(\beta), \quad (54)$$

$$\omega_\rho^2(\beta) = (m^2 + n^2) + 2mnr_0w(\beta) - n^2u^2(\beta) - m^2r_0^2v^2(\beta). \quad (55)$$

Углы Эйлера (17) найдем с помощью векторного равенства (46)

$$\theta(\beta) = \arccos u(\beta), \quad \varphi(\beta) = \operatorname{arctg} \frac{v(\beta)}{w(\beta)}. \quad (56)$$

Таким образом, если исследование движения тела основано на использовании углов Эйлера, то необходимо рассматривать соотношения (49), (56), в которых $u(\beta), v(\beta), w(\beta)$ задаются формулами (40), (56). При этом необходимо учитывать зависимость $\beta(\tau)$ из равенства (42).

В случае, когда движение тела исследуется с помощью метода Пуансо, следует обращаться к соотношениям (51), (54), (55). Методика использования этой теоремы описана в [9, 10].

5. Случай двух линейных ИС и одного дробно-линейного ИС. Рассмотрим задачу [18, 19]. Зададим два линейных ИС

$$x_1 = b_0 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3, \quad x_2 = c_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3. \quad (57)$$

В [18, 19] показано, что имеют место два варианта условий существования. Рассмотрим один из этих вариантов. Запишем для уравнений (9), (10) условия существования

$$\begin{aligned}
 b_0 = c_0 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad c_1 = b_2 = 0, \quad c_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2}, \\
 B_{12} = 0, \quad B_{13} = \frac{b_3(a_3 - a_1)}{a_3}, \quad B_{23} = \frac{c_3(a_3 - a_1)}{a_3}, \\
 B_{11} = \frac{b_1}{a_2 a_3} (a_2 a_3 - a_1 a_2 - a_1 a_3), \quad B_{22} = \frac{b_1}{a_2 a_3} (a_1 a_3 - a_1 a_2 - a_2 a_3), \\
 B_{33} = \frac{b_1}{a_2 a_3} (a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3), \quad C_{12} = -\frac{a_1 a_2 b_3 c_3}{a_3}, \\
 C_{13} = -\frac{a_1 b_1 b_3}{a_3} (a_1 - a_3), \quad C_{23} = -\frac{a_1 b_1 c_3}{a_3} (a_2 - a_3), \\
 C_{11} = C_{33} + \frac{a_1}{a_3} [b_1^2 (a_1 - a_3) + b_3^2 (a_3 - a_1)] + a_2 c_3^2, \\
 C_{22} = C_{33} + \frac{a_1}{a_3} \left[\frac{a_1}{a_2} b_1^2 (a_2 - a_3) + \frac{a_2}{a_1} c_3^2 (a_3 - a_2) + a_3 b_3^2 \right], \\
 e_1 = a_1 \lambda_3 b_3, \quad e_2 = a_2 \lambda_3 c_3, \quad e_3 = -a_1 \lambda_3 b_1.
 \end{aligned} \tag{58}$$

При выполнении условий (58) система уравнений (9), (10) преобразуется так [18]

$$a_3 \dot{x}_3 = (a_2 c_3 v_1 - a_1 b_3 v_2) [a_1 b_1 v_3 - a_3 \lambda_3 - (a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2)], \tag{59}$$

$$\dot{v}_1 = a_3 x_3 v_2 - v_3 (a_1 b_1 v_2 + a_2 c_3 v_3),$$

$$\dot{v}_2 = -a_3 x_3 v_1 + v_3 (a_1 b_1 v_1 + a_1 b_3 v_3), \tag{60}$$

$$\dot{v}_3 = v_3 (a_2 c_3 v_1 - a_1 b_3 v_2).$$

В уравнениях (59), (60) переменные связаны интегральными соотношениями

$$v_3 (a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_3) + a_3 v_3 (x_3 + \lambda_3) - a_1 b_1 v_3^2 = l_0, \tag{61}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_3} \left(\frac{l_0}{2} v_3^{-1} + d_0 v_3 \right), \tag{62}$$

где l_0, d_0 – произвольные постоянные. Отметим, что использование интеграла (61) дает возможность упростить процедуру сведения задачи к квадратурам. Пусть [18]

$$v_1 = \sin \theta_* \sin \varphi_*, \quad v_2 = \sin \theta_* \cos \varphi_*, \quad v_3 = \cos \theta_*. \tag{63}$$

Тогда из уравнения для v_3 системы (60) и интегралов (61), (62) имеем

$$\dot{\theta}_* = \kappa_0 \cos \theta_* \cos(\varphi_0 + \varphi_*), \quad \sin(\varphi_0 + \varphi_*) = \frac{1}{\kappa_0 \sin \theta_* \cos \theta_*} \varphi(\theta_*) \tag{64}$$

где

$$\cos \varphi_0 = \frac{a_1 b_3}{\kappa_0}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{a_2 c_3}{\kappa_0}, \quad \kappa_0 = \sqrt{a_1^2 b_3^2 + a_2^2 c_3^2}, \tag{65}$$

$$\varphi(\theta_*) = (a_1 b_1 - d_0) \cos^2 \theta_* - a_3 \lambda_3 \cos \theta_* + \frac{l_0}{2}. \tag{66}$$

Зависимость $\theta_*(t)$, в которых $\varphi(\theta_*)$ имеет значение (66), из (64) позволяет получить решение, обращая эллиптический интеграл

$$\begin{aligned} \sin \theta_* \cdot \dot{\theta}_* &= \sqrt{\kappa_0^2 \sin^2 \theta_* \cos^2 \theta_* - \varphi^2(\theta_*)}, \\ \sin(\varphi_0 + \varphi_*) &= \frac{1}{\kappa_0 \sin \theta_* \cos \theta_*} \varphi(\theta_*). \end{aligned} \quad (67)$$

Из (67) следует, что $\theta_* = \theta_*(t)$ – эллиптическая функция времени. Общее решение уравнений (9), (10) находится с помощью (57), (62), (63). Отметим, что ИС (57) в данном случае таковы

$$x_1 = b_1 v_1 + b_3 v_3, \quad x_2 = c_2 v_2 + c_3 v_3. \quad (68)$$

Замечание. Если ИС (68) и интеграл (62) рассматривать для уравнений Д. Гриоли [22], то условия их существования таковы (в силу (27) $\operatorname{div} \bar{x} = 0$):

$$l_0 = 0, \quad \frac{b_1(a_1 + a_2)}{b_3} + \frac{d_0}{a_3} = 0,$$

то есть параметр d_0 примет постоянное значение. В этом случае соотношение (62) примет вид

$$x_3 = -\frac{b_1(a_1 + a_2)}{a_3} v_3. \quad (69)$$

Таким образом, в случае (68),(69) все ИС имеют линейную структуру, но этот класс ИС не входит в уже рассмотренный в п.3 класс трёх ИС в силу различной структуры соотношений (32), (58).

Запишем уравнение (61) с учетом (62)

$$v_3 [a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2 + a_3 \lambda_3 + (d_0 - a_1 b_1) v_3] = \frac{l_0}{2}. \quad (70)$$

Из равенства (70) следует, что при $l_0 = 0$ силу $v_3 \neq 0$ имеет место соотношение

$$a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2 + (d_0 - a_1 b_1) v_3 = -a_3 \lambda_3. \quad (71)$$

На основании (71) выполняется векторное условие

$$\bar{g} \cdot \bar{v} = g_0 \quad (72)$$

где

$$\bar{g} = (g_1, g_2, g_3); \quad g_1 = a_1 b_3, \quad g_2 = a_2 c_3, \quad g_3 = d_0 - a_1 b_1, \quad g_0 = -a_3 \lambda_3. \quad (73)$$

Очевидно, что ИС (72) описывает класс прецессионных движений [8], то есть в процессе движения тела постоянен угол между двумя осями, одна из которых фиксирована в теле, а другая неподвижна в пространстве. Классы таких движений изучены в [8–10].

Применим к исследованию ИС (62), (68) комплексный подход в истолковании движения. В процессе этого подхода будем использовать формулы (17)–(19), (23).

В качестве независимой переменной примем v_3 . Уравнение для переменной $v_3(t)$ определим из (67)

$$\frac{dv_3}{dt} = -\sqrt{\kappa_0^2 (1 - v_3^2) v_3^2 - \tilde{\varphi}^2(v_3)}, \quad (74)$$

где значение κ_0^2 указано в системе (65), а $\tilde{\varphi}(v_3)$ имеет вид

$$\tilde{\varphi}(v_3) = (b_1 a_1 - d_0) v_3^2 - a_3 \lambda_3 v_3 + \frac{l_0}{2}. \quad (75)$$

Действительности функции $v_3(t)$ можно добиться выбором параметров задачи: например, потребовать, чтобы корень уравнения $\tilde{\varphi}(v_3) = 0$ принимал значение в промежутке $(0, 1)$.

Найдём вначале $\bar{\omega} \cdot \bar{v} = \omega_\zeta$. Используя (62), (68), получим

$$\omega_\zeta = (a_1 b_1 - l_0) - a_3 \lambda_3 v_3. \quad (76)$$

Запишем значения углов Эйлера из (17), (18), (23). В силу принятых условий формулы для θ , φ таковы

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos v_3, \quad \varphi = \arctg \varphi_*(v_3), \\ \varphi_*(v_3) &= -\varphi_0 + \arcsin \frac{1}{\kappa_0 v_3 \sqrt{1-v_3^2}} \tilde{\varphi}(v_3), \end{aligned} \quad (77)$$

где $\tilde{\varphi}(v_3)$ найдено из второго равенства системы (64) с учетом преобразования этого значения к виду (75). Поскольку числитель подынтегральной функции в формуле (18) можно преобразовать к виду $\omega_\zeta = (\bar{\omega} \cdot \bar{i}_3)(\bar{v} \cdot \bar{i}_3)$, то в силу ИС (62), (68), равенства (76) функция (18) преобразуется так

$$\dot{\psi} = \frac{a_1 b_1 + \frac{l_0}{2} - a_3 \lambda_3 v_3 - d_0 v_3^2}{1 - v_3^2}. \quad (78)$$

Для нахождения $d\psi/dv_3$ используем формулы (74), (78)

$$\psi(v_3) = \int_{v_3^0}^{v_3} \frac{v_3 [d_0 v_3^2 + a_3 \lambda_3 v_3 - (a_1 b_1 + \frac{l_0}{2})] dv_3}{(1 - v_3^2) \sqrt{e_0^2 (1 - v_3^2) v_3^2 - \tilde{\varphi}^2(v_3)}}. \quad (79)$$

При нахождении полярного угла $\alpha(v_3)$ уравнений П.В. Харламова применим равенство (22), уравнения (76). Тогда

$$\alpha(v_3) = \psi(v_3) + \arctg \frac{a_3 \lambda_3 v_3^3 + (d_0 - a_1 b_1 - l_0) v_3^2 + \frac{l_0}{2}}{v_3 \sqrt{\kappa_0^2 (1 - v_3^2) v_3^2 - \tilde{\varphi}^2(v_3)}}. \quad (80)$$

В процессе нахождения функции $F(\bar{v}, \bar{\omega})$ из (22) использованы ИС (62), (68), равенство (76) и уравнение (74), которое возникает вследствие равенства $\omega_2 v_1 - \omega_1 v_2 = \frac{dv_3}{dt}$, полученного в результате преобразования правой части первого уравнения из системы (60) и соотношения (70).

Для применения уравнений неподвижного годографа укажем значение функции ω_ρ^2 , которое целесообразно вычислять следующим образом. Так как имеет место соотношение $\omega_\rho^2 = \bar{\omega}^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{v})^2 = (\bar{\omega} \times \bar{v})^2 = (\dot{v}_3)^2$, то в силу (74), (75) получим

$$\begin{aligned} \omega_p^2(v_3) = & -[\kappa_0^2 + (a_1b_1 - d_0)^2]v_3^4 + 2a_3\lambda_3(a_1b_1 - d_0)v_3^3 + \\ & + [\kappa_0^2 - l_0(a_1b_1 - d_0) - a_3^2\lambda_3^2]v_3^2 + 2l_0a_3\lambda_3v_3 - \frac{l_0^2}{4}. \end{aligned} \quad (81)$$

Таким образом, получены все аналитические соотношения (см. (74), (75), (80), (81)), которые можно использовать для применения теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела.

В общем случае из (74), (75) следует, что $v_3(t)$ является эллиптической функцией времени. На основании этого можно утверждать, что движение тела будет обладать свойством α -условно периодическим движением.

Замечание. Рассмотрим случай $l_0 = 0$. Тогда в силу (25), (79), (81) получим

$$\frac{dv_3}{dt} = -v_3\sqrt{H(v_3)}, \quad (82)$$

где

$$H(v_3) = p_0 + p_1v_3 + p_2v_3^2, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} p_0 = a_1^2b_3^2 + a_2^2c_3^2 - a_3^2\lambda_3^2, \quad p_1 = 2a_3\lambda_3(a_1b_1 - d_0), \\ p_2 = d_0^2 + a_1^2b_1^2 - a_1^2b_3^2 - a_2^2c_3^2 - 2a_1b_1d_0, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\psi(v_3) = \int \frac{[d_0v_3^2 + a_3\lambda_3v_3 - (a_1b_1 + \frac{l_0}{2})]dv_3}{v_3(1-v_3^2)\sqrt{H(v_3)}}, \quad (85)$$

$$\alpha(v_3) = \psi(v_3) + \operatorname{arctg} \frac{[a_3\lambda_3v_3 + (d_0 - a_1b_1)]}{\sqrt{H(v_3)}}. \quad (86)$$

Инвариантные соотношения (62), (68) примут вид

$$x_1 = b_1v_1 + b_3v_3, \quad x_1 = \frac{a_1b_1}{a_2}v_2 + c_3v_3, \quad x_3 = d_0v_3. \quad (87)$$

Из формул (82)–(84) следует, что, во-первых, $v_3(t)$ является элементарной функцией времени; во-вторых, на основании этого свойства получим, что функции (8), (86) – элементарные функции переменной v_3 . Данное обстоятельство в значительной степени упрощает кинематическое истолкование движения гиростата. Однако, в силу (87) рассматриваемый класс ИС не совпадает с классом ИС п.3.

Выводы. В статье применяется комплексный подход для истолкования движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда уравнения движения допускают либо три линейных инвариантных соотношения, либо два линейных инвариантных соотношения и одно дробно-линейное инвариантное соотношение. Определены аналитические соотношения для углов Эйлера, получены уравнения, описывающие неподвижный годограф вектора угловой скорости, которые позволяют применить теорему Пуансо кинематического истолкования движения гиростата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincot L. Théorie nouvelle de la rotation des corps / L. Poincot // J. Math. Pures et Appl. – Bd. 1, № 16. – 1851. – P. 289-336.
2. Euler L. Du mouvement de rotation des corps soliders autour d'un axe variable / L. Euler // Ibid. – 1758, 1765. – 14. – P. 154-193.

3. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел / Э.Дж. Раус. – М: Наука, 1983. – Т. 2. – С. 243-252.
4. Суслов Г.К. Теоретическая механика / Г.К. Суслов. – М: Гостехиздат, 1946. – С. 458-464.
5. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В.Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 502-507.
6. Горр Г.В. Классические задачи динамики твердого тела / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшов, Л.А. Степанова // Киев: Наук. думка, 1978. – С. 202-21.
7. Харламов П.В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П.В.Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 3. – С. 1-12.
8. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010 – С. 315-320.
9. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
10. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
11. Горр Г.В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26-36.
12. Горр Г.В. О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, А.И. Синенко // Прикл. математика и механика. – 2014. – Т. 78, вып. 3. – С. 334-345.
13. Горр Г.В. Применение параметров Родрига-Гамильтона при истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, А.М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 2015. – Т. 79, вып. 5. – С. 635-643.
14. Горр Г.В. О движении тяжелого твердого тела в двух частных случаях решения С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, Е.К. Щетинина // Нелинейная динамика. – 2018. – Т. 14, № 1. – С. 123-138.
15. Горр Г.В. Методы истолкования движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.М. Ковалев // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 3-13.
16. Горр Г.В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 2. – С. 202-214.
17. Gorr G.V. Research on the Motion of Body in a Potential Force Field in the Case of Three Invariant Relations/ G.V. Gorr, D.N. Tkachenko, E.K. Shchetinina // Russian j. of Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 15, No 3. – P. 327-342.
18. Скрыпник С.В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики / С.В. Скрыпник // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31-40.
19. Горр Г.В. О двух линейных инвариантных соотношениях дифференциальных уравнений динамики / Г.В. Горр, С.В. Скрыпник // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАНУ. – 2000. – Т. 5. – С. 38-43.
20. Горр Г.В. Об интегрирование уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений / Г.В. Горр, Е.К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 3. – С. 418-426.
21. Горр Г.В. Дробно-линейный интеграл уравнений Пуассона в случае трех инвариантных соотношений / Г.В. Горр, Е.К. Узбек // Междунар. МФНА-АНН журнал. Проблемы нелинейн. анализа в инженерных системах. – 2004. – Т. 10, №2 (21). – С. 54-63.
22. Grioli G. Questioni di dinamica del corpo rigido/ G. Grioli // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. E Natur. – 1963. – 35, f. 1-2. – P. 35-39.
23. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformations/ H.M. Yehia // J. Mec. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, N 5. – P. 747-754.
24. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II: A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H.M. Yehia // J. Mec. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, N 5. – P. 755-762.
25. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П.В. Харламов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17-29.
26. Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая/ С.А. Чаплыгин // Тр. Отд. физ. наук. О-ва любителей естествознания. – 1894. – Т. 6, вып. 2. – С. 20-42.
27. Яхья Х.М. Об одном классе движений гиростата в ньютоновском, электрическом и магнитном полях / Х. М.Яхья // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1986. – № 1. – С. 89-90.
28. Горр Г.В. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Г.А. Котов. – Донецк: ГУ «ИПММ», 2018. – 265 с.
29. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.
30. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии) / Г.В. Горр. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. – 424 с.

Поступила в редакцию 02.12.2019 г.

ABOUT THE MOTIONS OF THE RIGID BODY WITH THE FIXED POINT IN SOLUTIONS
OF EQUATIONS OF DYNAMIC WITH THREE INVARIANT RELATIONS

T.V. Belokon

The solutions of the equation of dynamics of a rigid body, which are characterized by three invariant relations linear and fractional-linear type are considered in the article. Analysis of body motions is based on the application Euler's angles, Poinso't's theorem, Kharlamov's equations and Gorr's formula.

Keywords: invariant relation, Euler's angles, Poinso't's theorem, Kharlamov's equations.

Белоконь Татьяна Валериевна

Старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики ГО ВПО «Донецкий национальный университет экономики и торговли им. Михаила Туган-Барановского», г. Донецк, ДНР.
E-mail: B.Tatyana13@mail.ru

Belokon Tatyana Valerievna

Lecturer at the Department of high and applied mathematics, SOHPE "Donetsk National University of Economics and Trade named after Mikhail Tugan-Baranovsky", Donetsk, DPR.
E-mail: B.Tatyana13@mail.ru

УДК 004.031:539.3:534.1

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН СДВИГА В АНИЗОТРОПНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ С РАЗБРОСОМ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

© 2019. А.А. Глухов, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван

Представлены результаты разработки и апробации численно-аналитической методики получения оценок для значений фазовых скоростей сдвиговых нормальных упругих волн из произвольной моды спектра для волновода в виде слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала при учете в рассматриваемой модели разбросов величин экзогенных физико-механических и геометрических параметров. Методика базируется на нечетко-множественном описании неопределенных параметров, и на использовании модифицированной формы эвристического принципа расширения в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в полученном аналитическом представлении для исследуемых фазовых скоростей.

Ключевые слова: упругий слой-волновод, трансверсально-изотропные функционально-градиентные материалы, физико-механические и геометрические параметры, разброс экспериментальных значений, сдвиговые нормальные волны, оценка неопределенных величин фазовых скоростей, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

Введение. Развитие технологий ультразвуковых измерений для объектов с обладающими высокой степенью неопределенности физико-механическими и геометрическими характеристиками, в частности, для изделий листового прокатного производства [1] либо глубоко залегающих пластов полезных ископаемых [2], предполагает дальнейшую разработку методик предпроектного моделирования параметров волновых процессов в неоднородном анизотропном упругом слое при максимально корректном учете факторов разброса в значениях экзогенных параметров. В ряде случаев для учета влияния неопределенности в значениях некоторых характеристик динамического деформирования упругих сред и элементов конструкций могут быть применены методы стохастического моделирования [3, 4].

Однако, зачастую исходная информация о разбросах экзогенных параметров моделей волнового деформирования не имеет корректного статистического характера, что принципиально усложняет применение в этих задачах методов теории вероятностей. Ввиду актуальности исследований по охарактеризованной проблематике, в настоящей работе представлена разработка альтернативного подхода к оценке степени влияния факторов неопределенности на характеристики волновых процессов, базирующегося на методах теории нечетких множеств [5–11] с менее жесткими требованиями к природе экзогенной информации в рассматриваемых моделях. В ее рамках последовательно строится теоретическое решение задачи описания спектра нормальных упругих волн сдвига в функционально-градиентном трансверсально-изотропном деформируемом слое с модулями упругости и плотностью, изменяющимися вдоль толщинной координаты по экспоненциальному закону. Далее полученные соотношения детерминистической модели описания волноводных свойств обобщаются применительно к ситуации учета разбросов в значениях параметров модели. Для последней фазы исследования используется подход, базирующийся на использовании эвристического принципа расширения в теории нечетких множеств [12–14].

Постановка и метод решения задачи. Первая фаза реализуемого исследования заключается в получении расчетных соотношений для фазовых скоростей нормальных волн сдвига в трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое в рамках детерминистической модели.

Рассматривается задача о распространении плоской стационарной нормальной SH волны с циклической частотой ω и волновым числом k вдоль координатного направления Ox_1 в занимающей область $V = \{(x_1, x_2) \in R^2, -h_- \leq x_3 \leq h_+\}$ трансверсально-изотропном функционально-градиентном упругом слое с ориентированной вдоль толщинной координаты x_3 осью анизотропии и жестко закрепленными граничными поверхностями $x_3 = -h_-$, $x_3 = h_+$. В рассматриваемом случае векторное поле волновых упругих перемещений характеризуется единственной компонентой $u_2(x_1, x_2, t) = \varphi(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1))$, а определяющие соотношения для ненулевых компонентов тензора напряжений и уравнение волновых движений в рамках сформулированных предположений соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= c_{66} \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_1 u_2, \quad \sigma_{23} = c_{44} \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_3 u_2, \\ \partial_1 \sigma_{21} + \partial_3 \sigma_{23} - \rho \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_t^2 u_2 &= 0, \end{aligned}$$

где c_{44} , $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ и ρ – соответственно параметры упругости и плотности для трансверсально-изотропного материала слоя; λ – параметр толщиной неоднородности материала слоя; $\partial_j = \partial / \partial x_j$, $\partial_t = \partial / \partial t$ – операторы частного дифференцирования.

С учетом введенного исходного представления, задача определения $u_2(x_1, x_2, t)$ сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $\varphi(x_3)$, решение которого может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x_3) &= d_+ \exp(\gamma_+ x_3) + d_- \exp(\gamma_- x_3), \quad \gamma_{\pm} = -(\lambda/2) \pm ((\lambda/2)^2 - \beta^2)^{1/2}, \\ \beta^2 &= (\rho \omega^2 - c_{66} k^2) / c_{44}, \end{aligned}$$

где d_+ , d_- – произвольные постоянные коэффициенты.

Далее из граничных условий на закрепленных плоских гранях слоя, которые принимают вид $(\varphi(x_3))_{x_3=h_{\pm}} = 0$ и трансформируются в систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных d_{\pm} , в форме равенства нулю ее определителя записывается основное дисперсионное соотношения для исследуемых нормальных волн. Оно преобразуется в явное аналитическое представление для фазовой скорости $\mathfrak{V}_f^{(p)}$ нормальной волны из моды дисперсионного спектра с номером p ($p = \overline{0, \infty}$)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_f^{(p)} &= F_p(k, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho) = \\ &[(c_{11} - c_{12}) / (2\rho) + k^{-2} (c_{44} / \rho) (\lambda^2 / 4 + (p\pi / (h_+ + h_-))^2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Функция $F_p(k, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho)$ во всей области допустимых значений аргументов обладает, в частности, свойствами знакоопределенности частных производных

$$\begin{aligned} \partial F_p / \partial k < 0, \quad \partial F_p / \partial h_+ < 0, \quad \partial F_p / \partial h_- < 0, \quad \partial F_p / \partial c_{11} > 0, \quad \partial F_p / \partial c_{12} < 0, \\ \partial F_p / \partial c_{44} > 0, \quad \partial F_p / \partial \lambda > 0, \quad \partial F_p / \partial \rho < 0, \end{aligned}$$

используемыми, далее, при формировании алгоритма получения нечетких оценок для $\mathfrak{g}_f^{(p)}$.

Разработка и анализ результатов применения методики учета факторов неопределенности. Второй этап осуществляемого исследования заключается в формировании и реализации алгоритма получения нечетких оценок для фазовых скоростей нормальных волн. В рамках представляемого подхода вводится допущение о существовании разбросов в значениях исходных параметров описанной выше модели, используемых при расчетах фазовых скоростей исследуемых волн. В общем случае полагается, что неопределенные экзогенные параметры $k, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho$, либо некоторое их подмножество, описываются выпуклыми нормальными нечеткими множествами $\tilde{k}, \tilde{h}_+, \tilde{h}_-, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{44}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}$ с соответствующими функциями принадлежности $\mu_{\tilde{k}}(k), \mu_{\tilde{h}_+}(h_+), \mu_{\tilde{h}_-}(h_-), \mu_{\tilde{c}_{11}}(c_{11}), \mu_{\tilde{c}_{12}}(c_{12}), \mu_{\tilde{c}_{44}}(c_{44}), \mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda), \mu_{\tilde{\rho}}(\rho)$, и введенные в рассмотрение нечеткие множества могут быть представлены в форме суперпозиций α -срезов:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [k_\alpha, \bar{k}_\alpha], \quad \tilde{h}_+ = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [h_{+\alpha}, \bar{h}_{+\alpha}], \quad \tilde{h}_- = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [h_{-\alpha}, \bar{h}_{-\alpha}], \quad \tilde{c}_{11} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}], \\ \tilde{c}_{12} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{12\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}], \quad \tilde{c}_{44} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}], \quad \tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \quad \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\rho_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]. \end{aligned}$$

Применение к четкому аналитическому представлению (1) для эндогенного параметра фазовой скорости $\mathfrak{g}_f^{(p)}$ модифицированной α -уровневой формы эвристического принципа расширения [5, 6, 12–14], с учетом установленных свойств знакоопределенности частных производных, приводит к его нечетко-множественному описанию $\tilde{\mathfrak{g}}_f^{(p)}$ вида

$$\tilde{\mathfrak{g}}_f^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mathfrak{g}}_f^{(p)}, \bar{\mathfrak{g}}_f^{(p)}], \quad (2)$$

в котором

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{g}}_f^{(p)} &= F_p(\bar{k}_\alpha, \bar{h}_{+\alpha}, \bar{h}_{-\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}, \bar{\lambda}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha), \\ \bar{\mathfrak{g}}_f^{(p)} &= F_p(k_\alpha, h_{+\alpha}, h_{-\alpha}, c_{11\alpha}, c_{12\alpha}, c_{44\alpha}, \lambda_\alpha, \rho_\alpha). \end{aligned}$$

Удобным в практическом отношении является также использование вместо экзогенной характеристики k параметра длины рассматриваемой нормальной волны $l = 2\pi/k$. В этом случае

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{g}}_f^{(p)} &= G_p(l_\alpha, \bar{h}_{+\alpha}, \bar{h}_{-\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}, \bar{\lambda}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha), \\ \bar{\mathfrak{g}}_f^{(p)} &= G_p(\bar{l}_\alpha, h_{+\alpha}, h_{-\alpha}, c_{11\alpha}, c_{12\alpha}, c_{44\alpha}, \lambda_\alpha, \rho_\alpha); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} G_p(l, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho) &= \\ &= [(c_{11} - c_{12})/(2\rho) + (l/(2\pi))^2 (c_{44}/\rho)(\lambda^2/4 + (p\pi/(h_+ + h_-))^2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве примера реализации описываемой методики может быть представлен случай получения нечетких оценок для фазовых скоростей нормальных волн второй моды анализируемого спектра при задании разбросов в значениях параметров

$l, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho$ нормальными нечеткими трапецеидальными интервалами $\tilde{l}, \tilde{h}_+, \tilde{h}_-, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{44}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}$ с соответствующими кортежами реперных значений [15, 16]. С учетом того, что, в общем случае, для нормального нечеткого трапецеидального интервала $\tilde{\zeta}$ с кортежем реперных значений $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ может быть записано представление

$$\tilde{\zeta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\zeta}_\alpha, \bar{\zeta}_\alpha],$$

где

$$\underline{\zeta}_\alpha = (1 - \alpha)\zeta_1 + \alpha\zeta_2, \quad \bar{\zeta}_\alpha = \alpha\zeta_3 + (1 - \alpha)\zeta_4,$$

выражения

$$\begin{aligned} G_p(\underline{l}_\alpha, \bar{h}_{+\alpha}, \bar{h}_{-\alpha}, \underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}, \underline{c}_{44\alpha}, \underline{\lambda}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha), \\ G_p(\bar{l}_\alpha, \underline{h}_{+\alpha}, \underline{h}_{-\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}, \underline{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}, \bar{\lambda}_\alpha, \underline{\rho}_\alpha), \end{aligned} \quad (5)$$

также могут быть получены в аналитическом виде.

В частности, для волновода в виде слоя-пласта из осадочной горной породы алевролита [17] с описываемыми в размерности системы СИ нечетко-интервальными физико-механическими параметрами

$$\begin{aligned} \tilde{h}_+ : (0.22, 0.24, 0.25, 0.28), \quad \tilde{h}_- : (0.12, 0.14, 0.15, 0.16), \\ \tilde{\rho} : (1.8\rho^*, 2.0\rho^*, 2.4\rho^*, 2.6\rho^*), \quad \tilde{\lambda} : (0.1, 0.15, 0.18, 0.25), \\ \tilde{c}_{11} : (7.01c^*, 7.05c^*, 7.08c^*, 7.16c^*), \quad \tilde{c}_{12} : (2.54c^*, 2.64c^*, 2.68c^*, 2.76c^*), \\ \tilde{c}_{44} : (2.06c^*, 2.29c^*, 2.31c^*, 2.34c^*), \quad c^* = 10^{10}, \quad \rho^* = 10^3, \end{aligned}$$

функции принадлежности для эндогенных нечетких оценок фазовых скоростей нормальных волн из второй моды анализируемого спектра с нечеткими параметрами длины $\tilde{l}_1 : (0.4, 0.55, 0.6, 0.7)$, $\tilde{l}_2 : (0.2, 0.24, 0.26, 0.36)$, полученные с использованием соотношений (2)–(5), соответственно приводятся в размерности м/с на рис. 1 и рис. 2.

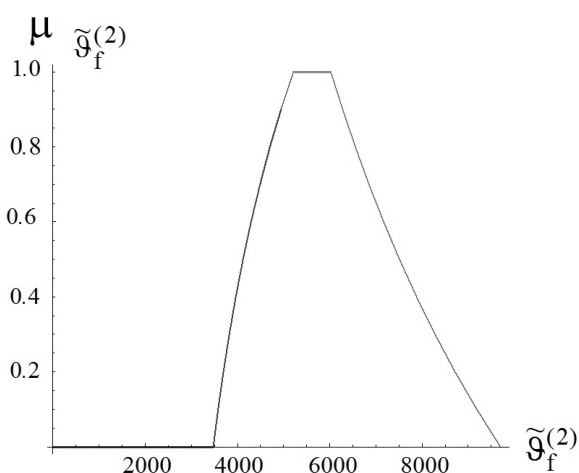


Рис. 1. Функция принадлежности для нечетко-множественной оценки фазовой скорости нормальной волны второй моды с нечетким параметром относительной длины \tilde{l}_1

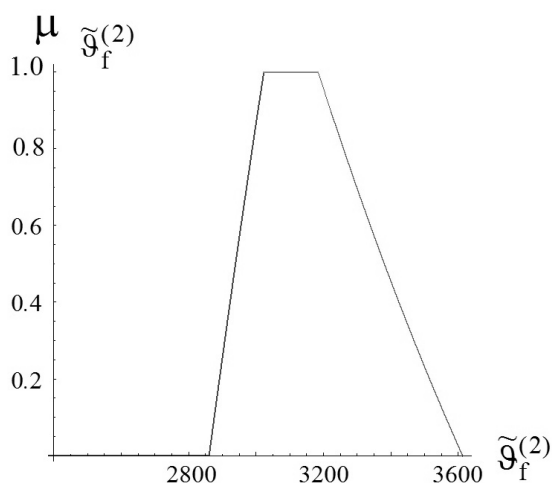


Рис. 2. Функция принадлежности для нечетко-множественной оценки фазовой скорости нормальной волны второй моды с нечетким параметром относительной длины \tilde{l}_2

Представленные оценки отражают уровни нормированных относительных показателей степени уверенности в том, что анализируемая фазовая скорость будет принимать соответствующее значение при заданных разбросах в значениях экзогенных параметров модели.

Выводы. Результатом представленных исследований является разработка численно-аналитической методики получения оценок для значений фазовых скоростей сдвиговых нормальных упругих волн из произвольной моды спектра для волновода в виде слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала при учете в рассматриваемой модели факторов неопределенности в виде разбросов величин экзогенных физико-механических и геометрических параметров. Методика базируется на нечетко-множественном описании неопределенных параметров, а также на использовании модифицированной формы эвристического принципа расширения в процессе перехода в полученном аналитическом представлении для исследуемых фазовых скоростей к нечетко-множественным аргументам. Представлен пример реализации разработанной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник / под ред. В.В. Ключева. – М.: Машиностроение, 2005. – 656 с.
2. Нежданов А.А. Геологическая интерпретация сейсморазведочных данных / А.А. Нежданов. – Тюмень: ТИУ, 2017. – 171 с.
3. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
4. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / А. Исимару. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 317 с.
5. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
6. Ротштейн А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
7. Anastassiou G.A. Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
8. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
9. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
10. Kandasamy W. B. V. Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W. B. V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
11. Sonbol A.H. TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42. – P. 702-712.
12. Сторожев С.В. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое / С.В. Сторожев // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XVIII Международ. конф. (Ростов-на-Дону, 7 – 10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного фед. ун-та, 2016. – Т. 2. – С. 200–204.
13. Storozhev S.V. Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets / S.V. Storozhev // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O.Ja. Kravets. – CityplaceYelm, StateWA, country-regionUSA: Science Book Publ. House, 2015. – P. 45–52.
14. Storozhev S.V. Fuzzy Evaluations for Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonics of Shear Waves in Transversely Isotropic Medium / S.V. Storozhev // Nonlinear Dynamics – 2016. Proc. of 5-th International Conference (September 27-30, 2016) / National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute». –Kharkov, 2016. – P. 509–514.
15. Grzegorzewski P. 2005 Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mr'owka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115-135.

16. Ban A.I. Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45-59.
17. Аннин Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов / Б.Д. Аннин // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 5-14.

Поступила в редакцию 01.11.2019 г.

FUZZY-SET ASSESSMENTS FOR PHASE SPEEDS OF NORMAL SHEAR WAVES IN AN ANISOTROPIC FUNCTIONAL-GRADIENT LAYER WITH SCATTER ERRORS OF VALUES OF PHYSICAL AND MECHANICAL PARAMETERS

A.A. Glukhov, S.B. Nombre, S.V. Storozhev, V.A. Shaldyrvan

The results of the development and testing of a numerical-analytical method for obtaining of estimates for the phase velocities of normal shear elastic waves from an arbitrary spectrum mode for a waveguide in the form of a layer of a functional gradient transversely isotropic material taking into account of the scatter errors of exogenous physical-mechanical and geometric parameters are presented. The technique on a fuzzy-sets description of uncertain parameters and on the use of a modified form of the heuristic principle of generalization in the process of transition to fuzzy-set arguments in the obtained analytical representation for the phase velocities under study is based.

Keywords: elastic waveguide layer, transversely isotropic functional gradient materials, physical-mechanical and geometric parameters, scatter errors of experimental values, shear normal waves, estimation of uncertain values of phase velocities, fuzzy-set technique, heuristic generalization principle.

Глухов Антон Александрович

Магистрант факультета математики и информационных технологий ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: antonglukhov2012@yandex.ru

Glukhov Anton Alexandrovich

Graduate student of faculty of mathematics and information technology of Donetsk national university, Donetsk, DPR.
E-mail: antonglukhov2012@yandex.ru

Номбре Светлана Борисовна

Кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и информатики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР.
E-mail: lanan73@mail.ru

Nombre Svetlana Borisovna

Candidate of physico-mathematical sciences, docent, associate professor of department of high mathematics and informatics of Donbas national academy of civil engineering and architecture, Makeevka, DPR.
E-mail: lanan73@mail.ru

Сторожев Сергей Валериевич

Кандидат экономических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и информатики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР.
E-mail: sergeys@i.ua

Storozhev Sergey Valerievich

Candidate of economic sciences, docent, associate professor of department of high mathematics and informatics of Donbas national academy of civil engineering and architecture, Makeevka, DPR.
E-mail: sergeys@i.ua

Шалдырван Валерий Анатольевич

Доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической физики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: emis1963@gmail.com

Shaldyrvan Valeriy Anatolievich,

Doctor of physico-mathematical sciences, full professor, professor of department of mathematical physics of Donetsk national university, Donetsk, DPR.
E-mail: emis1963@gmail.com

УДК 539.3

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ПЛИТ

© 2019. С. А. Калоеров

Введены и исследованы комплексные потенциалы прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит. Получены выражения основных характеристик через эти функции, граничные условия для определения функций и их общие представления для случая любой конечной и бесконечной многосвязной области. Рассмотрены частные задачи электроупругости, магнитоупругости и классической теории упругости.

Ключевые слова: Теория изгиба тонких плит, пьезоэлектромагнитные плиты, комплексные потенциалы, многосвязная плита.

В различных областях современной науки и техники широкое распространение в качестве элементов конструкций получили тонкие пластины, находящиеся в условиях поперечного изгиба и называемые тонкими плитами. В процессе эксплуатации таких плит возникают высокие концентрации напряжений, которые могут приводить к их разрушению. В связи с этим нужно иметь методы определения напряженно-деформированного состояния тонких плит при различных внешних воздействиях. Хотя этой проблемой уже с середины XVIII века занимались многие известные ученые, но наиболее приемлемое решение были получены лишь в середине XIX века Кирхгоффом [1, 2], предложившим прикладную теорию изгиба тонких плит. Но для плит из сложных анизотропных материалов фундаментальные результаты были получены лишь в 30-е годы XX века Лехницким С. Г. [3, 4]. Но современные тонкие плиты порой изготавливаются из материалов, обладающих пьезоэффектом, что нужно учитывать при решениях задач. Такой учет приводит к серьезным математическим трудностям, и он в полной мере учтен лишь для случаев, когда пластинки находятся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [5, 6]. Для случая же изгиба плит из пьезоматериалов пока предложена модель и проблема приведена к решению некоторой краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных [7].

В данной статье решения указанных краевых задач получены с использованием теории функций комплексного переменного. Введены комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит, получены через них выражения основных характеристик, граничные условия для определения этих функций, их общие представления для любой многосвязной области, рассмотрены частные случаи, когда для плит решаются задачи электроупругости, магнитоупругости и теории упругости.

1. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит. Как известно [7], решение задачи об изгибе тонкой электромагнитоупругой плиты сводится к нахождению решения неоднородной системы дифференциальных уравнений относительно функций прогиба плиты $w(x, y)$ и плотностей по толщине плиты потенциалов электрического поля $\varphi_0(x, y)$ и магнитного поля $\psi_0(x, y)$

$$\begin{aligned} L_{4s}w + L_{3g}\varphi_0 + L_{3p}\psi_0 &= q(x, y), & L_{3g}w + L_{2gg}\varphi_0 + L_{2pp}\psi_0 &= 0, \\ L_{3p}w + L_{2pp}\varphi_0 + E_{2pp}\psi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 L_{4s} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\
 L_{3g} &= C_{g11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{g21} + 2C_{g16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{g12} + 2C_{g26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{g22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{3p} &= C_{p11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{p21} + 2C_{p16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{p12} + 2C_{p26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{p22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{2gg} &= D_{g11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{g12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{g22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 L_{2pp} &= D_{p11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{p12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{p22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 E_{2pp} &= E_{p11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2E_{p12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_{p22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{pij} = c_{pij}D_0$, $D_{gij} = d_{gij}D_0$, $D_{pij} = d_{gij}D_0$, $E_{pij} = e_{pij}D_0$ – электромагнитные жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$ – постоянная, зависящая от толщины плиты h ; b_{ij} , c_{gij} , c_{pij} , d_{gij} , d_{pij} , e_{pij} – постоянные, определяемые как элементы обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\
 b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\
 b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\
 -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & d_{g11} & d_{g12} & d_{p11} & d_{p12} \\
 -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & d_{g12} & d_{g22} & d_{p12} & d_{p22} \\
 -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & d_{p11} & d_{p12} & e_{p11} & e_{p12} \\
 -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & d_{p12} & d_{p22} & e_{p12} & e_{p22}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\
 s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\
 s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\
 -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\
 -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\
 -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\
 -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22}
 \end{pmatrix}^{-1},$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} , ν_{ij} , χ_{ij} – соответственно коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях.

После решения системы дифференциальных уравнений (1.1) основные характеристики электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) плиты (механические моменты M_x , M_y , H_{xy} , моменты плотности по толщине электрического потенциала M_ϕ и магнитного потенциала M_ψ , моменты электрической индукции M_{dx} , M_{dy} и магнитной индукции M_{bx} , M_{by} , поперечные силы N_x , N_y) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 M_x = & - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
 & \left. - C_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p21} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\
 M_y = & - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
 & \left. - C_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \\
 H_{xy} = & - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
 & \left. - C_{g16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right); \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

$$M_\varphi = D_0 \varphi_0, \quad M_\psi = D_0 \psi_0; \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
 M_{dx} = & C_{g11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 & + D_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 M_{dy} = & C_{g21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 & + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 M_{bx} = & C_{p11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 & + D_{p11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 M_{by} = & C_{p21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 & + D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}; \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_x = & - \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\
 & - C_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g21} + C_{g16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \\
 & \left. - C_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p21} + C_{p16}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_y = - \left[D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\
 - C_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g12} + C_{g26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \\
 \left. - C_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p12} + C_{p26}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right]. \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1.1) представим в виде суммы частного и общего решения этой системы. Частное решение системы зависят от вида функции $q(x, y)$, легко выбирается для различных заданий этой функции и в общем случае не представляет интереса. Поэтому остановимся на нахождении общего решения системы (1.1).

Операторными преобразованиями, аналогичными решению системы 3-х линейных алгебраических уравнений, решение системы (1.1) приведем к решению следующих 3-х уравнений в частных производных 8-го порядка относительно функций $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$ и $\psi_0(x, y)$

$$\begin{vmatrix} L_{4s} & L_{3g} & L_{3p} \\ L_{3g} & L_{2gg} & L_{2pp} \\ L_{3p} & L_{2pp} & E_{2pp} \end{vmatrix} (w, \varphi_0, \psi_0) = 0, \quad (1.7)$$

где L_{ij} , L_{2ij} и E_{2pp} – операторы (1.2).

Решение первого уравнения (1.7) будем искать в виде произвольной некоторой функции W от линейной формы $x + \mu y$, т. е. в виде $w(x, y) = W(x + \mu y)$. Подставляя эту функцию в первое уравнение (1.7) и учитывая, что в силу ее произвольности производная $W^{VIII}(x + \mu y)$ не может тождественно равняться нулю при произвольных x и y , приходим к выводу, что равен нулю коэффициент при этой производной:

$$\begin{vmatrix} l_{4s} & l_{3g} & l_{3p} \\ l_{3g} & l_{2gg} & l_{2pp} \\ l_{3p} & l_{2pp} & e_{2pp} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.8)$$

или

$$l_{4s} l_{2gg} e_{2pp} + 2l_{3g} l_{3p} l_{2pp} - l_{3p} l_{3p} l_{2gg} - l_{4s} l_{2pp} l_{2pp} - l_{3g} l_{3g} e_{2pp} = 0, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned}
 l_{4s}(\mu) &= -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}) \\
 l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\
 l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\
 l_{2gg}(\mu) &= D_{g22}\mu^2 + 2D_{g12}\mu + D_{g11}, \\
 l_{2pp}(\mu) &= D_{p22}\mu^2 + 2D_{p12}\mu + D_{p11}, \\
 e_{2pp}(\mu) &= E_{p22}\mu^2 + 2E_{p12}\mu + E_{p11}. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Как и в задаче теории упругости анизотропного тела [3, 4], можно установить, что для реальных пьезоматериалов корни характеристического уравнения 8-го порядка (1.9) не могут быть вещественными, а являются обще комплексными или чисто мнимыми. Тогда в силу вещественности коэффициентов уравнения эти корни будут попарно сопряженными. Обозначим их через $\mu_k, \bar{\mu}_k$ ($k = \overline{1, 4}$), и будем рассматривать случай неравных корней. Этим корням соответствуют обобщенные комплексные переменные $z_k = x + \mu_k y$, $\bar{z}_k = x + \bar{\mu}_k y$ и функции от них $W_k(z_k)$ и $W_{k+4}(\bar{z}_k)$. Тогда общее решение первого уравнения (1.7) является суммой 8-ми функций от переменных z_k и \bar{z}_k ($k = \overline{1, 4}$). Аналогичным образом получаются решения для второго и третьего уравнений (1.7) с тем же характеристическим уравнением. Окончательно для всех трех уравнений найдем

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^4 [W_k(z_k) + W_{k+4}(\bar{z}_k)], \quad \varphi_0(x, y) = \sum_{k=1}^4 [\Phi_k(z_k) + \Phi_{k+4}(\bar{z}_k)],$$

$$\psi_0(x, y) = \sum_{k=1}^4 [\Psi_k(z_k) + \Psi_{k+4}(\bar{z}_k)], \quad (1.11)$$

где

$$z_k = x + \mu_k y = x_k + i y_k; \quad (1.12)$$

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_k > 0; \quad x_k = x + \alpha_k y, \quad y_k = \beta_k y,$$

условие $\beta_k > 0$ принято для определенности при отборе $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ среди 8-ми корней уравнения (1.8).

Левые части равенств (1.11) являются вещественными функциями, и для выполнения этого условия для функций в правых частях примем $W_{k+4}(\bar{z}_k) = \overline{W_k(z_k)} = \overline{W_k(z_k)}$, $\Phi_{k+4}(\bar{z}_k) = \overline{\Phi_k(z_k)}$, $\Psi_{k+4}(\bar{z}_k) = \overline{\Psi_k(z_k)}$. Тогда общие решения всех уравнений (1.7) запишутся в виде

$$w(x, y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W_k(z_k), \quad \varphi_0(x, y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \Phi_k(z_k),$$

$$\psi_0(x, y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \Psi_k(z_k), \quad (1.13)$$

где $W_k(z_k)$, $\Phi_k(z_k)$, $\Psi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) – аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$. Но в силу того, что $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ должны удовлетворять первоначальной общей системе уравнений (1.1), между функциями $W_k(z_k)$, $\Phi_k(z_k)$, $\Psi_k(z_k)$ существуют некоторые связи. Примем, что

$$\Phi_k(z_k) = \lambda_k W_k'(z_k), \quad \Psi_k(z_k) = \nu_k W_k'(z_k), \quad (1.14)$$

где λ_k, ν_k – неизвестные постоянные. Подставляя выражения (1.14) в уравнения однородной системы (1.1) и учитывая (1.13), получаем

$$l_{4s}(\mu_k) + \lambda_k l_{3g}(\mu_k) + \nu_k l_{3p}(\mu_k) = 0,$$

$$l_{3g}(\mu_k) + \lambda_k l_{2gg}(\mu_k) + \nu_k l_{2pp}(\mu_k) = 0,$$

$$l_{3p}(\mu_k) + \lambda_k l_{2pp}(\mu_k) + v_k e_{2pp}(\mu_k) = 0 \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (1.15)$$

Из 2-го и 3-го уравнений системы (1.15) находим

$$\lambda_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad v_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}. \quad (1.16)$$

Здесь

$$\Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2gg}(\mu_k) & l_{2pp}(\mu_k) \\ l_{2pp}(\mu_k) & e_{2pp}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2pp}(\mu_k) \\ -l_{2p}(\mu_k) & e_{2pp}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2gg}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2pp}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

Подставив выражения (1.16) в первое уравнение системы (1.15), получим равенство

$$l_{4s}\Delta_{0k} + l_{3g}\Delta_{1k} + l_{3p}\Delta_{2k} = 0,$$

которое на основе характеристического уравнения (1.9) удовлетворяется тождественно.

Окончательно с учетом частного решения системы уравнений (1.1) для прогиба и плотностей потенциалов по толщине плиты получаем следующие выражения:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W_k(z_k); \quad (1.18)$$

$$\varphi_0(x, y) = \varphi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k W'_k(z_k),$$

$$\psi_0(x, y) = \psi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 v_k W'_k(z_k), \quad (1.19)$$

где $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$ и $\psi_{00}(x, y)$ – частное решение системы (1.1).

Подставив функции (1.18), (1.19) в выражения основных характеристик (1.3) – (1.6), получим для этих характеристик следующие выражения:

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, H_{xy}) &= (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k), \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)\lambda_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k)v_k, \\ q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)\lambda_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k)v_k, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)\lambda_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k)v_k; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$(M_\varphi, M_\psi) = (M_{0\varphi}, M_{0\psi}) + D_0(\varphi_0, \psi_0), \quad (1.21)$$

$$(M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) = (M_{0dx}, M_{0dy}, M_{0bx}, M_{0by}) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) W''_k(z_k),$$

$$\begin{aligned} d_{xk} &= C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (D_{g11} + D_{g12}\mu_k)\lambda_k - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k)v_k, \\ d_{yk} &= C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (D_{g12} + D_{g22}\mu_k)\lambda_k - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k)v_k, \\ b_{xk} &= C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k)\lambda_k - (E_{p11} + E_{p12}\mu_k)v_k, \\ b_{yk} &= C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k)\lambda_k - (E_{p12} + E_{p22}\mu_k)v_k; \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y) &= (N_{0x}, N_{0y}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (l_k, -s_k) W_k'''(z_k), \\
 s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 + (C_{g16} + (C_{g12} + C_{g26})\mu_k + \\
 &\quad + C_{g22}\mu_k^2)\lambda_k + (C_{p16} + (C_{p12} + C_{p26})\mu_k + C_{p22}\mu_k^2)\nu_k, \\
 l_k &= D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 + (C_{g11} + (C_{g21} + C_{g16})\mu_k + \\
 &\quad + C_{g26}\mu_k^2)\lambda_k - (C_{p11} + (C_{p21} + C_{p16})\mu_k + C_{p26}\mu_k^2)\nu_k. \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению и вычисляются по формулам (1.3)–(1.6), если в них вместо $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ брать $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$, $\psi_{00}(x, y)$. При этом можно показать, что

$$l_k - \mu_k s_k = d_{xk} + \mu_k d_{yk} = b_{xk} + \mu_k b_{yk} = 0,$$

откуда следуют равенства

$$l_k = \mu_k s_k, \quad d_{xk} = -\mu_k d_{yk}, \quad b_{xk} = -\mu_k b_{yk}. \quad (1.24)$$

Имеют место и связи

$$s_k + r_k = -p_k / \mu_k \quad s_k - r_k = q_k \mu_k. \quad (1.25)$$

Кроме основных характеристик, дифференцируя первую функцию (1.18) по x и y , также найдем выражения для компонент углов поворотов

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k) W_k'(z_k). \quad (1.26)$$

2. Граничные условия для определения комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ должны удовлетворять определенным граничным условиям на краю плиты. Эти условия получаются из соответствующих условий [7] для решения системы дифференциальных уравнений (1.1), если в них учитывать приведенные выше выражения для основных характеристик. Рассмотрим эти условия.

Край плиты с контуром L_l загружен внешними воздействиями в виде изгибающих моментов $m_l(s)$, поперечных усилий $p_l(s)$ и индукционных моментов $m_{dl}(s)$, $m_{bl}(s)$, то граничные условия для определения функций имеют вид [7]

$$\begin{aligned}
 M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny &= m(s) \cos nx - (r(s) + c) \cos ny, \\
 (H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny &= m(s) \cos ny + (r(s) + c) \cos nx, \\
 M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny &= m_{dl}(s), \quad M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = m_{bl}(s), \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \int_0^s N_n ds, \quad r(s) = \int_0^s p(s) ds; \quad (2.2) \\
 N_n &= N_x \cos nx + N_y \cos ny;
 \end{aligned}$$

c – вещественная постоянная.

При обходе области по контуру L_l против часовой стрелки для направляющих косинусов имеем

$$\cos nx = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos ny = \mp \frac{dx}{ds} \quad (2.3)$$

или

$$\cos ny - \mu_k \cos nx = \mp \frac{dx + \mu_k dy}{ds} = \mp \frac{dz_k}{ds}, \quad (2.4)$$

где верхние знаки относятся к внешнему контуру (при положительном обходе области), нижние знаки – к контурам отверстий (при отрицательном обходе области). Учитывая это, из (1.20), (1.22) и (1.23) получим [8]

$$N_n = N_{0x} \cos nx + N_{0y} \cos ny \mp 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k W_k'''(z_k) \frac{dz_k}{ds}; \quad (2.5)$$

$$I = \int_0^s N_n ds = N_{0xy} \mp 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k W_k''(z_k),$$

$$N_{0xy} = \int_0^s (N_{0x} \cos nx + N_{0y} \cos ny) ds; \quad (2.6)$$

$$M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny = M_{0x} \cos nx + (H_{0xy} - I_0) \cos ny \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{\mu_k} W_k''(z_k) \frac{dz_k}{ds},$$

$$(H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny = (H_{0xy} + I_0) \cos nx + M_{0y} \cos ny \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 q_k W_k'(z_k) \frac{dz_k}{ds},$$

$$M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny = M_{0dx} \cos nx + M_{0dy} \cos ny \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W_k''(z_k) \frac{dz_k}{ds},$$

$$M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = M_{0bx} \cos nx + M_{0by} \cos ny \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W_k''(z_k) \frac{dz_k}{ds}. \quad (2.7)$$

Интегрируя условия (2.1) с учетом (2.7), получим граничные условия для случая нагруженного края плиты

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) = I_{0xy1} \mp \int_0^s (m_l dy + f_l dx) - c_{l1} x + c_{l1},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 q_k W_k'(z_k) = I_{0xy2} \mp \int_0^s (m_l dx - f_l dy) + c_{l1} y + c_{l2},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W_k'(z_k) = M_{0d} \pm \int_0^s m_{dl} ds + c_{l5}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W_k'(z_k) = M_{0b} \pm \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6}, \quad (2.8)$$

где

$$I_{0xy1} = \int_0^s (M_{0x} \cos nx + (H_{0xy} - I_0) \cos ny) ds,$$

$$\begin{aligned}
 I_{0xy2} &= \int_0^s \left((H_{0xy} + I_0) \cos nx + M_{0y} \cos ny \right) ds, \\
 M_{0d} &= \int_0^s \left(M_{0dx} \cos nx + M_{0dy} \cos ny \right) ds, \quad M_{0b} = \int_0^s \left(M_{0bx} \cos nx + M_{0by} \cos ny \right) ds. \\
 J_{01} &= \int_0^s \left((N_{0xy} - H_{0xy}) dx + M_{0x} dy \right), \quad J_{02} = - \int_0^s \left(M_{0y} dx - (N_{0xy} + H_{0xy}) dy \right), \\
 f_l(s) &= \int_0^s p_l(s) ds; \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

c_l – вещественная, c_{il} – комплексные постоянные. Здесь, как и ранее, верхние знаки относятся к внешнему контуру L_0 области S , нижние – к контурам отверстий L_l ; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки.

В случае незагруженного края плиты в равенствах (2.8) нужно принимать $m_l(s) = p_l(s) = m_{dl}(s) = m_{bl}(s) = 0$.

Если на краю плиты заданы прогиб w^* и производная по нормали $(dw/dn)^*$, то граничные условия имеют вид [7]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial x} &= \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos nx + \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos^2 ny - \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos nx \cos ny, \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos ny - \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos nx \cos ny + \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos^2 nx, \\
 M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny &= m_{dl}(s), \quad M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = m_{bl}(s), \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

из которого, учитывая выражения производных (1.26), получаем

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos nx + \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos^2 ny - \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos nx \cos ny, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos ny - \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos nx \cos ny + \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos^2 nx, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W'_k(z_k) &= \int_0^s m_{dl} ds + c_{l5}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W'_k(z_k) = \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6}. \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

Для случая жестко защемленного края плиты получаем

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k W'_k(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W'_k(z_k) &= \int_0^s m_{dl} ds + c_{l5}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W'_k(z_k) = \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6}. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Если край плиты жестко подкреплен, то граничные условия будут такими:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{l3}, & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{l4}, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W'_k(z_k) &= \int_0^s m_{dl} ds + c_{l5}, & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W'_k(z_k) &= \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6}.
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если контур плиты оперт и загружен распределенными моментами интенсивности $m_l(s)$, $m_{dl}(s)$ и $m_{bl}(s)$, то граничные условия имеют вид [7]

$$\begin{aligned}
 w = 0, & \quad M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny = m(s), \\
 M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny &= m_{dl}(s), \quad M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = m_{bl}(s).
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заменив прогиб и моменты через комплексные потенциалы и их производные, получим

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W_k(z_k) &= -w_0, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [p_k \cos^2 nx + q_k \cos^2 ny + 2r_k \cos nx \cos ny] W_k''(z_k) &= \\
 &= M_{0x} \cos^2 nx + M_{0y} \cos^2 ny + 2H_{0xy} \cos nx \cos ny - m_l(s), \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W'_k(z_k) &= \int_0^s m_{dl}(s) ds + c_{l5}, & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W'_k(z_k) &= \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6}.
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для свободно опертого незагруженного края плиты в условиях (2.15) нужно принять $m_l(s) = m_{dl}(s) = m_{bl}(s) = 0$.

Если имеет место идеальный контакт плиты с упругим включением, то граничные условия для определения функций имеют вид [7]

$$\begin{aligned}
 M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny + M_x^l \cos nx + (H_{xy}^l - I^l) \cos ny &= -c \cos ny, \\
 (H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny + (H_{xy}^l + I^l) \cos nx + M_y^l \cos ny &= c \cos nx, \\
 \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w^l}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w^l}{\partial y} = 0, \\
 M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny + M_{dx}^{(l)} \cos nx + M_{dy}^{(l)} \cos ny &= 0, \\
 M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny + M_{bx}^{(l)} \cos nx + M_{by}^{(l)} \cos ny &= 0. \\
 M_\varphi + M_\varphi^{(l)} = 0, & \quad M_\psi + M_\psi^{(l)} = 0.
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставив в эти равенства выражения производных (1.26) и моментов по формулам (1.20) и (1.22), найдем условия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(g_{kli} W'_k(z_k) - g_{kli}^{(l)} W_k^{(l)'}(z_k) \right) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (2.17)$$

в которых

$$g_{kl1} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{kl2} = q_k, \quad g_{kl3} = 1, \quad g_{kl4} = \mu_k, \quad g_{kl5} = d_{yk}, \quad g_{kl6} = b_{yk},$$

$$g_{kl7} = g_{kl8} = 1/D_0, \quad g_{kl1}^{(l)} = \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, \quad g_{kl2}^{(l)} = q_k^{(l)}, \quad g_{kl3}^{(l)} = 1,$$

$$g_{kl4}^{(l)} = \mu_k^{(l)}, \quad g_{kl5}^{(l)} = d_{yk}^{(l)}, \quad g_{kl6}^{(l)} = b_{yk}^{(l)}, \quad g_{kl7}^{(l)} = g_{kl8}^{(l)} = \frac{1}{D_0^{(l)}}; \quad (2.18)$$

$$f_{l1} = I_{0xy1} \mp \int_0^s (m_l dy + f_l dx) - c_{l1}x + c_{l1}, \quad f_{l2} = I_{0xy2} \mp \int_0^s (m_l dx - f_l dy) + c_{l1}y + c_{l2},$$

$$f_{l3} = \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad f_{l4} = \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial y},$$

$$f_{l5} = M_{0d} - M_{0d}^{(l)} \pm \int_0^s m_{dl} ds + c_{l5}, \quad f_{l6} = M_{0b} - M_{0b}^{(l)} \pm \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6};$$

$$f_{l7} = c_{l7}, \quad f_{l8} = c_{l8}. \quad (2.19)$$

все величины со значком (l) вверху относятся к включению $S^{(l)}$ и получаются по приведенным выше соответствующим формулам для плиты заменой величин без значка на величины со значком; $\mu_k^{(l)}$ ($k=1, 2$) – корни характеристического уравнения (1.9) для включения $S^{(l)}$; $w_0^{(l)}(x, y)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1.1) для этого включения; $W_k^{(l)}(z_k)$ – комплексные потенциалы для включения.

3. Общие представления комплексных потенциалов для многосвязной области. Найдем общие представления комплексных потенциалов для любой конечной и бесконечной многосвязных плит. Но вначале получим некоторые полезные для дальнейшего формулы.

Выберем в области S , занимаемой срединной плоскостью плиты, дугу AB , целиком лежащую в области с положительным направлением перехода от A к B (рис. 3.1). Из соотношений Коши для проекций напряжений X_n, Y_n, Z_n на нормаль к дуге и выражений индукций электрического поля D_n и магнитного поля B_n [5, 6]

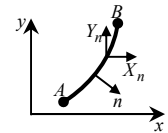


Рис. 3.1

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) + \tau_{xz} \cos(nz) &= X_n, \\ \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yz} \cos(nz) &= Y_n, \\ \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) &= Z_n, \\ D_x \cos(nx) + D_y \cos(ny) + D_z \cos(nz) &= D_n, \\ B_x \cos(nx) + B_y \cos(ny) + B_z \cos(nz) &= B_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

для точек срединной плоскости, для которых $\cos nz = 0$, учитывая равенства [7]

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{M_x}{D_0} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{D_0} z, \quad \tau_{xy} = \frac{H_{xy}}{D_0} z, \quad \tau_{xz} = \frac{N_x}{2D_0} (h^2 - z^2), \quad \tau_{yz} = \frac{N_y}{2D_0} (h^2 - z^2), \\ D_x = \frac{M_{dx}}{D_0} z, \quad D_y = \frac{M_{dy}}{D_0} z, \quad B_x = \frac{M_{bx}}{D_0} z, \quad B_y = \frac{M_{by}}{D_0} z, \end{aligned} \quad (3.2)$$

найдем выражения для внутренних усилий, их моментов относительно осей координат и моментов индукций вдоль дуги AB :

$$\begin{aligned}
 X_n &= \frac{1}{D_0} z (M_x \cos nx + H_{xy} \cos ny), \quad Y_n = \frac{1}{D_0} z (H_{xy} \cos nx + M_y \cos ny), \\
 Z_n &= \frac{1}{2D_0} (h^2 - z^2) (N_x \cos nx + N_y \cos ny); \\
 M_{xn} &= yZ_n - zY_n, \quad M_{yn} = zX_n - xZ_n, \quad M_{zn} = xY_n - yX_n; \\
 M_{dx} \cos(nx) + M_{dy} \cos(ny) &= M_{dn}, \quad M_{bx} \cos(nx) + M_{by} \cos(ny) = M_{bn}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав эти выражения по толщине плиты, найдем, что первое, второе и шестое соотношения, как и следовало ожидать, приведут к нулевым значениям соответствующих компонент интегрированных усилий X_n , Y_n по толщине и момента M_{zn} относительно оси Oz , а из остальных получим выражения поперечной силы (суммарной по толщине) и моментов относительно осей Ox , Oy :

$$\begin{aligned}
 P_n &= N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny), \quad M_{xn} = (yN_x - H_{xy}) \cos(nx) + (yN_y - M_y) \cos(ny), \\
 M_{yn} &= (-xN_x + M_x) \cos(nx) + (-xN_y + H_{xy}) \cos(ny), \\
 M_{Dn} &= M_{Dx} \cos(nx) + M_{Dy} \cos(ny), \quad M_{Bn} = M_{Bx} \cos(nx) + M_{By} \cos(ny). \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Учитывая формулы (2.3) для положительного обхода дуги АВ знаками, последние выражения запишем в виде

$$\begin{aligned}
 P_n &= -\left(N_y \frac{dx}{ds} - N_x \frac{dy}{ds} \right), \quad M_{xn} = -\left(yN_y - M_y \right) \frac{dx}{ds} + \left(yN_x - H_{xy} \right) \frac{dy}{ds}, \\
 M_{yn} &= \left(xN_y - H_{xy} \right) \frac{dx}{ds} - \left(xN_x - M_x \right) \frac{dy}{ds}, \quad M_{Dn} = -\left(M_{Dy} \frac{dx}{ds} - M_{Dx} \frac{dy}{ds} \right), \\
 M_{Bn} &= -\left(M_{By} \frac{dx}{ds} - M_{Bx} \frac{dy}{ds} \right). \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Для главного вектора внутренних усилий, действующих в точках дуги АВ, компонент их главного момента и моментов индукций, исходя из (3.5), получим

$$\begin{aligned}
 P_{AB} &= \int_{AB} P_n ds = - \int_{AB} (N_y dx - N_x dy), \\
 M_{xAB} &= \int_{AB} M_{xn} ds = - \int_{AB} \left((yN_y - M_y) dx - (yN_x - H_{xy}) dy \right), \\
 M_{yAB} &= \int_{AB} M_{yn} ds = \int_{AB} \left((xN_y - H_{xy}) dx \right) - (xN_x - M_x) dy \\
 M_{DAB} &= \int_{AB} M_{Dn} ds = - \int_{AB} (M_{Dy} dx - M_{Dx} dy), \\
 M_{BAB} &= \int_{AB} M_{Bn} ds = - \int_{AB} (M_{By} dx - M_{Bx} dy). \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Подставив в последние формулы значения моментов и перерезывающих сил (1.20), (1.22) и (1.23), найдем

$$P_{AB} = P_{0AB} - 2 \operatorname{Re} \int_{AB} \sum_{k=1}^4 s_k W_k'''(z_k) dz_k,$$

$$\begin{aligned}
 M_{xAB} &= M_{0xAB} - 2 \operatorname{Re} \int_{AB} \sum_{k=1}^4 \left[(s_k y W_k'''(z_k) + \right. \\
 &\quad \left. + q_k W_k''(z_k)) dx + (s_k y \mu_k W_k'''(z_k) - r_k W_k''(z_k)) dy \right], \\
 M_{yAB} &= M_{0yAB} - 2 \operatorname{Re} \int_{AB} \sum_{k=1}^4 \left[-(s_k x W_k'''(z_k) + \right. \\
 &\quad \left. + r_k W_k''(z_k)) dx - (s_k x \mu_k W_k'''(z_k) - p_k W_k''(z_k)) dy \right], \\
 M_{DAB} &= M_{0DAB} - \int_{AB} (d_y dx - d_x dy) W_k'' z_k, \quad M_{BAB} = M_{0BAB} - \int_{AB} (M_{By} dx - M_{Bx} dy). \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 P_{0AB} &= - \int_{AB} (N_{0y} dx - N_{0x} dy), \quad M_{0xAB} = - \int_{AB} ((y N_{0y} - M_{0y}) dx - (y N_{0x} - H_{0xy}) dy), \\
 M_{0yAB} &= \int_{AB} ((x N_{0y} - H_{0xy}) dx - (x N_{0x} - M_{0x}) dy), \\
 M_{0DAB} &= - \int_{AB} (M_{0Dy} dx - M_{0Dx} dy), \quad M_{0BAB} = - \int_{AB} (M_{0By} dx - M_{0Bx} dy). \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав (3.7) с учетом (1.25), получим

$$\begin{aligned}
 P_{AB} &= P_{0AB} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [s_k W_k'''(z_k)]_{AB}, \\
 M_{xAB} &= M_{0xAB} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[q_k W_k'(z_k) + y s_k W_k''(z_k) \right]_{AB}, \\
 M_{yAB} &= M_{0yAB} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) - x s_k W_k''(z_k) \right]_{AB}, \\
 M_{DAB} &= M_{0DAB} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_y W_k'(z_k), \quad M_{BAB} = M_{0BAB} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_y W_k'(z_k). \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Здесь под $[R]_{AB}$ понимается приращение R при переходе из A в B .

Пусть срединная плоскость плиты занимает конечную многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 3.2). В этой многосвязной области, как функции двух переменных x , y определены все основные характеристики изгиба плиты: прогиб, углы поворотов относительно осей координат, моменты плотностей по толщине потенциалов, силовые изгибающие, скручивающие моменты, индукционные моменты и перерезывающая сила. По своей физической сути все эти функции являются непрерывными и однозначными. Эти величины выражаются через частное решение $w_0(x, y)$ и комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ с их производными. Будем считать, что частное

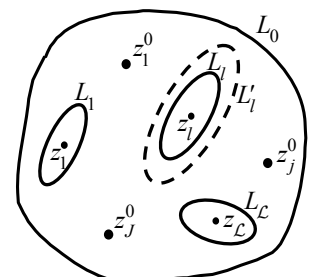


Рис. 3.2

решение $w_0(x, y)$ и его производные обладают такими свойствами и остается накладывать соответствующие ограничения на комплексные потенциалы $W_k(z_k)$, определенные в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S , аффинными преобразованиями (1.12).

Из непрерывности основных характеристик следует непрерывность вплоть до границы функций $W_k(z_k)$ и их производных $W'_k(z_k)$, $W''_k(z_k)$, $W'''_k(z_k)$. Но однозначность указанных величин не требует однозначности функций и их производных. В общем случае последние могут быть и многозначными. Но характер их многозначности не может быть произвольным и должен обеспечить однозначность основных характеристик изгиба.

Рассмотрим в области S произвольный замкнутый контур L'_l , полностью охватывающий только контур отверстия L_l . Обозначим приращения функций $W_k(z_k)$, $W'_k(z_k)$, $W''_k(z_k)$, $W'''_k(z_k)$ при полном обходе по контуру L'_l соответственно через Δ_{kl} , Δ'_{kl} , Δ''_{kl} , Δ'''_{kl} . Из условий однозначности прогиба (1.18), углов поворота относительно осей координат (1.26) и моментов плотностей по толщине потенциалов (1.19), изгибающих, скручивающих моментов (1.20), индукционных моментов (1.22) и перерезывающих сил (1.23) получим равенства

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \Delta_{kl} = 0, \quad (3.10)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \lambda_k, \nu_k) \Delta'_{kl} = 0, \quad (3.11)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k, d_{yk}, \mu_k d_{yk}, b_{yk}, \mu_k b_{yk}) \Delta''_{kl} = 0, \quad (3.12)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\mu_k s_k, s_k) \Delta'''_{kl} = 0. \quad (3.13)$$

Подставим в уравнения (3.12) значения постоянных $p_k, q_k, r_k, d_{yk}, b_{yk}$, получим однородную систему из 7-ми уравнений относительно неизвестных $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \Delta''_{kl}, 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k \Delta''_{kl},$

$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k^2 \Delta''_{kl}, 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k \Delta''_{kl}, 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k \mu_k \Delta''_{kl}, 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \nu_k \Delta''_{kl}, 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \nu_k \mu_k \Delta''_{kl}$. Тривиальным решением этой системы будет нулевое решение, т. е.

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, \nu_k, \nu_k \mu_k) \Delta''_{kl} = 0. \quad (3.14)$$

Систему (3.14) дополним равенствами, следующими из условия механического равновесия кольца $L_l L'_l$, ограниченного контурами L_l и L'_l . На это кольцо действуют распределенные по контуру отверстия L_l заданные внешние воздействия с главным вектором поперечных сил P_l и суммарными моментами $M_{xl}, M_{yl}, M_{Dl}, M_{Bl}$ относи-

тельно осей Ox и Oy , а также внутренние усилия и моменты, распределенные по контуру L'_l . Вычислив главный вектор и моменты последних усилий по формулам (3.9) при полном обходе по контуру L'_l и приравняв их с противоположным знаком величинам P_l, M_{xl}, M_{yl} (условия равновесия кольца $L_l L'_l$), получим

$$\begin{aligned} -P_l &= P_{0L'_l} + P_q - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [s_k W_k''(z_k)]_{L'_l}, \\ -M_{xl} &= M_{0xL'_l} + M_{xq} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [q_k W_k'(z_k) + y s_k W_k''(z_k)]_{L'_l}, \\ -M_{yl} &= M_{0yL'_l} + M_{yq} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) - x s_k W_k''(z_k) \right]_{L'_l}, \\ -M_{Dl} &= M_{0Dl} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [d_y W_k'(z_k)]_{L'_l}, \quad -M_{Bl} = M_{0Bl} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [b_y W_k'(z_k)]_{L'_l}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $P_{0L'_l}, M_{0xL'_l}, M_{0yL'_l}, M_{0Dl}, M_{0Bl}$ – величины, вычисляемые по формулам (3.7) для контура L'_l ; P_q, M_{xq}, M_{yq} – главный вектор и компоненты главного момента усилий $q(x, y)$ по поверхности кольца $L_l L'_l$.

Вычислив приведенные выше приращения от производных комплексных потенциалов по контуру L'_l , устремив затем контур L'_l к контуру отверстия L_l , проходимому в противоположном направлении, с учетом того, что при этом площадь кольца $L_l L'_l$, а, следовательно, и предельные значения P_q, M_{xq}, M_{yq} равны нулю, из (3.15) получим равенства

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 s_k \Delta_{kl}'' &= P_l + P_{0l}, \quad 4 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (q_k \Delta_{kl}' + y s_k \Delta_{kl}'') = M_{xl} + M_{0xl}, \\ 4 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{p_k}{\mu_k} \Delta_{kl}' - x s_k \Delta_{kl}'' \right) &= M_{yl} + M_{0yl}, \\ 4 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_y \Delta_{kl}' &= M_{Dl} + M_{0Dl}, \quad 4 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_y \Delta_{kl}' = M_{Bl} + M_{0Bl}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

в которых

$$\begin{aligned} P_{0l} &= - \int_{L_l} (N_{0y} dx - N_{0x} dy), \\ M_{0xl} &= - \int_{L_l} \left((y N_{0y} - M_{0y}) dx - (y N_{0x} - H_{0xy}) dy \right), \\ M_{0yl} &= \int_{L_l} \left((x N_{0y} - H_{0xy}) dx - (x N_{0x} - M_{0x}) dy \right), \\ M_{0Dl} &= - \int_{L_l} (M_{0Dy} dx - M_{0Dx} dy), \quad M_{0Bl} = - \int_{L_l} (M_{0By} dx - M_{0Bx} dy). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Заменяв в формулах (3.16) s_k, p_k, q_k соответствующими выражениями (1.20) и (1.23), с учетом (3.10) и (3.11) получим

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Delta''_{kl} = \frac{P_l + P_{0l}}{D_{11}}, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) \Delta'_{kl} =$$

$$= \left(-\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2D_{22}} - y \frac{P_l + P_{0l}}{D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2D_{11}} + x \frac{P_l + P_{0l}}{D_{11}}, M_{Dl} + M_{0Dl}, M_{Bl} + M_{0Bl} \right). \quad (3.18)$$

Эти уравнения дополняют системы (3.14) и (3.11) для определения Δ''_{kl} , Δ'_{kl} соответственно. Полные системы получаются такими:

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, \nu_k, \nu_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) \Delta''_{kl} = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{D_{11}} \right); \quad (3.19)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \lambda_k, \nu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) \Delta'_k =$$

$$= \left(-\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2D_{22}} - y \frac{P_l + P_{0l}}{D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2D_{11}} + x \frac{P_l + P_{0l}}{D_{11}}, M_{Dl} + M_{0Dl}, M_{Bl} + M_{0Bl} \right). \quad (3.20)$$

Из системы (3.19) видно, что приращения Δ''_{kl} являются постоянными, т.е. функции $W''_k(z_k)$ при полном обходе по контуру L'_l получают постоянные комплексные приращения. Среди элементарных функций только $\ln(z_k - z_{kl})$, когда $z_{kl} = x_l + \mu_k y_l$ и x_l, y_l – произвольная точка внутри контура L_l , при полном обходе по любому контуру L'_l получает постоянное приращение, равное $2\pi i$, а, следовательно, постоянное комплексное приращение получает функция $A_{kl} \ln(z_k - z_{kl})$, где A_{kl} – комплексное число. Следовательно, функция $W''_k(z_k)$ содержит $A_{kl} \ln(z_k - z_{kl})$ и

$$\Delta''_{kl} = 2\pi i A_{kl}. \quad (3.21)$$

Таким же образом, учитывая все отверстия многосвязной области, для функции $W''_k(z_k)$ окончательно найдем представление

$$W''_k(z_k) = \sum_{l=1}^L A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + W''_{k0}(z_k), \quad (3.22)$$

где $W''_{k0}(z_k)$ – функция, голоморфная в многосвязной области S_k . Подставив выражение (3.21) в уравнения (3.19), для определения A_{kl} получим систему 8-х уравнений с 8-мя неизвестными

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, \nu_k, \nu_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right). \quad (3.23)$$

Интегрируя (3.22), найдем

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W'_{k0}(z_k), \quad (3.24)$$

где B_{kl} – комплексные постоянные; $W'_{k0}(z_k)$ – функции, однозначные в областях S_k . Учитывая (3.24), найдем

$$\Delta'_{kl} = 2\pi i (A_{kl} z_k + B_{kl}). \quad (3.25)$$

Подставив выражение (3.25) в уравнения (3.20), получим систему уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \lambda_k, \nu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) i (A_{kl} z_k + B_{kl}) = \left(0, 0, 0, 0, \right. \\ \left. -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}} - y \frac{P_l}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi} + x \frac{P_l}{2\pi}, M_{Dl} + M_{0Dl}, M_{Bl} + M_{0Bl} \right). \quad (3.26)$$

Сравнивая в (3.26) справа и слева коэффициенты при x, y и свободные члены, приходим к трем системам уравнений, две из которых на основе (3.23) и характеристического уравнения (1.9) удовлетворяются тождественно, а третья имеет вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \lambda_k, \nu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) i B_{kl} = \\ = \left(0, 0, 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi}, M_{Dl} + M_{0Dl}, M_{Bl} + M_{0Bl} \right). \quad (3.27)$$

и служит для определения B_{kl} .

Заметим, что из (3.24) видно, что производные $W_k'''(z_k)$ при обходе по контурам L_{kl} не получают приращений, т.е. $\Delta_{kl}''' = 0$, и соотношения (3.13) удовлетворяются тождественно.

Представления (3.24) можно распространять и на случай действия сосредоточенных сил и моментов во внутренних точках плиты. Сосредоточенную силу P_r^0 и сосредоточенные моменты $M_{xr}^0, M_{yr}^0, M_{Dr}^0, M_{Br}^0$ в точке z_r^0 можно рассматривать как предельные для случая плиты с круговым отверстием, к контуру которого приложены равномерно распределенные поперечные усилия и моменты, когда радиус окружности стремится к нулю при постоянном сохранении значения равнодействующей P_r^0 и компонентов моментов $M_{xr}^0, M_{yr}^0, M_{Dr}^0, M_{Br}^0$. Тогда для случая, когда в точках z_r^0 ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные силы P_r^0 и моменты $M_{xr}^0, M_{yr}^0, M_{Dr}^0, M_{Br}^0$, исходя из представления (3.24), получаем такой вид функций:

$$W_k'(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W_{k0}'(z_k), \quad (3.28)$$

в котором A_{kr}^0, B_{kr}^0 – известные постоянные, вычисляемые по формулам (3.23), (3.27), в которых нужно заменить $A_{kl}, B_{kl}, P_l, M_{xl}, M_{yl}, M_{Dl}, M_{Bl}$ на $A_{kr}^0, B_{kr}^0, P_r^0, M_{xr}^0, M_{yr}^0, M_{Dr}^0, M_{Br}^0$. В случае действия только сосредоточенной силы P_r^0 при отсутствии сосредоточенных моментов нужно принять $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0, M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0, M_{Dr}^0 = M_{Br}^0 = 0$. Если сосредоточенная сила приложена в начале координат, то $M_{xr}^0 = M_{yr}^0 = M_{Dr}^0 = M_{Br}^0 = 0$. В этом случае система (3.27) будет однородной с отличным от нуля определителем и, следовательно, $B_{kr}^0 = 0$.

В случае бесконечной плиты, когда L_0 уходит в бесконечность полностью, вид функций (3.28) сохранится. Но в этом случае $W_{k0}'(z_k)$ является голоморфной всюду в

областях S_k . за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, которая в силу ограниченности изгибающих крутящего моментов может быть полюсом первого порядка. Поэтому в общем случае бесконечной многосвязной плиты комплексные потенциалы имеют вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W'_{k0}(z_k), \quad (3.29)$$

где Γ_k – постоянные, $W'_{k0}(z_k)$ – функция, ограниченная в бесконечно удаленной точке. Для определения Γ_k в окрестности бесконечно удаленной точки исследуем вид функций $W''_k(z_k)$ и значения некоторых величин. В окрестности этой точки

$$\begin{aligned} \ln(z_k - z_{kl}) &= \ln z_k + O(1/z_k), \quad W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + (A_{k0} z_k + B_{k0}) \ln z_k + O(1/z_k), \\ W''_k(z_k) &= \Gamma_k + A_{k0} \ln z_k + O(1/z_k) \end{aligned} \quad (3.30)$$

где

$$A_{k0} = \sum_{l=1}^L A_{kl} + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0, \quad B_{k0} = \sum_{l=1}^L B_{kl} + \sum_{r=1}^R B_{kr}^0, \quad (3.31)$$

$O(1/z_k)$ – ограниченная величина.

Выберем в области S окружность L_R с центром в начале координат и радиусом R , таким чтоб внутри этой окружности оказались все контуры отверстий плиты и точки приложения сосредоточенных сил. Применяя к этому контуру ранее полученные условия однозначности изгибающих и крутящего моментов при полном обходе по контуру L_R и условия равенства (с противоположным знаком) главного вектора и моментов относительно осей координат всех воздействий внутри L_R главному вектору и моментам внутренних усилий вдоль L_R , найдем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, \nu_k, \nu_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{k0} = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_0}{2\pi} \right); \quad (3.32)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \lambda_k, \nu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) i B_{k0} = \left(0, 0, 0, 0, -\frac{M_{x0}}{2\pi H_{22}}, -\frac{M_{y0}}{2\pi}, M_{D0}, M_{B0} \right), \quad (3.33)$$

где P_0 – главный вектор всех усилий, приложенных к конечной части плиты (к контрам отверстий и сосредоточенных сил во внутренних точках); M_{x0} , M_{y0} – моменты воздействий относительно осей Ox , Oy . При выводе соотношений (3.32), (3.33) внешность единичного круга отображалась на внешности контуров, соответствующих контуру L_R в областях S_k и учитывалось, что на соответствующих контурах $\ln z_k = \ln \sigma + O(1/\sigma)$.

Подставим функции (3.30) в выражения моментов на бесконечности и приравняем в полученных равенствах коэффициенты при логарифмах и свободные члены. Учитывая равенства (3.32) и (3.33), получим, что коэффициенты при логарифмах будут тождественно равны нулю, а из сравнения свободных членов найдем равенства

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g11} + C_{g21}\mu_k) - \nu_k (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \right) \Gamma_k = -M_x^\infty,$$

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g12} + C_{g22}\mu_k) - v_k (C_{p12} + C_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_y^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g16} + C_{g26}\mu_k) - v_k (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -H_{xy}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{g11} + C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{g11} + D_{g12}\mu_k) + v_k (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{dx}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{g21} + C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{g12} + D_{g22}\mu_k) + v_k (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{dy}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{p11} + C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) + v_k (E_{p11} + E_{p12}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{bx}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{p21} + C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) + v_k (E_{p12} + E_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{by}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0, \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

где последнее уравнение добавлено в качестве некоторого ограничения на бесконечности. Выбор этого условия может быть и другим, но как установлено [9, 10], такой выбор не влияет на значения основных характеристик в точках конечной части плиты. Вместо этой системы можно из первых 7-ми ее уравнений, решив их как систему относительно

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \Gamma_k, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k \Gamma_k, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k^2 \Gamma_k, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k \Gamma_k, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k \mu_k \Gamma_k, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 v_k \Gamma_k, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 v_k \mu_k \Gamma_k, \quad \text{найти}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \Gamma_k &= F_{11}M_x^\infty + F_{12}M_y^\infty + F_{13}H_{xy}^\infty + F_{14}M_{dx}^\infty + F_{15}M_{dy}^\infty + F_{16}M_{bx}^\infty + F_{17}M_{by}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k \Gamma_k &= F_{21}M_x^\infty + F_{22}M_y^\infty + F_{23}H_{xy}^\infty + F_{24}M_{dx}^\infty + F_{25}M_{dy}^\infty + F_{26}M_{bx}^\infty + F_{27}M_{by}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k^2 \Gamma_k &= F_{31}M_x^\infty + F_{32}M_y^\infty + F_{33}H_{xy}^\infty + F_{34}M_{dx}^\infty + F_{35}M_{dy}^\infty + F_{36}M_{bx}^\infty + F_{37}M_{by}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k \Gamma_k &= F_{41}M_x^\infty + F_{42}M_y^\infty + F_{43}H_{xy}^\infty + F_{44}M_{dx}^\infty + F_{45}M_{dy}^\infty + F_{46}M_{bx}^\infty + F_{47}M_{by}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k \mu_k \Gamma_k &= F_{51}M_x^\infty + F_{52}M_y^\infty + F_{53}H_{xy}^\infty + F_{54}M_{dx}^\infty + F_{55}M_{dy}^\infty + F_{56}M_{bx}^\infty + F_{57}M_{by}^\infty,
 \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k \Gamma_k = F_{61} M_x^\infty + F_{62} M_y^\infty + F_{63} H_{xy}^\infty + F_{64} M_{dx}^\infty + F_{65} M_{dy}^\infty + F_{66} M_{bx}^\infty + F_{67} M_{by}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k \mu_k \Gamma_k = F_{71} M_x^\infty + F_{72} M_y^\infty + F_{73} H_{xy}^\infty + F_{74} M_{dx}^\infty + F_{75} M_{dy}^\infty + F_{76} M_{bx}^\infty + F_{77} M_{by}^\infty, \quad (3.35)$$

где F_{ij} – известные коэффициенты, вычисляемые как элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} & F_{17} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} & F_{27} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} & F_{37} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} & F_{47} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} & F_{57} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} & F_{67} \\ F_{71} & F_{72} & F_{73} & F_{74} & F_{75} & F_{76} & F_{77} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} & -C_{g11} & -C_{g21} & -C_{p11} & -C_{p21} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} & -C_{g12} & -C_{g22} & -C_{p12} & -C_{p22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} & -C_{g16} & -C_{g26} & -C_{p16} & -C_{p26} \\ C_{g11} & C_{g16} & C_{g12} & D_{g11} & D_{g12} & D_{p11} & D_{p12} \\ C_{g21} & C_{g26} & C_{g22} & D_{g12} & D_{g22} & D_{p12} & D_{p22} \\ C_{p11} & C_{p16} & C_{p12} & D_{p11} & D_{p12} & E_{p11} & E_{p12} \\ C_{p21} & C_{p26} & C_{p22} & D_{g12} & D_{g22} & E_{p12} & E_{p22} \end{pmatrix}^{-1}$$

При решении системы (3.35) ее нужно дополнять последним уравнением системы (3.34).

Таким образом, в самом общем случае функция $W'_k(z_k)$ имеет вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W'_{k0}(z_k), \quad (3.36)$$

в котором Γ_k и A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые из решений систем уравнений (3.35) и (3.23), (3.27). Рассмотрим частные случаи.

Если заданная плита является конечной, то $\Gamma_k = 0$, а $W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k , ограниченных всеми контурами, включая контуры L_{k0} , получаемые из внешнего контура L_0 аффинными преобразованиями. Последние функции представляются рядами по полиномам Фабера. Если отсутствуют внутренние сосредоточенные силы и моменты, то $A_{kj}^0 = B_{kj}^0 = 0$. Если на контуре отверстия L_l главный вектор поперечных сил и изгибающих и крутящих моментов равны нулю, то $A_{kl} = B_{kl} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirchhoff G. R. Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique / G. R. Kirchhoff // Comptes Rendus Mathématique (Paris). – 1848. – Vol. XXVII. – P. 394–397.
2. Kirchhoff G. R. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe / G. R. Kirchhoff // J. Für die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51–88.
3. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит / С. Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
5. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
6. Калоеров С. А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С. А. Калоеров, А. В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.

7. Калоеров С. А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С. А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
8. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С. А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
9. Калоеров С. А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С. А. Калоеров, А. И. Занько, А. А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – № 9(55). – С. 99–138.

Поступила в редакцию 24.09.2019 г.

COMPLEX POTENTIALS OF THE BEND THEORY OF THIN ELECTROMAGNETIC ELECTRIC PLATES

S. A. Kaloerov

The complex potentials of the applied theory of the bending of thin electromagnetically elastic plates are introduced and investigated. Expressions of the main characteristics through these functions, boundary conditions for determining functions, and their general representations for the case of any finite and infinite multiply connected region are obtained. Particular problems of electroelasticity, magnetoelasticity, and the classical theory of elasticity are considered.

Keywords: The theory of bending of thin plates, piezoelectric plates, complex potentials, multiply connected plate.

Калоеров Стефан Алексеевич

Доктор физико-математических наук, профессор;
профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: kaloerov@mail.ru

Kaloerov Stefan Alekseevich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor; Professor at the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics, Donetsk National University, Donetsk

УДК 539.3

ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО, МАГНИТОУПРУГОГО И УПРУГОГО ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛИТ, КАК ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО ИЗГИБА

© 2019. С. А. Калоеров

Как частные случаи общей задачи электромагнитоупругости по изгибу тонких плит получены решения задач электроупругости, магнитоупругости и теории упругости по изгибу тонких плит. При этом приведены получаемые из решения общей задачи дифференциальные уравнения, их решения через комплексные потенциалы, граничные условия для определения функций, общие представления функций для произвольных многосвязных областей. Показано, как при проведении численных исследований выбором значений некоторых параметров из решения общей задачи следуют решения этих частных задач.

Ключевые слова: Пьезоэлектрические плиты, пьезомагнитные плиты, краевые задачи, комплексные потенциалы.

В различных областях современной науки и техники широкое распространение в качестве элементов конструкций получили тонкие пластины, находящиеся в условиях поперечного изгиба и называемые тонкими плитами. В процессе эксплуатации таких плит возникают большие напряжения, которые могут приводить к их разрушению. В связи с этим нужно иметь методы определения напряженно-деформированного состояния тонких плит при различных внешних воздействиях. Хотя этой проблемой уже с середины XVIII века занимались многие известные ученые, но наиболее приемлемое решение было получено лишь в середине XIX века Кирхгоффом [1, 2], предложившим прикладную теорию изгиба тонких плит. На этой основе были разработаны различные методы решения конкретных задач. Но фундаментальные результаты были получены лишь в 30-е годы XX века Лехницким С. Г. [3, 4]. При этом были рассматривались лишь случаи плит из изотропных и анизотропных материалов. Но современные тонкие плиты часто изготавливаются из материалов, обладающих пьезоэффектом, что нужно учитывать при решениях задач. Но такой учет приводит к серьезным математическим трудностям, и к настоящему времени модели и методы решения задач для тонких пластин из пьезоматериалов разработаны лишь для случаев, когда они находятся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [5, 6]. Для случая же изгиба плит из пьезоматериалов пока предложена лишь модель изгиба тонкой плиты и для решения задачи получена краевая задача [7], состоящая из системы 3-х дифференциальных уравнений в частных производных относительно прогиба плиты и плотностей по толщине плиты электрического и магнитного потенциалов, с крайними условиями решения этой системы. В работе [8] решением этой системы дифференциальных уравнений задача сведена к нахождению обобщенных комплексных потенциалов из соответствующих граничных условий, исследованы свойства этих функций с нахождением их общих представлений для произвольной многосвязной области.

В данной статье как частные случаи общей задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) изгиба тонких плит [7, 8] даны решения задачи электроупругости (ЭУ), когда не учитываются магнитные свойства материала, задачи магнитоупругости (МУ), когда не учитываются электрические свойства материала, и классической задачи изгиба тонких анизотропных плит (ТУ), когда не учитываются и те и другие свойства материала. Введены некоторые параметры, придавая которым необходимые значения, по общей про-

грамме численной реализации решения задач ЭМУ можно получать результаты для решения задач ЭУ, МУ и ТУ.

1. Основные соотношения краевой задача теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит. Как показано в работе [7], общее решение задачи об изгибе тонких электромагнитоупругих плит при использовании гипотез Кирхгофа, дополненных условиями на электромагнитные свойства материала и внешнего воздействия, приводится к решению системы дифференциальных уравнений, состоящих из уравнений равновесия [9]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (1.1)$$

уравнений вынужденной электромагнитостатики [10–12]

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0; \quad (1.3)$$

уравнений электромагнитоупругого состояния [13, 14]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y, \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + \nu_{11}B_x + \nu_{12}B_y, \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + \nu_{12}B_x + \nu_{22}B_y, \\ H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + \nu_{11}D_x + \nu_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y, \\ H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + \nu_{12}D_x + \nu_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а также общепринятых соотношений для малых деформаций и выражений компонент векторов напряженностей электромагнитного поля через электрический и магнитный потенциалы при соответствующих механических, электрических и магнитных граничных условиях на контурах плиты. При этом s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} , ν_{ij} , χ_{ij} – соответственно коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях.

В работе [7] решение рассматриваемой общей задачи теории изгиба тонкой электромагнитоупругой плиты приведено к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_{4s}w + L_{3g}\varphi_0 + L_{3p}\psi_0 &= q(x, y), \\ L_{3g}w + L_{2gg}\varphi_0 + L_{2pp}\psi_0 &= 0, \\ L_{3p}w + L_{2pp}\varphi_0 + E_{2pp}\psi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

относительно функций прогиба $w(x, y)$ и плотностей по толщине плиты потенциалов электрического поля $\varphi_0(x, y)$ и магнитного поля $\psi_0(x, y)$, в которой

$$\begin{aligned}
 L_{4s} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\
 L_{3g} &= C_{g11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{g21} + 2C_{g16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{g12} + 2C_{g26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{g22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{3p} &= C_{p11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{p21} + 2C_{p16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{p12} + 2C_{p26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{p22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{2gg} &= D_{g11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{g12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{g22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 L_{2pp} &= D_{p11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{p12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{p22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 E_{2pp} &= E_{p11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2E_{p12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_{p22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} -
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

дифференциальные операторы; $D_{ij} = b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{pij} = c_{pij}D_0$, $D_{gij} = d_{gij}D_0$, $D_{pij} = d_{pij}D_0$, $E_{pij} = e_{pij}D_0$ – электромагнитные жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$ – постоянная, зависящая от толщины плиты; b_{ij} , c_{gij} , c_{pij} , d_{gij} , d_{pij} , e_{pij} – постоянные, определяемые как элементы обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\
 b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\
 b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\
 -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & d_{g11} & d_{g12} & d_{p11} & d_{p12} \\
 -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & d_{g12} & d_{g22} & d_{p12} & c_{p22} \\
 -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & d_{p11} & d_{p12} & e_{p11} & e_{p12} \\
 -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & d_{p12} & d_{p22} & e_{p12} & e_{p22}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\
 s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\
 s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\
 -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\
 -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\
 -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\
 -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22}
 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1.7}$$

Систему дифференциальных уравнений (1.5) нужно решать при заданных условиях на краях плиты, например, в случае нагруженного внешними воздействиями края, когда на нем заданы поперечные усилия $p(s)$, изгибающие моменты $m(s)$, моменты электрической индукции $m_d(s)$ и магнитной индукции $m_b(s)$, эти условия имеют вид [7]

$$\begin{aligned}
 M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny &= m(s) \cos nx - (r(s) + c) \cos ny, \\
 (H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny &= m(s) \cos ny + (r(s) + c) \cos nx, \\
 M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny &= m_d(s), \quad M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny = m_b(s),
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \int_0^s N_n ds, \quad r(s) = \int_0^s p(s) ds; \\
 N_n &= N_x \cos nx + N_y \cos ny;
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$M_x, M_y, H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}$ – соответствующие моменты; c – вещественная постоянная. Аналогичные соотношения получены для других граничных условий [7].

После решения системы дифференциальных уравнений (1.5) основные характеристики электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) изгиба плиты (механические моменты M_x, M_y, H_{xy} , моменты плотности по толщине электрического потенциала M_φ и магнитного потенциала M_ψ , моменты электрической индукции M_{dx}, M_{dy} и магнитной индукции M_{bx}, M_{by} , поперечные силы N_x, N_y) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p21} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ H_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$M_\varphi = D_0 \varphi_0, \quad M_\psi = D_0 \psi_0; \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} M_{dx} &= C_{g11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{dy} &= C_{g21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{bx} &= C_{p11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{p11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{by} &= C_{p21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ &+ D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} N_x &= - \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ &- C_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g21} + C_{g16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \\ &\left. - C_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p21} + C_{p16}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right], \\ N_y &= - \left[D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ &- C_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g12} + C_{g26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \\ &\left. - C_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p12} + C_{p26}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В статье [8] решение системы уравнений (1.5) получено в виде функций

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W_k(z_k), \\ \varphi_0(x, y) &= \varphi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k W'_k(z_k), \\ \psi_0(x, y) &= \psi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \nu_k W'_k(z_k), \end{aligned} \quad (1.14)$$

в которых $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$ и $\psi_{00}(x, y)$ – частное решение системы (1.5);

$$\lambda_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \nu_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}; \quad (1.15)$$

$$\Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2gg}(\mu_k) & l_{2pp}(\mu_k) \\ l_{2pp}(\mu_k) & e_{2pp}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2pp}(\mu_k) \\ -l_{2p}(\mu_k) & e_{2pp}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2gg}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2pp}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix};$$

$W_k(z_k)$ – функции обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$; μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s} & l_{3g} & l_{3p} \\ l_{3g} & l_{2gg} & l_{2pp} \\ l_{3p} & l_{2pp} & e_{2pp} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}), \\ l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\ l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\ l_{2gg}(\mu) &= D_{g22}\mu^2 + 2D_{g12}\mu + D_{g11}, \quad l_{2pp}(\mu) = D_{p22}\mu^2 + 2D_{p12}\mu + D_{p11}, \\ e_{2pp}(\mu) &= E_{p22}\mu^2 + 2E_{p12}\mu + E_{p11}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для определения комплексных потенциалов $W_k(z_k)$ получены граничные условия. В частности, если край плиты загружен внешними воздействиями в виде изгибающих моментов $m(s)$, поперечных усилий $p(s)$ и индукционных моментов $m_d(s)$, $m_b(s)$, то граничные условия для определения функций имеют вид [8]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{\mu_k} W'_k(z_k) &= I_{0xy1} \mp \int_0^s (m dy + f dx) - cx + c_1, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 q_k W'_k(z_k) &= I_{0xy2} \mp \int_0^s (m dx - f dy) + cy + c_2, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W'_k(z_k) &= M_{0d} \pm \int_0^s m_d ds + c_3, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W'_k(z_k) = M_{0b} \pm \int_0^s m_b ds + c_4, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{0xy1} &= \int_0^s \left(M_{0x} \cos nx + (H_{0xy} - I_0) \cos ny \right) ds, \\
 I_{0xy2} &= \int_0^s \left((H_{0xy} + I_0) \cos nx + M_{0y} \cos ny \right) ds, \\
 M_{0d} &= \int_0^s \left(M_{0dx} \cos nx + M_{0dy} \cos ny \right) ds, \quad M_{0b} = \int_0^s \left(M_{0bx} \cos nx + M_{0by} \cos ny \right) ds. \\
 J_{01} &= \int_0^s \left((N_{0xy} - H_{0xy}) dx + M_{0x} dy \right), \quad J_{02} = - \int_0^s \left(M_{0y} dx - (N_{0xy} + H_{0xy}) dy \right), \\
 f(s) &= \int_0^s p(s) ds; \tag{1.19}
 \end{aligned}$$

c – вещественная, c_i – комплексные постоянные. Здесь, как и ранее, верхние знаки относятся к внешнему контуру плиты, нижние – к контурам отверстий в ней; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки. Аналогичные соотношения получены для других граничных условий [8].

После определения комплексных потенциалов основные характеристик ЭМУС (1.10)–(1.13) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 (M_x, M_y, H_{xy}) &= (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k), \\
 p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)\lambda_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k)\nu_k, \\
 q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)\lambda_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k)\nu_k, \\
 r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)\lambda_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k)\nu_k; \tag{1.20}
 \end{aligned}$$

$$(M_\varphi, M_\psi) = (M_{0\varphi}, M_{0\psi}) + D_0(\varphi_0, \psi_0); \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
 (M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) &= (M_{0dx}, M_{0dy}, M_{0bx}, M_{0by}) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) W_k''(z_k), \\
 d_{xk} &= C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (D_{g11} + D_{g12}\mu_k)\lambda_k - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k)\nu_k, \\
 d_{yk} &= C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (D_{g12} + D_{g22}\mu_k)\lambda_k - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k)\nu_k, \\
 b_{xk} &= C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k)\lambda_k - (E_{p11} + E_{p12}\mu_k)\nu_k, \\
 b_{yk} &= C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k)\lambda_k - (E_{p12} + E_{p22}\mu_k)\nu_k; \tag{1.22}
 \end{aligned}$$

$$(N_x, N_y) = (N_{0x}, N_{0y}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (l_k, -s_k) W_k'''(z_k),$$

$$\begin{aligned}
 s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 + (C_{g16} + (C_{g12} + C_{g26}))\mu_k + \\
 &\quad + C_{g22}\mu_k^2) \lambda_k + (C_{p16} + (C_{p12} + C_{p26})\mu_k + C_{p22}\mu_k^2) \nu_k, \\
 l_k &= D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 + (C_{g11} + (C_{g21} + C_{g16}))\mu_k + \\
 &\quad + C_{g26}\mu_k^2) \lambda_k - (C_{p11} + (C_{p21} + C_{p16})\mu_k + C_{p26}\mu_k^2) \nu_k. \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению системы (1.5) и вычисляются по формулам (1.10)–(1.13), если в них вместо $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ взять $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$, $\psi_{00}(x, y)$. При этом учтено, что

$$l_k - \mu_k s_k = d_{xk} + \mu_k d_{yk} = b_{xk} + \mu_k b_{yk} = 0,$$

откуда следуют равенства

$$l_k = \mu_k s_k, \quad d_{xk} = -\mu_k d_{yk}, \quad b_{xk} = -\mu_k b_{yk}; \quad s_k + r_k = -p_k / \mu_k, \quad s_k - r_k = q_k \mu_k. \quad (1.24)$$

В самом общем случае многосвязной плиты с отверстиями L_l ($l = \overline{1, L}$) для функций $W'_k(z_k)$ получены выражения

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W'_{k0}(z_k), \quad (1.25)$$

в которых Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые решениями следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g11} + C_{g21}\mu_k) - \nu_k (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_x^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g12} + C_{g22}\mu_k) - \nu_k (C_{p12} + C_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_y^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g16} + C_{g26}\mu_k) - \nu_k (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -H_{xy}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{g11} + C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{g11} + D_{g12}\mu_k) + \nu_k (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{dx}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{g21} + C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{g12} + D_{g22}\mu_k) + \nu_k (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{dy}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{p11} + C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) + \nu_k (E_{p11} + E_{p12}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{bx}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{p21} + C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) + \nu_k (E_{p12} + E_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{by}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0; \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, \nu_k, \nu_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \quad (1.27)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \lambda_k, \nu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) i B_{kl} = \\ = \left(0, 0, 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{oxl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi}, M_{Dl} + M_{0Dl}, M_{Bl} + M_{0Bl} \right); \quad (1.28)$$

P_l – главный вектор распределенных по контуру отверстия L_l поперечных усилий $P_l(s)$; M_{xl} , M_{yl} и M_{Dl} , M_{Bl} – главные моменты механических воздействий и индукций по контуру отверстия L_l ;

$$P_{0l} = - \int_{L_l} (N_{0y} dx - N_{0x} dy), \\ M_{0xl} = - \int_{L_l} \left((y N_{0y} - M_{0y}) dx - (y N_{0x} - H_{0xy}) dy \right), \\ M_{0yl} = \int_{L_l} \left((x N_{0y} - H_{0xy}) dx - (x N_{0x} - M_{0x}) dy \right), \\ M_{0Dl} = - \int_{L_l} (M_{0Dy} dx - M_{0Dx} dy), \quad M_{0Bl} = - \int_{L_l} (M_{0By} dx - M_{0Bx} dy); \quad (1.29)$$

A_{kr}^0 , B_{kr}^0 – постоянные, вычисляемые решением систем, получаемых из систем (1.27), (1.28), заменой в них A_{kl} , B_{kl} , P_l , M_{xl} , M_{yl} , M_{Dl} , M_{Bl} на A_{kr}^0 , B_{kr}^0 , P_r^0 , M_{xr}^0 , M_{yr}^0 при $P_{0l} = M_{Dr}^0 = M_{Br}^0 = 0$; P_r^0 – сосредоточенная сила в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ с моментами $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0$, $M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$.

2. Решение задачи электроупругости. Будем считать, что рассмотренная выше плита обладает только электрическим пьезоэффектом, а магнитные ее свойства пренебрежимо малы. В этом случае первоначальная система уравнений задачи изгиба тонкой плиты на основе (1.1)–(1.4) содержит уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (2.1)$$

уравнения вынужденной электростатики

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad (2.2)$$

уравнения электроупругого состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y, \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y, \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а также соотношений Коши для малых деформаций и выражений компонент вектора напряженностей электрического поля через электрический потенциал при соответствующих механических и электрических граничных условиях на контурах плиты. При этом s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянной индукции электрического поля, g_{ij} – пьезоэлектрические коэффициенты деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях, β_{ij} – коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях.

Система (1.5) для определения функций прогиба $w(x, y)$ и плотности по толщине плиты потенциала электрического поля $\varphi_0(x, y)$ будет такой:

$$L_{4s}w + L_{3g}\varphi_0 = q(x, y), \quad L_{3g}w + L_{2gg}\varphi_0 = 0, \quad (2.4)$$

где L_{4s} , L_{3g} , L_{2gg} – дифференциальные операторы, задаваемые соответствующими выражениями (1.6), в которых $D_{ij} = b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $D_{gij} = d_{gij}D_0$, – электрические жесткости; b_{ij} , c_{gij} , d_{gij} – постоянные, определяемые как элементы обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & d_{g11} & d_{g12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & d_{g12} & d_{g22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (2.5)$$

Систему дифференциальных уравнений (2.4) нужно решать при определенных краевых условиях на боковой поверхности плиты, например, в случае нагруженного внешними воздействиями края, когда на краю плиты заданы поперечные усилия $p(s)$, изгибающие моменты $m(s)$ и момент электрической индукции $m_d(s)$, эти условия на основе (1.8) имеют вид

$$\begin{aligned} M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny &= m(s) \cos nx - (r(s) + c) \cos ny, \\ (H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny &= m(s) \cos ny + (r(s) + c) \cos nx, \\ M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny &= m_d(s). \end{aligned} \quad (2.6)$$

После решения системы дифференциальных уравнений (2.4) основные характеристики изгиба электроупругой плиты (механические моменты M_x , M_y , H_{xy} , моменты плотности по толщине электрического потенциала M_φ , моменты электрической индукции M_{dx} , M_{dy} , поперечные силы N_x , N_y) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$H_{xy} = - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right); \quad (2.7)$$

$$M_\varphi = D_0 \varphi_0; \quad (2.8)$$

$$M_{dx} = C_{g11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y},$$

$$M_{dy} = C_{g21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}; \quad (2.9)$$

$$N_x = - \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ \left. - C_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g21} + C_{g16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right],$$

$$N_y = - \left[D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ \left. - C_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g12} + C_{g26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right]. \quad (2.10)$$

В данном случае решением системы (2.4) будут функции

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 W_k(z_k); \quad \varphi_0(x, y) = \varphi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k W'_k(z_k), \quad (2.11)$$

в которых $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$ – частное решение (2.4); $\lambda_k = -l_{2gg}(\mu_k)/l_{3g}(\mu_k)$; $W_k(z_k)$ – функции обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$; μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s} & l_{3g} \\ l_{3g} & l_{2gg} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.12)$$

l_{4s} , l_{3g} , l_{2gg} – полиномы, задаваемые соответствующими выражениями (1.17).

Для определения комплексных потенциалов $W_k(z_k)$ имеют место определенные граничные условия. В частности, если край плиты нагружен внешними воздействиями в виде изгибающих моментов $m(s)$, поперечных усилий $p(s)$ и момента индукции электрического поля $m_d(s)$, то граничные условия (1.18) примут вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{\mu_k} W'_k(z_k) = I_{0xy1} \mp \int_0^s (m dy + f dx) - cx + c_1,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 q_k W'_k(z_k) = I_{0xy2} \mp \int_0^s (m dx - f dy) + cy + c_2,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W'_k(z_k) = M_{0d} \pm \int_0^s m_d ds + c_3. \quad (2.13)$$

Для нахождения основных характеристик получаются формулы

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, H_{xy}) &= (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k), \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)\lambda_k, \\ q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)\lambda_k, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)\lambda_k; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$M_\varphi = M_{0\varphi} + D_0\varphi_0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} (M_{dx}, M_{dy}) &= (M_{0dx}, M_{0dy}) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{xk}, d_{yk}) W_k''(z_k), \\ d_{xk} &= C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (D_{g11} + D_{g12}\mu_k)\lambda_k, \\ d_{yk} &= C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (D_{g12} + D_{g22}\mu_k)\lambda_k; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} (N_x, N_y) &= (N_{0x}, N_{0y}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (l_k, -s_k) W_k'''(z_k), \\ s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 + \\ &\quad + (C_{g16} + (C_{g12} + C_{g26})\mu_k + C_{g22}\mu_k^2)\lambda_k + \\ l_k &= D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 - \\ &\quad - (C_{g11} + (C_{g21} + C_{g16})\mu_k + C_{g26}\mu_k^2)\lambda_k. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению системы (2.4) и вычисляются по формулам (2.7)–(2.10), если в них вместо $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$ взять $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$. При этом учтено, что

$$l_k - \mu_k s_k = d_{xk} + \mu_k d_{yk} = 0,$$

откуда следуют равенства

$$l_k = \mu_k s_k, \quad d_{xk} = -\mu_k d_{yk}; \quad s_k + r_k = -p_k / \mu_k \quad s_k - r_k = q_k \mu_k. \quad (2.18)$$

В самом общем случае многосвязной плиты с отверстиями L_l ($l = \overline{1, L}$) для функций $W_k'(z_k)$ получаются выражения (1.25), где Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – постоянные, для определения которых из (1.26)–(1.28) получаются следующие системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)) \Gamma_k &= -M_x^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)) \Gamma_k &= -M_y^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)) \Gamma_k &= -H_{xy}^\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(C_{g11} + C_{g16} \mu_k + C_{g12} \mu_k^2 + \lambda_k (D_{g11} + D_{g12} \mu_k) \right) \Gamma_k = -M_{dx}^{\infty}, \\
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(C_{g21} + C_{g26} \mu_k + C_{g22} \mu_k^2 + \lambda_k (D_{g12} + D_{g22} \mu_k) \right) \Gamma_k = -M_{dy}^{\infty}, \\
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0; \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \lambda_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y \right) i B_{kl} = \\
 & = \left(0, 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi}, M_{Dl} + M_{0Dl} \right); \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

P_l – главный вектор распределенных по контуру отверстия L_l поперечных усилий $p_l(s)$; M_{xl} , M_{yl} и M_{Dl} – главные моменты механических воздействий и индукций по контуру отверстия L_l ;

$$\begin{aligned}
 & P_{0l} = -\int_{L_l} (N_{0y} dx - N_{0x} dy), \quad M_{0xl} = -\int_{L_l} ((yN_{0y} - M_{0y}) dx - (yN_{0x} - H_{0xy}) dy), \\
 & M_{0yl} = \int_{L_l} ((xN_{0y} - H_{0xy}) dx - (xN_{0x} - M_{0x}) dy), \quad M_{0Dl} = -\int_{L_l} (M_{0Dy} dx - M_{0Dx} dy); \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

A_{kr}^0 , B_{kr}^0 – постоянные, вычисляемые решением систем, получаемых из (2.20), (2.21), заменой в них A_{kl} , B_{kl} , P_l , M_{xl} , M_{yl} , M_{Dl} на A_{kr}^0 , B_{kr}^0 , P_r^0 , M_{xr}^0 , M_{yr}^0 при $P_{0l} = M_{Dr}^0 = 0$; P_r^0 – сосредоточенная сила в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ с моментами $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0$, $M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$.

3. Решение задачи магнитоупругости. Будем считать, что рассмотренная в п. 1 плита обладает только магнитным пьезоэффектом, электрические свойства пренебрежимо малы. В этом случае система уравнений задачи изгиба тонкой плиты на основе (1.1)–(1.4) содержит уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \tag{3.1}$$

уравнения вынужденной магнитостатики

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0; \tag{3.2}$$

уравнения магнитоупругого состояния

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= s_{11} \sigma_x + s_{12} \sigma_y + s_{16} \tau_{xy} + p_{11} B_x + p_{21} B_y, \\
 \varepsilon_y &= s_{12} \sigma_x + s_{22} \sigma_y + s_{26} \tau_{xy} + p_{12} B_x + p_{22} B_y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + p_{16}B_x + p_{26}B_y, \\ H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y, \\ H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а также соотношений Коши для малых деформаций и выражений компонент вектора напряженностей магнитного поля через магнитный потенциал при соответствующих механических и электрических граничных условиях на контурах плиты. и общепринятые соотношений для малых деформаций и потенциальности магнитного поля при соответствующих механических и электрических граничных условиях на контурах плиты. При этом s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях магнитного поля, p_{ij} – пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; χ_{ij} – коэффициенты магнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях.

Система (1.5) для определения функций прогиба $w(x, y)$ и плотности по толщине плиты потенциала магнитного поля $\psi_0(x, y)$ будет такой:

$$L_{4s}w + L_{3p}\psi_0 = q(x, y), \quad L_{3p}w + E_{2pp}\psi_0 = 0, \quad (3.4)$$

где L_{4s} , L_{3p} , E_{2pp} – дифференциальные операторы, задаваемые соответствующими выражениями (1.6); $D_{ij} = b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{pij} = c_{pij}D_0$, $E_{pij} = e_{pij}D_0$ – магнитные жесткости плиты; b_{ij} , c_{pij} , e_{pij} – постоянные, определяемые как элементы обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & d_{p11} & d_{p12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & d_{p12} & d_{p22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & p_{16} & p_{26} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & v_{11} & v_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.5)$$

Систему дифференциальных уравнений (3.4) нужно решать при определенных краевых условиях на боковой поверхности плиты, например, в случае нагруженного внешними воздействиями края, когда на краю плиты заданы поперечные усилия $p(s)$, изгибающие моменты $m(s)$ и момент магнитной индукции $m_b(s)$, эти условия на основе (1.8) имеют вид

$$\begin{aligned} M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny &= m(s) \cos nx - (r(s) + c) \cos ny, \\ (H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny &= m(s) \cos ny + (r(s) + c) \cos nx, \\ M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny &= m_b(s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

После решения системы дифференциальных уравнений (3.4) основные характеристики изгиба магнитоупругой плиты (механические моменты M_x , M_y , H_{xy} , моменты плотности по толщине магнитного потенциала M_ψ , магнитной индукции M_{bx} , M_{by} , поперечные силы N_x , N_y) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p21} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ H_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{p16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$M_\psi = D_0 \psi_0; \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} M_{bx} &= C_{p11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{by} &= C_{p21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} N_x &= - \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ &\quad \left. - C_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p21} + C_{p16}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right], \\ N_y &= - \left[D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ &\quad \left. - C_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p12} + C_{p26}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right]; \end{aligned} \quad (3.10)$$

В данном случае решением системы (3.4) будут функции

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 W_k(z_k); \quad \psi_0(x, y) = \psi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 v_k W'_k(z_k), \quad (3.11)$$

в которых $w_0(x, y)$, $\psi_{00}(x, y)$ – частное решение (3.4); $v_k = -e_{2pp}(\mu_k)/l_{3p}(\mu_k)$; $W_k(z_k)$ – функции обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$; μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s} & l_{3p} \\ l_{3p} & e_{2pp} \end{vmatrix} = 0; \quad (3.12)$$

l_{4s} , l_{3p} , l_{2pp} – полиномы, задаваемые соответствующими выражениями (1.17).

Для определения комплексных потенциалов $W_k(z_k)$ имеют место определенные граничные условия. В частности, если край плиты с контуром L_l загружен внешними воздействиями в виде изгибающих моментов $m(s)$, поперечных усилий $p(s)$ и индукционного момента $m_b(s)$, то граничные условия (1.18) примут вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{p_k}{\mu_k} W'_k(z_k) = I_{0xy1} \mp \int_0^s (m dy + f dx) - cx + c_1,$$

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k W_k'(z_k) &= I_{0xy2} \mp \int_0^s (m dx - f dy) + cy + c_2, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 b_{yk} W_k'(z_k) &= M_{0b} \pm \int_0^s m_b ds + c_4.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Для нахождения основных характеристик получаются формулы

$$\begin{aligned}
 (M_x, M_y, H_{xy}) &= (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k), \\
 p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \nu_k, \\
 q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k) \nu_k, \\
 r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \nu_k;
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$M_\Psi = M_{0\Psi} + D_0\Psi_0, \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 (M_{bx}, M_{by}) &= (M_{0bx}, M_{0by}) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (b_{xk}, b_{yk}) W_k''(z_k), \\
 b_{xk} &= C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (E_{p11} + E_{p12}\mu_k) \nu_k, \\
 b_{yk} &= C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (E_{p12} + E_{p22}\mu_k) \nu_k;
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y) &= (N_{0x}, N_{0y}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (l_k, -s_k) W_k'''(z_k), \\
 s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 + \\
 &\quad + (C_{p16} + (C_{p12} + C_{p26})\mu_k + C_{p22}\mu_k^2) \nu_k, \\
 l_k &= D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 + \\
 &\quad - (C_{p11} + (C_{p21} + C_{p16})\mu_k + C_{p26}\mu_k^2) \nu_k.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению системы (3.4) и вычисляются по формулам (3.7)–(3.10), если в них вместо $w(x, y)$, $\Psi_0(x, y)$ взять $w_0(x, y)$, $\Psi_{00}(x, y)$. При этом учтено, что

$$l_k - \mu_k s_k = b_{xk} + \mu_k b_{yk} = 0,$$

откуда следуют равенства

$$l_k = \mu_k s_k, \quad b_{xk} = -\mu_k b_{yk}; \quad s_k + r_k = -p_k / \mu_k, \quad s_k - r_k = q_k \mu_k. \tag{3.18}$$

В самом общем случае многосвязной плиты с отверстиями L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) для функций $W_k'(z_k)$ получены выражения (1.25), где Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – постоянные, для определения которых из (1.26)–(1.28) получаются следующие системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - v_k (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_x^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - v_k (C_{p12} + C_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_y^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - v_k (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -H_{xy}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(C_{p11} + C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 + v_k (E_{p11} + E_{p12}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{bx}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(C_{p21} + C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 + v_k (E_{p12} + E_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k &= -M_{by}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0; \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, v_k, v_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) iA_{kl} = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, v_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, b_y \right) iB_{kl} = \\
 = \left(0, 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{oxl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi}, M_{Bl} + M_{0Bl} \right); \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

P_l – главный вектор распределенных по контуру отверстия L_l поперечных усилий $p_l(s)$; M_{xl} , M_{yl} и M_{Bl} – главные моменты механических воздействий и магнитной индукции по контуру отверстия L_l ;

$$\begin{aligned}
 P_{0l} &= -\int_{L_l} (N_{0y} dx - N_{0x} dy), \quad M_{0xl} = -\int_{L_l} \left((yN_{0y} - M_{0y}) dx - (yN_{0x} - H_{0xy}) dy \right), \\
 M_{0yl} &= \int_{L_l} \left((xN_{0y} - H_{0xy}) dx - (xN_{0x} - M_{0x}) dy \right), \quad M_{0Bl} = -\int_{L_l} (M_{0By} dx - M_{0Bx} dy); \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

A_{kr}^0 , B_{kr}^0 – постоянные, вычисляемые решением систем, получаемых из (3.20), (3.21), заменой в них A_{kl} , B_{kl} , P_l , M_{xl} , M_{yl} , M_{Bl} на A_{kr}^0 , B_{kr}^0 , P_r^0 , M_{xr}^0 , M_{yr}^0 при $P_{0l} = M_{Br}^0 = 0$; P_r^0 – сосредоточенная сила в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ с моментами $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0$, $M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$.

4. Решение задачи теории упругости. Будем считать, что рассмотренная плита обладает только упругими свойствами, а электромагнитный пьезоэффект пренебрежимо мал. Первоначальная система уравнений задачи изгиба тонкой плиты на основе (1.1)–(1.4) содержит уравнения равновесия [16]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

и уравнения состояния (закона Гука) [8, 9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy}, & \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

а также общепринятые соотношения для малых деформаций при соответствующих механических граничных условиях на контурах плиты. При этом s_{ij} – коэффициенты деформации материала.

Система (1.5) для определения функций прогиба $w(x, y)$ при изгибе плит будет содержать только одно уравнение

$$L_{4s}w = q(x, y), \quad (4.3)$$

где L_{4s} – дифференциальный оператор, определяемый соответствующим выражением (1.6); $D_{ij} = b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; b_{ij} – постоянные, определяемые как элементы обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (4.4)$$

Дифференциальное уравнение (4.3) нужно решать при определенных краевых условиях на боковой поверхности плиты, например, в случае нагруженного внешними воздействиями края, когда на краю плиты заданы поперечные усилия $p(s)$, изгибающие и скручивающие моменты $m(s)$, эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny &= m(s) \cos nx - (r(s) + c) \cos ny, \\ (H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny &= m(s) \cos ny + (r(s) + c) \cos nx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

После решения дифференциального уравнения (4.3) основные характеристики изгиба упругой плиты (механические моменты M_x , M_y , H_{xy} , поперечные силы N_x , N_y) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ H_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ N_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$N_y = - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \quad (4.7)$$

Решением уравнения (4.3) будет функция

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 W_k(z_k), \quad (4.8)$$

где $w_0(x, y)$ – частное решение уравнения (4.3); $W_k(z_k)$ – функции обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$; μ_k – корни характеристического уравнения

$$l_{4s}(\mu) = 0; \quad (4.9)$$

$l_{4s}(\mu)$ – полином, задаваемый соответствующим выражением (1.17).

Для определения комплексных потенциалов $W_k(z_k)$ имеют место определенные граничные условия. В частности, если край плиты с контуром L_l загружен внешними воздействиями в виде изгибающих моментов $m(s)$, поперечных усилий $p(s)$, то граничные условия (1.18) примут вид

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{p_k}{\mu_k} W'_k(z_k) &= I_{0xy1} \mp \int_0^s (m dy + f dx) - cx + c_1, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k W'_k(z_k) &= I_{0xy2} \mp \int_0^s (m dx - f dy) + cy + c_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для нахождения основных характеристик получаются формулы

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, H_{xy}) &= (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k), \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} (N_x, N_y) &= (N_{0x}, N_{0y}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (l_k, -s_k) W'''_k(z_k), \\ s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3, \\ l_k &= D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению уравнения (4.3) и вычисляются по формулам (4.6), (4.7), если в них вместо $w(x, y)$ взять $w_0(x, y)$. При этом

$$l_k = \mu_k s_k, \quad s_k + r_k = -p_k / \mu_k, \quad s_k - r_k = q_k \mu_k. \quad (4.13)$$

В самом общем случае многосвязной плиты с отверстиями L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) для функций $W'_k(z_k)$ получаются выражения (1.25), в которых Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые решением следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 \right) \Gamma_k &= -M_x^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 \right) \Gamma_k &= -M_y^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 \right) \Gamma_k &= -H_{xy}^\infty, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0;
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) iA_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \tag{4.15}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) iB_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{oxl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi} \right); \tag{4.16}$$

P_l – главный вектор распределенных по контуру отверстия L_l поперечных усилий $p_l(s)$; M_{xl}, M_{yl} – главные моменты механических воздействий по контуру отверстия L_l ;

$$\begin{aligned}
 P_{0l} &= -\int_{L_l} (N_{0y}dx - N_{0x}dy), \\
 M_{0xl} &= -\int_{L_l} \left((yN_{0y} - M_{0y})dx - (yN_{0x} - H_{0xy})dy \right), \\
 M_{0yl} &= \int_{L_l} \left((xN_{0y} - H_{0xy})dx - (xN_{0x} - M_{0x})dy \right);
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

A_{kr}^0, B_{kr}^0 – постоянные, вычисляемые решением систем, получаемых из систем (4.15), (4.16) с заменой в них $A_{kl}, B_{kl}, P_l, M_{xl}, M_{yl}$ на $A_{kr}^0, B_{kr}^0, P_r^0, M_{xr}^0, M_{yr}^0$ при $P_{0l} = 0$; P_r^0 – сосредоточенная сила в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ с моментами $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0, M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$.

5. Вычислительные процедуры получения решений частных задач из решения общей задачи. Для проведения численных исследований в частных случаях (электроупругости, магнитоупругости и теории упругости) можно использовать программу для решения общей задачи электромагнитоупругости, вводя некоторые параметры, которые для этих случаев будут принимать нулевые (в программе достаточно малые) значения.

Введем параметры λ_g и λ_p , характеризующие отклонение истинных электромагнитных свойств материала плиты от реальных, и рассмотрим плиту из материала, у которого упругие постоянные такие же, как для истинного материала, а электромагнитные такие:

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad v'_{gij} = \lambda_g v_{gij}, \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij} / \lambda_p; \tag{5.1}$$

$$p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad v'_{pij} = \lambda_p v_{pij}, \quad \chi'_{ij} = \chi_{ij} / \lambda_p. \tag{5.2}$$

При этом связи для v'_{gij} , v'_{pij} (параметры λ_g , λ_p) учитывать одновременно только в задаче классического изгиба ТУ.

При $\lambda_p = 0$ (достаточно малом) имеем $p'_{ij} = v'_{pij} = 0$, $\chi'_{ij} = \infty$. Тогда матрица (1.7) будет такой:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & 0 & 0 \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & 0 & 0 \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & d_{g11} & d_{g12} & 0 & 0 \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & d_{g12} & d_{g22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{p11} & e_{p12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{p12} & e_{p22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & 0 & 0 \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & 0 & 0 \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{11} & \chi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (5.3)$$

откуда следуют равенства $C_{pij} = D_{pij} = 0$, $E_{pij} = \infty$, а также тот факт, что последние 2 равенства (1.4) составляют однородную систему для нахождения B_x и B_y (после разделения обеих частей этих уравнений на χ_{ij} , значения которых велики). Это соответствует задаче электроупругости, для которой $\Delta_{2k} = 0$, $v_k = 0$. Следовательно, если при проведении расчетов по общей программе принять $\lambda_g = 1$ (кроме связи для v'_{gij}), а параметр λ_p модельного материала достаточно малым (а не нулем, так как в случае нулевого значения могут возникать различные проблемы типа деления на ноль), то полученные числовые значения основных характеристик будут соответствовать решению задачи, когда пренебрегаются магнитные свойства материала, т. е. решению задачи электроупругости. Как показывают проведенные расчеты, уже при $\lambda_p \leq 10^{-3}$ значения основных характеристик, получаемые по общей программе для задачи ЭМУ, оказываются такими, как при реализации приведенного в п. 2 решения задачи электроупругости.

При $\lambda_g = 0$ (достаточно малом) имеем $g'_{ij} = v'_{gij} = 0$, $\beta'_{ij} = \infty$. Тогда матрица (1.7) будет такой:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & 0 & 0 & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & 0 & 0 & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & 0 & 0 & c_{p16} & c_{p26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{g11} & d_{g12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{g12} & d_{g22} & 0 & 0 \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & 0 & 0 & e_{p11} & e_{p12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & 0 & 0 & e_{p12} & e_{p22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & 0 & 0 & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & 0 & 0 & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & 0 & 0 & p_{16} & p_{26} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{12} & \beta_{22} & 0 & 0 \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & 0 & 0 & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & 0 & 0 & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1},$$

откуда следуют равенства $C_{gij} = D_{pij} = 0$, $D_{gij} = \infty$, а также тот факт, что 4 и 5 уравнения равенств (1.4) составляют однородную систему для нахождения D_x и D_y . Это

соответствует задаче магнитоупругости, $\Delta_{1k} = 0$, $\lambda_k = 0$. Следовательно, если при проведении расчетов по общей программе принять $\lambda_p = 1$ (кроме связи для v'_{pij}), а параметр λ_g модельного материала достаточно малым, то полученные числовые значения основных характеристик будут соответствовать решению задачи, когда пренебрегаются магнитные свойства материала, т. е. решению задачи магнитоупругости. Как показывают проведенные расчеты, уже при $\lambda_g \leq 10^{-3}$ значения основных характеристик, получаемые по общей программе для задачи ЭМУ, оказываются такими, как при реализации приведенного в п. 3 решении задачи магнитоупругости.

По аналогии с предыдущим в случае классической задачи изгиба упругой плиты нужно принять и $\lambda_p \leq 10^{-3}$, $\lambda_g \leq 10^{-3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirchhoff G. R. Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique / G. R. Kirchhoff // Comptes Rendus Mathématique (Paris). – 1848. – Vol. XXVII. – P. 394–397.
2. Kirchhoff G. R. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe / G. R. Kirchhoff // J. Für die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51–88.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
4. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит / С. Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
5. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
6. Калоеров С. А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С. А. Калоеров, А. В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
7. Калоеров С. А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С. А. Калоеров // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
8. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С. А. Калоеров // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 37–57.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
10. Гринченко В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко А. Ф., Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
11. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
12. Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism / J. C. A. Maxwell // In 2 vol.: Vol. II. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – XXIV, 445 p.
13. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
14. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц / Дж. Най. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 388 с.
15. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С. А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
16. Калоеров С. А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С. А. Калоеров, А. И. Занько, А. А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – № 9(55). – С. 99–138.

Поступила в редакцию 12.10.2019 г.

**PROBLEMS OF ELECTROELASTIC, MAGNETOELASTIC AND ELASTIC BEND
OF THIN PLATES, AS PARTICULARITIES OF THE TASK
OF ELECTROMAGNETOELASTIC BEND**

S. A. Kaloerov

As special cases of the general problem of electromagnetic stability for bending thin plates, solutions to the problems of electroelasticity, magnetoelasticity, and the theory of elasticity for bending thin plates are obtained. In this case, the differential equations obtained from the solution of the general problem are given, their solutions through complex potentials, boundary conditions for determining functions, general representations of functions for arbitrary multiply connected domains. It is shown how, when conducting numerical studies, by choosing the values of some parameters from the solution of the general problem, the solutions of these particular problems follow.

Keywords: Piezoelectric plates, piezomagnetic plates, boundary value problems, complex potentials.

Калоеров Стефан Алексеевич

Доктор физико-математических наук, профессор;
профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: kaloerov@mail.ru

Kaloerov Stefan Alekseevich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor,
Professor at the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics, Donetsk National University, Donetsk.
E-mail: kaloerov@mail.ru

УДК 539.3:534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРАХ

© 2019. *И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, Р.В. Бобакова*

Процесс распространения волн описывается полной системой уравнений линейной динамической теории упругости. Модули упругости и плотность материала в каждой области составного волновода задаются независимой экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Используются базисные решения системы дифференциальных уравнений модели в каждой области волновода, представленные в матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решений в равномерно и абсолютно сходящиеся степенные ряды по радиальной и по кольцевой координатам. Представлены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник нормальных волн для случаев жестко закрепленной и свободной граничной поверхности.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы; трансверсально изотропный; нормальные волны; двухслойный цилиндр; аналитические решения; дисперсионные соотношения.

Введение. Упругие тела цилиндрической геометрии представляют собой важнейший по фундаментальной и прикладной значимости класс объектов математического моделирования в волновой механике деформируемых сред. Для построения общих аналитических решений уравнений модели в случае функционально-градиентных материалов применяется подход, основанный на задании специального вида функционального закона радиального изменения физико-механических характеристик материала волновода. Таким способом построены в аналитическом виде базисные решения модели и исследованы эффекты влияния фактора радиальной неоднородности материала на топологию дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных волн в сплошных [1] и полых [2] цилиндрах с экспоненциально степенным законом радиальной неоднородности трансверсально-изотропных материала. В данном исследовании с применением построенных базисных решений решается задача о распространении нормальных упругих волн в составных протяженных цилиндрах из трансверсально-изотропных материалов с указанным типом законов радиальной неоднородности материалов областей волновода.

Постановка задачи. Рассматривается протяженный составной цилиндрический волновод, имеющий в поперечном сечении концентрическое круговое кольцо с радиусами R_1 и R_2 (рис. 1). Полагается, что трансверсально-изотропные материалы составных частей волновода являются функционально-неоднородными в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а оси их анизотропии совпадают с осью составного цилиндра. Вводится нормирующий параметр $R_* = R_1$, а также безразмерные параметры

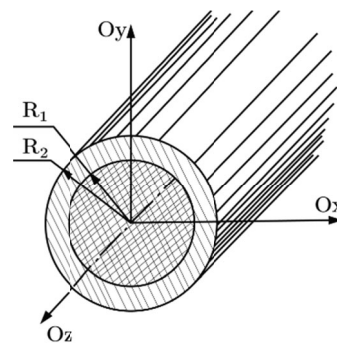


Рис. 1. Двухслойный волновод

$$r_0 = 0, \quad r_1 = R_1/R_* = 1, \quad r_2 = R_2/R_*, \quad r_1 \leq r_* \leq r_2, \quad h = \max\{r_* - r_1, r_2 - r_*\}. \quad (1)$$

В нормированной параметром R_* безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ волновод занимает область $V = V^{(1)} \cup V^{(2)}$

$$V^{(j)} = \left\{ r \in [r_{j-1}, r_j]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty) \right\} \quad (j = \overline{1, 2}),$$

с поверхностью раздела двух сред $\Gamma^{(1)}$ и внешней граничной поверхностью $\Gamma^{(2)}$, где $\Gamma^{(j)} = \{r = r_j, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}$ ($j = \overline{1, 2}$). Полагается, что плотности $\rho^{(j)}(r)$ и нормированные параметром c_* модули упругости $c_{nm}^{(j)}(r)$ функционально-неоднородных материалов областей волновода $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, 2}$) описываются соотношениями

$$\rho^{(j)}(r) = \tilde{\rho}^{(j)} \exp\left(f_{\lambda_j, q_j}^{(j)}(r)\right), \quad c_{nm}^{(j)}(r) = \tilde{c}_{nm}^{(j)} \exp\left(f_{\lambda_j, q_j}^{(j)}(r)\right) \\ (\lambda_j \in \mathbb{R}; q_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}; j = \overline{1, 2}); \quad (2)$$

$$f_{\lambda_1, q_1}^{(1)}(r) = \lambda_1 r^{q_1} \quad (r \in [r_0, r_1]), \quad f_{\lambda_2, q_2}^{(2)}(r) = \lambda_2 ((r - r_*)/h)^{q_2} \quad (r \in [r_1, r_2]). \quad (3)$$

Пространственная линейная математическая модель динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в системе координат $Or\theta z$, применяемая для областей волновода $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, 2}$), включает систему дифференциальных уравнений движения

$$\partial_r \sigma_{rr}^{(j)} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta}^{(j)} + \partial_z \sigma_{rz}^{(j)} + r^{-1} (\sigma_{rr}^{(j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(j)}) - (\rho^{(j)} R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r^{(j)} = 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta}^{(j)} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta}^{(j)} + \partial_z \sigma_{\theta z}^{(j)} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta}^{(j)} - (\rho^{(j)} R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta^{(j)} = 0, \\ \partial_r \sigma_{rz}^{(j)} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z}^{(j)} + \partial_z \sigma_{zz}^{(j)} + r^{-1} \sigma_{rz}^{(j)} - (\rho^{(j)} R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z^{(j)} = 0; \quad (4)$$

определяющие соотношения линейного закона Гука

$$\sigma_{rr}^{(j)} = c_{11}^{(j)} \varepsilon_{rr}^{(j)} + c_{12}^{(j)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)} + c_{13}^{(j)} \varepsilon_{zz}^{(j)}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(j)} = c_{12}^{(j)} \varepsilon_{rr}^{(j)} + c_{11}^{(j)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)} + c_{13}^{(j)} \varepsilon_{zz}^{(j)}, \\ \sigma_{zz}^{(j)} = c_{13}^{(j)} \varepsilon_{rr}^{(j)} + c_{13}^{(j)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)} + c_{33}^{(j)} \varepsilon_{zz}^{(j)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \varepsilon_{\theta z}^{(j)}, \quad \sigma_{rz}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \varepsilon_{rz}^{(j)}, \\ \sigma_{r\theta}^{(j)} = c_{66}^{(j)} \varepsilon_{r\theta}^{(j)}, \quad c_{66}^{(j)} = (c_{11}^{(j)} - c_{12}^{(j)}) / 2; \quad (5)$$

уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций $\varepsilon_{nm}^{(j)}$ ($n, m = r, \theta, z$) и отнесенными к нормирующему параметру R_* компонентами безразмерного вектора упругих волновых перемещений $u_n^{(j)}$ ($n = r, \theta, z$)

$$\varepsilon_{rr}^{(j)} = \partial_r u_r^{(j)}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)} = r^{-1} u_r^{(j)} + r^{-1} \partial_\theta u_\theta^{(j)}, \quad \varepsilon_{zz}^{(j)} = \partial_z u_z^{(j)}, \\ \varepsilon_{\theta z}^{(j)} = \partial_z u_\theta^{(j)} + r^{-1} \partial_\theta u_z^{(j)}, \quad \varepsilon_{rz}^{(j)} = \partial_z u_r^{(j)} + \partial_r u_z^{(j)}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(j)} = r^{-1} \partial_\theta u_r^{(j)} + (\partial_r - r^{-1}) u_\theta^{(j)}. \quad (6)$$

Здесь $\sigma_{nm}^{(j)}$ – отнесенные к нормирующему параметру c_* безразмерные характеристики

тензора напряжений в соответствующих областях волновода. Представленная модель включает также условия неразрывного контакта областей волновода $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ вида

$$\sigma_{rs}^{(1)} \Big|_{(r,\theta,z) \in \Gamma^{(1)}} = \sigma_{rs}^{(2)} \Big|_{(r,\theta,z) \in \Gamma^{(1)}}, \quad u_s^{(1)} \Big|_{(r,\theta,z) \in \Gamma^{(1)}} = u_s^{(2)} \Big|_{(r,\theta,z) \in \Gamma^{(1)}} \quad (s = r, \theta, z)$$

и граничные условия свободной $\sigma_{rs}^{(2)} \Big|_{(r,\theta,z) \in \Gamma^{(2)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z)$ либо жестко закрепленной $u_s^{(2)} \Big|_{(r,\theta,z) \in \Gamma^{(2)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z)$ его внешней поверхности.

Базисные решения. В работе [1] в виде равномерно и абсолютно сходящихся обобщенно-степенных матричных рядов с вычисляемыми из явных рекуррентных соотношений коэффициентами построены базисные решения уравнений модели (2)–(6) для случая распространения в области $V^{(1)}$ нормальных упругих волн с круговой частотой ω и нормированным параметром R_* волновым числом \tilde{k} . Указанные решения в осесимметричном случае крутильных волн с точностью до произвольного скалярного множителя b получены в виде

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(1)}(r, z, t) &= \exp\left(-\delta f_{\lambda_1, q_1}^{(1)}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \tilde{u}_{\theta}^{(TW)(1)}(r), \\ \mathbf{S}^{(1)}(r, z, t) &= \exp\left((1-\delta) f_{\lambda_1, q_1}^{(1)}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(TW)} \mathbf{S}^{(TW)(1)}(r), \\ \tilde{u}_{\theta}^{(TW)(1)}(r) &= b \tilde{u}_{\theta}^{(TW, B)(1)}(r), \quad \mathbf{S}^{(TW)(1)}(r) = b \mathbf{S}^{(TW, B)(1)}(r), \\ \tilde{u}_{\theta}^{(TW, B)(1)}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+1} x_m^{(TW)(1)}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(TW, B)(1)}(r) = \mathbf{A}_2^{(TW)(1)} \sum_{m=0}^{\infty} r^m x_m^{(TW)(1)} \mathbf{H}_m^{(TW)(1)}(r), \end{aligned} \quad (7)$$

в осесимметричном случае продольно-сдвиговых волн с точностью до векторного коэффициента \mathbf{B} второго порядка получены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)}(r, z, t) &= \exp\left(-\delta f_{\lambda_1, q_1}^{(1)}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \mathbf{U}^{(LSW)(1)}(r), \\ \mathbf{S}^{(1)}(r, z, t) &= \exp\left((1-\delta) f_{\lambda_1, q_1}^{(1)}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \mathbf{S}^{(LSW)(1)}(r), \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)(1)}(r) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, B)(1)}(r) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)(1)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW, B)(1)}(r) \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, B)(1)}(r) &= \mathbf{A}_1^{(LSW)(1)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{X}_m^{(LSW)(1)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW, B)(1)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(LSW)(1)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{H}_m^{(LSW)(1)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW)(1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

в случае неосесимметричных волн ($\tau \in \mathbb{N}$) с точностью до векторного коэффициента \mathbf{B} третьего порядка получены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)}(r, \theta, z, t) &= \exp\left(-\delta f_{\lambda_1, q_1}^{(1)}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \mathbf{U}^{(\tau)(1)}(r), \\ \mathbf{S}^{(1)}(r, \theta, z, t) &= \exp\left((1-\delta) f_{\lambda_1, q_1}^{(1)}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \mathbf{S}^{(\tau)(1)}(r), \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)(1)}(r) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)(1)}(r) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)(1)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)(1)}(r) \mathbf{B}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(1)}(r) &= \mathbf{A}_1^{(1)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[\mathbf{X}_m^{(\tau,\tau,1)(1)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,\tau,2)(1)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,\tau-2)(1)} \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(1)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(1)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)(1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau,\tau,1)(1)}, \mathbf{H}_m^{(\tau)(1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau,\tau,2)(1)}, \mathbf{H}_m^{(\tau-2)(1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau,\tau-2)(1)} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Все входящие в представления (7)–(9) объекты с учетом обозначений, использованных в соотношениях (2)–(3), определены в [1].

В работе [2] для области $V^{(2)}$ в аналитическом виде построены базисные решения уравнений модели (4)–(6) при значениях параметров $R_1 \leq R_* \leq R_2$ и $r_* = 1$ в соотношениях (1)–(3). С учетом необходимости унификации значения нормирующего параметра R_* в виде $R_* = R_1$ для обеих областей $V^{(j)}$ ($j = \overline{1,2}$) составного волновода, в случае соотношений (1)–(3) получены аналогичные представленным в [2] базисные решения уравнений модели (4)–(6) в области $V^{(2)}$ в виде равномерно и абсолютно сходящихся степенных матричных рядов по кольцевой координате $x = (r - r_*)/h$ с вычисляемыми из явных рекуррентных соотношений коэффициентами. Указанные решения в осесимметричном случае крутильных волн с точностью до векторного коэффициента \mathbf{B} второго порядка получены в виде

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(2)}(x, z, t) &= \exp(-\delta \lambda_2 x^{q_2} - i\omega t + i\tilde{k}z) \tilde{u}_{\theta}^{(TW)(2)}(x), \\ \mathbf{S}^{(2)}(x, z, t) &= \exp((1 - \delta) \lambda_2 x^{q_2} - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(TW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)(2)}(x), \\ \tilde{u}_{\theta}^{(TW)(2)}(x) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)(2)}(x) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)(2)}(x) = \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)(2)}(x) \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[X_m^{(TW,1)(2)}, X_m^{(TW,2)(2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[X_m^{(TW,1)(2)} \mathbf{H}_m^{(TW,2)(2)}(x), X_m^{(TW,2)(2)} \mathbf{H}_m^{(TW,2)(2)}(x) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

в осесимметричном случае продольно-сдвиговых волн с точностью до векторного коэффициента \mathbf{B} четвертого порядка получены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(2)}(x, z, t) &= \exp(-\delta \lambda_2 x^{q_2} - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)(2)}(x), \\ \mathbf{S}^{(2)}(x, z, t) &= \exp((1 - \delta) \lambda_2 x^{q_2} - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)(2)}(x), \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)(2)}(x) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)(2)}(x) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)(2)}(x) = \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)(2)}(x) \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[\mathbf{X}_m^{(LSW,1)(2)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)(2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW,2)(2)}(x) \left[\mathbf{X}_m^{(LSW,1)(2)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)(2)} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

в случае неосесимметричных волн ($\tau \in \mathbb{N}$) с точностью до векторного коэффициента \mathbf{B} шестого порядка получены в виде

$$\mathbf{U}^{(2)}(x, \theta, z, t) = \exp(-\delta \lambda_2 x^{q_2} - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)(2)}(x),$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}^{(2)}(x, \theta, z, t) &= \exp\left((1-\delta)\lambda_2 x^{q_2} - i\omega t + ikz\right) \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)(2)}(x), \\
 \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)(2)}(x) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(2)}(x) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)(2)}(x) = \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(2)}(x) \mathbf{B}, \\
 \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[\mathbf{X}_m^{(\tau,1)(2)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,2)(2)} \right], \\
 \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(\tau,2)(2)}(x) \left[\mathbf{X}_m^{(\tau,1)(2)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,2)(2)} \right]. \tag{12}
 \end{aligned}$$

В представлениях (10)–(12) сохранены обозначения, используемые в [2] с учетом соотношений (1)–(3).

Дисперсионные соотношения. В рассмотренных случаях волновых процессов граничные условия свободной либо жестко закрепленной граничной поверхности соответственно порождают дисперсионное уравнение, определяющее спектр задачи, а также уравнение для определения неизвестного векторного коэффициента \mathbf{Y} в виде

$$\begin{aligned}
 \det\left(\Phi^{(S)}(\tilde{k}, \Omega)\right) = 0 & \quad \text{либо} \quad \det\left(\Phi^{(U)}(\tilde{k}, \Omega)\right) = 0 \\
 \Phi^{(S)}(\tilde{k}, \Omega) \times \mathbf{Y} = \hat{\mathbf{O}} & \quad \Phi^{(U)}(\tilde{k}, \Omega) \times \mathbf{Y} = \hat{\mathbf{O}}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Здесь $\Omega^2 = \tilde{\rho} \omega^2 R_*^2 / c_*$. В случае крутильных волн на основании базисных решений (7), (10) получаются матрицы третьего порядка

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(S)}(\tilde{k}, \Omega) &= \begin{bmatrix} -\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)(1)}(1)\right]_2 & \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)(2)}(x_1)\right]_{2,1..2} \\ -\tilde{u}_\theta^{(TW,B)(1)}(1) & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)(2)}(x_1) \\ 0 & \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)(2)}(x_2)\right]_{2,1..2} \end{bmatrix}, \\
 \Phi^{(U)}(\tilde{k}, \Omega) &= \begin{bmatrix} -\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)(1)}(1)\right]_2 & \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)(2)}(x_1)\right]_{2,1..2} \\ -\tilde{u}_\theta^{(TW,B)(1)}(1) & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)(2)}(x_1) \\ 0 & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)(2)}(x_2) \end{bmatrix}. \tag{14}
 \end{aligned}$$

В случае продольно-сдвиговых волн на основании базисных решений (8), (11) получаются матрицы шестого порядка

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(S)}(\tilde{k}, \Omega) &= \begin{bmatrix} -\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)(1)}(1)\right]_{(1,4),1..2} & \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)(2)}(x_1)\right]_{(1,4),1..4} \\ -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)(1)}(1) & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)(2)}(x_1) \\ \tilde{\mathbf{O}} & \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)(2)}(x_2)\right]_{(1,4),1..4} \end{bmatrix}, \\
 \Phi^{(U)}(\tilde{k}, \Omega) &= \begin{bmatrix} -\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)(1)}(1)\right]_{(1,4),1..2} & \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)(2)}(x_1)\right]_{(1,4),1..4} \\ -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)(1)}(1) & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)(2)}(x_1) \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)(2)}(x_2) \end{bmatrix}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

В случае неосесимметричных волн ($\tau \in \mathbb{N}$) на основании базисных решений (9), (12) получаются матрицы девятого порядка

$$\Phi^{(S)}(\tilde{k}, \Omega) = \begin{bmatrix} -[\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(1)}(1)]_{(1,5,6),1..3} & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(2)}(x_1)]_{(1,5,6),1..6} \\ -\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(1)}(1) & \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(2)}(x_1) \\ \tilde{\mathbf{O}} & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(2)}(x_2)]_{(1,5,6),1..6} \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{(U)}(\tilde{k}, \Omega) = \begin{bmatrix} -[\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(1)}(1)]_{(1,5,6),1..3} & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)(2)}(x_1)]_{(1,5,6),1..6} \\ -\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(1)}(1) & \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(2)}(x_1) \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)(2)}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

В соотношениях (14)–(16) $x_j = (r_j - r_*)/h$ ($j = \overline{1,2}$).

Анализ результатов численного эксперимента. При численном эксперименте значение параметра δ бралось фиксированным $\delta = 1/2$, а в качестве однородного $(\lambda, q) = (0, 0)$ трансверсально-изотропного материала в советующем области составного волновода законе радиальной неоднородности (2) были выбраны [3] ($c_* = 10^{10} \text{ H/m}^2$) цинк для $V^{(1)}$ и кобальт для $V^{(2)}$

$$\text{Zn} : \{ \tilde{c}_{11} = 16,35; \tilde{c}_{12} = 2,64; \tilde{c}_{13} = 5,17; \tilde{c}_{33} = 5,31; \tilde{c}_{44} = 3,78; \tilde{\rho} = 7134 \text{ кг/м}^3 \},$$

$$\text{Co} : \{ \tilde{c}_{11} = 30,7; \tilde{c}_{12} = 16,5; \tilde{c}_{13} = 10,27; \tilde{c}_{33} = 35,8; \tilde{c}_{44} = 7,55; \tilde{\rho} = 8836 \text{ кг/м}^3 \}.$$

Расчет фрагментов спектров бегущих крутильных (TW) нормальных волн проводился для жестко закрепленного составного цилиндра с геометрией $R_1 = 0.75 \text{ м}$ и $R_2 = 1.25 \text{ м}$ в диапазонах изменения безразмерных волновых параметров $\Omega \in [0, 25]$ и $\tilde{k} \in [0, 50]$ для трех случаев комбинации материалов областей составного волновода $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ соответственно – однородный-однородный, однородный-неоднородный, неоднородный-однородный. Ниже представлены спектры бегущих крутильных волн в протяженных составных цилиндрах с такими параметрами законов радиальной неоднородности (3) ($r_* = 4/3$) – $(\lambda, q)^{(1)} = (0, 0)$, $(\lambda, q)^{(2)} = (\lambda_*, q_*)$ (рис. 2) и $(\lambda, q)^{(1)} = (\lambda_*, q_*)$, $(\lambda, q)^{(2)} = (0, 0)$ (рис. 3). Здесь $\lambda_* = \ln(1/2)$ $q_* = 6$. Нормирующие параметры a и c_t с размерностью соответственно длины и скорости для всех рисунков имеют фиксированное значение $a = R_*$ и $c_t = \sqrt{c_*/\tilde{\rho}}$.

Сравнительный анализ построенных спектров показал относительную стабильность общей качественной топологической картины при переходе от рассмотрения составного волновода из однородных материалов к волноводу, одна из областей которого имеет радиально неоднородный материал с указанными выше параметрами. Для анализа количественных различий полученных спектров использовались функции сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод

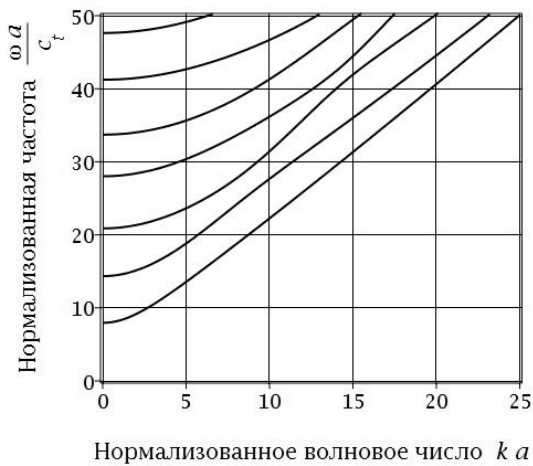


Рис. 2

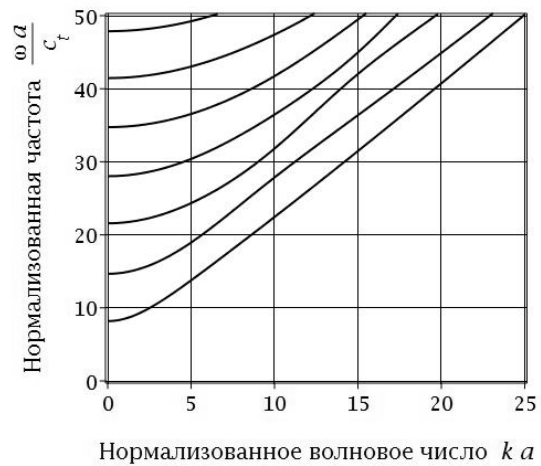


Рис. 3

$\Delta\Omega(\tilde{k}) = (\omega_{0,0,\lambda_*,q_*}(\tilde{k}) - \omega_{0,0,0,0}(\tilde{k}))a/c_t$ в случае, когда только материал области $V^{(2)}$ был неоднородным (рис. 4), и функция $\Delta\Omega(\tilde{k}) = (\omega_{\lambda_*,q_*,0,0}(\tilde{k}) - \omega_{0,0,0,0}(\tilde{k}))a/c_t$, когда только материал области $V^{(1)}$ был неоднородным (рис. 5).

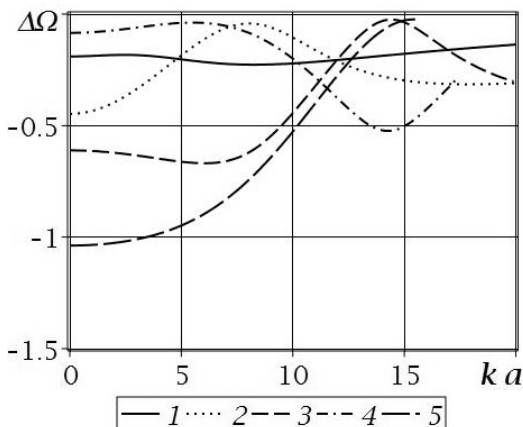


Рис. 4

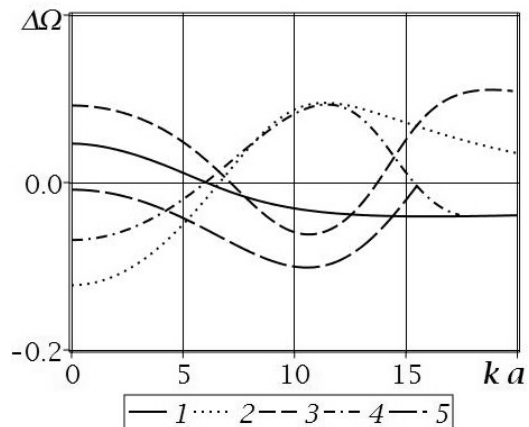


Рис. 5

В качестве закономерностей, выявленных в исследованных диапазонах изменения волновых параметров отмечаются системное уменьшение фазовых скоростей бегущих волн в составном цилиндре, когда материал области $V^{(2)}$ был неоднородным, по отношению к составному волноводу с однородными материалами.

Заключение. Решена задача исследования волновых процессов в двуслойных цилиндрических волноводах из трансверсально-изотропных материалов с различными по областям составного цилиндра экспоненциально степенными законами радиальной неоднородности физико-механических свойств материалов. Проведен численный эксперимент с целью изучения эффектов влияния физико-механических свойств и параметров радиальной неоднородности материалов составного волновода на топологию дисперсионных спектров бегущих осесимметричных нормальных волн крутильного типа. Полученные результаты перспективны для использования в прикладных исследованиях,

связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализа моделей ультразвуковой диагностики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально изотропных функционально градиентных цилиндров / И.А. Моисеенко // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37-54.
2. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134-146.
3. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка. – 1985. – 176 с.

Поступила в редакцию 01.06.2019 г.

PROPAGATION OF NORMAL WAVES IN FUNCTIONALLY GRADIENT TRANSVERSALLY ISOTROPIC TWO-LAYER CYLINDERS

I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko, R.V. Bobakova

The wave propagation process is described by the complete system of equations of the linear dynamic theory of elasticity. The elastic moduli and density of the material in each region of the composite waveguide are defined by an independent exponentially-power function of the radial coordinate. We use the basic solutions of the system of differential equations of the model in each region of the waveguide, presented in matrix form in the form of expansions of the radial components of the solutions in uniformly and absolutely converging power series in radial and ring coordinates. Dispersion relations are also described, which describes the spectra of harmonics of normal waves for cases of a rigidly fixed and free boundary surface.

Keywords: FGMs; transversely isotropic; normal waves; two-layer cylinder; analytical solutions; dispersion relations.

Моисеенко Игорь Алексеевич

Доктор физико-математических наук, доцент;
профессор кафедры теории упругости и
вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий
национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: miamia733@mail.ru

Moiseyenko Igor Alekseyevich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Docent;
Donetsk National University, Donetsk

Моисеенко Виктор Алексеевич

Кандидат физико-математических наук, доцент;
доцент кафедры высшей математики и
информатики ГОУ ВПО «Донбасская
национальная академия строительства и
архитектуры», г. Макеевка, ДНР.
E-mail: vamvamv@ukr.net

Moiseyenko Victor Alekseyevich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent;
Donetsk National University, Donetsk

Бобакова Руслана Валерьевна

Кафедра теории упругости и вычислительной
математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный
университет», г. Донецк, ДНР
E-mail: ruslana.puspus@yandex.ua

Bobakova Ruslana Valerevna

Donetsk National University, Donetsk

УДК 004.031:539.3:534.1

МЕТОДИКА АНАЛИЗА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

© 2019. С.А. Прийменко, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван, Чан Ба Ле Хоанг

Разработана численно-аналитическая нечетко-множественная методика для анализа неопределенных эндогенных параметров резонансных частот в теоретической модели колебаний тонких ортотропных композитных трехслойных цилиндрических панелей малой кривизны, имеющих симметричную структуру с двумя внешними трансверсально-изотропными пьезоэлектрическими слоями и с внутренним ортотропным слоем из линейно-вязкоупругого композиционного материала при наличии ошибок рассеяния в значениях их структурных экзогенных физико-механических и геометрических параметров. Методика основана на переходе к нечетко-интервальным аргументам в аналитических представлениях для исследуемых резонансных частот и в применении эвристического принципа обобщения для получения оценок значений таких резонансных частот в виде нормальных нечетких множеств. Приведен пример реализации рассматриваемой методики.

Ключевые слова: трехслойные цилиндрические панели, внешние трансверсально-изотропные пьезоэлектрические слои, внутренний ортотропный композитный слой, частоты резонансных колебаний, неопределенные физико-механические и геометрические параметры, погрешности экспериментальных данных, учет технологических разбросов, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

Введение. При разработке целого ряда современных конструкций машин, приборов, энергетических устройств и аэрокосмической техники, представляющих собой тонкие цилиндрические панели из композитных материалов, создаются механизмы для активного демпфирования различных режимов их резонансных колебаний путем включения в структуру подобных конструкций слоев пьезоэлектрических материалов [1–5]. При реализации основных подходов к активному виброгашению эти слои играют роль датчиков и исполнительных механизмов для создания эффектов демпфирования. В числе факторов, обеспечивающих наибольшую эффективность подавления резонансных колебаний, относится правильная оценка собственных частот вибрации конструкций при существовании погрешностей в значениях экзогенных физико-механических и геометрических параметров их механико-математических моделей. Как отмечено в [4, 5], это заключение относится, в частности, к панелям из материалов с низкой вязкостью, для которых небольшие ошибки в определении механических свойств материалов приводят к большим расхождениям в показаниях датчиков вибраций вблизи резонансных частот.

Задача получения корректной оценки неопределенных характеристик собственных частот колебаний трехслойных вязкоупругих композитных цилиндрических панелей с учетом разбросов в значениях их конструктивных параметров является актуальным предметом исследования в области совершенствования систем активного гашения резонансных колебаний в интеллектуальных аэрокосмических и промышленных структурах и альтернативно может быть решена с помощью методов стохастического анализа [6] либо с использованием методов теории нечетких вычислений [7–9]. При оценках возможностей применения первого из указанных подходов следует учитывать, что исходная неопределенная информация о разбросах экзогенных параметров в моделях

динамического волнового деформирования трехслойных вязкоупругих композитных цилиндрических панелей в большинстве случаев не носит корректного статистического характера, что принципиально затрудняет применение в рассматриваемом случае методов стохастического анализа и теории вероятностей.

В этой связи, целью настоящей работы является синтез и апробация предполагающей менее жесткие требования к характеру экзогенной информации методики нечетко-множественного анализа модели получения оценок для неопределенных резонансных частот колебаний тонких пологих трехслойных цилиндрических панелей симметричной структуры с двумя внешними пьезоактивными слоями и с внутренним слоем из линейно-вязкоупругого ортотропного композитного материала в ситуации существования разбросов в значениях экзогенных экспериментальных и технологических конструктивных параметров модели. Методика базируется на использовании соотношений детерминистической версии модели колебаний трехслойных композитных панелей и на последующем переходе в этих соотношениях к нечетким аргументам на базе применения эвристического принципа расширения в теории нечетких множеств [10, 11].

Постановка задачи и соотношения детерминистического варианта модели.

В соответствии с результатами [4, 5], теоретическая модель для определения резонансных частот поперечных колебаний шарнирно закрепленных по краям трехслойных ортотропных цилиндрических панелей радиуса R , имеющих прямоугольную форму и малую кривизну, включает в себя следующие элементы описания.

Панель рассматривается в прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ и занимает область $V = \{x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2], x_3 \in [-(h_1 + h_0/2), (h_1 + h_0/2)]\}$. Она содержит центральный слой толщины h_0 , изготовленный из непьезоэлектрического ортотропного вязкоупругого материала, а также внешние слои равной толщины h_1 , изготовленные из пьезоэлектрических поперечно-изотропных вязкоупругих материалов, имеющих эквивалентные физико-механические свойства, но противоположные направления поляризации. Материал центрального слоя характеризуется плотностью ρ_0 , модулями Юнга E_1 и E_2 , коэффициентами Пуассона $\nu_1^{(0)}$ и $\nu_2^{(0)}$, а также жесткостью на сдвиг G_{12} . В случае рассматриваемых гармонических колебаний для учета вязкоупругих свойств материала центрального слоя его механические характеристики вводятся в виде комплексных величин $E_j^{(0)} = E_{jR}^{(0)} - iE_{jI}^{(0)}$, $\nu_j^{(0)} = \nu_{jR}^{(0)} - i\nu_{jI}^{(0)}$, $G_{12}^{(0)} = G_{12R}^{(0)} - iG_{12I}^{(0)}$. Физико-механическими характеристиками трансверсально-изотропных пьезоэлектрических слоев являются параметр плотности ρ_1 , диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{33}^{(T)}$, а также деформационные и электромеханические константы $S_{11}^{(E)}$, $S_{12}^{(E)}$, d_{31} . Для противоположных внешних пьезоэлектрических слоев $d_{31} = -d_{31}$.

При использовании прикладной теории изгибных колебаний панели, в случае шарнирного закрепления ее боковых кромок, резонансные частоты для моды с показателями изменяемости (m, n) могут быть найдены [4, 5] из соотношения

$$\omega_{mn} = [\rho_*^{-1} (D_{11R} k_m^4 + 2(D_{12R} + 2D_{66R}) k_m^2 p_n^2 + D_{22R} p_n^4 + k_m^4 \Delta_{mnr} (R^2 (\Delta_{mnr}^2 + \Delta_{mnl}^2))^{-1})]^{1/2} \quad (1)$$

$$(m, n = \overline{1, \infty}),$$

в котором, при наличии в структуре панели внутренних электродов, используемые параметры имеют вид:

$$\begin{aligned}
 k_m &= m\pi d_1^{-1}, \quad p_n = n\pi d_2^{-1}, \quad \rho_* = \rho_0 h_0 + 2\rho_1 h_1, \\
 D_{qj} &= D_{qjR} + iD_{qjI} = (h_0^3/12)B_{qj}^{(0)} + (2/3)(B_{qj}^{(1)} + ((1+\nu^{(1)})/2)B_{11}^{(1)}(k_p^{(1)})^2/(2(1-(k_p^{(1)})^2)) \times \\
 &\times (1-(3/(4h_1))((h_0/2+h_1)^2 - (h_0/2)^2)^2 / [(h_0/2+h_1)^3 - (h_0/2)^3])((h_0/2+h_1)^3 - (h_0/2)^3), \\
 \Delta_{mn} &= \Delta_{mnR} + i\Delta_{mnI} = A_{22}k_m^4 + (A_{66} - 2A_{12})k_m^2 p_n^2 + A_{11}p_n^4, \\
 A_{11} &= C_{22}\Delta^{-1}, \quad A_{22} = C_{11}\Delta^{-1}, \quad A_{66} = C_{66}^{-1}, \quad A_{12} = C_{12}\Delta^{-1}, \quad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2, \\
 C_{qj} &= C_{qjR} + iC_{qjI} = h_0 B_{qj}^{(0)} + 2h_1 B_{qj}^{(1)}, \quad B_{11}^{(0)} = E_1^{(0)}(1-\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}), \quad B_{22}^{(0)} = E_2^{(0)}(1-\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}), \\
 B_{12}^{(0)} &= \nu_1^{(0)}E_1^{(0)}(1-\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}) = \nu_2^{(0)}E_2^{(0)}(1-\nu_1^{(0)}\nu_2^{(0)}), \quad B_{66}^{(0)} = G_{12}^{(0)}, \\
 B_{11}^{(1)} &= B_{22}^{(1)} = (1-(\nu^{(1)})^2)S_{11}^{(1)}, \quad B_{12}^{(1)} = \nu^{(1)}B_{11}^{(1)}, \quad B_{66}^{(1)} = (1-\nu^{(1)})B_{11}^{(1)}/2, \\
 (k_p^{(1)})^2 &= 2d_{31}^2/(\varepsilon_{33}^{(T)}S_{11}^{(E)}(1-(\nu^{(1)})^2)), \quad \nu^{(1)} = -S_{12}^{(E)}/S_{11}^{(E)}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемой модели частоты резонансных колебаний панели являются аналитическими функциями девятнадцати независимых экзогенных параметров $E_{jR}^{(0)}, E_{jI}^{(0)}, \nu_{jR}^{(0)}, \nu_{jI}^{(0)}$ ($j = \overline{1, 2}$), $G_{12R}^{(0)}, G_{12I}^{(0)}, \rho_0, h_0, S_{11}^{(E)}, S_{12}^{(E)}, d_{31}, \varepsilon_{33}^{(T)}, \rho_1, h_1, R$ с задаваемыми оценками ошибок разброса экспериментальных значений.

Алгоритм получения нечетких оценок резонансных частот. Из исследуемого множества резонансов частот наибольшую опасность для работоспособности конструкций, как правило, представляют колебания на наименьшей частоте с формами $m = n = 1$. Для учета фактора влияния на резонансные частоты ω_{mn} разбросов в величинах эндогенных физико-механических параметров модели используется гипотеза описания этих параметров выпуклыми нормальными нечеткими множествами $\tilde{E}_{jR}^{(0)}, \tilde{E}_{jI}^{(0)}, \tilde{\nu}_{jR}^{(0)}, \tilde{\nu}_{jI}^{(0)}$ ($j = \overline{1, 2}$), $\tilde{G}_{12R}^{(0)}, \tilde{G}_{12I}^{(0)}, \tilde{\rho}_0, \tilde{h}_0, \tilde{S}_{11}^{(E)}, \tilde{S}_{12}^{(E)}, \tilde{d}_{31}, \tilde{\varepsilon}_{33}^{(T)}, \tilde{\rho}_1, \tilde{h}_1, \tilde{R}$ с ответствующими функциями принадлежности $\mu_{\tilde{E}_{jR}^{(0)}}(E_{jR}^{(0)}), \mu_{\tilde{E}_{jI}^{(0)}}(E_{jI}^{(0)}), \dots, \mu_{\tilde{h}_1}(h_1), \mu_{\tilde{R}}(R)$. Эффективным вариантом представления неопределенных экзогенных параметров модели является их задание нечеткими нормальными трапециевидальными интервалами $\tilde{E}_{jR}^{(0)} = (E_{1jR}, E_{2jR}, E_{3jR}, E_{4jR}), \dots, \tilde{h}_1 = (h_{1r}, h_{2r}, h_{3r}, h_{4r}), \tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4)$. Введенные таким образом нечеткие множества представляются разложениями по множествам α -уровня:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{jR}^{(0)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{jR\alpha}, \overline{E}_{jR\alpha}] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(1-\alpha)E_{1jR} + \alpha E_{2jR}, \alpha E_{3jR} + (1-\alpha)E_{4jR}], \dots, \\
 \tilde{h}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(1-\alpha)h_{1r} + \alpha h_{2r}, \alpha h_{3r} + (1-\alpha)h_{4r}], \\
 \tilde{R} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(1-\alpha)R_1 + \alpha R_2, \alpha R_3 + (1-\alpha)R_4]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Использование представлений (1)–(3) позволяет путем применения эвристического принципа обобщения [7–11] получить оценку для эндогенного параметра резонансной частоты в виде нечеткого множества $\tilde{\omega}_{mn}$ с представлением

$$\tilde{\omega}_{mn} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_{mn\alpha}, \overline{\omega}_{mn\alpha}], \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{mn\alpha} &= \inf_M \omega_{mn}(E_{jR}^{(0)}, E_{jI}^{(0)}, \nu_{jR}^{(0)}, \nu_{jI}^{(0)}, \dots, \rho_0, h_0, S_{11}^{(E)}, S_{12}^{(E)}, d_{31}, \varepsilon_{33}^{(T)}, \rho_1, h_1, R), \\ \bar{\omega}_{mn\alpha} &= \sup_M \omega_{mn}(E_{jR}^{(0)}, E_{jI}^{(0)}, \nu_{jR}^{(0)}, \nu_{jI}^{(0)}, \dots, \rho_0, h_0, S_{11}^{(E)}, S_{12}^{(E)}, d_{31}, \varepsilon_{33}^{(T)}, \rho_1, h_1, R), \\ M &= \left\{ \left(E_{jR}^{(0)}, E_{jI}^{(0)}, \nu_{jR}^{(0)}, \nu_{jI}^{(0)}, G_{12R}^{(0)}, G_{12I}^{(0)}, \rho_0, h_0, S_{11}^{(E)}, S_{12}^{(E)}, d_{31}, \varepsilon_{33}^{(T)}, \rho_1, h_1, R \right) : \right. \\ & E_{jR}^{(0)} \in [\underline{E}_{jR\alpha}, \bar{E}_{jR\alpha}], E_{jI}^{(0)} \in [\underline{E}_{jI\alpha}, \bar{E}_{jI\alpha}], \nu_{jR}^{(0)} \in [\underline{\nu}_{jR\alpha}, \bar{\nu}_{jR\alpha}], \\ & \nu_{jI}^{(0)} \in [\underline{\nu}_{jI\beta}, \bar{\nu}_{jI\alpha}], G_{12R}^{(0)} \in [\underline{G}_{12R\alpha}, \bar{G}_{12R\alpha}], G_{12I}^{(0)} \in [\underline{G}_{12I\alpha}, \bar{G}_{12I\alpha}], \\ & \rho_0 \in [\underline{\rho}_{0\alpha}, \bar{\rho}_{0\alpha}], h_0 \in [\underline{h}_{0\alpha}, \bar{h}_{0\alpha}], S_{11}^{(E)} \in [\underline{S}_{11\alpha}^{(E)}, \bar{S}_{11\alpha}^{(E)}], \\ & S_{12}^{(E)} \in [\underline{S}_{12\alpha}^{(E)}, \bar{S}_{12\alpha}^{(E)}], d_{31} \in [\underline{d}_{31\alpha}, \bar{d}_{31\alpha}], \varepsilon_{33}^{(T)} \in [\underline{\varepsilon}_{33\alpha}^{(T)}, \bar{\varepsilon}_{33\alpha}^{(T)}], \\ & \left. \rho_1 \in [\underline{\rho}_{1\alpha}, \bar{\rho}_{1\alpha}], h_1 \in [\underline{h}_{1\alpha}, \bar{h}_{1\alpha}], R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \right\}. \end{aligned}$$

Альтернативная методика определения $\tilde{\omega}_{mn}$ включает этап анализа свойств постоянства знаков для частных производных функции (1) по тем переменным во всей области их определения, которые могут иметь разбросы экспериментальных значений. Таким образом, с использованием соотношений (1), (2) и переходом в них к нечетко-множественным аргументам, с применением правил арифметики нечетких интервалов, и с использованием нечетко-интервальных аргументов $\tilde{E}_{jR}^{(0)}, \tilde{E}_{jI}^{(0)}, \tilde{\nu}_{jR}^{(0)}, \tilde{\nu}_{jI}^{(0)}$ ($j = \overline{1, 2}$), $\tilde{G}_{12R}^{(0)}, \tilde{G}_{12I}^{(0)}, \tilde{\rho}_0, \tilde{h}_0, \tilde{S}_{11}^{(E)}, \tilde{S}_{12}^{(E)}, \tilde{d}_{31}, \tilde{\varepsilon}_{33}^{(T)}, \tilde{\rho}_1, \tilde{h}_1, \tilde{R}$, определяются нечеткие интервалы $\tilde{\rho}_*, \tilde{D}_{11R}, \tilde{D}_{12R}, \tilde{D}_{22R}, \tilde{D}_{66R}, \tilde{\Delta}_{mnR}, \tilde{\Delta}_{mnl}$, и значения, соответствующие величинам $\underline{\rho}_{*\alpha}, \bar{\rho}_{*\alpha}, \underline{D}_{11R\alpha}, \bar{D}_{11R\alpha}, \dots, \underline{\Delta}_{mnl\alpha}, \bar{\Delta}_{mnl\alpha}$.

Принимая во внимание свойства

$$\begin{aligned} \rho_*^{-1} (D_{11R} k_m^4 + 2(D_{12R} + 2D_{66R}) k_m^2 p_n^2 + D_{22R} p_n^4 + k_m^4 \Delta_{mnR} (R^2 (\Delta_{mnR}^2 + \Delta_{mnl}^2))^{-1}) &> 0, \quad (5) \\ D_{11R} > 0, \quad D_{12R} > 0, \quad D_{22R} > 0, \quad D_{66R} > 0, \quad \Delta_{mnR} > 0, \quad \Delta_{mnl} < 0, \quad R > 0, \\ \partial \omega_{mn} / \partial \rho_* < 0, \quad \partial \omega_{mn} / \partial D_{11R} > 0, \quad \partial \omega_{mn} / \partial D_{12R} > 0, \quad \partial \omega_{mn} / \partial D_{22R} > 0, \\ \partial \omega_{mn} / \partial D_{66R} > 0, \quad \partial \omega_{mn} / \partial R < 0, \quad \partial \omega_{mn} / \partial \Delta_{mnl} > 0, \quad \partial \omega_{mn} / \partial \Delta_{mnR} < 0, \end{aligned}$$

на основе модифицированной α -уровневой версии эвристического принципа обобщения можно получить представления

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{mn\alpha} &= [\underline{\rho}_{*\alpha}^{-1} (\underline{D}_{11R\alpha} k_m^4 + 2(\underline{D}_{12R\alpha} + 2\underline{D}_{66R\alpha}) k_m^2 p_n^2 + \underline{D}_{22R\alpha} p_n^4 + \\ & \quad + k_m^4 \underline{\Delta}_{mnR\alpha} (\underline{R}_\alpha^2 (\underline{\Delta}_{mnR\alpha}^2 + \underline{\Delta}_{mnl\alpha}^2))^{-1})]^{1/2}, \\ \bar{\omega}_{mn\alpha} &= [\bar{\rho}_{*\alpha}^{-1} (\bar{D}_{11R\alpha} k_m^4 + 2(\bar{D}_{12R\alpha} + 2\bar{D}_{66R\alpha}) k_m^2 p_n^2 + \bar{D}_{22R\alpha} p_n^4 + \\ & \quad + k_m^4 \bar{\Delta}_{mnR\alpha} (\bar{R}_\alpha^2 (\bar{\Delta}_{mnR\alpha}^2 + \bar{\Delta}_{mnl\alpha}^2))^{-1})]^{1/2}. \quad (6) \end{aligned}$$

При этом нечеткая оценка частоты резонансных колебаний $\tilde{\omega}_{mn}$ описывается выражением (4).

Результаты численных исследований. Пример расчетов по представленной методике выполнен для случая панели со средним слоем из волокнистого углепластика с показателем армирования 55 % [12] и внешними слоями из керамики титаната-

цирконата свинца [4]. Предполагается, что нечетко-интервальными являются параметры кривизны панели R , а также плотностей внутреннего ρ_0 и внешних ρ_1 слоев

$$\tilde{R} = (2.81l_*, 2.95l_*, 3.03l_*, 3.20l_*), \quad \tilde{\rho}_0 = (1.65\rho_{0*}, 1.73\rho_{0*}, 1.78\rho_{0*}, 1.89\rho_{0*}), \\ \tilde{\rho}_1 = (7.38\rho_{0*}, 7.45\rho_{0*}, 7.51\rho_{0*}, 7.62\rho_{0*}), \quad l_* = 1[m], \quad \rho_{0*} = 10^3[kg/m^3].$$

Остальные параметры модели рассматриваются как четкие величины

$$E_{1R}^{(0)} = 8.45c_*, \quad E_{2R}^{(0)} = 4.20c_*, \quad E_{1I}^{(0)} = -0.0220c_*, \quad E_{2I}^{(0)} = -0.0103c_*, \\ \nu_{1R}^{(0)} = 0.21, \quad \nu_{2R}^{(0)} = 0.11, \quad \nu_{1I}^{(0)} = -0.002, \quad \nu_{2I}^{(0)} = -0.001, \quad G_{12R}^{(0)} = 1.24c_*, \\ G_{12I}^{(0)} = -0.0072c_*, \quad h_0 = 0.005l_*, \quad S_{11}^{(E)} = 13,2s_*, \quad S_{12}^{(E)} = -4.1s_*, \quad d_{31} = -110d_*, \\ \varepsilon_{33}^{(T)} = 1160\varepsilon_*, \quad h_1 = 0.002l_*, \quad c_* = 10^{10}[Pa], \quad s_* = 10^{-12}[m^2/N], \quad l_1 = l_*, \quad l_2 = 1.2l_*, \\ d_* = 10^{-12}[C/N], \quad \varepsilon_* = 8.84194 \cdot 10^{-12}[F/m].$$

При этом для нечеткого интервала $\tilde{\rho}_*$ из (2) с применением правил нечетко-интервальной арифметики следует выражение

$$\tilde{\rho}_* = (34.47 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}, 34.99 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}, 35.38 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}, 36.15 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}).$$

Функция принадлежности для нечетко-множественной оценки $\tilde{\omega}_{11}$, рассчитанной применительно в этому случаю неопределенности исходных параметров на основе применения описанной методики, представлена на рис. 1. Полученная оценка описывает показатели степени уверенности в том, что низшая резонансная частота колебаний панели будет принимать соответствующие значения при учете задаваемых уровней погрешностей в экспериментальных величинах экзогенных параметров рассматриваемой модели.

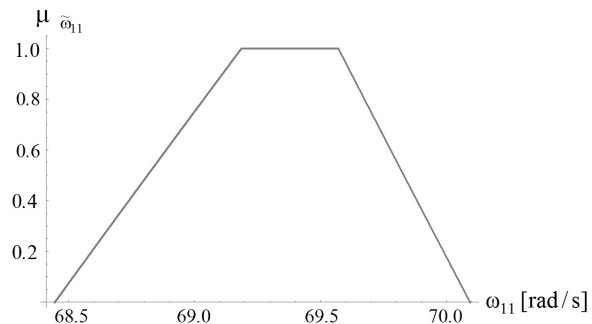


Рис. 1. Функция принадлежности для нечетко-множественной оценки $\tilde{\omega}_{11}$ низшей резонансной частоты упругих колебаний панели

Выводы. В результате представленных исследований осуществлена разработка численно-аналитической методики получения нечетко-множественных оценок для значений резонансных частот колебаний интеллектуальной конструкции с эффектом самонастраивающегося виброгашения в виде трехслойной цилиндрической панели малой кривизны из внутреннего слоя вязкоупругого ортотропного композиционного материала и двух внешних слоев из трансверсально-изотропной пьезокерамики, выполняющих роль датчиков и устройств активного демпфирования. В рассматриваемой модели учтены факторы неопределенности в виде разбросов величин экзогенных физико-механических и геометрических параметров. Методика анализа модели базируется на нечетко-множественном описании неопределенных экзогенных параметров модели и применении эвристического принципа обобщения для перехода к нечетко-множественным аргументам в аналитическом представлении для исследуемых резонансных частот. Описан пример реализации разработанной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Gabbert U. Smart structures and structronic systems / U. Gabbert, H. S. Tzou. – Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2001. – 384 p.
- Tani J. Intelligent material systems. Applications of functional materials / J. Tani, T. Takagi, J. Qiu // Appl. Mech. Rev. – 1998. – Vol. 51, N 8. – P. 505–521.
- Tzou H. S. Dynamics and control of distributed systems / H. S. Tzou, L. A. Bergman. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.
- Карнаухов В.Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428 с.
- Карнаухова Т.В. Активное демпфирование вынужденных резонансных колебаний полой вязкоупругой композитной цилиндрической панели при действии на нее неизвестной механической нагрузки / Т.В. Карнаухова // Акустичний вісник. – 2008. – Т. 11, № 4. – С. 24–30.
- Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
- Kandasamy W.B.V. Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009.
- Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- Ban A.I. Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets and Systems. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.
- Болнокин В.Е. Оценки влияния нечеткости экзогенных параметров в модели обобщенного плоского напряженного состояния изотропной пластины с эллиптическим упругим включением / В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 122–136.
- Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points / V.G. Vyskub, E.I. Mutina, S.V. Storozhev, V.I. Storozhev // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 537 – P. 022013 – IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013.
- Капитонов А.М. Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства / А.М. Капитонов, В.Е. Редькин. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2013. – 532 с.

Поступила в редакцию 02.12.2019 г.

METHOD OF ANALYSIS OF UNCERTAINTY FACTORS IN THE MODEL OF RESONANT VIBRATIONS OF THREE-LAYER COMPOSITE CYLINDRICAL PANELS

S.A. Priyenko, S.V. Storozhev, V.A. Shaldyrvan, Tran Ba Le Hoang

The results of the development and testing of a numerical-analytical method for obtaining of estimates for the phase velocities of normal shear elastic waves from an arbitrary spectrum mode for a waveguide in the form of a layer of a functional gradient transversely isotropic material taking into account of the scatter errors of exogenous physical-mechanical and geometric parameters are presented. The technique on a fuzzy-sets description of uncertain parameters and on the use of a modified form of the heuristic principle of generalization in the process of transition to fuzzy-set arguments in the obtained analytical representation for the phase velocities under study is based.

Keywords: three-layer cylindrical panels, external transversely isotropic piezoelectric layers, internal orthotropic composite layer, resonant vibration frequencies, uncertain physical-mechanical and geometric parameters, experimental data scatter errors, technological scatter accounting, fuzzy-set technique, heuristic generalization principle.

Приймєнко Сергєй Александрович

Кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории упругости и вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: pr@donnu.ru

Priyenko Sergey Alexandrovich,

Candidate of physico-mathematical sciences, docent, associate professor of department of elasticity theory and computational mathematics of Donetsk national university, Donetsk, DPR.
E-mail: pr@donnu.ru

Сторожев Сергей Валериевич

Кандидат экономических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и информатики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР.
E-mail: sergeys@i.ua

Шалдырван Валерий Анатольевич

Доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической физики физико-технического факультета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: emis1963@gmail.com

Чан Ба Ле Хоанг

Аспирант ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» МОН РФ, г. Москва, РФ.
E-mail: nguyenuocshi@yahoo.com

Storozhev Sergey Valerievich,

candidate of economic sciences, docent, associate professor of department of high mathematics and informatics of Donbas national academy of civil engineering and architecture, Makeevka, DPR.
E-mail: sergeys@i.ua

Shaldyrvan Valeriy Anatolievich

doctor of physico-mathematical sciences, full professor, professor of department of mathematical physics of Donetsk national university, Donetsk, DPR.
E-mail: emis1963@gmail.com

Tran Ba Le Hoang

post-graduate student of National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow, Russia.
E-mail: nguyenuocshi@yahoo.com

УДК 539.376

ПОЛЗУЧЕСТЬ МАССИВОВ АНИЗОТРОПНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД С ВЫРАБОТКАМИ УСЛОЖНЕННОЙ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ

© 2019. *В.И. Сторожев, Р.Н. Нескородев*

В работе предложено решение задач ползучести массивов анизотропных горных пород с протяженными горизонтальными выработками сложной формы сечения. Выработки находятся в условиях обобщенной плоской деформации. Для построения решения предложена методика, основанная на алгоритме построения контуров сложной конфигурации в виде составленных из эллиптических или круговых дуг граничных контуров пересечений или объединений выпуклых областей. Учет эффектов ползучести осуществлен при помощи приема преобразования интегральных уравнений состояния в задачах вязкоупругости к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени. В качестве примера исследовано напряженно-деформированное состояние вблизи выработки с сечением в виде свода и с сечением усложненной формы, контур которого составлен из четырех эллиптических дуг.

Ключевые слова: анизотропный горный массив, горизонтальная выработка сложного сечения, напряженно-деформированное состояние, эффекты ползучести геоматериалов.

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния вокруг подземных горизонтальных выработок, включая определение давления горных пород, действующего на крепь, является одной из основных задач практики горного дела. Сложность данной задачи объясняется разнообразием свойств горных пород, условиями проведения и залегания самих выработок, геометрией выработок и рядом других факторов. Для решения таких задач применительно к массивам с выработками сложной геометрии используются как численные (преимущественно, метод конечных элементов) [1, 2], так и численно-аналитические [3] методы. Учет влияния фактора времени на напряжения и перемещения в изотропном горном массиве вокруг горизонтальных выработок, имеющих различные контуры поперечного сечения, в частности эллиптический, квадратный и в виде свода, рассмотрен в работе [4].

Для исследования плоского напряженного состояния вблизи выработок с сечениями усложненного очертания в работе [5] предложен метод построения гладких выпуклых макроконтуров произвольной конфигурации с задаваемой кривизной в любой их точке. Этот метод основан на аппроксимации граничных контуров сечений выработок криволинейными элементами, в качестве которых выбираются дуги окружностей с гладким соединением.

В работе [6] предложен алгоритм, позволяющий строить границы областей сложной конфигурации на основе двух базовых контуров: макроконтур и эллиптического контура. С его применением, рассматривая пересечения нескольких областей, ограниченных макроконтурами, а также некоторого необходимого количества эллиптических областей, на основе введения характеристических уравнений можно получить области любой заданной конфигурации, в том числе с невыпуклыми контурами.

В работе [7] применительно к проблемам ползучести анизотропных горных массивов с горизонтальными выработками предложена методика учета свойств геоматериалов деформироваться во времени, базирующаяся на преобразовании интегральных уравнений состояния в задачах деформирования вязкоупругих горных пород к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных

характеристик материалов от времени. Предложенный подход не требует построения аналитических представлений ядер ползучести и релаксации в специальной форме. С использованием описанной методики в работе [8] исследовано вязкоупругое напряженное состояние массива анизотропных горных пород с протяженной выработкой эллиптического сечения.

В данной работе с использованием перечисленных методик [5–8] исследуется вязкоупругое напряженно-деформированное состояние анизотропных массивов горных пород с выработками усложненных форм сечения.

Основные соотношения рассматриваемой краевой задачи. Рассматривается упругое равновесие анизотропного тела – полубесконечного геомассива, отнесенного к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, связываемой с центром сечения горной выработки, расположенной на глубине H от граничной (дневной) поверхности массива. Массив рассматривается как нижнее полупространство, в котором ось Ox_2 полагается ориентированной вертикально вверх, а плоскость Ox_1x_3 параллельна дневной граничной плоскости. В момент создания в нем выработки (время $t=0$) упругие постоянные исследуемого материала характеризуются матрицами \mathbf{A} (модулей упругости) или \mathbf{a} (коэффициентов деформации). Решение задачи о напряженном состоянии массива с выработкой для начального момента времени строится в рамках модели идеально упругого деформирования.

При дальнейшей эксплуатации выработки (для моментов времени $t > 0$) материал в ее окрестности продолжает деформироваться. Для описания этого процесса может быть использована теория вязкоупругости. Для этого может быть применен и альтернативный подход с использованием уравнений закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени. Система основных соотношений рассматриваемой модели включает дифференциальные уравнения равновесия

$$\partial_1 s_1 + \partial_2 s_6 + \partial_3 s_5 + X = 0, \quad \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2 + \partial_3 s_4 + Y = 0, \quad \partial_1 s_5 + \partial_2 s_4 + \partial_3 s_3 + Z = 0; \quad (1)$$

уравнения связи между деформациями e_j и перемещениями U_i

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_1 U_1, \quad e_2 = \partial_2 U_2, \quad e_3 = \partial_3 U_3, \quad e_4 = \partial_2 U_3 + \partial_3 U_2, \\ e_5 &= \partial_1 U_3 + \partial_3 U_1, \quad e_6 = \partial_1 U_2 + \partial_2 U_1; \end{aligned} \quad (2)$$

тензорные определяющие соотношения

$$e_m = \bar{a}_{mk} s_k, \quad \bar{a}_{mk} = a_{mk} (1 + p_{mk}^*) \quad (m, k = \overline{1,6}); \quad (3)$$

$$s_m = \bar{A}_{mk} e_k, \quad \bar{A}_{mk} = A_{mk} (1 - r_{mk}^*) \quad (m, k = \overline{1,6}), \quad (4)$$

в которых s_m – компоненты вектора механических напряжений $\bar{s} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$, а также краевые условия, задаваемые на граничной поверхности выработки

$$s_1 n_1 + s_6 n_2 + s_5 n_3 = P_1, \quad s_6 n_1 + s_2 n_2 + s_4 n_3 = P_2, \quad s_5 n_1 + s_4 n_2 + s_3 n_3 = P_3. \quad (5)$$

На основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида в работе [7] предложены соотношения для построения элементов матрицы уравнений состояния (3) и приведены упругие постоянные a_{mk} и

реологические характеристики, определяющие p_{mk}^* для изотропных и трансропных горных пород алевролит и песчаник. В частности, в случае для трансропного материала эти соотношения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} &= \frac{1}{\bar{E}_1} = \frac{1}{E_1} (1 + p_{E1}^*) = \frac{1}{E_1} p_{E1}(t), & \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} &= -\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} = -\frac{\nu_1}{E_1} \left[1 + \frac{1}{2\nu_1} (p_{E1} - 1) \right], \\ \bar{a}_{33} &= \frac{1}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_2} \left[1 + \frac{E_2}{E_1} (p_{E1} - 1) \right], \\ \bar{a}_{13} = \bar{a}_{31} = \bar{a}_{32} = \bar{a}_{23} &= -\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = -\frac{\nu_2}{E_2} \left[1 + \frac{E_2}{2\nu_2 E_1} (p_{E1} - 1) \right], \\ \bar{a}_{44} = \bar{a}_{55} &= \frac{1}{G_2}, & \bar{a}_{66} &= \frac{1}{\bar{G}_1} = \frac{1}{G_1} \left[1 + \frac{3}{2(1 + \nu_1)} (p_{E1} - 1) \right].\end{aligned}$$

Здесь $p_{E1}(t)$ – экспериментально найденная кривая ползучести [7].

С использованием матрицы $\bar{a}_{mk} = a_{mk} (1 + p_{mk}^*) = a_{mk} p_{mk}(t) = \mathbf{P}(t)$ в уравнениях состояния (3) и описанной в [7] связи матриц $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ может быть построена матрица $\bar{A}_{mk} = A_{mk} (1 - r_{mk}^*) = A_{mk} r_{mk}(t) = \mathbf{R}(t)$ в уравнениях состояния (4).

В работе [9] показано, что если плоскость изотропии материала массива ориентирована под углом φ к дневной поверхности, ось выработки направлена под углом ψ к плоскости изотропии, а система координат $Ox_1x_2x_3$ связана с поперечным сечением выработки, то уравнения состояния (3) и (4) в координатах $Ox_1x_2x_3$ будут иметь форму, отвечающую уравнениям для материала, обладающего общей анизотропией.

На основе приведенных соотношений может быть предложен метод решения задач вязкоупругости для случая обобщенной плоской деформации рассматриваемого анизотропного массива горных пород с протяженными выработками сложного поперечного сечения.

Разрешающая система для задачи обобщенной плоской деформации горного массива с горизонтальной выработкой. Рассматривается протяженная горная выработка с осью, ориентированной вдоль координатной оси Ox_3 . Полагается, что окрестность выработки находится в состоянии обобщенной плоской деформации и плоскостью деформирования является плоскость Ox_1x_2 . В этом случае уравнения (2) принимают вид

$$e_1 = \partial_1 U_1, \quad e_2 = \partial_2 U_2, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = \partial_2 U_3, \quad e_5 = \partial_1 U_3, \quad e_6 = \partial_1 U_2 + \partial_2 U_1. \quad (6)$$

Существуют различные факторы, влияющие на формирование напряженного состояния массивов. В данной работе рассматриваются силы гравитации (силы тяжести) горных пород. Во введенной системе координат компоненты вектора объемных сил принимают вид [10] $X = Z = 0$, $Y = -\rho g$, где g – ускорение силы тяжести, а ρ – плотность однородного породного массива. В этом случае уравнения равновесия (1) принимают вид

$$\partial_1 s_1 + \partial_2 s_6 = 0, \quad \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2 = \rho g, \quad \partial_1 s_5 + \partial_2 s_4 = 0. \quad (7)$$

При подстановке уравнений состояния (4) в уравнения равновесия (7) с учетом соотношений (6) может быть получена система дифференциальных уравнений теории вязкоупругости относительно компонент функций перемещений $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3]$

$$\bar{L}_{11}U_1 + \bar{L}_{12}U_2 + \bar{L}_{13}U_3 = 0, \quad \bar{L}_{21}U_1 + \bar{L}_{22}U_2 + \bar{L}_{23}U_3 = \rho g, \quad \bar{L}_{31}U_1 + \bar{L}_{32}U_2 + \bar{L}_{33}U_3 = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11} &= \bar{A}_{11}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{16}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{66}\partial_2^2, & \bar{L}_{22} &= \bar{A}_{66}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{26}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{22}\partial_2^2, \\ \bar{L}_{33} &= \bar{A}_{55}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{45}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{44}\partial_2^2, & \bar{L}_{12} &= \bar{L}_{21} = \bar{A}_{16}\partial_1^2 + (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{62}\partial_2^2, \\ \bar{L}_{13} &= \bar{L}_{31} = \bar{A}_{15}\partial_1^2 + (\bar{A}_{14} + \bar{A}_{65})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{64}\partial_2^2, & \bar{L}_{23} &= \bar{L}_{32} = \bar{A}_{65}\partial_1^2 + (\bar{A}_{64} + \bar{A}_{25})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{24}\partial_2^2, \end{aligned} \quad (9)$$

в которой операторы \bar{A}_{mk} представляются соотношениями (4). Получаемые дифференциальные уравнения (8) описывают поведение вязкоупругой среды при плоской деформации в самом общем случае анизотропии.

При дальнейшем анализе полагается, что напряженное состояние горного массива включает начальное поле смещений и напряжений в нетронутым массиве и дополнительное поле смещений и напряжений, возникающих за счет появления выработки.

Методика построения граничных контуров сечений сложной формы с использованием характеристических уравнений области. Для формирования контуров сечений выработок сложного очертания используется алгоритм определения принадлежности произвольно взятой точки M с координатами (x_1, x_2) к рассматриваемой области на базе построения специальной характеристической функции. Под характеристической функцией этого типа будем понимать функцию $\omega(x_1, x_2)$, которая принимает положительные значения в области Σ , нулевые значения на границе $\partial\Sigma$ и отрицательные значения в области $\bar{\Sigma}$, являющейся дополнением области Σ . В качестве примера такого алгоритма может быть рассмотрено построение характеристической функции для бесконечной плоской области Σ , имеющей вырез, формируемый с использованием заданного макроконтур и эллиптических контуров. Символ Σ рассматривается как имя функции, которая принимает значение, равное 1 в рассматриваемой области, и значение, равное 0 – вне ее. Функции такого рода называют двузначными предикатами или характеристическими функциями областей [11]. Так как значение предикатов есть либо 0, либо 1, то их можно использовать в качестве аргументов булевых функций. С использованием методов алгебры логики, может быть построен предикат практически для любого геометрического объекта, составленного из отрезков известных линий.

Переход от предикатного описания геометрических объектов к построению их уравнений осуществляется путем использования R-функций [11]. Построение предикатного уравнения, определяющего заданный объект, связано с анализом формирования этого объекта из других, более простых (опорных) элементов. В качестве опорных элементов, из которых формируется область Σ , могут выбираться полуплоскости, внешности эллиптических контуров, а также полуплоскости с вырезами в виде полуэллипсов (рис. 1). Как частный случай, вместо эллиптических могут использоваться круговые контуры.

Иллюстрируя возможности построения характеристических функций, в частности, можно показать, что представление

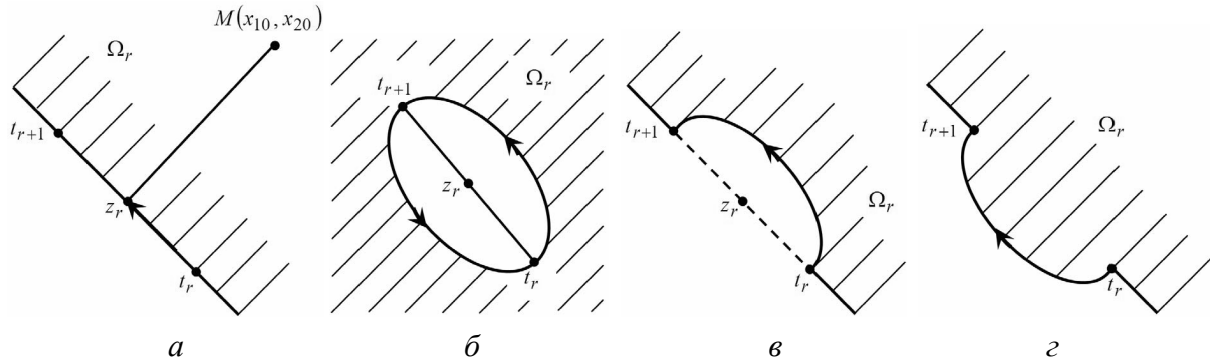


Рис. 1

$$\omega_r^1(x_1, x_2) = (x_{2,r+1} - x_{2r})x_1 + (x_{1r} - x_{1,r+1})x_2 + x_{1,r+1}x_{2r} - x_{1r}x_{2,r+1} = 0 \quad (9)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $t_r = x_{1r} + ix_{2r}$ и $t_{r+1} = x_{1,r+1} + ix_{2,r+1}$.

Действительно, пусть точка M с координатами (x_{10}, x_{20}) лежит на нормали к прямой $t_r t_{r+1}$ на расстоянии $\alpha = |z_r - M|$ от середины отрезка $z_r = (t_r + t_{r+1})/2$. Полагается, что обход контура осуществляется в направлении от точки t_r к точке t_{r+1} так, что область Σ_r остается справа. Тогда координаты (x_{10}, x_{20}) точки M вычисляются по формулам:

$$x_{10} = [x_{1r} + x_{1,r+1} + \alpha(x_{2,r+1} - x_{2r})]/2, \quad x_{20} = [x_{2r} + x_{2,r+1} - \alpha(x_{1,r+1} - x_{1r})]/2. \quad (10)$$

При подстановке представления (10) в (9), можно получить значение функции (9) в точке M :

$$\omega_r^1(x_{10}, x_{20}) = \frac{\alpha}{2} [(x_{2,r+1} - x_{2r})^2 + (x_{1,r+1} - x_{1r})^2] > 0. \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует, что функция $\omega_r^1(x_1, x_2) > 0$ в области справа от прямой $t_r t_{r+1}$ и $\omega_r^1(x_1, x_2) < 0$ слева от нее. Это дает основание рассматривать функцию $\omega_r^1(x_1, x_2)$ как характеристическую для области, изображенной на рис. 1, а.

При построении характеристической функции для области сечения выработки с представленным на рис. 1, б эллиптическим контуром используется соотношение

$$t = z_r + R_r \sigma + m_r / \sigma, \quad (12)$$

где

$$\sigma = \exp(i\theta), \quad R_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{4}(1 + \beta_r), \quad m_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{4}(1 - \beta_r),$$

$\beta_r = b_r / a_r$ – безразмерная величина, $a_r = |t_r - t_{r+1}|/2$, b_r – полуоси эллипса.

На основании соотношения (12) определяется функция, отображающая внешность единичной окружности на внешность эллипса:

$$z = z_r + R_r \zeta + m_r / \zeta \quad (|\zeta| \geq 1). \quad (13)$$

Разрешая уравнение (13) относительно переменной ζ , можно найти

$$\zeta_{1,2} = \frac{z - z_r \pm \sqrt{(z - z_r)^2 - 4R_r m_r}}{2R_r}. \quad (14)$$

Из соотношений (14) следует, что для произвольной точки $z_0 = x_{10} + ix_{20}$ значение одной из величин $|\zeta_1(z_0)|$ или $|\zeta_2(z_0)|$ будет больше единицы, если она лежит вне эллипса и равно единице, если она лежит на контуре эллипса. Если же точка z_0 лежит внутри эллиптического контура, то обе величины $|\zeta_1(z_0)|$ и $|\zeta_2(z_0)|$ будут меньше единицы. На основании вышесказанного можно сделать заключение, что функция

$$\omega_r^2(x_1, x_2) = \left[|\zeta_1| + |\zeta_2| + \left| |\zeta_1| - |\zeta_2| \right| \right] / 2 - 1 = \max \{ |\zeta_1|, |\zeta_2| \} - 1 \quad (15)$$

является характеристической для области, изображенной на рис. 1, б.

Отметим, что функция

$$\omega_r^1(z) = -2 \operatorname{Re} i(\zeta_1 + \zeta_2) \quad (16)$$

может быть также использована для определения принадлежности точки z_0 к области справа от прямой $t_r t_{r+1}$ ($\omega_r^1(x_1, x_2) > 0$) или слева от нее ($\omega_r^1(x_1, x_2) < 0$). Тем самым, функции (9) и (16) являются характеристическими для одной и той же области.

Несложно убедиться в том, что функция

$$\omega_r^3 = [\omega_r^1 + \omega_r^2 - |\omega_r^1 + \omega_r^2|] / 2 = \min \{ \omega_r^1, \omega_r^2 \} \quad (17)$$

является характеристической для области, изображенной на рис. 1, в, а функция

$$\omega_r^4 = \left[-\omega_r^1 + \omega_r^2 + \left| -\omega_r^1 - \omega_r^2 \right| \right] / 2 = \max \{ -\omega_r^1, \omega_r^2 \} \quad (18)$$

будет характеристической для области, изображенной на рис. 1, г.

Характеристические функции (15)–(18) могут быть использованы как опорные при построении характеристических функций областей сечения выработок сложной формы.

При введении обозначения Σ_r для заштрихованных областей, изображенных на рис. 1, а также при определении двузначного предиката $S_2(\omega_r^k)$ соотношением [12]

$$S_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

может быть введено понятие определения области Σ_r уравнениями $S_2(\omega_r^k)$ ($k = \overline{1, 4}$).

Для построения характеристической функции области сложной формы предлагается метод, основанный на использовании R-функций. Конечную замкнутую область D_k на рис. 2, а можно построить как пересечение (конъюнкцию) опорных областей Σ_r ($r = \overline{1, n}$), изображенных на рис. 1, и задать логической формулой

$$D_k = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \dots \cap \Sigma_n. \quad (20)$$

Замкнутую область T_p вне отверстия на рис. 2, б можно сформировать как объединение (дизъюнкцию) опорных областей Σ_r ($r = \overline{1, m}$), изображенных на рис. 1. Соответствующая формула имеет вид

$$T_p = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_m. \quad (21)$$

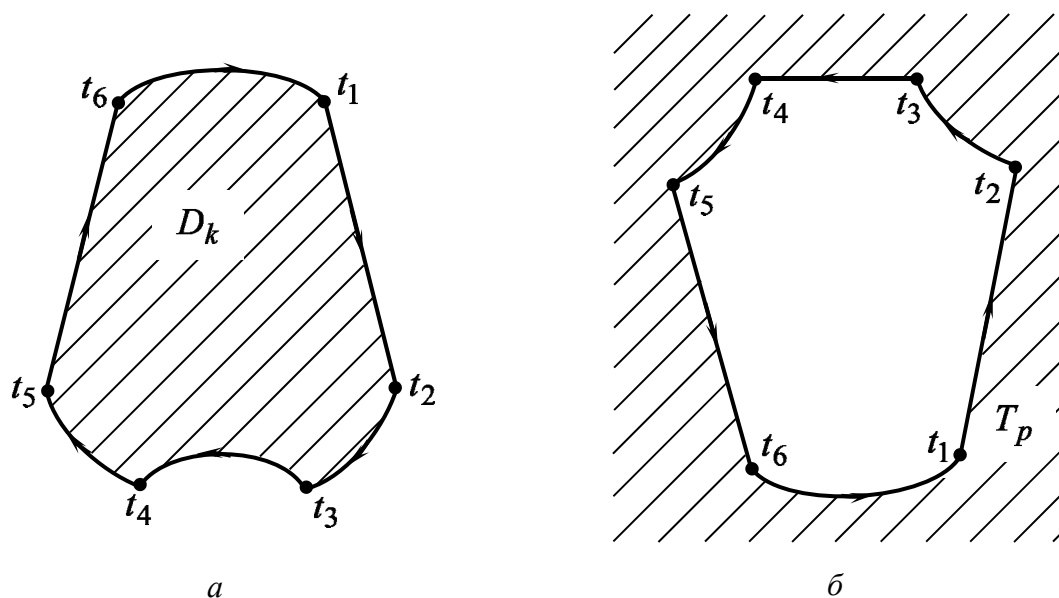


Рис. 2

Предикатные уравнения приведенных областей D_k и T_p могут быть получены на основе формальной замены символов конъюнкции в (20) и дизъюнкции в (21) символами соответствующих элементарных R-функций, а символов Σ_r – двузначными предикатами $S_2(\omega_r)$:

$$D_k = S_2(\varphi_k^1) = S_2(\omega_1) \wedge_1 S_2(\omega_2) \wedge_1 \dots \wedge_1 S_2(\omega_n), \quad (22)$$

$$T_p = S_2(\varphi_k^2) = S_2(\omega_1) \vee_1 S_2(\omega_2) \vee_1 \dots \vee_1 S_2(\omega_m). \quad (23)$$

Для этих предикатных уравнений булевы функции (20) и (21) являются сопровождающими [11, 12]. Уравнения (22) и (23) дают возможность представить описание областей D_k и T_p в виде неравенств [11, 12]

$$\varphi_k^1 = \omega_1 \wedge_1 \omega_2 \wedge_1 \dots \wedge_1 \omega_n \geq 0, \quad (24)$$

$$\varphi_k^2 = \omega_1 \vee_1 \omega_2 \vee_1 \dots \vee_1 \omega_m \geq 0, \quad (25)$$

причем равенство нулю достигается лишь на границе области и поэтому уравнения

$$\varphi_k^1 = \omega_1 \wedge_1 \omega_2 \wedge_1 \dots \wedge_1 \omega_n = 0, \quad \varphi_k^2 = \omega_1 \vee_1 \omega_2 \vee_1 \dots \vee_1 \omega_m = 0 \quad (26)$$

будут уравнениями границ областей D_k и T_p соответственно. Отметим, что в качестве элементарных R-функций здесь использованы функции [11]:

$$Y_1 \equiv x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|) \equiv \min\{x_1, x_2\},$$

$$Y_2 \equiv x_1 \vee_1 x_2 \equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) \equiv \max\{x_1, x_2\}. \quad (27)$$

Построение предикатных уравнений для областей более сложного вида, чем области D_k и T_p , сводится к объединению (дизъюнкции) областей вида D_k , и к пересечению (конъюнкции) областей вида T_p . Если внешняя область Σ формируется из областей вида T_p ($p = \overline{1, k}$), то окончательное уравнение этой области запишется в форме

$$\omega = \varphi_1^2 \wedge_1 \varphi_2^2 \wedge_1 \dots \wedge_1 \varphi_k^2 \geq 0, \quad (28)$$

где φ_p^2 предикатные уравнения областей T_p ($p = \overline{1, k}$), построенные выше.

Приведенный алгоритм построения характеристических уравнений позволяет автоматизировать построение контуров областей сложной формы. На основе описанной методики разработано специализированное программное приложение для построения областей сложной конфигурации на основе двух базовых контуров – макроконтур и эллиптического контура. Путем пересечения нескольких макроконтуров, а также необходимого количества эллипсов при использовании характеристических уравнений, могут быть получены области любой заданной конфигурации, в том числе с невыпуклым контуром.

Решение задачи о напряженном состоянии около выработки. Начальное напряженно-деформированное состояние нетронутого массива в рамках гипотезы о завершении в нем процессов ползучести [4] определяется из соотношений [9]

$$U_i^0 = \alpha_i \rho g (x_2^2 - Hx_2) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad s_k^0 = \tau_k \rho g (x_2 - H) \quad (p = \overline{1, 6}),$$

где величины α_i , τ_k зависят от упругих постоянных материала.

В последующем, как полагается, свойства ползучести горного массива проявляются лишь при формировании поля дополнительных напряжений и перемещений, которое в произвольный момент времени определяется на основе алгоритма решения упругой задачи.

Задача о напряженном состоянии массива анизотропных горных пород с выработкой [9], приводится к определению в областях S_j функций $\Phi_j(z_j)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Для каждого элемента L_r контура границы вводятся соответствующие комплексные потенциалы

$$\Phi_{jr} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rkj} / \zeta_{jr}^k.$$

Если конструируемые на основе описанной методики контуры выработок содержит N элементов, то комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)$, будут представлены в виде суммы отдельных потенциалов, связанных с каждым из элементов

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{r=1}^N \Phi_{jr} = \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rkj} / \zeta_{jr}^k, \quad (29)$$

и с их использованием нужно удовлетворять граничным условиям на каждом из

контурных элементов. Для массива с неподкрепленными выработками условия на r -м элементе имеют вид [5, 9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 a_{jr} \Phi'_j = P_{1r}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 b_{jr} \Phi'_j = P_{2r}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 c_{jr} \Phi'_j = P_{3r}. \quad (30)$$

Решение задачи о напряженно – деформированном состоянии массива горных пород с выработками сводится к определению комплексных коэффициентов $\alpha_{rkj} = \alpha_{rkj}^1 + i\alpha_{rkj}^2$ функций (29) из граничных условий (30). Приведение этой задачи к решению системы алгебраических уравнений реализовано с применением метода наименьших квадратов [5, 9]. Перемещения и напряжения, возникающие в массиве, определяются из соотношений [9]

$$U_i = U_i^0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{ij} \Phi_j(z_j) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad s_k = s_k^0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 P_{kj} \Phi'_j(z_j) \quad (k = \overline{1, 6}).$$

Напряжения, действующие на контуре или вблизи контура выработки на площадках, касательных и нормальных к нему, вычисляются по известным формулам [9].

Результаты численных исследований. Расчеты, связанные с реализацией разработанного подхода, проводились для массивов из изотропной (песчаник1) и трансформных (песчаник2, алевролит2) горных пород, упругие и реологические постоянные которых даны в работе [7]. При вычислениях считалось, что выработка находится на глубине $H = 1000$ м.

Горизонтальная выработка сводчатого сечения с расширением в нижней части. Геометрические параметры поперечного контура сечения (рис. 3) возьмем такими:

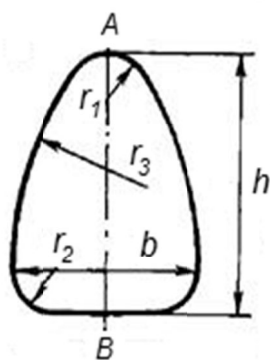


Рис. 3

$r_1 = r_2 = 0.25b$, $r_3 = 2b$, $h = 1.4b$, $b = 4$ м. В работе [4] при помощи отображающей функции для такого контура исследовано влияние свойств ползучести изотропного песчаника на нормальные перемещения в точках контура выработки. Свойства ползучести изотропных горных пород в рассматриваемом случае не влияют на напряженное состояние в окрестности выработки.

В данной работе для построения контура и нахождения перемещений и напряжений использована методика, изложенная в работе [5]. Установлено, что наибольшие перемещения возникают в кровле (точка А) и в почве (точка В). В табл. 1 приведены нормальные перемещения U_n [м] в этих точках.

Для сравнения в таблице приводятся также значения перемещений, полученные в работе [4]. Вычисления проводились для начального момента времени $t = 0$, соответствующего исходному упругому состоянию, для момента времени $t = 120$ часов, и для времени установившейся стабилизации процесса ползучести, которое для песчаника составляет $t_{st} = 860$ часов.

Таблица 1

Точки на контуре	t , час					
	0		120		860	
	U_n	U_n [4]	U_n	U_n [4]	U_n	U_n [4]
А	-0.0042	-0.0043	-0.0054	-0.0051	-0.0064	-0.0063
В	-0.0062	-0.0060	-0.0077	-0.0070	-0.0089	-0.0083

Как видно, результаты, полученные по предложенной методике, хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами.

На рис. 4 для песчаника² и на рис. 5 для алевролита² представлены эпюры распределения напряжений $s_{\theta}/(\rho g H)$ на контуре сводчатого сечения в начальный момент времени (сплошная линия) и в моменты времени $t = t_{st}$ (штриховая линия), которые составляют для песчаника – $t_{st} = 860$ часов, для алевролита – $t_{st} = 600$ ч.

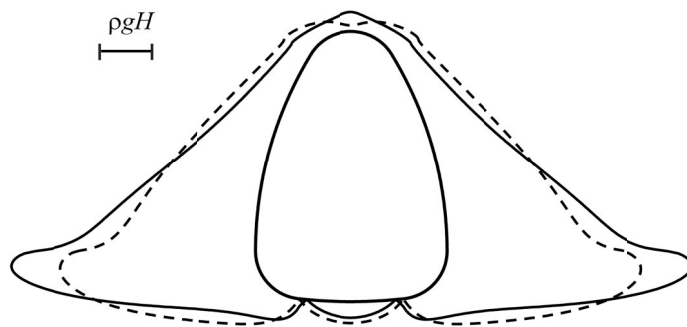


Рис. 4

Материал песчаник² является довольно жестким, поэтому регистрируемое перераспределение напряжений на контуре выработки с течением времени оказывается не существенным. Однако, в почве возникает зона растягивающих напряжений, что может привести к разрушению пород в этой зоне. Этот факт необходимо учитывать при проведении горных выработок.

В материале алевролит² свойства ползучести проявляются в большей степени, и из рис. 5 видно, что с течением времени происходит более равномерное перераспределение концентрации напряжений в сторону уменьшения абсолютных значений. В отличие от песчаника зоны действия положительных напряжений в алевролите с выработкой рассмотренного сечения не возникают.

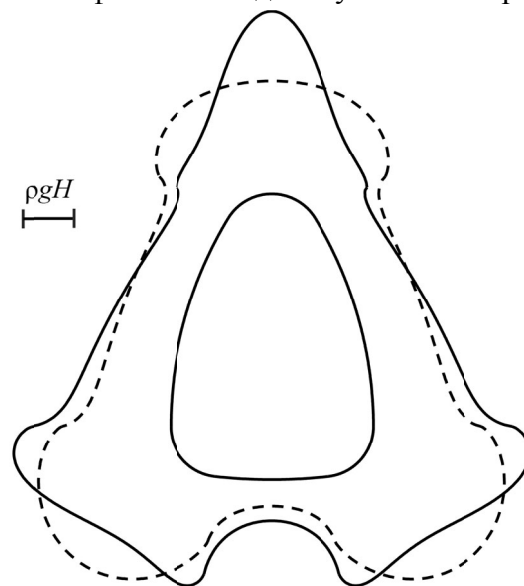


Рис. 5

Горизонтальная выработка с сечением, составленным из четырех эллиптических дуг. В работе [6] в качестве примера рассмотрена выработка, составленная из двух одинаковых эллиптических контуров, которые соединены между собой выработкой с “почти прямолинейными” границами в виде дуг эллипсов очень малой кривизны, расстояние между которыми составляют $h = 1$ м (рис. 6). Меньшая полуось вертикального эллипса $a = 1.5$ м, а большая $b = 2$ м. Расстояние между центрами боковых эллиптических полостей $L = 6$ м.

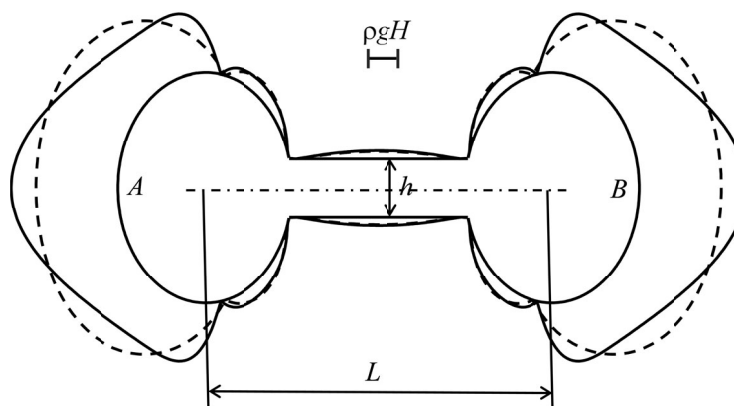


Рис. 6

На рис. 6 представлены эпюры напряжений $|s_{\theta}/(\rho g H)|$, возникающих на контуре выработки для материала алевро-

лит2. Сплошная линия соответствует начальному упругому состоянию ($t=0$), а штриховая – установившемуся ($t=600$ ч.). Максимальные по модулю значения напряжений возникают в боковых точках выработки (точки A и B) и равны, соответственно, $s_{\theta}|_{t=0} = -3.7017 \rho g H$ и $s_{\theta}|_{t=600} = -2.9203 \rho g H$. Расчеты показывают, что с течением времени максимальные сжимающие напряжения уменьшаются по модулю. Можно также отметить, что на отрезках малой кривизны, соединяющих эллиптические контуры, возникают зоны растягивающих напряжений, которые со временем незначительно уменьшаются ($s_{\theta}|_{t=0} = 0.2866 \rho g H$, $s_{\theta}|_{t=600} = 0.2542 \rho g H$).

Исследования также показали, что с увеличением расстояния между эллиптическими выработками напряжения, как в боковых точках, так и центральных точках прямолинейных элементов, растут.

Выводы. В рамках разработки методики исследования ползучести массивов анизотропных горных пород с выработками усложненной формы сечения при помощи методов R-функций и алгебры логики построены характеристические уравнения для областей сечений выработок, которые могут быть ограничены прямолинейными отрезками и частями эллиптических контуров. Алгоритм нахождения характеристических уравнений позволяет автоматизировать построение границ областей сечений выработок сложной формы. Предложенная методика позволяет изучить эффекты ползучести горных пород вблизи горизонтальных протяженных выработок, имеющих сложную форму поперечного сечения. Проведен количественный и качественный анализ полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кургузов В. Д. Напряженно-деформированное состояние массива горных пород, ослабленного квадратной выработкой / В.Д. Кургузов // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8. № 5. – С. 81-93.
2. Пример определения безопасной глубины заложения горизонтальной выработки сложного сечения / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, С. Л. Шолудько, А. В. Соловьев // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архит. – 2013. – Вып. 33(52). – С. 6-12.
3. Калоеров С.А. Напряженное состояние массива горных пород с выработкой и разгрузочными щелями / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская, В.А. Полухин // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 28-35.
4. Ержанов Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения / Ж.С. Ержанов. – Алма-Ата: Наука, 1964. – 175 с.
5. Нескородев Р.Н. Применение способа гладкой аппроксимации криволинейных отверстий в решении задач плоской теории упругости / Р.Н. Нескородев // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – Вип. 1. – С. 81-88.
6. Нескородев Р.Н. Алгоритм построения областей сложной формы и его использование при решении задач плоской теории упругости / Р.Н. Нескородев // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – Вип. 2. – С. 84-89.
7. Нескородев Р.Н. Метод преобразования интегральных уравнений состояния к временным уравнениям закона Гука / Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – Вып. 3. – С. 10-21.
8. Нескородев Р.Н. Ползучесть анизотропных горных пород с выработками в условиях обобщенной плоской деформации / Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – Вып. 4. – С. 50-57.
9. Нескородев Н.М. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.
10. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – Киев: Наук. думка, 1968. – 887с.
11. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с.

12. Рвачев В.Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 138 с.

Поступила в редакцию 18.11.2019 г.

CREEP OF MASSIF ANISOTROPIC ROCKS WITH EXCAVATION OF THE COMPLICATED SECTION FORM

V.I. Storozhev, R.N. Neskorohev

The paper provides a solution to the problems of creep of anisotropic rocks with extensive horizontal excavations of complicated cross-sectional form. The excavations are under conditions of generalized plane deformation. To construct the solution, a technique is proposed based on the algorithm for constructing contours of complex configuration in the form of boundary contours of intersections or associations of convex regions composed of elliptical or circular arcs. The creep effects were taken into account by applying the transformation of integral equations of state in viscoelastic problems to the equations of Hooke's law with parametric time-dependent deformation characteristics of materials. В качестве примера исследовано напряженно-деформированное состояние вблизи выработки с сечением в виде свода и с сечением усложненной формы, контур которого составлен из четырех эллиптических дуг.

Keywords: anisotropic massif, horizontal excavation of complicated sections, stress-strain state, creep effects of geomaterials.

Сторожев Валерий Иванович

Доктор технических наук, профессор;
профессор кафедры теории упругости и
вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий
национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: stvi@i.ua

Storozhev Valery Ivanovich

Doctor of Technical Sciences, Full Professor;
Professor at the Department of Elasticity Theory
and Computational Mathematics,
Donetsk National University, Donetsk, DPR.
E-mail: stvi@i.ua

Нескороев Роман Николаевич

Кандидат физико-математических наук, доцент;
доцент кафедры теории упругости и
вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий
национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: nromn72@gmail.com

Neskorohev Roman Nikolaevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Docent, Associate Professor at the Department of
Elasticity Theory and Computational Mathematics,
Donetsk National University, Donetsk, DPR.
E-mail: nromn72@gmail.com

Х И М И Ч Е С К И Е Н А У К И

УДК 541.122: 541.132:547.288.4

КИСЛОТНО-ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФЕНОЛОВ В МИЦЕЛЛАХ ПАВ

© 2019. *Т.М. Зубарева, И.А. Белоусова, Т.С. Гайдаш, Н.Г. Разумова,
Т.М. Прокопьева, В.А. Михайлов*

Спектрофотометрическим методом исследованы кислотные свойства производных фенола в присутствии поверхностно-активных веществ. Изменение величины константы кислотной ионизации при переносе процесса ионизации из воды в мицеллы мономерного и димерного катионных детергентов практически одинаково. Уменьшение величины константы кислотной ионизации в ряду изученных фенолов максимально для динитропроизводных, минимально – для фенола. Одним из факторов, ответственным за увеличение кислотности фенолов в присутствии поверхностно-активных веществ, выступает эффект концентрирования фенолят-иона в мицеллярной псевдофазе.

Ключевые слова: производные фенола; константы кислотной ионизации; мономерные и димерные катионные поверхностно-активные вещества.

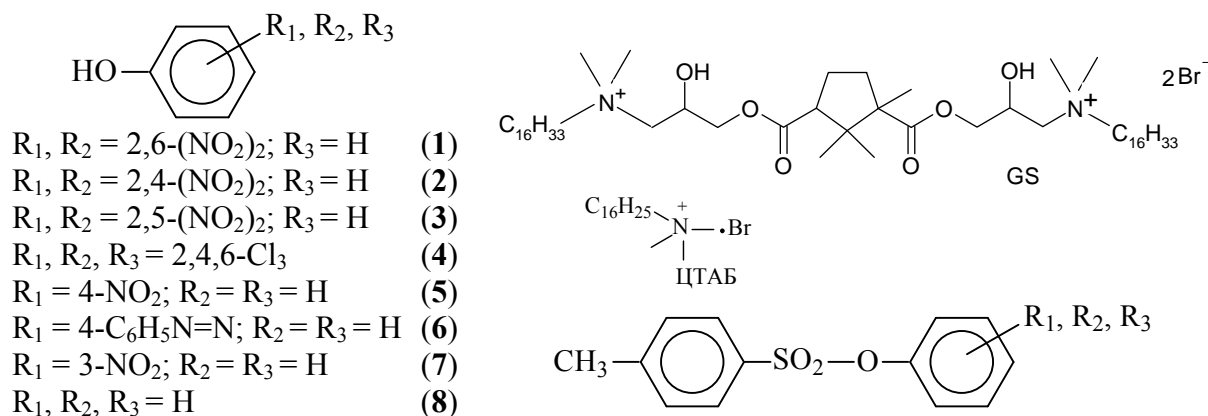
Введение. В последние годы особое внимание уделяется созданию супрамолекулярных ансамблей, основу которых составляют димерные поверхностно-активные вещества (ПАВ) [1–6]. Легкость структурной модификации димерных детергентов, способность к самоассоциации дают возможность использовать таковые как строительные блоки супрамолекулярных систем, находящих широкое применение в различных областях знаний, в том числе, и при дизайне биомиметиков [4–7]. Варьирование кислотности среды – один из факторов, который может приводить к изменению эффективности солюбилизации соединений, поверхностной активности, морфологии образующихся агрегатов и т.д.

При исследовании реакционной способности нуклеофильных реагентов по отношению к ацилсодержащим соединениям немаловажную роль играют кислотные свойства уходящей группы. Знание величин констант кислотной ионизации pK_a уходящей группы позволяет, во-первых, проводить процесс разложения субстратов в оптимальных условиях, во-вторых, оценить роль мицеллярной среды в изменении кислотных свойств и, наконец [8], детальный анализ влияния природы нуклеофила и уходящей группы дает информацию о структуре переходного состояния реакции. Однако, даже в водных растворах установление механизма реакции представляет крайне сложную задачу, поскольку не только кислотные свойства ответственны за наблюдаемые скорости и направления процесса [9–12]. Тем более в супрамолекулярных системах существенную роль играют эффекты концентрирования реагентов (гидрофобные взаимодействия), изменение полярности микроокружения, стерические факторы и др. [9–12].

В настоящей работе изучены кислотные свойства фенолов (1–8) в мицеллах бромидов цетилтриметиламмония (ЦТАБ) и димерного катионного ПАВ (Gemini surfactant, GS) на основе камфорной кислоты.

Выбор объектов исследования обусловлен следующими причинами: а) фенолы не только являются уходящими группами в процессах разложения экотоксикантов, но и сами по себе представляют высокотоксичные соединения и б) представляют собой

удобную модель для выяснения роли кислотно-основных свойств уходящей группы при широком варьировании структуры субстрата (например, арилтолуолсульфонаты).



Выбор ПАВ – мономерного (ЦТАБ) и димерного (GS) позволит оценить, как изменение микроокружения отражается на величинах pK_a .

Экспериментальная часть. Димерный катионный детергент (GS) синтезировали по известным методикам [13–14]. Состав, структура и чистота полученного ПАВ подтверждена данными ЯМР 1H спектроскопии и элементного анализа. ЦТАБ перекристаллизовывали из ацетонитрила. Фенолы (марки «хч») очищали возгонкой или перекристаллизацией из подходящих растворителей (см. табл. 1). Неорганические реактивы марки «осч» или «чда» применяли без дополнительной очистки. Для приготовления растворов использовали бидистиллированную воду. Кислотно-основные свойства фенолов определяли спектрофотометрическим методом при постоянной концентрации ПАВ и длинах волн, приведенных в табл. 1.

Физико-химические свойства фенолов

Таблица 1

№ п/п	R в PhOH	Т пл., °C ¹ [15]	Растворитель для перекристаллизации	λ , нм ²
1	2,6-(NO ₂) ₂	63–64	этанол	430
2	2,4-(NO ₂) ₂	113–113,6	сублим.	360
3	2,5-(NO ₂) ₂	108 (104)	этанол	440
4	2,4,6-Cl ₃	69,5	гексан	320
5	4-NO ₂	63	толуол	400
6	4-C ₆ H ₅ N=N	152	этанол	430
7	3-NO ₂	97	водная HCl	410
8	H	40	возгонка	235

Примечания: ¹Температура плавления фенолов.

²Аналитическая длина волны.

Методика определения pK_a спектрофотометрическим методом детально рассмотрена в работе [16]. В качестве примера на рис. 1 приведено изменение спектров поглощения 2,6-динитрофенола в присутствии [GS] = 10⁻³ моль/л (а) и 3-нитрофенола в присутствии [ЦТАБ] = 5,0·10⁻³ моль/л (б) с варьированием pH среды. Наблюдаемую константу кислотной ионизации при [ПАВ] = const рассчитывали по уравнению Хендерсона-Хассельбаха:

$$pK_a = pH + \lg \frac{A_{\text{ион}} - A}{A - A_{\text{мол}}}, \quad (1)$$

где $A_{\text{ион}}$, $A_{\text{мол}}$, A – поглощение иона, нейтральной молекулы и смеси иона и нейтральной молекулы.

Математическая обработка экспериментальных результатов осуществлялась в рамках стандартных процедур. Все спектрофотометрические измерения выполнены на приборе «Genesys 10S UV-VIS» (Thermo Electron Corp.). Для измерения pH использовали pH-метр «Metrohm 744» (Швейцария). При проведении эксперимента температуру поддерживали в пределах $25 \pm 0,5$ °C.

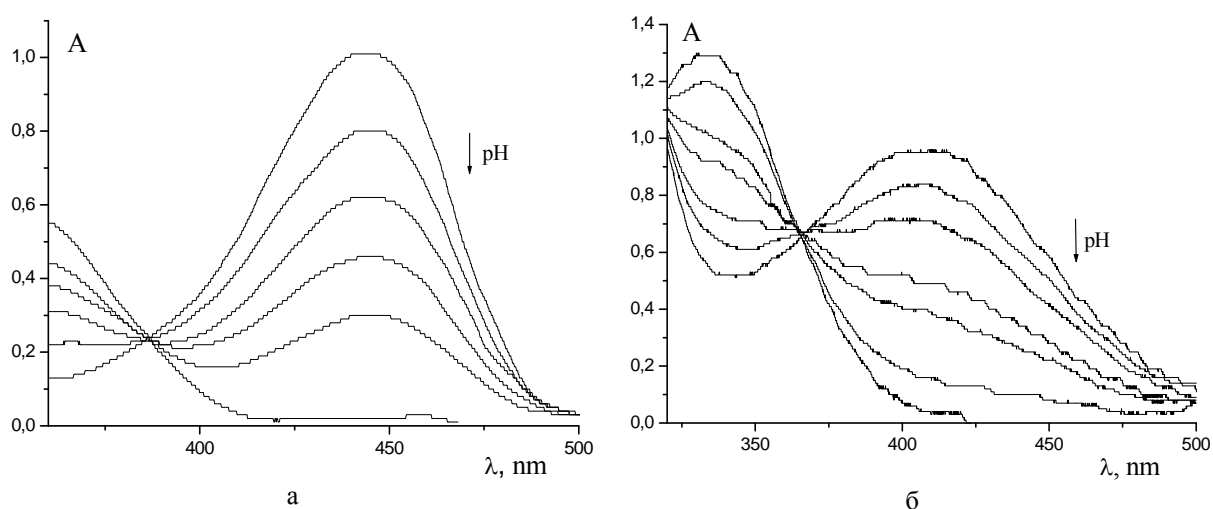


Рис. 1. Спектры поглощения 2,6-динитрофенола в присутствии $[GS] = 10^{-3}$ моль/л ($pH = 5,10 \div 1,23$) (а) и 3-нитрофенола в присутствии $[CTAB] = 5 \cdot 10^{-3}$ моль/л ($pH = 8,99 \div 4,04$) (б).

Результаты и их обсуждение. В табл. 2 представлены константы кислотной ионизации фенолов в присутствии ЦТАБ и GS. Здесь же приведены величины pK_a в воде и 30 %-ном водном этаноле (1M KCl), определенные ранее [15].

Характер влияния заместителей не изменяется при переходе от воды к мицеллярным растворам ЦТАБ и GS: величины pK_a уменьшаются при переходе от фенола (8) к 2,6-динитрофенолу (1) (см. табл. 2, ΔpK_a). Динитропроизводные являются наиболее сильными электроноакцепторами, а изменение величин pK_a примерно одинаково для 2,4- и 2,5-динитрофенолов в мицеллах ЦТАБ и GS (см. табл. 2, соединения 2, 3). Наиболее кислым фенолом в большинстве сред (исключение pK_a в ЦТАБ) выступает 2,6-динитрофенол (1), но в мицеллярной среде GS ΔpK_a по сравнению с фенолом падает на 7,54 единицы pK_a , а в ЦТАБ – на 6,28 единиц pK_a (именно такое же уменьшение имеет место и в воде). Изменение значений pK_a при переходе от воды к мицеллярным растворам ПАВ тем меньше, чем менее ярко выражены электроноакцепторные свойства заместителей. Так, для фенола (8) величины pK_a в воде и мицеллах GS сопоставимы, а в ЦТАБ всего на 0,41 единицы pK_a ниже, чем в воде (табл. 2, см. ΔpK_{a1}). При этом необходимо отметить, что увеличение кислотности в ряду изученных фенолов в мицеллах ЦТАБ и GS близки и достигают приблизительно 1,8 единиц pK_a по сравнению кислотно-основными свойствами в воде (см. ΔpK_{a1} , табл. 2). Вряд ли такое изменение значений pK_a может быть связано только с влиянием среды на электронные эффекты заместителей, и следовательно, необходим учет дополнительных факторов.

На рис. 2 представлены зависимости « pK_a фенолов (30 % EtOH (1M KCl); ЦТАБ, GS) – pK_a (H₂O)». Закономерности изменения величин pK_a аналогичны как в мицеллах

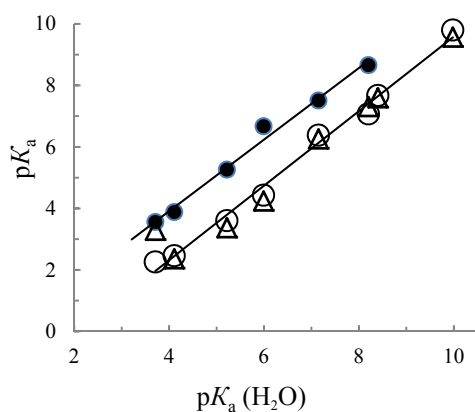
Таблица 2

Константы кислотной ионизации фенолов в воде, 30 % водном этаноле (1М КСl) и в присутствии ЦТАБ, GS; 25°C

№ п/п	R в PhOH	pK _a H ₂ O [15]	pK _a 30% EtOH, 1М КСl [15]	pK _a ЦТАБ ¹	pK _a GS ¹	ΔpK _a H ₂ O ²	ΔpK _a ЦТАБ ²	ΔpK _a GS ²	ΔpK _{a1} ЦТАБ ³	ΔpK _{a1} GS ³
1	2,6-(NO ₂) ₂	3,71	3,56	3,29	2,26	6,27	6,28	7,54	0,42	1,45
2	2,4-(NO ₂) ₂	4,11	3,88	2,37	2,47	5,87	7,20	7,33	1,74	1,64
3	2,5-(NO ₂) ₂	5,22	5,26	3,37	3,60	4,76	6,20	6,20	1,85	1,62
4	2,4,6-Cl ₃	5,99	6,67	4,24	4,43	3,99	5,33	5,37	1,75	1,56
5	4-NO ₂	7,15	7,51	6,26	6,37	2,83	3,31	3,43	0,99	0,78
6	4-C ₆ H ₅ N=N	8,20	8,66	7,31	7,07	1,78	2,26	2,73	0,89	1,13
7	3-NO ₂	8,40		7,60	7,68	1,58	1,97	2,12	0,80	0,72
8	H	9,98		9,57	9,80				0,41	0,18

 Примечани: ¹ Ошибка в определении pK_a не превышает ± 0,06 единиц pK_a.

² ΔpK_a = pK_a (8) – pK_a (1 или 2-7) в H₂O, ЦТАБ и GS.

³ Изменение величины pK_a при переносе процесса из воды в мицеллы ЦТАБ или GS; например, ΔpK_{a1} = pK_a (8, H₂O) – pK_a (8, ПАВ).

 Рис. 2. Зависимость величин pK_a фенолов в 30 % EtOH (1М КСl) (●), в ЦТАБ (○) и GS (Δ) от pK_a (H₂O); 25 °C

 ЦТАБ, GS, так и в 30 %-ном водном этаноле (рис. 2). При этом наклоны зависимостей «pK_a (ЦТАБ, GS, 30% EtOH) – pK_a (H₂O)» практически совпадают (уравнения (2)–(4)), различия существуют только в отрезках, отсекаемых по оси ординат. Более того характер влияния заместителей на величины pK_a в присутствии ПАВ можно описать в рамках единой зависимости (5), т.е. факторы, ответственные за уменьшение значений pK_a (по сравнению с pK_a в воде), в мицеллярной псевдофазе имеют близкую природу.

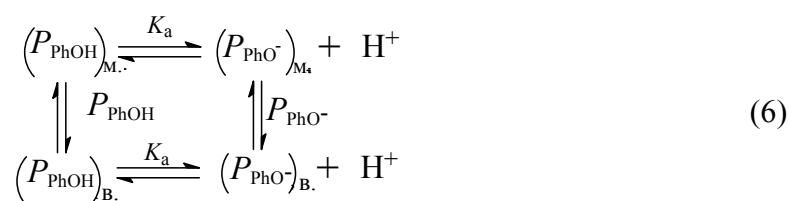
$$pK_a(30\% \text{ EtOH}) = (-0,74 \pm 0,38) + (1,16 \pm 0,06) pK_a(\text{H}_2\text{O}); \quad n=6; r = 0,997 \quad (2)$$

$$pK_a(\text{ЦТАБ}) = (-3,06 \pm 0,31) + (1,27 \pm 0,04) pK_a(\text{H}_2\text{O}); \quad n=8; r = 0,994 \quad (3)$$

$$pK_a(\text{GS}) = (-2,54 \pm 0,31) + (1,21 \pm 0,04) pK_a(\text{H}_2\text{O}); \quad n=8; r = 0,996 \quad (4)$$

$$pK_a(\text{GS, ЦТАБ}) = (-2,73 \pm 0,23) + (1,23 \pm 0,03) pK_a(\text{H}_2\text{O}); \quad n=16; r = 0,996 \quad (5)$$

В рамках псевдофазной распределительной модели процесс ионизации фенолов протекает по двум параллельным маршрутам – в воде (в.) и мицеллярной псевдофазе (м.) и описывается схемой



где P_{PhOH} и P_{PhO^-} – коэффициенты распределения нейтральной и анионной форм, соответственно. При этом константы связывания нейтральной и анионной форм могут быть оценены из величин P_{PhOH} и P_{PhO^-} :

$$K_{\text{PhOH}} \approx P_{\text{PhOH}} \cdot V_{\text{м}} \quad (7)$$

$$K_{\text{PhO}^-} \approx P_{\text{PhO}^-} \cdot V_{\text{м}},$$

где $V_{\text{м}}$, л/моль – парциальный мольный объем ПАВ.

В случае катионных ПАВ изменение величин pK_a при варьировании концентрации ПАВ отражает предпочтительное концентрирование в мицеллярной псевдофазе ионной формы по сравнению с нейтральной [8, 17]. Кажущаяся константа кислотной ионизации в присутствии мицелл равна

$$K_a(\text{ПАВ}) = K_a(\text{H}_2\text{O}) \frac{1 + K_{\text{PhO}^-} \cdot c}{1 + K_{\text{PhOH}} \cdot c} \quad (8)$$

и зависит от величины K_a фенола в воде, концентрации мицелляризованного ПАВ, а также констант связывания фенолят-иона (K_{PhO^-}) и его сопряженной кислоты (K_{PhOH}) мицеллами ЦТАБ и GS. Максимальное изменение pK_a имеет место для дизамещенных фенолов (см. табл. 2, № 1–3), минимальное для фенола (табл. 2, № 8). Следовательно, эффект концентрирования анионной формы должен играть определяющую роль в «сдвиге» pK_a .

В заключение следует отметить: существование единой зависимости (5) для GS и ЦТАБ, несмотря на то, что $c = 10^{-3}$ (GS) и $5,0 \cdot 10^{-3}$ (ЦТАБ) моль/л, позволяет предположить, что связывание фенолят-иона более эффективно в мицеллах димерного катионного ПАВ.

Выводы. Определены константы кислотной ионизации производных фенола, содержащих электроакцепторные заместители, в присутствии мономерного (ЦТАБ) и димерного (GS) катионных ПАВ.

Показано, что характер влияния заместителей не изменяется при переносе процесса ионизации в мицеллярную псевдофазу, и таковой практически совпадает как для мономерного, так и димерного ПАВ. Существование единой зависимости pK_a (GS, ЦТАБ) от $pK_a(\text{H}_2\text{O})$ указывает на однотипность факторов, влияющих на кислотно-основные равновесия в мицеллах ПАВ.

В рамках псевдофазной распределительной модели продемонстрировано, что изменение значений pK_a фенолов в ПАВ по сравнению с pK_a в воде, по-видимому, свидетельствует об определяющей роли эффекта концентрирования анионной формы в мицеллярной псевдофазе катионных ПАВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Organic Reaction Mechanisms / A.C. Knappe (Ed.) – Wiley, 2018. – 87 p.
2. Effect of hydrocarbon structure of the headgroup on the thermodynamic properties of micellization of cationic gemini surfactants: An electrical conductivity study / Zhang Qi, Gao Zhihong, Xu Fenh, Tai Shuxin // J. Coll. Interface Sci. – 2012. – Vol. 371, No 1. – P. 73-81.
3. Multi-functional gemini surfactants: structure, synthesis, properties and applications / B. Brycki, I. Kowalczyk, A. Szulc, O. Kaczerewska, M. Pakiet. / R. Najjar (Ed.) – Application and Characterization of Surfactants. – InTech, Rijeka, 2017. – P. 97-155.
4. Khan M.N. Micellar Catalysis. / M.N. Khan. // Surfactant Science Series. –2006. – Vol. 133. – CRC Press, Boca Raton, 2006. – 482 p.
5. Advances in the synthesis, molecular architectures and potential applications of gemini surfactants / Renu Sharma, Ajar Kamal, Maryam Abdinejad, Rakesh Kumar Mahajan and Heinz-Bernhard Kraatz // Adv. Coll. Int. Sci. – 2017. – 248. – P. 35-68.

6. Amphiphiles Self-Assembly: Basic Concepts and Future Perspectives of Supramolecular Approaches / D. Lombardo, M.A. Kiselev, S. Magazù, P. Calandraban // *Adv Condensed Matter Phys.* – 2015. – Vol. 2015. – 22 p.
7. La Sorella G. Recent advances in catalysis in micellar media / G. La Sorella, G. Strukul, A. Scarso // *Green Chem.* – 2015. – Vol. 17, Issue 2. – P. 644-683.
8. Development of Methods for the Determination of pKa Values / J. Reijenga, A. van Hoof, A. van Loon, B. Teunissen // *Analyt. Chem. Insights.* – 2013. – Vol. 8. – P. 5-71.
9. Samiey B. Effects of Surfactants on the Rate of Chemical Reactions / B. Samiey, C.-H. Cheng, J. Wu // *J. Chem.* – 2014. – Vol. 36. – P. 1-14.
10. Sood A.K. Influence of organic solvents, head-groups and temperature on the micellization behavior of some cationic surfactants / A.K. Sood, R. Kaur, T.S. Banipal // *Indian J. Chem.* – 2016. – Vol. 55 A. – P. 34-43.
11. Bayissa L.D. Influences of Micelle Formation and Added Salts on the Hydrolysis Reaction Rate of p-Nitrophenyl Benzoate in Aqueous Buffered Media / L.D. Bayissa, Y. Ohmae, M. Hojo // *Int. J. Chem. Kinetics.* – 2017. – Vol. 49, Issue 2. – P. 71-82.
12. Kinetic study on effect of novel cationic dimeric surfactants for the cleavage of carboxylate ester / B. Kumar, D. Tikariha, Kallol K. Ghosh, N. Barbero, P. Quagliotto // *J. Phys. Org. Chem.* – 2013. – Vol. 26. – P. 626-631.
13. Катализ щелочного гидролиза 4-нитрофенилдиэтилфосфоната мицеллами катионных димерных ПАВ / Т.М. Зубарева, А.В. Аникеев, Е.А. Карпичев и др. // *Теорет. и exper. химия.* – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 105-110.
14. Мицеллярная система на основе расщепляемого дикатионного поверхностно-активного вещества для разложения ФОС / Т.М. Зубарева, А.В. Аникеев, Е.А. Карпичев и др. // *Теорет. и exper. химия.* – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 363-369.
15. Нуклеофильное замещение у тетракоординационного атома серы. III. Реакционная способность анионных кислородсодержащих нуклеофилов – арилат- и алкоголят-анионов / Ю.С. Симаненко, Т.М. Прокопьева, В.А. Савелова и др. // *Реакц. способн. орган. соедин.* – 1989. – Т. 26, вып. 1(93)–2(94). – С. 30-54.
16. Dikationic hydroxylic surfactants: Aggregation behaviour, guest-host interaction and catalytic effect / Alla B. Mirgorodskaya, Farida G. Valeeva, Svetlana S. Lukashenko et al. // *J. Mol. Liq.* – 2018. – Vol. 250. – P. 229-235.

Поступила в редакцию 23.10.2019 г.

ACID-BASE PROPERTIES OF PHENOLS IN MICELLES OF SURFACE ACTIVE COMPOUNDS

T.M. Zubareva, I. A. Belousova, T.S. Gaidash, N.G. Razumova, T.M. Prokop'eva, V.A. Mikhailov

Acid-base properties of phenols in the presence of surfaceactive compounds were studied by spectrophotometry technique. Changes of acid ionization constants in transfer of ionization process from water to the micelles of cationic monomeric and dimeric surfactants are nearly the same. A decrease in acid ionization constant has maximum value for dinitro-substituted phenols, whereas it is minimum for the parent phenol. One of the factors responsible for the increase in acidity of phenols in the presence of surfactants is concentrating effect of phenolate ions in micellar pseudophase.

Keywords: phenol derivatives; acid ionization constants; monomeric cationic surfactants; dimeric cationic surfactants

Зубарева Татьяна Михайловна

Научный сотрудник, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР;

Zubareva Tatyana Mikhailovna

Research fellow, State Institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

Белюсова Ирина Алексеевна

Научный сотрудник, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.

Belousova Irina Alekseevna

Research fellow, State Institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

Гайдаш Татьяна Степановна

Ведущий инженер, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.

Gaidash Tatyana Stepanovna

Advanced engineer, State Institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

Разумова Нина Григорьевна

Младший научный сотрудник, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.

Razumova Nina Grigoryevna

Junior research fellow, State Institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

Прокопьева Татьяна Мефодиевна

Кандидат химических наук;
старший научный сотрудник, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.

Prokop'eva Tatyana Mefodieвна

Candidate of Chemical Sciences,
Senior research fellow, State Institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

Михайлов Василий Александрович

Кандидат химических наук;
старший научный сотрудник, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: v_mikhailov@yahoo.com

Mikhailov Vasilii Aleksandrovich

Candidate of Chemical Sciences;
Senior research fellow, State Institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.
E-mail: v_mikhailov@yahoo.com

УДК 546.04:661.896:66.046.41

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ ТВЕРДОФАЗНЫЕ РЕАКЦИИ В ОКСИДНЫХ СИСТЕМАХ С УЧАСТИЕМ СОЕДИНЕНИЙ РУТЕНИЯ (IV)

© 2019. Н.С. Лозинский, Я.А. Мороз

Изучены изотермические разрезы псевдобинарных оксидных систем, содержащих соединения рутения (IV). Установлено, что основным фактором, определяющим характер протекания реакций, является кислотно-основные характеристики оксидов, входящих в эти системы, а именно, их сила по отношению к диоксиду рутения как к кислоте. Результаты исследований будут полезны при прогнозировании фазового состава многокомпонентных оксидных систем аналогичных соединений, а также новых рутениевых модифицированных резистивных материалов.

Ключевые слова: соединения рутения (IV); псевдобинарные оксидные системы; рентгенофазовый анализ; толсто пленочные рутениевые резисторы.

Введение. Интерес к химии оксидных соединений рутения (IV) обусловлен тем, что они являются перспективными катализаторами, электродами в источниках постоянного тока, псевдоконденсаторах и фотокаталитических преобразователях солнечной энергии, анодами в технической электрохимии, функциональными материалами в толсто пленочной микроэлектронике и т.д. [1].

В литературе имеются данные об исследовании двух-, трех- и более компонентных систем, содержащих RuO₂ (табл. 1, 2) [2–38].

Таблица 1

Сведения о соединениях и твердых растворах, полученных в системах RuO₂ – Э_nO_m

Система	Состав соединений и твердых растворов	Литература
1	2	3
Li ₂ O – RuO ₂	Li ₂ RuO ₃ , LiRuO ₃ , Li ₈ RuO ₆	[2]
Na ₂ O – RuO ₂	Na ₃ RuO ₄ , Na ₄ Ru ₂ O ₇ , NaRu ₂ O ₄ , Na ₄ RuO ₄ , Na ₂ RuO ₃ , NaRu ₄ O ₈ , Na ₂ Ru ₄ O ₉ , Na ₂ Ru ₆ O ₁₉ , Na ₄ Ru ₃ O ₈ , Na _{3-x} Ru ₄ O _y	[3]
MgO – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[6]
Al ₂ O ₃ – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[5]
SiO ₂ – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[21]
K ₂ O – RuO ₂	K ₂ RuO ₃ , K ₂ RuO ₄ , KRuO ₄ , K ₄ RuO ₄ , KRu ₄ O ₈ , KRuO ₃ , K _x Ru ₈ O ₁₆ (x<1,5)	[4]
CaO – RuO ₂	CaRuO ₃ , Ca ₂ RuO ₄ , Ca ₄ RuO ₆	[10]
TiO ₂ – RuO ₂	Ru _{1-x} Ti _x O ₂ (при 1 200 °C растворимость составляет около 2,2 % TiO ₂ в RuO ₂ и 1,5 % RuO ₂ в TiO ₂)	[25]
VO ₂ – RuO ₂	Ru _x V _{1-x} O ₂ , Ru _{1-x} V _x O ₂	[10]
V ₂ O ₅ – RuO ₂	Ru ₂ VO ₆	[10]
Cr ₂ O ₃ – RuO ₂	Cr ₂ O ₃ катализирует окисление RuO ₂ кислородом воздуха в RuO ₄	[24]
CrO ₂ – RuO ₂	Ru _{1-x} Cr _x O ₂	[24]
MnO ₂ – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[17]
Fe ₂ O ₃ – RuO ₂	(Fe _{1-x} Ru _x) ₂ O ₃	[19]
CoO – RuO ₂	Co ₂ RuO ₄	[6]
Co ₃ O ₄ – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[13]
NiO – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[7]
CuO – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[5]
Cu ₂ O – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[6]
ZnO – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[6]
Ga ₂ O ₃ – RuO ₂	взаимодействие не обнаружено	[18]
SrO – RuO ₂	SrRuO ₃ , Sr ₃ Ru ₂ O ₇ , Sr ₄ Ru ₃ O ₁₀ , SrRuO ₄ , SrRu ₂ O ₆ , Sr ₄ RuO ₆	[9]

Продолжение табл. 1

1	2	3
$Y_2O_3 - RuO_2$	$Y_2Ru_2O_7$	[17]
$ZrO_2 - RuO_2$	взаимодействие не обнаружено	[25]
$Nb_2O_5 - RuO_2$	Металлический Ru и Nb_2O_5	[1, 29]
$Nb_2O_5 - RuO_2$	$RuNb_{10}O_{27}$, $Ru_{1-x}Nb_xO_2$ $0,0005 \cong x \cong 0,5$, $Ru_{0,5}Nb_{0,5}O_2$	[1, 29]
$MoO_2 - RuO_2$	$Ru_xMo_{1-x}O_2$	[21]
$Rh_2O_3 - RuO_2$	$Ru_xRh_{1-x}O_y$ ($0 < x < 0,5$)	[23]
$PdO - RuO_2$	взаимодействие не обнаружено	[12]
$CdO - RuO_2$	взаимодействие не обнаружено	[11]
$SnO_2 - RuO_2$	$(Sn-Ru)O_2$ (твердые растворы во всем диапазоне составов)	[28]
$Sb_2O_5 - RuO_2$	$RuSbO_4$ (взаимодействие с понижением степени окисления рутения)	[29]
$BaO - RuO_2$	$BaRuO_3$, Ba_2RuO_4 , Ba_3RuO_5 , Ba_4RuO_6 , Ba_6RuO_{11} , $BaRu_4O_9$, $Ba_3Ru_3O_{10}$, $BaRu_6O_{12}$	[8]
$La_2O_3 - RuO_2$	$La_3Ru_3O_{11}$, $LaRuO_3$, La_2RuO_5 , $La_8Ru_4O_{21}$, $La_4Ru_4Ru_4O_{19}$, $La_{3,5}Ru_4O_{13}$	[15]
$CeO_2 - RuO_2$	взаимодействие не обнаружено	[27]
$HfO_2 - RuO_2$	$Hf_{0,75}Ru_{0,25}O_2$	[20]
$Ta_2O_5 - RuO_2$	$RuTa_{10}O_{27}$	[1]
$WO_2 - RuO_2$	$Ru_{1-x}W_xO_2$, Ru_2WO_4 , $Ru_{2x}W_xO_2$ ($0 < x < 0,2$)	[21]
$IrO_2 - RuO_2$	$Ru_xIr_{1-x}O_2$	[21]
$PtO_2 - RuO_2$	$Ru_xPt_{1-x}O_2$	[22]
$Tl_2O_3 - RuO_2$	$Tl_2Ru_2O_7$	[16]
$PbO - RuO_2$	$PbRuO_3$, $Pb_2Ru_2O_{7-x}$	[14]
$Bi_2O_3 - RuO_2$	$Bi_2Ru_2O_7$, $Bi_3Ru_3O_{11}$, Bi_2RuO_{20} , Bi_8RuO_{14}	[14]

Таблица 2

Сведения об условиях термообработки и фазовом составе образцов в многокомпонентных системах с участием RuO_2 и соединений рутения (IV)

№ п/п	Фазовый состав образцов		Условия термообработки		Литература
	До спекания	После спекания	Температура, °C	Время, ч	
1	2	3	4	5	6
Система $PbO - RuO_2 - TiO_2$					
1	$RuO_2 + PbTiO_3$	$RuO_2 + PbTiO_3$	800	–	[30]
$RuO_2 - TiO_2 - ZrO_2$					
2	$RuO_2 + PbTiO_3$	$Pb_2Ru_2O_{6,5} + TiO_3$	850–1000	–	[25]
	$RuO_2 + PbZrO_3$	$Pb_2Ru_2O_{6,5} + 2ZrO_3$			
$Al_2O_3 - CeO_2 - RuO_2$					
3	$Al_2O_3 + CeO_2 + RuO_2$	$Al_2O_3 + CeO_2 + RuO_2$	700 и 800	90	[31]
	$CeO_2 + Pb_2Ru_2O_{6,5}$	$CeO_2 + Pb_2Ru_2O_{6,5}$			
$RuO_2 - Bi_2O_3 - CdO - Nb_2O_5$					
4	$RuO_2 + Bi_2O_3 + Nb_2O_5$	$Bi_2Nb_{10}O_{28} + RuO_2$	1000	–	[11]
	$RuO_2 + Bi_2O_3 + Nb_2O_5$	$Bi_2Nb_2O_8 + RuO_2$			
	$RuO_2 + Bi_2O_3 + Nb_2O_5$	$Bi_{10}Nb_6O_{30}$			
	$RuO_2 + Bi_2O_3 + CdO$	$Bi_{2-x}Cd_xRuO_2O_{7-x/2}$			
$RuO_2 - SrO - ZrO_2$					
5	$RuO_2 + SrO + ZrO_2$	RuO_2 , $SrRuO_3$, $SrZrO_3$	1000 и 1200	–	[9]
	$RuO_2 + 2SrO + ZrO_2$	$SrRuO_3$, $SrZrO_3$			
	$2RuO_2 + 4SrO + ZrO_2$	$SrRuO_3$, Sr_2RuO_4 , $SrZrO_3$			
	$RuO_2 + 3SrO + ZrO_2$	Sr_2RuO_4 , $SrZrO_3$			
	$RuO_2 + 4SrO + ZrO_2$	Sr_2RuO_4 , SrO , $SrZrO_3$			
	$RuO_2 + SrO + ZrO_2$	RuO_2 , $SrZrO_3$			
$RuO_2 - Bi_2O_3 - ZnO$ и $RuO_2 - Al_2O_3 - ZnO$					
6	$RuO_2 + Bi_2O_3 + ZnO$	$Bi_{1,5}Zn_{0,5}Ru_2O_{6,75} + Bi_2O_3$	700	–	[32]
	$RuO_2 + Al_2O_3 + ZnO$	$RuO_2 + ZnAl_2O_3$	1150		

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6
RuO ₂ – PbO – CeO ₂					
7	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + CeO ₂	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + CeO ₂	750 и 800	5 раз по 18	[33]
	RuO ₂ + PbO + CeO ₂	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + RuO ₂ + CeO ₂			
	RuO ₂ + 2 PbO + CeO ₂	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + PbO + CeO ₂			
	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + PbO + CeO ₂	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + PbO + CeO ₂			
	RuO ₂ + PbO + 3 CeO ₂	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + CeO ₂			
RuO ₂ – Bi ₂ O ₃ – SiO ₂					
8	6Bi ₂ O ₃ + 2RuO ₂ + SiO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + Bi ₁₂ SiO ₂₀	750	–	[34]
	7Bi ₂ O ₃ + 3RuO ₂ + 3SiO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + Bi ₁₂ SiO ₂₀ + Bi ₄ Si ₃ O ₁₂			
	3Bi ₂ O ₃ + 2RuO ₂ + 3SiO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + Bi ₄ Si ₃ O ₁₂			
	Bi ₂ O ₃ + 2RuO ₂ + SiO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + RuO ₂ + Bi ₄ Si ₃ O ₁₂			
	2Bi ₂ O ₃ + 4RuO ₂ + 3SiO ₂	RuO ₂ + Bi ₄ Si ₃ O ₁₂			
	5Bi ₂ O ₃ + 22RuO ₂ + 8SiO ₂	RuO ₂ + Bi ₄ Si ₃ O ₁₂			
	Bi ₂ O ₃ + 2RuO ₂ + 4SiO ₂	RuO ₂ + Bi ₄ Si ₃ O ₁₂ + SiO ₂			
2Bi ₂ O ₃ + 4RuO ₂ + 4SiO ₂	RuO ₂ + Bi ₄ Si ₃ O ₁₂ + SiO ₂				
RuO ₂ – PbO – ZrO ₂					
9	Bi ₂ O ₃ + RuO ₂ + ZrO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + α-Bi ₂ O ₃ + ZrO ₂	750 и 800	90	[35]
	17Bi ₂ O ₃ + 4RuO ₂ + 2ZrO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + α-Bi ₂ O ₃ + ZrO ₂ (сл.)			
	17Bi ₂ O ₃ + 4RuO ₂ + 2ZrO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + γ-Bi ₂ O ₃ + ZrO ₂ (сл.)			
	6Bi ₂ O ₃ + 12RuO ₂ + ZrO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + ZrO ₂			
	Bi ₂ O ₃ + 2RuO ₂ + 2ZrO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + ZrO ₂			
	Bi ₂ O ₃ + 6RuO ₂ + 2ZrO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + RuO ₂ + ZrO ₂			
CaO – RuO ₂ – SiO ₂ и CaO – RuO ₂ – V ₂ O ₅					
10	CaRuO ₃ + CaSiO ₃	RuO ₂ + Ca ₃ Si ₂ O ₇	355 – 1055	–	[36]
	CaRuO ₃ + SiO ₂	RuO ₂ + CaSiO ₃			
	Ca ₃ Si ₂ O ₇ + Ca ₃ Ru ₂ O ₇	CaRuO ₃ + Ca ₂ SiO ₄	< 400 и > 685		
	RuO ₂ + 2Ca ₂ SiO ₄	CaRuO ₃ + Ca ₃ Si ₂ O ₇			
	CaRuO ₃ + Ca ₇ V ₄ O ₁₇	Ca ₃ V ₂ O ₆ + Ca ₃ Ru ₂ O ₇	с 200		
	CaRuO ₃ + Ca ₂ V ₂ O ₇	RuO ₂ + Ca ₃ V ₂ O ₈	до 655		
	CaRuO ₃ + CaV ₂ O ₆	RuO ₂ + Ca ₂ V ₂ O ₇			
	CaRuO ₃ + V ₂ O ₅	RuO ₂ + CaV ₂ O ₆			
RuO ₂ – Y ₂ O ₃ – CeO ₂					
11	2RuO ₂ + Y ₂ O ₃ + CeO ₂	Y ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂	1000 и 1200	–	[37]
	Y ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂	Y ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂			
	RuO ₂ + Y ₂ O ₃ + CeO ₂	Y ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂ + Y ₂ O ₃			
	6RuO ₂ + Y ₂ O ₃ + 2CeO ₂	Y ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂ + RuO ₂			
RuO ₂ – Ga ₂ O ₃ – NiO					
12	3Ga ₂ O ₃ + 2RuO ₂ + 2NiO	Ga ₂ O ₃ + RuO ₂ + NiO	1000 и 1150	20	[18]
	Ga ₂ O ₃ + RuO ₂ + NiO	RuO ₂ + NiGa ₂ O ₄			
	Ga ₂ O ₃ + 2RuO ₂ + 2NiO	RuO ₂ + NiGa ₂ O ₄ + NiO			
RuO ₂ – Bi ₂ O ₃ – CeO ₂					
13	3RuO ₂ + 3Bi ₂ O ₃ + 11CeO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂ *	750 и 800	90	[38]
	5RuO ₂ + 4Bi ₂ O ₃ + 7CeO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂ *			
	RuO ₂ + Bi ₂ O ₃ + CeO ₂	Bi ₂ O ₃ + Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂ *			
	2RuO ₂ + Bi ₂ O ₃ + 2CeO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + CeO ₂			
	4RuO ₂ + Bi ₂ O ₃ + 2CeO ₂	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + RuO ₂ + CeO ₂			

* – твердый раствор Bi₂O₃ в CeO₂.

Систематизированные сведения показывают, что оксид рутения (IV) не является химически инертным, как ему приписывают, соединением. Так, в области температур

от 800 до 1 200 °С он реагирует, за некоторыми исключениями, с оксидами металлов, находящихся в степени окисления не более +3 с образованием рутенитов. С оксидами элементов, находящихся в степени окисления +4, RuO₂ образует твердые растворы со структурой рутила, а с оксидами M₂O₅ – фазы, являющиеся солями рутения (III и IV). Характер взаимодействия RuO₂ с оксидами при переходе от двух- к многокомпонентным системам не изменяется; а состав продуктов взаимодействия в многокомпонентных системах зависит от природы оксидов-сореагентов, соотношения компонентов в системе и температуры ее термообработки.

В тоже время, в литературе имеются сведения о том, что в ряде случаев не удалось воспроизвести результаты описанных экспериментов по изучению этих систем. Во-первых, процедуры получения образцов детально не описаны; во-вторых, сведения о системах, полученные разными авторами, противоречат друг другу и требуют проверки; в-третьих, приведенные данные относятся как к объемным образцам, так и к пленочным материалам; наконец, имеющаяся информация крайне разобщена во времени и по публикациям, относящимся к различным областям химии и технологии.

Поэтому целью настоящей работы является исследование высокотемпературных взаимодействий в оксидных системах с участием соединений рутения (IV) в неравновесных условиях и установление закономерностей их протекания.

Экспериментальная часть. Исследование высокотемпературных твердофазных реакций, протекающих в оксидных системах с участием соединений рутения (IV) проводили по методу изотермических разрезов псевдобинарных систем. Выбор оксидов элементов и их соединений обусловлен тем, что они применяются в качестве модификаторов толстопленочных рутениевых резисторов [41–43].

Для исследований использовали простые оксиды квалификации «х. ч.». Сложные оксиды синтезировали спеканием соответствующих простых оксидов, а соединения (NH₄)₈[CoW₁₁Co(H₂O)₃₉]·nH₂O, (NH₄)_{0,2}H_{0,2}Me_{0,1}W_{0,9}O₃ и K_{4x}Me_xW_{1-x}O₆ – по методикам [44, 45]. Фазовый состав полученных соединений подтверждали методом рентгенофазового анализа (РФА).

Образцы готовили гомогенизацией исходных веществ, взятых в мольных отношениях: 1:9 ÷ 9:1, с шагом 1 моль с последующей термообработкой в алундовых тиглях или на платиновой фольге (для образцов с легкоплавкими компонентами) по техническим условиям приготовления толстопленочных резисторов (ТПР) [46, 47]. Температурный режим нагревания образцов следующий: равномерный подъем и снижение температуры со скоростью 20 град/мин, длительность изотермической выдержки при максимальной температуре 850 °С составляла 10 мин.

Идентификацию продуктов взаимодействия в системах осуществляли методом (РФА) на дифрактометре ДРОН-2 (Cu-катод, Ni-фильтр); скорость счетчика 2 градуса в минуту и 0,2 – при анализе твердых растворов. Состав аморфных фаз не изучался.

Результаты и их обсуждение. Результаты РФА образцов до и после термообработки представлены в табл. 3.

Таблица 3
Фазовый состав по данным РФА образцов до и после термообработки при 850 °С

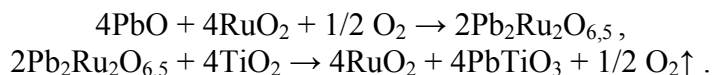
№ п/п	Фазовый состав образцов	
	до термообработки	после термообработки*
1	2	3
Исходные образцы на основе RuO ₂		
1	RuO ₂ + 2PbO·SiO ₂	Pb ₂ Ru ₂ O ₆
2	RuO ₂ + PbO·2SiO ₂	RuO ₂
3	RuO ₂ + Pb(BO ₂) ₂	RuO ₂

Продолжение табл. 3

1	2	3
Исходные образцы на основе Na_2RuO_3		
4	$\text{Na}_2\text{RuO}_3 + \text{PbWO}_4$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Na}_2\text{WO}_4$
5	$\text{Na}_2\text{RuO}_3 + \text{PbSiO}_4$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Na}_2\text{SiO}_4$
6	$\text{Na}_2\text{RuO}_3 + \text{PbTiO}_3$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Na}_2\text{TiO}_3$
Исходные образцы на основе CaRuO_3		
7	$\text{CaRuO}_3 + \text{PbO} \cdot \text{SiO}_2$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{RuO}_2 + \text{фаза } \varphi$
8	$\text{CaRuO}_3 + \text{PbO} \cdot 2\text{SiO}_2$	RuO_2
Исходные образцы на основе SrRuO_3		
9	$\text{SrRuO}_3 + \text{PbSO}_4$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{SrSO}_4$
10	$\text{SrRuO}_3 + \text{PbWO}_4$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{SrWO}_4$
Исходные образцы на основе $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$		
11	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{WO}_3$	$\text{PbWO}_4 + \text{RuO}_2$
12	$3\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + 4\text{Nb}_2\text{O}_5$	$\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5} + \text{RuO}_2$
13	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + 2\text{Nb}_2\text{O}_5$	$\text{PbNb}_2\text{O}_6 + \text{RuO}_2$
14	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + 4\text{Nb}_2\text{O}_5$	$\text{PbNb}_4\text{O}_{11} + \text{RuO}_2$
15	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{TiO}_2$	$\text{PbTiO}_3 + \text{RuO}_2$
16	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{K}_2\text{TiO}_3$	$\text{K}_2\text{RuO}_3 + \text{PbTiO}_3$
17	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{B}_2\text{O}_3$	RuO_2
18	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{H}_3\text{BO}_3$	RuO_2
19	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$	RuO_2
20.	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}(\text{BO}_2)_2$	RuO_2
21	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{SiO}_2$	RuO_2
22	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{SiO}_2 \cdot \text{B}_2\text{O}_3$	RuO_2
23	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{PbO} \cdot 2\text{SiO}_2$	RuO_2
24	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + 2\text{PbO} \cdot \text{SiO}_2$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$
25	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Bi}_2\text{O}_3$	$\text{Pb}_{2-x}\text{Bi}_x\text{Ru}_2\text{O}_7 + \text{PbO}$
26	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{NiWO}_4$	$\text{RuO}_2 + \text{PbWO}_4 + \text{NiO}$
27	$7\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + 8\text{NbWO}_{5,5}$	$\text{PbWO}_4 + \text{RuO}_2 + \text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$
28	$5\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + 8\text{NbWO}_{5,5}$	$\text{PbWO}_4 + \text{RuO}_2 + \text{PbNb}_4\text{O}_{11}$
29	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{SrCO}_3$	$\text{SrRuO}_3 + \text{PbO}$
30	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}_2\text{Bi}_{4/3}\text{W}_{2/3}\text{O}_6$	$\text{RuO}_2 + \text{Bi}_2(\text{WO}_4)_3 + \text{PbWO}_4$
31	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}_2\text{Ti}_{1,5}\text{W}_{0,5}\text{O}_6$	$\text{RuO}_2 + \text{PbWO}_4 + \text{TiO}_2$
32	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}_2\text{BiNbO}_6$	$\text{RuO}_2 + \text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$
33	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + (\text{NH}_4)_8[\text{CoW}_{11}\text{Co}(\text{H}_2\text{O})\text{O}_{39}] \cdot n\text{H}_2\text{O}$	$\text{PbWO}_4 + \text{CoWO}_4 + \text{RuO}_2$
34	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{K}_{4x}\text{Me}_x\text{W}_{1-x}\text{O}_3$ (M-Ni, Co)	$\text{PbWO}_4 + \text{RuO}_2 + \text{MeWO}_4$
35	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + (\text{NH}_4)_{0,2}\text{H}_{0,2}\text{Me}_{0,1}\text{W}_{0,9}\text{O}_3$ (M-Ni, Co)	$\text{PbWO}_4 + \text{RuO}_2 + \text{MeWO}_4$
36	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Cu}_2\text{O}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{CuO}$
37	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Cu}_2\text{O}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{RuO}_2$ (в среде CO_2)
38	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Al}_2\text{O}_3$
39	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{CuO}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{CuO}$
40	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{NiO}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{NiO}$
41	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{PbO}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{PbO}$
42	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{CdO}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{CdO}$
43	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$
44	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}_2\text{Nb}_2\text{O}_7$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{Pb}_2\text{Nb}_2\text{O}_7$
45	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{PbNb}_2\text{O}_6$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{PbNb}_2\text{O}_6$
46	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{PbWO}_4$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{PbNb}_4\text{O}_{11}$
47	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{NaCl}$	$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 + \text{NaCl}$

* фазовый состав в точке эквивалентности при протекании химического взаимодействия

Полученные в работе результаты (см. табл. 3) согласуются с данными, приведенными в литературе (см. табл. 1, 2). В тоже время, химические реакции, протекающие с участием рутенита свинца, могут осложняться процессами обмена с кислородом воздуха [30, 41]:



Как следствие, реакции с участием рутенита свинца чувствительны к составу атмосферы их проведения [41]. Это подтверждается данными исследования системы $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6 - \text{Cu}_2\text{O}$: на воздухе взаимодействие не обнаружено, а в среде углекислого газа отмечено (см. табл. 3, серии образцов № 36, 37).

Приведенные в табл. 3 сведения показывают, что изменение фазового состава образцов, содержащих оксидные соединения рутения (IV), после термообработки является следствием химического взаимодействия, характер которого зависит от степени окисления элемента в оксиде. Направление протекания химических реакций можно определить термодинамическими расчетами по величине энергии Гиббса (ΔG_{298}^0) [48–50]. Однако данные для проведения таких расчетов для оксидных систем, перечисленных в табл. 1 – 3, отсутствуют или весьма противоречивы [48].

В тоже время, известно правило для однотипных реакций, протекающих в одинаковых условиях, согласно которому более основной оксид, т.е. оксид, соединения которого с данным кислотным оксидом обладают более отрицательным ΔG_{298}^0 , может вытеснять собою менее основные оксиды, т.е. оксиды, для которых аналогичные значения ΔG_{298}^0 менее отрицательны (табл. 4–6) [49, 51]. Данные по фазовому составу, приведенные в табл. 3 и соответствующая графа табл. 6 подтверждают это правило.

Условия эксперимента (выбор одного эталонного вещества и одинаковых условий термообработки), оправдывают применение известных кислотно-основных шкал для объяснения закономерностей наблюдаемых взаимодействий [49].

Среди многообразия таких шкал (например, только шкал электроотрицательностей известно около 20) авторы остановили свой выбор на хорошо известных, наиболее полных и оправдавших себя при объяснении закономерностей твердофазных взаимодействий в оксидных системах (табл. 4–6) [52–54]. Более того, выбранные нами шкалы используются как основа для разработки новых шкал или как эталон для подтверждения их достоверности [55, 56].

Кислотность элементов численно выражается величиной отношения I_n/r_i , где I_n – потенциал ионизации, r_i – ионный радиус или W_i/r_i [потенциал Картледжа (ионный потенциал)], где W_i – валентность иона, r_i – его радиус. С увеличением этих отношений усиливаются кислотные свойства элементов [57, с. 164, 167; 58, с. 2–3; 59].

При этом, кислотный оксид обладает более высокой электроотрицательностью (χ , ЭО), например, шкала по Полингу – $\chi_{\text{П}}$ (в т. ч. уточненная χ_{ref}) или орбитальные χ Малликена ($\chi_{\text{Мал}}$), а основной оксид имеет более низкую электроотрицательность (табл. 4) [24]. Аналогичный характер при сопоставлении демонстрирует приведенная ЭО – χ/r_i (табл. 4) [48, с. 83–84]. Обобщенные электроотрицательности простых и смешанных оксидов рассчитывали по формуле:

$$\chi_{M_xMe_yA_aB_bC_cO_z} = \frac{M_xMe_yA_aB_bC_cO_z}{x + y + a + b + c + z},$$

где χ_M , χ_{Me} , χ_A , χ_B , χ_C , χ_Z – электроотрицательности элементов χ_{ref} или $\chi_{\text{Мал}}$; x , y , a , b , c , z – количество атомов M , Me , A , B , C и O в молекуле, соответственно [63].

РФА образцов, содержащих оксидные соединения рутения (IV) (см. табл. 3), с позиций кислотно-основных свойств элементов, их ионов и оксидов (табл. 4–6) показывает, что рутений по всем критериям находится в середине выбранных шкал и поэтому проявляет кислотные свойства по отношению к элементам, с ярко выраженными основными свойствами – щелочным и щелочноземельным металлам и

элементам со степенью окисления (II), и основные свойства к элементам с ярко выраженными кислотными свойствами – элементам со степенью окисления (V).

Таблица 4
Критерии оценки кислотно-основных свойств элементов

Атом	$\chi_{\text{л}},$ кДж/моль [52]	$\chi_{\text{ref}},$ [52]	χ/r_i [48,]	$\chi_{\text{Мал.}}$ эВ [54]
H	2,06	2,103	3,14	7,17
Li	0,96	0,926	1,08	2,99
B	2,04	2,071	4,90	4,15
C	2,47	2,702	8,33	6,27
O	3,440	3,534	–	7,54
Na	0,93	0,890	0,87	2,74
Mg	1,31	1,315	1,43	3,81
Al	1,61	1,760	2,18	3,24
Si	1,85	1,987	3,15	4,76
S	2,58	2,599	5,76	6,21
Cl	3,16	2,917	6,90	8,31
K	0,82	0,817	0,60	2,32
Ca	1,08	1,048	0,91	2,08
Ti	1,51	1,408	1,77	3,61
V	1,59	1,627	2,13	3,70
Cr	1,60	1,720	2,69	3,87
Mn	1,56	1,733	2,67	3,33
Fe	1,82	1,740	–	4,24
Co	1,83	1,845	–	4,40
Ni	1,84	1,850	–	4,46
Cu	1,90	1,950	1,92	4,48
Zn	1,58	1,840	1,89	4,74
Ga	2,01	1,749	2,39	3,20
Sr	0,95	0,961	0,75	2,06
Y	1,20	1,200	1,07	2,91
Zr	1,40	1,310	1,42	3,64
Nb	1,59	1,440	1,57	4,00
Mo	1,81	1,530	1,78	4,16
Ru	2,32	1,641	2,84	4,44
Rh	2,36	1,748	–	4,07
Pd	2,39	1,528	–	4,68
Cd	1,74	1,665	1,34	4,36
Sn	1,96	1,884	2,07	4,18
Sb	2,05	1,979	2,44	4,79
Ba	0,90	0,948	0,65	2,36
La	1,10	1,192	0,92	3,06
Ce	1,12	–	1,05	3,75
Hf	1,41	1,293	1,45	3,44
Ta	1,46	1,409	1,71	4,02
W	1,70	1,521	1,89	4,24
Re	1,93	1,628	2,18	4,01
Ir	2,20	1,727	–	5,54
Pt	2,20	1,526	–	5,51
Tl	1,79	1,681	1,40	3,30
Pb	1,80	1,778	1,17	4,20
Bi	1,91	1,886	1,86	6,60

Таблица 5
Критерии оценки кислотно-основных свойств ионов

Ион	W_i/r_i [60]	$I_n,$ эВ [57, 61]	I_n/R [57]
Li ⁺	1,28	5,39	7,93
B ³⁺	15,0	37,92	189,6
O ²⁻	-1,47	–	–
Na ⁺	1,02	5,13	5,23
Mg ²⁺	2,56	15,03	20,3
Al ³⁺	5,26	28,44	50,0
Si ⁴⁺	7,40	45,13	115,7
K ⁺	0,75	4,34	3,26
Ca ²⁺	1,89	11,87	11,4
Ti ⁴⁺	6,25	43,24	67,56
V ⁴⁺	6,56	48,0	78,7
Cr ³⁺	4,69	31	48,45
Cr ⁴⁺	9,76	51	124,4
Mn ⁴⁺	7,69	53	101,9
Fe ³⁺	4,69	30,64	45,73
Co ²⁺	2,56	17,05	21,86
Co ³⁺	4,68	33,49	52,3
Ni ²⁺	2,70	18,15	24,52
Cu ⁺	1,02	7,72	7,88
Cu ²⁺	2,5	20,29	25,4
Zn ²⁺	2,36	17,96	21,6
Ga ³⁺	4,84	30,70	49,5
Sr ²⁺	1,57	11,02	9,18
Y ³⁺	2,83	20,5	21,15
Zr ⁴⁺	4,60	33,97	41,4
Nb ⁴⁺	5,97	38,3	57,16
Nb ⁵⁺	8,70	50,0	75,8
Mo ⁴⁺	5,88	46,4	68,27
Ru ⁴⁺	5,26	47	75,8
Rh ³⁺	5,63	32,8	43,7
Pd ²⁺	2,38	19,42	23,12
Cd ²⁺	2,02	16,9	17,05
Sn ⁴⁺	5,97	46,4	69,3
Sb ⁵⁺	8,06	62,8	103,0
Ba ²⁺	1,40	10,00	7,25
La ³⁺	2,88	19,17	18,43
Ce ⁴⁺	4,54	36,70	41,70
Hf ⁴⁺	4,88	31	37,8
Ta ⁵⁺	8,70	45	68,2
W ⁴⁺	5,88	35	51,47
W ⁶⁺	9,23	61	93,8
Re ⁴⁺	5,88	38	55,88
Ir ⁴⁺	5,33	39	60,0
Pt ⁴⁺	5,33	41	64,1
Tl ³⁺	2,86	29,8	28,4
Pb ²⁺	1,65	15,03	11,95
Bi ³⁺	2,59	25,6	21,33

Критерии оценки кислотно-основных свойств оксидов

Оксид	χ по данным:		ОК [62]	$-\Delta G_{298}^0$, кДж/моль [51]
	[52]	[54]		
Li ₂ O	1,795	4,51	0,40	562,1
B ₂ O ₃	2,945	6,18		1 184,0 – 1 193,7
Na ₂ O	1,771	4,34	0,38	377,1
MgO	2,424	5,68	1,27	569,6
α -Al ₂ O ₃	2,824	5,82	2,27	1 582,0
SiO ₂	3,018	6,61		856,7 (кварц)
K ₂ O	1,723	4,06	0,35	322,1
CaO	2,291	4,81	1,10	604,2
TiO ₂	2,825	6,25	3,05	888,6 (рутил)
VO ₂	2,898	6,26	3,27	665,0
V ₂ O ₅	2,989	6,44	3,47	1 421,2
Cr ₂ O ₃	2,808	6,07	3,66	1 059,0
CrO ₂	2,929	6,32	2,49	540,0
MnO ₂	2,934	6,14	1,51	466,7
Fe ₂ O ₃	2,816	6,22		740,3
CoO	2,690	5,97	1,50	213,4
Co ₃ O ₄	2,810	6,19		761,5
NiO	2,692	6,00	1,52	211,6
Cu ₂ O	2,478	5,50		150,5
CuO	2,742	6,01		129,4
ZnO	2,687	6,14	0,98	320,7
Ga ₂ O ₃	2,820	5,80		998,2(β)
SrO	2,248	4,80	2,59	559,8
Y ₂ O ₃	2,600	5,69	2,98	1 800,0
ZrO ₂	2,793	6,24	3,90	1 042,8
MoO ₂	2,866	6,41		533,2
NbO ₂	2,836	6,36		739,6
Nb ₂ O ₅	2,936	6,53		1 764,1
RuO ₂	2,392	6,51	1,52	259,0
Rh ₂ O ₃	2,820	6,15	3,47	282,3
PdO	2,531	6,11	4,51	85,3
CdO	2,600	5,95	0,94	229,3
SnO ₂	2,984	6,42		519,9
Sb ₂ O ₅	3,090	6,75		864,7
BaO	2,241	4,95	2,50	528,4
La ₂ O ₃	2,481	5,75	3,69	1 705,8
CeO ₂	–	6,28	5,01	1 025,5
HfO ₂	2,787	6,17		1 061,1
Ta ₂ O ₅	2,927	6,53		1 947,7(α)
WO ₂	2,863	6,44		533,7
WO ₃	3,031	6,72		763,9 (α)
ReO ₂	2,899	6,36	1,49	63,2
IrO ₂	2,932	6,87	4,45	188,4
PtO ₂	2,865	6,86		84,0
Tl ₂ O ₃	2,793	5,84		321,4
PbO	2,656	5,88		189,1(α)
Bi ₂ O ₃	2,875	7,16		497,3

В первом случае RuO₂ реагирует с образованием рутенитов, во втором – с образованием солей рутения (III) с анионами соответствующих элементов.

С оксидами элементов, находящихся в степени окисления (IV), рутений либо образует твердые растворы с различной областью гомогенности (в т. ч. сплошной гомогенности, если радиус иона Э^{4+} близок радиусу иона Ru^{4+}), либо не реагирует вовсе.

В реакциях замещения RuO_2 вытесняется из собственных солей оксидами с более выраженными кислотными свойствами с образованием их солей. Кроме того, если подвергнуть термообработке соль рутения (IV) с оксидом более основным, чем катион исходного рутенита, то протекает взаимодействие с образованием рутенита с этим оксидом и вытеснением исходного оксида. Когда основные свойства оксида в исходном рутените и выбранного оксида приблизительно равны, то термообработка такой смеси приводит к образованию твердого раствора – соли с двумя катионами.

Кроме того, для обменных реакций очевиден факт, что сумма обобщенных ЭО компонентов, с учетом коэффициентов стехиометрии, в шихтовых исходных материалах выше таковых в прокаленных образцах (табл. 3–7).

Таблица 7

Электроотрицательность некоторых соединений

Формула соединения	по данным:		Формула соединения	по данным:	
	[54]	[52]		[54]	[52]
$\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$	6,25	2,804	$\text{Bi}_{10}\text{Nb}_6\text{O}_{30}$	6,87	2,903
$\text{Bi}_2\text{Ru}_2\text{O}_7$	6,81	2,890	$\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$	7,11	2,888
CaRuO_3	5,82	2,658	$\text{Bi}_4\text{Si}_3\text{O}_{12}$	6,90	2,943
$\text{Ca}_3\text{Ru}_2\text{O}_7$	5,66	2,597	SrZrO_3	5,66	2,575
SrRuO_3	5,83	2,641	CaSiO_3	5,89	2,727
Sr_2RuO_4	5,53	2,528	$\text{Ca}_3\text{Si}_2\text{O}_7$	5,71	2,655
BaRuO_3	5,88	2,638	Ca_2SiO_4	5,58	2,603
PbWO_4	6,44	2,906	$\text{Ca}_7\text{V}_4\text{O}_{17}$	5,62	2,640
$\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$	6,33	2,852	$\text{Ca}_2\text{V}_2\text{O}_7$	5,85	2,735
$\text{PbNb}_4\text{O}_{11}$	6,45	2,901	PbNb_2O_6	6,38	2,874
$\text{Pb}_2\text{Nb}_2\text{O}_7$	6,29	2,834	$\text{Pb}_2\text{BiNbO}_6$	6,42	2,809
PbTiO_3	6,09	2,758	$\text{Ca}_3\text{V}_2\text{O}_8$	5,69	2,667
PbZrO_3	6,09	2,738	CaV_2O_6	6,08	2,834
$\text{PbAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$	6,20	2,888	$\text{K}_{0,5}\text{Na}_{0,5}\text{NbO}_3$	5,83	2,579
$\text{Bi}_2\text{Nb}_{10}\text{O}_{28}$	6,61	2,928	$\text{Bi}_2\text{Al}_4\text{O}_9$	6,27	2,841
$\text{Bi}_2\text{Nb}_2\text{O}_8$	6,79	2,910	$\text{K}_2\text{B}_2\text{O}_4$	5,39	2,507
$2\text{PbO}\cdot\text{SiO}_2$	6,19	2,811	$\text{PbO}\cdot 2\text{SiO}_2$	6,43	2,928
$\text{Pb}(\text{BO}_2)_2$	6,09	2,865	Na_2RuO_3	5,42	2,337
Na_2WO_4	5,70	2,491	Na_2SiO_3	5,48	2,395
Na_2TiO_3	5,29	2,298	SrWO_4	6,08	2,770
K_2TiO_3	5,15	2,274	K_2RuO_3	5,28	2,313
$\text{SiO}_2\cdot\text{B}_2\text{O}_3$	6,35	2,975	NiWO_4	6,48	2,918
$\text{NbWO}_{5,5}$	6,23	2,986	$\text{Pb}_2\text{Ti}_{1,5}\text{W}_{0,5}\text{O}_6$	6,12	2,763
$\text{Pb}_2\text{Bi}_{4/3}\text{W}_{2/3}\text{O}_6$	6,53	2,829	PbSO_4	6,76	3,086
SrSO_4	6,41	2,949	SrCO_3	6,19	2,853
H_3BO_3	6,89	2,712	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$	5,76	2,677

Установленные закономерности протекания высокотемпературных твердофазных реакций с участием соединений рутения (IV) также подтверждаются результатами рентгенофазового состава образцов до и после термообработки по известным литературным данным, приведенным в табл. 8.

Фазовый состав образцов, содержащих соединения рутения (IV), до и после термообработки по литературным данным

№№ п/п	Фазовый состав образцов		Литература
	до термообработки	после термообработки	
Исходные образцы на основе RuO ₂			
1	RuO ₂ + PbZrO ₃	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + ZrO ₂ (при 320 – 1130°C)	[30]
2	RuO ₂ + Bi ₂ O ₃ + ZnO	Bi _{2-x} Zn _x Ru ₂ O _{7-x/2} + Bi ₂ O ₃	[32]
3	RuO ₂ + K _{0,5} Na _{0,5} NbO ₃	RuO ₂ + K _{0,5} Na _{0,5} NbO ₃	[40]
Исходные образцы на основе CaRuO ₃			
4	CaRuO ₃ + CaSiO ₃	RuO ₂ + Ca ₂ SiO ₄	[64]
Исходные образцы на основе Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5}			
5	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + Pb(Zr,Ti)O ₃	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + Pb(Zr,Ti)O ₃	[40]
6	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + 0,65Pb(Mg _{1/3} Nb _{2/3})O ₃ – 0,35PbTiO ₃	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + 0,65Pb(Mg _{1/3} Nb _{2/3})O ₃ –0,35PbTiO ₃	[40]
7	Pb ₂ Ru ₂ O _{6,5} + TiO ₃	RuO ₂ + PbTiO ₃	[30]
Исходные образцы на основе Bi ₂ Ru ₂ O ₇			
8	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + Al ₂ O ₃	RuO ₂ + Bi ₂ Al ₄ O ₉	[5]
9	Bi ₂ Ru ₂ O ₇ + CuO	Bi _{2-x} Cu _x Ru ₂ O ₇	[5]

Выводы. Изучены изотермические разрезы псевдобинарных оксидных систем, содержащих оксидные соединения рутения (IV). Установлено, что основным критерием, определяющим характер протекания реакций, является кислотно-основные характеристики оксидов, входящих в эти системы, а именно, их сила по отношению к диоксиду рутения как к кислоте или основанию. При этом, если кислотные свойства элемента сильнее, чем у RuO₂, происходит вытеснение последнего из соответствующего рутенита; если основные свойства элемента сильнее, чем у катиона в исходном рутените, протекает обменное взаимодействие с образованием его соединения с RuO₂ и вытеснением оксида исходного катиона; если кислотно-основные свойства элемента и катиона исходного рутенита сопоставимы – образуется твердый раствор на основе обеих катионов и оксида рутения (IV) или химическое взаимодействие не протекает.

Аналогичные химические процессы должны протекать при обжиге толсто пленочных рутениевых резисторов или изготовлении других изделий (катодов, преобразователей, термометров) на основе оксидных рутенийсодержащих материалов.

Результаты исследований будут полезны при прогнозировании фазового состава и свойств многокомпонентных оксидных систем, содержащих оксидные соединения рутения (IV), а также для прогнозирования фазового состава и функциональных свойств новых рутенийсодержащих модифицированных изделий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шориков, Ю.С. Оксиды платиновых металлов со структурой рутила в толсто пленочной технологии [Текст] / Ю.С. Шориков, А.М. Орлов // Обзорная информация Министерства цветной металлургии. – Вып. 2. – М.: ЦНИИ экономики и информации цветной металлургии, 1983. – 59 с.
2. Гаджиев, М.И. Взаимодействие Li₂O с RuO₂ [Текст] / М.И. Гаджиев, И.С. Шаплыгин, А.М. Гасаналиев // Изв. АН СССР. Неорган. мат. – 1984. – Т. 80, № 9. – С. 1600.
3. Шаплыгин, И.С. Новые фазы в системе Na – Ru – O [Текст] / И.С. Шаплыгин, В.Б. Лазарев // Журн. неорган. химии. – 1980. – Т. 25, № 121. – С. 3355–3361.
4. Твердофазное взаимодействие в системе K₂O – RuO₂ / М.И. Гаджиев // Известия высших учебных заведений. Химия и химическая технология. – 2010. – № 2. – С. 54–56.

5. Hrovat, M. Phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{PbO} - \text{Al}_2\text{O}_3$ and $\text{RuO}_2 - \text{PbO} - \text{CuO}$ systems [Text] / M. Hrovat, S. Bernik, D. Kolar // Journal of materials science letters. – 1993. – Vol. 12. – P. 1848–1850.
6. Dulac, J. Composés spinelles formés entre l'oxyde de ruthénium RuO_2 et les oxydes de certains métaux de transition. // Bulletin de la Société française de Minéralogie et de Cristallographie. – 1969. – Vol. 92, No 5. – P. 487–488.
7. Hrovat, M. Phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{PbO} - \text{TiO}_2$ and $\text{RuO}_2 - \text{PbO} - \text{NiO}$ systems [Text] / M. Hrovat, J. Holc, D. Kolar // J. Mat. Sci. Let. – 1994. – Vol. 13. – P. 1406–1407.
8. Гаджиев, М.И. Взаимодействие в системе $\text{BaO} - \text{RuO}_2$ [Текст] / М.И. Гаджиев, И.С. Шаплыгин // Журн. неорган. химии. – 1984. – Т. 29, № 8. – С. 2154–2155.
9. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{SrO} - \text{ZrO}_2$ system [Text] / M. Hrovat, S. Bernik, J. Holc // Journal of materials science letters. – 1999. – Vol. 18. – P. 1019–1020.
10. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{CaO} - \text{poor part of the } \text{RuO}_2 - \text{CaO} - \text{V}_2\text{O}_5$ system [Text] / M. Hrovat et al // Journal of Materials Science. – 2011. – Vol. 46(7). – P. 2388–2391.
11. Bernik, S. Phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Bi}_2\text{O}_3 - \text{CdO} - \text{Nb}_2\text{O}_5$ system [Text] / S. Bernik, M. Hrovat, D. Kolar // Journal of materials science. – 1989. – Vol. 24. – P. 1904–1906.
12. Hrovat, M. Phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Bi}_2\text{O}_3 - \text{PdO}$ system [Text] / M. Hrovat, S. Bernik, D. Kolar // J. Mat. Sci. Let. – 1988. – Vol. 7. – P. 637–638.
13. Liu, H. MOF-derived $\text{RuO}_2/\text{Co}_3\text{O}_4$ heterojunctions as highly efficient bifunctional electrocatalysts for HER and OER in alkaline solutions [Text] / H. Liu et al. // RSC Adv. – 2017. – Vol. 7. – P. 3686–3694.
14. Seddon, E.A., Seddon K.R. The Chemistry of Ruthenium, Volume 19 [Topics in Inorganic and General Chemistry] Editors: R. J. H. Clark. – New York: Elsevier Science, 2013. – 1373 p.
15. Maria, A. Abreu-Sepúlveda. Investigation of electrode materials based on perovskite and pyrochlore structures for the oxygen evolution reaction. – Submitted in partial fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy. – Edmund A. Hajim School of Engineering and Applied Sciences University of Rochester Rochester, New York, 2016. – 172 c.
16. Jeong, Y.U. Solution-based chemical synthesis of electrode materials for electrochemical power sources Thesis (Ph.D.) – The University of Texas at Austin, 2000. – 185 p.
17. Kmieć, R. Investigation of the magnetic properties of $\text{Y}_2\text{Ru}_2\text{O}_7$ by ^{99}Ru Mössbauer spectroscopy [Text] / R. Kmieć et al // Phys. Rev. – 2006. – B. 74. – P. 104425 (1–9).
18. Benčan, A. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Ga}_2\text{O}_3 - \text{NiO}$ system [Text] / A. Benčan, et al. // J. Mat. Sci. Let. – 1999. – 18. – P. 1563–1565.
19. Fernandez, I. A study of the new cubic, ordered perovskites BaLaMRuO_6 ($M = \text{Mg, Fe, Co, Ni, or Zn}$) and the related phases La_2MRuO_6 ($M = \text{Mg, Co, Ni, or Zn}$) by ^{99}Ru Mössbauer spectroscopy and other techniques [Text] / I. Fernandez, R. Greatrex, N.N. Greenwood // J. Solid. State Chem. – 1980. – Vol. 32(1). – P. 97–104.
20. Пат. 4012296 США, МКИ С 25 В 11/06, С 25 В 11/10, С 25 В 13/8, С 25 В 1/46 Electrode for electrolytic processes / D.E. Stephens, T.V. Bommaraju; Hooker Chemicals & Plastics Corp. – N 627428; заявл. 30.10.75; опубли. 15.03.77; НКИ 204–98. – 4 с.
21. Chemical Vapor Transport Reactions / M. Binnewies, R. Glaum, M. Schmidt, P. Schmidt. – Berlin/Boston: Walter de Gruyter, 2012. – 642 с.
22. Catalysts for ultrahigh current density oxygen cathodes for space fuel cell applications Final Report / D. Tryk, et al. [Text]. – Ohio: Case Western Reserve University Cleveland, 1991. – 76 с.
23. Normal and high pressure synthesis of mixed ruthenium-rhodium oxides of the rutile type [Text] / M.P. Herrero Fernández, A. Franco, J.C. Joubert // Materials Research Bulletin. – 1983. – Vol. 18, Is. 3. – P. 347–353.
24. Portier, J. Subramanian Acid-base behavior of oxides and their electronic structure [Text] / J. Portier et al. // Solid State Sci. – 2000. – Vol. 35. – P. 695–699.
25. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{TiO}_2 - \text{ZrO}_2$ system [Text] / M. Hrovat et al // Journal of materials science letters. – 2001. – Vol. 20. – P. 2005–2008.
26. Jeong, Y.U. Solution-based chemical synthesis of electrode materials for electrochemical power sources Thesis (Ph.D.) – The University of Texas at Austin, 2000. – 185 p.
27. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{CeO}_2 - \text{PbO}$ and $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{CeO}_2 - \text{RuO}_2$ systems [Text] / M. Hrovat et al. // Mat. Res. Bul. – 2004. – Vol. 39. – P. 1723–1728.
28. Gaudet, J. Physicochemical Characterization of Mixed $\text{RuO}_2\text{-SnO}_2$ Solid Solutions [Text] / J. Gaudet et al. // Chem. Mater. – 2005. – Vol. 176. – P. 1570–1579.
29. Варфоломеев, М.Б. Взаимодействие оксида рутения с оксидами ниобия и сурьмы [Текст] / М.Б. Варфоломеев, Ю.С. Шориков, А.С. Миронова // Изв. Вузов СССР. Химия и хим. технология. – 1983. – Т. 26, № 6. – С. 651–655.

30. Jacob, K.T. Thermodynamic assessment of phase relations in the system $\text{PbO} - \text{RuO}_2 - \text{TiO}_2$ [Text] / K.T. Jacob, R. Subramanian // *J Mater. Sci.* – 2007. – Vol. 42, Is. 7. – P. 2521–2523.
31. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{CeO}_2 - \text{PbO}$ and $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{CeO}_2 - \text{RuO}_2$ systems [Text] / M. Hrovat et al. // *Materials Research Bulletin.* – 2004. – Vol. 39. – P. 1723–1728.
32. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Bi}_2\text{O}_3 - \text{ZnO}$ and $\text{RuO}_2 - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{ZnO}$ systems [Text] / M. Hrovat et al. // *Journal of materials science letters.* – 1996. – Vol. 15. – P. 336–338.
33. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{PbO} - \text{CeO}_2$ system [Text] / M. Hrovat et al. // *Mat. Res. Bul.* – 2001. – Vol. 36. – P. 767 – 773.
34. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Bi}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$ system [Text] / M. Hrovat et al. // *J. Europ.n Cer. Soc.* – 2008. – Vol. 28. – P. 2221–2224.
35. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Bi}_2\text{O}_3 - \text{ZrO}_2$ system [Text] / M. Hrovat et al. // *Mat. Res. Bul.* – 2011. – Vol. 46. – P. 98–100.
36. Kallarackel, K.T. Refining sub-solidus phase relations in the systems $\text{CaO} - \text{RuO}_2 - \text{SiO}_2$ and $\text{CaO} - \text{RuO}_2 - \text{V}_2\text{O}_5$ [Text] / K.T. Kallarackel, P. Gupra // *Mat. Res. Bul.* – 2013. – Vol. 48(9). – P. 3082–3087.
37. Bencan, A. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Y}_2\text{O}_3 - \text{CeO}_2$ system [Text] / A. Bencan et al. // *Mat. Res. Bul.* – 2000. – Vol. 35, Is. 14–15. – P. 2415–2421.
38. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the $\text{RuO}_2 - \text{Bi}_2\text{O}_3 - \text{CeO}_2$ system [Text] / M. Hrovat et al. // *J. Mater. Res.* – 2003. – Vol. 18, No. 6. – P. 1297–1300.
39. Ruthenate and Rutheno-Cuprate Materials. Unconventional Superconductivity, Magnetism and Quantum Phase Transitions / C. Noce, A. Vecchione, M. Cuoco, A. Romano (Eds.) – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – 329 с.
40. All-Ceramic Percolative Composites with a Colossal Dielectric Response / V. Bobnar, M. Hrovat, J. Hole, M. Kosec // *Ferroelectrics Characterization and Modeling / Dr. Mickaël Lallart (Ed.).* – InTech, 2011.
41. Maeder, T. Review of Bi_2O_3 based glasses for electronics and related applications [Text] / T. Maeder // *International Materials Reviews.* – 2013. – Vol. 58, No 1. – P. 3–40.
42. Hormadaly, J., Prudenziati, M. Materials for printed films: Materials Science and Applications in Sensors, Electronics and Photonics. – Woodhead Publishing Limited, 2012. – 608 p. Oxford Cambridge Philadelphia New Delhi Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials: Number 26. – P. 30–62.
43. Inokuma, T. Control of electrical properties of RuO_2 thick film resistors [Text] / T. Inokuma, Y. Taketa // *Active and Passive Elec. Comp.* – 1987. – Vol. 12, – P. 155–166.
44. Мороз, Я.А. Закономерности синтеза гетерополисоединений с 3d-элементами [Текст] / Я.А. Мороз // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2017. – № 1. – С. 92–110.
45. Мороз, Я.А. О некоторых закономерностях термолитиза гетерополиоксометаллатов с 3d-элементами [Текст] / Я.А. Мороз, Л.А. Чердниченко // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 95 – 103.
46. Технические условия 6365-011-59839838-2005. Пасты резистивные рутениевые специальные. – М: ООО «НПП ДЕЛЬТА – ПАСТЫ», 2005. – 9 с.
47. Недорезов, В.Г. Технология керметных резистивных структур и компоненты на их основе : моногр. [Текст] / В.Г. Недорезов. – Пенза: Изд- во ПГУ. – 2005. – 220 с.
48. Кислотно-основные свойства неорганических соединений: монография / В.Ф. Зинченко, В.В. Менчук, В.П. Антонович, Е.В. Тимухин. – Одесса: Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, 2016. – 144 с.
49. Киреев, В.А. О кислотно-основных свойствах окислов [Текст] / В.А. Киреев // *Журн. физ. химии.* – 1964. – Т. 38, № 8. – С.1881–1894.
50. Шварцман, Л.А. Кислотно-основные свойства металлургических шлаков [Текст] / Л.А. Шварцман, И.А. Томилин // *Успехи химии.* – 1957. – Т. 26, № 5. – С. 554–567.
51. Рабинович, В.А. Краткий химический справочник [Текст] / В.А. Рабинович, З.Я. Хавин. – Л.: Химия, 1977. – 392 с.
52. Павлова, А.М. Методики получения уточненных шкал электроотрицательности химических элементов [Текст] / А.М. Павлова, О.С. Сироткин, Р.О. Сироткин // Вестник технологического университета. – 2017. – Т. 20, № 3. – С. 17 – 24.
53. Voeuys, Jan C.A. The periodic electronegativity table [Text] / Jan C.A. Voeuys // *Z. Naturforsch. B.* – 2008. – Vol. 63, Is. 2. – P. 199–209.
54. Годовиков, А.А. Орбитальные радиусы и свойства элементов [Текст] / А.А. Годовиков – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1977. – 156 с.
55. Noorizadeh, S. A New Scale of Electronegativity Based on Electrophilicity Index [Text] / S. Noorizadeh, E. Shakerzadeh // *J. Phys. Chem. A.* – 2008. – Vol. 112. – P. 3486–3491.

56. Ghosh, D.C. A new scale of electronegativity of 54 elements of periodic table based on polarizability of atoms [Text] / D.C. Ghosh, K. Gupta // Journal of Theoretical and Computational Chemistry. – 2006. – Vol. 5, No. 4. – P. 895–911.
57. Леонов, А.И. Высокотемпературная химия кислородных соединений церия [Текст] / А.И. Леонов. – Ленинград: Наука, Ленинградское отд, 1969. – 201 с.
58. Бахтин, А.И. Основы геохимии Учебное пособие по курсу «Геохимия» для студентов специальности 011200– Геофизика [Текст]. – Казань: Казанский гос. ун-т, 2009. – 41 с.
59. Алексеенко, В.А. Геохимия окружающей среды: учеб. пособие для вузов / В.А. Алексеенко, С.А. Бузмаков, М.С. Панин. [Текст]. – Пермь: Пермский гос. нац. иссл. ун-т, 2013. – 359 с.
60. Ramberg, H. Relative stabilities of some simple silicates as related to the polarization of the oxygen ions [Text] / H. Ramberg // Amer. Mineral. – 1954. – Vol. 39. – P. 256–271.
61. Справочник химика. Том 1. Общие сведения, строение вещества, свойства важнейших веществ, лабораторная техника [Текст] / Под ред. Б.П. Никольского. – М.–Л.: Химия, 1966. – 1071 с.
62. Jeong, N.C. Acidity Scale for Metal Oxides and Sanderson's Electronegativities of Lanthanide Elements [Text] / N.C. Jeong et al. // Angew. Chem. Int. Ed. – 2008. – Vol. 47, Is. 52. – P. 10128–10132.
63. O'Brien, Th.F. Handbook of chlor – alkali technology: Vol. I: Fundamentals [Text] / Th.F. O'Brien, T.V. Vommaraaju, F. Hine. – New York : Springer US & Business Media, 2005. – 1582 p.
64. Hrovat, M. Subsolidus phase equilibria in the CaO – poor part of the RuO₂ – CaO – SiO₂ system [Text] / M. Hrovat et al. // Materials Research Bulletin. – 2010. – Vol. 45, No 12. – P. 2040–2043.

Поступила в редакцию 18.11.2019 г.

HIGH-TEMPERATURE SOLID-PHASE REACTIONS IN OXIDE SYSTEMS INVOLVING RUTHENIUM (IV) COMPOUNDS

M.S. Lozynskyu, Y.A. Moroz

The isothermal sections of the pseudobinary oxide systems containing a compound of ruthenium (IV) have been studied. It is established that the main factor determining the nature of the reactions is the acid-base characteristics of the oxides included in these systems, namely, their strength in relation to ruthenium dioxide as an acid. The results of the research will be useful in predicting the phase composition of multicomponent oxide systems of similar compounds, as well as new ruthenium modified resistive materials.

Keywords: ruthenium (IV) compounds; pseudobinary oxide systems; X-ray phase analysis; thick-film ruthenium resistors.

Лозинский Николай Степанович

Кандидат технических наук, научный сотрудник,
ГУ «Институт физико-органической химии и
углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: lozinsky58@mail.ru

Lozynskyu Mykola

Candidate of Technical Sciences, Research Officer,
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical
Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

Мороз Ярослав Анатольевич,

Кандидат химических наук,
старший научный сотрудник,
ГУ «Институт физико-органической химии и
углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: jaroslavchem@mail.ru

Moroz Yaroslav

Candidate of Chemical Sciences,
Senior Research Officer,
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical
Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

УДК 547:54.052 + 54.057

ПОЛУЧЕНИЕ СУКЦИНАМИДОВ ПРОИЗВОДНЫХ *n*-АМИНОБЕНЗОЙНОЙ КИСЛОТЫ

© 2019. Т.Г. Тюрина, Т.В. Крюк, А.И. Лаврова

Получены сукцинамиды производных *n*-аминобензойной кислоты – анестетиков анестезина и новокаина. Установлено, что при синтезе в растворе (хлороформ, 60 °С, 1–2 ч) выход полуамида анестезина достигает 85 мас.%, новокаина – 90 мас.%. Механохимическая активация позволяет получить до 90 и 80 мас.% соответствующих сукцинамидов при соизмельчении эквимольных смесей исходных реагентов в шаровой мельнице в течение 1–3 ч при действии нагрузки 20 Н. Более продолжительная механообработка приводит к образованию смеси полуамида и циклического амида. Увеличение прилагаемой нагрузки до 340–550 Н не способствует повышению степени амидирования.

Ключевые слова: амидирование; механоактивация; янтарный ангидрид; анестезин; новокаин; ЯМР спектроскопия.

Введение. Производные *n*-аминобензойной кислоты бензокаин (анестезин) и новокаин (прокаин) используются в медицине в качестве местноанестезирующих средств. Общеклиническая практика показала, что при частом и/или длительном применении препаратов, содержащих эти анестетики, существует высокий риск формирования аллергических реакций (стоматиты, дерматиты, отек Квинке, анафилактический шок) [1]. Модификация структуры позволит устранить побочные эффекты анестетиков и создать на их основе новые лекарственные системы с широким спектром фармакологического действия. Одним из вариантов такой модификации является получение амидов производных *n*-аминобензойной кислоты, в том числе и высокомолекулярных [2].

Многими видами биологической активности обладают производные янтарной кислоты (ЯК), что обеспечивает их использование при разработках лекарственных средств с направленным и комплексным действием [3, 4]. Так, известно о противобактериальной [5], противовоспалительной [6], противоопухолевой [7] активности ряда полуамидов янтарных кислот.

Целью представленной работы являлось получение сукцинамидов на основе бензокаина (БК) и новокаина гидрохлорида (НК) различными методами.

Экспериментальная часть. Сукцинамиды получали по реакции янтарного ангидрида (ЯА) с ароматическими аминами БК и НК при соотношении ЯА : амин = 1 : 1 моль/моль. Реакцию проводили в растворе и в механохимическом реакторе. В первом случае 0,001 моль ЯА растворяли в хлороформе (4 мл) в круглодонной колбе объемом 30 мл. К полученному раствору добавляли 0,001 моль фармацевтической субстанции БК или НК и нагревали смесь при 60 °С с обратным холодильником на масляной бане в течение заданного времени. После охлаждения реакционной смеси содержимое колбы переносили на стеклянный фильтр с размером пор 16 мкм, промывали хлороформом (6 мл) и фильтровали с помощью водоструйного насоса (давление 50 мм рт. ст.). Полученный продукт сушили в вакууме при комнатной температуре (~25 °С). Раствор, полученный после промывки содержимого реакционной колбы, собирали и помещали в холодильник. Через 2–3 ч в растворах, содержащих БК, наблюдали образование белых хлопьев, которые отфильтровывали и высушивали как описано выше. Выход продукта в реакции с БК составил 72–92 %, с НК – 90 %.

Механическую обработку БК, НК, ЯА и смесей веществ проводили в лабораторной шаровой мельнице MLW KM1 (3000 об·мин⁻¹, масса шара 0,2 кг; прилагаемая нагрузка 20–30 Н, регулировка нагрузки за счет подачи тока 143–272 мА, масса навески ~2 г) и в лабораторном вибрационном истирателе 75Т–ДрМ (масса рабочего тела 1,13 кг; виброускорение 300–490 м·с⁻², виброскорость 0,942–1,57 м·с⁻¹, действующая нагрузка 339–550 Н, масса навески ~4,5 г).

Все полученные продукты анализировали на содержание карбоксильных групп (ω (COOH)) методом кислотно-основного титрования и на содержание первичной ароматической аминогруппы методом нитритометрии [8] с помощью иономера И-160МИ (стеклянный электрод ЭС-10603, хлорсеребряный электрод ЭСр-10103 и платиновый электрод ЭПЛ-02, хлорсеребряный электрод ЭСр-10103). Объем титранта, пошедший на титрование, определяли по кривым титрования как точку экстремума на дифференциальной кривой первого порядка. Количество HCl в прокаине устанавливали с помощью аргентометрического титрования [9].

Спектры ЯМР ¹H и ¹³C растворов исходных и синтезированных веществ регистрировали с помощью прибора Bruker Avance II (400 и 100 МГц) при 25 °С (в CDCl₃ или DMSO-d₆).

Результаты и их обсуждение. Дифференциальные кривые титрования гидролизованного ЯА и продуктов его амидирования анестезином в растворе представлены на рис. 1. Как видно при сравнении кривых 1 и 2–3 на рис. 1, для модифицированных образцов точки экстремума на зависимости $\Delta pH/\Delta V_{NaOH} = f(V_{NaOH})$ наблюдаются при значительно меньшем объеме щелочи, что говорит о связывании карбоксильных групп ЯА аминогруппой анестетика. Аналогичные результаты получены при взаимодействии ЯА и НК. Кроме того, согласно результатам нитритометрии, в продуктах модификации содержание исходных аминов не превышает $3 \cdot 10^{-5}$ моль (3,3 мас.% от начального количества), что дополнительно подтверждает амидирование янтарного ангидрида анестетиками в выбранных условиях.

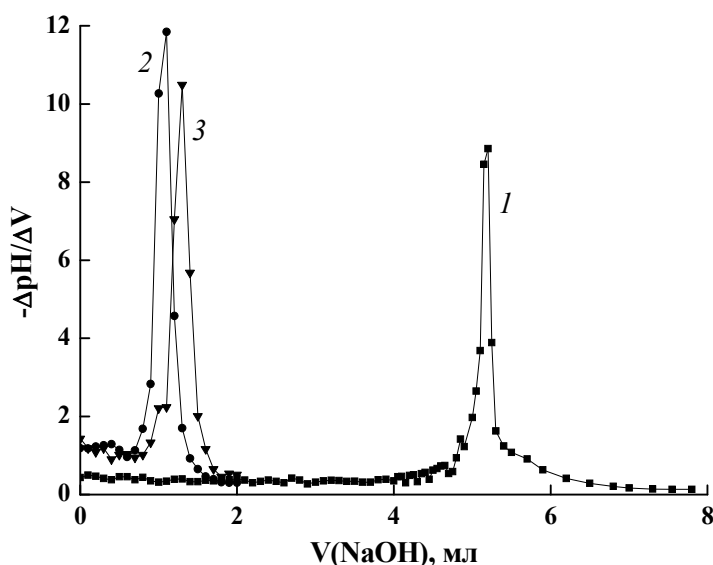


Рис. 1. Дифференциальные кривые 1-го порядка потенциометрического титрования янтарного ангидрида (1) и продуктов его амидирования анестезином в хлороформе при 60 °С в течение 1 ч (2), 4 ч (3)

На основе данных рН-метрии был произведён расчет содержания карбоксильных групп и проведено сопоставление полученных значений с этим показателем для полуамида

(ПА) янтарного ангидрида и анестезина или новокаина (17,0 или 12,1 мас.% соответственно). Во всех случаях найденные для продуктов реакции с БК значения $\omega(\text{COOH})$ на 1,5–6 мас.% больше, чем для соответствующих сукцинамидов. Из этих результатов следует, что выделенный полуамид содержит примесь непрореагировавшего ЯА.

Принимая, что мольная доля образовавшегося ПА равна x , доля непрореагировавшего ЯА составляет $(1-x)$. Тогда содержание карбоксильных групп в образце (в мас.%) по результатам титрования определяется уравнением:

$$\omega(\text{COOH}) = \frac{45 \cdot (x + 2 \cdot (1-x))}{x \cdot M_{\text{ПА}} + (1-x) \cdot M_{\text{ЯА}}} \cdot 100 \% = \frac{4500 \cdot (2-x)}{x \cdot M_{\text{АН}} + M_{\text{ЯА}}},$$

где $M_{\text{ПА}}$, $M_{\text{ЯА}}$, $M_{\text{АН}}$, 45 – молекулярная масса сукцинамида, янтарного ангидрида, анестетика и карбоксильной группы соответственно, г/моль.

Отсюда

$$x = \frac{9000 - M_{\text{ЯА}} \cdot \omega(\text{COOH})}{4500 + M_{\text{АН}} \cdot \omega(\text{COOH})}.$$

Доля ПА, определенная по результатам кислотно-основного титрования, изменяется в пределах ~ 70–100 мол.% и в среднем составляет ~ 88 мол.% или 78 мас.% для сукцинамида анестезина, 96 мол.% или 98 мас.% для сукцинамида новокаина (см. табл.). Обращает на себя внимание тот факт, что максимальное количество ПА было получено за 2 (БК) или 1 ч (НК), при дальнейшем увеличении продолжительности реакции оно снижалось. С учетом общего выхода выделенного продукта, содержащего примесь ЯА (см. табл.), выход целевого полуамида БК и НК составил ~ 85 и 90 мас.% после 2 и 1 ч модификации соответственно.

Таблица

Данные состава продуктов модификации янтарного ангидрида анестезином и новокаином гидрохлоридом в хлороформе при 60 °С

Амин	Время, ч	$\omega(\text{COOH})$, мас.% (расчет ¹⁾ / эксперимент)	Выход продукта, %	ПА, мол. доли	ПА, мас. доли
Анестезин	1	17,0 / 20,4	79,8	0,89	0,80
	2	17,0 / 18,4	92,3	0,95	0,92
	3	17,0 / 21,1	79,3	0,86	0,75
	4	17,0 / 22,7	81,9	0,82	0,66
	5	17,0 / 20,8	71,6	0,87	0,77
Новокаина гидрохлорид	1	12,1 / 11,9	90,3	1,0	1,0
	4	12,1 / 12,6	89,5	0,92	0,96

¹⁾ $\omega(\text{COOH})$ рассчитывали для случая 100 %-ного превращения карбоксильных групп ЯА в полуамидные

В спектре ¹H ЯМР (рис. 2) продукта модификации ЯА анестезином (ДМСО-d₆, 60 °С, 2 ч) присутствуют триплет (1), квадруплет (2) и два дублета (3, 4) с центрами 1,29; 4,26; 7,72 и 7,88 м. д. соответственно. Интегральные интенсивности этих сигналов соотносятся как 3 : 2 : 2 : 2, что позволяет отнести сигнал 1 к резонансу протонов метильной группы, 2 – протонов метиленовой группы, 3 и 4 – ароматических протонов фрагмента анестезина в составе ПА. В исходном амине соответствующие сигналы наблюдаются при 1,255; 4,18; 6,57 и 7,62 м. д. Сигнал, соответствующий протонам аминогруппы БК (синглет с максимумом при 5,95 м. д.), отсутствует, при этом проявляется синглет 5 в области 10,31-10,33 м. д. с максимумом при 10,32 м. д.; соотношение интегральных интенсивностей сигналов 2 и 5 составляет 2 : 1. На

основании данных о виде, положении, интенсивности пиков на рис. 3, и сведений о положении синглета протонов NH для полуамида ЯК и сульфаниламида (10,2 м. д.) [10, 11], сигнал **5** однозначно можно отнести к группе –NH– сукцинамида. В спектре полученного продукта также присутствуют два мультиплета (**6**, **7**) и два синглета (**8**, **9**) с максимумами при 2,54, 2,59, 2,41 и 2,89 соответственно, которые относятся к протонам группы –CH₂–CH₂– фрагмента ЯК в полуамиде (**6**, **7**), не вступившей в реакцию с БК янтарной кислоте (**8**) и свободному ЯА (**9**). Сигнал **10** при 12,17 м. д. относится к протону в карбоксильных группах полуамида и ЯК. С результатами ПМР согласуются данные ¹³C ЯМР. Так, в спектре ¹³C ЯМР рассматриваемого продукта также присутствуют сигналы 4--[4-(этоксикарбонил)фенил]амино}-4-оксобутановой кислоты (полуамида ЯК и БК) и не вступившего в реакцию янтарного ангидрида (28,58 м. д. –CH₂–CH₂–, 173,45 м. д. –C(O)OC(O)–). Количество ПА в образце по данным ¹H ЯМР спектроскопии составляет 90 мол.%, суммарное количество свободных ЯА и ЯК – 10 мол.%.

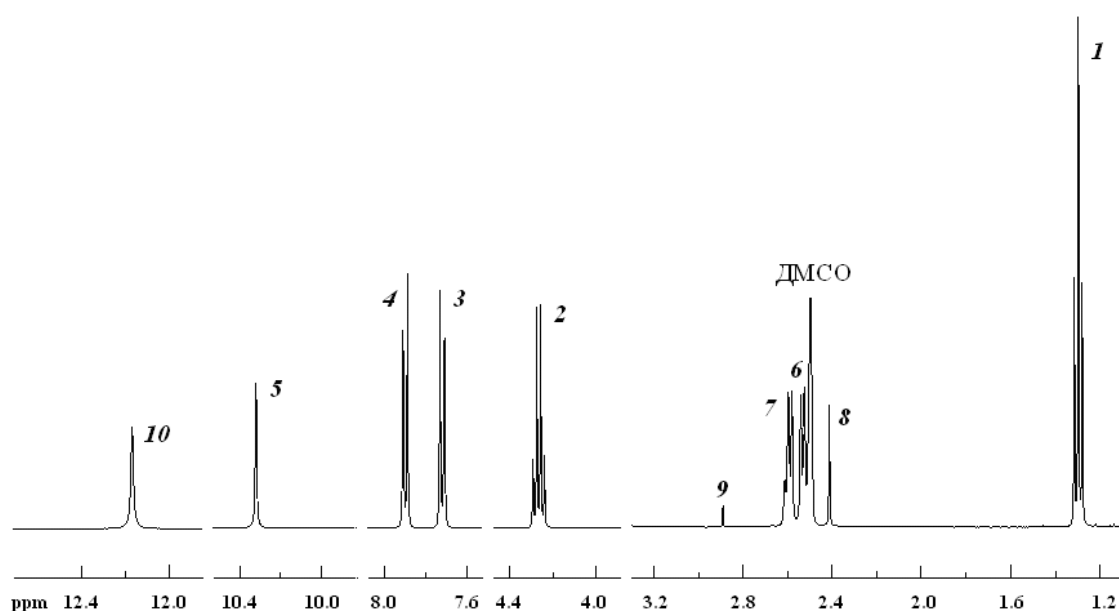


Рис. 2. Фрагменты спектра ¹H ЯМР продукта реакции амидирования янтарного ангидрида в хлороформе (60 °С, 2 ч) анестезином (DMSO-d₆, 400 МГц, 25 °С)

Таким образом, основным продуктом амидирования ЯА анестетиками в растворе хлороформа является сукцинамид (рис. 3), максимальное количество которого образуется при продолжительности реакции от 1 до 2 ч.

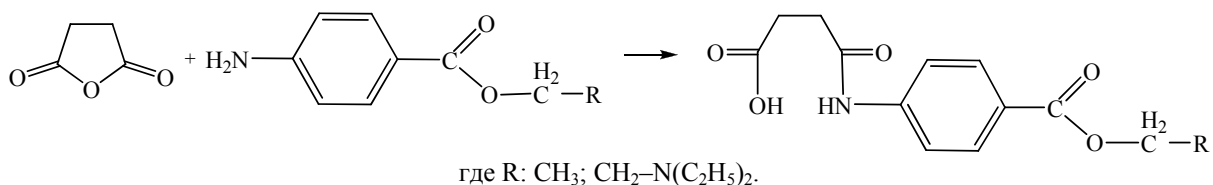


Рис. 3. Схема реакции амидирования янтарного ангидрида анестетиками в растворе хлороформа при 60 °С

С целью повышения степени амидирования, снижения энергозатрат, а также исключения стадий выделения продукта реакции, удаления из него растворителя и сушки, реакцию ЯА с анестетиками провели в механохимическом реакторе. Следует отметить, что физико-химические свойства исходных реагентов остаются неизменными

после их обработки в выбранных атриторах, о чем свидетельствует неизменный вид ЯМР и ИК–спектров образцов ЯА, БК и НК исходных и выдержанных в камере вибромашины в течение 1 мин или в шаровой мельнице в течение 2–4 ч. После механоактивации не изменяется количество карбоксильных групп в ЯА, а также мольное соотношение НС1 и диэтиламиноэтилового эфира *n*-аминобензойной кислоты в прокаине.

С применением метода ЯМР (рис. 4) установлено, что амидирование ЯА анестезином даже при минимальной нагрузке (20 Н) начинается с первых минут соизмельчения смеси.

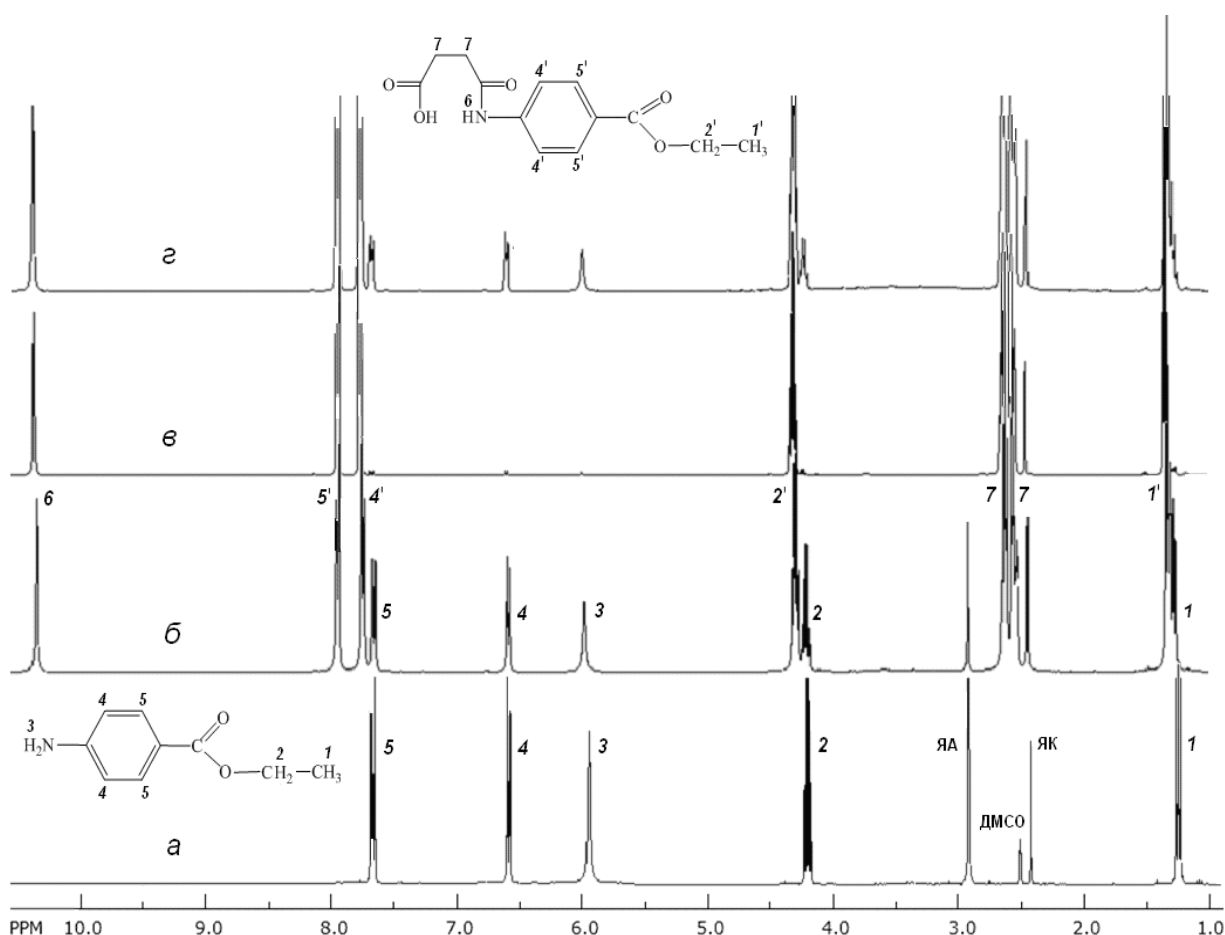


Рис. 4. Спектры ^1H ЯМР эквимольной смеси янтарного ангидрида с анестезином (а) и продуктов ее механообработки (20 Н) в течение 3 мин (б), 2 ч (в), 4 ч (з) (ДМСО- d_6 , 400 МГц, 25 °С)

При сравнении спектров ^1H ЯМР а и б на рис. 4, соответствующих смеси реагентов до и через 3 мин механообработки, видно, что на спектре б появляются дополнительные сигналы – синглет 6 с центром 10,31 м. д. и два равноценных дублета 7 при 2,45–2,55, 2,55–2,65 м. д., принадлежащих протонам аминогруппы БК и группы – $\text{CH}_2\text{--CH}_2\text{--}$ ЯК полуамида. Также на спектре б присутствуют сигналы, соответствующие резонансу протонов в фрагменте анестезина, входящего в состав ПА: 1' (CH_3), 2' (CH_2), 4', 5' (СН бензольного кольца). Интенсивность этих сигналов превышает интенсивность сигналов протонов исходного БК (1–5); количество сукцинамида составляет 62,5 мол.%. Дальнейшая механоактивация приводит к повышению степени конверсии смеси и через 2 ч реакции, как видно на спектре в на рис. 5, в системе остается незначительное количество БК (1 мол.%) и ЯК (10 мол.%). Однако, повышение

времени выдержки реагентов в механохимическом реакторе приводит к частичному распаду полуамида и регенерации исходных веществ (рис. 4з).

С помощью кислотно-основного титрования, результаты которого хорошо согласуются с данными ЯМР-спектроскопии, было проверено влияние на механохимическую реакцию ЯА с анестетиками продолжительности механоактивации и величины действующей нагрузки. Установлено, что максимальное количество ПА образуется в шаровой мельнице при соизмельчении реагентов в течение 1–3 ч при величине тока 210 мА, при этом эффективность механохимической активации амидирования ЯА анестезином несколько выше, чем новокаином (рис. 5а), что может быть связано с гидрохлоридной формой НК. При увеличении продолжительности реакции до 4 ч при различных значениях величины тока выход сукцинамида заметно снижается, однако, образуется циклический амид (рис. 5б). Повышение величины нагрузки от 20 до 340–550 Н, как оказалось, не оказывает влияния на процесс амидирования. Так, после обработки смеси ЯА и БК в течение 2 ч в шаровой мельнице при величине тока 210 мА образуется 89, 4 ч – 48 мол.% полуамида; в течение 2 мин в вибромашине – 80, 5 мин – 61 мол.% ПА. Таким образом, увеличение продолжительности механоактивации снижает эффективность амидирования независимо от величины приложенного давления.

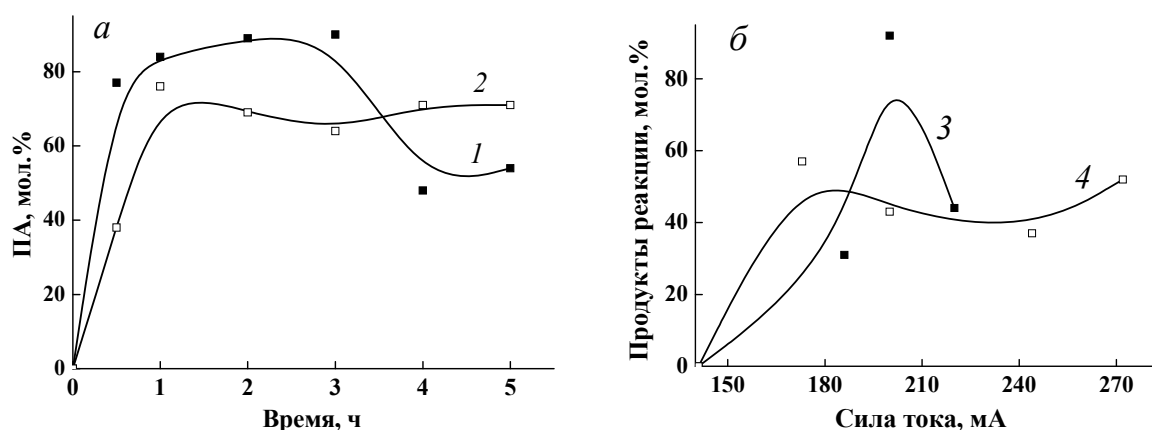


Рис. 5. Зависимость количества продуктов амидирования, образующихся при механообработке смеси ЯА с БК (1, 3, 4) и НК (2) в шаровой мельнице, от времени при величине тока 200 мА (а) и от величины тока (б) в течение 2 ч (3) и 4 ч (4).

Продукты реакции: 3 – полуамид; 4 – смесь полуамида и циклического амида.

Выводы. С использованием анестезина и новокаина гидрохлорида синтезированы соответствующие сукцинамиды в растворе и в механохимическом реакторе. Состав полученных образцов подтвержден методами ЯМР спектроскопии, рН-, нитрито- и аргентометрии.

Показано, что при синтезе в растворе (хлороформ, 60 °С, 1–5 ч) основным продуктом амидирования является полуамид, выход которого составляет ~ 78 мас.% (БК) и 98 мас.% (НК). При механохимической активации максимальное количество сукцинамида (~ 90 мас.%) образуется при соизмельчении смеси ангидрида с анестезином в шаровой мельнице в течение 1–3 ч при действии нагрузки 20 Н. Более продолжительная механообработка приводит к снижению степени конверсии смеси исходных реагентов и образованию циклического амида. Увеличение прилагаемой нагрузки до 340–550 Н не способствует повышению степени амидирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лусс Л. В. Проблемы диагностики и профилактики лекарственной аллергии к местным анестетикам [Текст] / Л. В. Лусс // *Практ. медицина*. – 2009. – № 3. – С. 32-36.
2. Firyal M. A. Casein Grafted Maleic anhydride Copolymer and Substituted with Procaine [Text] / M. A. Firyal, H. A. Sana // *J. Nat. Sci. Res.* – 2015. – Vol. 5, No. 12. – P. 54-60.
3. Палагина И. А. Некоторые аспекты механизма влияния сукцинамидов на метаболический гомеостаз организма [Текст] / И. А. Палагина // *Токсикологич. вестн.* – 2018. – № 3. – С. 27-31.
4. Препараты янтарной и фумаровой кислот как средства профилактики и терапии различных заболеваний (обзор) [Текст] / С. А. Шахмарданова, О. Н. Гулевская, Я. А. Хананашвили [и др.] // *Журн. фундам. медицины и биологии*. – 2016. – № 3. – С. 16-30.
5. Isolation, structure determination and antibacterial activities of succinamide conjugate diacid from *Acinetobacter* sp. BJ-L [Text] / D. Wu, H. Chang, Y. Wang, M. Xin // *Microbiol. Res.* – 2011. – Vol. 166, No. 3. – P. 155-160.
6. Synthesis, anti-inflammatory and antitumor activity of substituted succinamic acids [Text] / D. Burdulene, A. Palaima, Z. Stumbryavichyute [et al.] // *Pharm. Chem. J.* – 1999. – Vol. 33. – P. 125-127.
7. Synthesis and Antitumor Activity of Substituted Succinamides Using a Potato Disc Tumor [Text] / F. Hadizadeh, A. Moradi, G. Naghibi [et al.] // *Int. J. Biomed. Sci.* – 2007. – Vol. 3, No. 1. – P. 60-64.
8. ФС 2.1.0038.15 «Сульфаниламид» [Электронный ресурс] // Госфармакопея РФ. – Т. 3. – 2018. – С. 4836-4837. – Режим доступа: <https://www.rosminzdrav.ru/poleznye-resursy/xiv-izdanie-gosudarstvennoy-farmakopei-rossiyskoj-federatsii>.
9. Руководство к лабораторным занятиям по фармацевтической химии [Текст] / Под редакцией А. П. Арзамасцева. – М.: Медицина, 2001. – 384 с.
10. Тюрина, Т. Г. Амидирование янтарного ангидрида алифатическими алкиламинами и сульфаниламидом [Текст] / Т. Г. Тюрина, Т. В. Крюк, Д. Ю. Нестеренко // *Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки*. – 2016. – № 4. – С. 103-109.
11. Al-Sehemi, A. G. M. Structural study and biological valuation of some novel 1,2,4-triazole, thiazole, and bithiazole derivatives bearing sulfonamide moiety [Text] / A. G. M. Al-Sehemi // *Phosphorus, Sulfur Silicon Relat. Elem.* – 2009. – Vol. 84, No 8. – P. 1991-2003.

Поступила в редакцию 25.10.2019 г.

SYNTHESIS OF SUCCINAMIDES OF *p*-AMINO BENZOIC ACID DERIVATIVES

T.G. Tyurina, T.V. Kryuk, A.I. Lavrova

The succinamides of *p*-aminobenzoic acid derivatives, namely such anesthetic drugs as benzocaine and procaine, were obtained. It was established that the synthesis in solution (chloroform, 60 °C, 1–2 h) resulted in a benzocaine semi-amide with yield of 85 mol%, procaine semi-amide – 90 mol%. In case of mechanochemical activation the maximum amount of succinamide is formed by co-grinding anhydride–anesthetic drugs equimolar mixture in a ball mill for 1–3 hours by a load of 20 N. Longer mechanoamidation leads to the formation of semi-amide and cyclic amide mixture. A rise of the applied load to 340–550 N does not increase the degree of amidation.

Keywords: amidation; mechanical activation; succinic anhydride; benzocaine; procaine; NMR spectroscopy.

Тюрина Татьяна Григорьевна

Доктор химических наук;
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: t_tyurina@mail.ru

Tyurina Tatyana

Doctor of Chemical Sciences,
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk

Крюк Татьяна Владленовна

Кандидат химических наук;
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: ktvl2010@mail.ru

Kryuk Tatyana

Candidate of Chemical Sciences,
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk

Лаврова Анна Игоревна

Аспирант,
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: nutka.lavrova@mail.ru

Lavrova Anna

Post-graduate student,
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk

УДК 544.72:541.183 + 547.992

ФОРМИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ СОЛЕЙ ГУМИНОВЫХ И ГИМАТОМЕЛАНОВЫХ КИСЛОТ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЬ-ГАЗ

© 2019. С.Л. Хилько, М.И. Рогатко

Исследованы закономерности формирования поверхностных слоев растворов солей гуминовых и гиматомелановых кислот на границе раздела жидкость – газ. Тензиометрические экспериментальные данные были проанализированы на основе уравнений состояния, изотермы адсорбции и функции распределения по состояниям адсорбированных молекул полиэлектролита с различной молярной поверхностью (модель двумерных растворов). Экспериментальные зависимости равновесного поверхностного натяжения солей гуминовых и гиматомелановых кислот подчиняются теоретической модели реальных двумерных растворов биополимеров при бимолекулярной адсорбции. Динамика формирования поверхностных слоев солей гуминовых веществ описывается барьерным (недиффузионным) механизмом. Показано, что фракции гиматомелановых кислот являются наиболее поверхностно активной частью гуминовых кислот.

Ключевые слова: гуминовые кислоты; гиматомелановые кислоты; полиэлектролиты; поверхностное натяжение; поверхностные слои; модель двумерных растворов; бимолекулярная адсорбция; динамическая тензиометрия.

Введение. Гуминовые соединения относятся к классу высокомолекулярных ароматических полиоксиполикарбоновых кислот. Гуминовые и гиматомелановые кислоты считаются наиболее химически активными частями органогенных субстратов (уголь, торф, сапрпель, горючие сланцы) [1–3], что делает их уникальными объектами для решения химически важных задач различного плана. Гиматомелановые кислоты (ГМК) – это спирторастворимые фракции гуминовых кислот (ГК), которые, в свою очередь, являются растворимыми в щелочах и нерастворимыми в кислотах фракциями гумусовых веществ.

Интерес к гуминовым соединениям обусловлен их составом. Эти соединения представляют собой совокупность крупных макромолекулярных структур с высокоароматическими сопряженными фрагментами и алифатической частью, содержащими большое количество активных кислых групп, карбоксильных и гидроксильных, а также эфирные и аминогруппы, которые определяют их реакционную способность, физико-химические и биологические свойства.

Водорастворимые соли щелочных металлов (Na, K) гуминовых соединений проявляют выраженную поверхностную активность на межфазных границах и обладают свойствами анионных поверхностно-активных веществ (ПАВ) за счет сочетания гидрофобных и гидрофильных участков в молекулах. Они способны адсорбироваться на различных границах раздела фаз: вода-уголь, вода-глина и масло-вода. Многофункциональность действия солей гуминовых веществ в качестве ПАВ позволяет использовать их в различных системах, где традиционно используются синтетические, обычно дорогостоящие, ПАВ. Нативные и модифицированные гуминовые вещества являются основой для получения эффективных ПАВ, которые могут использоваться в качестве моющих средств [4, 5], как стабилизаторы буровых растворов [6], как пластификаторы топливных суспензий [7, 8] и керамических композиций [9], как эмульгаторы и стабилизаторы эмульсий и микроэмульсий [10, 11], стабилизаторы наноразмерных систем [12, 13]. Кроме того – это эффективные

удобрения [14], биологически-активные пищевые добавки, а также основа для получения лекарственных препаратов [15].

Известно, что соли гуминовых веществ характеризуются поверхностной активностью на границе раздела жидкость – газ [16] и способны образовывать мицеллоподобные агрегаты при высоких концентрациях. Однако в литературе отсутствуют результаты детальных исследований динамического и равновесного поверхностного натяжения и механизма адсорбции различных фракций гуминовых веществ на этой межфазной границе.

Целью настоящей работы было исследование закономерностей формирования поверхностных слоев растворов солей гуминовых и гиматомелановых кислот, полученных при разных температурах экстракции, на границе раздела жидкость-газ.

Экспериментальная часть. Гуминовые кислоты выделяли из образцов бурого угля Александрийского месторождения после механохимического сульфирования, согласно [17], однократной экстракцией при соотношении твердой и жидкой фаз 1 : 8 и при температуре 100 °С (ГК₁₀₀). Затем из «сырого» экстракта получали нерастворимые в воде гуминовые кислоты осаждением 5 % раствором HCl, который добавляли при постоянном перемешивании до pH 1–2. Выпавший осадок ГК отделяли от надосадочной жидкости центрифугированием. Осадок промывали дистиллированной водой до нейтральной реакции среды (pH 6–7). Промытые гуминовые кислоты сушили при t = 80 °С до постоянной массы. Растворы гуматов натрия (ГН) для исследования получали растворением промытых и сухих гуминовых кислот в 0,1 н растворе NaOH.

Гиматомелановые кислоты получали из гуминовых кислот (ГК₁₀₀) однократной экстракцией этиловым спиртом при соотношении твердой и жидкой фаз 1 : 10, при двух температурах: 20 °С и температуре кипения спирта, 80 °С. Образцы гиматомелановых кислот: ГМК₈₀ из ГК₁₀₀ (ГМК₈₀₋₁₀₀) и ГМК₂₀ из ГК₁₀₀ (ГМК₂₀₋₁₀₀).

Экстракцию проводили при перемешивании смеси компонентов в интенсивном турбулентном режиме с использованием механической мешалки при скорости вращения 900 об/мин в течение 2-х часов. Отделяли спирт упариванием, а остаток сушили в сушильном шкафу до постоянной массы. Затем весовым методом из сухих гиматомелановых кислот готовили растворы натриевых солей необходимых концентраций при растворении их в 0,1 н растворе NaOH.

Поверхностное натяжение (γ , мН/м) водных растворов фракций гуминовых веществ при фиксированной концентрации в зависимости от времени жизни поверхности (t, сек) измеряли динамическим методом кольца Дю Нуи (тензиометр TE-1, Lauda, Germany) в интервале от 10 до 10⁵ секунд. Ошибка при измерении поверхностного натяжения не превышала $\pm 0,1$ мН/м.

Результаты и их обсуждение. Гуминовые соединения являются биогеополимерами, их состав определяется набором сходных молекул, который отражает характерное поведение полимеров нерегулярного строения [18]. В литературе приводятся экспериментально обоснованные основные структурные фрагменты гуминовых веществ, представляющие собой минимальные по размеру части их молекул, которые содержат все важнейшие структурные составляющие [19–22].

На рис. 1 приведены вероятные молекулярные фрагменты гуминовых соединений: модель центральной гидрофобной части молекул Орлова [1] и модель периферической части молекул Temple-Northeastern-Birmingham, которая наиболее полно отражает результаты экспериментальных исследований и ретробиосинтетического анализа [20].

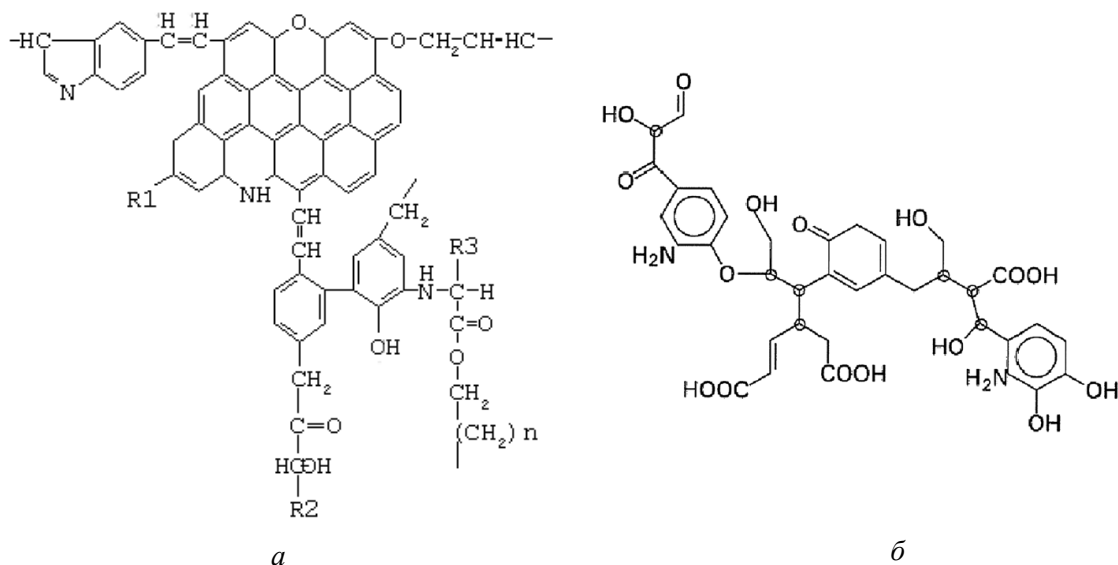


Рис. 1. Схемы строения структурных ячеек гуминовых соединений:
a – Модель Орлова, *б* – Модель Temple-Northeastern-Birmingham

На рис. 2 и рис. 3 приведены экспериментальные зависимости изменения динамического поверхностного натяжения от времени для солей гуминовых и гиматомелановых кислот при разных концентрациях растворов (метод кольца Дю Нуи). Время формирования поверхностных слоев растворов солей гуминовых кислот весьма значительно ($> 10^4$ секунд). Величина минимальных значений поверхностного натяжения существенно зависит от концентрации раствора. Время достижения равновесных значений поверхностного натяжения для солей гиматомелановых кислот также зависит от концентрации их растворов, при этом для концентраций, $C_{ГМК} > 0,5\%$, поверхностный слой формируется гораздо быстрее, $t \approx 10^3$ секунд. Кроме того, соли гиматомелановых кислот более эффективно снижают поверхностное натяжение по сравнению с солями гуминовых кислот. Минимальные значения равновесного поверхностного натяжения их растворов на границе раздела жидкость-газ достигают 38–40 мН/м.

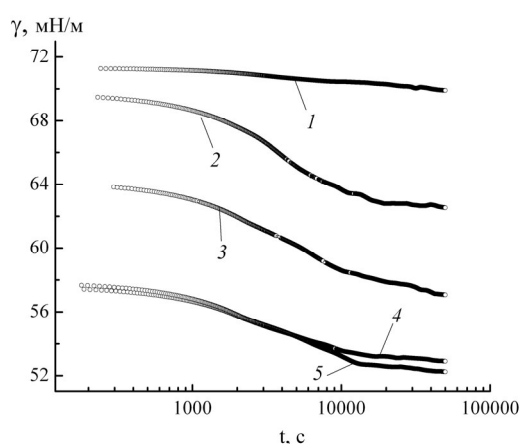


Рис. 2. Изменение динамического поверхностного натяжения (γ) от времени для растворов гумата натрия ($ГК_{100}$) при различных концентрациях, C , %: 1 – 0,01; 2 – 0,05; 3 – 0,10; 4 – 0,50; 5 – 1,00

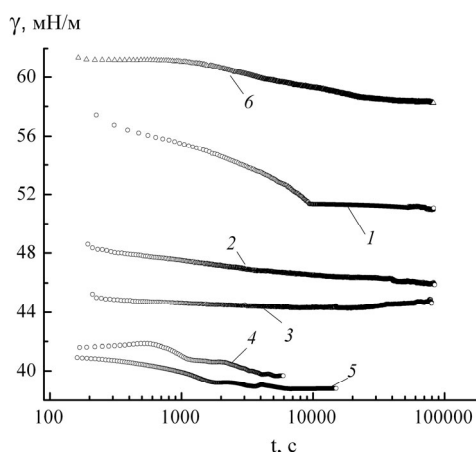


Рис. 3. Изменение динамического поверхностного натяжения (γ) от времени для растворов соли гиматомелановой кислоты ($ГМК_{80-100}$) при различных концентрациях. C , %: 1 – 0,01; 2 – 0,05; 3 – 0,10; 4 – 0,50; 5 – 0,07; 6 – остаток после экстракции $ГМК_{80-100}$ из гуминовой кислоты $ГК_{100}$ ($C = 0,50\%$)

На рис. 3 (кривая 6) для сравнения приведена зависимость изменения динамического поверхностного натяжения от времени для остатка ГК после экстракции гиматомелановых кислот. Такие растворы проявляет низкую поверхностную активность. Это значит, что фракции гиматомелановых кислот являются наиболее поверхностно-активной частью гуминовых кислот.

Адсорбционное поведение полиэлектролитов на границе раздела жидкость – газ существенно отличается от такового для низкомолекулярных ПАВ, поскольку молярная поверхность полиэлектролитов велика и может изменяться при варьировании поверхностного натяжения [23].

Известно [24], что в зависимости от степени диссоциации функциональных групп в молекулах гуминовых соединений (прежде всего, -COOH и -OH) и соотношения сил внутри- и межмолекулярных взаимодействий макромолекулы гуминовых веществ могут принимать различные конформационные состояния – от жесткого клубка до гибкой линейной цепи. Можно предположить, что тензиометрические характеристики водных растворов солей гуминовых соединений должны быть близки к поверхностно-активным свойствам природных полиэлектролитов белковой природы.

Для описания равновесного поверхностного натяжения и адсорбции ПАВ, которые могут существовать в состояниях с различной молярной поверхностью, используют теоретическую модель неидеального двумерного раствора слабых полиэлектролитов белковой природы [25–33]. Эта модель основана на предположении о том, что молекулы полиэлектролитов могут находиться в n состояниях с молярной поверхностью, изменяющейся от максимального значения, ω_{max} , при низкой степени заполнения поверхности молекулами полиэлектролита до минимального значения, ω_{min} , при высокой степени заполнения поверхностного слоя.

Величина суммарной адсорбции молекул полиэлектролитов во всех n состояниях определяется соотношением:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i$$

Общая степень заполнения поверхности раздела молекулами полиэлектролита:

$$\theta_p = \omega \Gamma = \sum_{i=1}^n \omega_i \Gamma_i,$$

где ω – средняя молярная поверхность полиэлектролита, определяемая как:

$$\omega = \frac{\omega_1 \Gamma_1 + \omega_2 \Gamma_2 + \dots}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots},$$

где $\omega_i = \omega_1 + (i-1)\omega_0$, ($1 \leq i \leq n$) – молярная поверхность полиэлектролита в i -ом состоянии, ω_0 – инкремент молярной поверхности при переходе от одного состояния к соседнему. $\omega_1 = \omega_{min}$, $\omega_{max} = \omega_1 + (n-1)\omega_0$.

Уравнения состояния поверхностного слоя и изотермы адсорбции для каждого j -го состояния молекулы полиэлектролита в поверхностном слое имеют вид:

$$-\frac{\Pi \omega_0}{RT} = \ln(1 - \theta_p) + \theta_p(1 - \omega_0 / \omega_p) + a_p \theta_p^2,$$

$$b_p c_p = \frac{\omega_p \Gamma_{pj}}{(1 - \theta_p)^{\omega_j / \omega_p}} \exp[-2a_p \frac{\omega_j}{\omega_p} \theta_p],$$

где $\Pi = (\gamma_o - \gamma)$ – поверхностное давление; γ_o – поверхностное натяжение растворителя; R – универсальная газовая постоянная; T – температура; a_p – параметр межмолекулярного взаимодействия, c_p – концентрация полиэлектролита в объеме раствора, b_p – константа адсорбционного равновесия, ω_p – средняя молярная поверхность.

В теоретической модели адсорбции полиэлектролитов предполагается [25–33], что константы равновесия b_{pj} для всех j состояний от $i = 1$ до $i = n$ имеют одно и то же значение, и поэтому константа адсорбционного равновесия для молекулы полиэлектролита в целом равна $b = \sum b_{pj} = nb_{pj}$.

Функция распределения адсорбций полиэлектролита в различных состояниях определяется соотношением:

$$\Gamma_{pj} = \Gamma_p \frac{(1 - \theta_p)^{(\omega_j - \omega_1) / \omega_p} \exp[2a_p \theta_p \frac{\omega_j - \omega_1}{\omega_p}]}{\sum_{i=1}^n (1 - \theta_p)^{(\omega_i - \omega_1) / \omega_p} \exp[2a_p \theta_p \frac{\omega_i - \omega_1}{\omega_p}]}$$

При высоких концентрациях растворы полиэлектролитов (в частности, белков) способны образовывать бислои (или полислои) на жидких границах раздела фаз [25–26]. Степень заполнения второго слоя пропорциональна константе адсорбционного равновесия b_{II} и степени заполнения первого слоя (при этом предполагается, что образование второго и последующих слоев не влияет на поверхностное натяжение). Изотерма бислоиной адсорбции (Γ_{Σ} – суммарная адсорбция в первом и втором слоях) имеет вид [25, 26]:

$$\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_p \left[1 + \frac{b_{II} c}{1 + b_{II} c} \right]$$

Для описания адсорбционного поведения полиэлектролитов в приведенной выше модели используются следующие параметры: ω_{max} , ω_{min} , ω_0 , a , b . Параметры ω_{max} и ω_{min} определяли по результатам измерений толщины адсорбционного слоя $\delta \cong V / \omega_{max(min)}$, где V – молярный объем полиэлектролита. Согласно [34], толщина адсорбционного слоя для различных образцов солей гуминовых веществ может изменяться в пределах от 3 до 20 нм. Параметры V , ω_p , a_p и b_p находили фитированием экспериментальной зависимости $\gamma = f(C_{ПАВ})$ с использованием расчетных программ [35]. Значения параметров модели для солей гуминовых соединений приведены в таблице.

Таблица
Параметры модели двумерного раствора полиэлектролитов для гуминовых соединений

Образец	a	$\omega_0 \times 10^5$, $\frac{м^2}{моль}$	$\omega_{min} \times 10^6$, $\frac{м^2}{моль}$	$\omega_{max} \times 10^6$, $\frac{м^2}{моль}$	$b \times 10^4$, $\frac{м^3}{моль}$	$\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}}$	$D \times 10^{-10}$, $\frac{м^2}{сек}$	\bar{M} *	[COOH], мг-экв/г
ГК ₁₀₀	0,5	2,75	3,30	13,00	1,00	3,94	1,15	14000	3,2
ГМК ₈₀₋₁₀₀	1,2	7,25	3,50	20,00	1,50	5,70	1,20	12000	2,4
ГМК ₂₀₋₁₀₀	0	3,90	3,00	4,20	0,10	1,40	1,60	5000	3,2

* Величины средней молекулярной массы, \bar{M} , фракций ГК и ГМК измерены вискозиметрическим методом, согласно [36, 37].

На рис. 4 приведены экспериментальные зависимости $\gamma = f(C_{\text{ПАВ}})$, полученные методом кольца Дю Нуи, для солей гуминовых и гиматомелановых кислот. Кривые на рис. 4 были рассчитаны по уравнениям модели реального двумерного раствора для случая бимолекулярной адсорбции [25–33]. Наблюдается хорошее согласие между экспериментальными и рассчитанными зависимостями $\gamma = f(C_{\text{ПАВ}})$.

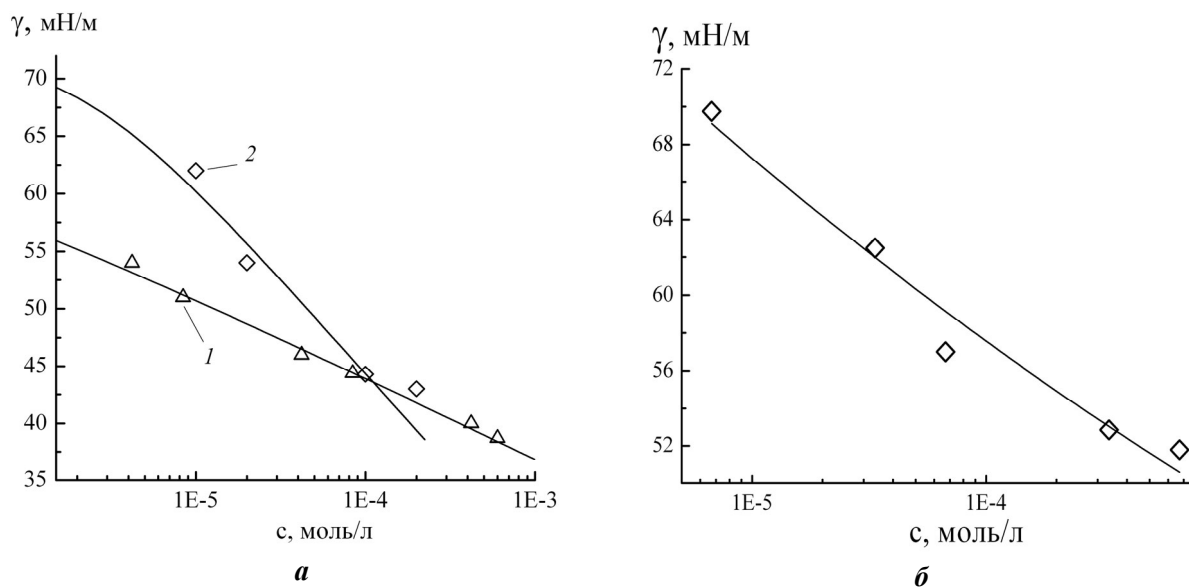


Рис. 4. Изотермы $\gamma = f(C_{\text{ГМК}})$. **a** – гиматомелановые кислоты: 1 – ГМК₈₀₋₁₀₀, 2 – ГМК₂₀₋₁₀₀. **б** – гуминовая кислота ГМК₁₀₀.

Низкое значение параметра межмолекулярных взаимодействий для фракции ГМК₂₀₋₁₀₀ может быть связано как с меньшей средней молекулярной массой этой фракции (\bar{M}) (таблица), так и с меньшей ее активностью на границе раздела фаз (рис. 4). Отношение $\omega_{\text{max}}/\omega_{\text{min}}$ для фракций ГМК₁₀₀ и ГМК₈₀₋₁₀₀ равно, соответственно, 3,94 и 5,7, а для фракции ГМК₂₀₋₁₀₀ – $\omega_{\text{max}}/\omega_{\text{min}} = 1,4$.

Известно, что макромолекулы белков способны изменять молярную поверхность на межфазной границе, причем гибкоцепные белки в большей степени, по сравнению с глобулярными: отношение $\omega_{\text{max}}/\omega_{\text{min}}$ для гибкоцепного β -казеина равно 10, а для глобулярного β -лактоглобулина $\omega_{\text{max}}/\omega_{\text{min}} = 2$ [38]. В рамках модели двумерного раствора полиэлектролитов макромолекулы ГМК₂₀₋₁₀₀ слабо изменяют поверхность на границе раздела фаз и близки к β -лактоглобулину, тогда как способность к изменению поверхности макромолекул на межфазной границе ГМК₈₀₋₁₀₀ и ГМК₁₀₀ занимает промежуточное положение по сравнению с β -лактоглобулином и β -казеином.

Для выяснения механизма адсорбции солей гуминовых веществ на границе раздела жидкость-газ было использовано соотношение между динамической адсорбцией $\Gamma(t)$ и приповерхностной концентрацией $c(0,t)$ для свежесформированной недеформируемой поверхности раствора ПАВ, предложенное Уордом и Тордеем, которое имеет вид [39]:

$$\Gamma(t) = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}} \left[c_0 \sqrt{t} - \int_0^t c(0, t-t') d(\sqrt{t'}) \right],$$

где c_0 – концентрация полиэлектролита в объеме раствора, D – коэффициент диффузии, t – время, t' – переменная интегрирования.

При совместном решении уравнения Уорда-Тордея с уравнениями, которые являются граничными условиями для диффузионного механизма адсорбции [31], было показано (рис. 5), что экспериментальные данные описываются этой моделью только при очень низких значениях коэффициента диффузии – для солей ГК₁₀₀ при $D = 10^{-14}$ м²/с, а для гиматомелановых кислот при $D = 10^{-13}$ м²/с. Для расчета были использованы программы представленные в [35].

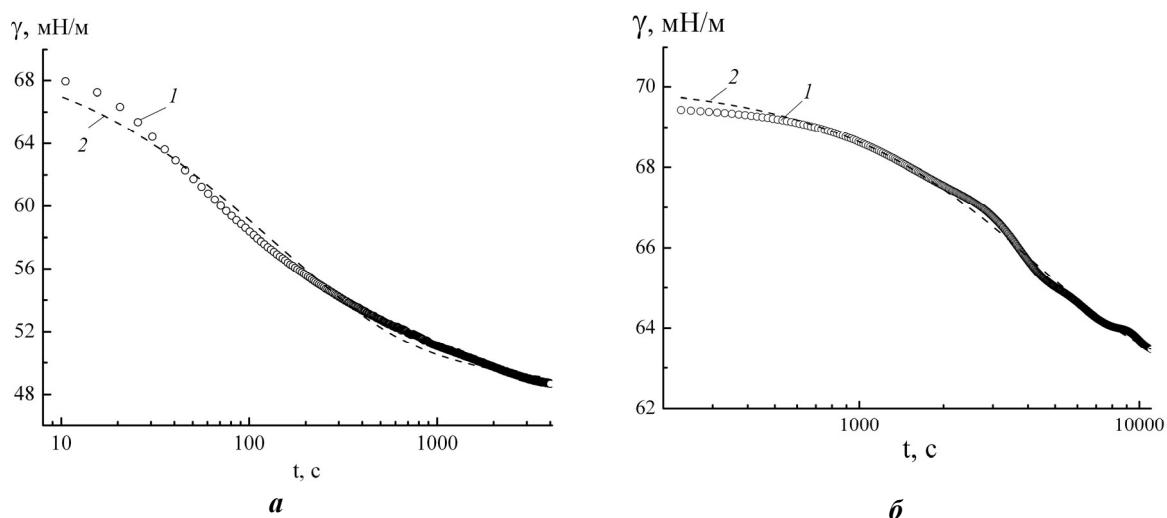


Рис. 5. Динамическое поверхностное натяжение растворов а) соли гиматомелановой кислоты (ГМК₈₀₋₁₀₀); ($C_{ГМК} = 0,05\%$); б) соли гуминовой кислоты ($C_{ГМК} = 0,05\%$). Пояснения в тексте.

Коэффициенты диффузии молекул гуминовых веществ были рассчитаны по формуле Польсона, предложенной для растворов полимеров: $D = 2,74 \cdot 10^{-9} M^{-1/3}$ [40] и приведены в таблице. Близкие значения коэффициентов диффузии для гуминовых соединений из разных источников были получены различными экспериментальными методами в работах [41–43].

Порядок величины коэффициента диффузии (10^{-10} м²/сек) указывает на недиффузионный (барьерный) механизм адсорбции солей гуминовых веществ на границе раздела жидкость-газ [16, 31]. При таком механизме адсорбции скорость диффузии ПАВ велика по сравнению со скоростью установления равновесия между поверхностным и приповерхностным слоями. В этом случае концентрация ПАВ во всех частях раствора, в том числе и в приповерхностном слое, равна C_0 . Согласно [44, 45], недиффузионный механизм адсорбции ПАВ объясняют существованием вблизи границы раздела фаз энергетического адсорбционного барьера, который включает в себя электростатические и неэлектростатические взаимодействия между молекулами ПАВ. Поверхностный барьер определяет замедление перехода молекул ПАВ из приповерхностного слоя в поверхностный.

Выводы.

1. Методами кольца Дю Нуи исследованы динамическое и равновесное поверхностное натяжение водных растворов солей гуминовых и гиматомелановых кислот. Характер изотерм равновесного поверхностного натяжения растворов этих соединений соответствуют модели реального двумерного раствора при бимолекулярной адсорбции, разработанной для полиэлектролитов белковой природы.

2. При анализе изотерм динамического поверхностного натяжения и расчетных значений коэффициентов диффузии гиматомелановых кислот выявлено, что для солей

гуминовых и гиматомелановых кислот характерен недиффузионный (барьерный) механизм адсорбции на границе раздела жидкость-газ.

3. Доказано, что фракции гиматомелановых кислот являются наиболее поверхностно активной частью гуминовых кислот. Равновесное значение поверхностного натяжения их растворов на границе раздела жидкость-газ достигает 40 мН/м, что соответствует таким промышленно важным ПАВ, как цетилтриметиламмоний бромид, додецилсульфат натрия и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлов Д.С. Гумусовые кислоты почв / Д.С. Орлов – М.: МГУ, 1974. – 177 с.
2. Кухаренко Т.А. Окисленные в пластах бурые и каменные угли / Т.А. Кухаренко – М.: Недра, 1972. – 215 с.
3. Глебова Г.И. Гиматомелановые кислоты почв и их место в системе гумусовых кислот: автореф. дис... канд. биол. наук: 06.01.03 / [МГУ]. – М.: МГУ, 1980. – 21 с.
4. Assessing the Efficiency of Humic Substances as Washing Agents for Oil-Contaminated Soils and Peats under Model Experimental Conditions / M.S. Rozanova, O.I Mylnikova, O.I. Klein [et al.] // Eurasian Soil Science. – 2018. – Vol. 51, N 9. – P. 1111-1117.
5. Meng F. Humic substances as a washing agent for Cd-contaminated soils / F. Meng, G. Yuan, J. Wei, [et al.] // Chemosphere. – 2017. – Vol. 181. – P. 461-467.
6. Рязанов Я.А. Справочник по буровым растворам / Я.А. Рязанов. – М.: Недра, 1979. – 217 с.
7. Хилько С.Л. Реологические свойства высокодисперсных высококонцентрированных водоугольных суспензий / С.Л. Хилько, Е.В. Титов // Коллоид. журн. – 1993. – Т. 55, № 6. – С. 117-123.
8. Хилько С.Л. Способ получения и реологические характеристики суспензионного топлива на основе бурого угля / С.Л. Хилько, Е.В. Титов // Химия тверд. топлива. – 2001. – № 1. – С. 78-84.
9. Лиштван И.И. Буровые растворы на основе модифицированного торфа / И.И. Лиштван, И.В. Косаревиц // Торфяная промышленность. – 1984. – № 1. – С. 22-24.
10. Хилько С.Л. Получение и реологические свойства эмульсионных топливных композиций на основе гудронов / С.Л. Хилько, Е.В. Титов // Журн. приклад. химии. – 2000. – Т. 73, № 8. – С. 1383-1386.
11. Хилько С.Л. Физико-химические аспекты приготовления трехфазных коллоидных топлив / С.Л. Хилько, Е.В. Титов // Химия и технология топлив и масел. – 2007. – № 1. – С. 52-58.
12. Effects of humic and fulvic acids on silver nanoparticle stability, dissolution and toxicity / I.L. Gunsolus, M.P.S. Mousavi, K. Hussein [et al.] // Environ Sci. Technol. – 2015. – Vol. 49, N 13. – P. 8078-8086.
13. Magnetic Nanoparticles Interaction with Humic Acid: In the Presence of Surfactants / Z. Tang, X. Zhao, T. Zhao, H. Wang [et al.] // Environ. Sci. Technol. – 2016. – Vol. 50. – P. 8640-8648.
14. Обзор рынка гуминовых удобрений в России и мире – М.: ООО «ИГ «Инфолайн», 2018. – 14 с. (www.infomine.ru).
15. Беркович А.М. Применение гуминовых и гуминоподобных препаратов в ветеринарии и медицине / А.М. Беркович // URL: <http://www.humipharm.ru/research/prim.pdf>. – 2007. – 29 с.
16. Хилько С.Л. Адсорбционные и реологические характеристики солей гуминовых кислот на границе раздела жидкость-газ / С.Л. Хилько, А.И. Ковтун, В.Б. Файнерман // Коллоид. журн. – 2010. – Т. 72, № 1. – С. 97-104.
17. Попов А.Ф., Луцик А.И., Титов Е.В., Суйков С.Ю., Хилько С.Л. Способ получения поверхностно-активного вещества из бурого угля. Пат. 5583 Украины // Б.И. 2005. № 3. С. 10.
18. Cook R.L. Understanding Humic Substances. Advanced Methods, Properties and Applications / R.L. Cook, C. I. Langford / Eds E.A. Cihabour, G. Davies – Publ. Royal Soc. Chem.: Cambridge, 1999. – P. 31-48.
19. Stevenson F.J. Humus chemistry. Genesis, composition, reactions. / F.J. Stevenson – N.Y., Wiley Interscience, 1982. – P. 221-237.
20. Orsi M. Molecular dynamics simulation of humic substances / M. Orsi // Chemical and Biological Technologies in Agriculture. – 2014. – Vol. 1, No 10. – P. 2-14. – Режим доступа: <http://www.chembioagro.com/content/1/1/10>.
21. Schnitzer M. Humic Substances in the Environment / M. Schnitzer, S.U. Khan – N.Y.: Marcel Dekker, 1972. – 327 p.
22. Попов А.И. Гуминовые вещества: свойства, строение, образование / Под ред. Е.И. Ермакова / А.И. Попов – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. – 248 с.
23. Измайлова В.Н. Структурообразование в белковых системах / В.Н. Измайлова, П.А. Ребиндер – М.: Наука, 1974. – 329 с.

24. Klucakova M. Conformational changes in humic acids in aqueous solutions / M. Klucakova, A. Kargerova, K. Novackova // Chemical Papers. – 2012. – Vol. 66, No 9. – P. 875–880.
25. Файнерман В.Б. Равновесные и динамические характеристики адсорбционных слоев белков на межфазных границах жидкость-газ: теория и эксперимент / В.Б. Файнерман, Р. Миллер // Коллоид. журн. – 2005. – Т. 67, № 4. – С. 437-449.
26. Fainerman V.B. Description of the adsorption behaviour of proteins at water/fluid interfaces in the framework of a two-dimensional solution model / V.B. Fainerman, E.H. Lucassen-Reynders, R. Miller // Advances in Colloid and Interface Science. – 2003. – Vol. 106. – P. 237-259.
30. Dynamics of protein and mixed protein / surfactant adsorption layers at the water/fluid interface / R. Miller, V.B. Fainerman, A.V. Makievski, [et al.] // Advances in Colloid and Interface Science. – 2000. – Vol. 86. – P. 39-82.
31. Dynamic surface tension and adsorption kinetics of β -casein at the solution/air interface / R. Miller, V.B. Fainerman, E.V. Aksenenko, [et al.] // Langmuir. – 2004. – Vol. 20. – P. 771-777.
32. Kinetics of adsorption of globular proteins at liquid/fluid interfaces / Miller R., Aksenenko E.V., Fainerman V.B., Pison U. // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. – 2001. – Vol. 183-185. – P. 381-390.
33. Optimisation of calculation methods for determination of surface tensions by drop profile analysis tensiometry / Zholob S.A., Makievski A.V., Miller R., Fainerman V.B. // Advances in Colloid and Interface Science. – 2007. – Vol. 134-135 – P. 322-329.
34. Ch. Shang. Investigation of humate-cetyltrimethylammonium complexes by small-angle X-ray scattering / Shang Ch., Rice J.A. // J. Colloid Interface Sci. – 2007. – Vol. 305. – P. 57-61.
35. Программы и примеры расчетов: <http://www.sinterface.com>.
36. Физико-химические свойства гуминовых веществ торфа и бурого угля / Л.Г. Сивакова, Н.П. Лесникова, Н.М. Ким, Г.М. Ротова // Химия твердого топлива. 2011. – № 1. – С. 3-8.
37. Kawahigashi M. Size and shape of soil humic acids estimated by viscosity and molecular weight / M. Kawahigashi, H. Sumida, K. Yamamoto // Journal of Colloid and Interface Science – 2005. – Vol. 284, No 2. – P. 463-469.
38. Lucassen-Reynders E.H. Surface Dilational Modulus or Gibbs' Elasticity of Protein Adsorption Layers / E.H. Lucassen-Reynders, V.B. Fainerman, R. Miller // J. Phys. Chem. B. – 2004. – Vol. 108. – P. 9173-9176.
39. Ward A.F.H. Time-Dependence of Boundary Tensions of Solutions I. The Role of Diffusion in Time-Effects / A.F.H. Ward, L. Tordai // J. Chem. Phys. – 1946. – Vol. 14. – P. 453-461.
40. Шервуд Т. Массопередача / Т. Шервуд, Р. Пигфорд, Ч. Уилки. – М.: Химия, 1982. – 696 с.
41. Cornel P.K. Diffusion of humic acid in dilute aqueous solution / P.K. Cornel, R.S. Summers, P.V. Roberts // J. Colloid and Interface Sci. – 1986. – Vol. 110, No 1. – P. 149-164.
42. Lead J.R. Determination of diffusion coefficients of humic substances by fluorescence correlation spectroscopy: role of solution conditions / J.R. Lead, K.J. Wilkinson, K. Starchev, [et al.] // Environ. Sci. Technol. – 2000. – Vol. 34. – P. 1365-1369.
43. Otto W.H. NMR diffusion analysis of surfactant-humic substance interactions / W.H. Otto, D.J. Britten, C.K. Larive // Journal of Colloid and Interface Science. – 2003. – Vol. 261. – P. 508-513.
44. Файнерман В.Б. Кинетика формирования адсорбционных слоев на границе раздела раствор – воздух / В.Б. Файнерман // Успехи химии. – 1985. – Т.54, № 10. – С. 1613-1631.
45. Файнерман В.Б.. К природе адсорбционного барьера на границе раздела вода-воздух / В.Б. Файнерман // Журн. физ. химии. – 1990. – Т. 64, № 6. – С. 1611-1617.

Поступила в редакцию 15.05.2019 г.

FORMATION OF SURFACE LAYERS OF HUMIC AND HIMATOMELANIC ACIDS SALTS AT LIQUID-GAS INTERFACE

S.L. Khil'ko, M.I. Rogatko

The regularities of the formation of surface layers of solutions of humic and hmatomelanic acid salts at the liquid-gas interface are investigated. The tensiometric experimental data were analyzed based on equations of state, the adsorption isotherm and functions of distribution on states of molecules adsorbed polyelectrolyte with different molar surface (two-dimensional model solutions). The experimental dependences of the equilibrium surface tension of salts of humic and hmatomelanic acids obey the theoretical model of real two-

dimensional solutions of biopolymers during bimolecular adsorption. The dynamics of the formation of surface layers of salts of humic substances is described by a barrier (non-diffusion) mechanism. It was shown that fractions of himatomelanic acids are the most superficially active part of humic acids.

Keywords: humic acids; himatomelanic acids; polyelectrolytes; surface tension; surface layers; model of two-dimensional solutions; bimolecular adsorption; dynamic tensiometry

Хилько Светлана Леонидовна

Кандидат химических наук, старший научный сотрудник; ведущий научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: sv-hilko@yandex.ru

Khil'ko Svetlana Leonidovna

Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher; Leading Researcher, State institution "L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk.

Рогатко Марина Игоревна

Аспирант ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко г. Донецк, ДНР.
E-mail: marina.rogatko@gmail.com

Rogatko Marina Igorevna

Graduate student,
State institution "L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk.

УДК 544.72:541.183 + 547.992

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ
ЭТОКСИЛИРОВАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГУМИНОВЫХ КИСЛОТ
НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЬ-ГАЗ**

© 2019. *С.Л. Хилько, М.И. Рогатко, В.С. Шелест, Р.А. Макарова, Р.Г. Семенова, О.И. Невечеря, А.С. Хилько*

Получены этоксилированные производные природных полимеров – гуминовых кислот – методом механохимического синтеза в вибрационном аппарате. Введение этокси-групп в полимерную структуру гуминовых кислот контролировали методом ИК-спектроскопии. Методами кольца Дю Нуи и максимального давления в газовом пузырьке исследованы тензиометрические (динамическое и равновесное поверхностные натяжения) свойства поверхностных слоев нативных и модифицированных производных природных полимеров. Показано увеличение поверхностной активности этоксилированных производных гуминовых кислот на границе раздела жидкость-газ по сравнению с немодифицированной формой.

Ключевые слова: гуминовые кислоты, реакция этоксилирования, механохимический синтез, поверхностное натяжение, динамическая тензиометрия.

Введение. Интерес к твердофазным механохимическим реакциям связан с перспективами их использования в технике, особенно в области создания новых, так называемых «сухих», технологических процессов, которые более экологически безопасны и экономически выгодны по сравнению с традиционными [1–3]. В процессах механо-синтеза под действием механических сил вещества изменяют свой состав и строение.

В настоящее время известны сотни механохимических реакций, которые могут быть осуществлены в различных энергонапряженных аппаратах: атриторах, дезинтеграторах, в ударных волнах, на наковальнях Бриджмена и др. В области исследований твердофазных процессов важное значение имеют реакции органического синтеза [4–8] и реакции полимерных материалов [9–12].

Для протекания твердофазных химических реакций наиболее благоприятные условия могут быть созданы в вибрационных аппаратах – механохимических реакторах. При вибрации возникает эффект интенсивного механического взаимодействия между частицами многокомпонентных систем. При этом возникает так называемый «виброкипящий» слой, то есть чрезвычайно интенсивные относительные колебания твердых частиц. С точки зрения протекания механохимических реакций именно такие эффекты представляют наибольший интерес [13].

Поверхностную активность природных (нативных) гуминовых кислот (ГК) можно увеличить путем введения в состав их макромолекул дополнительных функциональных групп. Введение в состав гуминовых кислот оксиэтиленовых $(-CH_2-CH_2-O-CH_2-CH_2-)_n$ групп позволит получать новые виды ПАВ, совмещающие анионноактивные, за счет присутствующих в макромолекулах ГК $-COOH$ и $-OH$ групп, и неионогенные свойства – за счет оксиэтиленовых групп.

Целью работы было проведение реакции этоксилирования гуминовых кислот в вибрационном аппарате и исследование тензиометрических свойств поверхностных слоев продуктов реакции на границе раздела жидкость-газ.

Экспериментальная часть. Гуминовую кислоту получали из аналитической пробы бурого угля Александрійского месторождения однократной экстракцией

раствором NaOH ($C_{\text{NaOH}} = 0,1$ н) при соотношении твердой и жидкой фаз 1:8 и температуре 100 °С. Затем из «сырого» экстракта получали нерастворимые в воде ГК осаждением 5 % раствором HCl, который добавляли при постоянном перемешивании до pH 1–2. Выпавший осадок ГК отделяли от надосадочной жидкости центрифугированием. Осадок промывали дистиллированной водой до нейтральной реакции среды (pH 6–7). Промытую гуминовую кислоту сушили в сушильном шкафу при $t = 80$ °С до постоянной массы. Растворы гумата натрия готовили растворением сухой ГК в 0,1 н растворе NaOH.

Механохимическую реакцию этоксилирования ГК проводили в присутствии полиэтиленгликоля (ПЭГ-6000) и NaOH в вибрационном аппарате 75Т-ДрМ при частоте вибрации $\nu = 50$ Гц и амплитуде $A = 3,0\text{--}5,0$ мм; величина виброускорения ($I = 4\pi^2 A\nu^2$) составляла $300 \div 490$ м/с². После обработки смеси компонентов в механореакторе продукты реакции многократно промывали водой. При этом отделяли избыток водорастворимых непрореагировавших компонентов – ПЭГ-6000 и NaOH. Производные гуминовой кислоты, нерастворимые в воде, отделяли центрифугированием.

ИК-спектры записывали на спектрометре Specord IR-75 в таблетках KBr (концентрация гуминовых кислот в таблетке составляла 0,5 %).

УФ-спектры записывали на спектрофотометре Genesys 10 SUV, Thermo Electron Corp. в водных растворах.

Количество активных кислых групп (-COOH и -OH) определяли методом потенциометрического титрования. Значение pH растворов измеряли на прецизионном pH-метре (Metrohm 744 pH Meter, Швейцария). Растворы натриевых солей гуминовых веществ (0,05%) титровали 0,1 н раствором HCl. Точки эквивалентности определяли как максимумы на дифференциальных кривых $\Delta\text{pH} / \Delta V = f(V_{\text{HCl}})$.

Величины средней молекулярной массы, \overline{M} , гуминовых соединений измеряли вискозиметрическим методом, согласно [14, 15].

Динамическое и равновесное поверхностное натяжение (γ , мН/м) водных растворов солей гуминовых соединений при фиксированной концентрации как функцию времени жизни поверхности (t , с) измеряли двумя методами. Динамический метод кольца Дю Нуи (тензиометр ТЕ-1, Lauda, Germany) [16], без отрыва кольца, позволяет определять изменение поверхностного натяжения в диапазоне времени более 10⁶ секунд. Полустатическим методом максимального давления в пузырьке газа определяли поверхностное натяжение растворов в узком временном диапазоне (примерно 10,0 с) [17]. Все измерения выполнены при температуре $(20 \pm 0,1)$ °С. Растворы солей гуминовых веществ разных концентраций готовили в очищенной воде (Milli-Q), имеющей поверхностное натяжение $72,0 \pm 0,2$ мН/м.

Результаты и их обсуждение. Как следует из рис. 1, в ИК спектрах продуктов механохимической реакции ГК с ПЭГ-6000 появляется полоса поглощения в области 1100 см⁻¹, которая соответствует валентным $\nu_{\text{C-O}}$ колебаниям эфирной группы (-CH₂-O-CH₂-). Эта интенсивная полоса поглощения наблюдается в ИК спектре ПЭГ-6000, но отсутствует в немодифицированном образце ГК. На основании данных ИК-спектроскопии можно полагать, что в результате механохимической реакции происходит введение в структуру макромолекулы ГК оксиэтиленовых групп (-CH₂-CH₂-O-CH₂-CH₂-)_n.

Присоединение оксиэтиленовых групп может происходить по -OH, -COOH, -NH₂ группам [18, 19]. По данным потенциометрического титрования в продуктах этоксилированных ГК снижается количество -COOH и -OH групп (рис. 2, табл. 1), что

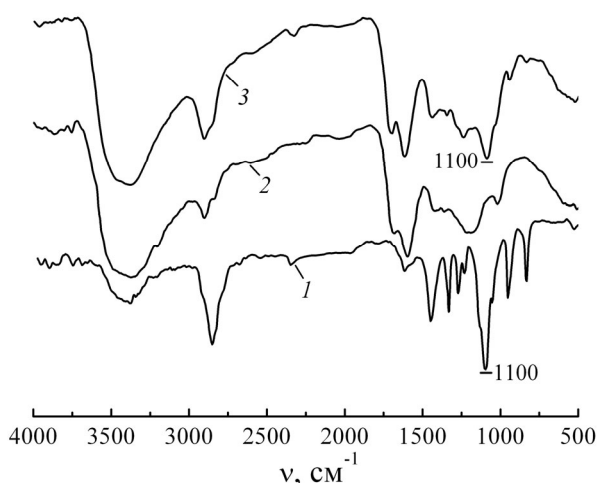


Рис. 1. ИК спектры образцов (в таблетках КВг):
1 – ПЭГ-6000, 2 – исходный образец ГК,
3 – этоксилированный образец ГК

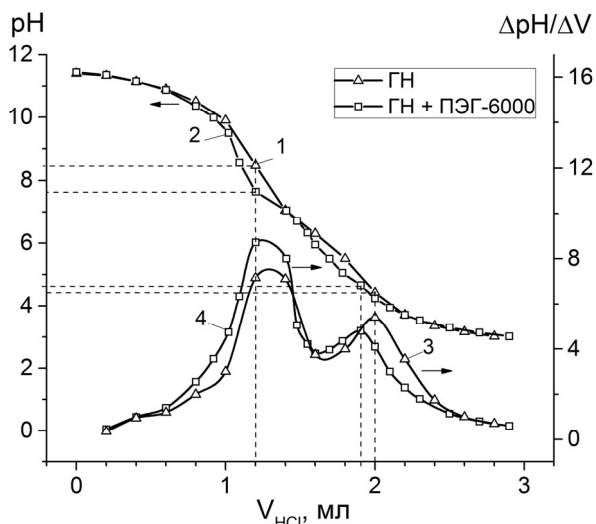


Рис. 2. Интегральные (1, 2) и дифференциальные (3, 4) кривые потенциметрического титрования исходного образца соли ГК, (1, 3) и этоксилированной соли ГК (2, 4)

Таблица 1

Характеристики образцов гуминовых соединений

Образец	[ОН] мг-экв/г	[COOH] мг-экв/г	\bar{M}	E_{465} / E_{665}
Гуминовая кислота	3,2	3,2	14000	5,92
Этоксигуминовая кислота	3,2	2,4	15500	6,92

может указывать на участие этих групп в механосинтезе производных ГК. С другой стороны, при механохимических реакциях с участием полимерных гуминовых соединений происходят химические процессы деструкции органического вещества, которые связаны, прежде всего, с радикальным механизмом реакций: разрывом наиболее слабых С-О связей в кислородных мостиках, разрывом различного рода С-С связей (алифатические мостики, связи между ароматическими кольцами, алифатические боковые цепи и др.) [20]. Разрыв таких связей в гуминовых кислотах с одновременным разрывом связей в макромолекулах полиэтиленгликоля может приводить к образованию сополимеров – этоксигуминовых кислот.

Макромолекулы гуминовых соединений содержат конденсированные ароматические фрагменты и алифатические цепи разной длины и разветвленности. Для описания молекулярных свойств гуминовых веществ широко используется УФ-спектроскопия. Соотношение между ароматической и алифатической частями в макромолекулах гуминовых соединений принято определять как отношение коэффициентов поглощения при 465 нм и 665 нм, E_{465} / E_{665} [21, 22]. Низкие значения отношения E_{465} / E_{665} указывает на превалирование конденсированных ароматических фрагментов, а высокие величины этого отношения означают преобладание алифатических фрагментов в структуре макромолекул гуминовых веществ.

Как следует из данных, приведенных в табл. 1, в этоксилированном образце ГК величина E_{465} / E_{665} выше, чем у немодифицированной формы, что указывает на увеличение доли алифатических фрагментов в структуре макромолекулы. Это может быть обусловлено введением этокси-групп.

Введение этоксильных групп в структуру макромолекулы гуминовой кислоты должно оказывать существенное влияние на поверхностно-активные свойства и процесс формирования поверхностных слоев таких ПАВ на межфазных границах.

Существуют различные методы определения поверхностного натяжения растворов ПАВ на границах раздела фаз. Наиболее доступны, аппаратно просты и часто используемые на практике, так называемые, полустатические методы. Это метод максимального давления в пузырьке газа, методы отрыва кольца, отрыва или втягивания пластины и т.п. Эти методы позволяют определить равновесное значение поверхностного натяжения в растворах ПАВ за короткое время: от долей секунды до 10 с (время, за которое отрывается кольцо или пластина от поверхности раствора ПАВ). Динамические методы определения поверхностного натяжения позволяют проводить измерения в широком временном диапазоне (до 10^6 с и выше).

Согласно данным, приведенным на рис. 3, введение этокси-групп в структуру макромолекул ГК изменяет тензиометрические характеристики их растворов на границе раздела жидкость-газ. Динамическое поверхностное натяжение водных растворов ПАВ существенно ниже для этоксилированного образца ГК по сравнению с нативной формой. Время формирования поверхностного слоя (достижение равновесных значений поверхностного натяжения) составляет более 10^4 с.

Зависимости равновесного поверхностного натяжения от концентрации этоксилированного производного ГК на межфазной границе также ниже, чем у нативной формы. Как следует из данных, приведенных на рис. 4, применение разных методов измерения поверхностного натяжения растворов высокомолекулярных ПАВ на границе раздела жидкость-газ приводит к существенной разнице в значениях измеряемых величин. В этом случае, использование метода максимального давления в пузырьке газа (полустатический метод) не может дать объективной информации о процессе формирования поверхностного слоя. Применение этого метода не будет являться корректным, поскольку метод не учитывает всей динамики образования поверхностных слоев в широком временном диапазоне. Согласно данным, приведенным на рис. 3, динамический метод измерения поверхностного натяжения растворов таких ПАВ показал, что время формирования поверхностного слоя для макромолекул гуминовых соединений весьма значительно.

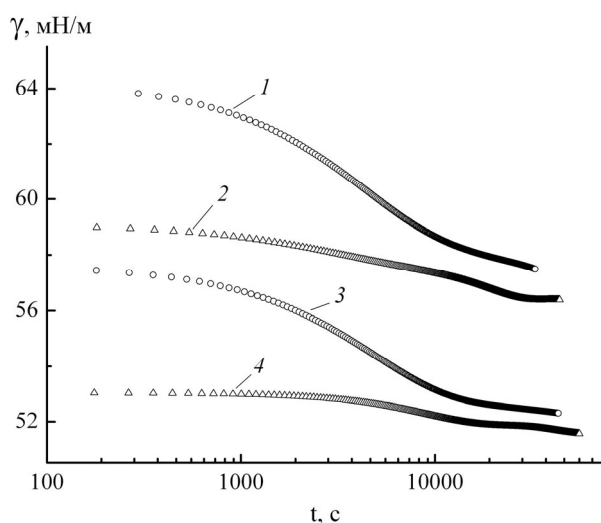


Рис. 3. Изменение динамического поверхностного натяжения (γ) от времени. С, %: 0,1 (1, 2) и 1,0 (3, 4), для гумата натрия (1, 3) и его этоксилированного производного (2, 4). Метод кольца Дю Нуи

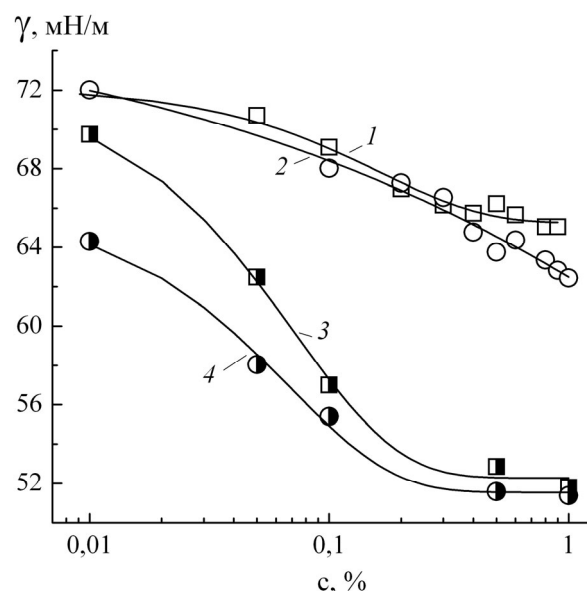


Рис. 4. Изменение равновесного поверхностного натяжения от концентрации растворов гумата натрия (1, 3) и его этоксилированного производного (2, 4). Метод максимального давления в газовом пузырьке (1, 2), динамический метод кольца Дю Нуи (3, 4)

В табл. 2 приведены равновесные значения поверхностного натяжения (γ_p) для образцов солей гуминовых кислот и, для сравнения, некоторых известных и широко применяемых в промышленности неионогенных и ионогенных ПАВ. Как следует из этой таблицы, поверхностная активность этоксилированного гумата натрия выше, чем у полиэтиленгликоля и несколько ниже, чем у оксиэтилированного нонилфенола. При этом концентрация раствора этоксилированного гумата натрия значительно ниже, чем у известных неионогенных ПАВ. Ионогенные ПАВ (додецилсульфат натрия и цетилтриметиламмоний бромид) в большей степени снижают поверхностное натяжение, но при гораздо больших концентрациях их в растворе.

Таблица 2
Поверхностно-активные характеристики гуминовых соединений и некоторых ПАВ (C_p – концентрация раствора ПАВ при равновесном значении поверхностного натяжения)

ПАВ	C_p , моль/л	γ_p , мН/м
Гумат натрия	$3,5 \times 10^{-4}$	55,1
Этоксилированный гумат натрия	$4,1 \times 10^{-4}$	50,1
Полиэтиленгликоль-6000	$8,3 \times 10^{-4}$	61,0
Оксиэтилированный нонилфенол $C_9H_{19}C_6H_4(C_2H_4O)_2OH$	42×10^{-4}	44,5
Додецилсульфат натрия	100×10^{-4}	38,8
Цетилтриметиламмоний бромид	10×10^{-4}	36,0

Выводы.

1. Разработана методика механохимического синтеза этоксилированных производных гуминовых кислот в вибрационном аппарате.
2. Установлено, что этоксилированный гумат натрия проявляют более выраженные поверхностно-активные свойства на границе раздела жидкость-газ по сравнению с немодифицированным образцом.
3. Показано, что для получения корректных результатов для полимерных гуминовых соединений необходимо использовать динамические методы измерения поверхностного натяжения.
4. Поверхностная активность этоксилированного гумата натрия сопоставима с поверхностной активностью промышленно важных ПАВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдырев В.В. Использование механохимии в создании «сухих» технологических процессов / В.В. Болдырев // Сорос. образоват. журнал. – 1997. – № 12. – С. 48-52.
2. Болдырев В.В. Механохимия и механохимическая активация твердых веществ / В.В. Болдырев // Успехи химии. – 2006. – Т. 75, № 3. – С. 203-216.
3. James S.L. Mechanochemistry: fundamentals and applications in synthesis / S.L. James, T. Friscic // Chem. Commun. – 2013. – Vol. 49. – P. 5349-5350.
4. Болдырев В.В. Фундаментальные основы механической активации, механосинтеза и механохимических технологий / В.В. Болдырев, Е.Г.Аввакумов, Е.В. Болдырева. – Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния РАН, 2009. – 343 с.
5. Wang Guan-Wu. Mechanochemical organic synthesis / Guan-Wu Wang // Chemical Society Reviews. – 2013. – Vol. 42, N 18. – P. 7668-7700.
6. Чуев В.П. Реакция ацилирования первичных ароматических аминов в условиях механохимического синтеза / В.П. Чуев, Л.А. Лягина, В.В. Болдырев // ДАН СССР. – 1990. – Т. 315, № 4. – С. 916-920.
7. Механохимический синтез органических соединений и композитов с их участием / Н.З. Ляхов, Т.Ф. Григорьева, А.П. Барина, И.А. Ворсина // Успехи химии. – 2010. – Т. 79, № 3. – С. 218-233.

Хилько С.Л., Рогатко М.И., Шелест В.С., Макарова Р.А., Семенова Р.Г., Невечера О.И., Хилько А.С.

8. Achar T.K. Mechanochemical synthesis of small organic molecules / T.K. Achar, A. Bose, P. Mal // Beilstein J. Org. Chem. – 2017. – Vol. 13. – P. 1907–1931.
9. Grätz S. Mechanochemical polymerization – controlling a polycondensation reaction between a diamine and a dialdehyde in a ball mill / S. Grätz, L. Borchardt // RSC Advances. – 2016. – Vol. 6, N 69. – P. 64799–64802.
10. Potter W.D. Mechano-chemical reactions of polymers, formation of free radicals in stressed rubber / W.D. Potter, G. Scott. // European Polymer Journal. – 1971. – Vol. 7, N 5. – P. 489–497.
11. Li J. Polymer Mechanochemistry: From Destructive to Productive / J. Li, C. Nagamani, J.S. Moore // Acc. Chem. Res. – 2015. – Vol. 48, N 8. – P. 2181–2190.
12. Барамбойм Н.К. Механохимия высокомолекулярных соединений / Н.К. Барамбойм. – М.: Химия, 1978. – 384 с.
13. Блехман И.И. Что может вибрация. О «вибрационной механике» и вибрационной технике / И.И. Блехман – М.: Наука, 1988. – 208 с.
14. Физико-химические свойства гуминовых веществ торфа и бурого угля / Л.Г. Сивакова, Л.Г. Лесникова, Н.М. Ким, Г.М. Ротова // Химия твердого топлива. – 2011. – № 1. – С. 3–8.
15. Kawahigashi M. Size and shape of soil humic acids estimated by viscosity and molecular weight / M. Kawahigashi, H. Sumida, K. Yamamoto // Journal of Colloid and Interface Science – 2005. – Vol. 284, N 2. – P. 463–469.
16. Miller R. Dynamics of adsorption from solutions / R. Miller, A.V. Makievski, V.B. Fainerman // Surfactants – Chemistry, Interfacial Properties and Application. Studies in Interface Science. – 2001. – Vol. 13. – P. 287–294.
17. Ребиндер П.А. Избранные труды. Поверхностные явления в дисперсных системах. Коллоидная химия / П.А. Ребиндер. – М.: Наука, 1978. – 371 с.
18. Umbach W. Continuous alkoxylation process / W. Umbach, W. Stein // Journal of the American Oil Chemists Society. – 1971. – Vol. 48, N 8. – P. 394–397.
19. Novel General Procedure for the Preparation of Homogeneous Nonionic Surfactants / P. Sallaya, L. Farkas, Z. Szlovák, G. Fogassy // Journal of Surfactants and Detergents. – 2002. – Vol. 5, N 4. – P. 353–357.
20. Хренкова Т.М. Механохимическая активация углей / Т.М. Хренкова. – М.: Недра, 1993. – 176 с.
21. Fourier Transform Infrared, UV-Visible, and X-Ray Diffraction Analyses of Organic Matter in Humic, Humic Acid, and Fulvic Acid Fractions in Soil Exposed to Elevated CO₂ and N Fertilization / A. Naidja, P.M. Huang, D.W. Anderson, C.V. Kessel // Applied Spectroscopy. – 2002. – Vol. 56, N 3. – P. 318–324.
22. Spectroscopic characterization of the structural and functional properties of natural organic matter fractions / J. Chen, B. Gu, E.J. LeBoeuf, et al. // Chemosphere. – 2002. – Vol. 48. – P. 59–68.

Поступила в редакцию 15.05.2019 г.

FORMATION OF SURFACE LAYERS OF HUMIC ACIDS ETHOXYLATED DERIVATIVES AT THE LIQUID-GAS INTERFACE

S.L. Khil'ko, M.I. Rogatko, V.S. Shelest, R.A. Makarova, R.G. Semenova, O.I. Nevecherya, A.S. Khil'ko

The ethoxylated derivatives of natural polymers, humic acids, were obtained by the method of mechanochemical synthesis in a vibration apparatus. The introduction of ethoxy groups into the polymer structure of humic acids was controlled by IR spectroscopy. The tensiometric (dynamic and equilibrium surface tension) properties of the surface layers of native and modified derivatives of natural polymers were studied using the methods of Du Nui and the maximum pressure in a gas bubble. An increase in the surface activity of ethoxylated humic acid derivatives at the liquid-gas interface compared with the unmodified form is shown.

Keywords: humic acids, ethoxylation reaction, mechanochemical synthesis, surface tension, dynamic tensiometry.

Хилько Светлана Леонидовна

Кандидат химических наук, старший научный сотрудник; ведущий научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: sv-hilko@yandex.ru

Khil'ko Svetlana Leonidovna

Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher; Leading Researcher, State institution "Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko", Donetsk.

Хилько С.Л., Рогатко М.И., Шелест В.С., Макарова Р.А., Семенова Р.Г., Невечеря О.И., Хилько А.С.

Рогатко Марина Игоревна

Аспирант ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: marina.rogatko@gmail.com

Rogatko Marina Igorevna

Graduate student, State institution “Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko”, Donetsk.

Шелест Валентина Сергеевна

Студентка ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.

Shelest Valentina Sergeevna

Student, Donetsk National University, Donetsk.

Макарова Раиса Александровна

Кандидат химических наук; старший научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: makarova.ra@yandex.ru

Makarova Raisa Aleksandrovna

Candidate of Chemical Sciences; Senior Researcher, State institution “Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko”, Donetsk.

Семенова Римма Григорьевна

Кандидат химических наук; старший научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: reemma2010@yandex.ua

Semenova Rimma Grigor'evna

Candidate of Chemical Sciences; Senior Researcher, State institution “Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko”, Donetsk.

Невечеря Оксана Ивановна

Младший научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.
E-mail: nevecherya@bk.ru

Necheverya Oksana Ivanovna

Junior Researcher, State institution “Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko”, Donetsk.

Хилько Алексей Сергеевич

Инженер I категории ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.

Khil'ko Alexey Sergeevich

Engineer, State institution “Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko”, Donetsk.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 57.042; 577.3

ЭКОЛОГО-БИОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА *ACER PLATANOIDES* L. В УСЛОВИЯХ г. ДОНЕЦКА

© 2019. О.Р. Кольченко, В.О. Корниенко

Представлена ранее не описанная в условиях города Донецка эколого-биологическая характеристика клена остролистного (*Acer platanoides* L.). Выявлен высокий уровень антропогенной нагрузки на исследуемых участках г. Донецка, установлена тесная связь показателя флуктуирующей асимметрии с показателем жизнеспособности и уровнем шумового загрязнения, изучена механическая устойчивость *Acer platanoides* L. в условиях г. Донецка.

Ключевые слова: *Acer platanoides* L., антропогенная нагрузка, механическая устойчивость, флуктуирующая асимметрия, жизнеспособность.

Введение. В современном городе значительно повышен уровень техногенной нагрузки. [1]. Городская среда активно аккумулирует и накапливает загрязняющие вещества и отходы, засоряя при этом атмосферу, водоемы и почвы [2]. Растительные организмы постоянно произрастают в специфической экологической городской среде и подвергаются воздействию комплекса антропогенных факторов [3]. Таким образом у них наблюдается преждевременное старение, общее ослабление организма, что приводит к неспособности бороться с болезнями, снижается жизнеспособность [4]. Цель исследования – представить эколого-биологическую характеристику клёна остролистного в условиях антропогенной нагрузки. В задачи исследования входило: 1. Определить уровень антропогенной нагрузки в г. Донецке; 2. Изучить реакцию листового аппарата на антропогенную нагрузку; 3. Определить жизнеспособность *Acer platanoides* L. на исследуемых участках; 4. Определить механическую устойчивость древесной ткани *Acer platanoides* L. в условиях антропогенной нагрузки города Донецка.

Материалы и методы исследования. Карта местности и участков, на которых проводились исследования, представлена на рис. 1.

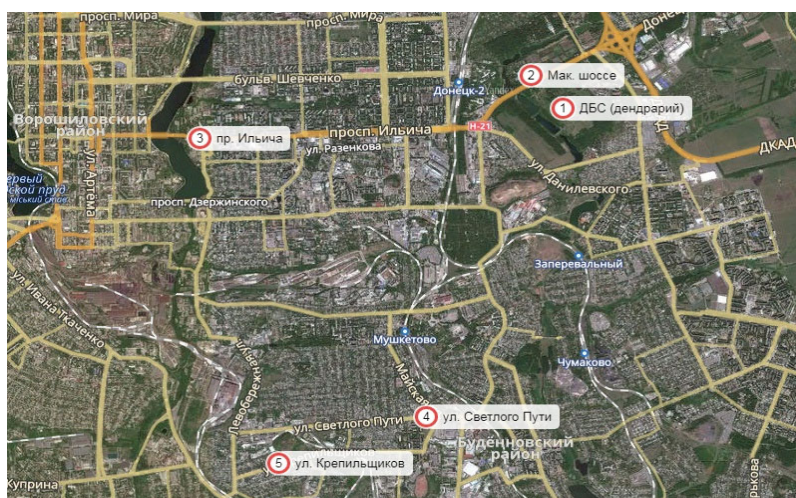


Рис. 1. Карта исследуемых участков

Исследования проводились на пяти участках г. Донецка, находящиеся в Калининском и Будёновском районах. На территории дендрария Донецкого ботанического сада исследования проводились на участке произрастания куртин (групп растений) *Acer platanoides* L.

По Макеевскому шоссе деревья произрастают в один ряд, удаленный от дорожного полотна на 3 м. По пр. Ильича исследуемые деревья растут в 2 ряда с расстоянием 3,5 м. От дороги первый ряд располагается на расстоянии 3-х метров. Дорожное полотно разделено: 1) бордюром, 2) асфальтированной пешеходной дорогой (1 м) и 3) небольшим бордюром, отделяющим земляной покров от асфальтированного участка. По ул. Светлого Пути исследуемые объекты произрастают в один ряд на расстоянии 3,5 м от дорожного полотна. По ул. Крепильщиков деревья растут на расстоянии 2 м от дороги.

На исследуемых участках проводили измерения шума и интенсивности движения автотранспорта.

Разделение исследуемых участков на блоки по пр. Ильича и Макеевскому шоссе показано на рис. 2 и рис. 3.



Рис. 2. Участки измерения шума и интенсивности автотранспортного потока по пр. Ильича: № 1 – от р. Кальмиус (мост) до ост. Больница им. Калинина; № 2 – от ост. Больница им. Калинина до ул. Серова; № 3 – от ул. Серова до ул. Горячкина

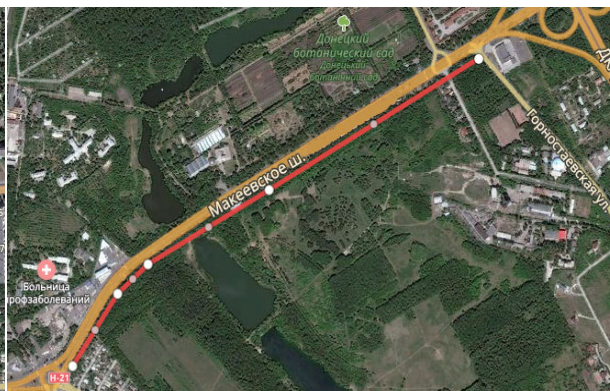


Рис. 3. Участок измерения уровня шума и интенсивности автотранспортного движения по Макеевскому шоссе от ост. Мотель до ул. Горностаевская

Клён остролистный (*Acer platanoides* L.) широко распространенный в Европе и юго-западной Азии вид. Произрастает в лиственных и смешанных лесах, один из эдификаторов широколиственных лесов. Крона овальная, у взрослых деревьев в одиночных посадках раскидистая, плотная. Древесина отличается прочностью и упругостью, что даёт возможность роста ветвей в горизонтальном направлении и захвата пространства вокруг ствола. В чистых насаждениях создаёт сильный затеняющий эффект, предотвращая развитие растительности нижних ярусов. Теневыносливы только молодые деревья. Дерево очень декоративно кроной и листвой, применяется в одиночных, групповых, аллеиных насаждениях (см. табл. 1). Также, данный вид древесных растений не подвергается гибридизации с другими видами рода *Acer*, имеет ярко выраженные видовые признаки, что помогает легко его отличить от других представителей рода.

Мониторинг содержания токсических веществ в воздухе и почвах проводили в период с 2017 по 2018 гг. Для забора воздуха вблизи автомагистралей пользовались универсальным газоанализатором ГАНК-4. Содержание оксида азота, диоксида азота, оксида углерода, хлора, аммиака и сульфида водорода в атмосферном воздухе определяли

Эколого-морфологические характеристики клёна остролистного [5]

Высота	20 м
Форма кроны	овальная, шатровидная (широкая, густая, шаровидная)
Темп роста	быстрый
Критический возраст в городе Донецке	50–60 лет
Критический возраст в естественных условиях	150–300 лет
Отношение к	
• почве	нетребователен
• влаге	влаголюбив, необходим дренаж
• температуре	морозостоек
декоративность	формой кроны
использование	аллеи, одиночные посадки, массивы, рощи
Устойчивость к механическим нагрузкам	
• статическим	+
• динамическим	+

согласно руководству РД 52.04.186-89 [6]. Исследование содержания тяжёлых металлов в почве проводили на атомно-абсорбционном спектрофотометре (ААС) по ГОСТу [7]. Оценку результатов проводили согласно регламентирующим ПДК [8]. Исследование вибрационно-акустического шума вдоль автомагистралей проводили с помощью измерителя уровня шума GM1351 и портативного осциллографа.

Для оценки морфометрических параметров листовых пластин исследовали показатель флуктуирующей асимметрии. Листья были собраны в середине-конце августа. С каждого дерева было собрано по 5–10 листьев с нижней световой части кроны. Все измерения проводились в программе Axio Vision ver. 4.8.

Для определения показателя флуктуирующей асимметрии проводили измерения четырех параметров листовой пластины левой и правой стороны [3]. Для проверки исследуемых признаков листовой пластины на флуктуацию, были исключены направленная асимметрия и антисимметрия. Данные типы симметрий определялись вычислением критического значения коэффициента эксцесса и критерия Уилкоксона.

Жизнеспособность исследованных деревьев определяли по 8-бальной шкале С.А. Савельевой [9].

Для оценки прочности и механической устойчивости древесных растений в урбанизированных городах использовали следующие параметры:

1) P_{cr} и m_{cr} — предельно допустимая нагрузка и масса, при действии которых ствол начинает деформироваться или обламывается [10]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{2l^2} \quad (1)$$

$$m_{cr} = \frac{P_{cr}}{g} \quad (2)$$

где I — момент инерции сечения, l — длина ствола, g — ускорение силы тяжести;

2) H_{cr} — критическая высота ствола, при достижении которой действие собственного веса привело бы к необратимой деформации или облому [11]:

$$H_{cr} = c \cdot \frac{E^{1/3}}{\rho} \cdot d^{2/3} \quad (3)$$

где C — коэффициент соотношения массы кроны и ствола, d — диаметр основания ствола;

3) RRB — относительное сопротивление изгибу [10]:

$$RRB = \frac{r^2 E}{4\rho} \quad (4)$$

где r — радиус основания ствола, E — модуль упругости, ρ — плотность древесины.

В частности, способность сопротивляться изгибу определяется как произведение модуля упругости (E) и второго момента сечения (I) ствола.

Для статистической обработки данных использовали программы «Statistica 8» (StatSoftInc.) и «Excel 2010» (Microsoft Corporation). Достоверность отличий средних значений полученных данных определяли с использованием t-критерия Стьюдента. Коэффициент вариации вычисляли согласно рекомендациям Лакина [12]. Для описания зависимостей использовали методы регрессионного анализа.

Результаты и обсуждения. В результате проведенных исследований был выявлен высокий уровень антропогенной нагрузки в г. Донецке. Данная нагрузка оказывает значительное влияние на деревья клена остролистного, произрастающих вдоль автомобильных магистралей города Донецка. По данным, полученным в ходе исследования, выявлено, что уровень звукового давления на автомагистралях превышен в среднем на 10–14 %.

Из-за имеющегося высокого уровня вибро-акустической нагрузки автомагистралей, были измерены и вычленены из общего спектра, амплитудно-частотные спектры основных видов транспорта (рис. 4–7).

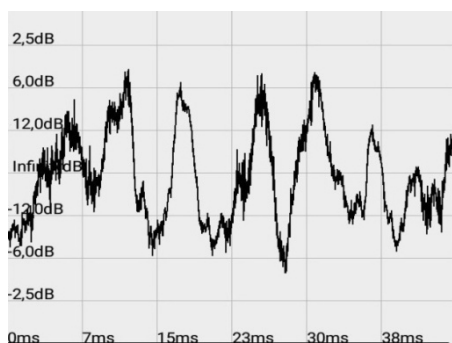


Рис. 4. Амплитудно-частотные спектры от тяжелого грузового транспорта

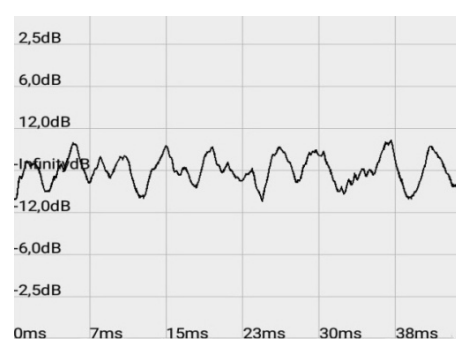


Рис. 5. Амплитудно-частотные спектры от легкового автомобиля иностранного производства

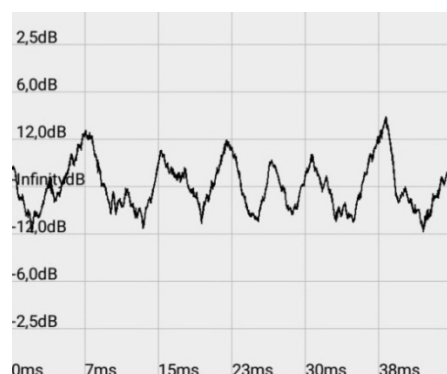


Рис. 6. Амплитудно-частотные спектры от автомобилей марки «ГАЗель»

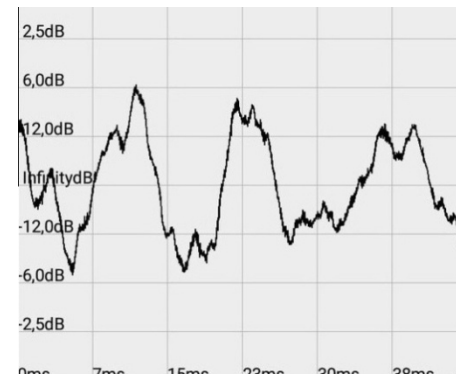


Рис. 7. Амплитудно-частотные спектры от пассажирских маршрутных автобусов

Вибрационная волна распространяется на древесную ткань, вызывая колебания древесины, что, в свою очередь, может негативно сказаться на растительном организме и мембранном транспорте веществ в нем. Уровень вибрационно-акустического шума вносит изменения в состав почв. Это отражается на концентрации тяжелых металлов в почвах близ автомагистралей. Так, содержание Zn в почвах вдоль автомагистралей превышено в среднем в 1,8 раза, Cu – в 16 раз. Для Cr превышение составило 2 раза от ПДК, но только на одном участке (ул. Крепильщиков). Исследования на содержание токсических веществ в воздухе показали превышение ПДК только по H₂S (сероводород) в среднем в 2,2 раза.

Жизнеспособность *Acer platanoides* L. в условиях г. Донецка. В результате такой техногенной нагрузки мы наблюдали снижение показателя жизнеспособности древесных растений по ул. Светлого пути, ул. Крепильщиков и пр. Ильича в 1 ряду. Эти территории характеризуются высоким уровнем вибрационно-акустической нагрузки и повышенным содержанием тяжелых металлов в почвах.

На примере пр. Ильича была проведена подробная оценка и анализ древесных растений произрастающих в разных рядах относительно автомагистрали (табл. 2).

Таблица 2
Анализ параметров жизнеспособности *Acer platanoides* L. по пр. Ильича г. Донецка

Параметр, %	1 ряд	2 ряд
	$\bar{X} \pm S_x$	
Повреждения кроны****	30	2
Повреждения ствола*	23	10
Опухоли**	12	4
Дефолиация	28	1
Асимметрия***	37	4

Примечание: * Морозобойные трещины, дупла, наличие гнили; ** наросты; *** Угол наклона ствола от вертикали (оценивается по трём градациям: 1) 10 % и менее; 2) 11–40 %; 3) более 40 %); ****Суховершинность, сухобочинность.

Между деревьями в первом и втором ряду имеются значительные отличия в рамках исследуемых параметров. Так, в первом ряду в 15 раз чаще встречаются повреждения кроны, в 2 раза – повреждения ствола различного типа, развитие наростов и опухолей наблюдается в 3 раза чаще. Также большинство деревьев имели асимметрию ствола, что повышает степень их аварийности, а также имелась высокая степень ранней дефолиации (превышение в 28 раз по сравнению со вторым рядом деревьев).

Оценка морфометрических параметров стволов исследуемого вида деревьев и их сравнение с естественными условиями обитания представлена в табл. 3.

Таблица 3
Морфометрические параметры стволов *Acer platanoides* L. по пр. Ильича г. Донецка

Вид	В естественных условиях		В искусственных насаждениях вдоль пр. Ильича	
	Высота, м \bar{X}	Диаметр, м \bar{X}	Высота, м $\bar{X} \pm S_x$	Диаметр, м $\bar{X} \pm S_x$
<i>Acer platanoides</i> L.	30*	0,29**	15,6±8,9	0,2±0,10

Примечания: * [13]; ** [14]

По данным таблицы 3 видно, что в городских условиях по пр. Ильича в 2 раза сокращается высота древесных растений по сравнению с естественными условиями обитания. Также чуть меньше диаметр ствола, что можно связать с гипоактивной деятельностью камбия в условиях антропогенного стресса.

Морфометрические исследования листовой пластинки. В конце вегетационного периода у сформировавшихся листьев клена остролистного наблюдаются различные реакции (рис. 7). На рис. 7 и далее обозначены следующие участки контроля: 0 – ДБС; 1 – пр. Ильича, 1 ряд; 2 – пр. Ильича, 2 ряд; 3 – ул. Крепильщиков; 4 – ул. Светлого пути; 5 – Макеевское шоссе. Так, на участках по пр. Ильича в первом и втором ряду наблюдается увеличение длины (в среднем на 2,8 см) по сравнению с контрольной группой.

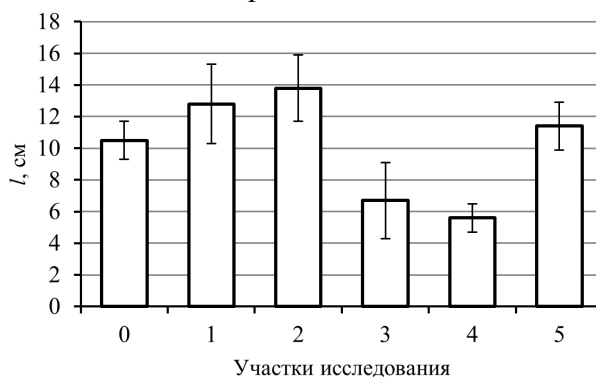


Рис. 7. Длина листовых пластин *Acer platanoides* L.

На участках же в Буденовском районе (ул. Светлого пути и ул. Крепильщиков) наблюдается значительное снижение длины листовых пластин (в среднем на 4,4 см). На территории вдоль Макеевского шоссе имеется небольшое увеличение листовых пластин на 0,9 см.

Имеющиеся отличия в реакциях листовых пластин на различных территориях предположительно могут быть связаны с концентрациями тяжелых металлов в почвах. В районе пр. Ильича имеются превышения Zn и Cu. Эти же металлы присутствуют и на участках в Буденовском районе, но их концентрация в 1,5 и 3,5 раза выше соответственно, чем по пр. Ильича.

Таким образом, можно заключить, что значительное уменьшение листовых пластин клена остролистного может быть вызвано значительными превышениями тяжелых металлов (Zn и Cu) в почвах.

В конце вегетационного периода у листьев клена остролистного при наблюдается аналогичная разрозненность результатов на исследуемых территориях различные реакции на каждом из исследуемых участков (рис. 8).

По пр. Ильича в первом и втором ряду ширина листовых пластин (15,5 см и 16 см соответственно) практически не отличается от контрольной группы (15,3 см). По Макеевскому шоссе имеется небольшое превышение (в среднем на 1 см).

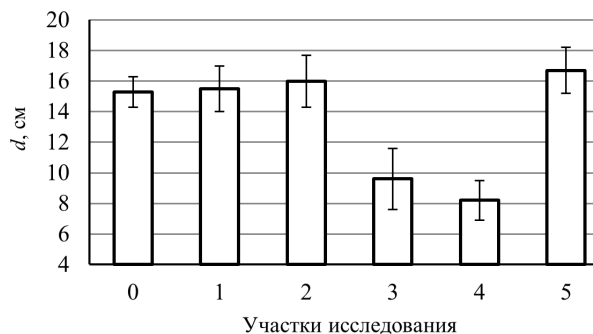


Рис. 8. Ширина листовых пластин *Acer platanoides* L.

На участках ул. Светлого пути и ул. Крепильщиков аналогично с параметром длины имеется значительное уменьшение ширины листовых пластин (на 6,4 см).

Площадь листовой пластины.

Измерения площади листовых пластин имеют подобную тенденцию с их длиной (рис. 9).

На трех участках: пр. Ильича (1 и 2 ряд) и Макеевское шоссе имеется увеличение площади листовых пластин по сравнению с контрольной группой (92,2 см²) в среднем в 1,3 раза (110 см², 119,7 см² и 127 см² соответственно.)

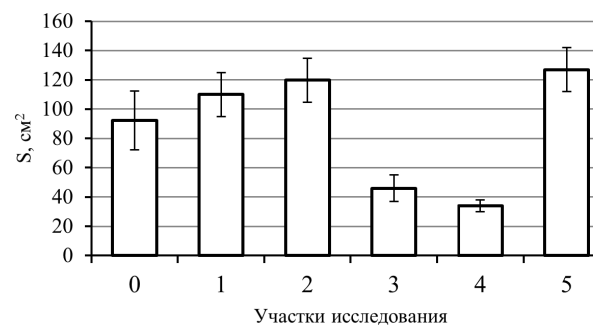


Рис. 9. Площадь листовых пластин *Acer platanoides* L.

По ул. Светлого пути и ул. Крепильщиков имеется аналогичное уменьшение площади листовой пластины, так же как уменьшение длины и ширины. Площади листовых пластин на данных участках меньше в среднем в 2,5 раза по сравнению с контрольной группой и составляют по ул. Светлого пути 46 см² и по ул. Крепильщиков 33,9 см².

Флуктуирующая асимметрия листовой пластины. *Acer platanoides* L. отлично подходит для анализа показателя флуктуирующей асимметрии. Данный вид древесных растений имеет крупные листовые пластины, что значительно снижает погрешность измерений по сравнению с измерением мелких листовых пластин. Одной из важных особенностей клена остролистного является то, что он не подвержен гибридизации в отличие от *Betula pendula* Roth [15], что также снижает вероятность не правильной оценки данного показателя, так как известно, что гибридизация увеличивает вероятность повышения показателя флуктуирующей асимметрии [16]. Прежде чем анализировать стабильность развития *Acer platanoides* L. в условиях антропогенной нагрузки с помощью показателя флуктуирующей асимметрии необходимо убедиться во флуктуирующем характере каждого используемого признака для измерений [17, 18].

Для этого нами была проведена оценка наличия или же отсутствия двух других типов асимметрии – направленной и антисимметрии. Результаты исследования наличия антисимметрии и направленной асимметрии исследуемых признаков листовой пластины представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты оценки наличия антисимметрии и направленной асимметрии значений билатеральных признаков листовой пластинки *Acer platanoides* L.

Участок	Признак	Антисимметрия			Направленная асимметрия		
		Эмпирическое значение коэффициента эксцесса	Критическое значение коэффициента эксцесса при P = 0,01	Наличие антисимметрии	Эмпирическое значение критерия Уилкоксона	Критическое значение критерия Уилкоксона при P = 0,01	Наличие направленной асимметрии
0	1	0,260	0,890	нет	113	92	нет
	2	-0,377			144		
	3	-0,456			138		
	4	-0,048			181		
1	1	-0,639	0,877	нет	327	185	нет
	2	-0,830			297		
	3	-0,809			265		
	4	0,085			235		
2	1	-0,591	0,877	нет	265	162	нет
	2	-0,221			261		
	3	-0,704			262		
	4	0,664			276		
3	1	1,109	0,890	нет	130	69	нет
	2	0,170			111		
	3	-0,068			132		
	4	-0,625			82		
4	1	-0,304	0,914	нет	49	23	нет
	2	-0,238			68		
	3	-0,028			47		
	4	-0,33			33		
5	1	0,984	0,900	нет	97	62	нет
	2	-0,570			119		
	3	-0,224			90		
	4	0,033			137		

В результате проведенного теста на значимость коэффициента эксцесса значений билатеральных признаков следует отметить, что у всех выбранных признаков для анализа показателя флуктуирующей асимметрии отсутствует антисимметрия.

Проведенный статистический анализ показал, что выбранные признаки листовой пластины не имеют направленного характера.

Таким образом, можно сказать, что выбранные нами признаки для исследования показателя флуктуирующей асимметрии носят флуктуирующий характер, так как наличия антисимметрии и направленной асимметрии обнаружено не было.

Оценка показателей флуктуирующей асимметрии на исследуемых территориях в конце вегетационного периода листовых пластин приведена в табл. 5.

Таблица 5

Оценка уровня антропогенной нагрузки и реакции растительного организма по показателю флуктуирующей асимметрии

Участок*	Показатель ФА		Уровень антропогенной нагрузки	Реакция организма
	max	$\bar{X} \pm S_x$		
1	0,087	0,045±0,004	Минимальный	Условная норма
2	0,119	0,051±0,007	Высокий	Существенные нарушения
3	0,141	0,063±0,007	Критический	Критическое состояние
4	0,120	0,049±0,008	Средний	Небольшие отклонения от нормы
5	0,145	0,066±0,001	Критический	Критическое состояния
6	0,132	0,059±0,005	Очень высокий	Опасные нарушения

Примечания: *1 – ДБС (дендрарий); 2 – Макеевское шоссе; 3 – пр. Ильича, 1 ряд; 4 – пр. Ильича, 2 ряд; 5 – ул. Светлого пути; 6 – Ул. Крепильщиков.

Нами было проведено исследование динамики развития флуктуирующей асимметрии в течение всего вегетационного периода листовых пластин с мая по август (рис. 10). Исследование динамики является важным для понимания развития асимметричности листовых пластин. Данный параметр пока мало изучен и требует дополнительных исследований.

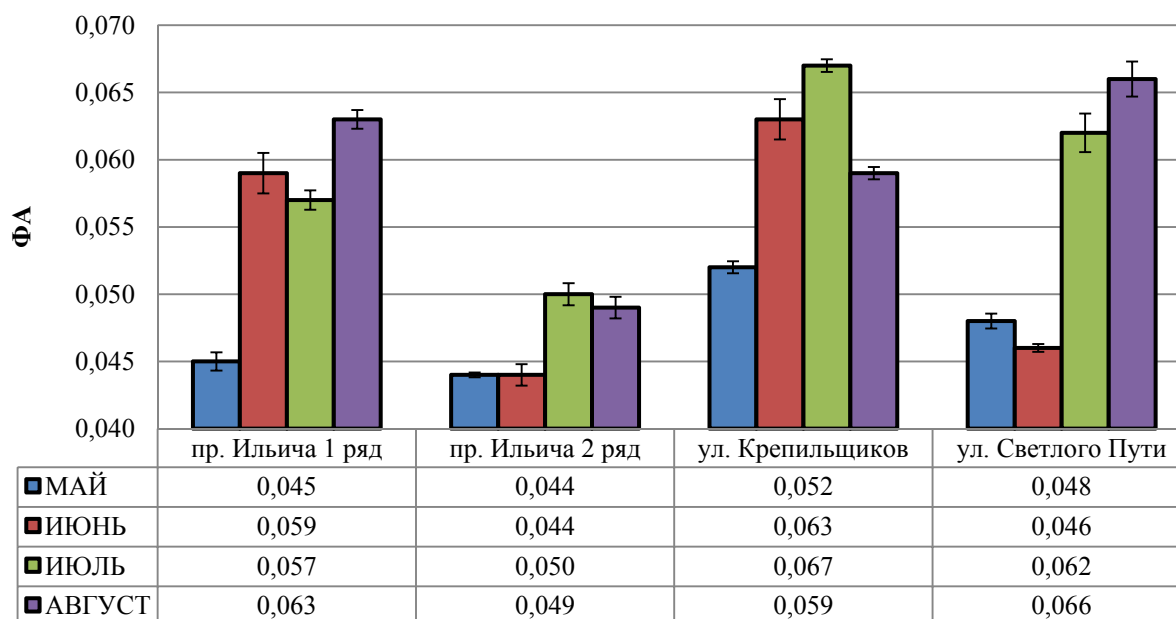


Рис. 10. Динамика флуктуирующей асимметрии на исследуемых участках в г. Донецке

По данным, полученным в ходе мониторинга динамики флуктуирующей асимметрии, заметно, что наибольшие увеличение показателей имеют в июле и августе. В эти месяцы имеет место окончание вегетационного периода. Поэтому, вероятнее всего, такое значительное увеличение уровня асимметрии связано с полной развитостью листовых пластин и лучше всего отражает отклонения от условной нормы.

На участках по ул. Светлого пути и по пр. Ильича (1 ряд) деревья клена остролистного находятся в критическом состоянии, что также говорит о критическом состоянии окружающей среды на территории их произрастания. Высокий уровень антропогенной нагрузки имеется на участке по ул. Крепильщиков. Также большие нарушения в развитии растительных организмов наблюдаются на участке по Макеевскому шоссе. Наименьшее влияние антропогенных факторов испытывают растения, произрастающие по пр. Ильича во втором ряду и на территории ДБС, взятой за условный контроль.

Связывая жизнеспособность растительных объектов с показателями флуктуирующей асимметрии их листовых пластин, наблюдается зависимость между этими двумя параметрами (рис. 11).

Т.е., чем выше показатель флуктуирующей асимметрии, тем ниже жизнеспособность древесного растения. Таким образом, по данным флуктуирующей асимметрии можно оценить жизнеспособность всего растительного организма клена остролистного (по результатам исследований).

Также прослеживается зависимость показателя флуктуирующей асимметрии с уровнем шума исходящим от автомагистрали на исследуемых территориях (рис. 12). Таким образом, при повышении уровня шума, наблюдается увеличение показателя флуктуирующей асимметрии.

Можно заключить, что при повышенном уровне зашумленности автомагистралей, в особенности, превышающем ПДУ, снижается жизнеспособность всего растительного организма, произрастающего на зашумленной территории.

Благодаря механическим свойствам древесины и развитой корневой системе клен остролистный обладает высокой устойчивостью к ветрам и другим механическим нагрузкам (рис. 13). В период вегетации листья создают значительный парусный эффект, поэтому в случае сильных ветров, особенно в засушливый период, есть риск облома ветвей.

Меры по увеличению механической устойчивости – санитарная обрезка, зауживание кроны (укорочение длинных горизонтальных ветвей), необходим полив в период засухи. Произрастая вдоль транспортного полотна, при надлежащем уходе, в засушливый период порода устойчива к комплексному воздействию транспортного потока и пригодна для посадки в первом ряду вдоль дорог.

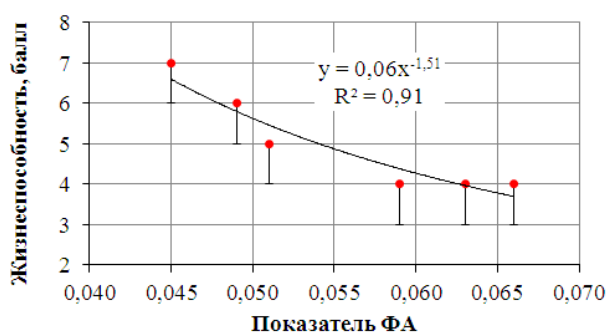


Рис. 11. Зависимость показателя флуктуирующей асимметрии от жизнеспособности клена остролистного в условиях города Донецка

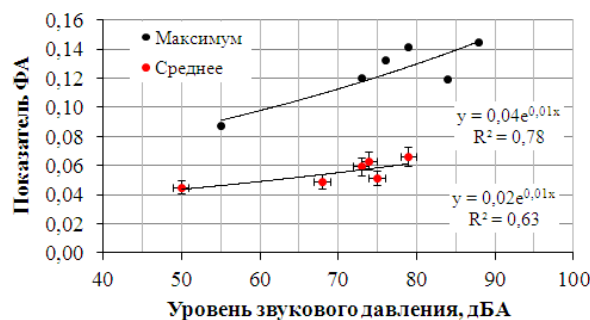


Рис. 12. Зависимость показателя флуктуирующей асимметрии от уровня шума вдоль автомагистралей города Донецка

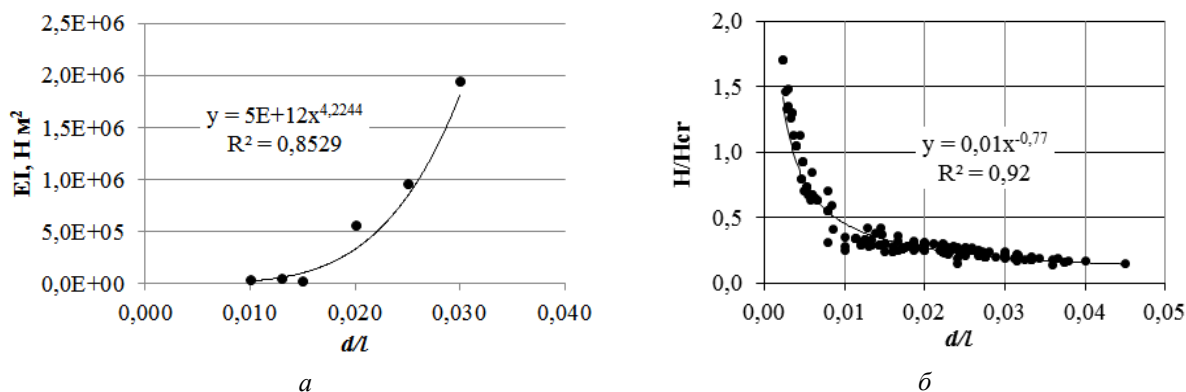


Рис. 13. Зависимость параметров механической устойчивости от морфологического маркера d/l для *Acer platanoides* L. в условиях г. Донецка
 a – зависимость жесткости на изгиб от отношения d/l ,
 b – зависимость отношения высоты к критической высоте от отношения d/l .

Выводы. В ходе исследований был выявлен высокий уровень антропогенной нагрузки. В связи с этим значительно снижается жизнеспособность клёна остролистного. Также имеются достоверные морфологические изменения листовых пластин. По высоким показателям флуктуирующей асимметрии можно судить о чувствительности листового аппарата клена остролистного, что дает возможность использования данного вида древесных растений в качестве биоиндикатора. Вследствие воздействия антропогенной нагрузки наблюдается снижение жизнеспособности *Acer platanoides* L. Установлена тесная связь показателя флуктуирующей асимметрии с показателем жизнеспособности ($R^2 = 0.91$) и уровнем шумового загрязнения ($R^2 = 0.7$). По результатам исследований *Acer platanoides* L. является механически устойчивой породой в условиях г. Донецка. Для повышения механической устойчивости рекомендуется производить санитарную обрезку с целью зауживания кроны (укорочение длинных горизонтальных ветвей). В целом произрастающая вдоль автомагистралей, при надлежащем уходе, вид устойчив к комплексному воздействию транспортного потока и пригоден для посадки в первом ряду вдоль дорог.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савинцева Л.С. Экологический анализ адаптивных механизмов растений в урбанизированной среде: дис. канд. биол. наук. – Кирова, 2015. – 169 с.
2. Ибрагимова Э.Э. Флуктуирующая асимметрия листьев *Morus Alba* L. как биоиндикатор аэротехногенного загрязнения урбоэкосистем / Э.Э. Ибрагимова, И.В. Бандак, А.С. Дрозд // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия «Биология, химия». – 2011. – Т. 24, № 2. – С. 129-135.
3. Мелькумов Г.М. Флуктуирующая асимметрия листовых пластинок клена остролистного (*Acer platanoides* L.) как тест экологического состояния паркоценозов городской зоны / Г.М. Мелькумов, Д.Э. Волков // Вестник ВГУ. Серия: География. Геоэкология. – 2014. – № 3. – С. 95-98
4. Устойчивость зеленых насаждений в условиях техногенного загрязнения города Нижнекамска / Н.Е. Серерякова, М.А. Карасева, В.Н. Карасев, Е.А. Медведкова // Вестник ПГТУ. – 2017. – №2. – С. 58-72
5. Корниенко В.О. Механическая устойчивость древесных пород и рекомендации по предотвращению их аварийности в городских насаждениях: монография / В.О. Корниенко, В.Н. Калаев; под редакцией С.А. Приходько – Воронеж: Роза ветров, 2018. – 92 с.
6. «Руководство по контролю загрязнения атмосферы. РД 52.04.186-89» (утв. Госкомгидрометом СССР 01.06.1989, Главным государственным санитарным врачом СССР 16.05.1989)
7. ГОСТ 28168-89 Почвы. Отбор проб.
8. «Руководство по контролю загрязнения атмосферы. РД 52.04.186-89» (утв. Госкомгидрометом СССР 01.06.1989, Главным государственным санитарным врачом СССР 16.05.1989)

9. Савельева Л.С. Устойчивость деревьев и кустарников в защитных лесных насаждениях / Л.С. Савельева. – М: «Лесная промышленность», 1975. – 168 с.
10. Niklas K.J. Worldwide Correlations of Mechanical Properties and Green Wood Density / K.J. Niklas, H.C. Spatz // American Journal of Botany. – 2010. – Vol. 97 (10). – P.1587–1594.
11. Niklas K.J. Plant Biomechanics: an engineering approach to plant form and function / K.J. Niklas. – Chicago: University of Chicago Press, 1992. – 607 p.
12. Лакин Г.Ф. Биометрия: учеб.пособиедля биол. спец. Вузов / Г.Ф. Лакин. – М.: Высшая школа, 1990. – 352 с.
13. Колесников А. И. Декоративная дендрология / А. И. Колесников. – М. : Лесная промышленность, 1974. –704 с.
14. Поляков А.К. Видовой состав древесных растений в дендропарке Маяцкого лесничества (Донецкая область) / А.К. Поляков, Е.П. Суслова // Промышленная ботаника. – 2011. – Вып. 11. – С. 185-190.
15. Коропачинский И.Ю. Естественная гибридизация и проблемы систематики берез Северной Азии / И.Ю. Коропачинский // Сибирский экологический журнал. – 2013. – № 4. – С. 459-479
16. Козлов М.В. Исследования флуктуирующей асимметрии растений в России: мифология и методология / М.В. Козлов // Экология. – 2017. – № 1. – С. 3-12
17. Статистический анализ флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков разноцветной ящурки *Eremia sarguta* / Д.Б. Гелашвили, В.Н. Якимов, В.В. Логинов, Г.В. Епланова // Актуальные проблемы герпетологии и токсикологии: Сб. науч. трудов. – 2004. – Вып. 7. – С. 45-59.
18. Оценка проявления флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков листовой пластинки *Acer pseudoplaranus* L. в условиях придорожных экосистем промышленного города (на примере г. Донецка) / А.З. Глухов, Ю.А. Штирц, А.Е. Демкович, С.П. Жуков // Промышленная ботаника. – Вып. 11. – 2011. – С. 90-96.

Поступила в редакцию 05.06.2019 г.

ECOLOGICAL AND BIOLOGICAL CHARACTERISTICS OF *ACER PLATANOIDES* L. IN THE CONDITIONS OF DONETSK

O.R. Kolchenko, V.O. Kornienko

The ecological and biological characteristics of Holly maple (*Acer platanoides* L.), not previously described in the conditions of the city of Donetsk, are presented. A high level of anthropogenic load on the studied areas of Donetsk was revealed, a close relationship between the fluctuating asymmetry index and the viability index and the level of noise pollution was established, the mechanical stability of *Acer platanoides* L. in the conditions of Donetsk was studied.

Keywords: *Acer platanoides* L., anthropogenic load, mechanical resistance, fluctuating asymmetry, viability.

Кольченко Ольга Руслановна

Студентка ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: daniaua411@gmail.com

Kolchenko Olga R.

Student, Donetsk National University, Donetsk.

Корниенко Владимир Олегович

Старший преподаватель кафедры биофизики
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк, ДНР.
E-mail: kornienkovo@mail.ru

Kornienko Vladimir O.

Senior Lecturer at the Department of Biophysics,
Donetsk National University, Donetsk.

УДК 581: 522.4

К ПОЗНАНИЮ БИОЛОГИИ *ADONIS VERNALIS* LINNAEUS, 1753 В СЕВЕРНОМ АЛТАЕ

© 2019. П.Д. Котенев

В статье впервые приводятся данные об особенностях биологии, распространения и изменчивости *Adonis vernalis* в условиях Северного Алтая.

Ключевые слова: *Adonis vernalis*; Ranunculaceae; Северный Алтай; особенности биологии.

Введение. *Adonis vernalis* L. европейско-азиатский вид семейства лютиковые, гемикриптофит [1]. Стебли прямостоячие, обычно маловетвистые, с прижатыми ветвями. Листья сидячие, цветки крупные, желтые (рис. 1). Корневище толстое короткое. Плод – многоорешек, состоящий из многочисленных односемянных орешков с опушенными плодиками [2, 3].

Цветет в мае, плодоносит в июне [4, 5]. Обитает на степных, иногда солонцеватых лугах, степных, задернованных, редко каменистых, склонах, на залежах и в покотинах, по окраинам степных березовых колков [6, 2].

Сердечные гликозиды в траве *Adonis vernalis* обладают высокой биологической активностью. Растение применяется как лекарственное сырье для лечения сердечных, почечных и нервно-психических заболеваний [7].

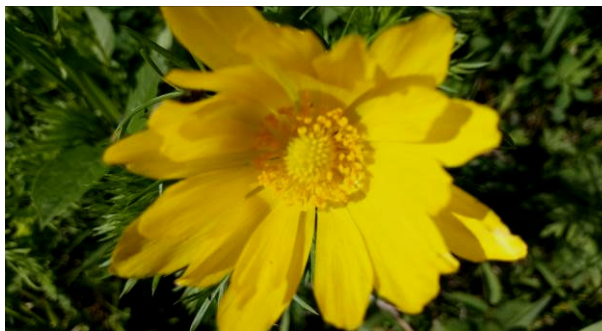


Рис. 1. *Adonis vernalis*

Ареал *Adonis vernalis* протягивается от Пиренейского полуострова до Минусинских степей, от 5°30' з.д. до 90°02' в.д. и от 35°15' до 57°15' с.ш. [8].

По литературным данным известны некоторые находки *Adonis vernalis* на территории России. В работе Ю. А. Бучиной [9] *Adonis vernalis* приводится для окрестностей села Тушна Сенгилеевского района Ульяновской области. *Adonis vernalis* отмечен спорадически по лесостепным и степным районам, достигая в некоторых урочищах большого обилия. Растет также на карбонатной почве по остепненным лугам, склонам и опушкам леса [10]. По словам М. М. Гафуровой, А. Н. Александрова [11] в Чувашской республике *Adonis vernalis* растет на луговостепных и остепненных склонах преимущественно южной и юго-западной экспозиций, на карбонатных почвах. В работе Н. В. Саидовой, Е. Л. Любарского [12] на территории Республики Татарстан *Adonis vernalis* зарегистрирован на склонах южных экспозиций и в северных районах на остепненных участках.

Adonis vernalis требует постоянной охраны, занесен во многие региональные Красные книги России [13–17].

К настоящему времени на территории Республики Алтай подробных комплексных исследований *Adonis vernalis*, практически не проводилось. Имеется некоторая информация о модельном объекте во флористических списках видов нашего региона [18]. Несомненно, необходимо подробное изучение особенностей биологии

Adonis vernalis и постоянный мониторинг для сохранения вида, занесенного в Красную книгу Республики Алтай [5]. *Adonis vernalis* охраняется в Алтайском заповеднике [19, 20].

Цель работы – дать подробное описание особенностей биологии *Adonis vernalis* в условиях Северного Алтая.

Исходя из поставленной цели, решены следующие задачи:

- 1) изучение фитоценоза *Adonis vernalis* в условиях Алтая;
- 2) анализ вариативности вегетативных и генеративных органов растений.

Материал и методы. Фитоценотические особенности анализировались по апробированной методике [21]. Брался модельный участок биотопа *Adonis vernalis* 10 на 10 метров. Определялись все основные представители исследованного фитоценоза, оценивалось обилие вида (рис. 2). Исследования проведены в первой декаде июня 2019 года.



Рис. 2. Закладка модельной площадки исследования

Проанализированы некоторые континуальные и дискретные признаки *Adonis vernalis*: общая высота растений, расстояние от цветка до корня, расстояние от чашечки до корня, диаметр цветка, диаметр чашечки, диаметр куста, количество побегов, число цветков. По полученным данным рассчитаны некоторые элементы описательной статистики.

Результаты и обсуждение. *Adonis vernalis* зарегистрирован в низко и среднегорной полосе Северного Алтая. Исследовано два ключевых участка:

1) склон горы Тугая на участке луговостепной растительности (N 51°57'9,16"; E 085°56' 9,22"). Обнаружено 7 экземпляров *Adonis vernalis*. В данной точке произрастания *Adonis vernalis* в фитоценоз также входили виды *Euphorbia pilosa* L., *Orchis maculata* L., *Primula veris* L., *Phlomis tuberosa* (L.) Moench, *Gentiana aquatica* L., *Oxytropis pilosa* (L.) DC. Указанные виды являются обычными для исследуемых ключевых точек, с высоким обилием формируют единый с *Adonis vernalis* фитоценоз. Растения *Adonis vernalis* в среднем достигали высоты 27,24 см, диаметр цветка 4,5 см, диаметр чашечки – 1,32 см, количество побегов – 8,3, диаметр куста – 18,6 см. количество цветков 2,14.

2) окрестности села Черга Шебалинского района (N 51°35'2,82"; E 085°34' 0,21"). С *Adonis vernalis* образовывали единый фитоценоз виды *Euphorbia pilosa* L., *Primula veris* L., *Phlomis tuberosa* (L.) Moench, *Gentiana aquatica* L., *Orchis maculata* L., *Aconitum* L. – типичные представители исследуемого локалитета. *Adonis vernalis* в условиях среднегорий Алтая имеет в среднем высоту 23,96 см, диаметр цветка –

3,46 см, диаметр чашечки – 1,21 см, количество побегов – 4,43, диаметр куста – 17 см, количество цветков 1,14. Помимо явного уменьшения значений признаков высотой местности отмечено сильное опушение побегов *Adonis vernalis* в среднегорьях Алтая (рис. 3).



Рис. 3. Опушение побегов *Adonis vernalis* (слева окрестности села Черга, справа склон горы Тугая)

Рассматриваемый вид редко встречается на Алтае, иных местообитаний не найдено.

Заключение. *Adonis vernalis* – вид, занесенный в Красную книгу Республики Алтай со статусом 3 (R) [5]. В настоящем исследовании приводятся новые местонахождения для Алтая этого представителя семейства лютиковых. Обнаружены географические различия в изменчивости вегетативных и генеративных органов растений. Чергинские растения *Adonis vernalis* характеризуются большим опушением, что вероятнее всего нужно связывать с затененностью и температурным режимом биотопа в сравнении с низкогорной выборкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определитель растений Республики Алтай / И. М. Красноборов [и др.]; от вред. И. М. Красноборов, И. А. Артемов; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ц. сиб. бот. сад; М-во образования и науки РФ, Горно-Алт. гос. ун-т. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. – 701 с. + 56 с. цв. ил.
2. Флора Сибири. Т. 6: Portulacaceae – Ranunculaceae / Сост. С. А. Тимохина, Н. В. Фризен, Н. В. Власова и др. В 14 т. – Новосибирск: Наука, 1993. – 310 с.
3. Марко Н. В. О естественном возобновлении *Adonis vernalis* L. и *Paeonia tenuifolia* L. в Крыму / Н. В. Марко, С. В. Шевченко // Труды Никитского ботанического сада. – 2005. – Т. 125. – С. 88-98.
4. Шапаренко И. Е. Распространение, ценогическая характеристика и состояние ценопопуляций *Adonis vernalis* L. на территории бассейна реки Ворсклы / И. Е. Шапаренко // Международный журнал экспериментального образования. Биологические науки. – 2013. – № 10. – С. 111-117.
5. Красная книга Республики Алтай (растения). – 3-е изд. перераб. и доп. – Горно-Алтайск, 2017. – 267 с.
6. Крылов П. Н. Флора Западной Сибири. Т.5: Aizoaceae-Berberidaceae. В 12 т. – Томск, 1931. – 1239 с.
7. Тычина И. Н. Интродукционное изучение *Adonis vernalis* L. в условиях Беларуси / И. Н. Тычина, И. М. Савич, В. В. Титок // Материалы Международной научной конференции, посвященной 85-летию Центрального ботанического сада НАН Беларуси (6-8 июня 2017 года, г. Минск). – Минск: Медисонт, 2017. – 504 с. – С. 323-325.
8. Пошкурлат А. П. Род горичцвет – *Adonis* L. Систематика, распространение, биология. – М.: Наука; МАИК «Наука/Интерпериодика», 2000. – 199 с.
9. Бучина Ю. А. Ценопопуляционные исследования адониса весеннего (*Adonis vernalis* L.) в окрестностях села Тушна Сенгилеевского района Ульяновской области / Ю. А. Бучина // Научные исследования и разработки молодых ученых. Биологические науки. – 2016. – № 11. – С. 20-23.

10. Фролов Д. А. Конспект флоры бассейна реки Свияга / Д. А. Фролов, А. В. Масленников. – Ульяновск: изд-во УлГПУ, 2010. – 144 с.
11. Гафурова М. М. Распространение адониса весеннего (*Adonis vernalis* L.) в Чувашской Республике / М. М. Гафурова, А. Н. Александров // Научные труды государственного природного заповедника «Присурский». – 2017. – Т. 32. – С. 59-63.
12. Саидова Н. В. Диагнозы и ключи онтогенетических состояний *Adonis vernalis* L. на территории Республики Татарстан / Н. В. Саидова, Е. Л. Любарский // Ученые записки Казанского государственного университета. Естественные науки. – 2009. – Т. 151, кн. 2. – С. 224-230.
13. Красная книга Чувашской Республики. Т. 1, Ч. 1. Редкие и исчезающие растения и грибы / Гл. ред. д.м.н., проф., академик Л. Н. Иванов. Авт.-сост. и зам. гл. ред. А. В. Дмитриев. – Чебоксары: РГУП «ИПК Чувашия», 2001. – 275 с.
14. Красная книга Республики Татарстан (животные, растения, грибы) / Глав. ред. А. И. Щеповских. – Казань: Идел-Пресс, 2006. – 830 с.
15. Красная книга Республики Крым. Растения, водоросли и грибы / Отв. ред. д. б. н., проф. А. В. Ена и к. б. н. А. В. Фатерыга. – Симферополь: ООО «ИТ «АРИАЛ», 2015. – 480 с., цв. илл.
16. Красная книга Ульяновской области / под науч. ред. Е. А. Артемьевой, А. В. Масленникова, М. В. Корепова; Правительство Ульяновской области. – М.: Изд-во «Буки Веди», 2015. – 550 с.
17. Красная книга Севастополя / Главное управление природных ресурсов и экологии города Севастополя. – Калининград; Севастополь: ИД «РОСТ-ДОАФК», 2018. – 432 с.
18. Ильин В. В. Сосудистые растения Республики Алтай: аннотированный конспект флоры / В. В. Ильин, Н. В. Федоткина. – Горно-Алтайск: РИО Горно-Алт. ун-та, 2008. – 290 с.
19. Галанин А. В. Конспект флоры хребта Куркуре (Восточный Алтай) / А. В. Галанин, Н. И. Золотухин, Л. В. Марина // Бот. журн. – 1979. – Т. 64, № 5. – С. 623-634.
20. Золотухин Н. И. Опыт флористических исследований на уровне фитоценозов наименьшего ранга (на примере Алтайского заповедника) / Н. И. Золотухин // Теоретические и методические проблемы сравнительной флористики: Матер. 2 рабочего совещ. По сравнительной флористике. – Л.: Наука, 1987. – С. 90-104.
21. Ипатов В. С. Описание фитоценоза: Методические рекомендации. Учебно-методическое пособие / Д. М. Ипатов, В. С. Мирин. – СПб, 2008. – 71 с.

Поступила в редакцию 15.09.2019 г.

TO THE KNOWLEDGE OF BIOLOGY *ADONIS VERNALIS* LINNAEUS, 1753 IN NORTHERN ALTAI

P.D. Kotenev

For the first time, the article presents data on the characteristics of biology, distribution and variability of *Adonis vernalis* in the conditions of Northern Altai.

Keywords: *Adonis vernalis*, Ranunculaceae, Northern Altai, biology feature

Котенев Павел Дмитриевич

Магистрант кафедры биологии и химии,
естественно-географический факультет
ФГБОУ ВО «Горно-Алтайский государственный
университет», Республика Алтай, Россия.
E-mail: pavel-kot12@mail.ru

Kotenev Pavel Dmitrievich

Undergraduate, department of Biology and Chemistry,
natural-geographical faculty, FSBEI HE «Gorno-
Altaysk State University», Altai Republic, Russia.
E-mail: pavel-kot12@mail.ru

УДК 581 : 502 (477)

ФИТОИНДИКАЦИОННАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ТЕХНОГЕННОЙ СРЕДЫ С ПОМОЩЬЮ *CAPSELLA BURSA-PASTORIS* (L.) MEDIC.

© 2019. Т.И. Кравсун, И.А. Федоркина

На основании данных морфологической пластичности вида-индикатора *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medic. по вегетативным органам проведен экологический мониторинг промышленных и селитебных объектов Центрального Донбасса. Составлен список признаков, важных для биодиагностики объектов урбо- и техногенеза в Донецком экономическом регионе.

Ключевые слова: экологический мониторинг, стратегии выживания, фитоиндикация, Донбасс, экспертиза промышленных объектов

Введение. Методы фитоиндикации в научной литературе рассматриваются как часть комплексных биологических исследований для проведения оценки состояния среды и режимов экологических факторов [1–2]. В Донецком национальном университете многолетние изучения биосистем промышленного региона позволяют рассматривать индикацию как часть нормирования качества состояния среды, экотопов и(или) локальных ландшафтов, в которых происходят эволюционные процессы компенсаторного или негативного содержания для геосистем регионально уровня; разработаны шкалы, группы информативных организмов с целью оценки по изменениям или возвратным колебаниям негативных признаков антропогенеза [3–5]. Ботаническую экспертизу рассматривают часто как составляющую экологического мониторинга в промышленном регионе [6], также при оценке определенного уровня тератогенеза растений [7] возможно проводить инвентаризацию [8] и независимую экспертизу [9] состояния природных сред при решении также фундаментального процесса – проявления реализованных стратегий выживания и характера распространения растительных организмов [10]. В таких разработках все полученные данные о состоянии растений рассматривают в комплексе с функциональными их характеристиками [5, 9, 11], вычлняя при этом причинно-следственные связи в системе "индикатор – индикат" [12–14], что в целом важно для проведения экологического мониторинга на всех уровнях его организации любой территориальной принадлежности [15–17]. В связи с этим для динамически трансформированных техногенных систем, к которым в полной мере принадлежит территория Донбасса, существенно важна база новых адекватных и информативных признаков, доступных в полевых условиях визуального контроля, – что на примере вида с широкой экологической амплитудой можно реализовать во всех экотопах региона.

Цель работы – провести фитоиндикационную оценку состояния экотопов техногенной трансформации в Донбассе с помощью вида рудеральной популяционной стратегии *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medic.

Материал и методика исследования. Квантификационный мониторинг реализован в соответствии с требованиями к экспериментам фитоиндикационного назначения [6, 13, 15, 17]. Экотопы были разделены по степени имеющейся в актуальных публикациях техногенной нагрузки в Донбассе [8, 9, 13]. В установленном экспериментальном блоке исследований использованы признаки вегетативных стратегий растения-индикатора *C. bursa-pastoris*, а именно типы листовой пластинки прикорневой розетки: heteris (H), rhomboidea (R), tenuis (T), simplex (S).

Анализ результатов. Визуализированные модели наглядного полевого эксперимента по идентификации листового аппарата модельного вида представлены на рис. 1. Пайноморфизм (морфологическая тенденция трансформации листа в условиях стресса) проявляется по типу усиления рассеченности цельного листа струговидного или лировидного типа в норме. Поэтому четыре регистрируемых типа розеточных листа в подавляющем количестве (рис. 1) представляют собой результат выносливости растительного организма, – вида широкой экологической пластичности в целом, но чувствительного к изменениям среды по показателям базовой организации вегетативных органов. Установлено, что чем более выражены доли и сегменты листового аппарата, тем в худших условиях произрастает вид. Поскольку экземпляры рудерального вида с одинаковой частотой встречаются по основным различиям в климатических условиях (затенение, увлажнение субстрата, орография местности), то дифференциация экотопов в данных условиях связана с разницей в геохимической среде (преимущественно – токсичность природных сред), учитывая розеточность габитуса, то наибольший контакт характерен для среды с фактором химического (токсического для вида) почвенного раствора. Розеточные листья позволяют установить тренд токсической нагрузки, что подтверждено статистическими методами при подсчете доминирования типа листового аппарата (табл. 1).

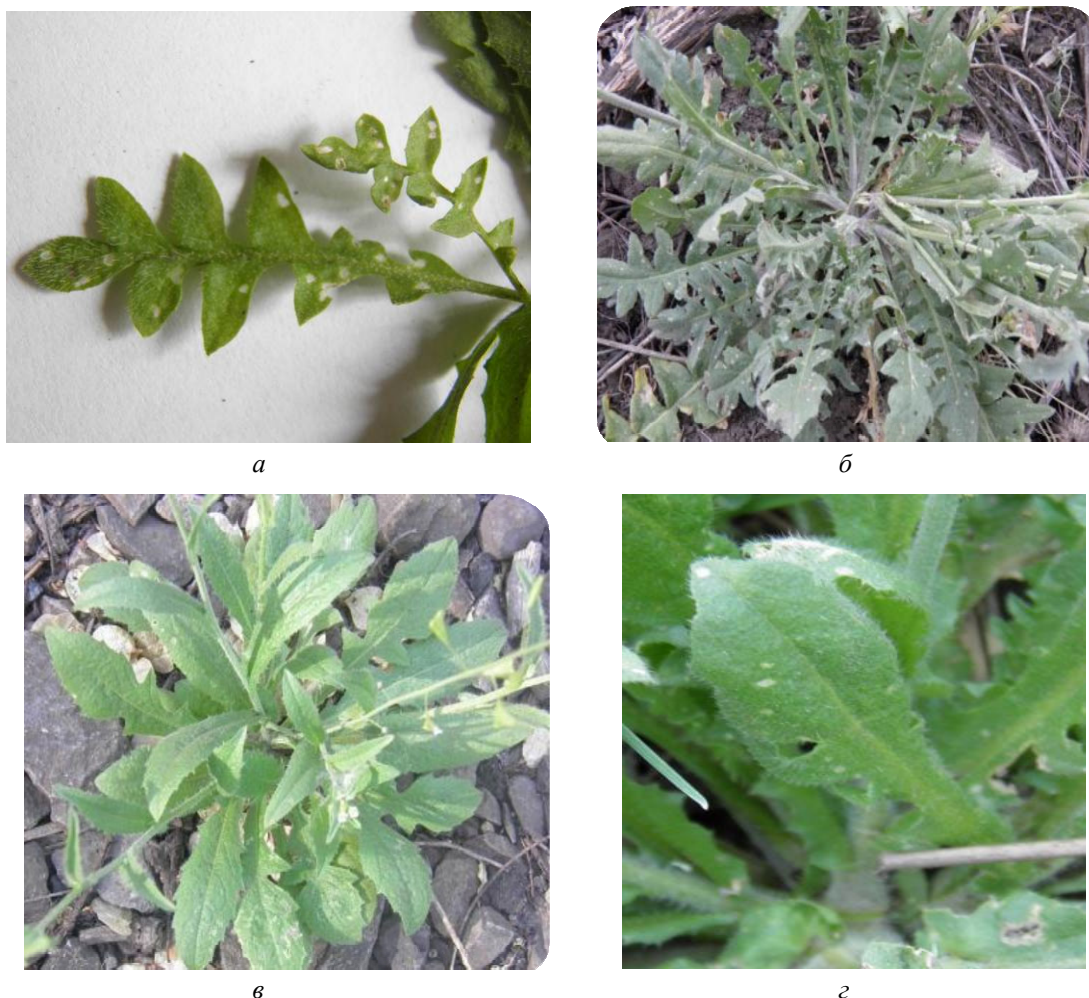


Рис. 1. Типы листовой пластинки прикорневой розетки *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medic.:
 а – heteris (H), б – rhomboidea (R), в – tenuis (T), г – simplex (S)

В табл. 1 представлены результаты эксперимента по выявлению доминирующей вегетативной жизненной стратегии *Capsella bursa-pastoris* с указанием координат экотопов – точек сбора материала. Пробные площади разбиты на категории по экотопической принадлежности в зависимости от степени и специфики воздействия на природные среды.

Таблица 1

Локализация пробных площадей мониторингового эксперимента помощью вида рудеральной популяционной стратегии *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medic. по вегетативным признакам строения листового аппарата в прикорневой розетке

№ п/п	Координаты WGS-84, м		Долгота, L °	Широта, В °	Вегетативная стратегия	
	х	у			доминант	субдоминант
<i>Экотопы промышленных зон, техногенно трансформированные</i>						
1	6 108 346	4 211 418	37,8318131	48,0089630	heteris	rhomboidea
2	6 105 240	4 213 424	37,8498292	47,9902917	heteris	rhomboidea
3	6 106 626	4 217 761	37,8887917	47,9986230	rhomboidea	heteris
4	6 111 861	4 214 106	37,8559604	48,0300854	heteris	rhomboidea
5	6 112 422	4 218 324	37,8938465	48,0334549	heteris	rhomboidea
6	6 144 376	4 240 212	38,0904685	48,2250427	heteris	rhomboidea
7	6 146 244	4 234 200	38,0364676	48,2362206	heteris	rhomboidea
8	6 149 772	4 224 750	37,9515782	48,2573288	heteris	rhomboidea
<i>Экотопы урбанизированной среды, жилой застройки</i>						
9	6 116 848	4 212 407	37,8406966	48,0600310	rhomboidea	tenuis
10	6 156 956	4 230 293	38,0013721	48,3002740	tenuis	rhomboidea
11	6 115 436	4 206 794	37,7902705	48,0515539	tenuis	rhomboidea
12	6 112 946	4 210 461	37,8232165	48,0366020	rhomboidea	tenuis
13	6 110 476	4 209 525	37,8148071	48,0217618	rhomboidea	tenuis
14	6 148 930	4 261 926	38,2855301	48,2522885	rhomboidea	tenuis
15	6 150 041	4 255 629	38,2289623	48,2589350	tenuis	rhomboidea
16	6 119 266	4 232 937	38,0251172	48,0745506	rhomboidea	tenuis
17	6 122 267	4 241 821	38,1049300	48,0925564	rhomboidea	tenuis
<i>Экотопы хозяйственно-бытового назначения, рудеральные полигоны</i>						
18	6 094 181	4 203 692	37,7624097	47,9237652	tenuis	rhomboidea
19	6 092 778	4 224 176	37,9464205	47,9153185	tenuis	rhomboidea
20	6 100 865	4 223 009	37,9359352	47,9639855	tenuis	rhomboidea
21	6 119 565	4 226 006	37,9628560	48,0763446	tenuis	rhomboidea
22	6 126 148	4 222 472	37,9311113	48,1158381	tenuis	rhomboidea
23	6 122 377	4 219 655	37,9058047	48,0932178	rhomboidea	tenuis
24	6 134 857	4 253 510	38,2099263	48,1680429	tenuis	rhomboidea
25	6 115 061	4 246 937	38,1508798	48,0493035	tenuis	rhomboidea
<i>Экотопы малонарушенных природных территорий</i>						
26	6 101 515	4 261 428	38,2810585	47,9678926	simplex	rhomboidea
27	6 109 189	4 261 063	38,2777843	48,0140279	simplex	tenuis
28	6 117 245	4 259 620	38,2648189	48,0624193	simplex	tenuis
29	6 114 356	4 265 065	38,3137334	48,0450704	simplex	tenuis
30	6 110 548	4 270 016	38,3582033	48,0221957	simplex	tenuis
31	6 126 470	4 266 466	38,3263166	48,1177718	simplex	tenuis
32	6 122 735	4 277 482	38,4252730	48,0953683	simplex	tenuis
33	6 099 650	4 228 471	37,9850022	47,9566736	simplex	tenuis
34	6 104 214	4 229 321	37,9926372	47,9841208	simplex	rhomboidea
35	6 134 857	4 274 015	38,3941281	48,1680429	simplex	rhomboidea

Все 35 мониторинговых площадей в соотношении к разным формам трансформации ландшафта были проанализированы по доминирующему количественному проявлению степени рассеченности листовой пластинки вида-индикатора. Нижняя формация листьев наиболее информативна и пластична для данного вида, поскольку сама розетка формируется на ранних стадиях онтогенеза и функционально сопряжена в контактном расположении на поверхности субстрата в непосредственной близости к нему, что соединяет развитие особи и характеристики грунтов в неразрывной связи при росте и развитии тест-вида. Установлено, что для разных экотопов количественное соотношение типов листового аппарата *C. bursa-pastoris* имеет зависимость и ранжируется следующим образом: *heteris* (H) характерен для территорий промышленных площадок с максимальными значениями токсической нагрузки на эдафической горизонт грунтов; *rhomboidea* (R) тяготеет больше к селитебным территориям – районам плотной жилой застройки городов Донецкой Народной Республики; *tenuis* (T) в большинстве случаев формируется в экотопах социально-бытового назначения, рудеральных полигонах (см. табл. 1), что предположительно отражает высокий уровень загрязнения среды продуктами горения и органическими остатками; тип листовой пластинки *C. bursa-pastoris* по морфологии *simplex* (S) (см. рис. 1) характерен территориям минимальной антропогенной нагрузки (преимущественно объектам природно-заповедного фонда, рекреационного назначения или их буферным территориям, где не наблюдается регистрация высоких показателей приоритетных загрязнителей и механическая трансформация корнеобитаемого слоя почв), что обусловлено соответствием архитектоники вида его нормальному состоянию в генетико-морфологической норме.

Выводы.

1. При анализе морфологии листового аппарата *C. bursa-pastoris* в различных экотопах Донбасса установлена вегетативная стратегия вида к уровню и специфике влияния техногенеза на природные среды. Ранжированный ряд пайноморфности соответствует перечню: *simplex*, *tenuis*, *rhomboidea* и *heteris*.

2. Поскольку семенной материал был использован с однородной генетической структурой на ценопопуляционном уровне ожидаемой вариабельности, то вывод о норме реакции считаем сделать правомкрным при регистрации разницы в потомках первого поколения для указанных экотопов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Душкова Д.О. Применение биоиндикационных методов при проведении мониторинговых исследований окружающей среды / Д.О. Душкова, А.Г. Горецкая, А.В. Евсеев // Проблемы региональной экологии. – 2017. – № 2. – С. 10-15.
2. Ибрагимова Э.Э. Мониторинг состояния окружающей среды методами фитоиндикации техногенного химического загрязнения / Э.Э. Ибрагимова // Человек – Природа – Общество: Теория и практика безопасности жизнедеятельности, экологии и валеологии. – 2018. – № 4 (11). – С. 57-61.
3. Determination of bioindicators sensitivity thresholds for ecologically unfavourable environmental factors / S.V. Beshpalova, O.S. Goretsky, A.Z. Glukhov, A.I. Safonov // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2010. – № 1(10). – С. 9-25.
4. The criteria of assessment of ecological state of environment on thresholds of sensitivity of bioindicators / S.V. Beshpalova, O.S. Goretsky, A.Z. Glukhov, A.I. Safonov // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2011. – № 1. – С. 25-43.
5. Conceptual approaches to standardization in system of environmental biomonitoring / S.V. Beshpalova, O.S. Goretsky, A.D. Shtirts, A.I. Safonov // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2013. – № 1. – С. 8-15.
6. Safonov A.I. Approbation of botanical expertise method in ecological monitoring / A.I. Safonov, Y.S. Safonova // Геополитика и экогеодинамика регионов. – 2014. – Т. 10, № 2. – С. 219-221.

7. Сафонов А.И. Тератогенез растений-индикаторов промышленного Донбасса / А.И. Сафонов // Разнообразие растительного мира. – 2019. – № 1 (1). – С. 4-16.
8. Сафонов А.И. Инвентаризация промышленных объектов Донбасса по фитоиндикационным критериям / А.И. Сафонов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2019. – № 1. – С. 121–128.
9. Сафонов А.И. Экспертиза промышленных предприятий Донбасса по состоянию фитокомпонентов / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2019. – № 1-2. – С. 35-43.
10. Сафонов А.И. Стратегическая потенциализация фитоиндикаторов техногенных загрязнений / А.И. Сафонов // Аграрная Россия. – 2009. – № 51. – С. 58-59.
11. Сафонов А.И. Функциональная ботаника в Донбассе: экологический мониторинг, информационные ресурсные технологии, фитодизайн / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2017. – № 1-2. – С. 8-14.
12. Сафонов А.И. Чек-лист индикаторных признаков сорно-рудеральной фракции урбанофлоры г. Донецка (1998-2018 гг.) / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2018. – № 3-4. – С. 67-72.
13. Safonov A.I. Phyto-qualimetry of toxic pressure and the degree of ecotopes transformation in Donetsk region / A.I. Safonov // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2013. – № 1. – С. 52-59.
14. Сафонов А.И. Фитоквантификация как информационный ресурс экологического мониторинга Донбасса / А.И. Сафонов // Донецкие чтения 2018: Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Матер. III Междунар. научн. конф. (Донецк, 25 октября 2018 г.). – Т. 2. Хим.-биол. науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 216-217.
15. Safonov A.I. Phytoindicational monitoring in Donetsk / A.I. Safonov // Наука. Мысль. – 2016. – № 4. – С. 59-71.
16. Khondhodjaeva N.B. Bioindication and its importance in the conducting of ecological monitoring / N.B. Khondhodjaeva, K.B. Ismillaeva, N.T. Ruzimbayeva // European Science. – 2018. – № 4 (36). – P. 68-70.
17. Сафонов А.И. Индикаторная роль растений в системе управления городом в промышленном регионе / А.И. Сафонов // Экологическая ситуация в Донбассе. – М.: Изд-во МНЭПУ. – 2016. – Т. 1. – С. 288-293.

Поступила в редакцию 21.11.2019 г.

PHYTOINDICATIVE ASSESSMENT OF THE INDUSTRIAL ENVIRONMENT STATE USING *CAPSELLA BURSA-PASTORIS* (L.) MEDIC.

T.I. Kravsun, I.A. Fedorkina

Ecological monitoring of industrial and residential facilities in the Central Donbass has been carried out based on morphological plasticity of the indicator species *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medic. by vegetative organs. A list of features important for biodiagnostics of the objects of urban and technogenesis in the Donetsk economic region has been compiled.

Keywords: environmental monitoring, survival strategies, phytoindication, Donbass, industrial facility expertise.

Кравсун Татьяна Ивановна

Аспирант ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.

Kravsun Tatyana

Postgraduate, Donetsk National University, Donetsk.

Федоркина Ирина Анатольевна

Кандидат экономических наук; доцент
ГО ВПО «Донецкий национальный университет
экономики и торговли им. М. Туган-Барановского»,
г. Донецк, ДНР.
E-mail: fiaa@list.ru

Fedorkina Irina

Candidate of Economical Science; Docent,
Donetsk National University of Economics and Trade,
Donetsk.

УДК 574 : 58.632 : 581 : 502 (477)

**КОМПЛЕКСНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ НАРУШЕННОСТИ ЭКОТОПОВ
ПО ФИТОИНДИКАЦИОННОМУ КРИТЕРИЮ В г. ДОНЕЦКЕ**

© 2019. А.И. Сафонов, Е.А. Гермонова

Индекс трансформации локальных природных экосистем г. Донецка рассчитан по совокупному коэффициенту степени структурной трансформации растений-индикаторов: тератологические проявления, дефектность пыльцы, эмбрионального аппарата и общего габитуального состояния информативных для экологической экспертизы видов растений. Получена картографическая модель распределения совокупного признака для центральных районов промышленного мегаполиса (г. Донецка).

Ключевые слова: экологический мониторинг, фитоиндикация, Донецк, ботаническая экспертиза

Введение. Биомониторинг является частью программы стандартизации и нормирования воздействия человеческой деятельности на окружающую среду [1–3]. Методы фитоиндикации часто используют для проведения экологических наблюдений, оценок, прогнозов и элементов менеджмента в промышленно напряженных регионах или при высоких уровнях химического загрязнения [4–5]. Растения напрямую связаны с факторами среды, поскольку используемые индикаторы локально не меняют своих геоинформационных характеристик и не имеют возможности мигрировать на протяжении одного вегетационного периода, или всех сроков периода культивационного эксперимента [2, 6], что приемлемо для проведения инвентаризации промышленных объектов и мест чрезмерного импакта антропогенеза [7], в том числе по показателю структурных аномалий [8] и индивидуального строения растительного организма в норме реакции [9]. В донецком экономическом регионе фитоиндикационные критерии использовали как для оценки состояния среды, так и для анализа нежелательной динамики процессов трансформации природных систем [10–13]. Работа с экологической информацией в картографировании является актуальной экологической задачей [10, 14, 15].

Цель работы – провести оценку степени нарушенности локальных экотопов по комплексному фитоиндикационному критерию в г. Донецке.

Материал и методика исследования. Фитоиндикационная значимость нарушенности экотопов Донбасса выделена как совокупный критерий, состоящий из четырех блоков данных по структурной организации растительных организмов, для которых уже опубликованы результаты их информативных признаков в связи с конкретными уровнями и спецификой загрязнения или изменения среды. Общая методология фитомониторингового эксперимента представлена в предыдущих публикациях [2, 5–10].

Блоки информационной значимости (по одному из указанных видов растений):

1) коэффициент тератообразования *Atriplex patula* L., *Berteroa incana* (L.) DC., *Cichorium intybus* L., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip., *Reseda lutea* L., *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik., *Diplotaxis muralis* (L.) DC., *Tanacetum vulgare* L. и *Plantago major* L.;

2) показатель дефектности пыльцевых зерен *Cichorium intybus* L., *Tragopogon major* Jacq., *Berteroa incana* (L.) DC., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip., *Reseda lutea* L., *Echium vulgare* L., *Plantago major* L. и *Tanacetum vulgare* L. при окрашивании метиленовым синим;

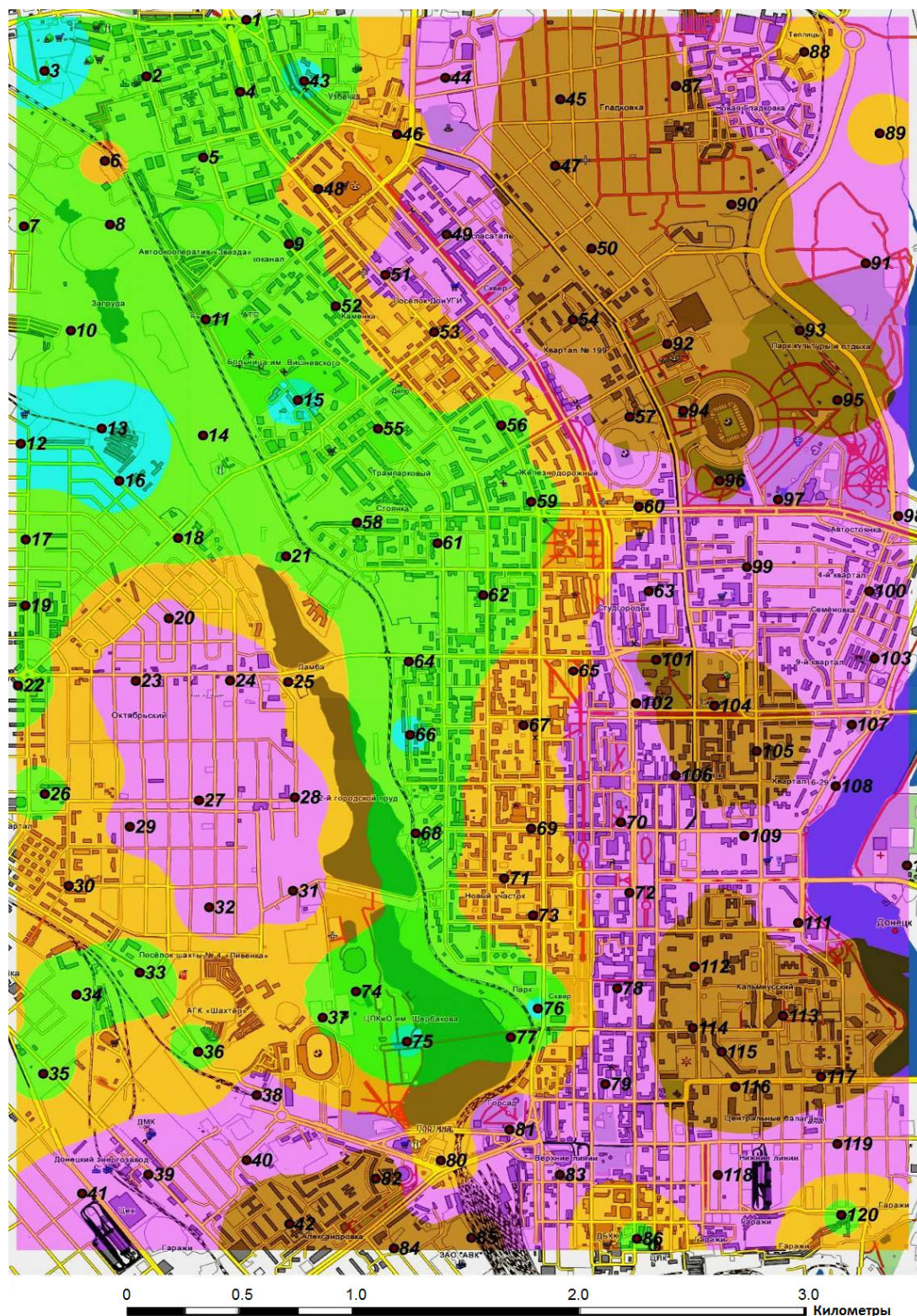
3) габитуальная разнокачественность *Amaranthus retroflexus* L., *Cichorium intybus* L., *Daucus carota* L., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip., *Reseda lutea* L., *Tanacetum vulgare* L., *Sisymbrium polymorphum* (Murray) Roth, *Convolvulus arvensis* L., и *Plantago major* L.;

4) трансформация зародышевого аппарата и сопутствующих эмбриональных гистологических структур *Diplotaxis muralis* (L.) DC., *Cichorium intybus* L., *Tragopogon major* Jacq., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip., *Echium vulgare* L., *Reseda lutea* L., *Tanacetum vulgare* L., *Plantago major* L. и *Thlaspi arvense* L.

Каждый блок оценен по максимальной шкале значимости от 0 до 5: 0–1 – не зафиксированные воздействия; 2–3 – трансформации экотопа средней степени; 4–5 – существенная нарушенность системы по аддитивной шкале (10:2) методик [7–9]. Таким образом, максимально возможное значение показателя воздействия на экотоп равно 20 (преимущественно необратимое состояние как нуль-момент в эцезисе). При плотности мониторинговой сети в 3–4 км расстояния от узлов локализации отбора проб только такая комбинация растительного материала позволяет обеспечить достоверную выборку полевых сборов для картографической визуализации данных в г. Донецке на одной плоскости – использование встроенного и дополнительно разработанного инструментария интерполяции и анализа близости в геоинформационной системе (ГИС) ArcGIS 10.4. Первичная оценка экотопов Донбасса по такой схеме начата в 2015–2017 гг., общие скрининговые программы с анализом данных для картографирования получены в 2018–2019 гг.

Анализ результатов. На рис. 1 представлены результаты распределения значений индекса нарушенности (трансформации) природных экотопов по четырем критериям состояния растений-индикаторов в летний период 2019 года. В распределении значений и для дифференцированного иллюстрирования наиболее показательной была определена шкала в пяти состояниях системы. Индексы варьирования признака (5 балльные интервалы) для каждого диапазона представлены на рис. 1, где также содержатся процентные соотношения площадной занятости каждым интервалом от общей площади проведенного эксперимента по 120 пробным площадям полевых сборов. Установлено, что полностью трансформированными или искусственно переформированными могут считаться экотопы, занимающие более 18 % территории, что для высоко урбанизированного пространства (на примере г. Донецка) не является высоким критическим значением. По ожидаемым прогнозам минимальному значению (интервал от 0 до 4 баллов) соответствует крайне малый процент территории (меньше 3), и тот зафиксирован в единичных случаях и в зависимости от года может иметь гораздо меньшее значение с маргинально точечной локализацией.

Выделить наиболее информативный вид растений в данном эксперименте не представлялось возможным (хотя по списку основных наиболее часто задействованных видов можно предполагать, что это растения типологического опыта, как было указано в [9] приоритетного списка), поскольку только на компенсаторных значениях можно было получить визуализацию. Наибольшие пертурбации наблюдались за последние годы в колебаниях численных значений второго и третьего интервальных уровней. Они менее тяготеют по территории к локализации промышленного сектора и более связаны с экотопами хозяйственно-бытового назначения в селитебных элементах зонирования при более плотной жилой застройке в тех районах, где более развита социальная инфраструктура города.



0 - 4	2.7%
5 - 8	25.7%
9 - 12	20.3%
13 - 16	33.1%
17 - 20	18.2%

Рис. 1. Распределение индекса нарушенности (трансформации) природных экотопов по состоянию растений-индикаторов (центральные районы г. Донецка, 2019 год)

Интервал значений (третий) от 9 до 12 балльных единиц (см. рис. 1) в большей степени сформирован значениями высоких уровней тератных проявлений у *Berteroa incana* (L.) DC. и *Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik. в весенне-летний период, *Atriplex patula* L. и *Tanacetum vulgare* L. в летне-осенний период проведения полевого эксперимента. *Cichorium intybus* L., *Tragopogon major* Jacq. наиболее показательны при оценке эмбриональной разнокачественности (зародышевого аппарата и тканей зародышевых эпителиев). Значения четвертого уровня (предпоследнего) интервального показателя (рис. 1) трансформации систем в городе Донецке в большей степени зависимы от общей габитуальной разнокачественности *Reseda lutea* L., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. и *Cichorium intybus* L. Самым консервативным из блоковых критериев определен признак изменчивости зародышевого аппарата и сопутствующих ему эмбриональных гистологических структур, что отражает в определенной степени стратегию сохранности генеративных элементов в условиях специфического и неспецифического стресса при формировании растительного организма в городской среде.

Выводы.

1. Выбранные критерии экологической фитоэкспертизы города Донецка (тератологический, габитуальный, палинологический и гисто-эмбриологический) в сумме отражают специфику уровня трансформации экосистемы на локальном точечном уровне.

2. С помощью картографического метода получена одноплоскостная визуальная модель сплошного распределения признака по всей территории фитомониторингового эксперимента, на основании чего экотопы центральных районов г. Донецка ранжированы по пяти диапазонам (уровням) трансформации локальных геосистем.

3. Выделены территории экологического бедствия, для которых характерны максимальные значения показателя структурной организации растений-индикаторов, что позволяет рассматривать полученную карту как обоснование для функционального зонирования отдельных участков города Донецка, а также как аргумент принятия решений в хозяйственной деятельности урбосреды мегаполиса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conceptual approaches to standardization in system of environmental biomonitoring / S.V. Bepalova, O.S. Goretsky, A.D. Shtirts, A.I. Safonov // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2013. – № 1. – С. 8-15.
2. Safonov A.I. Phytoindicational monitoring in Donetsk / A.I. Safonov // Наука. Мысль. – 2016. – № 4. – С. 59-71.
3. Khondhodjaeva N.B. Bioindication and its importance in the conducting of ecological monitoring / N.B. Khondhodjaeva, K.B. Ismillaeva, N.T. Ruzimbayeva // European Science. – 2018. – No 4 (36). – P. 68-70.
4. Ибрагимова Э.Э. Мониторинг состояния окружающей среды методами фитоиндикации техногенного химического загрязнения / Э.Э. Ибрагимова // Человек – Природа – Общество: Теория и практика безопасности жизнедеятельности, экологии и валеологии. – 2018. – № 4 (11). – С. 57-61.
5. Сафонов А.И. Функциональная ботаника в Донбассе: экологический мониторинг, информационные ресурсные технологии, фитодизайн / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2017. – № 1-2. – С. 8-14.
6. Сафонов А.И. Экспертиза промышленных предприятий Донбасса по состоянию фитокомпонентов / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2019. – № 1-2. – С. 35-43.
7. Сафонов А.И. Инвентаризация промышленных объектов Донбасса по фитоиндикационным критериям / А.И. Сафонов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2019. – № 1. – С. 121-128.

8. Сафонов А.И. Тератогенез растений-индикаторов промышленного Донбасса / А.И. Сафонов // Разнообразие растительного мира. – 2019. – № 1 (1). – С. 4-16. – DOI: 10.22281/2686-9713-2019-1-4-16.
9. Сафонов А.И. Чек-лист индикаторных признаков сорно-рудеральной фракции урбанofлоры г. Донецка (1998-2018 гг.) / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2018. – № 3-4. – С. 67-72.
10. Гермонова Е.А. Анализ ботанико-экологической информации по геолокации в промышленном Донбассе / Е.А. Гермонова, А.И. Сафонов // Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IV Международной научной конференции (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Том 2: Химико-биологические науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 202-204.
11. Бешенцев А.Н. Научные основы информационной концепции картографического метода исследования / А.Н. Бешенцев // Вестник Сибирского государственного университета геосистем и технологий. – Т. 23, № 1. – 2018. – С. 85-110.
12. Колесников С.В. Визначення стадій демуґаційної сукцесії степової рослинності з використанням даних дистанційного зондування / С. В. Колесников, А. І. Сафонов // Екосистеми, їх оптимізація і охорона. – 2013. – № 9 (28). – С. 86-95.
13. Сафонов А.И. Оценка современного состояния и динамики степных растительных сообществ РЛП "Зуевский" с помощью технологии дистанционного зондирования / А.И. Сафонов, С.В. Колесников // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2011. – № 1. – С. 106-110.
14. Геоинформационная система представления экологической информации для портала «Открытые данные» / В.Г. Гайворонский, А.А. Романов, В.С. Кресин, В.В. Брук // Проблемы охраны окружающей природной среды и экологической безопасности. – 2016. – Вып. 38. – С. 143-151.
15. Калинина А.В. Геостратегическая визуализация фитоценозов породных отвалов угольных шахт г. Макеевки в условиях самозарастания и рекультивации / А.В. Калинина, Е.А. Гермонова // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2018. – № 3-4. – С. 28-34.

Поступила в редакцию 21.11.2019 г.

A COMPREHENSIVE INDICATOR OF ECOTOPE DISTURBANCE BY PHYTOINDICATION CRITERION IN DONETSK

A.I. Safonov, E.A. Germonova

The transformation index of local natural ecosystems in Donetsk has been calculated based on the cumulative coefficient of the degree of indicator plants structural transformation: teratological manifestations, defective pollen, embryonic apparatus and general habitat status of plant species informative for environmental impact assessment. A cartographic model of the distribution of the aggregate attribute for the central regions of the industrial metropolis (Donetsk) is obtained.

Keywords: environmental monitoring, phytoindication, Donetsk, botanical expertise.

Сафонов Андрей Иванович

Кандидат биологических наук, доцент;
заведующий кафедрой ботаники и экологии
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк, ДНР.
E-mail: andey_safonov@mail.ru

Safonov Andrey

Candidate of Biological Sciences, Docent;
Head of the Department of Botany and Ecology,
Donetsk National University, Donetsk.

Гермонова Екатерина Александровна

Кандидат технических наук, доцент;
доцент кафедры геоинформатики и геодезии
ГОУ ВПО «Донецкий национальный
технический университет», г. Донецк, ДНР.
E-mail: germonova@mail.ru

Germonova Ekaterina

Candidate of Technical Sciences, Docent;
Donetsk National Technical University, Donetsk.

Научное издание

**Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки**

2019. – № 3-4

Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24,
83001, г. Донецк, ДНР.
Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

Подписано в печать 27.12.2019 г.
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 20,4.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
Тел.: (062) 302-92-27.

Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.