

**Недопекин Ф.В., Коваленко А. А.,
Андрийчук Н. Д.,
Гусенцова Я.А., Пилавов М.В.**

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебник

Издание второе, переработанное и дополненное



Луганск 2019

**ЛУГАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ВЛАДИМИРА ДАЛЯ**

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Недопекин Ф.В., Коваленко А. А., Андрийчук Н. Д.,
Гусенцова Я.А., Пилавов М.В.**

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебник

Издание второе, переработанное и дополненное

Луганск 2019

УДК 532.5
О753

Рекомендовано Ученым Советом Луганского национального университета в качестве учебника (протокол №3 от 23 ноября 2018 г.)

Рецензенты:

Рябичева Л.А., доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Материаловедение и строительство» Луганского государственного университета имени Владимира Даля

Белюсов В.В. доктор физико-математических наук, профессор, Донецкий национальный университет

Недопекин Ф.В.

О753 **Основы механики сплошных сред: учебник** / Недопекин Ф.В., Коваленко А. А., Андрийчук Н.Д., Гусенцова Я.А., Пилавов М.В. – Луганск: Издательство ЛНУ им. В. Даля, 2019. – 335 с.

ISBN 978-966-590-796-1

Рассмотрены основные задачи механики сплошных сред: процессы течения идеальной, реальной и неньютоновской жидкостей, процессы диффузии, фильтрации и др. Показаны процессы теплопереноса при ламинарном и турбулентном течении в трубах, обтекании пластины.

Рекомендовано для студентов старших курсов, обучающихся по направлению «Механика», «Техническая физика», «Техносферная безопасность», «Стандартизация и метрология» магистрам и аспирантам, инженерно-техническим и научным работникам, которые занимаются исследованиями в области механики сплошных сред.

ISBN 978-966-590-796-1

УДК 532. 5

© Недопекин Ф.В., Коваленко А.А., Андрийчук Н.Д.,
Гусенцова Я.А., Пилавов М.В.

© Луганский национальный университет
имени Владимира Даля, 2019

*Учителю, Ученому Ивану
Лукичу Повху от благодар-
ных учеников*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие ориентировано на студентов старших курсов, обучающихся по направлению «Механика» (специальность «Гидроаэродинамика»), «Техническая физика» (специальность «Компьютерная аэрогидродинамика и теплофизика»), «Техносферная безопасность», Стандартизация и метрология, магистрам и аспирантам, инженерно-техническим и научным работникам, которые занимаются исследованиями в области механики сплошных сред.

Авторы при его написании имели в виду это обстоятельство, что отразилось на простоте и наглядности изложения материала, характере использования математического аппарата, практических примерах.

Механика сплошных сред - это всеобъемлющая наука, которая изучает различные формы движения материи. К ним относятся процессы движения идеальной, вязкой и неньютоновской жидкостей, диффузионные процессы, процессы фильтрации и ряд других.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры. В химической форме движения способностью перемещаться обладает масса, перенос которой происходит от большего химического потенциала к меньшему. Аналогичным образом в электрической форме движения перемещается электрический заряд.

Механизм возникновения внутреннего трения между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего количество движения слоя, движущегося быстрее, уменьшается, а движущегося медленнее – увеличивается. Этот процесс описывается *гипотезой Ньютона*, согласно которой

$$\tau = - \mu \, du/dx,$$

где τ - сила внутреннего трения, действующая на единицу площади поверхности слоя (касательное напряжение); μ - динамическая вязкость; du/dx - градиент скорости.

Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся тел (газов, жидкостей, твердых тел). Перенос массы вещества подчиняется *закону Фика*: масса вещества M , переносимая за единицу времени через единицу площади, прямо пропорциональна градиенту плотности

$$M = - D \, dp/dx,$$

где D - коэффициент диффузии (знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности).

При неустановившемся движении жидкости в трубопроводе постоянного сечения длиной l инерционный напор H равен

$$H = - l/g \, (du/dt),$$

где $u = f(t)$ - средняя по сечению скорость жидкости, являющаяся функцией времени t ; g - ускорение свободного падения.

Уравнение движения жидкости в фильтрующем слое

$$u = - k \, dh/dx,$$

где k - коэффициент фильтрации; dh/dx - градиент напора жидкости по направлению фильтрации.

Рассмотренные примеры наглядно показывают, что эти процессы могут быть описаны обобщенным уравнением вида

$$A = - K \, grad \, E.$$

На основе этих ясных и простых предпосылок сформулировано положение: **для каждого простого процесса существует**

параметр, который характеризует количественно и качественно все свойства, связанные с ним, причем, процессу присуща способность самопроизвольно распространяться в направлении убывания определяющего его потенциала.

Дальнейшее изложение материала в пособии будет опираться на это положение.

Курс содержит одиннадцать разделов. В первом из них, общей для всех частей, излагаются основные понятия кинематики и основные уравнения движения произвольной сплошной среды. Остальные посвящены изложению некоторых разделов гидродинамики: уравнения движения идеальной, вязкой и неньютоновской жидкостей. Далее теория фильтрации, которая рассматривается с точки зрения применения методов гидродинамики к решению технических краевых задач. Последние разделы посвящены: теории диффузионных процессов; упругости и их применению к некоторым конкретным задачам; процессам теплопереноса при ламинарном и турбулентном течении жидкости в круглых трубах, обтекании пластины и расчету тепловых процессов в сплошных средах.

РАЗДЕЛ 1

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД, ЕЕ ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ

1.1. Предмет механики сплошных сред

Сплошные среды

В настоящем курсе изучаются законы механического перемещения материальных объектов в пространстве и времени. Под материальными объектами подразумеваются всевозможные тела, которые могут как угодно изменять свою форму в процессе их изучения. К ним относятся разнообразные упругие, пластические тела, сыпучие среды, жидкости и газы.

В механике сплошных сред рассматриваются макроскопические движения сред, а также силовое взаимодействие этих сред с твердыми телами. При этом, как правило, размеры рассматриваемых объемов жидкостей, газов и твердых тел оказываются несопоставимо большими по сравнению с размерами молекул и межмолекулярными расстояниями. Это естественно, поскольку межмолекулярные расстояния в жидкостях составляют всего $10^{-7} - 10^{-8}$ см и изменяются обратно пропорционально давлению, а длина свободного пробега молекул газа при атмосферном давлении 10^{-5} см.

Поэтому обычно жидкости и газы воспринимаются как сплошные среды, масса которых непрерывно распределена по объему. Указанные обстоятельства позволяют ввести **гипотезу сплошности** изучаемой среды и заменить реальные дискретные объекты упрощенными моделями, представляющими собой материальный континуум, т.е. материальную среду, масса которой непрерывно распределена по объему. Такая идеализация упрощает реальную дискретную систему и позволяет использовать для ее описания хорошо разработанный математический аппарат исчисления бесконечно малых и теорию непрерывных функций. Параметры, характеризующие термодинамическое состояние, покой или движение среды, считаются при этом непрерывно изменяющимися по всему объему, занятому средой, кроме быть может, отдельных точек, линий или поверхностей, где могут существовать раз-

рвы. Критерием приемлемости всякой физической гипотезы является степень совпадения результатов, полученных на ее основе, с результатами наблюдений и измерений. Для жидкости и газа правомерность использования гипотезы сплошной среды в широком диапазоне изменения параметров полностью подтверждается.

Теоретические результаты, полученные для гипотетической сплошной среды, тем больше приближаются к результатам наблюдений, чем полнее и точнее учтены в ней свойства реальных жидкостей и газов. К сожалению, идеализацию среды во многих случаях не удается ограничить только допущением ее сплошности. В зависимости от тех свойств, которые приписываются гипотетической сплошной среде, получают различные ее модели. При использовании результатов, полученных для идеализированной среды, важно определить границы их применимости и точность в этих границах. Для установления границ применимости необходимо знать существо явлений или хотя бы правильно их понимать.

Представление о гипотетической сплошной среде удобно в том отношении, что методы математического анализа приспособлены для сплошных сред, тогда как математическая обработка прерывных сред значительно затруднена. Представление о телах, как сплошных средах, и обусловило общее название предмета «Механика сплошных сред».

Наука механика

Механика есть наука, изучающая движение и равновесие материальных тел в пространстве и времени. Движение в широком смысле слова есть форма существования материи. Механика изучает только простейшую форму движения — относительное перемещение тел, или механическое движение.

Часть механики, известная под названием теоретическая механика, содержит методы математического описания механического движения материальных объектов; их основные законы, уравнения движения и равновесия. Уравнения теоретической механики позволяют полностью описать, например, движение абсолютно твердого тела. Но эти уравнения недостаточны для описания движения деформируемых тел и газов.

Так как все тела в тех или иных условиях деформируемы, то абсолютно твердое тело представляет собой модель, к которой в

определенных условиях можно отнести изделия из различных металлов, пластмасс, дерева. Модель абсолютно твердого тела не применима к телам, изготовленным из резины, губки, а также жидкостям и газам. В этих случаях приходится строить другие модели. При этом к уравнениям теоретической механики присоединяют ряд дополнительных условий - экспериментальных законов, отражающих специфику изучаемых объектов.

Практическое значение механики сплошных сред

Механика сплошных сред возникла из запросов практической деятельности человечества, именно из разрешения, например, таких простейших вопросов, как закономерности истечения жидкостей и газов из сосудов, изучения закономерностей просачивания жидкости через грунт, прогиба балок и растяжения брусков, находящихся под нагрузкой, и т. д. Исследование этих частных задач привело к формулировке основных экспериментальных законов движения и равновесия сплошных сред. С течением времени перед механикой сплошных сред возникали более сложные вопросы. Например, проблема полета на аппаратах тяжелее воздуха, эксплуатации нефтяных месторождений и др. Эти вопросы в настоящее время в значительной мере разрешены на базе основных уравнений движения, входящих в те или иные разделы механики сплошных сред, и в ряде случаев дополнительных гипотез (сформулированных как обобщение экспериментальных данных), которые, в частности, позволяют упростить общие уравнения. Теоретическое решение тех или иных вопросов механики сплошных сред имеет большое практическое значение, ибо позволяет целесообразно проектировать механические конструкции (например, наземные сооружения, самолеты и т. д.) и заранее планировать эксплуатационные характеристики каких-либо объектов (например, прочность тех или иных сооружений, количество откачиваемой из заданного пласта нефти и т. д.).

Перед механикой возникают все новые и новые проблемы, среди которых, например, можно указать вопросы движения разреженных газов, движения сред с учетом физико-химических процессов, происходящих в них, вопросы устойчивости течений и т. д. Разрешение этих проблем стимулирует дальнейшее развитие

механики сплошных сред и возникновение ее новых разделов.

Основные разделы механики

В настоящее время механику сплошных сред можно разделить на две крупные области, сплошных сред определяемые объектом исследований: механику жидкостей и газов, которая имеет название «Гидроаэродинамика», и механику деформируемых тел.

Гидродинамика включает в себя следующие основные разделы: механика идеальной (невязкой) жидкости, механика идеальной сжимаемой жидкости, механика вязкой жидкости, механика неньютоновской жидкости, механика турбулентных течений. К гидродинамике непосредственно примыкают теоретические разделы технической механики, основные из которых следующие: аэродинамика, магнитная гидродинамика, механика фильтрационных течений

Ряд разделов гидродинамики и технической механики отражены во следующих главах.

Механика деформируемых тел в зависимости от дополнительных экспериментальных законов распадается на разделы, основные из которых следующие: теория упругости, теория пластичности, механика сыпучих тел.

2.1. Основные уравнения движения механических систем

Законы Ньютона

Основными законами механического движения материальных объектов являются законы Ньютона, которые справедливы в пространстве, описываемом геометрией Евклида, при скоростях, далеких от скорости света.

Первый закон Ньютона определяет инерциальные системы координат, в которых движение материальной точки описывается уравнением

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.1.)$$

представляющим второй закон Ньютона.

Третий закон Ньютона открывает возможность исследования систем материальных точек.

Основные уравнения движения механических систем

Если механическая система состоит из n точек, то движение каждой из них описывается уравнением

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}. \quad (1.2)$$

Внутренние силы, характер которых в общем случае неизвестен, могут быть из последних уравнений исключены, так как в силу третьего закона Ньютона

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0; \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = 0$$

и тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)}; \\ \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

которые являются необходимыми, но недостаточными уравнениями движения механических систем.

Произведя несложные преобразования, можно показать, что соотношения (1.2) представляют собой теоремы о количестве и моменте количества движения систем. Уравнения (1.1) необходимы для описания движения механических систем, состоящих из дискретных материальных точек. Если механическая система представляет собой сплошную среду, заполняющую часть пространства V , то левые части уравнений (1.2) превратятся в определенные объемные интегралы, и массы отдельных точек m_k преобразуются в бесконечно малые элементы dm сплошной среды. При этом если на среду будут действовать n сосредоточенных сил и силы, распределенные по всем точкам сплошной среды, то необходимые уравнения движения сплошной среды будут иметь вид

$$\int_V \vec{a} \rho dV = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} + \int_V \vec{F} \rho dV, \quad (1.4)$$

$$\int_V \vec{r} \times \vec{a} \rho dV = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)} + \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho dV,$$

где ρ — плотность, $\rho dV = dm$ и \vec{F} — сила, действующая на единицу массы.

Так как $-\int_V \vec{a} \rho dV$ и $-\int_V \vec{r} \times \vec{a} \rho dV$ называются соответственно главным вектором и главным моментом сил инерции, то последние равенства перепишутся в виде

$$\begin{aligned} -\int_V \vec{a} \rho dV + \int_V \vec{F} \rho dV + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} &= 0, \\ -\int_V \vec{r} \times \vec{a} \rho dV + \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho dV + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5')$$

Их можно интерпретировать как равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на систему, включая и силы инерции.

Уравнениями, необходимыми, но недостаточными для описания движения сплошных сред, будут уравнения (1.2). Поэтому они и являются исходными при выводе уравнений движения жидкостей и деформируемых тел.

РАЗДЕЛ 2

КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

2.1. Переменные Лагранжа и Эйлера

Как известно, движение материальной точки описывается уравнениями движения ее конечном виде

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(t), \\ x &= x(t), y = y(t), z = z(t),\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

где \vec{r} радиус-вектор точки в выбранной системе координат, x , y , z -координаты точки.

Если частицу сплошной среды рассматривать как материальную точку, то последние уравнения опишут ее движение. Сплошная среда, непрерывным образом заполняющая пространство или часть его, состоит из бесчисленного числа точек, следовательно, чтобы описать движение всех точек среды при помощи уравнений (2.1.1), необходимо ввести в них параметры, характеризующие ту или иную точку среды.

Пусть параметром, характеризующим отдельную точку среды, будет постоянный вектор

$$\vec{r}_0 = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Тогда уравнения движения точек сплошной среды запишем в виде

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(\vec{r}_0, t); \\ x &= x(a, b, c, t), y = y(a, b, c, t), z = z(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Функция $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$ будет являться непрерывной по t и иметь непрерывные первые и, как правило, вторые производные по времени. Кроме того, эта функция в силу того, что она описывает упорядоченные движения сплошной среды, должна быть непрерывной по a , b , c и должна иметь непрерывные частные производ-

ные по a , b , c . Чтобы найти скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} какой-либо точки среды (характеризуемой \vec{r}_0), надо взять производные по времени от уравнений (2.1.2), полагая, что \vec{r}_0 или a , b , c постоянны. Запишем векторы скорости и ускорения в виде

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(\vec{r}_0, t)}{\partial t}; \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}(\vec{r}_0, t)}{\partial t^2}. \quad (2.1.3)$$

Соответственно проекции этих векторов по осям координат будут

$$v_x = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t}; v_y = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t}; v_z = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t};$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2}; a_y = \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2}; a_z = \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2}.$$

Способ описания движения (2.1.2) сплошной среды при помощи векторного параметра \vec{r}_0 (или скалярных параметров a , b , c), характеризующего отдельные точки, носит название метода Лагранжа. Вектор \vec{r}_0 или параметры a , b , c носят название переменных Лагранжа. Вектор \vec{r}_0 характеризует индивидуальность отдельных точек среды. В частности, этот вектор можно выбрать так, чтобы он определял начальное положение точек среды. Тогда при $t = 0$ будем иметь

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0, \vec{r}_0)$$

или

$$a = x(0, a, b, c); b = y(0, a, b, c); c = z(0, a, b, c).$$

Вектор перемещения

Полагая, что \vec{r}_0 определяет начальное положение точки, введем вектор

$$\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

который определяется по формуле:

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

Отсюда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} \quad (2.1.4)$$

или

$$x = a + u; y = b + v; z = c + w. \quad (2.1.4')$$

Вектор \vec{s} характеризует перемещение точки по отношению к ее начальному положению и называется вектором перемещения. Вектор \vec{s} , а также его проекции u , v , w являются функциями a , b , c , t . В начальный момент при $t = 0$, $s = 0$.

Используя формулу (2.1.4), запишем скорость и ускорение точек сплошной среды через вектор перемещения \vec{s} в виде

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}, \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{s}(\vec{r}_0, t)}{\partial t^2}; \\ v_x &= \frac{\partial u(a, b, c, t)}{\partial t}, v_y = \frac{\partial v(a, b, c, t)}{\partial t}, v_z = \frac{\partial w(a, b, c, t)}{\partial t}; \quad (2.1.5) \\ a_x &= \frac{\partial^2 u(a, b, c, t)}{\partial t^2}, a_y = \frac{\partial^2 v(a, b, c, t)}{\partial t^2}, a_z = \frac{\partial^2 w(a, b, c, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Переменные Эйлера

С помощью переменных Лагранжа изучается движение сплошной среды, представляющей непрерывную совокупность точек, т. е. движение отдельных точек среды. Однако движение среды можно изучить, рассматривая изменение с течением времени различных элементов движения в разных точках координатной системы. С этой точки зрения, развитой Эйлером, различные векторные и скалярные элементы движения рассматриваются как функции координат точки x , y , z и времени t . Эти четыре аргумента x , y , z , t носят название *переменных Эйлера*. Однако необходимо отметить, что при изучении движения сплошной среды в переменных Эйлера приходится рассматривать смещение частицы среды из фиксированной точки пространства в бесконечно близкую

с тем, чтобы в дальнейшем предельным переходом перейти к характеристике того или иного элемента движения среды в данной точке.

Разрешим уравнение движения сплошной среды, записанное в переменных Лагранжа

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

относительно \vec{r}_0 , получим

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}, t) \quad (2.1.6)$$

или

$$a = a(x, y, z, t); b = b(x, y, z, t); c = c(x, y, z, t). \quad (2.1.6')$$

Пусть, a , b , c определяют начальное положение точки среды. Тогда последние уравнения указывают начальное положение точки среды, которая находится в момент времени t в точке пространства x , y , z .

Вектор смещения \vec{s} в переменных Лагранжа имеет вид

$$\vec{s} = \vec{s}(\vec{r}_0, t).$$

Подставив значение \vec{r}_0 , из равенства (2.1.6), получим \vec{s} в переменных Эйлера

$$\vec{s} = \vec{s}(\vec{r}, t).$$

Это вектор смещения различных точек среды, попадающих в различные моменты времени t в фиксированную точку пространства, определяемую радиусом-вектором \vec{r} .

Чтобы найти смещение некоторой точки среды, занимающей положение в пространстве, определяемое вектором \vec{r}_1 в момент t_1 дадим времени приращение Δt , тогда точка сместится на $\Delta \vec{s}_1$ равное

$$\Delta \vec{s}_1 = \vec{s}(\vec{r}_1, t_1 + \Delta t) - \vec{s}(\vec{r}_1, t_1),$$

или в общем случае смещение точек из каких-либо положений можно записать в виде

$$\Delta \vec{s} = \vec{s}(\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{s}(\vec{r}, t).$$

Вычисленные смещения $\Delta \vec{s}$ точек среды фактически снова возвращают нас к переменным Лагранжа, где начальное положение точек определяется неподвижным пространством переменных Эйлера. Однако смещения $\Delta \vec{s}$ в переменных Эйлера будут бесконечно малы в отличие от вектора смещения \vec{s} в переменных Лагранжа, который может быть конечной величиной. Следовательно, изучение смещений отдельных точек среды можно вести только в переменных Лагранжа. Переменные Эйлера в этом случае фактически неприменимы, и переход от них к переменным Эйлера есть формальная операция, не меняющая точки зрения, с которой изучается жидкость.

Скорости и ускорения точек сплошной среды

Разделив последнее равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, выразим вектор скорости точки среды в момент t , расположенной в точке пространства, определяемой радиусом-вектором \vec{r} , через переменные Эйлера

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{s}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (2.1.7)$$

Эту зависимость можно получить и другим способом. Действительно, если известен закон движения сплошной среды в переменных Лагранжа, то, подставив в $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_0, t)$ значение \vec{r}_0 из равенства (2.1.6), найдем

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t).$$

Вычислим теперь ускорение точек движущейся среды в переменных Эйлера. Пусть в момент t_1 точка среды, ускорение

которой нас интересует, занимала положение в пространстве, определяемое радиусом-вектором \vec{r}_1 , и имела скорость \vec{v}_1 , т. е.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(\vec{r}_1, t_1).$$

В следующий момент t_2 та же точка среды переместится в пространстве и займет положение \vec{r}_2 , следовательно, она будет иметь скорость

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(\vec{r}_2, t_2),$$

или, так как

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}, t_2 - t_1 = \Delta t,$$

то

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, t_1 + \Delta t).$$

Отсюда приращение вектора скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ за время Δt будет

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, t_1 + \Delta t) - \vec{v}(\vec{r}_1, t_1).$$

Разделив это равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, t_1 + \Delta t) - \vec{v}(\vec{r}_1, t_1)}{\Delta t},$$

Или

$$\begin{aligned} \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} & \frac{\vec{v}(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, t_1 + \Delta t) - \vec{v}(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, t_1)}{\Delta t} + \\ & + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, t_1) - \vec{v}(\vec{r}_1, t_1)}{\Delta t}, \end{aligned}$$

откуда

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (2.1.8)$$

Иногда равенство (2.1.8) коротко записывается в виде

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}. \quad (2.1.8')$$

Символ ∇ называемый оператором Гамильтона, означает

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \text{grad}.$$

Проекции вектора ускорения \vec{a} запишутся в виде

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.1.8'')$$

Эти формулы определяют ускорения точек движущейся среды через скорости точек среды, заданные в переменных Эйлера. Вектор ускорения можно записать еще и через вектор смещения в виде

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}.$$

Если известно движение среды в переменных Лагранжа, то известно и ускорение точек, как функции \vec{r}_0 и t , т. е.

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}_0, t).$$

Подставив сюда вместо \vec{r}_0 его значение из равенства (2.1.6), найдем

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}, t).$$

Если движение сплошной среды неизвестно и его надо найти, при чем за аргументы движения должны быть выбраны переменные Эйлера, то мы не сможем получить последнее выражение. В этом случае при подсчете ускорения нужно воспользоваться формулами (2.1.8).

Формулы, определяющие ускорение при малых значениях смещения

Остановимся на частном случае, когда вектор смещения точек сплошной среды мал. При этом скорость отдельных точек сплошной среды также будет мала. Предположив, что будут малы и производные вида $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial v/\partial z$, получим, что член $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ будет второго порядка малости и им можно пренебречь. Следовательно, в этом случае вектор ускорения в переменных Эйлера будет иметь упрощенный вид

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{s}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.1.9)$$

или

$$a_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad a_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad a_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.1.9')$$

Это весьма важный случай, ибо малые смещения характерны для движения упругих тел. При рассмотрении этих движений мы столкнемся с производными в переменных Лагранжа и Эйлера вида $\partial \vec{s} / \partial a$, $\partial \vec{s} / \partial x$ и т. д. Чтобы найти связь между этими производными, подсчитаем $\partial \vec{s} / \partial x$, полагая, что \vec{s} задано в переменных Лагранжа:

$$\frac{\partial \vec{s}(a, b, c, t)}{\partial x} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Но

$$a = x - u; b = u - v; c = z - w,$$

следовательно,

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 1 - \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial b}{\partial x} = 1 - \frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial c}{\partial x} = 1 - \frac{\partial w}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial a} - \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Но если смещения \vec{s} малы и малы изменения смещений при переходе от одной точки среды к другой, то будут малы $\frac{\partial \vec{s}}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д. Следовательно, величина, стоящая в скобках, будет величиной второго порядка малости и ею можно пренебречь, тогда

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \quad (2.1.10)$$

и аналогично

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial b}; \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial c}. \quad (2.1.11)$$

Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа

Выше был рассмотрен переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера. Однако возможен и обратный переход — от переменных Эйлера к переменным Лагранжа.

Действительно, пусть заданы v_x, v_y, v_z как функции координат x, y, z и времени t . Так как в переменных Лагранжа составляющие скорости будут производными по времени соответствующих координат, то можно записать

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x(x, y, z, t); \frac{\partial y}{\partial t} = v_y(x, y, z, t); \frac{\partial z}{\partial t} = v_z(x, y, z, t). \quad (2.1.12)$$

Интегрируя последние равенства и определяя постоянные интегрирования из условий

$$t = 0; x = a; y = b; z = c, \quad (2.1.13)$$

находим

$$x = x(t, a, b, c); y = y(t, a, b, c); z = z(t, a, b, c). \quad (2.1.14)$$

Если в начальный момент $t=0$ частицы располагались на поверхности, определяемой параметрическими уравнениями

$$x = a(\tau_1, \tau_2); y = b(\tau_1, \tau_2); z = c(\tau_1, \tau_2), \quad (2.1.15)$$

то, подставляя равенства (2.1.15) в соотношение (2.1.14), находим уравнение поверхности, на которой будут располагаться эти частицы в момент t

$$x = x(t, \tau_1, \tau_2); y = y(t, \tau_1, \tau_2); z = z(t, \tau_1, \tau_2). \quad (2.1.16)$$

2.2. Движение точек малой частицы сплошной среды

Смещение отдельных точек малой частицы

Мысленно выделим в сплошной среде при помощи любой односвязной (например, шаровой) поверхности малую частицу и обратимся к изучению движения ее отдельных точек.

Выберем в частице некоторую точку O , которую примем за полюс, и одновременно рассмотрим произвольную точку M частицы (рис. 2.1). Пусть два положения частицы I и II соответствуют моментам t_0 и t_1 .

Выбранные точки в момент t_0 будут занимать положения O, M и в момент t_1 — положения O', M' . Если бы частица представляла собой абсолютно твердое тело, то из положения I она могла быть переведена в положение II одним поступательным движением, соответствующим перемещению \vec{s}_0 полюса и вращательным движением вокруг полюса с углом поворота

$\Delta\varphi = \omega (t_1 - t_0)$, где ω — конечная угловая скорость вращения частицы (рис. 2.2).

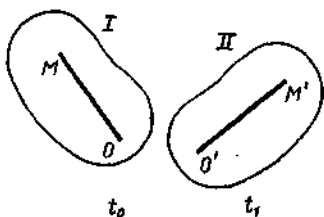


Рис. 2.1.

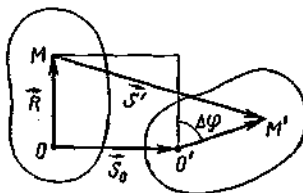


Рис. 2.2.

Если угол поворота мал, что справедливо для малых промежутков времени $t_1 - t_0$ или малых значений ω , то перемещение \vec{s}' точки M за время $t_1 - t_0$ можно записать в виде

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \omega(t_1 - t_0) \times R,$$

где R — вектор, соединяющий точки O и M . Введя обозначение

$$\omega(t_1 - t_0) = \Delta\varphi,$$

последнюю формулу перепишем в виде

$$\vec{s}' = \vec{s}_0 + \Delta\varphi \times R.$$

Заметим, что угол $\Delta\varphi$ не зависит от расположения точки M в частице. Для деформируемых сред последняя формула будет иметь дополнительный член в правой части. Обозначим его \vec{s}_2 , тогда

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \Delta\varphi \times R + \vec{s}_2. \quad (2.2.1)$$

Член \vec{s}_2 характеризует деформацию частицы: растяжение или сжатие вектора R за время $(t_1 - t_0)$ и добавочный поворот этого вектора за то же время. Вектор \vec{s}_2 зависит от расположения точки M в частице.

Найдем в явном виде $\Delta\varphi$, \vec{s}_2 . Поскольку объектом изучения являются перемещения сплошной среды, то, как указывалось в § 1, надо воспользоваться переменными Лагранжа.

Пусть положение I частицы (см. рис. 1) будет начальным, а положения точек O и M в этот момент определяются радиусами-векторами \vec{r}_0 и \vec{r}_i , проведенными из начала основной (условно неподвижной) системы координат O_I (рис. 2.3). Эти векторы запишем через их проекции

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}; \\ \vec{r}_i &= (a + \xi)\vec{i} + (b + \eta)\vec{j} + (c + \zeta)\vec{k},\end{aligned}$$

откуда вектор $\overline{OM} = \vec{R} = r_0 - r_i$ найдем по формуле

$$\vec{R} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k}.$$

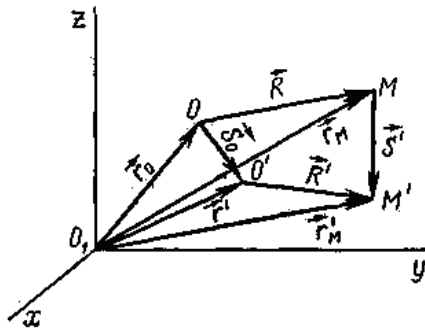


Рис. 2.3.

Точки O и M сплошной среды в момент времени t_I займут соответственно положения $O'M'$, которые определяются радиусами-векторами \vec{r}_0', \vec{r}_i' . Вектор $O'M'$ назовем \vec{R}' , вектор перемещения $\overline{OO'}$ точки O обозначим через \vec{s}_0 , вектор перемеще-

ния $\overline{MM'}$ точки M — через \vec{s}' и запишем очевидное равенство

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{R}' - \vec{R},$$

откуда

$$\vec{R}' - \vec{R} = \vec{s} - \vec{s}_0.$$

Векторы перемещений точек, как указывалось, являются функциями начальных положений точек среды и зависят от времени, которое отсчитывается от момента начального положения частицы. Поскольку рассматриваются два положения частицы, соответствующие двум определенным моментам, то время в векторах перемещений \vec{s}_0 и \vec{s} будет одинаково. Следовательно, эти векторы будут только функциями начальных координат точек O и M

$$\vec{s}_0 = \vec{s}(\vec{r}_0); \vec{s} = \vec{s}(\vec{r}_i)$$

и

$$\vec{R}' - \vec{R} = \vec{s}(\vec{r}_i) - \vec{s}(\vec{r}_0),$$

или более подробно

$$\vec{s} - \vec{s}_0 = \vec{s}(a + \xi, b + \eta, c + \zeta) - \vec{s}(a, b, c).$$

Разложив последнее выражение в ряд, запишем

$$\vec{s} - \vec{s}_0 = \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial b} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial c} \right)_0 \zeta + \alpha,$$

где α — члены высших порядков, индекс «0» относится к значениям соответствующих производных в точке O .

В общем случае смещение \vec{s} является сложной функцией a, b, c . Однако для малой частицы среды ξ, η, ζ будут малы, и членами, содержащими произведения ξ, η, ζ и степени их выше первой, можно пренебречь. Тогда

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial b} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial c} \right)_0 \zeta.$$

Переменные ξ, η, ζ можно рассматривать как координаты точки M в системе, имеющей начало в точке O и оси, параллельные неподвижным осям координат, т. е. как относительные координаты точки M . Вектор $\vec{s} - \vec{s}_0 = \vec{R}' - \vec{R}$ есть вектор относительного перемещения точки M по отношению к точке O .

Из последней формулы следует, что относительные смещения являются линейными функциями относительных координат. Такая деформация сплошной среды называется однородной. Поэтому деформацию малого элемента сплошной среды можно рассматривать как однородную. Запишем последнюю формулу в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial a} \xi + \frac{\partial u}{\partial b} \eta + \frac{\partial u}{\partial c} \zeta; \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial a} \xi + \frac{\partial v}{\partial b} \eta + \frac{\partial v}{\partial c} \zeta; \\ w &= w_0 + \frac{\partial w}{\partial a} \xi + \frac{\partial w}{\partial b} \eta + \frac{\partial w}{\partial c} \zeta. \end{aligned}$$

После алгебраических преобразований, указанных Коши, эти формулы можно привести к виду

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial a} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \right) \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial a} \right) \xi - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b} \right) \eta; \\
v &= v_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} \right) \xi + \frac{\partial v}{\partial b} \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b} \right) \xi - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) \zeta; \\
w &= w_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \right) \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} \right) \eta + \frac{\partial w}{\partial c} \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) \eta - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial a} \right) \xi.
\end{aligned}$$

Справедливость приведенных формул легко проверяется, если раскрыть скобки в последних выражениях и привести подобные члены. Введем для краткости следующие обозначения

$$\begin{aligned}
e_{aa} &= \frac{\partial u}{\partial a}; e_{bb} = \frac{\partial v}{\partial b}; e_{cc} = \frac{\partial w}{\partial c}; e_{ab} = \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}; e_{ac} = \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a}; \\
e_{bc} &= \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c}.
\end{aligned}$$

Из этих формул следует, что $e_{ab} = e_{ba}$; $e_{ac} = e_{ca}$; $e_{bc} = e_{cb}$. Кроме того, выражение $1/2 \text{rot} \vec{s}$, где $\vec{s} = f(a, b, c)$, запишем в виде

$$\frac{1}{2} \text{rot} \vec{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial a} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b} \right) \vec{k}.$$

Представим \vec{R} в виде

$$\vec{R} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}$$

и введем функцию

$$f = \frac{1}{2} \left(e_{aa}^{\xi^2} + e_{bb}^{\eta^2} + e_{cc}^{\zeta^2} + e_{ab}^{\xi\eta} + e_{bc}^{\eta\zeta} + e_{ca}^{\zeta\xi} \right).$$

Тогда вектор смещения будет

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + 1/2 \text{rots} \vec{s} \times \vec{R} + \text{grad} f.$$

В этой формуле вектор $\text{rot} \vec{s}$ не зависит от расположения точки M и полностью определяется точкой O . Далее будет доказано, что вектор $\text{grad} f$ характеризует деформацию частицы сплошной среды. Следовательно,

$$\vec{s}_2 = \text{grad} f.$$

Обращаясь к формуле (2.2.1), можем записать

$$\text{rots} \vec{s} = \text{rot} \left(\vec{s}_0 + \Delta\vec{\phi} \times \vec{R} + \vec{s}_2 \right) = \text{rots} \vec{s}_0 + \text{rot} \left(\Delta\vec{\phi} \times \vec{R} \right) + \text{rot} \text{grad} f.$$

Здесь $\text{rots} \vec{s}_0 = 0$, так как вектор \vec{s}_0 постоянен (остается неизменным при изменении положения точки M);

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0;$$

$$\text{rot}(\Delta\vec{\phi} \times \vec{R}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \Delta\phi_{\eta\zeta} - \Delta\phi_{\zeta\eta} & \Delta\phi_{\zeta\xi} - \Delta\phi_{\xi\zeta} & \Delta\phi_{\xi\eta} - \Delta\phi_{\eta\xi} \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta\vec{\phi}$ постоянный вектор, то из последнего следует, что

$$\text{rot}(\Delta\vec{\phi} \times \vec{R}) = 2\Delta\vec{\phi}.$$

Таким образом,

$$\Delta\vec{\phi} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{s},$$

и вектор смещения может быть записан в виде

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \Delta\vec{\phi} \times \vec{R} + \text{grad}f. \quad (2.2.2)$$

Следовательно, смещение некоторой точки малой частицы среды равно сумме смещения выбранной другой точки O частицы, смещения в результате поворота частицы вокруг выбранной точки (причем угол поворота $\Delta\vec{\phi} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{s}$), и смещения в результате деформации.

Деформация жидкой частицы. Удлинения

При изучении смещений точек сплошной ограничимся рассмотрением только малых смещений, которые имеют место в конечные интервалы времени. Если же смещения точек среды в конечные интервалы времени велики, то будем брать малые интервалы времени. При этом смещения по-прежнему остаются малыми.

Характерной чертой движения сплошной среды является изменение со временем расстояния между отдельными ее точками, т. е. изменение длины линейных элементов и изменение углов между линейными элементами, исходящими из одной точки. Введем вектор относительного удлинения \vec{I} , равный

$$\vec{I} = \frac{\vec{R}' - \vec{R}}{|\vec{R}|}.$$

Последнее выражение запишем в виде

$$\vec{I} = \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial a} \xi + \frac{\partial \vec{s}}{\partial b} \eta + \frac{\partial \vec{s}}{\partial c} \zeta \right) \frac{1}{R} \quad (2.2.3)$$

или в развернутой форме

$$\vec{I} = \frac{\frac{\partial u}{\partial a} \xi + \frac{\partial u}{\partial b} \eta + \frac{\partial u}{\partial c} \zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \vec{i} + \frac{\frac{\partial u}{\partial a} \xi + \frac{\partial u}{\partial b} \eta + \frac{\partial u}{\partial c} \zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \vec{j} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial w}{\partial a} \xi + \frac{\partial w}{\partial b} \eta + \frac{\partial w}{\partial c} \zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \vec{k}.$$

Предположим, что линейный элемент \vec{R} первоначально расположен на прямой, параллельной координатной оси x , тогда $\eta = \zeta = 0$ и вектор относительного удлинения \vec{I} будет вида

$$\vec{I}_x = \frac{\partial u}{\partial a} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial a} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial a} \vec{k}.$$

Положим, что на перемещения вдоль какой-либо оси не влияют смещения вдоль других осей. Тогда проекция \vec{I}_x на ось x (рис. 2.4) будет

$$\vec{i} \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\vec{R}' - \vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\Delta R_x}{R} \vec{i}.$$

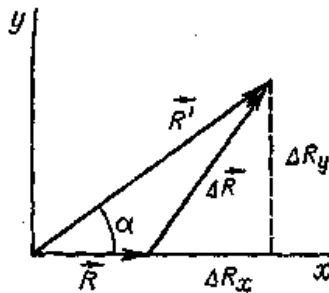


Рис. 2.4.

Отсюда $\partial u/\partial a$ есть относительное удлинение линейного элемента, расположенного вдоль оси x .

Следовательно, коэффициент $e_{aa}=\partial u/\partial a$, введенный ранее, представляет собой относительное удлинение элемента, расположенного вдоль оси x .

Проекция \vec{I}_x на ось y , или $\partial v/\partial a$, есть угол, на который поворачивается элемент, расположенный вдоль оси x , в направлении оси y , так как согласно рис. 4 имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\vec{R}' - \vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\Delta R_y}{R} = \frac{\partial v}{\partial a},$$

и в силу малости угла α можно принять $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$. Аналогично $\partial w/\partial a$ есть угол, на который поворачивается элемент, расположенный вдоль оси x , в направлении оси z .

Если линейные элементы первоначально располагались вдоль оси y и вдоль оси z , то согласно формуле (2.2.3) получим векторы

$$\begin{aligned} \vec{I}_y &= \frac{\partial u}{\partial b} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial b} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial b} \vec{k}; \\ \vec{I}_z &= \frac{\partial u}{\partial c} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial c} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial c} \vec{k}. \end{aligned}$$

Применяя рассуждения, проведенные выше, можно показать, что при малых смещениях проекции \vec{I}_y на ось y и \vec{I}_z на ось z , или $\partial v/\partial b$ и $\partial w/\partial c$ представляют собой относительные удлинения элементов, расположенных соответственно вдоль осей y и z . Величины $\partial u/\partial b$, $\partial w/\partial b$, $\partial u/\partial c$, $\partial v/\partial c$ представляют соответственно углы, на которые поворачиваются элемент, расположенный вдоль оси y , в направлении осей x и z и элемент, расположенный вдоль оси z , в направлении осей x и y .

Деформация жидкой частицы. Сдвиги

Рассмотрим теперь, как изменяется прямой угол, образованный линейными элементами, расположенными параллельно осям x и y . Элемент, расположенный вдоль оси x , повернется на угол $\partial v/\partial a$, а элемент, расположенный вдоль оси y , — на угол $\partial u/\partial b$. Следовательно, рассматриваемый прямой угол после деформации частицы уменьшится на сумму углов, равную

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} = e_{ab}.$$

Эту деформацию называют сдвигом.

Аналогично получим деформацию углов между осями x и y , y и z :

$$\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial c} = e_{ac};$$

$$\frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} = e_{bc}.$$

Таким образом, доказано, что шесть величин: e_{aa} , e_{bb} , e_{cc} , e_{ab} , e_{bc} , e_{cb} определяют введенную ранее функцию f и характеризуют деформацию частицы. Они носят название *компонентов малой деформации*.

Относительное удлинение линейного отрезка

Определим теперь удлинение произвольно направленного линейного отрезка, выходящего из точки O . Для этого найдем отношение длины линейного элемента R' после деформации к его длине R до деформации как функцию направления отрезка до деформации. Направляющие косинусы отрезка до деформации l , m , n определяются по формулам

$$l = \frac{\xi}{R}; m = \frac{\eta}{R}; n = \frac{\zeta}{R}.$$

Вектор относительного удлинения в переменных Лагранжа через l , m , n согласно формуле (2.2.3), выражается в виде

$$\vec{l} = \frac{\vec{R}' - \vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial a} l + \frac{\partial \vec{s}}{\partial b} m + \frac{\partial \vec{s}}{\partial c} n,$$

или

$$\frac{\vec{R}'}{|\vec{R}|} = \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial a} + \vec{i} \right) l + \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial b} + \vec{j} \right) m + \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial c} + \vec{k} \right) n.$$

Отсюда, пренебрегая квадратами и произведениями величин вида $\partial u / \partial a$, $\partial v / \partial b$, ..., найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 &= l^2 + m^2 + n^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial a} l^2 + \frac{\partial v}{\partial b} m^2 + \frac{\partial w}{\partial c} n^2 \right) + \\ &+ 2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} \right) lm + \left(\frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} \right) mn + \left(\frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \right) nl \right]. \end{aligned}$$

Но $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Следовательно,

$$\left(\frac{R'}{R} \right)^2 - 1 = 2 \left(e_{aa} l^2 + e_{bb} m^2 + e_{cc} n^2 + e_{ab} lm + e_{bc} mn + e_{ca} nl \right).$$

Отсюда относительное удлинение отрезка будет

$$\left(\frac{R'}{R} \right)^2 - 1 = l(l+2).$$

Но так как рассматривается малая деформация, то относительное удлинение 1 мало и квадратом его можно пренебречь. Следовательно,

$$\left(\frac{R'}{R}\right)^2 - 1 = 2l$$

и

$$|l| = e_{aa}l^2 + e_{bb}m^2 + e_{cc}n^2 + e_{ab}lm + e_{bc}mn + e_{ca}nl.$$

Последняя формула позволяет определить относительное удлинение любого линейного отрезка, исходящего из заданной точки среды O , если известны шесть компонентов деформации для точки O .

В заключение параграфа заметим, что так как в нем рассматриваются только малые смещения, то во всех формулах производные по a , b , c могут быть заменены соответственно производными по x , y , z .

2.3. Эллипсоид деформации

Деформация шаровой поверхности

Поставим своей целью исследовать деформацию малой частицы сплошной среды, имеющей первоначально шаровую форму. Как уже выяснено в § 2 деформация определяется вектором $\vec{s}_2 = \text{grad}f$. До деформации относительный радиус-вектор точки был \vec{R} , после деформации точка будет иметь радиус-вектор $\vec{R} + \vec{s}_2$. Соответственно относительные координаты точки частицы до деформации будут ξ , η , ζ после деформации относительные координаты той же точки будут ξ' , η' , ζ' . Они определяются по формулам

$$\xi' = (1 + e_{aa})\xi + \frac{1}{2}e_{ab}\eta + \frac{1}{2}e_{ac}\zeta;$$

$$\eta' = \frac{1}{2}e_{ba}\xi + (1 + e_{bb})\eta + \frac{1}{2}e_{bc}\zeta;$$

$$\zeta' = \frac{1}{2}e_{ca}\xi + \frac{1}{2}e_{cb}\eta + (1 + e_{cc})\zeta.$$

Так как рассматриваются малые деформации, то ξ' , η' , ζ' отличаются на малые величины от ξ , η , ζ ; малы одновременно и производные типа $\partial u/\partial a$, $\partial u/\partial b, \dots$. Следовательно, с точностью до величин второго порядка малости, можно положить, что

$$\xi' = \xi + e_{aa}\xi' + \frac{1}{2}e_{ab}\eta' + \frac{1}{2}e_{ac}\zeta';$$

$$\eta' = \eta + \frac{1}{2}e_{ba}\xi' + e_{bb}\eta' + \frac{1}{2}e_{bc}\zeta';$$

$$\zeta' = \zeta + \frac{1}{2}e_{ac}\xi' + \frac{1}{2}e_{cb}\eta' + e_{cc}\zeta',$$

откуда

$$\xi = (1 - e_{aa})\xi' - \frac{1}{2}e_{ab}\eta' - \frac{1}{2}e_{ac}\zeta';$$

$$\eta = -\frac{1}{2}e_{ab}\xi' + (1 - e_{bb})\eta' - \frac{1}{2}e_{bc}\zeta';$$

$$\zeta = -\frac{1}{2}e_{ca}\xi' - \frac{1}{2}e_{cb}\eta' + (1 - e_{cc})\zeta'.$$

Из приведенных формул следует, что точки малой частицы сплошной среды, располагавшиеся до деформации на сфере радиуса A , уравнение которой

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = A^2,$$

перейдут после деформации на поверхность второго порядка, уравнение которой, с точностью до величин второго порядка малости, будет

$$(1 - 2e_{aa})\xi'^2 + (1 - 2e_{bb})\eta'^2 + (1 - 2e_{cc})\zeta'^2 - 2e_{ab}\xi'\eta' - 2e_{bc}\eta'\zeta' - 2e_{ca}\xi'\zeta' = A^2.$$

Поверхность, определяемая последним уравнением может быть только эллипсоидом, ибо при малых деформациях шаровая поверхность, отмеченная в сплошной среде, может претерпевать только изменения своей формы.

Этот эллипсоид носит название *эллипсоида деформации*.

Главные оси деформации

Если оси координат выбраны так, что они совпадают с главными осями эллипсоида деформации, которые носят название *главных осей деформации*, то последнее уравнение записывается в канонической форме и имеет вид

$$(1-2e_1)\xi^2 + (1-2e_2)\eta^2 + (1-2e_3)\zeta^2 = A^2,$$

где e_1, e_2, e_3 являются относительными удлинениями отрезков, расположенных параллельно осям новой системы координат.

Новые оси замечательны тем, что смещения частиц, расположенных первоначально на этих осях, происходят только вдоль этих осей или точки, расположенные до деформации на главных осях деформации, и после деформации остаются на тех же осях. Указанное свойство есть непосредственное следствие результатов предыдущего параграфа. Так же, как и в предыдущем параграфе, ввиду того, что рассматриваются малые смещения, во всех формулах производные по a, b, c могут быть заменены производными по x, y, z .

2. 4. Тензоры деформации и скоростей деформации

Вычисление компонентов деформации в преобразованной системе координат

Вектор деформации \vec{s}_2 частицы определяется шестью компонентами деформации. Последние записаны выше в переменных Лагранжа. Теперь будем рассматривать движение сплошной среды с точки зрения переменных Эйлера и выразим через них шесть компонентов деформации. Выше было указано, что при малых деформациях справедливо равенство производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial b} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и т.д.}$$

В связи с этим компоненты малой деформации, представляющие собой относительные удлинения, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z},$$

а компоненты малой деформации, представляющие собой сдвиги, — в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Чтобы записать компоненты малой деформации в переменных Эйлера, будем пользоваться для них следующими обозначениями

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Шесть компонентов деформации есть функции координат x, y, z точек пространства.

Определим, как изменяются компоненты деформации при изменении системы координат x, y, z на $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Для этого подсчитаем скалярное произведение $\vec{s}_2 \cdot \vec{R}$, которое не зависит от того, о какой системе координат оно вычисляется.

Пусть в старой системе координат \vec{R} имеет координаты ξ, η, ζ ; в новой системе — координаты $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$. Так как вектор \vec{R} представляет собой относительный радиус-вектор точки, то изме-

нение системы координат приводит только к повороту осей координат и связь между старыми и новыми осями будет выражаться соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \bar{\xi} \cos(\bar{x}, x) + \bar{\eta} \cos(\bar{y}, x) + \bar{\zeta} \cos(\bar{z}, x); \\ \bar{\eta} &= \bar{\xi} \cos(\bar{x}, y) + \bar{\eta} \cos(\bar{y}, y) + \bar{\zeta} \cos(\bar{z}, y); \\ \bar{\zeta} &= \bar{\xi} \cos(\bar{x}, z) + \bar{\eta} \cos(\bar{y}, z) + \bar{\zeta} \cos(\bar{z}, z).\end{aligned}$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\cos(\bar{x}, x) = \alpha_{11}; \cos(\bar{y}, x) = \alpha_{21}; \cos(\bar{z}, x) = \alpha_{31} \quad \text{и т. д.}$$

Так как \bar{R} характеризует относительный радиус-вектор точки среды и \bar{s}_2 есть деформация жидкой частицы, то скалярное произведение этих векторов будет величиной неизменной для преобразования координат. Следовательно,

$$\begin{aligned}\bar{s}_2 \cdot \bar{R} &= e_{xx} \bar{\xi}^2 + e_{yy} \bar{\eta}^2 + e_{zz} \bar{\zeta}^2 + e_{xy} \bar{\xi} \bar{\eta} + e_{yz} \bar{\eta} \bar{\zeta} + e_{zx} \bar{\zeta} \bar{\xi} = \\ &= e_{xx} \bar{\xi}^2 + e_{yy} \bar{\eta}^2 + e_{zz} \bar{\zeta}^2 + e_{xy} \bar{\xi} \bar{\eta} + e_{yz} \bar{\eta} \bar{\zeta} + e_{zx} \bar{\zeta} \bar{\xi}.\end{aligned}$$

Подставляя в последнее соотношение значения $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, выраженные через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, и сравнивая затем коэффициенты при $\bar{\xi}^2$, $\bar{\eta}^2$, $\bar{\zeta}^2$ в обеих частях равенства, приходим к формулам, из которых следует, что

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}.$$

В частности, если новые оси координат выбраны вдоль главных осей эллипсоида деформации, то последнее соотношение можно записать в виде

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \bar{s}.$$

Отсюда следует, что \overline{divs} остается неизменной при преобразовании координат.

Если ввести обозначения

$$\Phi_{11} = e_{xx}; \Phi_{22} = e_{yy}; \Phi_{33} = e_{zz}; \Phi_{12} = \Phi_{21} = 1/2e_{xy};$$

$$\Phi_{13} = \Phi_{31} = 1/2e_{xz}; \Phi_{23} = \Phi_{32} = 1/2e_{yz},$$

то формулы преобразования компонентов деформации примут следующий вид

$$\Phi_{lk} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \Phi_{rs} \alpha_{lr} \alpha_{ks}, \quad (l, k = 1, 2, 3).$$

Тензор деформации

Шесть величин, зависящих от x , y , z и удовлетворяющих последним формулам преобразования координат, образуют так называемый аффинный ортогональный тензор второго ранга.

Следовательно, можно сказать, что шесть компонентов деформации образуют тензор, который естественно назвать тензором деформации.

Тензор деформации в каждой точке пространства характеризует деформацию частицы сплошной среды, окружающей данную точку. Обозначим этот тензор через Φ и изобразим, как принято, в виде следующей таблицы

$$\Phi = \begin{Bmatrix} e_{xx} & 1/2e_{xy} & 1/2e_{xz} \\ 1/2e_{xy} & e_{yy} & 1/2e_{yz} \\ 1/2e_{xz} & 1/2e_{yz} & e_{zz} \end{Bmatrix}.$$

Если \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} выбраны вдоль главных осей деформации (см. предыдущий параграф), то Φ будет вида

$$\Phi = \begin{Bmatrix} e_{xx}^- & 0 & 0 \\ 0 & e_{yy}^- & 0 \\ 0 & 0 & e_{zz}^- \end{Bmatrix}.$$

Скорость точек малой частицы

Вычислим скорости различных точек малой частицы сплошной среды. Как было указано, смещение произвольной точки малой частицы сплошной среды можно представить в виде

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{s}_1 + \vec{s}_2, \text{ где } \vec{s}_1 = \Delta\vec{\Phi} \times \vec{R}.$$

Полагая, что это смещение происходит за бесконечно малый промежуток времени Δt , отнесем к нему последнее выражение и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, тогда получим формулу, связывающую скорости точек частицы сплошной среды

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

где \vec{v}_0 - скорость поступательного движения частицы;

$$\vec{v}_1 = \omega \times \vec{R}$$

Здесь

$$\omega = 1/2 \text{rot } \vec{v}$$

представляет собой вращательную скорость частицы относительно точки O ; см. рис. 2.3) и

$$\vec{v}_2 = \text{grad } \frac{df}{dt} = \text{grad } \dot{f}$$

есть скорость деформации жидкой частицы.

Проекции вектора скорости v будем обозначать соответственно v_x, v_y, v_z . Кроме того, введем обозначения

$$\dot{e}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \dot{e}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \dot{e}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$\dot{e}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}; \dot{e}_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}; \dot{e}_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Величины $\dot{e}_{xx}, \dot{e}_{yy}, \dot{e}_{zz}$ представляют собой скорости относительного удлинения элементов, расположенных соответственно параллельно осям координат; $\dot{e}_{xy}, \dot{e}_{yz}, \dot{e}_{zx}$ - скорости деформации прямых углов. Используя введенные обозначения, функцию \dot{f} запишем в виде

$$\dot{f} = \dot{e}_{xx} \xi^2 + \dot{e}_{yy} \eta^2 + \dot{e}_{zz} \zeta^2 + \dot{e}_{xy} \xi\eta + \dot{e}_{yz} \eta\zeta + \dot{e}_{zx} \zeta\xi.$$

Шесть величин $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ носят название *компонентов скоростей деформации*.

Тензор скоростей деформации

Формулы преобразования компонентов скоростей деформации будут аналогичны формулам предыдущего параграфа. Следовательно, они образуют тензор, который обозначим $\dot{\Phi}$. Последний имеет вид

$$\dot{\Phi} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_{xx} & 1/2\dot{e}_{xy} & 1/2\dot{e}_{xz} \\ 1/2\dot{e}_{xy} & \dot{e}_{yy} & 1/2\dot{e}_{yz} \\ 1/2\dot{e}_{xz} & 1/2\dot{e}_{yz} & \dot{e}_{zz} \end{Bmatrix}.$$

Тензор $\dot{\Phi}$ носит название *тензора скоростей деформации*.

2.5. Уравнение неразрывности

Плотность среды

Важной характеристикой сплошной среды является ее плотность. Для ее определения выделим в жидкой среде малый объем ΔV , охватывающий точку M , плотность которой ищется. Пусть масса выделенного объема будет Δm . Тогда плотностью среды в точке M называется предел отношения массы Δm элементарного объема к величине объема ΔV при $\Delta V \rightarrow 0$, т. е.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Это определение имеет смысл только в том случае, когда среда сплошным образом заполняет рассматриваемый объем. Последнее условие налагает ограничения на перемещения и плотности точек сплошной среды. В случае конечных перемещений налагается ограничение на скорости точек среды в виде уравнения неразрывности.

Уравнение неразрывности

Воспользуемся переменными Лагранжа и условие того, что выделенный объем сплошной среды в два момента времени — начальный t_0 и конечный t_1 — будет иметь одинаковую массу, т. е.

$$\iiint_V \rho_0 da db dc = \iiint_{V_1} \rho_1 dx dy dz,$$

где ρ_0 — плотность среды в момент t_0 , являющаяся функцией a, b, c, t_0 ; ρ_1 — плотность в момент $t_1 = t_0 + \Delta t$, являющаяся функцией $a, b, c, t_0 + \Delta t$. Заменим во втором интеграле переменные x, y, z через переменные a, b, c , тогда

$$\iiint_{V_1} \rho_1 dx dy dz = \iiint_V \rho_1 da db dc,$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Но через составляющие вектора перемещения [см. формулы (2.1.4')] последний детерминант можно представить в виде

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial u}{\partial b} & 1 + \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial b} \\ \frac{\partial u}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial c} & 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

или в силу того, что рассматриваются малые перемещения, можно пренебречь произведениями типа $\partial w/\partial b$, $\partial v/\partial c$ и т. д., и тогда

$$D = 1 + \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}.$$

Подставив преобразованный интеграл в исходное равенство, получим

$$\iiint_V (\rho_0 - \rho_1 D) da db dc = 0.$$

Так как выбранный объем V произволен, то, чтобы выполнялось последнее равенство, необходимо равенство нулю подынтегрального выражения, т. е.

$$\rho_0 - \rho_1 D = 0. \quad (2.5.1)$$

Это уравнение неразрывности, записанное в переменных Лагранжа. Подставив значение D , перепишем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}. \quad (2.5.2)$$

Перейдя к переменным Эйлера, как это уже неоднократно делалось, запишем это равенство в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.5.2')$$

Докажем, что последнее равенство представляет собой относительное объемное расширение Δ при деформации. Так как

$$\Delta = \frac{dV_1 - dV}{dV},$$

то, в силу неизменности массы объема при деформации, имеем

$$\rho_1 dV_1 = \rho_0 dV.$$

Следовательно,

$$\Delta = \frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.5.2'')$$

что и требовалось доказать.

Возвращаясь к равенству (2.5.2'), запишем

$$\frac{\rho(x, y, z, t)}{\rho(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)} - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Это равенство связывает плотность частицы в двух точках пространства, определяемых координатами x, y, z и $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$. Эти положения точка сплошной среды занимает в моменты t и $t+\Delta t$, смещаясь за время Δt на малый вектор s , имеющий проекции u, v, w . Чтобы найти связь между плотностью в данной точке пространства x, y, z и скоростью в той же точке, необходимо разделить последнее равенство на Δt и перейти к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, получим

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

или, вводя

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

Запишем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2.5.3)$$

Или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (2.5.3')$$

Равенство (2.5.3) или (2.5.3') является *уравнением неразрывности*, записанным в переменных Эйлера. Оно накладывает ограничение на скорости точек сплошной среды и применяется в тех случаях, когда смещения точек среды велики.

Полученное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) = \operatorname{div} \vec{v}.$$

Но $\rho_0/\rho_1 - 1$ выражает объемное расширение при деформации, следовательно, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right)$, или $\text{div} \vec{v}$, является скоростью объемного расширения сплошной среды при деформации.

В заключение заметим, что, как следует из приведенного вывода, уравнение неразрывности (2.5.3) представляет собой условие неизменности массы выделенного в жидкости объема, или закон сохранения массы. Последняя трактовка этого уравнения является в ряде случаев полезной.

2.6. Поле скоростей и его основные характеристики

Поле скоростей

Изучая движение сплошных сред в переменных Эйлера, в части пространства, занятого жидкостью, в каждый заданный момент в каждой точке можно построить вектор скорости. Совокупность этих векторов образует так называемое *поле скоростей*. Так как вектор скорости v зависит от координат x , y , z и времени t , то в общем случае поле скоростей будет изменяться с течением времени. Однако в частном случае v может быть функцией только координат. В этом случае поле скоростей называется *стационарным*, или *установившимся*.

Линии тока

Линии, в любой точке которых касательная совпадает с направлением вектора скорости, называется *линией тока* (рис 2.5а).

Касательная к линии тока составляет с осями координат углы, косинусы которых соответственно определяются выражениями

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$$

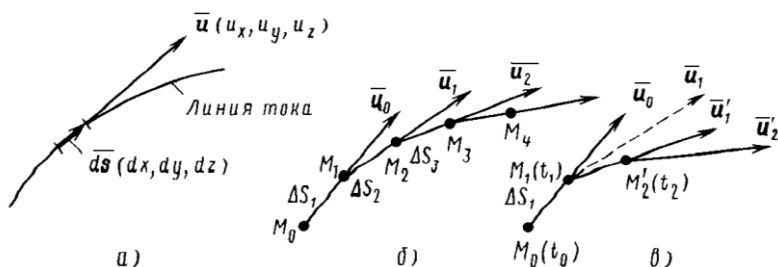


Рис. 2.5.

Косинусы углов, которые составляют скорость с осями координат, будут

$$\frac{v_x}{v}, \frac{v_y}{v}, \frac{v_z}{v}.$$

На основании определения линий тока соответствующие углы должны быть равны. Следовательно, дифференциальные уравнения линий тока будут

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} = \frac{ds}{v}, \quad (2.6.1)$$

где ds — элемент дуги линии тока; dx, dy, dz — его проекции на оси декартовой системы координат; t играет роль параметра.

Уравнения (2.6.1) определяют семейство линий тока. При изменении t будет изменяться семейство линий тока.

Выясним взаимосвязь между линиями тока и траекториями частиц среды. Пусть в некоторой точке M_0 в момент времени t_0 скорость имеет значение u_0 . Построим линию тока следующим образом. Отложим на векторе \vec{u}_0 малый отрезок ΔS_1 (рис. 2.5, б) и в точке M_1 построим присущий ей вектор \vec{u}_1 . Затем на этом векторе отложим отрезок ΔS_2 и аналогично построим вектор \vec{u}_2 и т.д.

Важно подчеркнуть, что все построения выполняются для одного фиксированного момента времени t_0 , а потому безразлично, является течение установившимся или неустановившимся. Если отрезки Δs_i примем достаточно малыми, то приближенно получим кривую, удовлетворяющую определению линии тока.

Попытаемся теперь подобным образом построить траекторию той жидкой частицы, которая в момент времени t_0 находилась в точке M_0 . Пусть за малое время Δt_1 она проходила путь Δs_1 (рис. 2.5, в). В линейном приближении этот путь можно считать совпадающим с направлением вектора \vec{u}_0 . Тогда в конце интервала Δt_1 частица попадет в точку M_1 . Если движение установившееся, то скорость в этой точке будет той же, какой она была в момент времени t_0 . В этом случае частица далее переместится по направлению вектора \vec{u}_1 , достигнет точки M_2 и т.д. Очевидно, ее траектория совпадет с линией тока. Если же движение неустановившееся, то за время Δt_1 вектор \vec{u}_1 изменится и к моменту перемещения частицы в точку M_1 ее скорость будет \vec{u}'_1 . Следовательно, из точки M_1 частица направится вдоль вектора \vec{u}'_1 и не попадет в точку M_2 , поэтому и траектория ее не совпадет с линией тока.

Таким образом, линия тока и траектории совпадают только при установившемся движении жидкости.

В частном случае стационарного поля скоростей [или $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$] в (2.6.1) отсутствует время t . Благодаря этому линии тока не изменяются с течением времени и представляют собой траектории, вдоль которых перемещаются частицы сплошной среды.

Уравнения семейства линий тока и траекторий в этом случае будут

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \quad (2.6.2)$$

В общем случае линии тока и траектории точек сплошной среды не совпадают.

Поток скорости (и массы)

Одной из существенных характеристик поля скоростей является понятие *потока скорости*. Под последним понимается объем сплошной среды, протекающей через некоторую неподвижную поверхность, a за единицу времени. Обозначив поток скорости через Q , на основании определения запишем его в виде поверхностного интеграла

$$Q = \int_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} v_n d\sigma = \int_{\sigma} v_x dydz + v_y dzdx + v_z dxdy,$$

где $d\vec{\sigma}$ — вектор направлений перпендикулярно к площади $d\sigma$, $d\vec{r} = \vec{v}dt$ — вектор скорости, v_n — его проекция на $d\vec{\sigma}$.

Если поверхность σ замкнута, в качестве $d\vec{\sigma}$ выбирается внешняя нормаль поверхности. При этом условно принято, что объем вытекающей среды положителен, а втекающей — отрицателен.

Поверхностный интеграл на основании теоремы Гаусса можно записать в виде

$$Q = \int_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \operatorname{div} \vec{v} dV. \quad (2.6.3)$$

Наряду с объемом сплошной среды, вытекающей через заданную поверхность, можно рассматривать массу среды, протекающую через поверхность и определяемую интегралом

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = C_{\text{л}}$$

Этот интеграл назовем *потоком массы*. Если a замкнута, то

$$\int_{\sigma} \rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV. \quad (2.6.4)$$

Если жидкость несжимаема или течение стационарно, то из уравнения неразрывности следует, что последний интеграл равен нулю.

Вывод уравнения неразрывности на основании понятия потока массы

Понятие потока массы позволяет просто получить уравнение неразрывности, рассмотренное выше. Именно, поток массы сквозь некоторую неподвижную замкнутую поверхность σ определяет вытекающую в единицу времени массу сплошной среды. Это повлечет за собой уменьшение плотности в точках внутри σ за единицу времени на величину $-\partial\rho/\partial t$ и соответствующее уменьшение массы среды, заключенной в σ , равное $-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$, т. е.

$$\int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV.$$

Так как объем V произволен, то из последнего уравнения имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0.$$

Это и есть уже указанное ранее уравнение неразрывности.

Циркуляция скорости и ее связь с потоком завихренности

Второй существенной характеристикой поля является понятие циркуляции скорости. Последняя обозначается Γ и определяется как криволинейный интеграл по замкнутой кривой L с заданным направлением обхода

$$\tilde{A} = \oint_L \vec{v} d\vec{s} = \int_L v_x dx + v_y dy + v_z dz, \quad (2.6.5)$$

где ds — элемент кривой L .

Согласно теореме Стокса Γ можно записать еще в виде

$$\tilde{A} = \oint_L \vec{v} d\vec{s} = \int_{\sigma} \text{rot} \vec{v} \cdot d\sigma, \quad (2.6.5')$$

где σ — любая поверхность, ограниченная L . Ранее было доказано, что скорость вращения частиц сплошной среды определяется вектором

$$\omega = 1/2 \text{rot} \vec{v}.$$

Вектор

$$\vec{\Omega} = 2\omega = \text{rot} \vec{v}$$

называется *вектором завихренности движения*, или *вектором вихря скорости*. Этот вектор, как очевидно, характеризует вращение частиц сплошной среды. Как следует из формулы (2.6.5'), циркуляция скорости равна потоку завихренности сквозь любую поверхность, ограниченную контуром L .

Классы безвихревых и завихренных движений

Введенное понятие завихренности поля скоростей позволяет разбить движения сплошных сред на два класса. К первому отнесем Движения, для которых выполняется условие

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v} = 0.$$

Такие движения будем называть *безвихревыми*, или *потенциальными*. Но последнее соотношение является необходимым и достаточным условием того, что вектор \vec{v} есть градиент некоторой функции ϕ , носящей название *потенциала скорости*, т. е.

$$\vec{v} = \text{grad} \phi$$

Так как вектор $\rho = f(p)$, является функцией x , y , z и t , то и потенциал скорости зависит от тех же переменных.

Ко второму классу движений сплошных сред отнесем такие, для которых

$$\text{rot} \vec{v} \neq 0.$$

Эти движения называются *завихренными*.

Поле завихренности

Рассмотрим завихренные движения. Пусть точки, в которых вектор $\vec{\Omega}$ отличен от нуля, сплошным образом заполняют некоторый объем. В этом случае можно говорить, что поле скоростей порождает поле завихренности, ибо каждой точке пространства будет соответствовать вектор $\vec{\Omega}$. Так же, как и для поля скоростей, для поля завихренности введем понятие вихревых линий. Под последними будем понимать линии, касательные к которым в любой точке совпадают с вектором завихренности в данной точке. Согласно определению, дифференциальные уравнения вихревых линий будут

$$\operatorname{div} \rho \operatorname{grad} \phi = 0,$$

Так как

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0.$$

то поток завихренности через замкнутую поверхность равен нулю. Действительно, по теореме Гаусса имеем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C.$$

Выберем в качестве замкнутой поверхности трубку тока, ограниченную двумя любыми нормальными с ней сечениями (рис. 2.6). Пусть площадь этих сечений будет σ_1 и σ_2 . Обозначим

через $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta \phi = 0$, вектор нормали к

этим сечениям (рис 2.7) и через \vec{a}_0 ($\omega_0 = \varepsilon_0 = 0$) и $\vec{\Omega}_2$ нормальные составляющие векторов завихренности, действующих на площадках σ_1 и σ_2 , Ω_1 и Ω_2 . Тогда, так как для поверхности вихревой трубки нормальная составляющая вектора завихренности равна нулю, то

$$\vec{a}_0 = \operatorname{const} .$$

Величина, равная произведению площади нормального к вектору вихря сечения вихревой трубки на модуль Q , носит название *интенсивности вихревой трубки*, или *интенсивности вихря*.

Из последнего соотношения следует так называемая первая теорема Гельмгольца, которая гласит: *интенсивность вихря остается постоянной вдоль вихревой линии*.

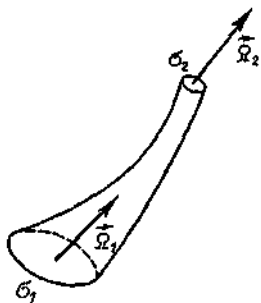


Рис. 2.6.

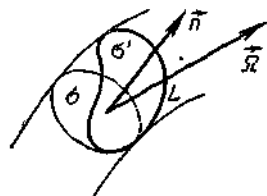


Рис. 2.7.

Так как сечения σ_1 и σ_2 вихревой трубки выбраны произвольно, то из последнего равенства следует, что *вихревые трубки не могут прерываться, или вихревые трубки либо будут замкнуты, либо будут кончатся на границе жидкости*.

Применим теорему Стокса для вихревой трубки, выбрав в качестве кривой L любой контур, охватывающий трубку. Тогда

$$\tilde{A} = \Omega_n \sigma' = \Omega \sigma' \cos(\vec{n}, \Omega) = \Omega \sigma$$

где σ' — площадь сечения трубки, ограниченной контуром L , σ — площадь соответствующего нормального сечения (см. рис. 2.7).

В силу последнего равенства имеем следующий результат: *интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по любому контуру, расположенному на вихревой трубке и охватывающему вихревую трубку*.

РАЗДЕЛ 3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

3.1. Силы, действующие в сплошных средах

Массовые силы

Выделим в сплошной среде объем V , ограниченный поверхностью σ . Все силы, действующие на выделенную часть сплошной среды, можно разбить на два класса. К одному классу относятся силы, действующие на каждый элемент объема dV , независимо от того, существуют или нет рядом с выделенным объемом другие части сплошной среды. Эти силы называются *массовыми*. Если обозначить через \vec{F} массовую силу, отнесенную к единице массы, то на объем dV , масса которого будет ρdV , действует массовая сила $\vec{F} \rho dV$. Главный вектор массовых сил, действующих на весь объем V , будет выражаться в виде интеграла:

$$\int_V \vec{F} \rho dV.$$

Поверхностные силы

Примером массовых сил могут служить гравитационные силы, силы инерции и другие силы.

К другому классу сил относятся силы взаимодействия между отдельными частями сплошной среды. Главный вектор и главный момент этих сил внутри выделенного объема V , в силу третьего закона Ньютона, будут уравновешены.

Таким образом, эти силы останутся приложенными только к поверхностным частям объема V или они будут приложены по поверхности σ . Поэтому они называются *поверхностными силами*. Поверхностная сила будет зависеть от ориентации площадки, к

которой она приложена. Поверхностную силу, действующую на единицу площади, ориентация которой задана в пространстве внешней нормалью \vec{n} , обозначают через \vec{p}_n и называют *напряжением сил на рассматриваемом элементе поверхности*.

На элемент поверхности $d\sigma$ будет действовать поверхностная сила $\vec{p}_n d\sigma$. Главный вектор поверхностных сил, действующих на объем V , будет выражаться в виде интеграла, распространенного по замкнутой поверхности σ

$$\int_{\sigma} p_n d\sigma.$$

Вектор \vec{p}_n в общем случае не направлен по нормали \vec{n} к поверхности, к которой он приложен. Проекция \vec{p}_n на направление нормали носит название *нормального напряжения*, или *нормального давления*. Проекция \vec{p}_n на площадку, к которой \vec{p}_n приложено, носит название *сдвигающего*, или *срезающего напряжения* (касательного напряжения).

3.2. Тензор напряжения

Компоненты напряжения

Подробно исследуем вектор \vec{p}_n . Для этого мысленно выделим в сплошной среде элементарный тетраэдр, три грани которого MBC , MAC и MAB параллельны координатным плоскостям (рис. 3.1). Внешние нормали к этим граням будут направлены соответственно противоположно осям O_x , O_y и O_z . Внешнюю нормаль к четвертой наклонной грани ABC обозначим \vec{n} . Пусть \vec{n} составляет с осями O_x , O_y , O_z углы, косинусы которых назовем соответственно a_{n1} , a_{n2} , a_{n3} . Тогда, если площадь грани ABC будет $d\sigma$, то площади граней MBC , MAC , MAB , являясь проекциями $d\sigma$, будут соответственно равны

$$\varepsilon_{n1}, d\sigma, \alpha_{n2}, \sigma, \alpha_{n3}, d\sigma$$

Рассматриваемый тетраэдр вместе со всей сплошной средой, к которой он принадлежит, находится в движении. Обозначим объем тетраэдра через dV , тогда массовые силы, действующие на тетраэдр, будут

$$\vec{F}\rho dV$$

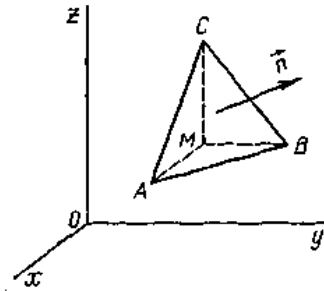


Рис. 3.1.

Соответственно массовые силы инерции будут

$$\vec{a}\rho dV,$$

где \vec{a} — ускорение элементарного тетраэдра.

Поверхностная сила, действующая на грань ABC , будет

$$\vec{P}_n d\sigma,$$

и в силу того, что внешние нормали к соответствующим остальным граням тетраэдра будут $-x$, $-y$, $-z$, поверхностные силы, действующие на них, соответственно выразятся как

$$\vec{p}_{-x}\alpha_{n1}d\sigma, \vec{p}_{-x}\alpha_{n2}d\sigma, \vec{p}_{-x}\alpha_{n3}d\sigma.$$

Одно из необходимых уравнений движения тетраэдра, как было указано ранее, будет заключаться в том, что геометрическая сумма всех сил, действующих на него, включая силы инерции, равна нулю т. е.

$$(\vec{F} - \vec{a})\rho d\tau + \vec{p}_n d\sigma + \vec{p}_{-x}\alpha_{n1}d\sigma + \vec{p}_{-y}\alpha_{n2}d\sigma + \vec{p}_{-z}\alpha_{n3}d\sigma = 0.$$

Если h - высота тетраэдра, то объем его будет $dV = \frac{h}{3}d\sigma$. Следовательно, последнее уравнение можно переписать в виде

$$(\vec{F} - \vec{a})\frac{h}{3}\rho + \vec{p}_n + \vec{p}_{-x}\alpha_{n1} + \vec{p}_{-y}\alpha_{n2} + \vec{p}_{-z}\alpha_{n3} = 0.$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $h \rightarrow 0$, получим

$$\vec{p}_n = -\vec{p}_{-x}\alpha_{n1} - \vec{p}_{-y}\alpha_{n2} - \vec{p}_{-z}\alpha_{n3}.$$

Сила \vec{p}_x есть воздействие на грань MCB частиц среды, лежащих вне тетраэдра. Соответственно \vec{p}_x будет сила воздействия на ту же грань MCB частиц среды, находящихся внутри тетраэдра. Но, в силу равенства действия и противодействия, будем иметь

$$p_{-x} = -p_x.$$

Аналогично запишем

$$\vec{p}_{-y} = -\vec{p}_y; \vec{p}_{-z} = -\vec{p}_z.$$

Отсюда

$$\vec{p}_n = p_x\alpha_{n1} + \vec{p}_y\alpha_{n2} + p_z\alpha_{n3}. \quad (3.2.2)$$

Это равенство указывает, что напряжение \vec{p}_n при произвольной ориентировке внешней нормали \vec{n} может быть определено, если известны напряжения в той же точке для площадок, внешние нормали которых параллельны осям O_x , O_y , O_z , и одинаково с ними направлены. Проекции векторов \vec{p}_x , \vec{p}_y , \vec{p}_z на оси x , y , z обозначим соответственно

$$P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}; P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}; P_{zx}, P_{zy}, P_{zz}.$$

Эти проекции носят название *компонентов напряжения*.

Тензор напряжения

Проектируя равенство (3.2.2) на оси координат, будем иметь

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\alpha_{n1} + p_{yx}\alpha_{n2} + p_{zx}\alpha_{n3}; \\ p_{ny} &= p_{xy}\alpha_{n1} + p_{yy}\alpha_{n2} + p_{zy}\alpha_{n3}; \\ p_{nz} &= p_{xz}\alpha_{n1} + p_{yz}\alpha_{n2} + p_{zz}\alpha_{n3}. \end{aligned} \quad (3.2.2')$$

Рассмотрим теперь произвольное направление m и обозначим через p_{nm} проекцию \vec{p}_n на это направление. Кроме того, введем обозначения

$$p_{nm} = p_{nx}\alpha_{m1} + p_{ny}\alpha_{m2} + p_{nz}\alpha_{m3}.$$

Тогда

$$p_{nm} = p_{xx}\alpha_{m1}\alpha_{n1} + p_{yy}\alpha_{m2}\alpha_{n2} + p_{zz}\alpha_{m3}\alpha_{n3},$$

или, с учетом формул (3.2.2'),

$$\begin{aligned} p_{nm} &= p_{xx}\alpha_{n1}\alpha_{m1} + p_{yx}\alpha_{n2}\alpha_{m1} + p_{zx}\alpha_{n3}\alpha_{m1} + p_{xy}\alpha_{n1}\alpha_{m2} + \\ &+ p_{yy}\alpha_{n2}\alpha_{m2} + p_{zy}\alpha_{n3}\alpha_{m2} + p_{xz}\alpha_{n1}\alpha_{m3} + p_{yz}\alpha_{n2}\alpha_{m3} + p_{zz}\alpha_{n3}\alpha_{m3}. \end{aligned}$$

Положив в этой формуле последовательно n и m равными $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, получим формулы, позволяющие вычислить компоненты напряжения в новой системе координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ через компоненты напряжения в старой системе координат x, y, z . Сравнивая эти формулы с формулами преобразования компонентов деформации или компонентов скоростей деформации частицы сплошной среды, можно установить их идентичность. Следовательно, компоненты напряжения образуют тензор Π вида

$$\ddot{I} = \left\{ \begin{array}{l} P_{xx}, P_{xy}, P_{xz} \\ P_{yx}, P_{yy}, P_{yz} \\ P_{zx}, P_{zy}, P_{zz} \end{array} \right\}.$$

Этот тензор носит название *тензора напряжения*.

В дальнейшем будет доказано, что тензор Π симметричный, т. е. выполняются равенства

$$P_{xy} = P_{yx}; P_{yz} = P_{zy}; P_{zx} = P_{xz}.$$

Таким образом, напряжение в данной точке среды есть функция шести величин

$$P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}; P_{xy}, P_{yz}, P_{zx}.$$

Тензор напряжения обладает теми же свойствами, что и тензор деформации (см. раздел 2), а именно существуют три взаимно перпендикулярные главные оси тензора напряжений, относительно которых тензор напряжения имеет вид

$$\ddot{I} = \left\{ \begin{array}{lll} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{array} \right\}.$$

где p_1, p_2, p_3 — главные напряжения.

Кроме того, имеет место соотношение

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3,$$

т.е. сумма нормальных напряжений на три взаимно перпендикулярные площадки не зависит от ориентации этих площадок. Компоненты напряжения характеризуют внутренние, силы, действующие в сплошной среде. Эти компоненты будут изменяться с течением времени t и при переходе от одной точки пространства, занятого сплошной средой, к другой. Таким образом, компоненты напряжения, являясь функциями t, x, y, z , выражаются в переменных Эйлера.

3.3. Уравнения движения сплошных сред

Главный вектор и главный момент сил, действующих на произвольный элемент сплошной среды

Выделим мысленно произвольный объем dV сплошной среды.

Главный вектор всех массовых сил выделенного объема будет

$$\int_V \vec{F} \rho dV, \quad (3.3.1)$$

где \vec{F} — массовая сила, отнесенная к единице массы сплошной среды, dV — элементарный объем сплошной среды, ρ — ее плотность. Главный вектор сил инерции, действующих на выделенную часть жидкости, аналогично будет

$$-\int_V \vec{a} \rho dV, \quad (3.3.1')$$

где \vec{a} — вектор ускорения. Наконец, если σ — поверхность, ограничивающая выделенный объем V , тогда главный вектор всех поверхностных сил будет

$$-\int_V \vec{a} \rho dV, \quad (3.3.1'')$$

где \vec{a} — поверхностная сила, отнесенная к единице площади, а $d\sigma$ — элемент поверхности σ .

Как было указано в разделе 1, необходимыми, но недостаточными уравнениями движения выделенного объема V сплошной среды будут равенство нулю главного вектора всех сил, действующих на этот объем, т. е.

$$\int_V \vec{F}\rho dV - \int_V \vec{a}\rho dV + \int_{\sigma} \vec{p}d\sigma = 0 \quad (3.3.2)$$

и равенство нулю главного момента всех внешних сил, действующих на объем V , т. е.

$$\int_V \vec{r} \times (\vec{F} - \vec{a})\rho dV + \int_{\sigma} \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma = 0 \quad (3.3.3)$$

Уравнения движения в напряжениях

На основании формулы (3.2.2) предыдущего параграфа имеем

$$\int_{\sigma} \vec{p}d\sigma - \int_{\sigma} (\vec{p}_x \alpha_{n1} + \vec{p}_y \alpha_{n2} + \vec{p}_z \alpha_{n3})d\sigma.$$

Но последний поверхностный интеграл преобразуется в объемный интеграл по формуле

$$\int_{\sigma} (\vec{p}_x \alpha_{n1} + \vec{p}_y \alpha_{n2} + \vec{p}_z \alpha_{n3})d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV.$$

Следовательно, уравнение (3.3.2) может быть записано в виде

$$\int_V \left[(\vec{F} - \vec{a})\rho + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right] dV = 0,$$

откуда, вследствие произвольности объема V , имеем

$$\vec{F} - \vec{a}\rho + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} = 0.$$

Поверхностный интеграл, входящий в формулу (3.3.3), может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma} \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma (\vec{p}_x \alpha_{n1} + \vec{p}_y \alpha_{n2} + \vec{p}_z \alpha_{n3}) = \\ & = \int_V \left(\frac{\partial r \times \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial r \times \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial r \times \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV = \\ & \int_V \vec{r} \times \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV + \\ & + \int_V \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{p}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{p}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{p}_z \right) dV. \end{aligned}$$

Но

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей.

Уравнение (3.3.3) теперь может быть записано в виде

$$\int_V \left[\vec{r} \times \left(\vec{F}\rho - \vec{a}\rho + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) + \vec{i} \times \vec{p}_x + \vec{j} \times \vec{p}_y + \vec{k} \times \vec{p}_z \right] dV = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема V , имеем

$$\vec{r} \times \left(\vec{F}\rho - \vec{a}\rho + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) + \vec{i} \times \vec{p}_x + \vec{j} \times p_y + \vec{k} \times p_z = 0,$$

или окончательно, принимая во внимание уравнение (3.3.2),

$$\vec{i} \times \vec{p}_x + \vec{j} \times p_y + \vec{k} \times p_z = 0.$$

В силу равенств (3.2.2) последнее уравнение перепишем в виде

$$\begin{aligned} p_{xx}\vec{i} \times \vec{i} + p_{xy}\vec{i} \times \vec{j} + p_{xz}\vec{i} \times \vec{k} + p_{yx}\vec{j} \times \vec{i} + p_{yy}\vec{j} \times \vec{j} + p_{yz}\vec{j} \times \vec{k} + \\ + p_{zx}\vec{k} \times \vec{i} + p_{zy}\vec{k} \times \vec{j} + p_{zz}\vec{k} \times \vec{k} = 0, \end{aligned}$$

или

$$(p_{xy} - p_{yx})\vec{i} + (p_{zx} - p_{xz})\vec{j} + (p_{yz} - p_{zy})\vec{k} = 0,$$

откуда имеем

$$p_{xy} = p_{yx}, p_{zx} = p_{xz}, p_{yz} = p_{zy}. \quad (3.3.4)$$

Следовательно, второе необходимое уравнение движения сплошной среды указывает, что тензор напряжений, рассмотренный в предыдущем параграфе, является симметричным. Уравнение сплошной среды в векторной форме на основании (3.3.2) будет иметь вид

$$\vec{a} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right). \quad (3.3.5)$$

Отсюда скалярные уравнения движения будут

$$\begin{aligned}
 a_x &= F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right); \\
 a_y &= F_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right); \\
 a_z &= F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

Эти уравнения носят название *уравнений движения сплошных сред в напряжениях*. В уравнениях (3.3.5') время t и координаты x , y , z являются независимыми переменными. Это значит, что время и место наблюдения движения точек сплошной среды произвольны. Выбор в качестве независимых переменных координат x , y , z пространства, заполненного сплошной средой, указывает, что эти уравнения написаны в переменных Эйлера.

При изучении механики сплошных сред задача состоит в исследовании движения сплошной среды под действием заданных сил. Таким образом, в уравнениях (3.3.5) компоненты массовой силы \vec{F} рассматриваются как величины заданные. Остальные величины, а именно: плотность ρ , компоненты напряжения p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{xy} , p_{yz} , p_{zx} и компоненты ускорения a_x , a_y , a_z (либо компоненты векторов скорости или смещения, через которые \vec{a} выражается), являются величинами, подлежащими определению. Уравнения (3.3.5) представляют систему трех уравнений относительно 10 неизвестных. Следовательно, уравнения (3.3.5') являются, как очевидно, уравнениями необходимыми, но недостаточными. Недостающие уравнения для описания движения сплошных сред принципиально не могут быть найдены методами классической механики. Их можно получить, только рассматривая основные физические характеристики тех или иных сплошных сред и строя на основании их гипотезы о характере внутренних сил, действующих в сплошных средах.

РАЗДЕЛ 4

ГИДРОДИНАМИКА. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. Основные уравнения и задачи движения идеальной жидкости.

Гидродинамикой называется раздел, изучающий движения существующих в природе жидкостей и газов, совокупность которых принято именовать общим термином жидкость.

Идеальная жидкость

Первоначально ограничим исследование изучением движения жидкостей, которые не оказывают сопротивления при скольжении одного слоя по другому. Такие жидкости называются *идеальными*. Идеальная жидкость представляет собой понятие абстрактное, так же как, например, понятие абсолютно твердого тела. Значительный интерес раздела механики, изучающего движение идеальной жидкости, определяется главным образом тем, что вода и воздух в ряде задач могут быть приняты за идеальную жидкость.

Так как идеальная жидкость не оказывает сопротивления при скольжении одного слоя по другому, то взаимодействие отдельных частей жидкости будет осуществляться только в виде силы нормального давления. Следовательно, сдвигающие напряжения будут равны нулю: $p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0$. Воспользуемся равенством, связывающим напряжения внутренних сил, действующих на различно ориентированные площадки

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \alpha_{n1} + \vec{p}_y \alpha_{n2} + \vec{p}_z \alpha_{n3},$$

где α_{n1} , α_{n2} , α_{n3} — косинусы углов, которые составляют оси координат, и внешняя нормаль поверхности, ограничивающей выделенный объем среды.

Применив это равенство для идеальной жидкости и спроектировав его на оси координат, получим следующие соотношения:

$$P_n \alpha_{n1} = P_{xx} \alpha_{n1}, P_n \alpha_{n2} = P_{yy} \alpha_{n2}, P_n \alpha_{n3} = P_{zz} \alpha_{n3},$$

или

$$P_n = P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}.$$

Из последнего соотношения следует, что *давление в идеальной жидкости не зависит от ориентации площадки, к которой оно приложено.*

Нормальное давление направлено внутрь объема или в сторону, противоположную внешней нормали. Следовательно, векторы $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ для идеальной жидкости будут иметь вид

$$\vec{p}_x = -p\vec{i}, \vec{p}_y = -p\vec{j}, \vec{p}_z = -p\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы прямоугольной системы координат, определяющей пространство, в котором движется жидкость. Аналогично давление на произвольно выбранную площадку с внешней нормалью \vec{n} запишем в виде

$$\vec{p} = -pn_0, \quad (4.1.1)$$

где n_0 — единичный вектор внешней нормали; p_0 носит название *вектора гидродинамического давления.*

Уравнения движения идеальной жидкости

Основной задачей гидродинамики является определение поля скоростей жидкости по заданным массовым силам, действующим в ней.

Под полем скоростей понимается совокупность векторов скоростей отдельных точек жидкости, заполняющей пространство. Таким образом, задача гидродинамики в указанной постановке должна разрешаться в переменных Эйлера. Обращаясь к

уравнениям движения в напряжениях и пользуясь результатами предыдущего пункта, уравнение движения идеальной жидкости получаем в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (4.12)$$

Это уравнение Эйлера.

Вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (4.13)$$

в случае сжимаемой жидкости при заданных \vec{F} , уравнение (4.1.2) содержит пять неизвестных: плотность, давление и три компоненты скорости, которые являются функциями координат и времени.

Выражения (4.1.2) и (4.1.3) составляют систему четырех скалярных уравнений относительно жидкости относительно пяти неизвестных: v_x, v_y, v_z, p, ρ .

Следовательно, для их разрешения необходимо дополнительное уравнение. Простейшим из них является условие несжимаемости жидкости

$$\rho = \text{const}.$$

Жидкость, подчиняющаяся этому условию, называется *несжимаемой*. При условии (4.1.4) уравнение Эйлера (4.1.2) запишем в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \vec{F} - \text{grad} \frac{p}{\rho}, \quad (4.1.5)$$

и уравнение неразрывности - в виде

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (4.1.6)$$

Выражения (4.1.4) - (4.1.6) составляют систему уравнений, описывающих движение идеальной несжимаемой жидкости.

Уравнения состояния

Основными параметрами, определяющими физическое состояние жидкости, являются плотность ρ , давление p и абсолютная температура T . Эти параметры состояния не являются независимыми. Жидкости, плотность которых есть функции только давления

$$\rho = f(p) \quad (4.1.7)$$

называются *баротропными*.

Для так называемого идеального газа имеет место уравнение Клапейрона – Менделеева

$$p = RT\rho \quad (4.1.8)$$

Движение жидкости, плотность и давление которой связаны уравнением

$$\rho = Cp^{1/n} \quad (4.1.9)$$

где C и n – постоянные, называется движением или политропическом процессе. Число n называется *показателем политропы*. При $n = 1$ процесс является изотермическим

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p \quad (4.1.10)$$

Начальные и граничные условия уравнений идеальной жидкости

Проекция уравнений (4.1.2) и уравнение (4.1.3) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Их решение совместно с (4.1.9) будет содержать

произвольные функции и постоянные, которые определяются из граничных и начальных условий.

Начальные условия имеют вид

при $t = 0$,

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z); p = p(x, y, z); \rho = \rho(x, y, z). \quad (4.1.11)$$

Если жидкость ограничена неподвижной твердой поверхностью, нормаль к которой \vec{n} , то граничное условие вдоль нее будет

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0,$$

или

$$\text{grad} F \cdot \vec{v} = 0, \quad (4.1.12)$$

где $F(x, y, z)$ — уравнение поверхности. Условие (4.1.12) является примером кинематического граничного условия, так как оно накладывает ограничение на скорость жидкости.

Если жидкость соприкасается с другой неподвижной средой (например, вода с воздухом), то вдоль границ этих сред давление будет постоянным

$$p = p_0. \quad (4.1.13)$$

Уравнение Громеки-Ламба

Так как последнее условие накладывает ограничение на поверхностные силы, то (4.1.13) является примером динамического граничного условия.

Уравнению Эйлера (4.1.2) можно придать иной вид, если ввести в него в явном виде вектор завихренности. Для этого воспользуемся преобразованием

$$\text{grad} \frac{v^2}{2} = (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} + \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}.$$

Тогда, введя $\vec{\Omega}$ в уравнение движения идеальной жидкости, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (4.1.14)$$

Это уравнение Громеки-Ламба.

Если жидкость баротропна, т.е. $\rho=f(p)$, то можно ввести функцию $P = \int \frac{dp}{\rho}$, тогда

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} P \quad (4.1.15)$$

и уравнение Громеки-Ламба можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{\partial p}{\rho} \right) + \vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{F} . \quad (4.1.16)$$

Уравнение Гельмгольца

В ряде исследований пользоваться уравнением Громеки-Ламба удобнее, чем уравнением Эйлера.

Преобразуя уравнение (4.1.2), можно исключить из него p , полагая, что жидкость баротропна. Так как

$$\begin{aligned} \text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{v} ; \quad \text{rot} \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0 ; \quad \text{div} \vec{\Omega} = 0 ; \\ \text{rot} (\vec{v} \times \vec{\Omega}) &= (\vec{\Omega} \text{grad}) \vec{v} - (\vec{v} \text{grad}) \vec{\Omega} + \vec{v} \text{div} \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \text{div} \vec{v} , \end{aligned}$$

то, подсчитав rot от уравнения (4.1.2), имеем

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \text{grad}) \vec{v} + \vec{\Omega} \text{div} \vec{v} = \text{rot} \vec{F} .$$

Но

$$\frac{d \vec{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{\Omega} . \quad (4.1.17)$$

Окончательно получим уравнение

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{\Omega} \operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{F} \ , \quad (4.1.18)$$

которое называется *уравнением Гельмгольца*. Заметим, что (4.1.11) справедливо только для баротропных жидкостей. Если жидкость несжимаема ($\operatorname{div}\vec{v} = 0$) и массовые силы обладают потенциалом ($\vec{F} = \operatorname{grad}U, \operatorname{rot}\vec{F} = 0$), то уравнение Гельмгольца приобретает особенно простой вид

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} \ . \quad (4.1.19)$$

4.2. Уравнения движения в криволинейных ортогональных координатах

Криволинейные координаты

Изучая движение сплошной среды с точки зрения Эйлера, можно определить точки неподвижного пространства, в котором движется жидкость, при помощи не только декартовых координат x, y, z , но и криволинейных координат q_1, q_2, q_3 , связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$q_k = q_k(x, y, z) (k = 1, 2, 3) . \quad (4.2.1)$$

Уравнения

$$q_k(x, y, z) = \operatorname{const} (k = 1, 2, 3)$$

определяют семейство поверхностей, которые называются координатными поверхностями. Три семейства кривых, представленных уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} q_k(x, y, z) = \operatorname{const} \\ q_n(x, y, z) = \operatorname{const} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k = n = 1, 2, 3; \\ k \neq n; \end{array} \quad (4.2.2)$$

называются *координатными линиями*.

В каждой точке пространства, будут пересекаться три координатные линии, касательные к которым можно принять за

координатные оси. Эти оси, скрепленные с каждой точкой пространства, будут неподвижны и иметь различное направление в ней. Единичные векторы вдоль этих осей назовем соответственно $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$. Если последние взаимно ортогональны во всех точках пространства, то криволинейные координаты называются ортогональными.

Полагая, что якобиан $\frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x, y, z)}$ отличен от нуля, уравнение (4.2.1) можно однозначно разрешить относительно x, y, z , что записывается в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (4.2.3)$$

Квадрат линейного элемента

Бесконечно малое перемещение вдоль координатных линий будет определяться соответственно приращениями \vec{r} вида

$$d\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} dq_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4.2.4)$$

Используя соотношение (4.2.4) и положив, что криволинейная система ортогональна, квадрат линейного элемента запишем в виде

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)^2 dq_k^2 = \sum_{k=1}^3 H_k^2 dq_k^2, \quad (4.2.5)$$

где

$$H_k(q_1, q_2, q_3) = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2}. \quad (4.2.6)$$

коэффициенты Ламэ.

Элементарное перемещение вдоль координатных осей q_1 ($q_2=\text{const}$, $q_3=\text{const}$), q_2 ($q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$), q_3 ($q_1=\text{const}$, $q_2=\text{const}$) определяется соотношением

$$ds_k = H_k dq_k \quad (k=1, 2, 3). \quad (4.2.7)$$

Проекция вектора скорости и вектора массовой силы на оси криволинейной системы

Уравнения движения идеальной жидкости проекция на оси, определяемые в каждой точке единичными векторами $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ можно получить, если известны проекции всех членов уравнения (4.1.2) на эти оси. Так как эти оси ортогональны, то, обозначив проекции вектора скорости соответственно v_k ($k=1, 2, 3$), запишем

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \vec{i}_k. \quad (4.2.8)$$

Отсюда, так как \vec{i}_k в каждой точке не меняются с течением времени, то

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial t} \vec{i}_k. \quad (4.2.9)$$

Подобно (4.2.8) вектор \vec{F} можно представить через его проекции на \vec{i}_k в виде

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^3 F_k \vec{i}_k. \quad (4.2.10)$$

Основные операции векторного исчисления в криволинейных ортогональных координатах

Так как проекция вектора $\text{grad } C$ на какое-либо направление есть производная от C в этом направлении, то, обращаясь к формуле (4.2.7), запишем

$$\text{grad } C = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial C}{H_k \partial q_k} \vec{i}_k. \quad (4.2.11)$$

Формальные операции позволяют вычислить $rot \vec{b}$ и $div \vec{b}$ ($\vec{b} = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{i}_k$) в криволинейных координатах

$$\begin{aligned} rot \vec{b} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial H_3 b_3}{\partial q_2} - \frac{\partial H_2 b_2}{\partial q_3} \right) \vec{i}_1 + \\ &+ \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial H_1 b_1}{\partial q_3} - \frac{\partial H_3 b_3}{\partial q_1} \right) \vec{i}_2 + \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_2 b_2}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1 b_1}{\partial q_2} \right) \vec{i}_3; \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$div \vec{b} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (b_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (b_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (b_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (4.2.13)$$

Положив в последнем равенстве $b = grad \varphi$, найдем выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right). \quad (4.2.14)$$

Уравнения движения идеальной жидкости в криволинейных

Уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки-Ламба (4.1.9) в проекциях на направления $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ ортогональной криволинейной системы координат на основании равенств (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10) и (4.2.11) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2} - (v_2 \Omega_3 - v_3 \Omega_2) &= F_1 - \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1}; \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2} - (v_3 \Omega_1 - v_1 \Omega_3) &= F_2 - \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2}; \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2} - (v_1 \Omega_3 - v_3 \Omega_1) &= F_3 - \frac{1}{\rho H_3} \frac{\partial p}{\partial q_3}, \quad (4.2.15)
\end{aligned}$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ — составляющие вектора завихренности $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}$, определяемые формулой (4.2.12). Подставив $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ в (4.2.15) и произведя преобразование членов, придем к системе уравнений движения в криволинейных координатах вида

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_k}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_k}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_k}{\partial q_3} + \\
&+ \frac{v_k}{H_k} \left(\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial H_k}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial H_k}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial H_k}{\partial q_3} \right) - \\
&- \frac{1}{H_k} \left(\frac{v_1^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} + \frac{v_2^2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_k} + \frac{v_3^2}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_k} \right) = \\
&= F_k - \frac{1}{\rho H_k} \frac{\partial p}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, 3).
\end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Уравнение неразрывности (4.1.2) в криволинейных координатах на основании (4.2.13) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial H_2 H_3 \rho v_1}{\partial q_1} + \frac{\partial H_1 H_3 \rho v_2}{\partial q_2} + \frac{\partial H_1 H_2 \rho v_3}{\partial q_3} \right) = 0. \quad (4.2.17)$$

4.3. Уравнения движения жидкости в неинерциальной системе координат

Используя теорему Кориолиса, уравнение Эйлера в неинерциальной системе координат запишем в виде

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \vec{a}_{\text{неп}} - 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}, \quad (4.3.1)$$

где

$$\vec{a}_{\text{неп}} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_0 \times \vec{r} + \vec{\omega}_0(\omega_0 \vec{r}) - \vec{r}\omega^2; \quad (4.3.2)$$

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ - соответственно радиус-вектор, скорость и ускорение частицы жидкости в неинерциальной системе координат, $\vec{a}_0, \vec{\omega}_0, \vec{\varepsilon}_0$ — соответственно ускорение начала координат, угловая скорость и ускорение неинерциальной системы координат относительно инерциальной.

В форме Громеки-Ламба уравнение (4.3.1) приобретает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \vec{a}_{\text{неп}} - 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}. \quad (4.3.3)$$

Уравнение неразрывности в неинерциальной системе отсчета имеет тот же вид, что и в инерциальной системе.

4.4. Интегралы уравнений движения

Об упрощении уравнений гидродинамики

Уравнения движения идеальной жидкости не интегрируются в общем виде. Однако в некоторых частных предположениях о массовых силах и характере движения удастся проинтегрировать уравнения движения жидкости в инерциальной системе координат или получить их первые интегралы. Эти интегралы аналогичны теореме о кинетической энергии ньютоновской механики. В гидродинамике они играют столь же существенную роль, как и в механике твердого тела, так как позволяют значительно упростить математическую сторону поставленных задач.

Интеграл Бернулли

Сделаем следующие предположения относительно движущейся жидкости:

1) жидкость идеальна. Следовательно, ее движение можно описать уравнением Громеки-Ламба;

2) движение жидкости установившееся. Это значит, что все переменные, входящие в уравнения движения, не зависят от времени t ;

3) массовые силы, действующие в жидкости, принадлежат к потенциальному силовому полю, т. е. $\vec{F} = \text{grad}U$;

4) жидкость баротропна, т. е. $\rho = f(p)$.

В сделанных предположениях уравнение Громеки-Ламба принимает следующий вид

$$\text{grad} \frac{v^2}{2} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = \text{grad}U + \text{grad} \int \frac{dp}{\rho},$$

или

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U \right) = \vec{v} \times \vec{\Omega}.$$

Умножим полученное уравнение скалярно на элементарное перемещение $d\vec{r} = \vec{v}dt$ вдоль линии тока. Тогда, так как движение установившееся, получим

$$d \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U \right) = 0.$$

Дифференциал взят при перемещении вдоль линии тока, следовательно,

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = C_l, \quad (4.4.1)$$

где C_l — постоянная для данной линии тока; она вообще меняется при переходе от одной линии к другой.

Полученное соотношение носит название интеграла Бернулли.

Если плотность постоянна и массовые силы есть силы тяжести, то направив ось z вертикально вверх, найдем

$$U = -gz.$$

Тогда интеграл Бернулли приобретает вид

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_n,$$

или

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = C_e. \quad (4.4.2)$$

Размерность всех членов, входящих в последнее выражение, есть размерность длины.

Первый член z в уравнении (4.4.2) есть высота жидкой частицы линии тока над некоторой основной горизонтальной плоскостью; она носит название *геометрической высоты*. Вто-

рой член $\frac{v^2}{2g}$ есть та высота, на которую поднимается в пустоте

материальная точка, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью v . Эта высота носит название *скоростной высоты*. Третий член есть высота покоящегося столба жидкости, имеющего у основания давление p . Эта высота называется *пьезометрической высотой*.

Следовательно, интеграл Бернулли заключается в том, что *сумма высот геометрической, скоростной и пьезометрической вдоль линии тока остается величиной постоянной*.

Если жидкость покоится, то равенство (4.4.2) приводится к виду

$$z_1 = \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}, \quad (4.4.3)$$

где z_1 и z_2 — координаты двух произвольных точек жидкости; p_1, p_2 — давления в этих точках.

Суммы, входящие в последнее равенство, вида

$$z + \frac{P}{\rho g} = h,$$

называются *пьезометрическим напором*.

Интеграл Коши

Перейдем к рассмотрению второго интеграла уравнений движения. Он справедлив при следующих предположениях относительно движущейся жидкости:

- 1) жидкость идеальна;
- 2) движение потенциально, т. е. вектор завихренности равен нулю:

$$\vec{\Omega} = 0, \text{ откуда } \vec{v} = \text{grad}\phi,$$

- 3) жидкость баротропна. Следовательно, $\rho = f(p)$ Так как

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\phi = \text{grad} \frac{\partial p}{\partial t},$$

то в сделанных предположениях уравнение Громеки -Ламба приобретает вид

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = \vec{F}.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае движение возможно только, если массовые силы, действующие в жидкости, обладают потенциалом, т. е.

$$\vec{F} = \text{grad}U.$$

Таким образом, окончательно уравнение Громеки-Ламба будет иметь вид

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U \right) = 0.$$

Но так как градиент некоторой функции, зависящей от x, y, z, t , равен нулю, значит, что функция, стоящая под знаком градиента, зависит только от t , т. е.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = f(t), \quad (4.4.4)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

Полученное соотношение носит название *интеграла Коши*. Присоединив к уравнению (4.4.4) уравнение неразрывности, которое при сделанных предположениях будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{g} \text{ rad } \phi = 0, \quad (4.4.5)$$

и уравнение состояния

$$\rho = f(p), \quad (4.4.6)$$

получим систему трех уравнений для трех неизвестных ϕ, ρ и p . Таким образом, уравнения задачи о движении жидкости значительно упрощаются по сравнению с их общим видом.

Интеграл Бернулли-Эйлера

Предположим, что одновременно выполняются условия интегралов Бернулли и Коши, а именно, пусть: 1) жидкость идеальна; 2) движение установившееся; 3) движение потенциально; 4) жидкость баротропа; 5) внешние силы принадлежат потенциальному силовому полю. Тогда из уравнения Громеки-Ламба получим интеграл уравнения движения вида

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = C, \quad (4.4.7)$$

где

$$v^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2.$$

Равенство (4.4.7) называется *интегралом Бернулли—Эйлера*. Постоянная C в этом интеграле сохраняет одно и то же значение для всех частиц движущейся жидкости.

Присоединив к интегралу Бернулли-Эйлера уравнение состояния $\rho = f(p)$, и уравнение неразрывности, которое в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\operatorname{div}\rho\operatorname{grad}\phi = 0, \quad (4.4.8)$$

получим систему уравнений для определения ϕ , ρ и p .

Особенно простой вид приобретают уравнения, описывающие движение жидкости, если к условиям существования интеграла Бернулли-Эйлера добавить еще условие несжимаемости жидкости. Действительно, в этом случае интеграл (4.4.7) будет иметь вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = C. \quad (4.4.9)$$

В частном случае, если внешними силами, действующими на жидкость, будут силы тяжести, (4.4.9) запишется в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C.$$

Для потенциальных движений несжимаемой жидкости уравнение неразрывности обращается в уравнение Лапласа

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \Delta\phi = 0, \quad (4.4.10)$$

которое служит для определения p при заданных граничных условиях. Уравнение (4.4.9) используется для нахождения давления в жидкости при заданных U и значениях скорости и давления в какой-либо точке жидкости.

Значительное упрощение исходных уравнений, описывающих движение идеальной жидкости в случаях, когда имеют место интегралы уравнений движения, открывает широкие возможности для решения конкретных частных задач гидродинамики. Простейшие задачи такого рода рассматриваются в конце настоящего параграфа.

Интеграл Бернулли-Эйлера в неинерциальной системе координат

Рассмотрим движение жидкости в неинерциальной системе координат, которая движется относительно инерциальной системы поступательно с ускорением \vec{a}_0 ($\omega_0 = \varepsilon_0 = 0$). Предположим, что по отношению к движущейся жидкости выполняются условия, при которых справедлив интеграл Бернулли—Эйлера.

Тогда согласно равенству (4.3.3) уравнение движения жидкости будет

$$\text{grad} \frac{v^2}{2} = F - \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} - \vec{a}_0. \quad (4.4.11)$$

Так как рассматривается движение установившееся, то следует положить, что $\vec{a}_0 = \text{const}$. Тогда \vec{a}_0 можно записать в виде

$$\vec{a}_0 = \text{grad}(\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) = \text{grad}(a_{0x}x + a_{0y}y + a_{0z}z). \quad (4.4.12)$$

Следовательно, (4.4.11) можно переписать в виде

$$\text{grad} \left[\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) \right] = \vec{F}. \quad (4.4.13)$$

Из этого равенства заключаем, что рассматриваемое движение имеет место только, если внешние силы обладают потенциалом $F = \text{grad } U$. Итак, имеем равенство

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) - U = \text{const} , \quad (4.4.14)$$

т. е. справедлив интеграл уравнения движения, который можно назвать интегралом Бернулли-Эйлера в неинерциальной системе координат. Присоединив к этому уравнению уравнения неразрывности и состояния

$$\text{div} \rho \text{grad} \phi = 0; \rho = f(p). \quad (4.4.15)$$

получим систему уравнений для определения ϕ , ρ и p .

Пьезометр

Прибор, позволяющий определить давление жидкости, текущей по трубам, на стенку трубы, называется *пьезометром*. Этот прибор представляет собой полую трубку, вмонтированную в стенку трубы (рис. 4.1).

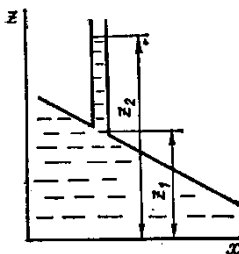


Рис. 4.1.

Пусть высота жидкости в трубке, считая от ее основания, равна $h = z_2 - z_1$. Так как трубка открыта, то на высоте z_2 давление в жидкости равно атмосферному p_0 . В основании трубки

на уровне z_1 давление p будет соответствовать давлению жидкости, которое она оказывает на стенку. Полагая, что жидкость идеальна, несжимаема и находится только под действием силы тяжести, применяем уравнение (4.4.7) к покоящейся в трубке жидкости

$$\frac{p}{\rho} + gz_1 = \frac{p_0}{\rho} + gz_2.$$

Так как атмосферное давление p_0 известно, известна разность $z_2 - z_1$ определяющая высоту жидкости в трубке, то последнее равенство позволяет найти пьезометрический напор движущейся по трубе жидкости.

Давление жидкости на стенку в области, где монтируется пьезометр, определяется соотношением

$$p = p_0 + g\rho(z_2 - z_1).$$

4.5. Теоремы о сохраняемости потенциальных и вихревых движений

Теорема Томпсона

Одной из существенных характеристик общего случая движения идеальной жидкости являются вихревые линии, имеющие определенную конфигурацию в каждый данный момент времени. Рассмотрим вопрос о поведении вихревых линий с течением времени. Как указывалось, вихревые линии тесно связаны с понятием циркуляции скорости. Поэтому изучение поведения вихревых линий начнем с установления теоремы о циркуляции скорости.

Ограничимся рассмотрением идеальной баротропной жидкости, находящейся под действием массовых сил, принадлежащих к потенциальному силовому полю. Тогда

$$\rho = f(p) \text{ и } \vec{F} = \text{grad}U,$$

где ρ и p - соответственно плотность и давление в жидкости, U — силовая функция.

Пусть линия, состоящая из жидких частиц в момент t , занимает положение AB . В момент времени t' эти же жидкие частицы займут новое положение по линии $A'B'$.

Подсчитаем циркуляции скорости в момент t по линии AB и в момент t' по линии $A'B'$ соответственно

$$\tilde{A} = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \tilde{A}' = \int_{A'B'} \vec{v}' \cdot d\vec{s}',$$

где \vec{v} — скорость частиц жидкости для момента t ; \vec{v}' — то же, для момента t' .

Согласно последним равенствам изменение циркуляции скорости с течением времени будет

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{A}' - \tilde{A}}{\Delta t} (\Delta t = t' - t).$$

Каждую из выбранных частиц, составляющих в момент t кривую AB или в момент t' кривую $A'B'$, можно характеризовать некоторым параметром τ . Например, в качестве τ можно выбрать длину дуги кривой A_0B_0 , вдоль которой были расположены рассматриваемые частицы в некоторый начальный момент. Заметим, что параметр τ играет здесь роль лагранжевых переменных a, b, c .

Итак, радиусы-векторы частиц можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(\tau, t),$$

где τ и t являются независимыми переменными.

Теперь циркуляцию скорости по дуге AB можно записать в виде

$$\tilde{A} = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau.$$

Так как τ и t — независимые переменные, то при дифференцировании Γ по t надо $d\tau$ рассматривать как величину постоянную. Следовательно,

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \right) d\tau = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} + \int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial \tau} d\tau.$$

Но, по определению вектора скорости, имеем

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}(\tau, t) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial \tau} = \frac{d\vec{v}(\tau, t)}{d\tau},$$

по определению вектора ускорения запишем

$$\frac{\partial v(\tau, t)}{\partial t} = \vec{a}(\tau, t).$$

Отсюда

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau + \int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} d\tau.$$

Первый член правой части этой формулы представляет собой циркуляцию от ускорения и его можно записать в виде

$$\int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{a} \cdot d\vec{s}.$$

Используя формулу $d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v}d\vec{v}$, имеем

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial \tau} d\tau.$$

Тогда

$$\int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{\partial v^2}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2).$$

Итак, возвращаясь к исходной формуле, получаем

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \vec{a} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2).$$

Если контур AB представляет собой замкнутую линию, то точки A и B совпадают и последнее соотношение приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{a} \cdot d\vec{s}.$$

Отсюда имеем следующую теорему: *производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому контуру, проведенному в жидкости, равна циркуляции ускорения по тому же контуру.*

Используем теперь условия, что жидкость баротропна и массовые силы имеют потенциал. Согласно уравнению Эйлера запишем

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right).$$

Отсюда производная по времени от циркуляции скорости может быть записана в виде

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = \oint \text{grad} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right) \cdot d\vec{s}.$$

Но

$$\text{grad} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right) \cdot d\vec{s} = d \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right).$$

И

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = 0.$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$\tilde{A} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \text{const.}$$

Полученное соотношение составляет теорему Томсона, которая гласит: *если жидкость идеальна баротропна и массовые силы имеют потенциал, то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, проведенному в жидкости, во все время движения остается неизменной.*

Теорема Лагранжа

Укажем важное следствие теоремы Томсона. Предположим, что в какой-то начальный момент времени в некоторой части жидкости не имелось вихрей. Тогда поток вектора завихренности через любую поверхность, проведенную в этой части жидкости, равен нулю, т.е.

$$\int_{\sigma} \Omega_n d\sigma = 0.$$

Но

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\sigma} \Omega_n d\sigma.$$

Следовательно, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, проведенному в завихренной в данный момент части жидкости, равна нулю. Применяя теорему Томсона, имеем, что в любой момент в этой части жидкости циркуляция по замкнутому контуру равна нулю, или эта часть жидкости во все время остается завихренной. Этот результат составляет содержание теоремы Лагранжа, которую можно еще формулировать в виде: *если жидкость идеальна баротропна, массовые силы имеют потенциал и в начальный момент времени движение обладало потенциалом скорости, то оно будет обладать потенциалом скорости и во все время движения.*

Итак, нами доказана теорема о сохраняемости потенциальных движений жидкости.

Первая теорема Гельмгольца

Докажем, используя предыдущие результаты, две теоремы о сохранении вихревых движений или о сохранении вихревых линий и трубок.

Пусть по-прежнему жидкость идеальна баротропна и пусть массовые силы имеют потенциал. В момент времени t проведем в жидкости какую-либо кривую и через каждую точку ее вихревые линии. Это возможно сделать, если первоначальная кривая не является вихревой линией. Указанная совокупность вихревых линий образует так называемую вихревую поверхность, которую обозначим σ . Циркуляция по любому контуру L , проведенному на этой поверхности, равна нулю, так как

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\sigma} \Omega_n d\sigma = 0,$$

и нормальная составляющая вихря Q_n равна нулю, так как лежит в касательной к поверхности плоскости. По теореме Томсона циркуляция по выбранному контуру остается неизменной с течением времени. В рассматриваемом случае эта циркуляция будет равна нулю. Следовательно, для всех контуров, расположенных на вихревой поверхности в момент t , циркуляция будет нулем. В любые другие моменты циркуляция по этим контурам остается равной нулю, а это значит, что эти контуры расположены все время на вихревой поверхности. Отсюда имеем следующий результат: *частицы жидкости, составляющие в некоторый момент времени вихревую поверхность, будут во все время образовывать вихревую поверхность.*

Пусть частицы образуют в некоторый момент t вихревую линию. Эту линию можно рассматривать как пересечение двух вихревых поверхностей в тот же момент. В другой момент t_1 частицы, которые в момент времени t располагались на вихревых поверхностях, снова будут образовывать другие вихревые поверхности, причем частицы, расположенные на линии пересечения этих поверхностей в момент t , в момент t_1 будут образовывать снова линию пересечения вихревых поверхностей.

Итак, вихревые линии сохраняются в течение времени. Этот результат можно сформулировать в виде первой теоремы, принадлежащей Гельмгольцу: *если жидкость идеальна, баротропна и массовые силы имеют потенциал, то частицы жидкости, образующие в некоторый момент времени вихревую линию, будут образовывать вихревую линию и во все время движения жидкости.*

Эта теорема выражает свойство сохраняемости вихревых линий. Из этой теоремы следует, что при тех же условиях любая вихревая трубка во все время своего движения будет оставаться вихревой трубкой, ибо она ограничена вихревыми линиями, которые сохраняются с течением времени.

Вторая теорема Гельмгольца

Докажем теперь вторую теорему Гельмгольца, которая гласит: *если жидкость идеальна, баротропна и массовые силы имеют потенциал, то интенсивность любой вихревой трубки во все время движения жидкости остается постоянной.*

Напомним, что интенсивность вихревой трубки определяется циркуляцией по контуру, охватывающему один раз вихревую трубку, т. е. интенсивность равна

$$\tilde{A} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Но циркуляция по замкнутому контуру остается неизменной по теореме Томсона, следовательно, и интенсивность вихревой трубки остается постоянной с течением времени. Вторая теорема Гельмгольца таким образом доказана.

Из теорем Гельмгольца вытекает, что образование вихревых линий и трубок в жидкости возможно только в случае, если плотность ρ не является функцией давления или внешние силы не имеют потенциала.

Образование вихревых линий в жидкости может быть результатом вязкости жидкости.

Вихревые линии в природе и в идеальной жидкости

Результаты настоящего параграфа показывают, что в идеальной, баротропной жидкости, в которой действуют массовые силы, обладающие потенциалом, не могут образовываться вихревые нити и трубки. Однако следует отметить, что возникновение вихревых трубок и вихревых линий в жидкости есть явление, весьма распространенное в природе. Действительно, в реках за быками мостов образуют ярко выраженные дискретные вихревые линии, перпендикулярные к поверхности реки. Такие же вихри образуются за веслами лодки, за моторными лодками и кораблями. В атмосфере Земли возникают циклоны и антициклоны, которые с гидродинамической точки зрения представляют собой вихревые образования. Особенно ярким примером вихревой нити могут служить смерчи, которые возникают в земной атмосфере.

Теория движения идеальной жидкости, благодаря своей относительной простоте, позволяет разрешить значительное количество конкретных задач.

Чтобы эти задачи имели практическую ценность, в ряде случаев следует ввести в идеальную жидкость вихревые линии и вихревые трубки, подчинив их тем или иным физическим условиям. Заметим, что присутствие вихревых нитей в идеальной жидкости не противоречит общим уравнениям движения и исследованиям настоящего параграфа.

Введение вихрей в идеальную жидкость в большинстве случаев есть своеобразный учет вязкости жидкости. Значительная роль вихревых нитей в разрешении практических задач выдвигает перед теорией важный вопрос о том, какие движения в идеальной жидкости вызываются наличием в ней областей, завихренность которых отлична от нуля.

РАЗДЕЛ 5

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

5.1. Экспериментальный закон Ньютона

В реальных жидкостях при относительном движении ее отдельных слоев возникают силы, препятствующие этому движению. Такие силы называются силами трения или сдвигающими напряжениями. Если эти силы незначительны и ими можно пренебречь, то движение среды описывается уравнениями идеальной жидкости, которое и рассматривалось в предыдущих главах. Однако в ряде случаев силами трения пренебрегать нельзя. Жидкости, при движении которых учитываются силы трения, называются вязкими. Уравнениям движения вязких жидкостей и некоторым примерам их применения посвящена настоящая глава.

Чтобы получить уравнения, описывающие движение вязких жидкостей, необходимо к уравнениям движения в напряжениях присоединить дополнительные выражения, связывающие напряжения с кинематическими характеристиками движения.

Экспериментальный закон Ньютона устанавливает следующую зависимость: при движении жидкости вдоль оси x касательное напряжение p_{yx} , приложенное к площадке, перпендикулярной x , определяется формулой

$$p_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (5.1.1)$$

где μ — динамическая вязкость (первый коэффициент вязкости), имеющий постоянное значение для определенной жидкости и при определенной температуре.

Предположим, что жидкость изотропна и в предельном случае отсутствия вязкости выполняется условие идеальности жидкости:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p;$$

$$p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0.$$

Тогда имеет место обобщенный закон Ньютона, связывающий тензор напряжения Π , тензор скоростей деформации Φ и единичный тензор I

$$\Pi = \left[-p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] I + 2\mu \Phi, \quad (5.1.3)$$

где λ называется вторым коэффициентом вязкости.

Если сжимаемость среды не существенна, то $\lambda = 0$. В дальнейшем ограничимся только случаями, когда $\lambda = 0$, тогда из формулы (5.1.3) следуют соотношения

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \\ p_{yy} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{v} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ p_{zz} &= -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{v} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ p_{xy} &= p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ p_{yz} &= p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \\ p_{zx} &= p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

В ряде случаев удобнее вводить вместо коэффициента μ величину μ/ρ (где ρ — плотность жидкости). Эта величина обозначается

$$\nu = \mu / \rho \quad (5.1.5)$$

и называется кинематической вязкостью.

При температуре $t = 0^\circ\text{C}$ для воды имеем $\nu = 0,018 \text{ см}^2/\text{сек}$; для воздуха $\nu = 0,133 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Уравнение Навье-Стокса

Обращаясь к уравнениям движения сплошных сред в напряжениях (3.5) и используя равенства (5.1.4), запишем уравнение движения вязкой изотропной жидкости в векторной форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\nu}{3} \text{grad} \text{div} \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (5.1.6)$$

Это соотношение называется уравнением Навье—Стокса.

Уравнение неразрывности для вязкой жидкости сохраняет свой прежний вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (5.1.7)$$

Уравнения (5.1.6) и (5.1.7), к которым добавляется уравнение физического состояния жидкости, связывающее давление и плотность, л качестве неизвестных содержат вектор \vec{v} и скаляры p и ρ .

Подобно тому, как это было выполнено для идеальной жидкости, можно преобразовать уравнение Навье — Стокса (5.1.6) так, чтобы в левую часть его в явном виде входил вектор завихренности Ω . Тогда уравнение движения вязкой жидкости будет иметь вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\Omega \vec{v}] + \text{grad} \frac{v^2}{2} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\nu}{3} \text{grad} \text{div} \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (5.1.6')$$

Если жидкость несжимаема, то уравнение движения вязкой жидкости, как следует из формул (5.1.6) и (5.1.6'), будет вида

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (5.1.8)$$

или

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\vec{\Omega} \vec{v}] + \text{grad} \frac{v^2}{2} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}. \quad (5.1.8')$$

Уравнение неразрывности (5.1.7) для несжимаемой жидкости приобретает вид

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (5.1.5)$$

Неизвестными в уравнениях (5.1.8) и (5.1.5) будут v и p , которые из них определяются при заданных начальных и граничных условиях.

Начальные условия при движении вязкой жидкости будут такими же, как и для идеальной жидкости. Например, при движении вязкой несжимаемой жидкости в начальный момент ($t = 0$) следует задать поле скоростей и поле давлений как известные функции координат f_1 и f_2 , т. е.

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, y, z, 0) &= f_1(x, y, z); \\ p(x, y, z, 0) &= f_2(x, y, z). \end{aligned}$$

Граничные условия вязкой жидкости в ряде случаев будут отличаться от соответствующих граничных условий идеальной жидкости. Например, на твердой неподвижной стенке частицы жидкости будут прилипать. Это значит, что равняться нулю должна не только нормальная к стенке составляющая вектора скорости частиц жидкости, соприкасающаяся со стенкой (как это было в случае идеальной жидкости), но и касательная к стенке, составляющая вектора скорости.

На свободной поверхности вязкой жидкости принимается, что касательное напряжение равно нулю, а нормальное напряжение равно постоянному давлению среды, с которой граничит жидкость. Следует заметить, что изучение движения вязкой жидкости является задачей более сложной, чем изучение движения идеаль-

ной жидкости, не только потому, что уравнение Навье — Стокса сложнее уравнений Эйлера, но и потому, что в ряде случаев имеют место более сложные граничные условия. Сказанное иллюстрируется далее.

О невозможности потенциальных движений вязкой жидкости

Потенциальные течения жидкости имеют хорошо развитый математический аппарат и используются для решения многих практических задач. Поэтому естественно сделать такое же предположение и в случае движения вязкой жидкости. Итак, положим, что

$$\Omega=0$$

или

$$\vec{v} = grad\phi,$$

тогда уравнение неразрывности приводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\phi=0,$$

в силу которого член, характеризующий вязкость в уравнении движения, обращается в нуль, т. е.

$$\lambda\Delta\vec{v} = \nu grad\Delta\phi = 0.$$

Уравнение движения вязкой жидкости обращается в уравнение движения идеальной жидкости вида

$$grad\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{F},$$

из которого следует, что такое движение возможно только в случае сил, принадлежащих потенциальному силовому полю, т. е.

$$\vec{F} = gradU.$$

Следовательно, уравнение движения жидкости приводится к интегралу Коши

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = f(t),$$

и задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа и определению давления из интеграла Коши.

Отличие движения вязкой жидкости от идеальной в рассматриваемом случае будет заключаться только в разной формулировке граничных условий. Действительно, на неподвижной твердой стенке в случае течения идеальной жидкости ставится только условие равенства нулю нормальной к стенке составляющей скорости, т. е.

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0.$$

Для вязкой же жидкости на твердой стенке ставится условие равенства нулю как нормальной, так и касательной составляющих вектора скорости, т. е.

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, v_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0.$$

Этим условиям не могут удовлетворить решения уравнения Лапласа. Таким образом, сделанное предположение о потенциальности движения вязкой жидкости противоречит граничным условиям и, следовательно, не существует потенциальных движений вязкой жидкости, особенно в непосредственной близости к твердым стенкам.

Таким образом, изучение движения вязкой жидкости сложнее изучения движения идеальной жидкости и вследствие более сложных уравнений, и вследствие усложнения граничных условий.

Сложность изучения различных задач о движении вязкой жидкости столь велика, что только в случае сравнительно небольшого числа частных задач удается проинтегрировать уравнения

движения при заданных граничных и начальных условиях. Вследствие этого при решении ряда задач, выдвигаемых практикой, приходится обращаться к эксперименту и ставить вопрос о критерии моделирования течения. Последний решается теоретическим путем, как это будет показано в следующем параграфе.

Кроме того, изучение движения вязкой жидкости можно успешно осуществить, если воспользоваться приближенными уравнениями движения вязкой жидкости. При использовании тех или иных приближенных уравнений движения вязкой жидкости важно указать область их применимости.

Основные приближенные уравнения движения вязкой жидкости рассматриваются в последних параграфах настоящей главы.

Уравнение Навье — Стокса описывает так называемые ламинарные течения жидкости, которые характерны тем, что отдельные слои течения не смешиваются. Однако в природе существуют течения, характерные резким перемешиванием отдельных частиц различных слоев. Такие течения описываются средними значениями скоростей, давлений, плотности и называются турбулентными. Уравнение Навье — Стокса служит базой для получения уравнений турбулентных течений.

5.2. Критерии подобия

Уравнения движения в безразмерных величинах

Остановимся на уравнении движения вязкой несжимаемой жидкости (5.1.8) и преобразуем его так, чтобы в него входили только безразмерные величины. Для этого введем характерные для каждого течения длину L_0 , скорость v_0 , давление p_0 , время T_0 и силу g_0 , приходящуюся на единицу массы. Примером этих величин могут служить в случае обтекания цилиндра: диаметр цилиндра L_0 , скорость невозмущенного потока v_0 (или скорость в бесконечности), давление невозмущенного потока p_0 (или давление в бесконечности), период срыва вихрей с поверхности цилиндра T_0 и сила тяжести g_0 , действующая в потоке жидкости на единицу массы.

Введенные характерные величины можно рассматривать как масштабы длины, скорости, давления, времени и силы. Все переменные размерные величины, входящие в уравнение движения, при этом можно представить, как произведение характерных масштабов на безразмерные величины. Обозначив безразмерные величины соответствующих размерных величин буквами с индексом «1», имеем

$$\vec{r} = L_0 \vec{r}_1; \vec{v} = v_0 \vec{v}_1; p = p_0 p_1; t = T_0 t_1; \vec{F} = g_0 \vec{F}_1.$$

Отсюда

$$grad p = \frac{p_0}{L_0} grad p_1; (\vec{v} grad) \vec{v} = \frac{v_0^2}{L_0} (\vec{v}_1 grad) \vec{v}_1.$$

Обозначив постоянное значение плотности через ρ_0 , уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерных величинах запишем в виде

$$\frac{v_0}{T_0} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{v_0^2}{L_0} (\vec{v}_1 grad) \vec{v}_1 = \vec{F}_1 g_0 - \frac{p_0}{\rho L_0} grad p_1 + \frac{\nu v_0}{L_0^2} \Delta v_1. \quad (5.2.1)$$

Уравнение неразрывности в безразмерных величинах для несжимаемой жидкости будет вида

$$div \vec{v}_1 = 0.$$

Числа подобия течений

Разделим уравнение (5.2.1) на v_0^2/L_0 , тогда оно приобретает вид

$$\frac{L_0}{T_0 v_0} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 grad) \vec{v}_1 = \frac{g_0 L_0}{v_0^2} \vec{F}_1 - \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} grad p_1 + \frac{\nu}{v_0 L_0} \Delta \vec{v}_1. \quad (5.2.1')$$

Так же, как и в уравнении (5.2.1), все члены уравнения (5.2.1') будут безразмерными величинами. Множители этого уравнения, составленные из характерных для данного течения величин,

также будут безразмерными. Эти множители носят общее название чисел подобия.

Как следует из уравнения (5.2.1'), чисел подобия будет четыре, и каждое из них носит имя автора, который впервые ввел его в рассмотрение течения:

число, содержащее давление, называется числом Эйлера и обозначается Eu

$$Eu = \frac{P_0}{\rho_0 v_0^2}; \quad (5.2.2)$$

число, в которое входит сила тяжести, называется числом Фруда и обозначается Fr

$$Fr = \frac{v_0^2}{gL_0}; \quad (5.2.3)$$

число, содержащее характерное время, носит название числа Струхали и обозначается St

$$St = \frac{L_0}{T_0 v_0};$$

число, содержащее кинематический коэффициент вязкости, носит название числа Рейнольдса и обозначается Re

$$Ra = \frac{L_0 v_0}{\nu} \quad (5.2.5)$$

Вводя числа Эйлера, Фруда, Струхали и Рейнольдса в уравнение движения (5.2.1'), перепишем последнее в виде

$$St \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 grad) \vec{v}_1 = \frac{\vec{F}_1}{\bar{F}} - Eu grad p_1 + \frac{1}{Re} \Delta v_1. \quad (5.2.1'')$$

Если движение установившееся $\partial v / \partial t = 0$ и если в качестве характерного давления выбрать величину $\rho_0 v_0^2$, которая носит

название скоростного напора, то в уравнении (5.2.1") выпадут числа Струхала St и Эйлера Eu . Тогда уравнение движения для установившихся течений будет иметь вид

$$(\vec{v}_1 grad)\vec{v}_1 = \frac{1}{F} \vec{F}_1 + grad p_1 + \frac{1}{R} \Delta v_1. \quad (5.2.6)$$

Критерии подобия

Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости интегрируются лишь для сравнительно небольшого числа простейших случаев. Поэтому при решении большинства сложных технических задач прибегают к экспериментальным исследованиям.

Экспериментальные исследования проводятся в лабораторных условиях на моделях, выполняемых, как правило, в меньшем масштабе, чем натурные объекты. Эти эксперименты дают возможность выявить на модели наличие каких-либо недостатков в работе объекта и устранить их. Тем самым исследования на модели приводят к значительной экономии.

Моделирование гидромеханических процессов бывает двух типов: **математическое и физическое**. Совокупность уравнений, описывающих определенный физический процесс, называется **математической моделью**. Математическая модель гидромеханического процесса создается обычно на основании наиболее общих законов механики: сохранения массы и энергии. Записывая эти уравнения в виде систем дифференциальных уравнений применительно к изучаемому явлению и, исследуя их, получают информацию о процессах, которые невозможно или достаточно трудно изучать на натуральных объектах. При этом для исследования применяют либо аналитические методы в сочетании с эмпирическими приемами, либо численные, используя вычислительную технику. Широкое применение в инженерную практику персональных ЭВМ дает возможность всестороннего развития математического моделирования сложных гидромеханических процессов.

При физическом моделировании изучаемые гидромеханические процессы воспроизводят на моделях, отличающихся в масштабе от натурны. Процессы будут механически подобны в том случае, если в них одинаково отношение всех геометрических

элементов, отношение плотностей и сил, действующих в соответствующих точках и направлениях, т.е. для полного подобия потоков необходимо их геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Два потока будут **геометрически подобными**, если между их соответствующими линейными размерами существует постоянное соотношение

$$l_H / l_M = a = const,$$

где a - линейный масштаб.

Естественно, что должны быть постоянными соотношения площадей и объемов.

Два потока будут **кинематически подобными** при подобии полей скоростей и ускорений природы и модели, т.е. в сходственных точках скорости и ускорения природы и модели находятся в одинаковых соотношениях

$$\frac{u'}{u''} = \frac{l'/t'}{l''/t''} = \frac{l' t''}{l'' t'} = \frac{a}{a_t} = a_u;$$

$$a_j = \frac{j'}{j''} = \frac{a}{a_t^2} = \frac{a_u^2}{a};$$

где a_u и a_j - масштабы скоростей и ускорений.

Кинематическое подобие обязательно включает в себя геометрическое подобие.

Для **динамического подобия** необходимо, чтобы все силы, действующие в подобных точках модели и природы на частицы жидкости, отличались только масштабным коэффициентом, сохраняя равенство углов, характеризующих направление этих сил.

На любую частицу жидкости в общем случае действуют:

сила тяжести, пропорциональная плотности жидкости ρ , ускорению свободного падения g и объему V (или кубу линейного размера l^3)

$$G = mg = \rho g V \sim \rho g l^3;$$

сила давления, пропорциональная гидродинамическому давлению p и площади s (или квадрату линейного размера l^2)

$$F = ps \sim pl^2;$$

сила трения, пропорциональная вязкости жидкости μ , скорости ее движения u и линейному размеру l

$$T = \mu s du/dh \sim \mu lu.$$

Согласно второму закону Ньютона равнодействующая этих сил численно равна силе инерции

$$I = \rho Vj \sim \rho l^2 u^2.$$

Из условия подобия отношения всех пар сходственных сил природы (с индексом H) и модели (с индексом μ) равны

$$\frac{G'}{G''} = \frac{F'}{F''} = \frac{T'}{T''} = \frac{I'}{I''} = a_F = const,$$

где a_F - масштаб сил.

Величины a_j , a_u , a_F - называются **масштабными множителями**. Их выбор не произволен, так как между ними существует определенная зависимость. Равнодействующие силы, действующие на две сходственные точки жидкости в потоке природы и модели, равны

$$P' = \rho' V' j; P'' = \rho'' V'' j''.$$

Их отношение, выраженное через масштабные множители

$$\frac{P'}{P''} = \frac{\rho' V' j'}{\rho'' V'' j''} = a_F = a_\rho a^3 a_j,$$

где a_ρ - масштабный множитель плотности.

Учитывая, что

$$a_j = \frac{a_u^2}{a},$$

получим

$$a_F = a_\rho a^2 a_u^2,$$

или

$$\frac{a_F}{a_\rho a^2 a_u^2} = 1.$$

Полученную зависимость называют **законом подобия Ньютона в масштабных коэффициентах**. Выражая масштабные множители соответствующими отношениями, получим

$$\frac{P_i}{\rho_i l_i^2 u_i^2} = \frac{P_i}{\rho_i l_i^2 u_i^2},$$

или

$$Ne_H = Ne_M, Ne = idem.$$

Величину Ne называют **критерием Ньютона**. Ее можно представить несколько в другом виде, умножив числитель и знаменатель на l

$$Ne = \frac{Fl}{Mu^2}, \text{ так как } M = \rho l^3.$$

При этом закон подобия Ньютона в физических величинах

$$\frac{P' l'}{M' u'^2} = \frac{P'' l''}{M'' u''^2}.$$

Таким образом, полное гидродинамическое подобие потоков обеспечивается равенством критериев Ньютона модели и природы.

Критерии гидродинамического подобия

Условием полного гидродинамического подобия является равенство отношений всех сил на туре и модели (тяжести, давления, вязкости и т.д.). Вследствие физических **особенностей** полное подобие всех сил осуществить практически невозможно. Поэтому устанавливают критерии подобия для частных случаев, когда в качестве преобладающей принимается какая-нибудь одна.

Критерий Фруда. Если преобладает действие сил тяжести, должно быть выполнено условие

$$\frac{G_i}{G_i} = \frac{I_i}{I_i} \quad \text{или} \quad \frac{u_i^2}{gl_i} = \frac{u_i^2}{gl_i} = Fr,$$

$$G \approx \rho l^3; \quad I \approx \rho l u^2,$$

где Fr - число Фруда.

Следовательно, геометрически подобные потоки можно считать гидродинамически подобными (при преобладающей силе тяжести), если будут равны числа Фруда для сходственных точек.

Критерий Рейнольдса. При преобладающем действии сил трения необходимо выполнение условия

$$\frac{T_i}{T_i} = \frac{I_i}{I_i}; \quad \dot{O} \approx \mu l u = \rho \nu l u; \quad I \approx \rho l^2 u^2;$$

$$\frac{u_i l_i}{\nu'_i} = \frac{u_i l_i}{\nu_i} = Re.$$

Таким образом, потоки будут гидродинамически подобны при ламинарном или турбулентном режиме движения жидкости, если будут равны числа Рейнольдса для сходственных сечений потоков

$$Re_i = Re_i \text{ или } Re = idem.$$

Критерий Эйлера. Если преобладает действие сил давления, необходимо выполнение условия

$$\frac{p'}{\rho' u'^2} = \frac{p''}{\rho'' u''^2} = Eu,$$

где Eu - критерий Эйлера, который должен быть равен для модели и природы

$$Eu' = Eu'' \text{ или } Eu = idem.$$

Отметим, что при соблюдении критерия Рейнольдса критерий Эйлера выполняется **автоматически**.

Критерий Вебера. При преобладающем действии сил поверхностного натяжения необходимо выполнение условия

$$\frac{\rho_i u_i^2 l_i}{\sigma_i} = \frac{\rho_i u_i^2 l_i}{\sigma_i} = We,$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения; We - критерий Вебера, который должен быть равен для модели и природы

$$We_H = We_M \text{ или } We = idem.$$

Критерий Струхалия. Если преобладает действие сил инерции в условиях неустановившегося движения жидкости, необходимо выполнение условия

$$\frac{u_i t_i}{l_i} = \frac{u_i t_i}{l_i} = St,$$

где St - критерий Струхалия, который должен быть равен для модели и природы.

Критерий Маха. При преобладающем влиянии сжимаемости жидкости (течение газа с большими скоростями) необходимо выполнение условия

$$\frac{u_i}{c_i} = \frac{u_i}{c_i} = M,$$

где c - скорость распространения звука в жидкости, а M - критерий Маха, который должен быть идентичен для модели и натуры

$$M_i = M_i \text{ или } M = idem.$$

Критерий Архимеда. При действии архимедовых сил, возникающих вследствие разности плотностей двух сред, необходимо выполнение условия

$$\frac{g_i l_i (\rho - \rho_{1i})}{u_i^2 \rho_{1i}} = \frac{g_i l_i (\rho - \rho_{1i})}{u_i^2 \rho_{1i}} = Ar,$$

где Ar - критерий Архимеда, который должен быть равен для модели и натуры

$$Ar_i = Ar_i \text{ или } Ar = idem.$$

Критерий Коши. Если преобладает действие упругих сил (гидравлический удар), необходимо выполнение условия

$$\frac{u_i^2 \rho_i}{E_i} = \frac{u_i^2 \rho_i}{E_i} = Co,$$

где E - модуль упругости материала; Co - критерий Коши, который должен быть равен для модели и натуры

$$Co_i = Co_i \text{ или } Co = idem.$$

Метод анализа размерностей

При дальнейшем изложении авторы использовали два подхода. Первый из них – традиционный, который излагается в любом из курсов гидравлики. Вторым – более общий, в нем показано применение метода в различных отраслях науки. Студенты могут выбрать один из них, пропустив при этом второй, без ущерба для изучаемого курса. Естественно, что изучение обоих подходов может только приветствоваться. Итак:

Подход первый

Методы подобия и размерностей тесно связаны между собой, так как оба требуют четкого представления о механизме рассматриваемого явления. Однако для применения теории подобия нужны уравнения, определяющий процесс, а метод анализа размерностей применяется, когда уравнения процесса неизвестны. В основе общей теории размерностей лежит Пи-теорема:

Всякое уравнение, выражающее некоторую физическую закономерность и поэтому не зависящее от выбора системы единиц измерения, связывающее собой N физических величин, среди которых n величин обладают независимыми размерностями, может быть преобразовано в уравнение, связывающее $(N - n)$ независимых безразмерных комплексов, составленных из упомянутых N физических величин.

Суть теоремы заключается в следующем. Пусть W является функцией размерных величин $W = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Можно доказать, что эту зависимость можно заменить критериальным уравнением

$$W = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-n}),$$

где роль переменных играют $(N - n)$ безразмерных величин.

Если основная система состоит из трех единиц (масса, длина и время), то вместо N величин рассматриваемое явление представляется в виде зависимости между безразмерными комплексами этих величин.

Таким образом, в составленном путем логических рассуждений уравнении, размерности величин в правой и левой частях, выраженные через размерности основных физических величин, должны соответствовать друг другу. Рассмотрим использование Пи-теоремы на характерном примере. Пусть необходимо установить зависимость для числа Рейнольдса (см. главу 5).

Исследуемое явление (режим течения жидкости) определяется средней скоростью u , динамической вязкостью μ , плотностью жидкости ρ и диаметром трубопровода d . Искомая зависимость является безразмерной и выражается через функцию Π , зависящую от четырех переменных

$$W = f(u, \mu, \rho, d).$$

В соответствии с Пи-теоремой эту функцию можно выразить безразмерным комплексом $N - 3 = 4 - 3 = 1$, т.е. одной величиной π

$$\pi = u^x \mu^y \rho^z d^k,$$

где x, y, z, k - показатели степени, подлежащие определению.

Заменив величины в последнем уравнении их размерностями, получим

$$M^0 L^0 T^0 = (LT^{-1})^x (ML^{-1}T^{-1})^y (ML^{-3})^z (L)^k.$$

В левой части безразмерная величина π выражена через размерности нулевой степени. Приравнявая показатели степени у одинаковых оснований в левой и правой частях

$$y + z = 0;$$

$$x - y - 3z + k = 0;$$

$$-x - y = 0.$$

Решение этой системы $x = -y$; $x = z$; $x = k$.

Тогда искомая безразмерная функция принимает вид

$$\pi = \left(\frac{u\rho d}{\mu} \right)^m,$$

где m может иметь любое значение, отличное от нуля. Приняв $m = 1$, получаем число Рейнольдса

$$\pi = \text{Re} = \frac{u\rho d}{\mu} = \frac{ud}{\nu}.$$

Даже при наличии полной математической формулировки физической задачи часто не удается найти ее точное или приближенное решение. Так во многом обстоит дело, например, с общей проблемой турбулентности. Она остается неразрешенной многие годы, хотя турбулентные движения описываются теми же уравнениями Навье-Стокса, что и ламинарные. Еще чаще встречаются ситуации, когда имеются лишь качественные представления о физическом явлении, а достаточные для его описания уравнения отсутствуют. Наконец, при выполнении поисковых экспериментальных исследований и при обработке полученных экспериментальных результатов объем необходимых работ бывает велик и желательно его сокращение.

Во всех подобных случаях первую помощь может оказать анализ размерностей и теория подобия. Такой анализ позволяет выявлять закономерности явления, обязанные его независимости от выбора конкретных единиц измерения величин. Измерение физической величины подразумевает сравнение с эталоном - единицей измерения. Все единицы измерения можно поделить (с известной долей условности) на основные и производные. Достаточная (полная) совокупность основных единиц измерения образует систему единиц измерения. В механике известными широко употребляемыми системами единиц измерения являются СГС и СИ. В обеих основными являются единицы длины, массы и времени. В СГС - сантиметр, грамм и секунда, а в СИ - метр, килограмм, секунда. Эти две системы вместе с другими, отличающиеся только величинами основных единиц, образуют класс систем единиц измерения, класс *LMT*. Набор единиц измерения в любой системе

данного класса можно получить, например, из системы единиц СГС, увеличивая их в L , M и T раз соответственно.

Наиболее часто (начиная со школьных учебников) под размерностью понимают выражение производной единицы через основные. Это можно изобразить в виде формулы размерности для любой физической величины a

$$[a] = L^\alpha M^\beta T^\gamma,$$

(иногда "размерностями" подобно тому, как в геометрии, именуют показатели размерности $\alpha\beta\gamma$).

При таком определении размерностью скорости можно считать $см/с$. Однако с равным правом размерностью скорости тогда можно считать и $м/с$, и многие другие выражения с измененными величинами основных единиц измерения (в том же классе систем единиц). Поскольку для анализа физических закономерностей важна независимость их от выбора конкретных единиц измерения, то более удобно под формулой размерности и самой размерностью подразумевать несколько иное.

Размерностью величины будем считать функцию, указывающую на численное изменение величины при изменении в L , M и T раз основных единиц измерения внутри избранного класса (в данном случае класса LMT). Тогда размерность безразмерной характеристики равна единице (показатели размерности обращаются в нуль: $\alpha = \beta = \gamma = 0$), т.е. не меняется при изменении единиц измерения. При таком определении с изменением основных единиц измерения могут меняться численные значения размерных физических величин. В то же время формула их размерности имеет неизменный степенной вид. Размерность тогда отражает правило пересчета производных физических величин при изменении масштабов основных величин, и оно записывается в виде формулы размерности.

То, что формула размерности всегда имеет указанный вид степенного одночлена, является следствием отсутствия предпочтительной системы единиц в данном классе. Действительно, предположим, что формула размерности имеет общий вид

$$[a] = f(L, M, T).$$

При двухэтапном изменении основных единиц измерения $L = L_2 L_1$, $M = M_2 M_1$, $T = T_2 T_1$, эквивалентном одноэтапному полному, получим функциональное соотношение

$$f(L_2, L_1, \dots) = f(L_2 \dots) f(L_1 \dots).$$

Его гладкое решение находится сведением к дифференциальному уравнению, дифференцируя по L_1 и полагая затем $L_1 = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial L} L = \frac{\partial f}{\partial L} \Big|_{L=1} f.$$

Простое интегрирование последнего действительно дает степенную функцию.

В классе систем единиц измерения "СГС, СИ,...", т.е. в классе LMT , основными размерностями являются размерности длины, массы и времени

$$[l] = L, [m] = M, [t] = T,$$

а производными, например, являются размерности скорости, плотности, силы и т.п.

$$[u] = L/T, [\rho] = M/l^3, [f] = ML/T^2, \dots$$

Величину, не меняющуюся при изменении единиц измерения выбранного класса, называют безразмерной.

Предположим, что в некоторой физической зависимости величины a от N определяющих параметров a_1, \dots, a_N

$$a = F(a_1, \dots, a_n, \dots, a_N)$$

n величин имеют независимую размерность. Величины обладают независимыми размерностями, если их размерности не имеют степенных связей между собой. Тогда обсуждаемую физическую зависимость можно представить в несколько другом виде

$$\Pi = \Phi(a_1, \dots, a_n, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-n}),$$

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{\alpha_0}, \dots, a_n^{\gamma_0}}, \quad \Pi_k = \frac{\alpha_k}{a_1^{\alpha_k}, \dots, a_n^{\gamma_k}}, \quad (k = 1, \dots, N-n),$$

причем показатели в комплексах Π , Π_k подбирается так, чтобы комплексы оказались безразмерными. Это можно сделать в силу независимости размерностей всех величин a_1, \dots, a_n и потому же изменением единиц измерения можно добиться обращения в единицы этих a_1, \dots, a_n . Так что в итоге

$$\Pi = f(\Pi_1 \dots \Pi_{N-n}),$$

т.е. имеет место Π - теорема (теорема Букингема):

Физическую закономерность можно выразить в безразмерном виде с числом безразмерных параметров, меньшим числа размерных параметров на число определяющих параметров с независимыми размерностями.

Рассмотрим применение этой теоремы на различных примерах. Первый пример – традиционный.

Пример 1. *Течение вязких несжимаемых жидкостей в трубах.* Ожидаемая общая зависимость между основными размерными характеристиками течения имеет вид (здесь p - давление, u - скорость, d - диаметр трубы, ρ - плотность, μ - динамическая вязкость)

$$\frac{dp}{dx} = F(u, d, \rho, \mu).$$

В классе LMT размерности учитываемых здесь величин есть

$$\left[\frac{dp}{dx} \right] = \frac{M}{L^2 T^2}; [u] = \frac{L}{T}; [\rho] = \frac{M}{L^3}; [\mu] = \frac{M}{LT}; [d] = L; [\eta] = \frac{M}{LT}.$$

Разность чисел определяющих параметров и параметров с независимыми размерностями будет равна единице, так что из них составляется лишь один безразмерный комплекс Re наряду с безразмерным комплексом, включающим искомую величину градиента давления

$$N = 4, n = 3, N - n = 1: \Pi_1 = \frac{\rho u d}{\mu} \equiv Re; \Pi = \frac{d}{\rho u^2} \frac{dp}{d\alpha},$$

и обсуждаемая зависимость преобразуется в соответствии с Π - теоремой к безразмерному виду

$$\Pi \equiv \frac{d}{\rho u^2} \frac{dp}{d\alpha} = f(Re).$$

Тем самым исходная задача отыскания функции четырех переменных $f(u, d, p, \mu)$ сводится к отысканию функции только одной переменной $f(Re)$. Последнюю зависимость называют законом сопротивления.

Пример 2. Спектр локально изотропной турбулентности в равновесном масштабном интервале турбулентных пульсаций. В этом интервале вид спектра энергии пульсаций $E(k)$ определяется ее потоком к малым вязким масштабам, волновым числом k и, вообще говоря, вязкостью ν . Ожидаемая трехпараметрическая зависимость в размерных переменных может быть приведена к

однопараметрической в безразмерных в соответствии с общими связями

$$E(k) = F(\varepsilon, \nu, k), \int_0^{\infty} dk E(k) = \frac{\langle u^2 \rangle}{2},$$

$$2\nu \int_0^{\infty} dk k^2 E(k) = \varepsilon$$

следующим образом:

$$[E] = \frac{L^3}{T^2}; [\varepsilon] = \frac{L^2}{T^3}; [k] = \frac{1}{L}; [\nu] = \frac{L^2}{T}; N = 3; n = 2; N - n = 1,$$

$$\Pi = E\varepsilon^{-2/3}k^{5/3}, \Pi_1 = \nu^3\varepsilon^{-1}k^4; \Pi = f(\Pi_1): E = \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}f(\nu^3k^4/\varepsilon).$$

В частности, в инерционном интервале при $k \rightarrow 0$ (точнее при $k^4 \ll \varepsilon/\nu^3$) получаем результат Колмогорова–Обухова ($E \rightarrow \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}f(0)$) в предположении существования конечного предела $f(0)$.

Пример 3. Теорема Пифагора. С помощью анализа размерностей и подобия получается ее простое доказательство. Для площадей геометрически подобных прямоугольных треугольников, получаемых при опускании перпендикуляра на гипотенузу из вершины прямого угла (ϕ - один из острых углов), имеем

$$S_c = F(c, \phi), [S] = L^2, [c] = L, [\phi] = 1,$$

$$\Pi = \frac{S}{c^2} = f(\phi); S_c = S_a + S_b : c^2 f(\phi) = a^2 f(\phi) + b^2 f(\phi).$$

По сокращении на общий множитель $f(\phi)$ в последней формуле приходим к искомому утверждению.

Пример 4. «Точечный взрыв»: Атомный взрыв как мгновенное точечное сильное выделение энергии E в газе. Для радиуса сильной сферической ударной волны, порождаемой взрывом, можно ожидать временной зависимости типа

$$r = F(E, \rho_0, t).$$

При размерностях и числе основных величин в классе LMT

$$[r] = L; [E] = \frac{ML^2}{T^2}; [\rho_0] = \frac{M}{L^3}; [t] = T:$$

$$N = 3, n = 3, N - n = 0,$$

получим в соответствии с Π - теоремой

$$\Pi = \frac{r}{t^{2/5}} \left(\frac{\rho_0}{E} \right)^{1/5} = const : \ln r = \frac{1}{s} \ln \frac{E}{\rho_0} + \frac{2}{5} \ln t + const.$$

Обрабатывая кадры кинофильма о распространении огненного шара для первого атомного взрыва в атмосфере, Дж. Тейлор оценил по приведенной формуле энергию взрыва в 10^{21} эрг, что хорошо соответствовало секретным в то время данным.

Пример 5. Описание распределения средней скорости в пристеночном турбулентном течении. В установившемся потоке средняя скорость течения у плоской стенки $\langle u \rangle$ может зависеть от расстояния до стенки y , напряжения трения на ней τ и свойств жидкости (плотности ρ и вязкости ν). В частности, для градиента скорости ожидается

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} = f(y, u_*, \rho, \nu), u_* \equiv \sqrt{\tau/\rho}.$$

В классе LMT имеем для размерностей учитываемых характеристик

$$\left[\frac{d\langle u \rangle}{dy} \right] = \frac{1}{L}; [y] = L, [u_*] = \frac{L}{T}, [v] = \frac{L^2}{T}, [\rho] = \frac{M}{L^3},$$

так что в соответствии с

$$N = 4, n = 3, N - n = 1$$

имеем безразмерную однопараметрическую зависимость

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} = \frac{u_*}{y} F\left(\frac{u_* y}{v}\right).$$

На малых расстояниях от стенки в вязком "подслое", где можно ожидать достаточно плавного почти ламинарного течения с постоянным средним градиентом (реально оно нарушается относительно непродолжительными «взрывами»)

$$\langle u \rangle \approx \frac{u_*}{v} y, \quad y \ll \frac{v}{u_*}.$$

На больших расстояниях от стенки при $y \gg v/u_*$ естественно ожидать независимости разности скоростей в двух далеких точках и среднего градиента скорости от вязкости,

$$F\left(\frac{u_* y}{v}\right) \rightarrow F(\infty) = A,$$

и, следовательно, логарифмического распределения самой скорости

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = A \ln \frac{yu_*}{v} + B.$$

Пример 6. *Гравитационные поверхностные волны малой амплитуды в глубокой идеальной жидкости.* Скорость (фазовая) распространения плоской гравитационной волны может зависеть от ее высоты (амплитуды a), волнового числа k , ускорения силы тяжести и плотности жидкости, так что при общей ожидаемой зависимости

$$c = F(a, k, \rho, g)$$

в силу соображений анализа размерностей получим

$$[c] = \frac{L}{T}; [a] = L; [k] = \frac{1}{L}; [\rho] = \frac{M}{L^3}; [g] = \frac{L}{T^2}; N = 4; n = 3:$$

$$N - n = 1, c \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} f(ka) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \sqrt{\frac{g}{k}} f(0).$$

Из аналитического решения задачи теории гравитационных волн малой амплитуды на глубокой воде известно, что $f(0) = 1$. Для групповой скорости волн на глубокой воде получается

$$c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(kc) = \frac{1}{2}c,$$

т.е. пакеты волн распространяются медленнее отдельных гребней.

Точечное мгновенное воздействие создает кольцевые волны, радиус гребней (и впадин) которых растет со временем в соответствии с простыми ожиданиями

$$r = F(g, t, \rho), [r] = L; [g] = \frac{L}{T^2}, [t] = T, [\rho] = \frac{M}{L^3}.$$

$$N = n = 3; r = Agt^2, A = \text{const.}$$

Значения модуля волнового вектора k распространяются с групповой скоростью (наблюдатель, движущийся с такой скоростью, видит волны с одной и той же длиной волны). Следовательно, в фиксированную точку к моменту времени t должны придти кольцевые волны ($r = c_g t$)

$$k = \frac{gt^2}{4r^2}, \omega = 2c_g k = \frac{gt}{2r}.$$

С течением времени в данную точку будут придти все более короткие волны (все более медленные пакеты). На больших расстояниях, на которых $kr \leq 1$, набега фазы

$$kr - \omega t = -\frac{gt^2}{4r} = -kr$$

недостаточно для развития волнового процесса (меньше 2π), и должен существовать некоторый передний кольцевой волновой фронт.

Если глубина бассейна не очень велика (по сравнению с другими масштабами длины), то она будет также важным определяющим размерным параметром ($[h] = L$), и можно ожидать

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} f(ka, kh).$$

Принимая во внимание, что для волн малой амплитуды ($ka \ll 1$) на мелкой воде ($kh \ll 1$) скорость распространения становится независимой от длины волны, находим

$$c \approx \sqrt{gh}.$$

Результаты типа Π - теоремы играют решающую роль в вопросах моделирования физических процессов. При моделировании, например, лабораторном каких-либо процессов, естественно, должно быть выдержано геометрическое подобие. Однако этого недостаточно для правильного физического моделирования. Из приведенного рассмотрения ясно, что должны подбираться одинаковыми безразмерные комплексы природы и модели, т.е. того, что не зависит от выбора единиц измерения,

$$\Pi_1^{(1)} = \Pi_1^{(2)}, \dots, \Pi_{N-n}^{(1)} = \Pi_{N-n}^{(2)}.$$

Входящие в них размерные характеристики при этом могут сильно отличаться по величине.

Например, при моделировании течений вязких жидкостей, выполненному по числу Рейнольдса,

$$\text{Re}^{(1)} = \frac{u_1 d_1}{\nu_1} = \text{Re}^{(2)} = \frac{u_2 d_2}{\nu_2}$$

для подобия природы и модели должно быть только подобрано

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{d_2 u_1}{d_1 u_2} \text{ при геометрическом подобии.}$$

В общей записи моделирование только по одному безразмерному комплексу

$$\Pi_1^{(1)} = \frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_1^{(1)\alpha_1} \dots a_n^{(1)\gamma_1}} = \Pi_1^{(2)}$$

означает для пересчета с модели (1) на природу (2) условие

$$\frac{a_{n+1}^{(2)}}{a_{n+1}^{(1)}} = \left(\frac{a_1^{(2)}}{a_1^{(1)}} \right)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{a_n^{(2)}}{a_n^{(1)}} \right)^{\gamma_1},$$

и аналогичные следствия по всем другим безразмерным комплексам.

Как указывалось, ранее, вследствие сложности уравнений движения ряд задач приходится решать экспериментальным путем, причем при обтекании тел модели, с которыми приходится иметь дело в гидродинамике, как правило, меньше тел натуральных. При этом, естественно, возникает вопрос, как следует поставить эксперимент, чтобы его данные отвечали действительности, т. е. как следует выбрать критерии подобия течений.

Две задачи будут идентичны, если они описываются одними и теми же уравнениями и в случае установившихся движений имеют одинаковые граничные условия. Чтобы осуществить совпадение граничных условий в натуральных условиях и в эксперименте, необходимо потребовать геометрического подобия тел и их расположения в пространстве относительно потока. При использовании безразмерных уравнений стационарных течений вязкой жидкости (5.2.6) совпадение уравнений движения в натуральных условиях и в эксперименте будет осуществлено, если при этом совпадают числа Фруда и Рейнольдса. Совпадение этих чисел является критерием подобия установившихся течений.

Если обозначить характерные величины натурального течения через L_n , v_n и характерные величины геометрически подобного эксперимента через $L_э$, $v_э$, то, следовательно, при постановке эксперимента необходимо соблюдение следующих равенств

$$\frac{v_i^2}{gL_i} = \frac{v_y^2}{gL_y}, \text{ или } \frac{v_i^2}{L_i} = \frac{v_y^2}{L_y}, \frac{L_i v_i}{v_i} = \frac{L_y v_y}{v_y}.$$

Если кинематические коэффициенты вязкости в натуре и в эксперименте одинаковы ($\nu_n = \nu_э$), то точное выполнение этих двух условий невозможно. Действительно, если модель меньше природы, т. е. $L_n/L_э > 1$, то из равенства чисел Фруда следует, что $v_n^2/v_э^2 > 1$ и характерная скорость течения жидкости в эксперименте должна быть уменьшена по сравнению с соответствующей скоростью в натуре. Из равенства же чисел Рейнольдса следует, что

если $L_H/L_0 > 1$, то при этом $v_H/v_0 > 1$, т. е. характерная скорость течения жидкости в эксперименте должна быть увеличена по сравнению с соответствующей скоростью в натуре. Чтобы одновременно выполнить условия равенства чисел Фруда и Рейнольдса, необходимо в эксперименте изменить кинематический коэффициент вязкости, однако практическое осуществление этого весьма трудно.

Поэтому в практике, сохраняя неизменным v , осуществляют выполнение одного из чисел подобия, которое наиболее существенно в рассматриваемой задаче. Другим числом подобия при этом пренебрегают, т. е. осуществляется только приближенное моделирование явления. В тех задачах, где очень существенную роль играют силы тяжести, например, в задачах гравитационных волн, при моделировании явления пользуются числом подобия Фруда. В задачах о движении без свободной поверхности основным числом подобия принимается число Рейнольдса, которое в этих вопросах играет существенную роль, характеризуя качественные особенности течений вязкой несжимаемой жидкости, как это будет показано далее.

Число Рейнольдса в уравнении (5.2.1") было получено путем деления множителя при квадратичных инерционных членах вида v_0^2/L_0 на множитель при члене, характеризующем вязкость жидкости вида $\nu v_0^2/L_0$. Поэтому число Рейнольдса определяет порядок величины отношения сил инерции к силам вязкости. Отсюда следует, например, что большим числам Рейнольдса будут соответствовать большая величина инерционных членов уравнений движения по сравнению с членами уравнения, характеризующими вязкость. Подобно тому как введены числа подобия установившихся движений, можно ввести числа подобия неустановившихся течений. В частности, неустановившиеся периодические течения в качестве основного критерия подобия имеют число Струхала, которое согласовано с граничными условиями.

5.3. Течение Пуазейля

Исходные уравнения

В качестве примера точного интегрирования уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости рассмотрим течение в трубах. Предположим, что течение стационарно и внешние силы отсутствуют, т. е.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0; \vec{F} = 0. \quad (5.3.1)$$

Предположим далее, что течение направлено вдоль оси трубы, т. е., используя цилиндрическую систему координат, имеем

$$v_R = v_\Theta = 0; v_z = v(R, \Theta, z). \quad (5.3.2)$$

Обращаясь к уравнению неразрывности, которое запишем в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial(v_R R)}{\partial R} + \frac{\partial(v_z R)}{\partial z} + \frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} = 0,$$

Имеем

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \text{ или } v_z = v(R, \Theta).$$

Далее, из физических соображений следует предположить, что течение обладает осевой симметрией, т. е. v_z , есть функция только R .

Используя условия (5.3.1) и (5.3.2), уравнения движения запишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial R} = 0; \frac{\partial p}{\partial \Theta} = 0; \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta v. \quad (5.3.4)$$

Используя равенство (4.2.14), оператор Лапласа в цилиндрических координатах запишем в виде

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial R}. \quad (5.3.5)$$

Уравнение (5.3.4) с учетом (5.3.3) и (5.3.5), примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial R} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz},$$

или

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dv}{dR} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}.$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 + A \ln R + B.$$

Исследование решения

Константы интегрирования A и B найдем из граничных условий. Предполагая, что радиус трубы $R = a$ и жидкость прилипает на стенках, имеем

$$v=0. \quad (5.3.6)$$

Кроме того, предполагая, что скорость всюду ограничена, находим

$$A = 0; B = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz},$$

откуда

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - a^2). \quad (5.3.7)$$

Таким образом, распределение скоростей по сечению круглой цилиндрической трубы подчиняется параболическому закону, и наибольшая скорость на оси трубы определяется формулой

$$v_{i \hat{a} \hat{e} \hat{n}} = -\frac{\dot{a}^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}.$$

Расход жидкости через сечение трубы Q будет

$$Q = 2\pi \int_0^a v R dR = -\frac{2\pi}{4\mu} \frac{dp}{dz} \frac{a^4}{4}.$$

Но так как

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{p_1 - p_2}{l}, \quad (5.3.5)$$

где p_1 и p_2 — давления в двух сечениях трубы, отстоящих друг от друга на расстоянии l , то

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}, \quad (5.3.10)$$

Разделив это выражение на площадь поперечного сечения трубы πa^2 , определим среднюю скорость течения

$$v_{cp} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}, \quad (5.3.11)$$

или с учетом равенств (5.3.8) и (5.3.10) имеем

$$v_{cp} = \frac{1}{2} v_{\max}.$$

При экспериментальном изучении движения жидкости по трубам обычно находится разность давлений в двух сечениях трубы $p_1 - p_2$. Из формулы (5.3.11) следует, что эта разность определяется формулой

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu l Q}{4\pi a^4} = \frac{8\mu l v_{cp}}{a^2}, \quad (5.3.12)$$

которую полностью подтвердили экспериментально независимо друг от друга ученые Гаген и Пуазейль. Имя второго ученого и получило рассмотренное выше течение.

Формула (5.3.12) составляет содержание закона Гагена - Пуазейля, который гласит: **при ламинарном течении жидкости в трубе падение давления вдоль оси трубы прямо пропорционально секундному объему протекающей жидкости и длине отрезка трубы и обратно пропорционально четвертой степени радиуса трубы.**

Пользуясь формулой $\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial R}$, определим силу трения, действующую в жидкости

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} R. \quad (5.3.13)$$

Отсюда на стенках трубы получим максимальное значение силы трения, равное

$$\tau_{\max} = \frac{(p_1 - p_2)}{2l} = \frac{4\mu v_{cp}}{a}. \quad (5.3.14)$$

5.4. Приближенные уравнения движения Стокса

Уравнение Стокса

Все приближенные методы, существующие в гидромеханике, основаны на том, что-либо в основных уравнениях отбрасывается часть членов, либо опускаются некоторые из граничных условий. Уравнения Стокса, которые будут рассмотрены в настоящем параграфе, представляют собой один из примеров приближенных уравнений движения вязкой жидкости.

Запишем уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерных величинах (5.2.1") в виде

$$St R \dot{a} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \text{Re}(\vec{v}_1 \text{grad}) \vec{v}_1 = \frac{R}{F} \vec{F}_1 - Eu R \dot{a} \text{grad} p_1 + \Delta v_1, \quad (5.4.1)$$

и предположим, что число Рейнольдса весьма мало. В этом случае квадратичными членами в уравнении движения (5.4.1) можно пре-

небрежь. Чтобы при этом сохранить остальные уравнения, содержащие в качестве множителя число Рейнольдса, следует потребовать выполнения следующих неравенств

$$St Ra > 1; \frac{R}{F} > 1; Eu Ra > 1. \quad (5.4.2)$$

Из последнего неравенства (5.4.2), в которое подставим значения Eu и Re , получим неравенство вида

$$p_0 > \mu \frac{v_0}{L_0}. \quad (5.4.3)$$

Отсюда следует, что при отбрасывании в уравнениях движения квадратичных членов инерции давление будет находиться в прямой зависимости от характерной скорости течения v_0 и вязкости μ и в обратной зависимости от характерной длины L_0 . Отбрасывая квадратичные члены инерции в уравнении движения несжимаемой жидкости, перепишем его в виде

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \vec{F}_1 - grad \frac{P}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (5.4.4)$$

Течение очень вязкой жидкости между двумя близкими параллельными пластинами

Приближенное уравнение (5.4.4) носит название уравнения Стокса. В качестве примера применения уравнения Стокса рассмотрим течение очень вязкой жидкости между двумя параллельными пластинками, находящимися на малом расстоянии h друг от друга. Предположим, что внешние силы отсутствуют, движение установившееся и скорости течения малы, а вязкость жидкости велика так, что число Рейнольдса очень мало, и, следовательно, применимо приближенное уравнение Стокса. В рассматриваемом случае это уравнение может быть записано в виде

$$grad p = \mu \Delta \vec{v}. \quad (5.4.5)$$

Выберем систему координат так, чтобы плоскость xu совпадала с одной из пластин, тогда уравнения граничных плоскостей будут вида

$$Z = 0; z = h. \quad (5.4.6)$$

Предположим, что скорость частиц жидкости параллельна граничным плоскостям, т. е. рассмотрим двумерное течение $v_z=0$.

Предположим далее, что в результате малости расстояния h изменение скоростей v_x, v_y в направлении оси z происходит гораздо быстрее, чем в направлении осей x и y . Это значит, что производными $\partial v_x/\partial x, \partial v_x/\partial y, \partial v_y/\partial x, \partial v_y/\partial y, \partial^2 v_x/\partial x^2, \partial^2 v_x/\partial^2 y, \partial^2 v_y/\partial x^2, \partial^2 v_y/\partial y^2$ можно пренебречь по сравнению с производными $\partial^2 v_x/\partial z^2, \partial^2 v_y/\partial z^2$, тогда уравнение (5.4.5) в проекциях на оси координат может быть записано в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}; \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}; \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.4.7)$$

Из последнего уравнения следует, что p зависит только от x, y . К уравнениям (5.4.7) следует еще присоединить уравнение неразрывности вида

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (5.4.8)$$

В силу независимости p от z первые два уравнения (5.4.7) легко интегрируются

$$\begin{aligned} \mu v_x &= \frac{z^2}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + zA(x, y) + B(x, y); \\ \mu v_y &= \frac{z^2}{2} \frac{\partial p}{\partial y} + zC(x, y) + D(x, y). \end{aligned}$$

Используя граничные условия для вязкой жидкости, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = h,$$

получим

$$B(x, y) = D(x, y) = 0; A(x, y) = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}; C(x, y) = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Окончательно имеем

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(h-z);$$

$$v_y = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z(h-z).$$

Подставив найденные значения v_x , v_y в уравнение неразрывности

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (5.4.10)$$

Из формул (5.4.5) и (5.4.10) следует

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, найденное решение (5.4.5) строго удовлетворяет исходному уравнению (5.4.5).

Скорости течения v_{xcp} , v_{ycp} , осредненные по высоте, определим по формулам

$$v_{xcp}(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h v_x(x, y, z) dz;$$

$$v_{ycp}(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h v_y(x, y, z) dz,$$

или

$$v_{xcp}(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; v_{ycp}(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (5.4.11)$$

Вводя функцию

$$\phi(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu} p,$$

запишем

$$v_{xcp} = \frac{\partial \phi}{\partial x}; v_{ycp} = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (5.4.12)$$

Так как p удовлетворяет уравнению Лапласа (5.4.10), то и функция ϕ , которая отличается от p только на постоянный множитель, будет удовлетворять уравнению Лапласа. Следовательно, средние скорости изучаемого течения обладают потенциалом и кинематика среднего движения рассматриваемой задачи аналогична кинематике потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости.

РАЗДЕЛ 6

НЕНЬЮТОНОВСКАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА

Дифференциальные уравнения неразрывности, движения и моментов количества движения выполняются при любых непрерывных движениях всех сплошных сред. Однако различные реальные среды при одних и тех же внешних условиях ведут себя по-разному.

Следовательно, одних этих уравнений, даже с добавлением соответствующих граничных условий, недостаточно для описания движения конкретной сплошной среды. Этот факт проявляется в том, что число уравнений меньше числа входящих в них неизвестных, система незамкнута.

Построение замкнутой системы уравнений, описывающих движение конкретной сплошной среды, связано с поисками дополнительных соотношений между параметрами данной сплошной среды. Построить замкнутую систему уравнений – это значит построить математическую модель изучаемой среды.

Весь спектр жидкостей, используемых в технике можно разделить на ньютоновские и неньютоновские. Законы внутреннего трения и течения этих жидкостей значительно отличаются друг от друга.

Одним из свойств жидкости является вязкость, которая характеризует силы внутреннего трения и представляет собой свойство жидкости оказывать сопротивление ее движению под действием сил, вызывающих это движение. Рассмотрим вязкую ньютоновскую жидкость.

Для рассмотрения физики явления введем несколько предположений (гипотез). Первая гипотеза – о прилипании потока вязкой жидкости к стенке. При течении этой жидкости вдоль твердой стенки происходит торможение потока, обусловленное вязкостью (рис. 6.1). Скорость U уменьшается по мере уменьшения расстояния Y от стенки вплоть до $U = 0$ при $Y = 0$, а между слоями проис-

ходит проскальзывание, сопровождающееся возникновением касательных напряжений.

Согласно второй гипотезе (гипотеза Ньютона) при слоистом движении в жидкости возникают касательные напряжения τ , пропорциональные поперечному градиенту скорости dU/dY , а коэффициентом пропорциональности является динамическая вязкость μ . Довольно часто этот показатель вязкости называют ньютоновской вязкостью.

Таким образом

$$\tau = \mu \frac{dU}{dY}.$$

Поперечный градиент скорости представляет собой изменение скорости течения жидкости в направлении перпендикулярном направлению течения жидкости и, следовательно, характеризует скорость сдвига жидкости в данной точке. Из закона трения следует, что напряжения трения возможны только в движущейся жидкости, или другими словами – вязкость жидкости проявляется лишь при ее течении.

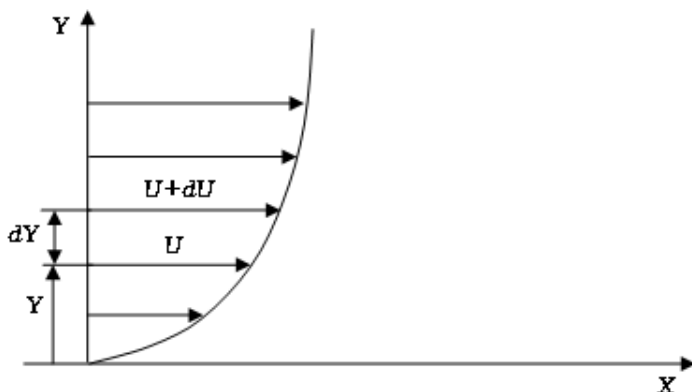


Рис. 6.1.

Скорость течения жидкости U в данной точке потока можно представить, как изменение пути, пройденного жидкой частицей, в единицу времени. Тогда последнее уравнение можно записать

$$\tau = \mu \frac{dU}{dY} = \mu \frac{d}{dY} \left(\frac{dX}{dt} \right) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{dX}{dY} \right) = \mu \frac{dX}{dt} = \mu \gamma',$$

где X – длина пути жидкой частицы в направлении скорости U , γ' – скорость сдвига между слоями жидкости.

Таким образом ньютоновские жидкости описываются реологическим уравнением $\tau = \mu \cdot \gamma'$, а график зависимости между напряжением и скоростью сдвига называют реологической кривой (рис. 6.2). Тангенс угла наклона α реологической кривой равен динамической вязкости μ , и эта единственная постоянная полностью характеризует внутреннее трение в ньютоновских жидкостях. Динамическая вязкость зависит только от температуры и давления и не зависит от скорости сдвига.

Единица измерения динамической вязкости $[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$. Вязкость в жидкости вызывается силами межмолекулярного сцепления. Эти силы с увеличением температуры уменьшаются, что ведет к уменьшению вязкости. В газах вязкость с ростом температуры растет, что вызвано увеличением интенсивности беспорядочного теплового движения молекул.

Кроме динамической вязкости часто пользуются показателями кинематической вязкости

$$\nu = \mu / \rho$$

Все единицы измерения в СИ: $[\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, кроме этого используют понятие – *стокс*, $1 \text{ Ст} = 1 \text{ см}^2/\text{с}$. Сотая доля *стокса* называется *сантистоксом* (сСт), $1 \text{ сСт} = 1 \text{ мм}^2/\text{с}$.

Также применяют единицы условной вязкости, измеряемые в градусах *Энглера* ($^\circ \text{E}$). Для пересчета градусов *Энглера* в *стоксы* применяют эмпирическую формулу

$$\nu = 0,0731 \cdot E - \frac{0,0631}{E}. \quad (\text{Ст})$$

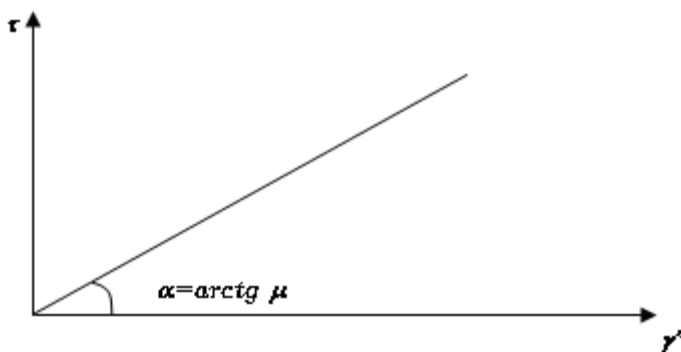


Рис. 6.2.

Ньютоновское поведение характерно для жидкостей, в которых вязкая диссипация энергии обусловлена столкновением небольших молекул. Все газы, жидкости и растворы с небольшой молекулярной массой попадают в эту группу. Исключение составляют коллоидные суспензии и растворы полимеров с значительными молекулярными массами.

Свойства этих жидкостей заметно отклоняются от ньютоновских и их относят к категории неньютоновских жидкостей, реологическая кривая которых не является линейной. Вязкость неньютоновских жидкостей не остается постоянной при заданных температуре и давлении, а зависит от скорости деформации сдвига, конструктивных особенностей аппаратуры, в которой находится жидкость, и от предыстории жидкости.

Реальные жидкости с нелинейной реологической кривой можно разбить на три группы:

1. Вязкие жидкости, у которых скорость сдвига зависит только от приложенных сдвиговых напряжений;
2. Неньютоновские жидкости, реологические характеристики которых зависят от времени;

3. Вязко – упругие (эластичные) жидкости, обладающие свойствами как жидкости, так и твердого тела и частично проявляющие упругое восстановление формы после снятия напряжения.

6.1. Вязкие жидкости с реологическими характеристиками, не зависящими от времени

Вязкие неньютоновские жидкости, свойства которых не зависят от времени, могут быть описаны реологическим уравнением

$$\dot{\gamma} = f(\tau) . \quad (6.1)$$

Из уравнения следует, что скорость сдвига в каждой точке жидкости является простой функцией напряжения сдвига в той же точке. Вязкие неньютоновские жидкости подразделяются на три группы в зависимости от вида функции в уравнении (6.1)

- бингамовские пластичные жидкости (бингамовский пластик);
- псевдопластичные жидкости (псевдопластик);
- дилатантные жидкости.

Рассмотрим каждую из этих групп.

К бингамовским пластикам можно отнести глинистые и цементные растворы, масляные краски, торфяные массы, водные суспензии ядерного топлива. Эти жидкости, аналогично ньютоновским средам, имеют линейную зависимость напряжений сдвига от скорости сдвига. Реологическое уравнение для бингамовских пластиков записывается в виде

$$\tau = \tau_i + \eta \cdot \dot{\gamma} ,$$

где η - структурная вязкость,

τ_i - начальное напряжение сдвига.

Реологическая кривая (рис. 6.3) для этих материалов представляет собой прямую линию, пересекающую ось напряжений сдвига на расстоянии τ_i от ее начала.

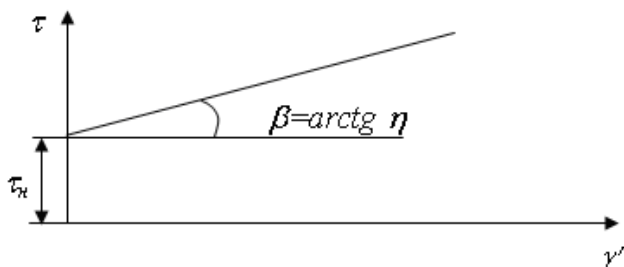


Рис. 6.3.

Поведение бингамовского пластика объясняется тем, что в состоянии покоя эти жидкости имеют пространственную структуру довольно жесткую, чтобы сопротивляться любым напряжениям, не превосходящим начальное напряжение сдвига τ_n . Превышение напряжений над τ_n приводит к разрушению структуры, и жидкость ведет себя как обычная ньютоновская. При снижении напряжений менее τ_n , структура в жидкости снова восстанавливается.

Вязкие свойства бингамовского пластика характеризует структурная вязкость η , величина которой, как и для ньютоновской вязкости, не зависит от напряжения сдвига

$$\eta = \frac{\tau - \tau_i}{\gamma'}$$

Рассмотрим жидкости, которые называют псевдопластиками. Псевдопластичностью обладают суспензии с асимметричными частицами, а также растворы и расплавы высокополимеров, подобные производным целлюлозы и термопластичным материалам (полиэтилен, полиамиды, виниловые и другие полимеры).

Псевдопластики имеют нелинейную реологическую кривую течения, проходящую через начало координат (рис. 6.4).

Удобной характеристикой поведения таких жидкостей служит так называемая эффективная вязкость $\mu_e = \tau/\gamma'$. Эффективная вязкость у псевдопластиков постепенно уменьшается с ростом

скорости сдвига, и эти жидкости не обнаруживают предела текучести.

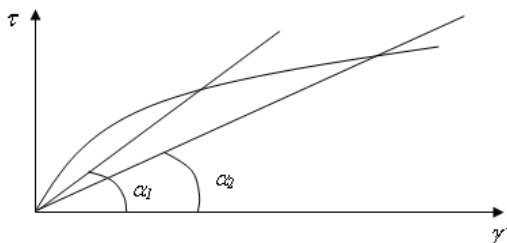


Рис. 6.4.

При небольших скоростях сдвига среда ведет себя как ньютоновская жидкость и характеризуется эффективной вязкостью при нулевом сдвиге. Другой линейный участок на реологической кривой обычно имеет место при очень больших величинах скоростей сдвига.

Для описания поведения псевдопластических жидкостей используют степенной реологический закон Оствальда де Вилля

$$\tau = K \cdot \dot{\gamma}^n,$$

где K – мера консистенции жидкости (чем выше вязкость жидкости, тем больше K); n – показатель неньютоновского поведения (для псевдопластиков $n < 1$). При величине $n = 1$ последнее уравнение принимает вид закона Ньютона о вязком трении, а величина K является динамической вязкостью.

Эффективную вязкость μ_s для псевдопластиков можно выразить через показатели K и n

$$\mu_s = K \cdot \dot{\gamma}^{(n-1)}.$$

Физическое толкование псевдопластичности заключается в том, что с возрастанием скорости сдвига асимметричные частицы или молекулы постепенно ориентируются. Вместо хаотических движений, совершаемых ими в покоящейся жидкости, частицы своими большими осями ориентируются вдоль направления потока.

Эффективная вязкость будет уменьшаться с ростом скорости сдвига до тех пор, пока сохраняется возможность дальнейшего ориентирования частиц вдоль линий тока, а затем реологическая кривая течения становится линейной.

Дилатантные жидкости сходны с псевдопластическими средами, однако они проявляют реологические свойства, противоположные свойствам псевдопластиков. В них отсутствует предел текучести, и их эффективная вязкость повышается с возрастанием скорости сдвига. Дилатансия объясняется процессом структурообразования, который и является причиной быстрого нарастания эффективной вязкости при увеличении скорости сдвига. Примером дилатантной жидкости может служить густая водная суспензия крахмала.

Для описания поведения дилатантных жидкостей используют реологический закон Оствальда де Виля при $n > 1$

$$\tau = K \cdot \dot{\gamma}^n,$$

а реологическая кривая течения представлена на рис. 6.5.

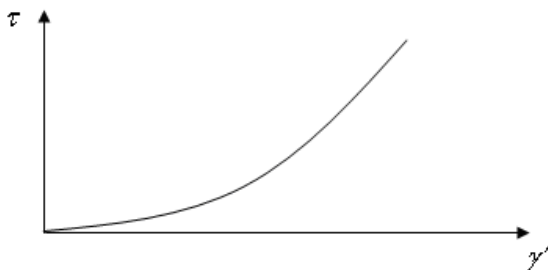


Рис. 6.5.

6.2. Неньютоновские жидкости с переменными реологическими характеристиками

Для многих реальных жидкостей связь между напряжением и скоростью сдвига дополняется зависимостью от времени приложения напряжений. Эффективная вязкость этих жидкостей определяется не только скоростью сдвига, но и продолжительностью сдвига. Эти жидкости можно разделить на тиксотропные и

реопектические, в зависимости от того убывают или возрастают со временем напряжения сдвига, если жидкость деформируется с постоянной скоростью сдвига.

При деформировании тиксотропного материала, находящегося в состоянии покоя, с постоянной скоростью сдвига, его структура будет постепенно разрушаться, а эффективная вязкость снижаться со временем. Скорость разрушения структуры при определенной скорости сдвига зависит от числа связей до начала разрушений структуры и должна поэтому уменьшаться с течением времени.

Вместе с тем будет возрастать скорость восстановления структуры, так как число возможных новых связей увеличивается. В определенный момент наступит динамическое равновесие, когда скорости структурообразования и разрушения структуры станут равны друг другу. Состояние равновесия зависит от скорости сдвига и смещается в сторону более интенсивной деструкции при возрастании скорости сдвига.

Тиксотропия является обратимым процессом, и после исчезновения возмущений жидкости ее структура постепенно восстанавливается. На рис. 6 приведены реологические кривые течения тиксотропной жидкости при различных значениях времени t (время нахождения жидкости в состоянии покоя).

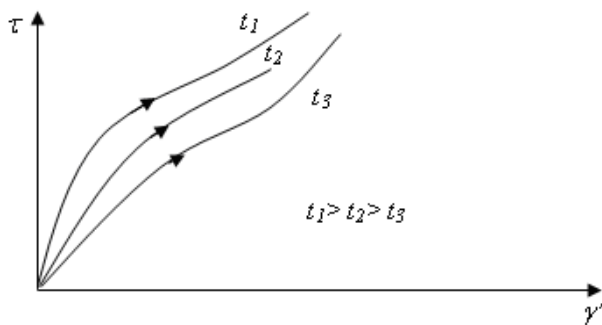


Рис. 6.6.

Таким образом, реологические кривые течения тиксотропных жидкостей имеют гистерезисную петлю при нанесении значе-

ний напряжений сначала для равномерно возрастающей скорости сдвига, а затем для равномерно убывающих значений $\dot{\gamma}$.

На рис. 6.7 приведены гистерезисные петли тиксотропных жидкостей. Гистерезис исключается при дальнейшем приложении сдвигового усилия до достижения равновесного состояния.

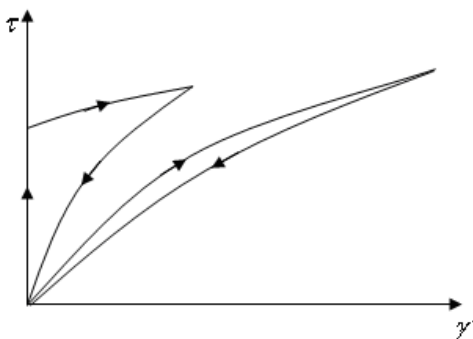


Рис. 6.7.

Реопектическими жидкостями называют такие среды, которым свойственно постепенное структурообразование при сдвиге. В качестве примера может служить суспензия гипса. После встряхивания водного раствора гипса его затвердевание происходит по истечению 40 минут последующего стояния. Однако время затвердевания сокращается до 20 секунд, если сосуд осторожно перекачивать между ладонями. По-видимому, небольшие перемешивания сдвигового характера способствуют образованию структуры в то время как значительные сдвиги (встряхивание) разрушают ее.

6.3. Вязко – упругие жидкости

Вязкоупругими называются среды, проявляющие как упругое восстановление формы, так и вязкое течение.

В случае вязкой жидкости вся подведенная к ней извне механическая энергия полностью превращается в тепло. Идеально упругие среды при деформировании способны накапливать подведенную к ним энергию и снова возвращать ее при снятии напря-

жений. Вязкоупругий материал одновременно может проявлять свойства упругой и вязкой среды.

При установившемся течении под воздействием напряжения сдвига величина скорости сдвига будет равна

$$\gamma' = \tau / \mu ,$$

где μ - динамическая вязкость.

Предположим теперь, что напряжение сдвига возрастает очень быстро до $\tau + d\tau$. Тогда материал получит дополнительную деформацию сдвига $d\tau / G$, где G - модуль сдвига. Следовательно, теперь добавочная скорость сдвига будет пропорциональна скорости изменения напряжения для любого момента времени и полная скорость сдвига запишется как

$$\gamma' = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\tau'}{G}$$

или

$$\tau + T_0 \tau' = \mu \gamma' ,$$

где

$$T_0 = \mu / G .$$

Параметр T_0 , имеющий размерность времени, называют временем релаксации. При быстрых механических воздействиях, когда $t < T_0$, вязкоупругая среда ведет себя как идеально упругое тело. Если $t > T_0$, наблюдается течение, которое перекрывает упругую деформацию, и материал можно рассматривать как жидкость. Лишь когда значение времени t будет соизмеримо со временем релаксации, налагающиеся эффекты упругости и вязкости действуют одновременно. Упругая деформация бывает в растворах и расплавах полимеров. Многие биологические образования (например, яичный белок) при быстром деформировании способен развивать упругие деформации до момента изменения структуры.

6.4. Ламинарное течение неньютоновских жидкостей в круглых трубах

Основной задачей расчета движения неньютоновских жидкостей является определение расхода в каналах и трубах, опреде-

ление гидравлических потерь с учетом реологических особенностей протекающих неньютоновских сред.

Рассмотрим течение неньютоновской жидкости в канале круглого сечения радиуса R (рис. 6.8). Выполним вывод основных уравнений, используя аналогичные изложения для ньютоновской жидкости.

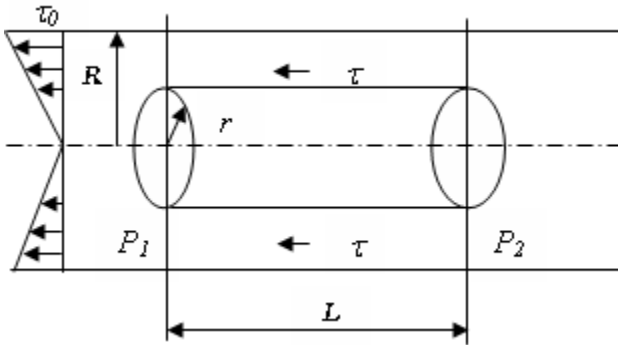


Рис. 6.8.

В рассмотрение введем гипотезу III – о постоянстве давлений в пределах сечения канала (отсутствие влияния весовых давлений).

Выделим два сечения 1-1 и 2-2 в которых давления равны P_1 и P_2 . Диаметр трубопровода вдоль потока не меняется, следовательно средняя скорость жидкости будет постоянной, а коэффициент кинетической энергии α вдоль потока будет неизменен.

Запишем уравнение Бернулли для выбранных сечений

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_{mp},$$

где h_{mp} - потери напора на трение по длине.

Из последнего уравнения имеем

$$h_{mp} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g}.$$

В потоке жидкости выделим цилиндрический объем радиусом r , соосный с трубой. Запишем уравнение равномерного движения выделенного объема

$$\Delta P \cdot \pi r^2 = 2\pi r L \cdot \tau .$$

Получаем выражение для касательных напряжений

$$\tau = \frac{\Delta P \cdot r}{2L} . \quad (6.2)$$

Максимальное касательное напряжение возникает на стенке

$$\tau_0 = \frac{R\Delta P}{2L} .$$

Следовательно

$$\tau = \tau_0 r / R . \quad (6.3)$$

Эпюра касательных напряжений линейная и не зависит от рода жидкости и режима течения.

Если реологические свойства жидкости не зависят от времени, то реологическое уравнение, связывающее касательное напряжение и скорость сдвига записывается в виде $\gamma' = f(\tau)$. При течении жидкости в круглых трубах имеем

$$\frac{dU}{dr} = -f(\tau),$$

с учетом выражения (6.3)

$$dU = -f\left(\tau_0, \frac{r}{R}\right) dr . \quad (6.4)$$

Проинтегрируем это выражение

$$U(r) = \int_r^R f\left(\tau_0, \frac{r}{R}\right) dr.$$

Имея эпюру распределения скоростей по сечению трубопровода, определим объемный расход жидкости

$$Q = \int_0^R 2\pi r U(r) dr$$

или можно записать

$$Q = \pi \int_0^R U(r) d(r^2).$$

Проинтегрируем по частям

$$Q = \pi \left[r^2 U(r) \Big|_0^R - \int_0^R r^2 dU(r) \right].$$

При значении $r = 0$ и $r = R$ произведение $r^2 U(r) = 0$.

С учетом выражения (6.4) имеем

$$Q = \pi \int_0^R r^2 f\left(\tau_0, \frac{r}{R}\right) dr.$$

Подставив $r = R\tau/\tau_0$, получим

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} \tau^2 f(r) d\tau, \quad (6.5)$$

или разделив на площадь поперечного сечения, получим среднюю скорость течения

$$V = \frac{R}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} \tau^2 f(\tau) d\tau. \quad (6.6)$$

Соотношения между средней скоростью течения и перепадом давления для различных неньютоновских жидкостей зависят от вида функции $f(\tau)$. Эта функция может являться аппроксимацией экспериментальных данных, полученных на вискозиметрах.

Для ньютоновской жидкости имеем

$$\gamma' = f(\tau) = \frac{\tau}{\mu}.$$

Подстановка в уравнение (6.5) дает

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_0^3 \mu} \int_0^{\tau_0} \tau^3 d\tau,$$

и после интегрирования

$$Q = \frac{\pi R^3 \tau_0}{4\mu}.$$

Подставляя значение $\tau_0 = \frac{R\Delta P}{2L}$, получим хорошо известное из курса «Гидромеханики» уравнение Пуайзеля для ламинарного течения ньютоновских жидкостей

$$\Delta P = \frac{8L\mu}{\pi R^4} Q.$$

6.5. Ламинарное течение псевдопластических и дилатантных жидкостей

Псевдопластичные и дилатантные жидкости описываются степенной реологической моделью

$$\tau = k\gamma'^n.$$

Как указано выше, при $n < 1$ имеем псевдопластик; $n > 1$ – дилатантные жидкости; $n = 1$ – ньютоновские жидкости.

Из последнего выражения находим

$$\gamma' = f(\tau) = \left(\frac{\tau}{K} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (6.7)$$

Определим распределение скоростей по сечению

$$\frac{dU}{dr} = \left(\frac{\tau_0}{RK} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}.$$

Запишем

$$U = \left(\frac{\tau_0}{RK} \right)^{\frac{1}{n}} \int_r^R r^{\frac{1}{n}} dr = \left(\frac{\tau_0}{RK} \right)^{\frac{1}{n}} \left(R^{\frac{1+n}{n}} - r^{\frac{1+n}{n}} \right) \left(\frac{n}{n+1} \right);$$

$$U = \left(\frac{\Delta P}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1+n}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \frac{n}{n+1}. \quad (6.8)$$

Максимальная скорость на оси

$$U_{max} = \left(\frac{\Delta P}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1+n}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right).$$

Тогда

$$U = U_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right].$$

Подставим значение функции $f(\tau)$ для степенного реологического закона в выражении (U), получим значение расхода

$$Q = \frac{n}{3n+1} \pi R^3 \left(\frac{\Delta P \cdot R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (6.9)$$

Разделив на πR^2 получим среднюю скорость по сечению потока

$$V = \frac{n}{3n+1} R \left(\frac{\Delta PR}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (6.10)$$

Сделаем преобразование в формуле (6.8), получим соотношение U и V

$$U = \left(\frac{\Delta PR}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right].$$

Окончательно имеем

$$U = V \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right]. \quad (6.11)$$

Соотношение между средней и максимальной скоростями

$$U_{max} = \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \cdot V.$$

При $n = 1$ получаем соотношение скоростей для ламинарного потока ньютоновской жидкости $U_{max} = 2V$.

Типичные профили скоростей приведены на рис. 6.9 для ньютоновской жидкости ($n = 1$); псевдопластика ($n = 1/3$) и дилатантной жидкости ($n = 3$).

Определим потери давления при ламинарном течении неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенной реологической модели, в круглых трубах диаметром D , используя выражение (6.10)

$$V^n \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \frac{2^n}{D^n} = \frac{\Delta P D}{4LK}.$$

Преобразовав, получим

$$\Delta P = \left(\frac{6n+2}{n} \right)^n \frac{4V^n LK}{D^{n+1}}. \quad (6.12)$$

Потери можно определить, используя коэффициент сопротивления C_f

$$\tilde{N}_f = \frac{\tau_0}{\rho V^2 / 2}$$

или коэффициент потерь на трение λ , принимая его равным

$$\lambda = \frac{64}{Re_{\dot{\gamma}}},$$

где $Re_{\dot{\gamma}}$ – эффективное число Рейнольдса.

При этом можно пользоваться обычными графиками или расчетными формулами сопротивлений как для ньютоновской, так и для неньютоновской жидкостей.

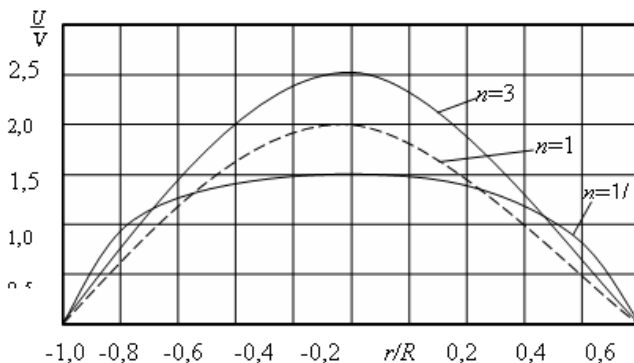


Рис. 6.9.

Преобразуем выражение (12) к известному уравнению Вейсбаха-Дарси:

$$\Delta P = \frac{64 \cdot K \left(\frac{6n+2}{n} \right)^n}{8V^{2-n} D^n \rho \cdot \frac{L}{D} \rho \frac{V^2}{2}}.$$

Окончательно получим значение эффективного числа Рейнольдса

$$Re_{\text{э}} = \frac{8 \cdot V^{2-n} D^4 \rho}{K \left(\frac{6n+2}{n} \right)^n}, \quad (6.13)$$

или используя понятие эффективной динамической вязкости $\mu_{\text{э}}$,

$$Re_{\text{э}} = \frac{V \cdot D \rho}{\mu_{\text{э}}},$$

где

$$\mu_{\text{э}} = \frac{K \left(\frac{6n+2}{n} \right)^n}{8 \cdot V^{1-n} \cdot D^{n-1}}.$$

Этот метод основан на использовании общепринятых коэффициентов сопротивления в сочетании с эффективным числом Рейнольдса. При таком подходе сохраняются все соотношения, общепринятые для ньютоновских жидкостей при ламинарном режиме течения.

6.6. Ламинарное течение вязкопластических сред. Бингамовский пластик

Реологическое уравнение для бингамовского пластика имеет вид

$$\tau = \tau_n + \eta \cdot \gamma' . \quad (6.14)$$

Функция $f(\tau)$

$$f(\tau) = \gamma' = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau < \tau_n \\ \frac{\tau - \tau_n}{\eta}, & \text{при } \tau > \tau_n \end{cases} . \quad (6.15)$$

При течении в трубопроводе бингамовского пластика касательные напряжения падают до нуля на оси, а в приосевой области, где напряжение сдвига ниже начального напряжения сдвига τ_n жидкая среда не подвергается сдвигу, перемещаясь вдоль оси трубопровода как твердый стержень (рис. 6.10). Таким образом, на оси образовано ядро потока радиусом r_c ,двигающееся как твердое тело со скоростью U_c .

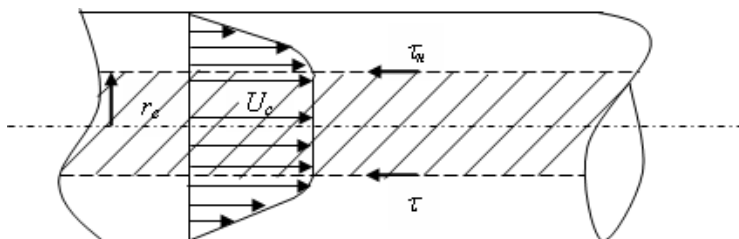


Рис. 6.10.

Для бингамовского пластика имеем из уравнения (6.14)

$$\tau - \tau_i = -\eta \left(\frac{dU}{dr} \right).$$

Решим относительно dU , с учетом, что $\tau = \frac{\Delta P r}{2L}$

$$dU = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{r \Delta P}{2L} - \tau_i \right) dr.$$

Интегрирование последнего выражения дает

$$U = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{r^2 \Delta P}{4L} - \tau_i \cdot r \right) + c.$$

С учетом условия $U = 0$ при $r = R$ постоянная интегрирования равна

$$c = \frac{1}{\eta} \left(\frac{R^2 \Delta P}{4L} - \tau_i R \right).$$

Тогда окончательно имеем

$$U = \frac{1}{\eta} \left[\frac{R^2 \Delta P}{4L} - \tau_i R - \frac{r^2 \Delta P}{4L} + \tau_i r \right].$$

После преобразования получим

$$U = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] - \frac{R \tau_i}{\eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right) \right]. \quad (6.16)$$

Скорость стержневого течения ядра U_c находится из уравнения (16) заменой $r = r_c = \tau_i \cdot 2L / \Delta P$

$$U_c = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L} \left[1 - \left(\frac{2\tau_i \cdot L}{R \cdot \Delta P} \right)^2 \right] - \frac{R\tau_i}{\eta} \left[1 - \frac{2\tau_i L}{R\Delta P} \right]. \quad (6.17)$$

Подстановка функции $f(\tau)$ для бингамовского пластика в уравнение (6.5) позволит определить расход жидкости

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_0^3} \int_{\tau_i}^{\tau_0} \tau^2 \left(\frac{\tau - \tau_i}{\eta} \right) d\tau.$$

Проинтегрируем полученное выражение

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi R^3}{\tau_0^3} \left[\frac{\tau_0^4}{4} - \frac{\tau_i^4}{4} - \frac{\tau_0^3}{3} \tau_i + \frac{\tau_i^4}{3} \right] = \\ &= \frac{\pi R^3 \tau_0}{\eta} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_i}{\tau_0} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{\tau_i}{\tau_0} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Делая подстановку $\tau_0 = R\Delta P / (2L)$, окончательно запишем

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8L\eta} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_i 2L}{R\Delta P} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_i \cdot 2L}{R\Delta P} \right)^4 \right]. \quad (6.18)$$

Это выражение носит название уравнения Букингема. Уравнение нельзя разрешить относительно перепада давления. Если $\tau_n = 0$, уравнение совпадает с формулой Пуайзеля для ньютоновской жидкости.

В связи с трудностью применения уравнения Букингема, довольно часто используют эмпирические или полуэмпирические выражения для определения расхода.

Предложено уравнение, максимальная погрешность в котором не превышает 6 %

$$Q = \frac{\pi R^2 \Delta P}{8\eta L} (R - r_c)^2 \left(1 + \frac{r_c}{R}\right).$$

Потери давления определяются аналогично потерям давления при течении псевдопластиков с использованием коэффициентов c_f или λ , и эффективного числа Re .

$$c_f = \frac{16}{Re_s}.$$

Определим соотношение между эффективной динамической вязкостью μ_s и структурной вязкостью для бингамовского пластика.

Разнообразие в реологических свойствах неньютоновских жидкостей требует большого внимания к определению критерия Рейнольдса. При различных реологических законах форма записи этого критерия может быть различной.

Если известна кривая реологического закона $\tau = f(\dot{\gamma})$ для данной неньютоновской жидкости, то можно определить число Рейнольдса, называемое эффективным, по эффективной динамической вязкости

$$Re_s = \frac{\rho V D}{\mu_s}.$$

Эффективная динамическая вязкость μ_s определяется как тангенс угла α наклона прямой, соединяющей точку О (рис. 11) с точкой А, соответствующей рассматриваемой скорости сдвига $\dot{\gamma}'_A$.

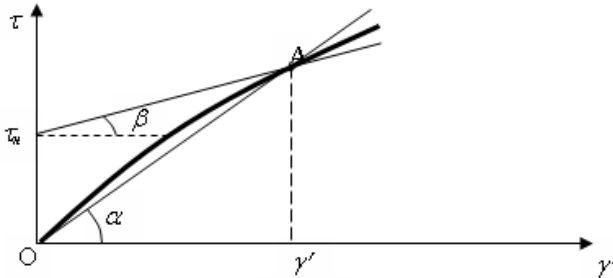


Рис. 6.11.

Аналогично $\mu_{\text{э}}$ можно определить для любого значения δ_H по величине β .

Эффективная динамическая вязкость для бингамовского пластика

$$\mu_{\text{э}} = \frac{\tau_0}{\gamma'_{\text{см}}} = \frac{\tau_H + \eta \cdot \gamma'_{\text{см}}}{\gamma'_{\text{см}}},$$

где $\gamma'_{\text{ст}}$ – скорость сдвига на стенке трубопровода.

Преобразовав последнее выражение, получим

$$\mu_{\text{э}} = \eta + \frac{\tau_H D}{V}.$$

Эффективное число Рейнольдса имеет вид

$$Re_{\text{э}} = \frac{\rho V D}{\eta \cdot \left(1 + \frac{\tau_H D}{\eta V}\right)}. \quad (6.19)$$

6.7. Турбулентное течение неньютоновских жидкостей в круглых трубах

В курсе технической гидромеханики подробно изложены основы теории ламинарного и турбулентного течения ньютоновских жидкостей. Неньютоновские среды при своем движении про-

являют ряд отличительных особенностей, которые мы и рассмотрим в данной главе.

В отличие от ламинарного режима движения жидкости, турбулентные течения сопровождаются интенсивным перемешиванием жидкости с активными пульсациями местных скоростей и давлений. Движение носит хаотический характер, при этом происходит перемешивание отдельных слоев жидкости. Распределение скоростей в поперечном сечении турбулентного потока существенно отличается от того, которое характерно для ламинарного течения.

Турбулентное течение неньютоновских сред изучено недостаточно хорошо, по сравнению с ньютоновскими жидкостями, что объясняется довольно сложными зависимостями между касательными напряжениями и скоростью сдвига.

Обычно анализ турбулентного течения сводится к определению потерь энергии (потери давления) вдоль потока. Многие исследования подтверждают, что обычный график зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для ньютоновских жидкостей удовлетворительно обобщает результаты по неньютоновским средам при условии применения эффективного числа Рейнольдса $Re_{\text{э}}$ по формулам (6.13) и (6.19), которое является функцией скорости сдвига.

6.8. Потери давления при турбулентном течении неньютоновской жидкости

Рассмотрим степенной реологический закон и допустим, что перепад давления ΔP будет зависеть от размеров цилиндрического трубопровода L и D , средней скорости V и свойств жидкости ρ и $\mu_{\text{э}}$.

В свою очередь эффективная динамическая вязкость зависит от консистентности смеси K и показателя неньютоновского поведения n .

Следовательно, можно записать $\Delta P = f(L, D, V, \rho, K, n)$

Проводя аналогию с ньютоновской жидкостью было предложено определять потери давления по формуле

$$\Delta P = c_f \frac{4L}{D} \cdot \frac{\rho V^2}{2}, \quad (6.20)$$

где c_f – коэффициент сопротивления, функционально зависящий от Re_ϑ и n

$$c_f = \phi(Re_\vartheta, n).$$

Определен вид функции ϕ , входящей в последнее уравнение, распространив на неньютоновские жидкости логарифмический закон сопротивления, предложенный Карманом для ньютоновских жидкостей

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4,0 \cdot \lg \left(Re \cdot \sqrt{c_f} \right) - 0,4.$$

Аналитически можно найти, что для неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, уравнение принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = c_1 \cdot \lg \left(Re_\vartheta \cdot c_f^{1-\frac{n}{2}} \right) + c_2,$$

где c_1 и c_2 – параметры, зависящие только от n .

$$c_1 = \frac{4,0}{n^{0,75}}; \quad c_2 = -\frac{0,4}{n^{1,2}};$$

окончательно коэффициент сопротивления можно записать в следующей форме

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{4,0}{n^{0,75}} \cdot \lg \left[Re_\vartheta \cdot c_f^{1-\frac{n}{2}} \right] - \frac{0,4}{n^{1,2}}. \quad (6.21)$$

Для определения c_f в первом приближении при $Re_\vartheta < 10^5$ можно использовать формулу Блазиуса, полученную для ньютоновских жидкостей

$$c_f = 0,079 \cdot Re^{-0,25}.$$

Обобщив эту формулу для неньютоновских жидкостей и преобразовав ее, получим

$$c_f = a(Re_s)^{-b},$$

где a и b – параметры, определяемые по таблице, зависящие от n .

Таблица 6.1

Соотношения между n и параметрами a и b

n	0,4	0,6	0,8	1,0	1,4
a	0,0712	0,074	0,0761	0,079	0,0804
b	0,307	0,281	0,261	0,250	0,231

В заключении добавим, что выше полученные формулы носят эмпирический характер.

6.9. Поле скоростей при турбулентном течении неньютоновской жидкости

Распределение скоростей по сечению трубопровода при турбулентном режиме течения зависит от многих факторов, в том числе и от условий на стенке.

Кинематические характеристики турбулентного потока неньютоновской жидкости в трубопроводе, так же как и для ньютоновских жидкостей, разбивается на две зоны: а) ламинарный под-слой толщиной δ у стенок трубы; б) развитый турбулентный поток.

По аналогии с ньютоновскими жидкостями, осредненную по времени скорость U можно представить как функцию радиуса R , плотности ρ , напряжения τ_0 , поперечной координаты y и, если жидкость подчиняется степенному реологическому закону, параметров потока K и n

$$U = F(R, \rho, \tau_0, y, K, n).$$

Введем понятие динамической скорости $U_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$.

Для ньютоновской жидкости при турбулентном течении справедлив логарифмический закон распределения скоростей

$$U / U_* = A \cdot \lg(U_* \cdot y / \nu) + B.$$

Согласно рекомендациям Никурадзе $A = 5,75$ и $B = 5,5$.

Применив подобный аргумент для неньютоновских жидкостей, придем к обобщенной формуле универсального профиля скоростей

$$U / U_* = c_1 \cdot \lg \cdot y_* + c_2, \quad (6.22)$$

где y_* определяется из выражения

$$y_* = \frac{y \cdot U_* \rho}{\mu},$$

Постоянные c_1 и c_2 могут быть определены только экспериментально. Причем для течения неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенному закону c_1 и c_2 являются функциями показателя неньютоновского поведения n .

Согласно исследованиям значения коэффициентов c_1 и c_2

$$c_1 = \frac{5,66}{n^{0,75}};$$

$$c_2 = -\frac{0,4}{n^{1,2}} + \frac{2,458}{n^{0,75}} \left[1,96 + 1,255n - 1,628n \cdot \lg \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right].$$

Подставляя значения коэффициентов в уравнение (6.22), получим, формулу для распределения скоростей

$$U / U_* = \frac{5,66}{n^{0,75}} \cdot \lg \left(\frac{y U_* \cdot \rho}{\mu} \right) - \frac{0,4}{n^{1,2}} + \frac{2,458}{n^{0,75}} \left[1,96 + 1,255n - 1,628n \cdot \lg \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right].$$

Если жидкость подчиняется закону Ньютона ($n = 1$), последнее уравнение упрощается и принимает вид известного логарифмического закона

$$U / U_* = 5,66 \cdot \lg \left(\frac{y U_* \cdot \rho}{\mu} \right) + 5,1.$$

РАЗДЕЛ 7

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Своеобразной задачей о движении сплошных сред является изучение перемещения жидкости в пористых средах. Например, все реальные грунты, как правило, представляют собой нагромождение твердых частиц разнообразной формы, между которыми имеются свободные промежутки, называемые порами. Свободное перемещение воды, нефти, газа между порами грунта под действием массовых сил (среди которых особую роль играют силы тяжести) и сил гидродинамического давления носит название фильтрационных движений, или просто фильтрации.

Изучение этих движений весьма существенно в таких задачах, как учет вредных примесей в газе или жидкости, проходящей через фильтрационный материал, просачивания воды под плотинами, приток жидкости к дренажным щелям, фильтрация нефти и газа к буровым скважинам и т. д.

Благодаря значительному развитию теории фильтрации в настоящее время последнюю можно рассматривать как одну из частей механики сплошных сред.

Так же, как и в любом разделе механики сплошных сред, общие дифференциальные уравнения, описывающие движение сплошных сред, при изучении фильтрационных движений замыкаются экспериментальным законом, характеризующим фильтрацию и выделяющим ее в самостоятельный раздел.

При выводе основных уравнений фильтрации широко используются уравнения гидродинамики идеальной жидкости. В связи с этим уравнения гидродинамики и фильтрации родственны, родственны и методы их решения.

Таким образом, теория фильтрации близко примыкает к гидродинамике и в известной мере может рассматриваться как ее ветвь;

Рассмотрим малый объем грунта V , окружающий точку M . Пусть объем пор в объеме V будет V_1 . Тогда величина, равная отношению

$$\frac{V_1}{V} = \sigma_1, \quad (7.1)$$

называется *объемной пористостью*, или просто пористостью грунта.

Из определения σ следует, что пористость меняется в пределах

$$0 \leq \sigma \leq 1. \quad (7.2)$$

При $\sigma=0$ поры в объеме V отсутствуют (грунт без пор); при $\sigma = 1$ поры занимают весь объем V , т. е. жидкость занимает весь объем V . В реальных грунтах σ меняется в пределах от 0,25 до 0,9.

В однородных грунтах пористость σ будет постоянной величиной; в неоднородных — будет меняться от одной точки грунта M к другой. Таким образом, для неоднородных грунтов σ будет функцией координат точек, например, в декартовой системе координат — функцией x, y, z .

Пористость грунта может меняться с течением времени t , например, в результате закупорки пор частицами грунта, переносимыми фильтрационным потоком. Такой грунт можно назвать нестационарным. Увеличение давления протекающей по порам жидкости может повлечь за собой увеличение просветов между частицами грунта, в которых протекает жидкость. Таким образом, σ может зависеть от давления p в жидкости.

Наконец, пористость σ может меняться в результате изменения температуры грунта, которую назовем T_n , и температуры фильтрующейся жидкости $T_{жс}$. Изменение указанных температур может происходить, например, при изменении атмосферной температуры, при закачке газа и пара в нефтяной пласт и т. д. Таким

образом, в самом общем случае пористость α будет выражаться функциональной зависимостью вида

$$\sigma = \sigma(x, y, z, p, t, T_n, T_{жс}). \quad (7.3)$$

Пористая среда считается в целом недеформируемой, поэтому функциональная зависимость (7.3) будет заданной.

При движении жидкости в сложном лабиринте узких пор от одной точки жидкости к другой происходит чрезвычайно резкое изменение направления и величины скорости. Однако доступны измерению и представляют практический интерес только средние скорости частиц жидкости, протекающей в грунте, занимающем объем V . Введем понятие средней скорости по объему пор V_1 , которая называется *физической скоростью* и обозначается \vec{v}_δ , и понятие средней скорости по объему V , которая называется *скоростью фильтрации* и обозначается \vec{v} . Пусть точка M расположена в порах грунта. Проведем через нее площадку ΔS и обозначим расход жидкости, протекающей в единицу времени через эту площадку, ΔQ . Ориентируя площадку, проходящую через точку M , различным образом, можно добиться того, что ΔQ будет максимальным. Введем обозначения: максимальный расход ΔQ_{\max} , соответствующая площадка ΔS_n и единичный вектор нормали к ΔS_n , направленный в сторону вытекающей жидкости, \vec{n}_0 (рис. 7.1). Пусть площадь пор, пересекающих \vec{n}_0 , будет ΔS_{1n} . Тогда средняя физическая скорость, отнесенная к площадке, будет

$$\vec{v}_{ф.ср} = \frac{\Delta Q_M}{\Delta S_{1n}} \vec{n}_0. \quad (7.4)$$

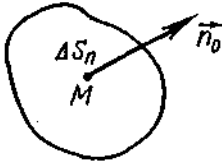


Рис.7.1

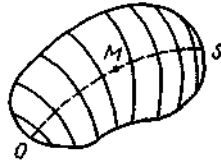


Рис.7.2

Наряду с $\vec{v}_{\phi, cp}$ можно ввести понятие средней скорости фильтрационного потока \vec{v}_{cp} , отнесенной к площадке, которая определяется формулой

$$v_{cp} = \frac{\Delta Q_M}{\Delta S_n} n_0. \quad (7.5)$$

Фильтрационный поток можно рассматривать как некоторую модель осредненного по площади физического потока. Из равенств (2.11) и (2.12) имеем

$$\vec{v}_{\phi, cp} \Delta S_{1n} = \vec{v}_{cp} \Delta S_n. \quad (7.6)$$

Рассмотрим малый объем V , окружающий точку M . Представим V как набор площадок ΔS_n , \vec{n}_0 которых являются касательными к некоторой дуге OS (рис. 7.2). Тогда V можно представить в виде

$$V = \int_0^s \Delta S_n(s) ds \quad (7.7)$$

$$dV = \Delta S_n(s) ds \quad (7.8)$$

Аналогично, обозначив через V_I объем пор, расположенных в объеме V , имеем

$$V_I = \int_0^s \Delta S_{1n} ds \quad (7.9)$$

$$dV_I = \Delta S_{1n} ds \quad (7.10)$$

Применяя равенство (7.6) к различным площадкам объема V , получаем, что $v_{\phi.cp}$ и v_{cp} , ΔS_{1n} и ΔS_n будут функциями s . Умножив (7.6) на ds и проинтегрировав в пределах от 0 до s , имеем

$$\int_0^s \vec{v}_{\phi.cp} \Delta S_{1n} ds = \int_0^s \vec{v}_{cp} \Delta S_n ds,$$

или, используя (7.8) и (7.10), запишем

$$\int_{V_I} \vec{v}_{\phi.cp} dV_I = \int_V \vec{v}_{cp} dV,$$

где V_I - объем пор в объеме V .

Среднее по объему значение $\vec{v}_{\phi, \bar{n}\delta}$ будет скоростью физического потока \vec{v}_{ϕ} ; среднее по объему значение $\vec{v}_{\bar{n}\delta}$ будет скоростью фильтрационного потока \vec{v} . Используя теорему о среднем значении интеграла, из последнего соотношения имеем

$$\vec{v}_{\phi} \int_{V_I} dV_I = \vec{v} \int_V dV,$$

или

$$\vec{v}_{\phi} V_I = \vec{v} V.$$

Используя равенство (7.1), имеем

$$\vec{v} = \sigma \vec{v}_\phi. \quad (7.11)$$

Из формулы (7.11) следует, что физическая скорость \vec{v}_δ всегда больше, чем скорость соответствующего фильтрационного потока \vec{v} . В самом общем случае физическая скорость, а следовательно, и скорость фильтрации будут функциями координат и времени.

Понятие фильтрационной скорости не отражает реального потока и является фиктивной величиной, определенным образом связанной со средней по объему реальной скоростью. Введение этого понятия удобно при составлении уравнений движения фильтрационных потоков.

Используя понятие скорости фильтрации, запишем уравнение неразрывности фильтрационного потока. Выберем в пористой среде некоторый объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Масса жидкости, вытекающей через эту поверхность в единицу времени в результате фильтрации, будет

$$\int_S \rho v_n dS = \int_V \text{div} \rho \vec{v} dV, \quad (7.12)$$

где v_n — нормальная составляющая скорости фильтрации \mathbf{v} в точках поверхности S , ρ — плотность реальной жидкости, протекающей по порам.

Масса жидкости, заключенная в единице объема пористой среды V , будет $-\frac{\rho V_1}{V} = \sigma \rho$. Уменьшение ее за единицу времени равно $-\frac{\partial \rho \sigma}{\partial t}$. Уменьшение массы жидкости в объеме dV в едини-

цу времени будет $-\frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} dV$. Во всем объеме V уменьшение массы жидкости в единицу времени выражается интегралом

$$-\int_V \frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} dV.$$

Следовательно, используя равенство (7.12), имеем

$$\int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = -\int_V \frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} dV.$$

Отсюда в результате произвольности объема V имеем следующее уравнение неразрывности фильтрационного потока

$$\frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (7.13)$$

Если перейти в последнем уравнении от скорости фильтрации к физической скорости \mathbf{v}_ϕ согласно формуле (7.11), то придем к уравнению вида

$$\frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \sigma \vec{v}_\phi = 0. \quad (7.14)$$

Уравнение неразрывности (7.13) или (7.14) представляет собой закон сохранения массы фильтрующейся жидкости, записанный при условии, что объем, занимаемый жидкостью, остается неизменным.

В общем случае \vec{v} и \vec{v}_ϕ будут функциями координат и времени, ρ определяется из уравнения состояния фильтрующейся жидкости, согласно которому ρ представляет собой функцию давления p и температуры жидкости $T_{жс}$, причем $T_{жс}$ связана с температурой грунта T_n и последняя предполагается заданной.

Динамические уравнения фильтрации. Динамические уравнения движения грунтовых вод являются основой теоретического изучения фильтрационного движения так же, как и любого из разделов механики.

Так как фильтрация происходит в узких каналах сложной формы, которыми являются поры, то в этих движениях чрезвычайно велика роль сил вязкости, ибо последние проявляются главным образом вблизи твердых стенок. Поэтому изучение фильтрации должно было бы опереться на уравнение движения вязкой жидкости Навье — Стокса. Однако решение последних при сложнейших граничных условиях на поверхности твердых частиц, ограничивающих поры, практически не осуществимо. Вследствие этого в основу теоретического изучения фильтрации положены экспериментальные законы фильтрации. Эти законы так же, как и уравнения гидродинамики, устанавливают зависимость между полями скоростей, давлений и массовых сил и относятся к осредненным значениям скоростей жидкости при ее фильтрационном движении.

Уравнение Эйлера, как следует из предыдущей части, является основным и простейшим уравнением динамического поведения жидкостей.

Предполагая, что это уравнение в какой-то мере отражает и фильтрационные движения жидкостей, можно надеяться при помощи его установить основной характер экспериментального закона, описывающего фильтрационные движения.

Итак, предположим, что средняя скорость физического потока v_ϕ или связанная с ней соотношением (7.11) скорость фильтрации v удовлетворяет уравнению Эйлера. В этом потоке будут действовать сила гидродинамического давления - $\frac{1}{\rho} grad p$ и массовая сила \vec{F} .

В частном случае \vec{F} будет силой тяжести, которая в декартовой системе координат, если ось z направлена вертикально вверх, имеет вид - $\frac{1}{\rho} grad gz$. Кроме того, так как при фильтрации

жидкости очень большую роль играют силы трения, то последние в уравнении Эйлера можно моделировать силами сопротивления. Как известно, силы сопротивления являются некоторыми функциями скорости точки и направлены в сторону, противоположную вектору скорости, т. е. эти силы имеют вид - $f(v)\frac{v}{v}$, где $f(v)$ — положительная функция модуля вектора скорости фильтрации. Итак, уравнение движения фильтрационного потока можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{F} - f(v) \frac{\vec{v}}{v}. \quad (7.15)$$

Фильтрационные движения происходят с малыми скоростями (просачивание через грунт идет очень медленно). Невелики и изменения скоростей по координатам. Вследствие этого в уравнении (2.22) можно пренебречь членом $(\vec{v} \text{grad}) \vec{v}$ по сравнению с силами сопротивления среды. Это будут так называемые ползущие движения. Уравнение (2.22) приобретает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{F} - f(v) \frac{\vec{v}}{v}. \quad (7.16)$$

В частном случае для стационарных режимов формулу (7.16) перепишем в виде

$$f(v) \frac{\vec{v}}{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (7.17)$$

Для стационарных режимов несжимаемой жидкости, происходящих под действием силы тяжести, (7.16) имеет вид

$$f(v) \frac{\vec{v}}{v} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = d\vec{J}, \quad (7.18)$$

где безразмерная величина

$$\vec{J} = -grad \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (7.19)$$

есть градиент пьезометрического напора.

Следовательно, искомые силы сопротивления консервативны.

Экспериментально установлено, что при мелкозернистом грунте и сравнительно малых скоростях фильтрации имеет место линейная зависимость \vec{v} от \vec{J} :

$$\vec{v} = k_1 \vec{J} = -k_1 grad \left(\frac{p}{\rho g} + z \right), \quad (7.20)$$

а в плотных глинах

$$\vec{v} = k_1 (\vec{J} - \vec{i}_0), \quad (7.21)$$

где \vec{i}_0 называется начальным градиентом.

За пределами линейной зависимости, что, вероятно, следует связать с переходом от ламинарного режима фильтрации к турбулентному, установлены закономерности вида

$$\vec{J} = (A\nu + B\nu^2) \frac{\vec{v}}{\nu}; \quad (7.22)$$

$$\vec{J} = C\sqrt{\nu} \frac{\vec{v}}{\nu}. \quad (7.23)$$

Постоянные k_1 , \vec{i}_0 , A , B , C , n определяются из эксперимента.

Ограничимся рассмотрением линейной зависимости скорости фильтрации и градиента пьезометрического напора (7.20), которая отвечает наиболее распространенным условиям фильтрации в природных грунтах. Эта зависимость называется *законом Дарси*. Фильтрационные течения, подчиняющиеся закону Дарси, называются *линейной фильтрацией*.

Закон (7.20) описывает линейную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости, находящейся под действием сил тяжести в однородном грунте.

В теоретических исследованиях закону Дарси обычно придают следующую форму

$$\vec{v} = -\frac{k_1}{\rho g} \text{grad} p^* = -\frac{k_1}{\gamma} \text{grad} p^*, \quad (7.24)$$

где $p^* = p + \rho gz = p + \gamma z$ называется *приведенным давлением*. Можно указать верхний предел применимости закона Дарси (7.24). Он справедлив при следующих числах Рейнольдса

$$R = \frac{vd}{\nu} \leq 3 \div 10,$$

где v - скорость фильтрационного потока, обычно выражаемая в см/с; d - средний линейный размер частиц грунта; ν — кинематический коэффициент вязкости фильтрующейся жидкости.

Таким образом, закон Дарси применим (как уже говорилось) для мелкозернистых грунтов и малых скоростей фильтрующейся жидкости.

Существует и нижний предел применимости этого закона. Тонкая структура грунта и малые скорости движения жидкости приводят к тому, что начинают играть существенную роль силы молекулярного сцепления, нарушающие свободный проток жидкости между порами. Это приводит к тому, что не выполняются условия, определяющие фильтрацию жидкости.

Коэффициент k_1 в равенстве (7.24) имеет размерность скорости и носит название *коэффициента фильтрации*. Он зависит от

свойств грунта, величины и формы зерен, образующих грунт. Эксперименты указывают, что при просачивании воды коэффициент фильтрации для различных грунтов колеблется от 1 см/с до 0,000 000 3 см/с. Например, для чистых различных песков k_f меняется от 1 до 0,01 см/с; для глинистого песка — от 0,01 до 0,005 см/с, для солнцеватой глины - от 0,000 001 до 0,000 000 3 см/с. Предельным случаем будет абсолютно непроницаемый грунт, для которого $k_f = 0$. Однако в природе таких грунтов нет и под непроницаемым грунтом понимают грунт, проницаемость которого очень мала по сравнению с проницаемостью грунта соседнего слоя. Другим предельным случаем будет в грунте область свободной жидкости, не стесненная порами. Она характеризуется $k_f = \infty$.

Коэффициент фильтрации k_f зависит не только от свойств грунта, но и от свойств фильтрующейся жидкости, именно зависит от вязкости жидкости μ , которая, в свою очередь, зависит от давления в жидкости p и температуры жидкости $T_{жс}$. Таким образом, коэффициент фильтрации k_f характеризует и грунт, и жидкость, которая в нем фильтруется. Если рассматривать в одном и том же грунте фильтрацию различных жидкостей, например, воды, нефти, газа, то последнее обстоятельство весьма неудобно. Вследствие этого, рассматривая фильтрацию различных жидкостей, целесообразно придать закону Дарси (2.17) другой вид, а именно ввести в этот закон в явном виде коэффициент вязкости жидкости μ

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} p^*, \quad (7.25)$$

где k носит название *коэффициента проницаемости* слоя.

Из равенств (7.24) и (7.25) следует

$$\frac{k_f}{\rho g} = \frac{k}{\mu},$$

или, так как $v = \mu/\rho$ то

$$k_1 = \frac{kg\rho}{\mu} = \frac{kg}{\nu} \quad (7.26)$$

Коэффициент проницаемости k связан с пористостью грунта σ . Эта зависимость дается достаточно сложными экспериментальными формулами.

В качестве примера зависимости k от σ можно указать формулу Козени вида

$$k = 8,4(1,275 - 1,5\sigma)^2 \frac{d^2\sigma^2}{(1-\sigma)^2},$$

где d - диаметр (эффективный) зерен, составляющих грунт.

Коэффициент вязкости в случае постоянной температуры и значительных перепадов давлений в жидкости зависит от давления линейно:

$$\mu = n\rho + \alpha, \quad (7.27)$$

где n и α — некоторые постоянные, определяемые экспериментально.

Но если перепады давления не слишком велики, то μ от p не зависит.

Как указывалось, закон Дарси справедлив для несжимаемой жидкости, стационарно фильтрующейся под действием сил тяжести. Перепишем для этого случая ($\frac{\partial v}{\partial t} = 0$) равенство (7.16) в виде

$$f(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{\nu} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = -\frac{1}{\rho} (\rho \text{grad} z d + \text{grad} p). \quad (7.28)$$

Последнюю скобку с учетом закона Дарси (7.25) можно записать так

$$-(\rho \text{grad} z d + \text{grad} p) = \frac{\mu}{k} \vec{v}.$$

Отсюда равенству (7.28) можно придать вид

$$f(v) \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\mu}{\rho k} \vec{v}. \quad (7.29)$$

Обобщением этого закона на стационарные режимы будет предположение, что он справедлив при действиях не только сил тяжести, но и любых других сил. Последние могут быть, например, силами электрического или магнитного происхождения, а при относительном движении фильтрующейся жидкости — силами инерции переносного и кориолисова ускорений.

Итак, используя равенство (7.28) или (7.29), обобщенный закон Дарси для любых сил можно записать в виде

$$\vec{v} = \frac{k}{\mu} (\rho \vec{F} - \text{grad} p). \quad (7.30)$$

В этом равенстве $\frac{k}{\mu}$ есть постоянная величина, что вытекает из соотношения (7.29). Следовательно, закон (7.30) имеет место для стационарных режимов однородных грунтов и жидкостей с постоянной вязкостью.

Продолжая дальнейшие обобщения закона Дарси, предположим, что грунт неоднороден. Так как коэффициент проницаемости связан с пористостью грунта σ , то в самом общем случае для неоднородных нестационарных грунтов k будет зависеть от тех же переменных, что и σ , т. е.

$$k = k(x, y, z, t, p, T_{II}, T_{ж}). \quad (7.31)$$

Вид функциональной зависимости k в фильтрационных задачах должен быть задан.

Далее, вязкость жидкости может быть также переменной величиной и меняться в зависимости от изменения давления p и температуры $T_{ж}$.

$$\mu = \mu(p, T_{ж}). \quad (7.32)$$

Вид этой зависимости должен быть указан.

Плотность жидкости ρ также в общем случае есть функция давления и температуры

$$\rho = \rho(p, T_{ж}) \quad (7.33)$$

Предполагая, что равенство (7.33) выполняется и в случае (7.31), (7.32), получим дальнейшие обобщения закона Дарси, справедливость которых должна проверяться и подтверждаться экспериментом.

Заметим, что приведенное в настоящем пункте обобщение уже предполагает, что силы сопротивления - $f(\nu) \frac{\vec{v}}{\nu}$ таковы, что коэффициенты, входящие в f , будут зависеть от координат x, y, z , давления p и температур жидкости $T_{ж}$ и породы T_n .

Рассмотрим нестационарные режимы движения жидкости. Обращаясь к равенству (7.16), заменим в нем силы сопротивления - $f(\nu) \frac{v}{\nu}$ по формуле (27.18) и будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{F} - \frac{\mu}{k\rho} \vec{v}. \quad (7.34)$$

Последнее равенство описывает нестационарную фильтрацию жидкости в изотропном грунте.

Пусть грунт, в котором происходит фильтрация, имеет слоистую структуру. Это приводит к тому, что при фильтрации вдоль слоя в перпендикулярном к слою направлении коэффициент проницаемости будет иметь разные значения. В этом случае можно говорить, что слой анизотропен. Предположим, что коэффициент проницаемости различен вдоль трех взаимно перпендикуляр-

ных направлений x , y , z . Тогда взамен уравнения (7.34) имеют место равенства вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{H_1} \frac{\partial \rho}{\partial q_1} + F_1 - \frac{\mu}{\rho k_1} v_1; \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial q_2} + F_2 - \frac{\mu}{\rho k_2} v_2; \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{H_3} \frac{\partial \rho}{\partial q_3} + F_3 - \frac{\mu}{\rho k_3} v_3;\end{aligned}\tag{7.35}$$

Исследования конкретных случаев указывают, что члены $\partial v_k / \partial t$ ($k = 1, 2, 3$) малы по сравнению с другими членами соотношений (7.35), поэтому закону Дарси для нестационарных движений можно придать вид

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{k_1}{\mu} \left(F_1 \rho - \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} \right); \\ v_2 &= \frac{k_2}{\mu} \left(F_2 \rho - \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} \right); \\ v_3 &= \frac{k_3}{\mu} \left(F_3 \rho - \frac{1}{H_3} \frac{\partial p}{\partial q_3} \right);\end{aligned}\tag{7.36}$$

где $v_1, v_2, v_3, F_1, F_2, F_3, \rho, p$ будут функциями координат и времени.

Закон Дарси, полученный на основе эксперимента, дает осредненные значения величин, в него входящих. Таким образом, он носит статистический характер.

Закон Дарси (7.24) и его обобщения, справедливые в линейной фильтрации (которые все в дальнейшем будем называть коротко законом Дарси), устанавливают зависимость между расходом жидкости, связанным с физической скоростью и скоростью

фильтрации, гидродинамическим давлением, плотностью жидкости и ее вязкостью. Таким образом, это динамический закон, который в теории линейной фильтрации играет такую же роль, как и уравнение Навье - Стокса в теории движения вязкой жидкости и уравнение Эйлера в теории движения идеальной жидкости.

Так же, как и уравнение Навье - Стокса, закон Дарси получен при использовании уравнения Эйлера. Отметим, что в закон Дарси и его обобщения входила скорость фильтрации \mathbf{v} . Однако, используя равенство (7.11), можно ввести во все виды этого закона физическую скорость.

При изучении фильтрации жидкости следует задать характеристики грунта, основные свойства фильтрующейся жидкости, силы, действующие на нее, и термодинамические условия, в которых происходит фильтрация. Грунт характеризуется пористостью σ и коэффициентом проницаемости k , которые в общем случае должны быть заданы в виде некоторых функций координат, времени, давления в жидкости и температур жидкости и грунта. Свойства фильтрующейся жидкости характеризуются ее вязкостью, которая в общем случае должна быть задана как функция давления и температуры жидкости. Кроме того, должны быть указаны свойства, характеризующие сжимаемость жидкости, которые задаются тем или иным уравнением состояния, дающим функциональную зависимость плотности ρ , давления p и температуры жидкости $T_{ж}$.

$$f(\rho, p, T_{ж}) = 0. \quad (7.37)$$

Массовые силы, действующие на фильтрующуюся жидкость, должны быть заданы. Как правило, в задачах фильтрации это будут силы тяжести. Если температуры жидкости и грунта постоянны, то уравнение (7.37) будет иметь вид

$$\rho = Cp^{1/n}. \quad (7.38)$$

В этом случае искомыми в задачах фильтрации являются поле скорости \mathbf{v} , поле давления p и плотность жидкости ρ , т. е. в

случае баротропной жидкости искомыми являются пять скалярных величин. Для определения этих неизвестных имеем три уравнения (7.36) обобщенного закона Дарси, уравнение неразрывности (2.30) и уравнение состояния (7.37), конкретный вид которого зависит от характера фильтрующейся жидкости.

Если температуры жидкости и грунта изменяются, то к указанным уравнениям должны быть присоединены еще два уравнения, включающие $T_{жс}$ и T_n .

От уравнений (7.36), используя уравнение неразрывности (7.13), можно перейти к одному уравнению, записанному в ортогональных криволинейных координатах q_1, q_2, q_3

$$\begin{aligned} & H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \sigma p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\rho H_1 H_2 k_1}{\mu} \left(F_1 \rho - \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\rho H_3 H_1 k_2}{\mu} \left(F_2 \rho - \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{\rho H_1 H_2 k_3}{\mu} \left(F_3 \rho - \frac{1}{H_3} \frac{\partial p}{\partial q_3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Это уравнение можно назвать уравнением фильтрационных движений, подчиняющихся закону Дарси, или коротко *уравнением линейной фильтрации*.

Уравнение линейной фильтрации представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, поэтому следует указать типы граничных условий, при которых оно должно интегрироваться. Перечислим простейшие из этих условий.

I. Границей области фильтрации является непроницаемая поверхность (область 1 на рис. 7.3). Вдоль этой поверхности нормальная составляющая скорость должна равняться нулю

$$(v_n)_L = 0. \quad (7.40)$$

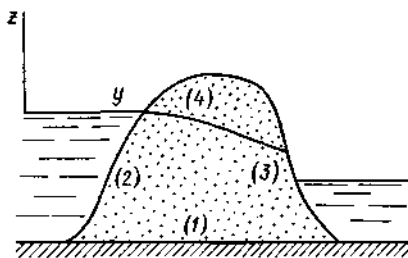


Рис.7.3

II. Области фильтрации жидкости могут граничить с областями свободной жидкости. Вдоль таких границ жидкость, уже не стесненная порами, вытекает свободно нормально к поверхности. Следовательно, на границах L области фильтрации со свободной жидкостью касательные составляющие скорости равны нулю:

$$(v_s)_L = 0. \quad (7.41)$$

III. Предположим, что водный бассейн, с которым граничит область фильтрации, столь велик, что всасывание или выбрасывание жидкости в результате фильтрации на L пренебрежимо мало (область 2 на рис. 7.3). Тогда можно считать, что в бассейне давление подчиняется гидростатическому закону. Если на свободной поверхности бассейна давление равно атмосферному P_a то на границе L должно выполняться следующее динамическое условие

$$p^* = (p + \rho g z)_L = p_a, \quad (7.42)$$

где координата z отсчитывается от свободной поверхности и имеет положительное значение в направлениях вертикально вверх.

IV. Предположим, что область фильтрации граничит с атмосферой (область 3 на рис. 7.3). Такие границы называются *поверхностями высачивания*. На них фильтрующаяся жидкость высачивается и стекает струйками вдоль поверхности или испаряется. Давление на поверхности высачивания равняется атмосферному. Поэтому для приведенного давления имеем условие

$$(p^*)_L = p_a + \rho g z.$$

V. Предположим, что L представляет собой поверхность, разделяющую области I и II различной скачкообразно изменяющейся на L проницаемости. В этом случае должны выполняться кинематическое условие равенства на L нормальных составляющих скоростей в областях I и II и равенства давлений на L этих областей, т. е.

$$\begin{aligned} (v_{n1})_L &= (v_{n2})_L; \\ (p_1)_L &= (p_2)_L. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Граничные условия, указанные выше, характерны тем, что они осуществляются на заданной неподвижной поверхности L . Значительно более сложными являются граничные условия, которые должны выполняться на неизвестных заранее поверхностях.

VI. Границей области фильтрации, например, может служить поверхность раздела между сухим и влажным грунтом (область 4 на рис. 7.3). Такая поверхность называется *свободной*, или *депрессионной*. Уравнение этой поверхности при формулировке фильтрационной задачи неизвестно. Полагая, что поры грунта сообщаются с атмосферой, следует положить, что на депрессионной поверхности L давление равняется атмосферному. Следовательно, приведенное давление на L подчиняется условию

$$(p^*)_L = p_a + \rho g z. \tag{7.44}$$

Одновременно на депрессионной поверхности должно выполняться кинематическое условие, а именно при установившейся фильтрации депрессионная поверхность не перемещается, вследствие этого составляющие скорости фильтрации по нормали к поверхности равны нулю

$$(v_n)_L = 0. \tag{7.45}$$

VII. Изучая вопросы фильтрации жидкости в пористых средах, приходится сталкиваться с вопросами вытеснения одной жидкости другой. Например, при эксплуатации газовых месторождений приходится сталкиваться с вытеснением нефти и газа водой. Это будут задачи о движении в пористой среде границы раздела двух жидкостей с различными физическими свойствами - вязкостью и плотностью. На этой подвижной границе раздела L двух сред должны выполняться условия равенства давлений и нормальных скоростей обеих сред, т. е.

$$\begin{aligned} (v_{n1})_L &= (v_{n2})_L; \\ (p_1)_L &= (p_2)_L. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Таким образом, условия (7.43) и (7.46) идентичны. Однако (7.43) выполняются на заданной границе L , а (7.46) выполняются на подвижной неизвестной в общем случае границе. Поэтому должны быть указаны дополнительные условия для определения этой поверхности.

Фильтрационные течения, описываемые уравнением Лапласа. Фильтрация газа.

Уравнения установившейся фильтрации жидкости, находящейся под действием силы тяжести, в декартовых координатах на основании равенств (2.32) и (2.20) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0. \quad (7.47)$$

Если жидкость несжимаема, обладает постоянной вязкостью и грунт однороден, то можно ввести функцию φ вида

$$\varphi = -\frac{\rho k}{\mu} p^* = -\frac{\rho k}{\mu} (p + \rho g z), \quad (7.48)$$

относительно которой (7.39) обращается в уравнение Лапласа. Вводя понятие массовой скорости, равной произведению ρ на \mathbf{v} , и используя закон Дарси (7.14), запишем

$$\rho \vec{v} = \text{grad} \phi^*. \quad (7.49)$$

Следовательно, массовая скорость представляет собой потенциальный вектор. Но для несжимаемой жидкости, которая рассматривается в настоящем пункте, в уравнении (7.47) ρ можно сократить и записать

$$\vec{v} = \text{grad} \left(-\frac{k}{\mu} p^* \right) = \text{grad} \left[-\frac{k}{\mu} (p + \gamma z) \right] = \text{grad} \phi, \quad (7.50)$$

где ϕ (и p) является функцией координат

$$\phi = \phi(x, y, z).$$

Обращаясь к равенству (7.47), получим, что ϕ равенства (7.50) удовлетворяет уравнению Лапласа.

Следовательно, для несжимаемой, обладающей постоянной вязкостью жидкости, фильтрующейся в однородном грунте, скорость фильтрации обладает потенциалом, который удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении фильтрации сжимаемой жидкости в большинстве случаев следует пренебречь силами тяжести, ибо для упругих жидкостей они малы по сравнению с силами давления. При фильтрации газа, плотность которого мала, силы тяжести незначительны и, следовательно, ими можно пренебречь. Тогда уравнение (7.47) заменится уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (7.51)$$

Предположим, что ρ , k , μ зависят только от давления p . В этом случае можно ввести функцию Лейбензона

$$\varphi = -\int \frac{\rho(p)k(p)}{\mu(p)} dp. \quad (7.52)$$

Так как массовая скорость фильтрации в рассматриваемом случае на основании (7.25) определяется в виде

$$\rho \bar{v} = -\frac{\rho k}{\mu} \text{grad} p = \text{grad} \varphi, \quad (7.53)$$

то функция Лейбензона φ , как следует из равенства (7.51), удовлетворяет уравнению Лапласа.

Итак, при стационарной фильтрации газа, когда плотность жидкости, ее вязкость и проницаемость грунта зависят от давления, массовая скорость фильтрации обладает потенциалом, который удовлетворяет уравнению Лапласа.

Результаты, замечательны в том отношении, что изложенные в них задачи фильтрационных движений сжимаемой и несжимаемой жидкостей сводятся к уравнению Лапласа. Вследствие этого справедлив принцип наложения потоков.

Для того чтобы фильтрационные течения несжимаемой и сжимаемой жидкостей описывались одним и тем же решением уравнения Лапласа, необходимо, чтобы эти течения обладали одинаковыми граничными условиями, сформулированными для φ^* [равенство (7.49)] и φ [равенство (7.53)].

I. Пусть движение установившееся и жидкость несжимаема. Используя равенство (7.49), запишем условие на проницаемой границе

$$v_n = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_L = 0. \quad (7.54)$$

Аналогично, используя (7.42), запишем условие на границе свободной жидкости

$$v_s = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_L = 0. \quad (7.55)$$

Но так как переменное направлено на поверхности L , то из последнего равенства следует, что на границе свободной жидкости φ сохраняет постоянное значение, т. е.

$$(\varphi)_L = \text{const}. \quad (7.56)$$

Условия на границе раздела грунтов с различными проницаемостями (7.43), если \mathbf{v} определяется равенством (7.49), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right)_L &= \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right)_L; \\ (\alpha \varphi_1)_L &= (\varphi_2)_L, \end{aligned} \quad (7.57)$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы скоростей в областях соответственно с проницаемостями k_1 , k_2 и $\alpha = k_2/k_1$.

Граничным условиям (7.57) можно придать другой вид. Дифференцируя последнее равенство по s , найдем

$$(\alpha v_{s1})_L = (v_{s2})_L, \quad (7.58)$$

где v_{s1} и v_{s2} — составляющие скорости вдоль поверхности L соответственно в областях с проницаемостями k_1 и k_2 . Первое равенство (7.57) запишем в виде

$$(v_{1n})_L = (v_{2n})_L, \quad (7.59)$$

где v_{1n} и v_{2n} — нормальные к поверхности L скорости соответственно в областях с проницаемостями k_1 и k_2 . Разделив (7.59) на (7.58), имеем

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{v_{n1}}{v_{s1}} \right)_L = \left(\frac{v_{n2}}{v_{s2}} \right)_L. \quad (7.60)$$

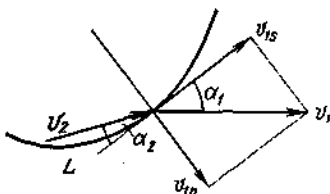


Рис. 7.4

Но v_{n1}/v_{s1} и v_{n2}/v_{s2} представляют собой тангенсы углов α_1 и α_2 , которые составляют векторы скорости с поверхностью L в областях с проницаемостями k_1 и k_2 соответственно (рис. 7.4), т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \alpha \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (7.61)$$

Последнее равенство, идентичное (2.64), указывает, что отношение тангенсов, которые составляют скорости \vec{v}_1 , и \vec{v}_2 с поверхностью L , равно α . Таким образом, линии тока преломляются на поверхности L .

Рассмотренные выше три типа граничных условий (7.54), (7.52) и (7.54) могут быть заменены одним условием (7.54) или (7.60). Действительно, (7.54) следует из (7.60) при $\alpha = 0$ и (7.55) следует из (7.60) при $\alpha = \infty$.

II. Пусть жидкость сжимаема, ρ , μ являются функциями p и k постоянно. Перепишем условия (7.40) и (7.41) для массовой скорости, тогда они будут иметь вид

$$(\rho v_n)_L = 0 \quad (7.62)$$

и

$$(\rho v_s)_L = 0. \quad (7.63)$$

Точно так же условие (7.43) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\rho v_{n1})_L &= (\rho v_{n2})_L; \\ (p_1)_L &= (p_2)_L. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Обращаясь к равенствам (7.52) и (7.53), условия (7.54) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right)_L &= \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right)_L; \\ \left(\frac{\varphi_1}{k_1} \right)_L &= \left(\frac{\varphi_2}{k_2} \right)_L, \end{aligned} \quad (7.67)$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы массовых скоростей в областях с проницаемостями соответственно k_1 и k_2 ; k_1 , k_2 постоянны.

Равенства (2.72) идентичны с равенствами (2.64). Следовательно, граничные условия на твердых стенках, на границах свободной жидкости и на границах раздела областей с различными проницаемостями, записанные для потенциала скорости в случае несжимаемой жидкости и для потенциала массовой скорости в случае сжимаемой жидкости при k_1 и k_2 постоянных, будут идентичны. Отсюда следует, что рассмотренные в настоящем параграфе вопросы фильтрации сводятся к решению уравнения Лапласа вида

$$\Delta U = 0 \quad (7.68)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_1}{\partial n} \right)_L &= \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} \right)_L; \\ \left(\frac{\Phi_1}{k_1} \right)_L &= \left(\frac{\Phi_2}{k_2} \right)_L, \end{aligned} \quad (7.69)$$

где $\frac{k_2}{k_1} = \alpha$ меняется в пределах

$$0 \leq \alpha \leq \infty.$$

Предположим, что найдено решение уравнения Лапласа (7.68) в виде

$$U = U(x, y, z) \quad (7.70)$$

при граничных условиях (7.69), которые выполняются на какой-либо поверхности L . Тогда на основании равенств (7.48) и (7.52) можем записать

$$U(x, y, z) = -\frac{\rho k}{\mu} (p + \rho g z);$$

$$U(x, y, z) = \int \frac{\rho(p)k(p)}{\mu(p)} dp = f(p).$$

Отсюда можно определить поля давлений соответственно несжимаемой и сжимаемой жидкостей в виде

$$p = \frac{\mu}{k\rho}(\rho g z - U(x, y, z)); \quad (7.71)$$

$$p = f[U(x, y, z)], \quad (7.72)$$

где f_1 является обращением функции $f [U=f(p)]$.

Поля массовых скоростей при стационарной фильтрации, несжимаемой и сжимаемой жидкостей, будут одинаковыми:

$$\rho \vec{v} = \text{grad} \vec{U}(x, y, z). \quad (7.73)$$

Поля скоростей для несжимаемой и сжимаемой жидкостей будут различными. Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) имеем

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \text{grad} \vec{U}(x, y, z); \quad (7.74)$$

для сжимаемой жидкости

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho(p)} \text{grad} \vec{U}(x, y, z), \quad (7.75)$$

где p определяется равенством (7.71) и $\rho = \rho(p) = \rho \{f_1(x, y, z)\}$. Это равенство определяет поле давлений сжимаемой жидкости при ее стационарной фильтрации.

Таким образом, любое решение $U=U(x, y, z)$ уравнения Лапласа при граничных условиях (7.69) будет решением той или иной задачи стационарных фильтрационных течений несжимаемой и сжимаемой жидкостей.

Как следует из равенства (7.39), уравнение фильтрации, записанное в декартовых координатах (7.47), имеет место и при неустановившихся движениях, если плотность жидкости ρ и пористость грунта σ не меняются с течением времени. В этом случае при постоянных значениях коэффициента проницаемости k грунта

и вязкости μ и при предположении, что на жидкость действуют силы тяжести, можно ввести потенциал скорости [аналогичный (7.49)]

$$\vec{v} = \text{grad} \left[-\frac{k}{\mu} (p + \gamma z) \right] = \text{grad} \phi, \quad (7.76)$$

где [в отличие от (7.49)] ϕ (и p) является функцией координат и времени

$$\phi = \phi(x, y, z, t).$$

Потенциал ϕ в рассматриваемом неустановившемся движении будет удовлетворять уравнению Лапласа, как следует из уравнений (7.76) и (7.47) (ρ полагается постоянным).

В простейшем случае нестационарность фильтрационных течений может явиться результатом того, что изменяется давление в свободной жидкости, ограничивающей по неизменной поверхности L грунт, в котором происходит фильтрация. В этом случае ϕ на границе свободной жидкости L согласно (7.55) будет удовлетворять равенству

$$(\phi)_L = f(t). \quad (7.77)$$

Так как касательная составляющая скорости на неменяющейся с течением времени поверхности L будет оставаться равной нулю, то одновременно на L имеем

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_L = 0. \quad (7.78)$$

Так как L неизменна и условие (7.78) идентично условию стационарных течений, то следует полагать, что потенциал скорости фильтрации будет выражаться как произведение двух функ-

ций, одна из которых зависит только от времени t , другая будет функцией x, y, z , т. е.

$$\varphi = f(t)\varphi_0(x, y, z).$$

При фильтрации газа сила давления значительно больше силы тяжести, т. е. членом γz можно пренебречь по сравнению с p . Закон Дарси в этом случае запишем в виде

$$\gamma \bar{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} \int \gamma dp, \quad (7.79)$$

где $\gamma \bar{v}$ называется весовой скоростью; γ является функцией давления.

Уравнение неразрывности (7.13) в случае нестационарной фильтрации через весовую скорость запишем в виде

$$\frac{\partial \gamma \sigma}{\partial t} + \text{div} \gamma \bar{v} = 0. \quad (7.80)$$

Из анализа фильтрации различных газов в природных грунтах следует, что сжимаемость газа незначительна, однако пористость грунта меняется пропорционально давлению, т. е. справедливы следующие зависимости:

$$\int \gamma dp = \gamma_0 p; \quad \gamma \sigma = \chi \gamma_0 p, \quad (7.81)$$

где γ_0 — постоянная;

χ — постоянный коэффициент, учитывающий свойства грунта и жидкости. В предположениях (2.88) уравнение (2.87) имеет вид

$$\chi \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div} \frac{k}{\mu} \text{grad} p = 0. \quad (7.82)$$

Дифференциальное уравнение (2.82) относительно p описывает нестационарную фильтрацию газа. Оно должно интегрироваться при заданных начальных и граничных условиях.

РАЗДЕЛ 8

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Диффузионные процессы являются одной из простых типичных форм нестационарных процессов, присущих сплошным средам.

8.1. Общие сведения о диффузионных процессах

Под примесью понимают «постороннее вещество», содержащееся в сравнительно небольшом количестве в объемах газовой среды. «Постороннее вещество» содержится в виде жидких, твердых или газообразных объектов (включений). Если наличие примеси не оказывает влияние на физические свойства газовой среды и на формирование поля скорости в турбулентном потоке, то такую примесь считают пассивной. В случае пассивной примеси характеристики турбулентного потока, измеренные в потоке «чистой» (не содержащей рассматриваемую примесь) среды, можно использовать для расчета движения частиц этой примеси в пространстве, занятым таким же потоком, несущим примесь.

Актуальной (мгновенной местной) **концентрацией** примеси является величина

$$C(x, y, z, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m_n}{\Delta V}, \quad (8.1)$$

где ΔV - некоторый малый объем части пространства, выделенный вокруг точки с координатами x, y, z ; Δm_n - масса примеси, которая находится в этом объеме в момент времени t .

Необходимо отметить, что ΔV нельзя полагать сколь угодно малым, меньшим, например, размеров частицы примеси. Аналогичное ограничение возникает и при определении концентрации растворенных веществ, когда нельзя полагать размеры меньшими, чем размеры молекул.

Согласно выражению (1.1) концентрация в системе СИ из-

меряется в $кг/м^3$. В молекулярной физике иногда концентрацию выражают числом молекул в единице объема.

Перемещение той или иной компоненты под действием разности концентраций называется **диффузионным потоком I** компоненты. Измеряется он количеством диффундирующей компоненты, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной направлению диффузии, т.е. направлению падения концентрации. В системе СИ диффузионный поток измеряется в $кг/(м^2 \cdot с)$. В молекулярной физике диффузионный поток иногда выражают числом молекул.

Возникающий при наличии разности концентраций диффузионный поток приводит к выравниванию концентраций, т.е. к уменьшению той разности концентраций, которая вызвала этот поток. Неоднородная газовая смесь, предоставленная самой себе, станет с течением времени, благодаря диффузии, однородной (газы перемешаются).

Диффузия, приводящая к выравниванию концентраций, т.е. к изменению разностей концентраций и самих концентраций компонент, называется нестационарной диффузией. При стационарной диффузии разность концентраций искусственным путем поддерживается неизменной.

8.2. Молекулярная диффузия

Опыт показывает, что диффузионный поток какой-либо компоненты пропорционален градиенту концентрации этой компоненты, взятому с обратным знаком. Эта закономерность составляет основной закон диффузии или закон Фика

$$\vec{I} = -D \text{grad} C. \quad (8.1)$$

Коэффициент D в данном уравнении называется **коэффициент молекулярной диффузии**. Смысл его заключается, очевидно, в том, что он численно равен диффузионному потоку при градиенте концентрации, равном 1. Коэффициент молекулярной диффузии в системе СИ измеряется в $м^2/с$.

Если концентрация C интересующей нас компоненты газо-

вой смеси меняется вдоль оси X (а по другим направлениям остается одинаковой), то закон Фика принимает вид

$$N = N_1 - N_2 = \frac{1}{6}(C' - C'')\langle w \rangle. \quad (8.2)$$

В уравнении (8.2) необходимо, конечно, выражать количества вещества в обеих частях равенства в одних и тех же единицах. Это значит, что если поток диффундирующей компоненты выражать ее массой M , протекающей через единицу площади в единицу времени, то концентрация C должна быть выражена массой данной компоненты в единице объема; концентрация C в этом случае представляет собой парциальную плотность компоненты $C = \rho$. Уравнение (8.2) тогда запишется как

$$M = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (8.3)$$

Если поток диффундирующей компоненты выражать не массой, а числом частиц N , проходящих через единицу площади в единицу времени, то концентрация должна быть выражена числом молекул в единице объема и уравнение (8.3) будет иметь вид

$$N = -D \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (8.4)$$

Коэффициент молекулярной диффузии D зависит от свойств диффундирующего вещества и от свойств остальных компонент, составляющих смесь (в дальнейшем будем предполагать, что компонент всего две). Однако при не слишком большой концентрации примеси он в очень слабой степени зависит от самой концентрации.

При стационарной диффузии градиент концентрации остается постоянным (неизменным во времени). Остается поэтому постоянным и диффузионный поток. При нестационарной диффузии градиент концентрации изменяется (концентрации выравниваются). Соответственно этому изменяется во времени и диффузионный поток.

Кинетическая теория газов позволяет количественно оце-

нить величину коэффициента диффузии и выразить его через молекулярные величины - длину свободного пробега молекул и скорости их тепловых движений. Рассмотрим площадку S в сосуде с газовой смесью, перпендикулярную оси X , вдоль которой поддерживается постоянная разность концентраций (рис. 1.1).

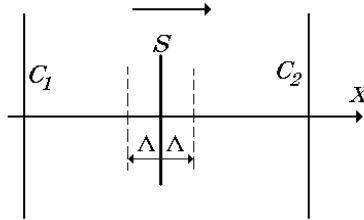


Рис. 8.1.

$$\Delta C = C_1 - C_2 = \text{const}.$$

Примем для определенности, что

$$C_1 > C_2.$$

Из-за тепловых движений молекулы интересующей нас компоненты будут переходить через площадку S как слева направо, так и справа налево. Ввиду существующей разности концентраций по обе стороны площадки число частиц, пересекающих в единицу времени площадку в противоположных направлениях, будет различным так, что возникнет диффузионный поток вдоль оси X , равный разности между числом молекул N_1 , пересекающих единицу площадки S в единицу времени (перпендикулярно ее плоскости) в направлении положительных значений X (вправо), и числом молекул N_2 , пересекающих то же сечение и за то же время в противоположном направлении (влево)

$$N = N_1 - N_2.$$

Число молекул, пересекающих единичную площадку,

определим из следующих соображений. Если бы все молекулы двигались с одинаковой скоростью w , направленной по оси X , то число молекул, переходящих за единицу времени единичную площадку, было бы равно C_w , где под концентрацией C понимается число молекул в единице объема.

В действительности существует распределение молекул по скоростям, но для грубой оценки мы примем, что у всех молекул одна и та же скорость равная средней скорости $\langle w \rangle$. Примем также, что тепловые скорости молекул равномерно распределены по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Тогда из всех молекул единицы объема $1/3$ движется вдоль оси X и из них половина движется в направлении положительных значений X , т.е. по направлению к площадке, в то время как другая половина движется в противоположном направлении - от нее.

Следовательно, число молекул N_1 , пересекающих единицу площадки S в единицу времени слева направо, равно

$$N_1 = \frac{1}{6} C' \langle w \rangle.$$

Точно также число молекул N_2 , пересекающих ту же площадку в противоположном направлении, равно

$$N_2 = \frac{1}{6} C'' \langle w \rangle,$$

где C' и C'' - концентрации молекул с одной и другой стороны от площадки. Относительно значений величин C' и C'' необходимо заметить, что они изменяются вдоль оси X вследствие столкновения молекул между собой. Поэтому к выделенной нами площадке молекулы подходят, имея те значения концентраций C' и C'' , которые создались при последнем столкновении перед площадкой. Значит, мы должны считать, что C' и C'' - это те числа молекул в единице объема, которые были на расстоянии λ (средняя длина свободного пробега) от площадки, по обе стороны от нее. Диффузионный поток N , следовательно определяется выражением

$$N = N_1 - N_2 = \frac{1}{6}(C' - C'')\langle w \rangle,$$

где $C' - C''$ - разность концентраций между точками, отделенными друг от друга расстоянием в 2Λ . Разность эту нетрудно определить, если известно значение градиента концентрации dC/dx (будем полагать, что C изменяется по оси X , т.е. вместо $\partial C/\partial x$ можно писать dC/dx). Так как dC/dx есть разность концентраций, приходящихся на единицу длины, то на расстоянии 2Λ она равна

$$C' - C'' = -2\Lambda \frac{dC}{dX}.$$

Эта формула справедлива, если значение Λ достаточно мало.

Таким образом, для диффузионного потока получаем выражение

$$N = -\frac{1}{3}\Lambda\langle w \rangle \frac{dC}{dx},$$

или, умножив обе части этого равенства на массу молекулы m , имеем

$$M = -\frac{1}{3}\Lambda\langle w \rangle \frac{d\rho}{dx}.$$

Сравнивая полученные уравнения с законом Фика

$$N = -D \frac{\partial C}{\partial x}, \quad M = -D \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

находим интересующее нас выражение для коэффициента диффузии

$$D = \frac{1}{3}\Lambda\langle w \rangle. \quad (8.5)$$

Из этого выражения видно, что коэффициент диффузии зависит от давления газа (потому, что $\Lambda \sim 1/p$) и абсолютной температуры ($\Lambda \sim \sqrt{T}$).

При выводе формулы (8.5) не принималась во внимание диффузия второй компоненты, которая, разумеется, тоже происходит. И она не может не влиять на диффузию рассматриваемой компоненты смеси.

Так, например, в смеси водорода и углекислого газа водород должен диффундировать значительно быстрее, чем углекислый газ, потому что при данной температуре средняя скорость тепловых движений молекул водорода почти в 5 раз больше и, кроме того, длина свободного пробега молекул водорода тоже больше. Но это значит, что объем водорода, переносимого в одном направлении, больше объема углекислого газа, переносимого в противоположном направлении. В таком случае в газе неизбежно возникнет разность давлений, а значит поток газа в целом. Между тем молекулярная диффузия определена как процесс, при котором давление газовой смеси во всех точках остается постоянным и газ, как целое, покоится. На самом же деле в процессе взаимной диффузии двух различных газов, одного в другой, превышение диффузионного потока одного из них над потоком другого уравнивается течением всего газа по направлению к той области, где первоначально находились более быстро диффундирующие молекулы.

Это обстоятельство не принято во внимание при выводе формулы (8.5) для коэффициента диффузии и эта формула справедлива в сущности только для диффузии молекул газа в среде того же газа. Такой процесс называется **самодиффузией**, а формула (8.5) выражает, следовательно, **коэффициент самодиффузии**. С таким явлением можно иметь дело, например, когда газовая смесь состоит из двух различных изотопов одного и того же вещества, лишь незначительно отличающихся друг от друга своей массой, но не отличающихся никакими другими свойствами. Если один из изотопов радиоактивен, то такую самодиффузию легко наблюдать, так как за проникновением радиоактивных частиц можно следить по их излучению.

Можно, однако, исправить выражение (8.5) так, чтобы оно было справедливо и для смеси двух разных газов. Но для этого нужно учесть существование компенсирующего газового потока. Будем считать, что уравнение (8.5) относится к одной из компонент смеси и характеризует диффузионный поток этой компоненты

$$M_1' = -\frac{1}{3} \langle w_1 \rangle \Lambda_1 \frac{d\rho_1}{dx}. \quad (8.6)$$

Индексы 1 указывают на то, что уравнение относится к первой компоненте, а штрих у M_1 означает, что M_1 - это масса, переносимая диффузионным путем.

Совершенно такое же уравнение мы должны написать и для второй компоненты

$$M_2' = -\frac{1}{3} \langle w_2 \rangle \Lambda_2 \frac{d\rho_2}{dx}. \quad (8.7)$$

Здесь $d\rho_2/dx$ - градиент плотности второй компоненты вдоль оси X . При одинаковом во всем объеме давлении должно выполняться условие

$$\frac{d\rho_1}{dx} = -\frac{d\rho_2}{dx}.$$

Для того чтобы давление газа оставалось во всем объеме одинаковым, газ в целом должен прийти в движение и скорость u этого движения должна быть такой, чтобы поток газа ρu (ρ - плотность смеси) уравновешивал диффузионный поток легкой компоненты, т.е. должно выполняться равенство

$$M_1' + M_2' + \rho u = 0.$$

Подставив сюда вместо M_1' и M_2' их значения из (8.6) и (8.7), получим

$$-\rho u = -\frac{1}{3}\langle w_1 \rangle \Lambda_1 \frac{d\rho_1}{dx} - \frac{1}{3}\langle w_2 \rangle \Lambda_2 \frac{d\rho_2}{dx}.$$

Или, так как

$$\frac{d\rho_1}{dx} = -\frac{d\rho_2}{dx},$$

то

$$-\rho u = \frac{1}{3}(\langle w_2 \rangle \Lambda_2 - \langle w_1 \rangle \Lambda_1) \frac{d\rho_1}{dx}.$$

Отсюда

$$u = -\frac{1}{3} \left(\frac{\langle w_2 \rangle \Lambda_2}{\rho} - \frac{\langle w_1 \rangle \Lambda_1}{\rho} \right) \frac{d\rho_1}{dx}. \quad (8.8)$$

Если движется весь газ, то массы первой и второй компонент, действительно пересекающие единичную площадку, не равны M_1' и M_2' , так как и та и другая компонента переносятся не только из-за диффузии, но и из-за движения газа как целого.

Масса первой компоненты M_1' , пересекающая единичную площадку, равна поэтому не M_1' , а $M_1' + \rho_1 u$. Подставим сюда вместо M_1' и u их значения из (8.7) и (8.8). Тогда

$$M_1 = \left(-\frac{1}{3} \left(w_1 (\Lambda_1 - \frac{1}{3} \frac{\rho_1}{\rho} (w_2 (\Lambda_2 + \frac{1}{3} \frac{\rho_1}{\rho} (w_1 (\Lambda_1)) \right) \right) \frac{d\rho_1}{dx} \right.$$

или

$$M_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \left(w_1 (\Lambda_1 + \frac{\rho_1}{\rho} (w_2 (\Lambda_2)) \right) \right) \frac{d\rho_1}{dx}.$$

Так как

$$\rho - \rho_1 = \rho_2,$$

то

$$M_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho} \langle w_1 \rangle \Lambda_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \langle w_2 \rangle \Lambda_2 \right) \frac{d\rho_1}{dx}.$$

Для второй компоненты таким же образом получаем

$$M_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho} (w_1 (\Lambda_1 + \frac{\rho_1}{\rho} (w_2 (\Lambda_2) \frac{d\rho_2}{dx})). \right.$$

Сравнивая два последние равенства с уравнением диффузии (8.2), можно видеть, что выражения, стоящие перед градиентами плотности (эти выражения одинаковы в обоих равенствах), представляют собой коэффициенты диффузии. Но теперь это уже не коэффициент диффузии, а коэффициент диффузии одного газа в другой (взаимной диффузии)

$$D_{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho} \Lambda_1 \langle w_1 \rangle + \frac{\rho_1}{\rho} \Lambda_2 \langle w_2 \rangle \right). \quad (8.9)$$

Отношение ρ_1/ρ и ρ_2/ρ парциальных плотностей компонент к плотности смеси называются относительными концентрациями компонент.

Легко видеть, что если концентрация одной из компонент мала, то формула (1.8) переходит в формулу (1.4). Если, например, мала концентрация ρ_1/ρ , то в равенстве (1.8) можно пренебречь вторым членом, а относительная концентрация ρ_2/ρ близка к единице. Тогда

$$D_{12} = \frac{1}{3} \Lambda_1 \langle w_1 \rangle = D.$$

Выражение (8.5) оказывается справедливым не только для самодиффузии, но и для смеси различных газов, если одна из компонент является малой примесью.

Определение коэффициента молекулярной диффузии согласно (1.4) не всегда является удобным для использования в практических расчетах. Поэтому выполним следующее его преобразование. Заметим, что в случае, когда концентрация примеси значительно меньше концентрации основного газа, длина свободного пробега молекул примесного газа определяется столкновениями их с молекулами основного газа и рассчитывается по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{C_2 \pi (r_1 + r_2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}}. \quad (8.10)$$

Здесь C_2 - концентрация молекул основного газа; r_1 и r_2 - радиусы молекул примесного и основного газов; m_1 и m_2 - их массы.

Концентрация молекул основного газа может быть найдена из уравнения состояния идеального газа

$$p = C_2 kT, \quad (8.11)$$

где p , T - абсолютное давление и температура; k - постоянная Больцмана.

Согласно распределению Максвелла средняя скорость примесных молекул

$$\langle w \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}} = \sqrt{\frac{8\mathcal{R}_0 T}{\pi \mu_1}}. \quad (8.12)$$

Здесь \mathcal{R}_0 - универсальная газовая постоянная; μ_1 - молярная масса газа примеси.

Учитывая, что $m_1/m_2 = \mu_1/\mu_2$ (μ_2 - молярная масса основного газа), из уравнений (8.5, 8.10 – 8.12) получаем следующее выражение для коэффициента молекулярной диффузии

$$D = \frac{kT}{3p} \sqrt{\frac{8\mathcal{R}_0 T}{\pi \mu_1}} \frac{1}{\pi (r_1 + r_2)^2 \sqrt{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}}. \quad (8.13)$$

8.3. Броуновское движение и диффузия

Шотландский ученый Р. Броун, наблюдая под микроскопом взвесь цветочной пыльцы в воде, обнаружил, что частицы пыльцы беспорядочно двигаются. Далее оказалось, что подобное сложное зигзагообразное движение характерно для любых частиц малых размеров ($\cong 10^{-6}$ м), взвешенных в газе или жидкости. Интенсивность этого движения, названного броуновским, повышается с ростом температуры среды, с уменьшением ее вязкости и размеров

частиц. Теория броуновского движения достаточно полно отражена в литературе, поэтому рассмотрим только вопросы, касающиеся непосредственно процесса диффузии примесных частиц.

Тепловое движение взвешенных в среде частиц определяется уравнениями Эйнштейна

$$\bar{x}^2 = 2Dt;$$

$$D = kTB;$$

где \bar{x}^2 - средний квадрат смещения частицы по каждой из координат за время t ; D - коэффициент диффузии, характеризующий интенсивность броуновского движения; B - подвижность частицы (отношение между скоростью частицы и действующей на нее силой); k - постоянная Больцмана; T - температура.

Для определения величины B в зависимости от радиуса частиц r предложены различные формулы. Можно рекомендовать для практических расчетов (среда - воздух при 23°C и давлении 760 мм. рт. ст.) график, приведенный на рис. 8.1.

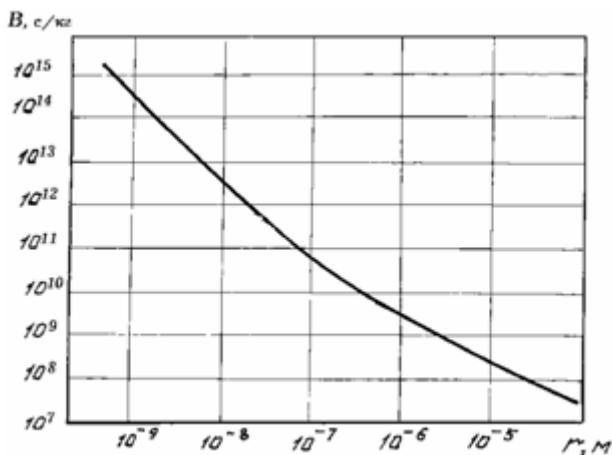


Рис. 8.1.

При получении уравнений Эйнштейна сделаны следующие допущения:

1. частицы в дисперсной системе движутся независимо друг от друга;
2. средняя энергия поступательного движения частицы по каждой координате равна, согласно общему закону статистической механики,
3. движения частицы за последовательные промежутки времени $0 - t$, $t - 2t$, $2t - 3t$ и т.д. являются независимыми.

Первое предположение эквивалентно условию отсутствия сил взаимодействия между примесными частицами. Это взаимодействие сводится к гидродинамическим, молекулярным и, в случае заряженных частиц, электрическим силам. Усредненные по времени гидродинамические силы должны равняться нулю вследствие беспорядочного направления броуновского движения. Молекулярные силы между частицами проявляются лишь на расстояниях, соизмеримыми с размерами молекул жидкости, а электрические – на расстояниях, соизмеримых с размерами частиц. При отсутствии упорядоченного движения, что характерно для процессов диффузии примесных частиц, средняя энергия поступательного теплового движения по каждой координате равна $\frac{1}{2}(kT)$.

Предположение о независимости движений частицы за последовательные промежутки времени величиной t можно сформулировать так: последовательное положение частицы в моменты 0 , t , $2t, \dots$ образуют «дискретную цепь Маркова», т.е. положение частицы в момент $(n+1)t$ зависит только от положения ее в предшествующий момент nt , но не зависит от положения в момент $(n-1)t$ и более ранние моменты.

Рассмотрим молекулярно-кинетический механизм броуновского движения. На рис. 8.2 схематически представлены проекции на плоскость чертежа молекулы азота и примесной частицы.

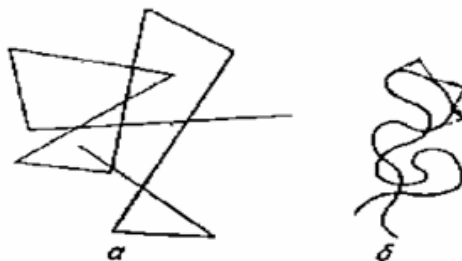


Рис. 8.2.

Траектория молекулы газа состоит из отрезков прямой. Каждый отрезок соответствует пути молекулы между двумя столкновениями. При каждом столкновении направление и скорость движения резко меняются. Если пренебречь слоями жидкости, расположенными непосредственно у ограничивающих стенок, то все направления для молекулы после столкновения можно считать в среднем равновероятными. Если u - скорость, l - средняя величина свободного пути молекулы, а $\tau_0 = l/u$ - среднее время прохождения этого пути, то для того, чтобы скорости газовой молекулы за последовательные промежутки времени были независимы, должно выполняться условие $t \gg \tau_0$. Так как масса примесной частицы гораздо больше массы молекулы газа, при их столкновении скорость частицы изменяется ничтожно мало. Заметное изменение направления и скорости движения частицы может произойти лишь в результате большого числа таких столкновений. Поэтому траектория частицы имеет форму плавной кривой. Роль средней длины свободного пути переходит к «кажущейся средней длине пути» частицы l_b , т.е. расстояния, проходимого частицей до полного изменения направления ее движения. Эту величину можно определить, как среднюю длину касательных к траектории частицы до пересечения их с ближайшими перпендикулярными к ним касательными (рис. 8.2).

Более точно величину l_b можно найти следующим образом. Частица все время обладает некоторой поступательной скоростью, средний квадрат которой $u_c^2 = 3kT/m$ (m - масса частицы). Окружающая среда непрерывно затормаживает поступательное движе-

ние частицы. Общее дифференциальное уравнение одномерного движения частицы в сопротивляющейся среде при малых числах Рейнольдса

$$m \frac{du}{dt} = F(t) - \frac{2}{3} \pi \gamma r^3 \frac{du}{dt} - 6\pi \mu r u - 6r^2 \sqrt{\pi \mu \gamma} \int_0^t \frac{du}{dx} \frac{dx}{\sqrt{t-x}},$$

где $\gamma = \rho g$ - удельный вес (g - ускорение свободного падения); μ - динамическая вязкость среды; x - координата.

Первый член в правой части представляет собой действующую на частицу внешнюю силу. Третий член выражает сопротивление среды. Вторым и последним членами выражают ту часть силы сопротивления, которая связана с затратой энергии на приведение в движение самой среды. При этом влияние второго члена, выражающего сопротивление идеальной жидкости неравномерному движению, сводится к кажущемуся увеличению массы тела на половину массы вытесненной им среды (присоединенная масса). Так как плотность газообразной среды мала по сравнению с плотностью частиц, то этим членом в большинстве практических случаев можно пренебречь. Что касается интегрального члена, то им также пренебрегали во всех ранее опубликованных работах. Тогда

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} - g = 0,$$

где

$$\tau = m / 6\pi \mu r.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_s (1 - \exp(-t / \tau)),$$

где $u_s = \tau g$.

Пройденный частицей путь

$$x = u_s t - u_s \tau (1 - \exp(-t / \tau)),$$

а ускорение

$$\frac{du}{dt} = g \exp(-t / \tau) = \frac{u_s}{\tau} \exp(-t / \tau).$$

Эквивалентный случай движения частицы, обладающей начальной скоростью u_0 в отсутствие внешних сил приводит к выражению

$$\begin{aligned} u &= u_0 \exp(-t / \tau), \\ x &= u_0 \tau (1 - \exp(-t / \tau)). \end{aligned}$$

Одновременно вследствие флуктуаций в величине импульсов, получаемых частицей от столкновения с молекулами газа, она приобретает скорость в направлении, перпендикулярном к первоначальному направлению. Поэтому, несмотря на указанное затормаживание, средняя абсолютная скорость частицы не изменяется. Путь, пройденный частицей в первоначальном направлении за время τ со средней скоростью теплового движения, составит

$$l_b = u_c \tau$$

Таким образом, направление движения частицы существенно изменится за время порядка τ (время релаксации), и для того, чтобы в моменты времени $0, t, 2t...$ положения частицы образовывали цепь Маркова, необходимо, чтобы $t \gg \tau$. Поэтому данное соотношение является условием применимости уравнений Эйнштейна.

Рассмотрим находящуюся в равновесном состоянии в поле силы тяжести изодисперсную систему, частицы которой не коагулируют и не прилипают к ограничивающим стенкам. Концентрация частиц по высоте z выражается формулой Больцмана

$$C = C_0 \exp(-mgz / kT).$$

Через горизонтальную единичную площадку, находящуюся на высоте $z = 0$, пройдет частиц в единицу времени сверху вниз вследствие седиментации

$$N_I = C_0 u_c,$$

Одновременно благодаря диффузии в обратном направле-

нии пройдет частиц

$$N_2 = -D \frac{dC}{dz} = \frac{C_0 D m g}{kT}$$

Так как система находится в равновесии, то $N_1 = N_2$, т.е.

$$\frac{D}{kT} = \frac{u_c}{mg} = B,$$

что соответствует второму уравнению Эйнштейна.

В табл. 8.1. приведены основные величины, характеризующие броуновское движение: коэффициент диффузии D , средняя скорость u_c , время релаксации τ , кажущаяся средняя длина пути l_b .

Таблица 8.1

Характеристические величины

$r, \text{ м}$	$D, \text{ м}^2/\text{с}$	$u_c, \text{ м/с}$	$\tau, \text{ с}$	$l_b, \text{ м}$
10^{-9}	$1,28 \cdot 10^{-6}$	49,65	$1,33 \cdot 10^{-9}$	$6,59 \cdot 10^{-8}$
$2 \cdot 10^{-9}$	$3,23 \cdot 10^{-7}$	17,6	$2,67 \cdot 10^{-9}$	$4,68 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^{-9}$	$5,24 \cdot 10^{-8}$	4,44	$6,76 \cdot 10^{-9}$	$3,00 \cdot 10^{-8}$
10^{-8}	$1,35 \cdot 10^{-8}$	1,57	$1,40 \cdot 10^{-8}$	$2,20 \cdot 10^{-8}$
$2 \cdot 10^{-8}$	$3,59 \cdot 10^{-9}$	0,555	$2,97 \cdot 10^{-8}$	$1,64 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^{-8}$	$6,82 \cdot 10^{-10}$	0,14	$8,81 \cdot 10^{-7}$	$1,24 \cdot 10^{-8}$
10^{-7}	$2,21 \cdot 10^{-10}$	0,0496	$2,28 \cdot 10^{-7}$	$1,13 \cdot 10^{-8}$
$2 \cdot 10^{-7}$	$8,32 \cdot 10^{-11}$	0,0176	$6,87 \cdot 10^{-6}$	$1,21 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^{-7}$	$2,74 \cdot 10^{-11}$	0,00444	$3,54 \cdot 10^{-5}$	$1,53 \cdot 10^{-8}$
10^{-6}	$1,27 \cdot 10^{-11}$	0,00157	$1,31 \cdot 10^{-5}$	$2,06 \cdot 10^{-8}$
$2 \cdot 10^{-6}$	$6,10 \cdot 10^{-12}$	$5,55 \cdot 10^{-4}$	$5,03 \cdot 10^{-5}$	$2,80 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^{-6}$	$2,38 \cdot 10^{-12}$	$1,40 \cdot 10^{-4}$	$3,08 \cdot 10^{-4}$	$4,32 \cdot 10^{-8}$
10^{-5}	$1,38 \cdot 10^{-12}$	$4,96 \cdot 10^{-5}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$6,08 \cdot 10^{-8}$

Как видно из таблицы, коэффициент диффузии и остальные характеристические величины существенно зависят от размера примесной частицы. Кроме того, из приведенных данных следует, что число Рейнольдса для теплового движения частиц мало и, таким образом, сопротивление среды пропорционально скорости движения частицы, как и предполагалось при наших выкладках.

8.4. Уравнение диффузии в потоке

На практике во многих технических устройствах процесс диффузии происходит в потоке газа, что накладывает некоторые особенности в описание процесса.

В декартовой системе координат рассмотрим поток газа с компонентами скорости $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$ содержащего примесь с концентрацией $C(x, y, z, t)$.

Выделим элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz (рис.8.3). Масса примеси dm_{x1} , которая проходит внутрь выделенного объема путем молекулярной диффузии и переноса движущейся средой в направлении оси x через элементарную площадку $dydz$ за время dt равна

$$dm_{x1} = I_x dydzdt + u_x C dydzdt,$$

где I_x - диффузионный поток в направлении оси x .

На противоположной грани диффузионный концентрация примеси, диффузионный поток и скорость смеси получают приращение будут составлять

$$C + \frac{\partial C}{\partial x} dx, \quad I_x + \frac{\partial I_x}{\partial x} dx, \quad u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx.$$

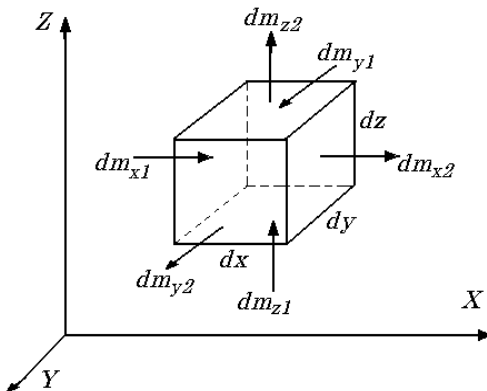


Рис. 8.3.

Масса примеси, отведенная через эту грань составит

$$dm_{x_2} = \left(I_x + \frac{\partial I_x}{\partial x} dx \right) dydzdt + \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) \left(C + \frac{\partial C}{\partial x} dx \right) dydzdt.$$

Разница массы примеси, поступившей к элементарному параллелепипеду и отведенная от него в направлении оси x ,

$$dm_x = dm_1 - dm_2 = \left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \right) dx dy dz dt.$$

Пренебрегая членом более высокого порядка малости $\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x}$, имеем

$$dm_x = - \left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy dz dt. \quad (8.14)$$

Аналогично

$$dm_y = - \left(\frac{\partial I_y}{\partial y} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} + C \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy dz dt, \quad (8.15)$$

$$dm_z = - \left(\frac{\partial I_z}{\partial z} + u_z \frac{\partial C}{\partial z} + C \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \quad (8.16)$$

Согласно закона Фика

$$I_x = -D \frac{\partial C}{\partial x}, \quad I_y = -D \frac{\partial C}{\partial y}, \quad I_z = -D \frac{\partial C}{\partial z}.$$

Подставляя данные выражения в (8.14 - 8.16) и выполнив

некоторые преобразования, получаем

$$dm_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - u_x \frac{\partial C}{\partial x} - C \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy dz dt. \quad (8.17)$$

$$dm_y = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) - u_y \frac{\partial C}{\partial y} - C \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy dz dt. \quad (8.18)$$

$$dm_z = \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right) - u_z \frac{\partial C}{\partial z} - C \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \quad (8.19)$$

Пусть потоке смеси присутствуют источники примеси, характеризуемые функцией объемной плотности мощности источников $f(x, y, z, t)$, имеющей размерность в системе СИ - $кг/(м^3 \cdot с)$. Тогда наличие источников изменит массу примеси в элементарном параллелепипеде за время dt на величину

$$dm_{ucm} = f(x, y, z, t) dx dy dz dt. \quad (8.20)$$

Полное изменение массы примеси в элементарном параллелепипеде за время dt составит

$$dm = dm_{ucm} + dm_x + dm_y + dm_z$$

или после подстановки выражений (8.17 – 8.20)

$$dm = dx dy dz dt \left(-u_x \frac{\partial C}{\partial x} - u_y \frac{\partial C}{\partial y} - u_z \frac{\partial C}{\partial z} - C \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + f(x, y, z, t) \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right) \Bigg).$$

Учитывая, что в практических задачах диффузии газовую смесь рассматривают как несжимаемую среду, для которой справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

преобразуем полученное выражение

$$dm = dx dy dz dt \left(-u_x \frac{\partial C}{\partial x} - u_y \frac{\partial C}{\partial y} - u_z \frac{\partial C}{\partial z} + \right. \\ \left. + f(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right).$$

С другой стороны, полное изменение массы примеси в элементарном параллелепипеде за время dt можно выразить через приращение примеси $\frac{\partial C}{\partial t} dt$

$$dm = dx dy dz \frac{\partial C}{\partial t} dt.$$

Приравняв последние два уравнения, после сокращений и преобразований получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} + u_z \frac{\partial C}{\partial z} = f(x, y, z, t) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (8.21)$$

Полученное уравнение есть дифференциальное уравнение молекулярной диффузии в потоке.

В цилиндрической системе координат (r - радиус, φ - угол,

x - осевая координата) уравнение (8.21) представляется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial C}{\partial \varphi} = f(x, r, \varphi, t) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Dr \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Следует отметить, что уравнения молекулярной диффузии (8.21), (8.22) справедливы для ламинарного потока смеси, в котором отсутствуют пульсации скоростей и концентрации.

На основе полученных уравнений решается задача осаждения аэрозоли на стенки канала в ламинарном потоке. Отметим приближенное решение данной задачи при допущении постоянной скорости по сечению канала, согласно которого устанавливается следующие распределение концентрации вдоль оси x , направленной по оси трубы радиуса r_0

$$C/C_0 = 1 - 2.57 \alpha^{0.66}, \quad \alpha \leq 0,03 \quad (8.23)$$

$$C/C_0 = 0,82 e^{-3.66\alpha} + 0,097 e^{-22.2\alpha} + 0,0135 e^{-53\alpha}, \quad \alpha > 0,03 \quad (8.24)$$

где C_0 - начальная концентрация примесных частиц в ламинарном потоке, C - средняя концентрация в потоке на координате x ; α - безразмерная величина, равная $\alpha = Dx/r_0^2 u_0$; u_0 - средняя скорость потока.

На рис. 8.4 приведены кривые, отвечающие формулам (8.24) (кривая 1) и (8.23) (кривая 2). Их следует применять соответственно при $\alpha < 0,03$ и $\alpha > 0,03$. На практике можно пользоваться графиком, изображенным сплошной линией.

Отметим еще одно допущение, сделанное при выводе этих формул. Предполагалось, что установившийся профиль скорости потока существует на входе в канал. В действительности это происходит лишь на расстоянии примерно равном $0,1 r_0 Re$ (Re - число Рейнольдса) от входа. Это приводит к некоторой погрешности

формулы, как показал анализ, поправка необходима при размере частиц аэрозоля $\approx 10^{-6}$ мм.

Решение аналогичной задачи для плоскопараллельного канала с расстоянием h между пластинами приводит к формуле

$$C_c/C_0 = 1.066 e^{-7.34\alpha} + 0.0065 e^{-88.8\alpha},$$

где $\alpha = Dx/h^2 u_0$.

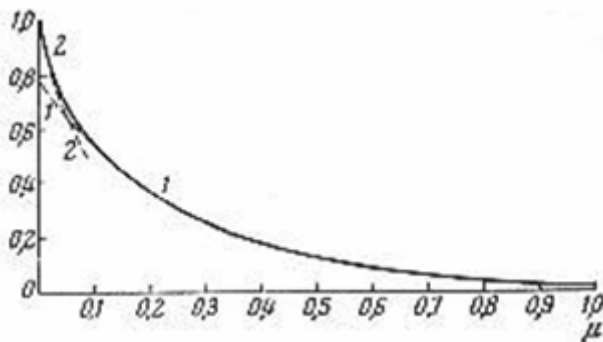


Рис. 8.4.

8.5. Диффузия в турбулентном потоке

Актуальная концентрация, как и компоненты скоростей, в каждой точке пространства, занятого турбулентным потоком, претерпевает беспорядочные изменения во времени (пульсирует, флуктуирует). При решении практических задач о движении частиц примеси от актуальной характеристики переходят к осредненному значению концентрации. В случае установившегося турбулентного движения и стационарных внешних условий используется введенное Рейнольдсом временное осреднение

$$\langle C(x, y, z) \rangle = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} C(x, y, z) dt, \quad (8.25)$$

где t_0 - выбранный соответствующим образом интервал времени.

Данное определение осредненной концентрации совпадает и со статистическим подходом к описанию турбулентного движения, в соответствии с которым осредненной концентрацией называется математическое ожидание актуальной концентрации в данный момент времени в данной точке пространства.

Учитывая, что указанным выше образом определяются и осредненные компоненты скоростей в турбулентном потоке, представим действительные скорости и концентрацию через их осредненные значения и пульсационные добавки

$$C = \langle C \rangle + C';$$

$$u_x = \langle u_x \rangle + u'_x; \quad u_y = \langle u_y \rangle + u'_y; \quad u_z = \langle u_z \rangle + u'_z.$$

При этом учтем, что осредненные во времени пульсационные составляющие местных скоростей и концентрации равны нулю

$$\Delta p; \quad \vec{j}_T = AD_{11} \nabla \ln T = D_{11}^T \nabla \ln T, \quad (8.26)$$

так как пульсационные составляющие - знакопеременные величины с равной вероятностью как положительных, так и отрицательных их значений.

Рейнольдс предложил, выполняя осреднение, придерживаться следующих правил. Если f и p - осредняемые зависимые переменные, а s - одна из четырех независимых переменных x, y, z, t , то

$$\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle; \quad \langle f + p \rangle = \langle f \rangle + \langle p \rangle; \quad \langle \langle f \rangle \cdot p \rangle = \langle f \rangle \cdot \langle p \rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial s}; \quad \left\langle \int f ds \right\rangle = \int \langle f \rangle ds,$$

где повторное осреднение обозначено заключением между двумя скобками осредняемой величины.

В уравнении диффузии в потоке (8.21) преобразуем следующие три члена в левой части

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} + u_z \frac{\partial C}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial(u_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y C)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z C)}{\partial z} - C \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Как отмечалось ранее, газовый поток в практических задачах диффузии можно рассматривать в рамках модели несжимаемой жидкости, уравнение неразрывности для которой имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} + u_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial(u_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y C)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z C)}{\partial z}. \quad (8.27)$$

Преобразовав уравнение диффузии в потоке (1.20) с учетом (8.27), проведем операции осреднения его членов

$$\gamma(n+1, \nu) = p [\gamma(n, \nu-1) + \gamma(n, \nu+1)] - c\gamma(n-1, \nu). \quad (8.28)$$

На основании правил осреднения Рейнольдса уравнение (8.28) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_x \rangle \langle C \rangle)}{\partial x} + \frac{\partial (\langle u_y \rangle \langle C \rangle)}{\partial y} + \frac{\partial (\langle u_z \rangle \langle C \rangle)}{\partial z} = \\
& = f(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} - \langle u'_x C' \rangle \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} - \langle u'_y C' \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial z} - \langle u'_z C' \rangle \right).
\end{aligned}$$

Выполняя преобразования, обратные преобразованию (8.27), получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} + \langle u_y \rangle \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} + \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial z} = \\
& = f(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} - \langle u'_x C' \rangle \right) + \tag{8.29} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} - \langle u'_y C' \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial z} - \langle u'_z C' \rangle \right),
\end{aligned}$$

которое является уравнением диффузии в турбулентном потоке несжимаемой среды.

В цилиндрической системе координат (r - радиус, φ - угол, x - осевая координата) уравнение (1.28) представляется следующим образом

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(C)}{\partial t} + (u_x \left(\frac{\partial(C)}{\partial x} \right) + (u_r \left(\frac{\partial(C)}{\partial r} \right) + \frac{(u_\varphi)}{r} \left(\frac{\partial(C)}{\partial \varphi} \right) = \\
& = f(x, r, \varphi, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial(C)}{\partial x} - (u'_x C') \right) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Dr \frac{\partial(C)}{\partial r} - (u'_r C') \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D \frac{1}{r} \frac{\partial(C)}{\partial \varphi} - (u'_\varphi C') \right).
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Осредненные значения произведений пульсационных составляющих проекций скорости и концентрации согласно гипотезе Фика-Буссинеска считают пропорциональными градиенту осредненной концентрации:

$$\langle u'_\alpha C' \rangle = -D_t \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \alpha}, \tag{8.31}$$

где α - координата, на которую берется проекция пульсационной составляющей скорости; D_t - величина, называемая **коэффициентом турбулентной (вихревой) диффузии** и имеющая размерность коэффициента молекулярной диффузии.

Рассмотрим один из практически важных вопросов турбулентной диффузии – осаждение примесных частиц, в частности аэрозолей, из турбулентного потока. Распределение скорости газа по сечению трубопровода при турбулентном течении подчиняется логарифмическому закону

$$u = a \ln z + b,$$

где u - средняя скорость на расстоянии z от стенки; a, b – постоянные величины.

Исходя из представления о «длине пути смешения» Прандтлем получена формула:

$$\frac{u}{u^{\bullet}} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{zu^{\bullet}}{\nu} + C,$$

в которой ν - кинематическая вязкость; χ - постоянная Кармана, связывающая длину пути смещения l с расстоянием от стенки z $l = \chi z$; C - константа, а u^{\bullet} - величина с размерностью скорости, называемая «динамической скоростью» или «скоростью трения» и связанная уравнением

$$u^{\bullet} = \sqrt{\tau_0 / \rho},$$

с касательным напряжением τ_0 на стенке канала.

Опытным путем найдено $\chi = 0,4$, $C = 5,5$. Тогда для точек, лежащих вне пограничного слоя толщиной δ_L ($z > \delta_L$),

$$\frac{u}{u^{\bullet}} = 2,5 \ln \frac{zu^{\bullet}}{\nu} + 5,5.$$

Отметим, что u^{\bullet} имеет одинаковый порядок величины со средней квадратичной скоростью турбулентных пульсаций, которая составляет 0,3... 0,1 от средней скорости потока.

На очень малом расстоянии от стенки (в пределах ламинарного пограничного слоя $\delta_L \approx 10 \nu / u^{\bullet}$) касательные напряжения определяются согласно гипотезе Ньютона,

$$\tau = \mu \frac{du}{dz},$$

$\mu = \rho \nu$ - динамическая вязкость в виде

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\nu u^{\bullet}}{z}.$$

Пользуясь понятием о «турбулентной вязкости», касательные напряжения вне пределов пограничного слоя можно определить через «турбулентную (вихревую) динамическую вязкость μ_t

$$\tau = \mu_t \frac{du}{dz}.$$

Отсюда «турбулентная (вихревая)» кинематическая вязкость определяется как

$$\nu_t = \mu_t / \rho = \chi u^* z.$$

Так как механизм турбулентного переноса импульса и массы один и тот же, то коэффициенты турбулентной вязкости ν_t и турбулентной (вихревой) диффузии D_t должны быть близкими по величине. Действительно, согласно опытным данным,

$$D_t / \nu_t = 1,4 \dots 2,0.$$

Тогда

$$D_t = (1,5 \dots 2,0) u^* z \chi \approx (0,6 \dots 0,8) u^* z.$$

При вычислении скорости диффузионного осаждения примесных частиц на стенках трубы примем следующие допущения. Пренебрежем изменением концентрации примеси в направлении течения, т.е. будем считать, что концентрация не зависит ни от координаты x , отсчитываемой в направлении течения, ни от времени, а лишь от расстояния z до стенки. Это допущение сравнительно справедливо, так как скорости газа при турбулентном течении велики, а диффузионный процесс протекает медленно. Тогда, через любую поверхность параллельную стенке единичной площади за единицу времени пройдет одинаковое число частиц N . Обозначив через D_E эффективный коэффициент диффузии, включающий как молекулярный, так и турбулентный перенос вещества, а через C - концентрацию примеси, имеем

$$N = D_E \frac{dC}{dz} = const.$$

Для ламинарного пограничного слоя, где действует лишь молекулярная диффузия

$$N = D \frac{dC}{dz}.$$

В турбулентной области

$$N = \alpha u \cdot z \frac{dC}{dz},$$

откуда

$$C = \frac{N}{\alpha u \cdot} \ln z + c_2.$$

где $\alpha = 0,6 \dots 0,8$; c_2 - постоянная интегрирования.

Обозначив через h расстояние от стенки, на котором C принимает постоянное значение C_0 , получим

$$C_0 = \frac{N}{\alpha u \cdot} \ln h + c_2.$$

или

$$C = C_0 + \frac{N}{\alpha u \cdot} \ln \frac{z}{h}.$$

РАЗДЕЛ 9

ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ

9.1. Обобщенный закон Гука

Связь между напряжениями и деформацией

После абсолютно твердого тела следующим шагом, приближающим нас к реальным телам, является понятие идеально упругого тела. Под последним понимается тело, которое под действием приложенных к нему сил меняет свою форму — деформируется и полностью восстанавливает свою форму после устранения причины, вызывающей деформацию. В дальнейшем идеально упругое тело будем называть просто упругим телом.

Между свойствами тел существуют значительные количественные различия. Действительно, одна и та же сила, действующая на куски дерева и каучука, будет вызывать различные деформации. Последний факт выражается словами, что дерево является более упругим, чем каучук.

Из повседневного опыта следует, что для большинства упругих тел деформации, которым они подвергаются, малы. В этом случае связь между тензором напряжения Π и тензором деформации Φ для изо тройного тела определяется обобщенным законом Гука, который имеет вид

$$\Pi = I\lambda\Delta + \Phi \cdot 2\mu, \quad (9.1.1)$$

где I — единичный тензор, λ и μ — постоянные для заданного тела коэффициенты, $\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ — неизменное в любой системе координат объемное расширение. Из закона (9.1.1) следуют шесть равенств

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{xx}; \\
 p_{yy} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{yy}; \\
 p_{zz} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2\mu e_{zz}; \\
 p_{yx} &= p_{xy} = \mu e_{xy}; \\
 p_{zy} &= p_{yz} = \mu e_{yz}; \\
 p_{xz} &= p_{zx} = \mu e_{zx}.
 \end{aligned}
 \tag{9.1.1'}$$

Модуль Юнга

Применим формулы (9.1.1') к частному случаю деформации изотропного тела к растяжению его вдоль оси x . При этом только одна компонента напряжения p_{xx} не будет равна нулю и формулы (9.1.1') примут вид

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}; \\
 0 &= \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}; \\
 0 &= \lambda\Delta + 2\mu e_{zz};
 \end{aligned}
 \tag{9.1.2}$$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} \text{ и } \Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}.$$

Складывая три первых равенства, найдем

$$p_{xx} = (3\lambda + 2\mu)\Delta,$$

откуда

$$\Delta = \frac{p_{xx}}{3\lambda + 2\mu}.$$

Подставив найденное значение Δ в первое равенство (9.1.2), найдем

$$p_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{xx}. \quad (9.1.4)$$

При растяжении брусьев из материала типа железа закон Гука имеет вид

$$p_{xx} = Ee_{xx},$$

где коэффициент E называется модулем Юнга, или модулем упругости при растяжении. Сравнивая два последних равенства, имеем

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Материалы, применяемые в технике, обладают модулями упругости, очень большими по сравнению с допускаемыми напряжениями p_{xx} , поэтому относительное удлинение e_{xx} крайне мало. Например, для стали $e_{xx} = 0,001$.

3. Коэффициент Пуассона

Тело, которое испытывает растяжение вдоль оси x будет одновременно испытывать сжатие в перпендикулярных к оси x направлениях. Чтобы определить его, подставим Δ из формулы (9.1.3) и p_{xx} из (9.1.4) во второе и третье равенства (9.1.2). В результате получим

$$e_{yy} = e_{zz} = -\frac{\lambda p_{xx}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{xx}.$$

Обозначив

$$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \sigma,$$

Запишем

$$e_{yy} = e_{zz} = -\sigma e_{xx}. \quad (9.1.5)$$

Равенство (9.1.5) представляет собой закон Пуассона о поперечном сжатии при продольном удлинении, а σ носит название коэффициента Пуассона.

Для большинства материалов, применяемых в технике, безразмерная величина σ равна 0,25, для стали обычно принимают $\sigma = 0,3$.

Через модуль Юнга и коэффициент Пуассона коэффициенты λ и μ выражаются в виде

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)};$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Заметим, что в ряде случаев μ обозначается через G и называется модулем упругости при сдвиге, ибо, как следует из равенства (9.1.1'), $G = \mu$ характеризует деформацию сдвига.

Из формул (9.1.1') также следует, что

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = (3\lambda + 2\mu)\Delta,$$

откуда при равномерном давлении p

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$$

имеем зависимость между объемным расширением и давлением

$$\Delta = -\frac{3(1-2\sigma)}{E} p.$$

Коэффициент в последнем выражении

$$K = \frac{3(1-2\sigma)}{E}$$

называется модулем объемного расширения.

Из всего сказанного следует, что коэффициенты λ и μ , которые определяются через те или иные физические характеристики тела, являются величинами известными, если задано упругое тело.

9.2. Уравнения теории упругости. Граничные и начальные условия

Уравнения теории упругости

Основной задачей теории упругости является изучение деформаций упругого тела, которые происходят под действием приложенных к нему сил. Но компоненты деформации, как указано, определяются, если известен вектор смещения точек упругого тела. Следовательно, перед нами стоит задача найти уравнения, из которых может быть найден вектор смещения.

Ограничимся рассмотрением изотропного идеально упругого тела, точки которого получают малые смещения под действием приложенных сил. Предположим, кроме того, что справедлив обобщенный закон Гука. Последнее условие, как указывалось, ограничивает исследование деформаций областью так называемой линейной теории упругости. В силу малости вектора смещения \vec{s} переменные Эйлера, как указывалось ранее, могут быть приняты за начальные координаты точек тела и вектор ускорения \vec{a} можно записать в виде

$$\vec{a}(x, y, z) = \frac{\partial^2 \vec{s}(x, y, z, t)}{\partial t^2}.$$

Соответственно проекции вектора ускорения на оси прямоугольной системы координат будут

$$a_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; a_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; a_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Необходимые уравнения движения упругого тела в напряжениях в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right); \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= F_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right); \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{9.2.1}$$

Эти уравнения называются уравнениями Навье. Так как справедлив обобщенный закон Гука, то, записывая этот закон через составляющие вектора смещения $\vec{s} = (u, v, w)$, учитывая, что s мало, и используя переменные Эйлера, получим еще шесть уравнений

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\
p_{yy} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \\
p_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}; \\
p_{xy} &= p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\
p_{yz} &= p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right); \\
p_{zx} &= p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{9.2.2}$$

Присоединяя, кроме того, уравнение неразрывности, записанное через компоненты вектора смещения \vec{s} в переменных Эйлера

$$\frac{\rho_0}{\rho} - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (9.2.3)$$

получим систему из 10 уравнений для определения 10 неизвестных $u, v, w, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}, \rho$ по заданным значениям F_x, F_y, F_z .

Уравнение Ламе

Так как мы ограничимся рассмотрением малых смещении и соответственно малых деформаций, то плотность тела ρ будет мало меняться с течением времени. Следовательно, в уравнениях движения плотность ρ можно принять равной ρ_0 , и если тело однородно, то ρ_0 будет постоянной величиной, не зависящей от x, y, z . Теперь, используя обобщенный закон Гука, окончательно можем записать уравнение движения упругого тела через вектор смещения в виде

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \vec{F} + \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \text{grad div} \vec{s} + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{s}, \quad (9.2.4)$$

где

$$\Delta \vec{s} = \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial z^2}$$

представляет собой оператор Лапласа.

Заменяя λ и μ через модуль Юнга и коэффициент Пуассона, уравнение движения упругого тела запишем в виде

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \vec{F} + \frac{E \text{grad div} \vec{s}}{2\rho_0(1-\sigma)(1+2\sigma)} + \frac{E \Delta \vec{s}}{2\rho_0(1+\sigma)}. \quad (9.2.5)$$

Заметим, что если ρ близко к ρ_0 , то в силу уравнения (9.2.3) $\text{div} \vec{s}$ близка к нулю, но член $\frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div} \vec{s}$ при этом может быть ве-

лик, следовательно, он должен быть сохранен в уравнениях. Как следует из вывода, уравнение (9.2.4) описывает движение однородной изотропной сплошной среды, точки которой совершают малые перемещения. Оно является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами относительно вектора смещения \vec{s} . Это уравнение носит название уравнения упругости Ламе.

Граничные и начальные условия

На поверхности упругого тела могут быть заданы различные условия: во-первых, кинематические условия, заключающиеся в том, что по всей поверхности тела задан вектор смещения \vec{s} в виде

$$\vec{s} = \vec{f}_3(x, y, z, t). \quad (9.2.5)$$

Найденное из уравнения (9.2.4) значение \vec{s} должно быть определено так, чтобы на поверхности тела удовлетворялось уравнение (9.2.5); во-вторых, динамические условия, заключающиеся в том, что по всей поверхности тела действуют заданные силы

$$\vec{p}_n = \vec{f}_2(x, y, z, t). \quad (9.2.6)$$

Но \vec{p}_n можно выразить через $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ пользуясь ранее полученной формулой. Тогда

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \alpha_{n1} + \vec{p}_y \alpha_{n2} + \vec{p}_z \alpha_{n3} = \vec{f}_2(x, y, z, t). \quad (9.2.6')$$

Проекции векторов $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ по осям координат определяются через перемещения при помощи обобщенного закона Гука [см. равенства (9.2.2)]. Следовательно, значения u, v, w , найденные из уравнений (9.2.4), должны быть определены так, чтобы удовлетворять на поверхности тела равенству (9.2.6).

Наконец, на поверхности тела возможна комбинация указанных кинематических и динамических условий, заключающихся в том, что на части тела заданы кинематические, а на другой части — динамические условия. Заметим, что кроме указанных возмож-

ны и другие граничные условия кинематического и динамического характера.

Начальные условия в задачах теории упругости заключаются в том, что в момент времени $t = 0$ должны быть заданы вектор смещения и его производная по времени, т. е.

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \bar{f}_3(x, y, z); \\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} &= \bar{f}_4(x, y, z).\end{aligned}\tag{9.2.7}$$

Интеграл уравнения (9.2.4) должен удовлетворять равенствам (9.2.7).

9.3. Основные задачи статики упругого тела

Уравнения статики упругого тела

Уравнения равновесия упругого тела можно получить как следствие уравнений (9.2.1), положив $\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial t^2} = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + \rho F_x &= 0; \\ \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \rho F_y &= 0; \\ \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \rho F_z &= 0,\end{aligned}\tag{9.3.1}$$

где $\rho \bar{F}$ — сила, действующая на единицу объема.

К уравнениям (9.3.1) следует присоединить соотношения (9.2.2), выражающие обобщенный закон Гука, которые через смещения запишем в виде

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\
 p_{yy} &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right); \\
 p_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}; p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right);
 \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Девять соотношений (9.3.1) и (9.3.2) содержат девять неизвестных $u, v, w, p_{xx}, \dots, p_{xz}$ и определяют, таким образом, упругое равновесие тела, если заданы объемные силы и внешние воздействия, которым подвергнуто тело.

Внешние воздействия определяются внешними объемными силами и заданными граничными смещениями, либо напряжениями на поверхности тела.

В зависимости от граничных условий в статике упругого тела рассматривается несколько основных задач, которые приводим ниже.

Задача статики упругого тела в смещениях

Найдем решения уравнений (9.3.1) и (9.3.2), если вдоль поверхности тела s точки получили смещения, которые во все время исследования остаются неизменными. Это значит, что u, v, w на поверхности s являются заданными функциями (g_1, g_2, g_3) от x, y, z , т. е.

$$\begin{aligned}
 u &= g_1(x, y, z); \\
 v &= g_2(x, y, z); \\
 w &= g_3(x, y, z).
 \end{aligned} \tag{9.3.3}$$

Так как граничные условия относятся к смещениям, то и уравнения движения удобнее записать в смещениях, т. е. исклю-

чив p_{xx}, \dots, p_{xz} из соотношений (9.3.1) и (9.3.2), приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u + F_x &= 0; \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v + F_y &= 0; \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w + F_z &= 0,\end{aligned}\tag{9.3.4}$$

где

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Таким образом, задача статики упругого тела в смещениях сводится к интегрированию уравнений (9.3.4) при граничных условиях, выраженных равенствами (9.3.3).

Задача статики упругого тела в напряжениях

Найдем решения уравнений (9.3.1) и (9.3.2), т.е. найдем $u, v, w, p_{xx}, \dots, p_{xz}$, удовлетворяющие уравнениям равновесия в области, занятой телом, и следующим граничным условиям на поверхности тела

$$P_{nx} = p_{xx} \cos(\vec{n}, x) + p_{xy} \cos(\vec{n}, y) + p_{xz} \cos(\vec{n}, z) = f_1(x, y, z);$$

$$P_{ny} = p_{yx} \cos(\vec{n}, x) + p_{yy} \cos(\vec{n}, y) + p_{yz} \cos(\vec{n}, z) = f_2(x, y, z);$$

$$P_{nz} = p_{zx} \cos(\vec{n}, x) + p_{zy} \cos(\vec{n}, y) + p_{zz} \cos(\vec{n}, z) = f_3(x, y, z);$$

(9.3.5)

где p — внешняя нормаль к поверхности тела, f_1, f_2, f_3 — заданные функции, или компоненты напряжения на поверхности тела s .

Так как в задаче статики упругого тела на границе тела даны напряжения, то удобно составить систему уравнений, содержащую только напряжения. Очевидно, что такая система уравнений (9.3.1) недостаточна для определения напряжений в упругом теле.

Для того чтобы p_{xx} , ..., p_{xz} выражали возможные напряженные состояния, необходимо, чтобы составляющие $\vec{s} : u, v, w$, определяемые через p_{xx} , ..., p_{xz} , были связаны с напряжениями соотношениями (9.3.2). Кроме того, деформации e_{xx} , ..., e_{zx} должны удовлетворять условиям совместности (неразрывности деформаций)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

Условия (9.3.6) непосредственно вытекают из определения компонентов деформации e_{xx} , ..., e_{zx} . Они называются условиями совместности Сен - Венана.

Используя равенства (9.3.2), найдем компоненты деформации e_{xx} , ..., e_{zx} , определенные через компоненты напряжения:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{1+\sigma}{E} p_{xx} - \frac{\sigma}{E} \Theta_1; e_{yz} = \frac{1+\sigma}{E} p_{yz}; \\
 e_{yy} &= \frac{1+\sigma}{E} p_{yy} - \frac{\sigma}{E} \Theta_1; e_{zx} = \frac{1+\sigma}{E} p_{zx}; \\
 e_{zz} &= \frac{1+\sigma}{E} p_{zz} - \frac{\sigma}{E} \Theta_1; e_{xy} = \frac{1+\sigma}{E} p_{xy};
 \end{aligned} \tag{9.3.7}$$

где

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)}; \frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{2\mu}; \frac{1+\sigma}{E} = \frac{1}{\mu}$$

и

$$\Theta_1 = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}.$$

Подставив (9.3.7) в (9.3.6) и используя равенства (9.3.1), приходим к шести дополнительным уравнениям в напряжениях. Окончательно компоненты напряжений в задаче статики упругого тела в напряжениях должны удовлетворять следующим девяти уравнениям в напряжениях

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0; \\
 \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0; \\
 \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0; \\
 \Delta p_{xx} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} &= -\frac{\sigma}{1-\sigma} \operatorname{div} \vec{F} - 2 \frac{\partial F_x}{\partial x}; \\
 \Delta p_{yy} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2} &= -\frac{\sigma}{1-\sigma} \operatorname{div} \vec{F} - 2 \frac{\partial F_y}{\partial y};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta p_{zz} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} &= -\frac{\sigma}{1-\sigma} \operatorname{div} \vec{F} - 2 \frac{\partial F_z}{\partial z}; \\ \Delta p_{yz} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial z} \right); \\ \Delta p_{zx} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z \partial x} &= -\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \right); \\ \Delta p_{xy} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \right); \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}; \\ \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}; \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Последние шесть уравнений системы (9.3.8) называются условиями совместности Бельтрами Митчела.

На границе тела компоненты напряжения должны удовлетворять условиям (9.3.5). Определив компоненты напряжений из соотношений (9.3.7), можно найти компоненты деформаций e_{xx} , ..., e_{zx} .

Задача статики упругого тела в напряжениях называется первой граничной задачей; задача статики упругого тела в смещениях — второй граничной задачей.

Наряду с этими двумя задачами рассматриваются также так называемые смешанные задачи, которые характеризуются тем, что на одной части границы тела заданы смещения, а на другой границе, заданы напряжения. Такого типа задачи отличаются зна-

чительно большей сложностью, чем первая и вторая граничные задачи.

9.4. Продольные колебания стержня, напряжение и деформации

В качестве одного из простейших примеров применения уравнений предыдущей главы рассмотрим упругий стержень, ось которого расположена вдоль оси x (рис. 9.1). Предположим, что в процессе деформации стержень не изгибается и напряженное состояние его определяется следующими составляющими тензора напряжения

$$p_{xx} \neq 0; p_{yy} = p_{zz}; p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0. \quad (9.4.1)$$

Отсюда получим, что составляющие тензора деформации будут вида

$$\begin{aligned} \lambda \Theta + 2\mu e_{xx} &= p_{xx}; \\ \lambda \Theta + 2\mu e_{yy} &= 0; \\ \lambda \Theta + 2\mu e_{zz} &= 0; \end{aligned}$$

где

$$\Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}; e_{yz} = e_{zx} = 0.$$

Из этих равенств имеем

$$\begin{aligned} (3\lambda + 2\mu)\Theta &= p_{xx}; \\ e_{yy} = e_{zz} &= -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{p_{xx}}{3\lambda + 2\mu}; \\ p_{xx} &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{xx} = Ee_{ee}. \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

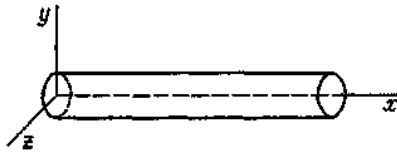


Рис. 9.1.

Уравнения деформации стержня

Используя равенства (9.4.1) и (9.4.2), полагая, что внешние силы отсутствуют, и учитывая, что $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$; уравнение движения стержня на основании формулы (9.2.1) запишем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.4.3)$$

где ρ_0 — постоянная плотность стержня. Вводя обозначение

$$\sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = a,$$

последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9.4.3')$$

Уравнение (9.4.3) называется *волновым уравнением*. В рассматриваемом случае оно описывает смещение отдельных точек стержня в направлении оси x , вдоль которой располагается стержень. Эти смещения будут колебаниями, носящими название продольных упругих колебаний стержня.

Заметим, что уравнение (9.4.3) в гидродинамике описывало плоскую звуковую волну.

Постановка задачи о колебании стержня с одним закрепленным концом

Пусть стержень, имеющий в нерастянутом состоянии длину l , закреплен на одном конце в точке $x = 0$ (см рис.9.1). Пусть в момент $t = 0$ стержень растянут и имеет длину l_1 . Далее, пусть стержень отпускается, вследствие чего возникают в нем продольные колебания. На основании сказанного, волновое уравнение (9.4.3) должно быть решено при следующих граничных условиях

$$u(0, t) = 0 \quad (9.4.4)$$

и

$$(e_{xx})_{x=l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (9.4.5)$$

Последнее равенство соответствует условию того, что в нерастянутом состоянии нет упругих напряжений на конце стержня.

Полагая, что в начальный момент смещение различных точек стержня пропорционально абсциссе этих точек, начальное условие (9.4.4) запишем в виде

$$u(0, x) = \frac{l_1 - l}{l} x \quad (0 < x < l). \quad (9.4.6)$$

Начальным условием будет также равенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l), \quad (9.4.7)$$

которое говорит о том, что скорости смещения всех точек стержня в начальный момент равны нулю.

Итак, для определения продольных колебаний стержня следует решить волновое уравнение (9.4.3) при граничных условиях (9.4.4) и (9.4.5) и начальных условиях (9.4.6) и (9.4.7). Решение волнового уравнения (9.4.3) при граничных условиях (9.4.4) и (9.4.5) можно получить либо методом Фурье, либо методом харак-

теристик. Именно последний метод и используется при решении уравнения (9.4.3).

Интегрирование уравнения, описывающего деформацию стержня.

Будем искать общее решение уравнений (9.4.3) в виде

$$u = \Theta(at - x) + \Theta_1(at - x), \quad (9.4.8)$$

где Θ, Θ_1 — пока произвольные функции, которые определяются из граничных условий. Из (9.4.4) имеем

$$\Theta(at) + \Theta_1(at) = 0,$$

откуда

$$\Theta_1(at) = -\Theta(at),$$

т. е. функции Θ и Θ_1 должны отличаться только знаком.

Итак,

$$u = \Theta(at - x) - \Theta(at + x), \quad (9.4.9)$$

Далее из граничного условия (9.4.5) следует

$$\Theta'(at - l) + \Theta'(at + l) = 0.$$

Обозначив $at + l = z$, получим

$$\Theta'(z) = -\Theta'(z + 2l). \quad (9.4.10)$$

Используя начальные условия (9.4.6) и (9.4.7), имеем

$$\begin{aligned} \frac{l_1 - l}{l} x &= \Theta(-x) - \Theta(x); \\ 0 &= \Theta'(-x) - \Theta'(x). \end{aligned}$$

Дифференцируя первое из этих равенств и рассматривая его вместе со вторым, находим

$$\Theta'(z) = \frac{l_1 - l}{l}; -l < z < l, \quad (9.4.11)$$

где z — аргумент функции Θ' . Из последнего равенства имеем

$$\Theta(z) = \frac{l_1 - l}{l} z \text{ при } -l < z < l, \quad (9.4.12)$$

Используя соотношение (14.1.10), найдем

$$\Theta'(z) = \frac{l_1 - l}{l} z \text{ при } -l < z < 3l, \quad (9.4.13)$$

откуда

$$\Theta(z) = \frac{l_1 - l}{l} z \text{ при } -l < z < 3l. \quad (9.4.13')$$

Кроме того, из (9.4.10) следует, что $\Theta'(z)$ имеет период $4l$. Окончательно запишем

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= -\frac{l_1 - l}{l} z && \text{при } -l < z < l, \\ & && 3l < z < 5l, \\ & && 7l < z < 9l, \\ & && \dots \end{aligned} \quad (9.4.12')$$

и

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= -\frac{l_1 - l}{l} z \text{ при } l < z < 3l, \\ & && 5l < z < 7l, \\ & && 9l < z < 11l, \\ & && \dots \end{aligned} \quad (9.4.13'')$$

Итак, формула (9.4.9) определяет смещения любой точки стержня для любого момента времени t_1 , если использовать формулы (9.4.12) и (9.4.13), полагая в них $z = at_1 - x_1$.

Первый член (9.4.9) определяет так называемое смещение, вызванное прямой волной, ибо одинаковое смещение, описываемое первым членом (9.4.9), при $at - x = c = const$ будет распространяться вдоль положительного направления оси x со скоростью a . Второй член формулы (9.4.9) определяет смещение, вызванное обратной волной. Последняя распространяется со скоростью a вдоль отрицательного направления оси x . Итак, продольные упругие колебания стержня с одним закрепленным концом описываются наложением прямой и обратной волн.

9.5. Свободные малые поперечные колебания струны

Постановка задачи

Упругая нить, которая может свободно изгибаться, называется струной. Пусть струна характеризуется модулем Юнга E_1 и коэффициентом Пуассона σ_1 . Рассмотрим струну, которая натянута вдоль оси x и закреплена в точках $x = 0, l$. Предположим, что на струну не действуют внешние силы ($\vec{F} = 0$) и она совершает малые колебания в плоскости x, y под действием упругих сил (рис. 9.2). Так как струна совершает малые колебания, то можно считать, что отдельные точки ее перемещаются только вдоль оси y и составляющие перемещения имеют вид

$$u = 0, w = 0, v = v(x, t), \quad (9.5.1)$$

где $v(x, t)$ представляет собой уравнение движения струны.

Используя (9.5.1), уравнение Ламе для рассматриваемой задачи запишем в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{E_1(1 - \sigma_1)}{\rho_0(1 + \sigma_1)(1 - 2\sigma_1)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (9.5.2)$$

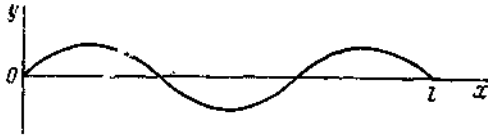


Рис. 9.2.

Коэффициент Пуассона σ_1 характеризующий поперечное сжатие струны, в этом случае будет мал по сравнению с единицей. Поэтому коэффициент, стоящий в правой части (9.5.2), будет существенно положителен и его можно обозначить a^2 , т. е.

$$a^2 = \frac{E_1(1-\sigma_1)}{\rho_0(1-\sigma)(1-2\sigma_1)}.$$

Тогда уравнение (9.5.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (9.5.2')$$

В силу малости σ_1 приближенно можно считать, что

$$a^2 = \frac{E_1}{\rho}.$$

Граничные условия рассматриваемой задачи определяются условиями закрепления струны на концах, т. е.

$$(v)_{x=0} = 0; (v)_{x=l} = 0. \quad (9.5.33)$$

Начальные условия определяются формой струны и скоростями отдельных ее точек при $t = 0$, т. е.

$$(v)_{t=0} = \phi(x); \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t=0} = \phi_1(x). \quad (9.5.4)$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям

Применим к решению уравнения (9.5.2) метод Фурье. Последний заключается в том, что решение ищется в виде произведения двух неизвестных функций, каждая из которых зависит только от x или t

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (9.5.5)$$

Подставляя (9.5.5) в уравнение (9.5.2), имеем

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (9.5.6)$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от t , а правая только от x , то оно справедливо только в том случае, когда правая и левая части равны некоторой постоянной. Обозначив последнюю через $-\lambda$ из (9.5.6), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно T и X

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \quad (9.5.7)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (9.5.8)$$

Из условий (9.5.3) следует, что граничными условиями уравнения (9.5.8) будут

$$X(0) = 0; X(l) = 0. \quad (9.5.9)$$

Чтобы получить отличные от нуля решения уравнения (9.5.2), следует так подобрать параметр λ , чтобы (9.5.8) имело нетривиальные решения при граничных условиях (9.5.9). Такие параметры λ называют собственными значениями и соответствующие решения — собственными функциями.

Докажем, что искомые решения имеют место только при $\lambda > 0$.

Действительно, пусть $\lambda < 0$, тогда общее решение уравнения (14.2.8) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda x}}.$$

Удовлетворяя граничным условиям, найдем, что произвольные постоянные C_1 и C_2 должны определяться из уравнений

$$C_1 + C_2 = 0 \text{ и } C_1 e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda x}} = 0,$$

откуда имеем $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, при $\lambda < 0$ уравнение (9.5.8) имеет только тривиальное решение. Положим, что $\lambda = 0$, тогда (9.5.8) имеет общее решение вида

$$X = C_1 + C_2 x$$

и C_1 и C_2 должны удовлетворять соотношениям

$$C_1 + 0; C_1 + C_2 l = 0.$$

Отсюда следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, при $\lambda = 0$ уравнение (9.5.8) имеет тривиальное решение.

Рассмотрим, наконец, когда $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения (9.5.8) будет вида

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda x} + C_2 \sin \sqrt{\lambda x},$$

где C_1 и C_2 должны удовлетворять соотношениям

$$C_1 = 0; C_1 \cos \cos \sqrt{\lambda x} + C_2 \sin \sqrt{\lambda x} = 0.$$

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (9.5.8), следует положить $C_2 \neq 0$. Тогда из последнего соотношения следует, что $\sin \sqrt{\lambda x} = 0$ или $\lambda l = k\pi$. Таким образом, нетривиальные решения уравнения (9.5.8) соответствуют собственным значениям λ , которые назовем λ_k определяемым выражением

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

Найденные собственные значения будут соответствовать собственным функциям вида

$$X_k(x) = C_2 \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Заметим, что знак k изменит только произвольную константу последнего выражения. Поэтому достаточно рассматривать только положительные значения k . При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (9.5.7) будет вида

$$T_k(t) = a'_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b'_k \sin \frac{k\pi a}{l} t,$$

где a'_k и b'_k — произвольные постоянные.

На основании сказанного функции вида

$$v_k(x, t) = X_k T_k = \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x,$$

где $a_k = a'_k C_2$, $b_k = b'_k C_2$ — пока произвольные константы, удовлетворяющие уравнению (9.5.2) и граничным условиям (9.5.3).

В силу линейности и однородности уравнения (9.5.2) ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ будет также решением уравнения, если он сходится, и его можно дважды почленно дифференцировать по t и x . Так как каждый член ряда удовлетворяет граничным условиям, то и сумма его будет также удовлетворять этим условиям. Следовательно, решение уравнения (9.5.2), удовлетворяющее граничным условиям, можно записать в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (9.5.10)$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям

Подберем a_k и b_k , входящие в (9.5.10), так, чтобы удовлетворялись начальные условия (9.5.4). Продифференцировав ряд (9.5.10) по t , получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (9.5.11)$$

Положив в (9.5.10) и (9.5.11) $t = 0$, получим на основании (9.5.4)

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x; \quad \phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{\pi k}{l} x.$$

Последние формулы представляют собой разложение функций $\phi(x)$ и $\phi_1(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$.

Коэффициенты такого разложения вычисляются, как известно, по формулам

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \phi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (9.5.12)$$

Следует отметить, что если $\phi(x)$ и $\phi_1(x)$ представляют собой функции непрерывные и дифференцируемые, то можно доказать, что ряд (9.5.10) сходится.

Итак, малые колебания закрепленной по концам струны описываются формулой (9.5.10), где a_k и b_k определяются из (9.5.12).

Исследование решения

Запишем найденное решение (9.5.10) несколько в ином виде. Для этого введем обозначения

$$a_k = A_k \sin \phi_k, b_k = A_k \cos \phi_k.$$

Тогда (9.5.10) можно переписать в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi at}{l} + \phi_k \right), \quad (9.5.13)$$

Каждый член последнего ряда представляет собой так называемую стоячую волну. Последняя характеризуется тем, что каждая точка струны совершает гармоническое колебание одинаковой частоты $\frac{k\pi a}{l}$ и фазы ϕ_k , амплитуда которых вдоль струны изменяется по закону $A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$.

Таким образом, малые колебания струны представляют собой наложение бесконечного числа стоячих волн.

Так как рассматриваемое колебание струны в воздушной среде сопровождается звуком, то имеет место следующая терминология: первый член ряда (9.5.13) называется основным тоном, все последующие называются гармониками. Точки, в которых $\sin \frac{k\pi x}{l}$ обращается в нуль, называются узлами k -й гармоники.

Точки, в которых $\sin \frac{k\pi x}{l}$ имеет максимальное значение, называются пучностью k -й гармоники. Узлы и пучности определяются только номером гармоники и длиной струны. Частоты основного тона и гармоник зависят от физических характеристик струны и определяются модулем Юнга и коэффициентом Пуассона.

РАЗДЕЛ 10

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Теория пластичности, как один из разделов механики сплошных сред, изучает зависимости компонентов напряжений от компонентов деформаций за пределами упругости. Существующие в настоящее время теории пластичности можно разбить на две группы.

В первой группе теорий, которые называются деформационными, устанавливаются зависимости между напряжениями и деформациями.

Во второй группе рассматриваются связи между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений, а также самими напряжениями. В частном случае получают зависимости скоростей деформаций от напряжений. В этих теориях пластическая деформация рассматривается как процесс пластического течения материала. Поэтому они называются теориями течения.

В настоящей главе рассматривается наиболее простая и распространенная в настоящее время деформационная теория, которая называется теорией упруго-пластических деформаций.

10.1. Основные гипотезы теории упруго-пластических деформаций

Основные положения теории упруго-пластических деформаций являются обобщением некоторых следствий закона Гука для неоднородного напряженного состояния, которые были рассмотрены в предыдущей главе.

В основу теории упруго-пластических деформаций положены следующие гипотезы.

1. Объемная деформация прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению, причем связывающий их коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости.

2. Компоненты девiatorа деформаций пропорциональны компонентам девiatorа напряжений.

3. Интенсивность напряжений является функцией интенсивности деформаций, не зависящей от типа напряженного состояния.

Перейдем к более подробному разбору этих положений. Согласно первой гипотезе

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}, \quad (10.1)$$

где K — объемный модуль упругости, определяемый формулой

$$K = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

В последнем выражении E — модуль упругости первого рода; μ — коэффициент поперечной деформации

Используя зависимость

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

Получаем

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0. \quad (10.2)$$

Заметим, что возможна и иная формулировка первой гипотезы: *за счет пластической деформации изменения объема не происходит*. Такое допущение справедливо, так как экспериментально установлено, что обычно изменение объема сравнительно невелико и поэтому им можно пренебречь. Тогда относительное изменение объема на основании соотношения

$$\Delta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

в инженерных расчетах можно положить

$$\varepsilon_0 = 0. \quad (10.3)$$

В таком случае принято говорить, что материал несжимаем, а условие (10.3) представляет собой условие несжимаемости.

Как следует из формулы (10.1), допущение о равенстве объемной деформации нулю эквивалентно предположению, что объемный модуль упругости равен бесконечности, или что коэффициент поперечной деформации равен половине.

Согласно второй гипотезе

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} &= \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_0}{\sigma_y - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_0}{\sigma_z - \sigma_0} = \\ &= \frac{\frac{\gamma_{xy}}{\tau_{xy}}}{\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy}}} = \frac{\frac{\gamma_{yz}}{\tau_{yz}}}{\frac{\tau_{yz}}{\tau_{yz}}} = \frac{\frac{\gamma_{zx}}{\tau_{zx}}}{\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zx}}} = \psi, \end{aligned} \quad (10.4)$$

где ψ - некоторая функция напряжений.

В пределах упругости ψ — постоянная величина, равная

$$\psi = \frac{1}{2G} \quad (G - \text{модуль упругости второго рода}).$$

Из выражения (10.4) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_0 &= \psi(\sigma_x - \sigma_0); \gamma_{xy} = 2\psi\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y - \varepsilon_0 &= \psi(\sigma_y - \sigma_0); \gamma_{yz} = 2\psi\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z - \varepsilon_0 &= \psi(\sigma_z - \sigma_0); \gamma_{zx} = 2\psi\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Рассмотрим иные формулировки второй гипотезы.

Рассматривая аналогию между деформированным и напряженным состояниями, можно заключить, что геометрическое изображение на плоскости соотношений, связывающих компоненты деформаций между собой, совпадает с геометрическими по-

строениями в теории напряжений, т. е. связь между угловыми и линейными деформациями изображается при помощи круговой диаграммы деформаций (рис. 10.1).

В этом случае по оси абсцисс откладывают линейные деформации, а по оси ординат — половины угловых деформаций. Координаты точек на полуокружностях *I*, *II*, *III* равны линейным деформациям и половинам угловых деформаций по направлениям, лежащим в главных плоскостях 2—3, 3—1 и 1—2 соответственно.

Любая из точек, лежащих внутри области, ограниченной тремя окружностями диаграммы, своими координатами определяет линейную и половину угловой деформации в направлениях, не лежащих в главных плоскостях.

Из круговой диаграммы следует, что одна из главных линейных деформаций является наибольшей, а другая — наименьшей из всех линейных деформаций в окрестности исследуемой точки. Далее на основании круговой диаграммы можно также заключить, что наибольшие угловые деформации имеют место для направлений, лежащих в главных плоскостях и составляющих угол 45° с главными осями.

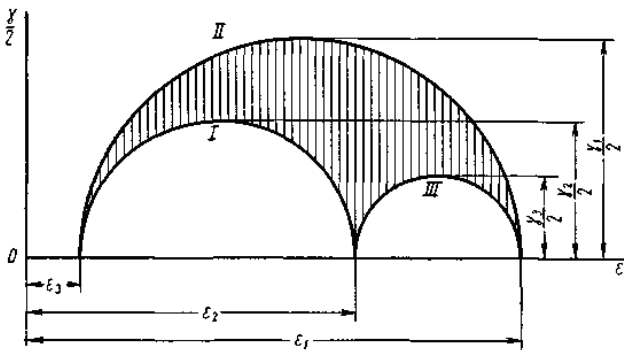


Рис. 10.1. Круговая диаграмма деформаций

Эти наибольшие угловые деформации, которые называются *главными угловыми деформациями*, равны разностям главных линейных деформаций

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3; \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

По аналогии с соответствующей величиной для напряжений параметр для деформаций имеет вид

$$\chi_\varepsilon = 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1 = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}; \quad (10.6)$$

он характеризует вид деформированного состояния с точностью до равноосного растяжения или сжатия.

Таким образом, для простейших напряженных состояний: одноосного растяжения, одноосного сжатия и чистого сдвига параметры χ по напряжениям и деформациям равны

$$\chi_0 = \chi_\varepsilon,$$

т. е. для этих напряженных состояний круговые диаграммы напряжений и деформаций подобны. Естественно распространить это положение на все напряженные состояния, т. е. допустить, что круговые диаграммы напряжений и деформаций подобны для всех напряженных состояний. Тогда, подставляя в условие (10.6) величины χ_0 и χ_ε , получим

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3},$$

что после преобразований приводит к выражению

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\sigma_1 - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\sigma_2 - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_0}{\sigma_3 - \sigma_0}. \quad (10.7)$$

Таким образом, исходя из гипотезы подобия круговых диаграмм напряжений и деформаций получено условие пропорциональности компонентов девиаторов напряжений и деформаций. Напомним, что девиатор – это тензор, определяющий напряжения

в точке, не связанные с гидростатическими (всесторонними) напряжениям.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \sigma_{11} - \sigma, & \varepsilon_{22} &= \sigma_{22} - \sigma, & \varepsilon_{33} &= \sigma_{33} - \sigma, \\ \varepsilon_{12} &= \sigma_{12}, & \varepsilon_{23} &= \sigma_{23}, & \varepsilon_{31} &= \sigma_{31}, \\ \sigma &= (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / 3, \\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, можно предложить иную формулировку второй гипотезы: *для всех напряженных состояний круговые диаграммы напряжений и деформаций подобны.*

Из соотношений (10.7) можно получить следующие пропорции:

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1},$$

или

$$\frac{\gamma_1}{\tau_1} = \frac{\gamma_2}{\tau_2} = \frac{\gamma_3}{\tau_3}.$$

Таким образом, вторая гипотеза может быть сформулирована еще и так: *главные угловые деформации прямо пропорциональны главным касательным напряжениям.*

Перейдем теперь к рассмотрению третьей гипотезы теории упруго-пластических деформаций. В соответствии с формулировкой этой гипотезы для определения зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций можно воспользоваться результатами испытаний на растяжение. Проведение последних, как правило, проще, чем испытаний при иных типах нагружения.

График зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций будем называть диаграммой деформирования материала.

Выражения для интенсивностей напряжений и деформаций при одноосном напряженном состоянии имеют вид

$$\sigma_i = \sigma; \quad (10.8)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0. \quad (10.9)$$

Учитывая, что при одноосном растяжении $\sigma_0 = \frac{\sigma}{3}$ и используя соотношения и для K , получим

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \frac{1-2\mu}{3E} \sigma. \quad (10.10)$$

При помощи формул (10.8) и (10.10) можно по диаграмме растяжения материала подсчитать величины ε_i , σ_i , определяющие диаграмму деформирования.

В литературе описаны графо-аналитические и графические методы построения диаграммы деформирования по диаграмме растяжения. Заметим, что если принять условие несжимаемости материала, то тогда диаграмма деформирования материала совпадает с диаграммой растяжения.

10.2. Зависимости между напряжениями и деформациями за пределами упругости

Сформулированные в предыдущем параграфе гипотезы полностью определяют зависимости компонентов напряжений от компонентов деформаций.

Для получения этих зависимостей в окончательной форме определим функцию ψ . Подставим компоненты деформаций по формулам (10.5) в выражение для интенсивности деформаций получим

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}, \quad (10.11)$$

И зависимости (10.5) принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_0); \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_y - \varepsilon_0); \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_z - \varepsilon_0); \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}.\end{aligned}\tag{10.12}$$

Для несжимаемого материала в формулах (10.12) необходимо положить $\varepsilon_0 = 0$.

Если пластическая деформация сопровождается нагревом тела, то зависимости (10.12) остаются в силе. Это объясняется тем, что в результате нагрева изменяются только линейные деформации, причем на одинаковые величины. Поэтому компоненты девиатора деформаций при нагреве не изменяются.

Объемная деформация равняется сумме трех линейных. Следовательно, в случае нагрева соотношение (10.1) принимает вид

$$\Delta = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K} + 3\theta$$

или

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K} + \theta.\tag{10.13}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xp} &= \varphi(\sigma_x - \sigma_0); \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{zxp} &= 2\varphi\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Используя компоненты пластической деформации по формулам (10.18), можно установить

$$\varepsilon_{ip} = \frac{2}{3} \varphi \sigma_i \quad (10.19)$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{ip}}{\sigma_i}.$$

Поэтому зависимости (10.18) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xp} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0); \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{zxp} &= 3 \frac{\varepsilon_{ip}}{\sigma_i} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

Напомним, что зависимость интенсивности деформаций от интенсивности напряжений в пределах упругости определяется формулой

$$\varepsilon_{ie} = \frac{\sigma_i}{3G}. \quad (10.21)$$

Сложим соотношения (10.19) и (10.21). Тогда, принимая во внимание выражение (10.17), имеем

$$\varepsilon_{ie} + \varepsilon_{ip} = \varepsilon_i. \quad (10.22)$$

Таким образом, интенсивности полных, упругих и пластических деформаций обладают теми же аддитивными свойствами, что и сами деформации.

10.3. О коэффициенте поперечной деформации за пределами упругости

Как известно, для определенного материала при определенной температуре испытания отношение поперечной деформации к продольной при одноосном растяжении в пределах упругости является постоянной величиной. Абсолютная величина этого отношения называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона. Теория упруго-пластических деформаций позволяет установить эту величину и за пределами упругости. Будем называть ее также коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона и обозначать μ' . Ниже будет показано, что за пределами упругости коэффициент поперечной деформации не постоянен, а возрастает с увеличением деформации, стремясь к $1/2$.

Из уравнений (10.12) и (10.2) для одноосного растяжения $\left(\sigma_x = \sigma_y = 0; \sigma_z = \sigma; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \sigma_0 = \frac{\sigma}{3} \right)$ получаем

$$\varepsilon_{non} = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\sigma}{9K} - \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} \sigma;$$

$$\varepsilon = \varepsilon_z = \frac{\sigma}{9K} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma.$$

Исключим из этих двух выражений $\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma$. Тогда имеем

$$2\varepsilon_{non} + \varepsilon = \frac{\sigma}{3K},$$

откуда, учитывая, что

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

определяем

$$\mu' = \left| \frac{\varepsilon_{non}}{\varepsilon} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2E} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (10.23)$$

Как следует из этого уравнения, при увеличении деформации $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ и $\mu' \rightarrow \frac{1}{2}$.

Рассмотрим метод построения графика зависимости коэффициента поперечной деформации по диаграмме растяжения материала.

Примем, что отрезок OC на диаграмме растяжения материала (рис. 10.2), равный в определенном масштабе $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$, в

другом масштабе равен $\frac{1-2\mu}{2E}$. Проведем вертикальную линию

CD и через точку F пересечения ее с начальным прямолинейным участком диаграммы растяжения горизонтальную линию до пересечения в точке G с осью ординат. Отрезок OG в определенном масштабе равен величине $\frac{1}{2} - \mu$. Заметим, что масштаб этого отрезка заранее не известен. Он получается в результате построений

и зависит от масштаба величины $\frac{1-2\mu}{2E}$. Отложим теперь в том

же масштабе по оси ординат диаграммы растяжения отрезок OA , равный $\frac{1}{2}$ и проведем через точку A горизонтальную прямую AB .

Тогда очевидно, что отрезок AG в этом же масштабе равен коэффициенту μ поперечной деформации в пределах упругости. Возьмем теперь на диаграмме растяжения материала произвольную точку K и установим для величины деформации, определяемой этой точкой, коэффициент поперечной деформации.

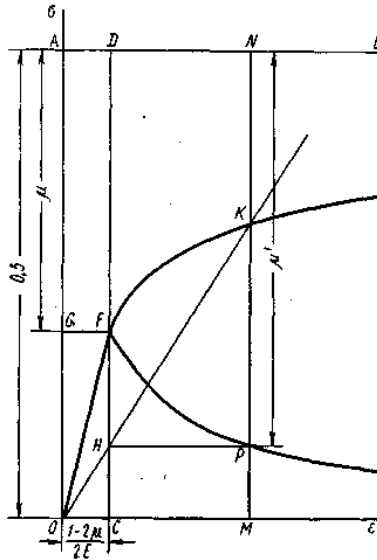


Рис. 10.2.

Проведем через точку K вертикальную линию и обозначим точки пересечения ее с прямой AB через N , а с осью абсцисс — M . Далее соединим точку K с началом координат. Очевидно, что тангенс угла наклона луча OK пропорционален $\frac{\sigma}{\varepsilon}$. Луч OK пересекает вертикаль CD в точке R . Проведем через эту точку горизонтальную линию до пересечения с вертикалью MN в точке P . Отрезок CH в получившемся масштабе равен $\frac{1-2\mu}{2E} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}$, и поэтому отрезки $HD = PN$ в том же масштабе равны коэффициенту поперечной деформации за пределами упругости μ' . Повторяя подобные построения для ряда исходных точек на диаграмме растяжения материала, можно получить график зависимости коэффициента поперечной деформации от величины деформации GFP (см. рис. 10.1). Экспериментально полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими зависимостями.

10.4. Простое и сложное нагружение тела

Простым нагружением называется такое нагружение, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру. В противном случае нагружение называется сложным.

В случае однородного напряженного состояния нагружение тела будет простым при возрастании внешних сил пропорционально одному общему для всех сил параметру. Это объясняется тем, что при однородном напряженном состоянии, возможном только в случае отсутствия массовых сил, деформированное состояние тоже будет однородным. Тогда дифференциальные уравнения равновесия и условия совместности деформаций выполняются тождественно. Поэтому напряженное состояние определяется только граничными условиями, т. е. только поверхностными силами. При возрастании их пропорционально некоторому параметру напряжения, а, следовательно, и компоненты девиатора напряжений во всех точках тела будут возрастать пропорционально тому же параметру, и нагружение тела будет простым.

Доказано, что для того, чтобы во всех точках несжимаемого тела, нагруженного внешними силами, возрастающими пропорционально некоторому параметру β , нагружение было простым, достаточно, чтобы зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций была степенной функцией вида

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^m; \quad (10.24)$$

это положение называется теоремой о простом нагружении. Заметим, что параметр β может быть временем или любой другой величиной, определяющей последовательные значения напряжений. Так, например, если внешние силы осуществляются за счет давления масла из одного резервуара, параметром β может быть это давление.

Перейдем к доказательству теоремы о простом нагружении. Допустим, что для какого-либо определенного значения параметра β , например для $\beta = 1$, пластическая задача решена. Обо-

значим напряжения, деформации и перемещения, полученные в решении, через

$$\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*, \tau_{xy}^*, \tau_{yz}^*, \tau_{zx}^*, \varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \varepsilon_z^*, \gamma_{xy}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{zx}^*, u_x^*, u_y^*, u_z^*.$$

Очевидно, что компоненты напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия и условиям на поверхности, а компоненты деформаций — условиям совместности деформаций. Также удовлетворяются зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения и зависимости компонентов напряжения от компонентов деформации (10.12). На основании соотношения (10.24) имеем

$$\sigma_i^* = A(\varepsilon_i^*)^m. \quad (10.25)$$

Попытаемся найти решение той же пластической задачи для β , отличного от единицы, в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta \sigma_x^*; \sigma_y = \beta \sigma_y^*; \sigma_z = \beta \sigma_z^*; \\ \tau_{xy} &= \beta \tau_{xy}^*; \tau_{yz} = \beta \tau_{yz}^*; \tau_{zx} = \beta \tau_{zx}^*. \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

$$u_x = \nu u_x^*; u_y = \nu u_y^*; u_z = \nu u_z^*, \quad (10.27)$$

где ν — некоторая функция β .

На основании этого, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \nu \varepsilon_x^*; \varepsilon_y = \nu \varepsilon_y^*; \varepsilon_z = \nu \varepsilon_z^*; \\ \gamma_{xy} &= \nu \gamma_{xy}^*; \gamma_{yz} = \nu \gamma_{yz}^*; \gamma_{zx} = \nu \gamma_{zx}^*. \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

Очевидно, что если выбранные ранее компоненты напряжений $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*, \tau_{xy}^*, \tau_{yz}^*, \tau_{zx}^*$, деформаций $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \varepsilon_z^*, \gamma_{xy}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{zx}^*$, и перемещений u_x^*, u_y^*, u_z^* удовлетворяют уравнениям дифференциального уравнения равновесия, напряженного состояния в точке

тела и условию совместимости деформаций, то компоненты напряжений, перемещений и деформаций, определяемые формулами (10.26) — (10.28), также удовлетворяют этим уравнениям. На основании соотношений (10.24) — (10.26) и (10.28) заключаем

$$\nu = \beta^{\frac{1}{m}}.$$

При выполнении этого условия формулы (10.26) — (10.28) дают решение пластической задачи. Из соотношений (10.26) заключаем, что нагружение является простым. Как следует из вышеизложенного, соблюдение зависимости (10.24) является условием достаточным, но не необходимым для обеспечения простого нагружения.

Простое нагружение имеет место в некоторых других частных случаях при возрастании внешних сил пропорционально одному общему для всех сил параметру, если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций отлична от зависимости (10.24). С другой стороны, при отсутствии упрочнения в случае нагружения тела силами, возрастающими пропорционально общему параметру, элементы тела могут испытывать сложное нагружение.

Отметим, что если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформации имеет вид полинома, то для осуществления простого нагружения тела необходимо приложение внешних сил, изменяющихся непропорционально одному общему для всех сил параметру. В таком случае простое нагружение тела вообще практически неосуществимо.

Несмотря на это, учитывая, что выражение (10.24) с достаточной степенью точности аппроксимирует зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в области пластических деформаций, приближенно можно считать нагружение тела простым, если внешние силы возрастают пропорционально одному общему для всех сил параметру.

10.5. Разгрузка

Согласно закону разгрузки, уменьшение напряжений при разгрузке $\sigma_{раз}$ прямо пропорционально уменьшению деформаций

$\varepsilon_{разг}$, причем коэффициент пропорциональности тот же, что и в начальной стадии нагружения.

Выше отмечалось, что интенсивность деформаций может быть представлена в виде суммы интенсивностей упругих и пластических деформаций. Поэтому диаграмма деформирования материала имеет такой же вид, что и диаграмма растяжения не только при нагружении, но и при разгрузке. Следовательно, диаграмма разгрузки на графике ε_i, σ_i является прямой (BC), параллельной начальной прямой нагружения (OA) (рис. 10.2)..

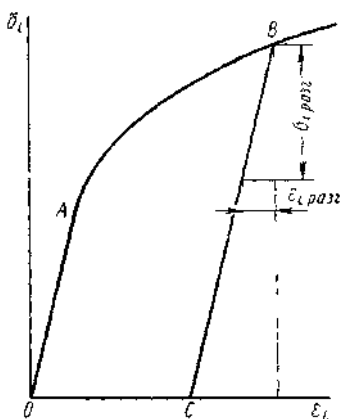


Рис. 10.2.

Уменьшение интенсивности напряжений при разгрузке прямо пропорционально снижению интенсивности деформаций, причем коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости. Таким образом, математическая формулировка закона разгрузки имеет вид

$$\sigma_{iразг} = 3G\varepsilon_{iразг} . \quad (10.32)$$

виям на поверхности (3.1) с массовыми силами $X — X^*$, $Y — Y^*$, $Z — Z^*$ и поверхностными силами $X_y — X_y^*$; $Y_y — Y_y^*$; $Z_y — Z_y^*$, а компоненты деформаций $\varepsilon_{xраз}, \dots, \gamma_{zраз}$ удовлетворяют условиям совместности деформаций.

Так как при разгрузке уменьшение интенсивности напряжений прямо пропорционально уменьшению интенсивности деформаций, заключаем, что напряжения и деформации разгрузки определяются путем решения задачи теории упругости для внешних сил, равных разностям сил при нагружении и остающихся после разгрузки. В случае полной разгрузки последние равны нулю и задача теории упругости решается для внешних сил, нагружающих тело.

Остаточные напряжения и деформации согласно формулам (10.33) и (10.34) определяются как разности напряжений и деформаций, возникающих при нагружении, и уменьшений напряжений и деформаций при разгрузке (разгрузочных напряжений и деформаций).

Изложенное выше справедливо в предположении, что в процессе разгрузки материал вновь не выходит за пределы упругости.

РАЗДЕЛ 11

ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

В настоящее время широкое распространение для решения ряда сложных научно-технических задач получил метод моделирования. Это обусловлено тем, что решение многих задач, в том числе и металлургических, в натуральных условиях по ряду причин (непрозрачность и высокая температура металла, громоздкость и дороговизна установки, агрессивность свойств расплавленного металла и т. д.) весьма затруднено. Моделирование же позволяет значительно проще и полнее, чем в натуре [5, 9], исследовать процесс на модели и, обобщив результаты единичного опыта, распространить их на группу явлений, подобных исследуемому.

Моделирование физических явлений базируется на теории подобия, которая изучает свойства процессов. Общая теория подобия в основном разработана русскими и советскими учеными и излагается в работах [10–13]. Подобие двух явлений обеспечивается, если они протекают в геометрически подобных условиях и если безразмерные уравнения, описывающие их, тождественно одинаковы. Это позволяет путем простого пересчета определить параметры одного явления на основании параметров другого. Основное свойство подобия явлений заключается в существовании и равенстве безразмерных комплексов, составленных из величин, характеризующих явление и называемых числами или критериями подобия.

11.1. Тепловое подобие

Выясним условия теплового подобия на примере уравнения теплопереноса, записанного для несжимаемой двухкомпонентной жидкости при отсутствии химической реакции ($W_1 = 0$) и электрического тока в ней ($i = 0$):

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) T \right] = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \eta \text{Diss} \vec{U}. \quad (11.1.1)$$

Введем дополнительно безразмерные переменные величины: температура $\Theta = (T - T_{\max}) / (T_{\max} - T_{\min})$, время или тепловое число Фурье $Fo = at / x_0^2$, коэффициент теплопроводности $\ell = \lambda / \lambda_0$, где T_{\max} и T_{\min} – максимальная и минимальная температуры, достигаемые в какой-либо точке потока; λ_0 – масштаб коэффициента теплопроводности. Подставляя принятые безразмерные величины в уравнение (11.1.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \frac{u_0 x_0}{a} \left(\vec{V} \vec{\nabla} \right) \theta &= \text{div} \left(\ell \text{grad} \theta \right) + \\ + \frac{u_0^2 \nu}{c_p (T_{\max} - T_{\min}) a} \text{Diss} \vec{V} &. \end{aligned} \quad (11.1.2)$$

Очевидно, что для подобия тепловых процессов необходимо соблюдать равенство чисел:

числа Пекле

$$Pe_T = u_0 x_0 / a, \quad (11.1.3)$$

выражающего отношение количеств тепла, переносимых конвективным и молекулярным путем;

числа Прандтля, явно содержащего лишь определяющие физические свойства среды величины

$$Pr = \nu / a, \quad (11.1.4)$$

и характеризующего отношение скоростных и температурных полей в потоке:

числа Эккерта

$$Ek = \frac{u_0^2}{c_p (T_{\max} - T_{\min})}, \quad (11.1.5)$$

выражающего отношение кинетической энергии и тепловой энергии потока;

$Fo = at / x_0^2$ – число Фурье, характеризует нестационарность процесса теплопереноса.

С учетом обозначений (11.1.3) – (11.1.5) уравнение (11.1.2) примет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial F_0} + Pe \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) \Theta = \overset{0}{div} \left(\ell \overset{0}{grad} \Theta \right) + Pr Ek \overset{0}{Diss} \vec{V}.$$

Для выполнения теплового подобия одинаковыми должны быть также начальные и граничные условия, записанные в безразмерном виде. Если на границе тела с окружающей средой задается ЛГУ–3:

$$-\lambda (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} T) \Big|_{\Gamma} = \alpha (T - T_{cp}) \Big|_{\Gamma}, \quad (11.1.6)$$

то в безразмерном виде оно запишется так:

$$-\left(\vec{n} \overset{0}{\nabla} \theta \right) \Big|_{\Gamma} = Bi (\theta - \theta_{cp}) \Big|_{\Gamma}, \quad (11.1.7)$$

где θ_{cp} – безразмерная температура среды; \vec{n} – безразмерная нормаль к поверхности тела;

$$Bi = \alpha x_0 / \lambda \quad (11.1.8)$$

– число Био, которое представляет собой отношение параметров, характеризующих интенсивность внешнего и внутреннего теплообмена или отношение внутреннего сопротивления к наружному. Поэтому чем больше величина Bi , тем больше интенсивность внешнего теплообмена по сравнению с интенсивностью внутреннего [14]. В (11.1.8) в качестве λ используется коэффициент теплопроводности материала стенки, которая контактирует с окружающей средой.

Если речь идет о расчете теплового потока от поверхности обтекаемого жидкостью (газом) тела – то условие (11.1.6), записанное в безразмерном виде, позволяет получить число Нуссельта:

$$Nu = \alpha x_0 / \lambda_{cp},$$

где λ_{cp} – коэффициент теплопроводности жидкости (газа). Число характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности тела и кондуктивным (молекулярным) через слой жидкости толщиной x_0 . Числа Bi и Nu по структуре сходны, однако отличие состоит в том, что в последнее входит коэффициент теплопроводности жидкости (газа), а не твердого тела. Физический смысл у них также различный.

По существу, число Nu представляет собой безразмерный коэффициент теплоотдачи (или теплопередачи). Зная его, можно рассчитать для данного тела поток тепла от его поверхности. Например, при продольном обтекании ламинарным потоком пластины [9].

$$Nu = 0,322 Pr^{1/3} Re^{1/2}.$$

В общем случае число Nu – функция чисел Pr и Re .

При теплообмене тела с окружающей средой излучение необходимо привлекать нелинейное граничное условие, которое в безразмерной форме имеет вид [15]:

$$-\left(\bar{n} \nabla \theta\right)\Big|_r = Sk(\theta - \theta_{cp})\Big|_r,$$

где Sk – число Старка,

$$Sk = \frac{x_0 \varepsilon_L \sigma}{\lambda} (T_r^2 + T_{cp}^2)(T_r - T_{cp}),$$

имеющее физический смысл, аналогичный критерию Био.

Решение задач теплопереноса в затвердевающем расплаве требует рассмотрения специальных граничных условий СГУ–1:

$$-\lambda_2 (\bar{n} \cdot \nabla T_2)\Big|_r + \lambda_1 (\bar{n} \cdot \nabla T_1)\Big|_r = \rho_1 L \frac{d\varepsilon}{dt},$$

на подвижной границе, которые в безразмерном виде запишем следующим образом:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma^*+0} - \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma^*-0} = K \frac{d\varepsilon}{dFo},$$

где $d\varepsilon/dFo$ – безразмерная скорость продвижения фронта кристаллизации; Γ^* – граница раздела фаз, на которой $T_* = 0,5(T_L + T_c)$; T_L и T_c – температуры ликвидус и солидус расплава; критерий кристаллизации

$$K = \frac{L}{c_p (T^0 - T_c)},$$

представляющий собой отношение скрытой теплоты фазового превращения к затратам тепла на нагрев тела от температуры солидус T_c до начальной температуры расплава T^0 .

Таким образом, для выполнения теплового подобия необходимо дополнительно обеспечить также равенства чисел Bi , Nu , Sk и K в натуре и на модели.

11.2. Стационарная и нестационарная теплопроводность

Стационарная теплопроводность тел простейшей формы. Рассмотрим обобщенный метод решения одномерных краевых задач стационарной теплопроводности применительно к плоской, цилиндрической и шаровой стенкам [16]. Пусть температура является функцией одной координаты n – нормали к изотермическим поверхностям, внутренние источники теплоты отсутствуют и изотермические поверхности замкнуты. Тогда согласно закону Фурье тепловой поток

$$Q = -\lambda(T) \frac{dT}{dn} S(n), \quad (11.2.1)$$

где S – площадь изотермической поверхности.

Проинтегрировав уравнение (11.2.1) по T и n , получим:

$$Q = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT / \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)}, \quad (11.2.2)$$

где T_1 и T_2 – температуры на внутренней S_1 и внешней S_2 поверхностях тела; n_1 и n_2 – нормали к S_1 и S_2 соответственно.

Величина

$$N_p = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)},$$

называется приведенной толщиной стенки. Тогда (11.2.2) примет вид:

$$Q = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT / N_p. \quad (11.2.3)$$

Полагая, что в уравнении (11.2.3)

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bT),$$

получаем следующее выражение для теплового потока:

$$Q = \lambda_0 (T_1 - T_2) \left[1 + \frac{b}{2} (T_1 + T_2) \right] / N_p,$$

где λ_0 – коэффициент теплопроводности при 273 K; $Вт/(м \cdot K)$; b – температурный коэффициент теплопроводности, K^{-1} .

Проинтегрировав уравнение (11.2.1) в пределах от n_1 до n и от T_1 до T , определим распределение температуры в стенке:

$$T = \sqrt{(1/b + T_1)^2 - 2QN_{p_1}/(\lambda_0 b)} - 1/b. \quad (11.2.4)$$

Если $\lambda = const$, то

$$T - T_1 = (T_1 - T_2) N_{p_1} / N_p.$$

Плоская стенка. В этом случае $n = x$; $n_1 = 0$; $n_2 = \delta$;
 $S(n) = S = const$;

$$N_{P_1} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)} = \int_0^x \frac{X}{S} = \frac{X}{S};$$

$$N_P = \frac{\delta}{S}.$$

В соответствии с формулами (11.2.3) и (11.2.4), получаем

$$Q = \lambda(T_1 - T_2)S / \delta;$$

$$T = T_1 - (T_1 - T_2)X / \delta,$$

где δ / λ – тепловое (термическое) сопротивление стенки.

Цилиндрическая стенка. В этом случае параметры обобщенного решения равны:

$$n = r; \quad n_1 = r_1; \quad n_2 = r_2; \quad S(n) = 2\pi r l;$$

$$N_{P_1} = \int \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r}{r_1}; \quad N_P = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Для теплового потока и температуры получаем следующие выражения:

$$Q = 2\pi l \lambda (T_1 - T_2) / \ln(r_2 / r_1);$$

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \ln(r / r_1) / \ln(r_2 / r_1),$$

где $(\ln r_2 / r_1) / 2\lambda$ – линейное термическое сопротивление цилиндрической стенки.

Для шаровой стенки: $n = r$; $n_1 = r_1$; $n_2 = r_2$; $S(n) = 4\pi r^2$;
 $N_{P_1} = (1/r_1 - 1/r) / 4\pi$; $N_P = (1/r_1 - 1/r_2) / 4\pi$.

С учетом обозначений приходим к формулам:

$$Q = 4\pi \lambda (T_1 - T_2) / (1/r_1 - 1/r_2);$$

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right).$$

Теплопроводность полуограниченной однородной пластины. Пусть температурное поле пластины не меняется по ее толщине. Краевая задача стационарной теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0; \quad (11.2.5)$$

$$T|_{Y=0} = f(X); \quad (11.2.6)$$

$$T|_{X=0} = T|_{X=\delta} = T|_{Y \rightarrow \infty} = T_C, \quad (11.2.7)$$

где T_C – температура среды.

Введем замену $\theta = T - T_C$, краевая задача (11.2.5) – (11.2.7) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = 0; \quad (11.2.8)$$

$$\theta|_{Y=0} = F(X) = f(X) - T_C; \quad (11.2.9)$$

$$\theta|_{X=0} = \theta|_{X=\delta} = \theta|_{Y \rightarrow \infty} = 0.$$

Используем метод разделения переменных, положив

$$\theta = \varphi(X)\psi(Y).$$

Тогда уравнение (11.2.8) преобразуется к выражению

$$\frac{\varphi''(X)}{\varphi} = -\frac{\psi''(Y)}{\psi} = -k^2,$$

из которого получаются два дифференциальных уравнения:

$$\varphi''(X) + k^2\varphi(X) = 0; \quad (11.2.10)$$

$$\psi''(Y) + k^2\psi(Y) = 0. \quad (11.2.11)$$

Общее решение уравнений (11.2.10) и (11.2.11) имеют вид

$$\varphi(X) = C_1 \cos(kX) + C_2 \sin(kX); \quad (11.2.12)$$

$$\psi(Y) = C_3 e^{kY} + C_4 e^{-kY}. \quad (11.2.13)$$

Из условий $\theta|_{X=0} = 0$, $\theta|_{Y \rightarrow \infty} = 0$ следует $C_1 = 0$, $C_3 = 0$

Поэтому

$$\theta = C e^{-kY} \sin(kX).$$

Из условия $\theta|_{X=\delta} = 0$ имеем

$$\sin k\delta = 0.$$

Откуда

$$k = \frac{n\pi}{\delta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Общее решение ищем в виде

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi Y}{\delta}} \sin \frac{n\pi X}{\delta}.$$

Постоянные C_n определяем из условия (11.2.9):

$$F(X) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi X}{\delta}. \quad (11.2.14)$$

Так как выражение (11.2.14) представляет собой разложение функции в ряд Фурье по синусам, то коэффициенты разложения определяем по формулам:

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(X) \sin \frac{n\pi X}{\delta} X dX.$$

Поэтому окончательное решение задачи имеет вид

$$\theta = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi Y}{\delta}} \sin \frac{n\pi X}{\delta} \int_0^{\delta} F(X) \sin \frac{n\pi X}{\delta} X dX.$$

Нестационарная теплопроводность. Метод Фурье.

Пусть в области $\Omega = \Omega(X, Y, Z)$ сформулирована краевая задача нестационарной теплопроводности:

$$c(t)\rho(t) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda(X, Y, Z) \nabla T), \quad t > 0; \quad (11.2.15)$$

$$T|_{\Gamma} = 0; \quad T|_{t=0} = T^0(X, Y, Z). \quad (11.2.16)$$

Предположим, что частное решение задачи (11.2.15) – (11.2.16) можно представить, как произведение двух функций, одна из которых зависит только от времени $\varphi(t)$, другая – только от координат $\psi(X, Y, Z)$;

$$T(X, Y, Z, t) = A\varphi(t)\psi(X, Y, Z). \quad (11.2.17)$$

После подстановки решения (11.2.17) в уравнение (11.2.15) и разделения переменных задача сводится к двум дифференциальным уравнениям:

$$c(t)\rho(t)\frac{d\varphi}{dt} = -k^2\varphi(t); \quad (11.2.18)$$

$$\nabla(\lambda(X, Y, Z)\nabla\psi) = -k^2\psi,$$

где k^2 – постоянная разделения переменных.

Задача определения значений собственных чисел k_i^2 и соответствующих им собственных функций ψ_i , удовлетворяющих однородным граничным условиям $T|_{\Gamma} = 0$, называется задачей Штурма – Лиувилля.

В случае прямоугольной системы координат собственные функции имеют вид:

$$\psi_i = A_i \sin(n_1\pi X/d_1) \sin(n_2\pi Y/d_2) \sin(n_3\pi Z/d_3),$$

(где $A_i = \text{const}$, $n_i = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяют однородному граничному условию и дифференциальному уравнению

$$\Delta\psi_i = -k_i^2\psi_i; \quad k_i^2 = \pi^2 \sum_{i=1}^3 n_i^2 / d_i^2.$$

Здесь d_i – размеры параллелепипеда Ω , в котором система функций ортонормированна, если положить

$$A_i = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{d_1 d_2 d_3}}.$$

Решение уравнения (11.2.18) находим обычным интегрированием:

$$\varphi_i(t) = \exp\left(-k_i^2 \int_0^t \frac{dt}{c(t)\rho(t)}\right).$$

Тогда общее решение уравнения (11.2.15) имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \psi_i(X, Y, Z) \exp\left(-k_i^2 \int_0^t \frac{dt}{c(t)\rho(t)}\right),$$

где A_i определяем из начального условия (11.2.16),

$$A_i = \frac{1}{N_i^2} \int_{\Omega} \psi_i T^0(X, Y, Z) d\Omega; \quad (11.2.19)$$

N_i^2 – норма собственной функции,

$$N_i^2 = \int_{\Omega} \psi_i^2(X, Y, Z) d\Omega.$$

Охлаждение неограниченной пластины. Математическая формулировка задачи может быть записана так:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad 0 < X < \delta, \quad t > 0; \quad (11.2.20)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 = T^0 - T_{cp} = F(X); \quad (11.2.21)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0; \quad (11.2.22)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta \Big|_{X=\delta}, \quad (11.2.23)$$

где; $\theta = T - T_{cp}$; T_{cp} – температура среды при $X = \delta$. Условие (11.2.22) соответствует идеальной теплоизоляции поверхности $X = 0$.

Частное решение (11.2.20) – (11.2.23) в соответствии с методом Фурье ищем в виде (11.2.17):

$$\theta = A\varphi(t)\psi(X). \quad (11.2.24)$$

После подстановки выражения (11.2.24) в уравнение (11.2.20) и разделения переменных, приходим к двум уравнениям:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) + ak^2\varphi(t) &= 0; \\ \psi''(X) + k^2\psi(X) &= 0.\end{aligned}$$

Решения этих уравнений запишем в виде функций:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= C_1 e^{-ak^2 t}; \\ \psi(X) &= C_2 \sin(kX) + C_3 \cos(kX).\end{aligned}$$

Частное решение имеет вид:

$$\theta = C_1 e^{-ak^2 t} (C_2 \sin(kX) + C_3 \cos(kX)).$$

Используя граничное условие (11.2.22), получаем $C_2 = 0$, а из условия (11.2.23) находим:

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = \frac{k\delta}{\alpha \cdot \delta / \lambda} = \frac{k\delta}{Bi}, \quad (11.2.25)$$

где $Bi = \alpha\delta / \lambda$ – число Био, т.е. безразмерный коэффициент теплоотдачи. Пересечение котангенсоиды $\operatorname{ctg}(k\delta)$ с прямой $k\delta / Bi$ дает значения корней характеристического уравнения (11.2.25): $k_1\delta < k_2\delta < k_3\delta < \dots$. Тогда общее решение представим в виде суммы бесконечного ряда:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos k_i X \cdot e^{-k_i^2 at};$$

A_i определяем из начального условия (11.2.21)

$$\theta^0 = F(X) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos k_i X,$$

которое представляет собой разложение в ряд Фурье с заданными параметрами. Используя выражение (11.2.19), находим

$$A_i = \frac{k_i}{k_i\delta + \sin k_i\delta \cos k_i\delta} \int_{-\delta}^{\delta} F(X) \cos k_i X dX.$$

Общее решение запишем так:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{k_i \delta + \sin k_i \delta \cos k_i \delta} \left[\int_{-\delta}^{\delta} F(X) \cos k_i X dX \right] \cdot \cos k_i X \cdot e^{-k_i^2 at}.$$

В частном случае равномерного распределения температуры при $t=0$ (11.2.21) выражения для A_i будут следующими:

$$A_i = \frac{2\theta^0 \sin k_i \delta}{k_i \delta + \sin k_i \delta \cos k_i \delta}.$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\theta^0 \sin(k_i \delta)}{k_i \delta + \sin(k_i \delta) \cos(k_i \delta)} \cos(k_i X) \cdot e^{-k_i^2 at}.$$

В безразмерной форме это выражение запишем следующим образом:

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin(k_i \delta)}{k_i \delta + \sin(k_i \delta) \cos(k_i \delta)} \cos(\delta k_i X) \exp(-k_i^2 \delta^2 Fo),$$

где $\bar{\theta} = \theta / \theta^0$; $Fo = at / \delta^2$.

11.3. Теплоперенос при ламинарном движении жидкости в круглых трубах. Решение гидродинамической части.

Процессы переноса импульса и тепла при ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости с учетом диссипации могут быть описаны с использованием уравнений Навье-Стокса, теплопереноса и неразрывности, сформулированных в критериальном виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe(\vec{V} \nabla) \vec{V} = -EuPe \nabla \pi + Pr \Delta \vec{V}; \quad (11.3.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe(\vec{V} \nabla) \theta = \nabla(\ell \nabla \theta) + Pr EkDiss \vec{V}; \quad (11.3.2)$$

$$\nabla \vec{V} = 0. \quad (11.3.3)$$

В качестве безразмерного времени здесь использовано тепловое число Фурье: $Fo = at / x_0^2$. Система уравнений (11.3.1) – (11.3.3) сформулирована в предположении отсутствия массовых сил как гравитационного, так и электромагнитного происхождения.

Эта система уравнений позволяет определить поле температуры θ , скорости \vec{V} и давления π . Порядок решения данной задачи, учитывая независимость ее гидродинамической части от тепловой, может быть следующим: вначале необходимо решить систему уравнений (11.3.1) и (11.3.3), т.е. определить поле скорости, затем, используя его, решить уравнение теплопереноса (11.3.2) и определить поле температуры.

Некоторые преобразования и краткая схема решения гидродинамической части задачи.

Ввиду установившегося характера процесса имеем

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = 0.$$

Так как жидкость движется вдоль трубы, то вектор скорости совпадает с направлением орта \vec{e}_z координатной оси (вдоль трубы) OZ, поэтому

$$\vec{V} = \vec{e}_z w, \quad u = v = 0.$$

Из уравнения неразрывности следует

$$w = w(x, y),$$

т.е. w не зависит от координаты Z .

Из проекций уравнений движения (11.3.1) на координатные оси получаем, что $d\pi / dz = const$, в связи с чем гидродинамическая часть задачи сводится к решению уравнения Пуассона относительно $w(x, y)$ [5]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Eu Re \frac{d\pi}{dz}. \quad (11.3.4)$$

Уравнение (11.3.4) может быть существенно упрощено путем разумного выбора величины u_0 . Определим u_0 формальным условием, позволяющим максимально упростить правую часть (11.3.4):

$$Eu Re \frac{d\pi}{dz} = -4. \quad (11.3.5)$$

С учетом (11.3.5) уравнение (11.3.4) примет вид, не содержащий никаких параметров:

$$\frac{\partial^2 w^3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -4. \quad (11.3.6)$$

Учитывая принятые допущения, можно также упростить уравнение теплопереноса (11.3.2), так как $u = v = 0$, диссипативная функция и конвективный член запишутся следующим образом:

$$Diss \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = (grad w)^2.$$

$$(\vec{V} \nabla) \theta = w \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Тогда уравнение (11.3.2) для случая установившегося течения жидкости в трубе будет иметь вид:

$$Pew \frac{\partial \theta}{\partial z} = div(\ell grad \theta) + Pr Ek (grad w)^2. \quad (11.3.7)$$

Дальнейшее решение задачи удобно выполнять в цилиндрической системе координат $(\eta_1, \eta_3, \varphi)$ в предположении осевой симметрии процесса.

Выбирая в качестве x_0 радиус трубы и переходя к цилиндрической системе координат, в силу осевой симметрии уравнение (11.3.6) запишем в виде:

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{dv_3}{d\eta_1} \right) = -4, \quad (11.3.8)$$

где η_1 - радиальная координата; v_3 - осевая компонента скорости.

Уравнение (11.3.8) дополняется граничными условиями на оси $\eta_1 = 0$ и стенке $\eta_1 = 1$ трубы:

$$\left. \frac{dv_3}{d\eta_1} \right|_{\eta_1=0} = \left. v_3 \right|_{\eta_1=1} = 0. \quad (11.3.9)$$

Решение уравнения (11.3.8) с учетом условий (11.3.9) дает выражение для безразмерного профиля скорости:

$$v_3 = 1 - \eta_1^2. \quad (11.3.10)$$

Видно, что профиль скорости не меняется с изменением радиуса трубы x_0 , вязкости жидкости, градиента давлений и, значит, не меняется с изменением u_0 (до тех пор, пока режим движения остается ламинарным).

Полагая, что коэффициент теплопроводности λ для жидкости постоянен во всех точках потока, находим что $l \equiv 1$. Кроме того, учитывая (11.3.10), имеем:

$$Diss \vec{V} = 4\eta_1^2.$$

Тогда уравнение теплопереноса (11.3.7) в цилиндрической системе координат примет вид:

$$Pe(1 - \eta_1^2) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_3} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_3^2} + 4Pr Ek \eta_1^2. \quad (11.3.11)$$

Далее вводим координату $\eta'_3 = \eta_3 / Pe$, тогда уравнение (11.3.11) запишем так:

$$(1 - \eta_1^2) \frac{\partial \theta}{\partial \eta'_3} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_3'^2} + 4Pr Ek \eta_1^2.$$

Принимаем, что $Pe \gg 1$. В этом случае $\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_3^2} \ll \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right)$, т.е. пренебрегаем теплопередачей теплопроводностью вдоль оси трубы по сравнению с теплопередачей теплопроводностью в радиальном направлении. Поэтому окончательно получаем:

$$(1 - \eta_1^2) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_3'} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right) + 4Pr Ek \eta_1^2. \quad (11.3.12)$$

Теперь сформулируем граничные условия. На стенке трубы

$$\theta|_{\eta_1=1} = f(\eta_3'), \quad (11.3.13)$$

на оси трубы (условие симметрии)

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=0} = 0, \quad (11.3.14)$$

во входном сечении

$$\theta|_{\eta_3'=0} = \varphi(\eta_1). \quad (11.3.15)$$

11.4. Теплоперенос вследствие диссипации механической энергии потока

Уравнение (11.3.12) при граничных условиях (11.3.13) – (11.3.15) представляет собой полную формулировку задачи о поле температур в круглой трубе при заданных температурах на поверхности (11.3.13) и во входном сечении (11.3.15). Решение такой задачи ищем в виде суммы двух функций:

$$\theta = \theta_1(\eta_1, \eta_3') + \theta_2(\eta_1). \quad (11.4.1)$$

Подставляя (11.4.1) в (11.3.12), получим:

$$(1-\eta_1^2) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_3'} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right) + \frac{1}{\eta_1} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\theta_2}{d\eta_1} \right) + 4 \text{Pr} Ek \eta_1^2 \quad (11.4.2)$$

Уравнение (11.4.2) будет удовлетворено, если θ_1 и θ_2 будут порознь удовлетворять следующим уравнениям:

$$(1-\eta_1^2) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_3'} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right), \quad (11.4.3)$$

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\theta_2}{d\eta_1} \right) = -4 \text{Pr} Ek \eta_1^2. \quad (11.4.4)$$

Граничные условия (11.3.13) – (11.3.15) с учетом (11.4.1) для $\theta_1(\eta_1, \eta_3')$ запишем так:

$$\theta_1 \Big|_{\eta_1=1} = f(\eta_3'); \quad (11.4.5)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = 0; \quad (11.4.6)$$

$$\theta_1 \Big|_{\eta_3'=0} = \theta_2(\eta_1) = \varphi_1(\eta_1); \quad (11.4.7)$$

и для $\theta_2(\eta_1)$:

$$\theta_2 \Big|_{\eta_1=1} = \frac{d\theta_2}{d\eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = 0. \quad (11.4.8)$$

Уравнение (11.4.4) легко решается в квадратурах

$$\frac{d\theta_2}{d\eta_1} = -\text{Pr} Ek \eta_1^3 + A / \eta_1.$$

Используя условие симметрии в (11.4.8), получим $A=0$. Далее $\theta_2 = -\frac{1}{4} \text{Pr} Ek \eta_1^4 + B$. Постоянную B определим из условия на стенке (11.4.8):

$$B = \frac{1}{4} \text{Pr} Ek.$$

Окончательно имеем

$$\theta_2 = \frac{1}{4} \text{Pr} Ek (1 - \eta_1^4). \quad (11.4.9)$$

Если $\theta|_{\eta=1} = 0$ и $\varphi_1(\eta_1) = 0$, то очевидно, уравнение (11.4.3) имеет тривиальное единственное решение:

$$\theta_1 = 0.$$

В этом случае единственным источником тепла в потоке является диссипация механической энергии движения и $\theta = \theta_2$ (рис. 11.1).

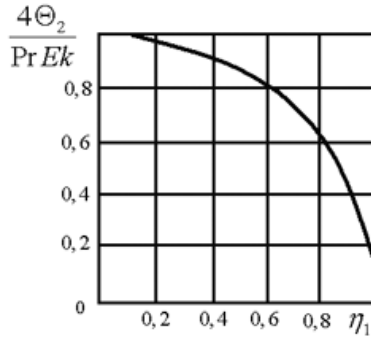


Рис. 11.1

Другим предельным случаем будет такой, когда вкладом диссипации механической энергии потока в общую тепловую энергию можно пренебречь. Это соответствует очень малым величинам $\text{Pr} Ek$, тогда $\theta_1 \gg \theta_2$, $\theta \approx \theta_1$.

Такое приближение используется в практических расчетах маловязких жидкостях (расплавленные металлы, вода и др.). С повышением вязкости жидкости, например, масел, пренебрежение величиной θ_2 не всегда будет оправданным. Таким образом, в общем случае полное решение задачи определяется суммой двух функций θ_1 и θ_2 .

11.5. Теплоперенос при постоянной температуре поверхности трубы

Температура на поверхности трубы может быть принята за минимальную, тогда граничное условие (11.4.5) упрощается

$$\theta_1|_{\eta_1=1} = 0. \quad (11.5.1)$$

В качестве максимальной температуры следует выбирать соответствующую температуру в некоторой точке входного сечения $\eta'_3 = 0$. Таким образом, задача сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка (11.4.3) с граничными условиями (11.4.6), (11.4.7), (11.5.1).

Ищем частное решение уравнения (11.4.3) методом разделения переменных. Положим

$$\theta_1 = M(\eta'_3)\Psi(\eta_1). \quad (11.5.2)$$

Подставляя (11.5.2) в (11.4.3) и разделяя функции разных аргументов, получим:

$$\frac{M'(\eta'_3)}{M(\eta'_3)} = \frac{1}{\eta_1(1-\eta_1^2)} \frac{1}{\Psi(\eta_1)} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\Psi(\eta_1)}{d\eta_1} \right) = -k^2. \quad (11.5.3)$$

Левая часть (11.5.3) зависит только от η'_3 , правая – от η_1 , поэтому равенство возможно лишь в том случае, когда левая и правая части являются константой ($-k^2$). Получим два уравнения:

$$M' + k^2 M = 0; \quad (11.5.4)$$

$$(\eta_1 \Psi') + \eta_1 (1 - \eta_1^2) k^2 \Psi = 0. \quad (11.5.5)$$

Определим общее решение (11.5.4)

$$M = A e^{-k^2 \eta'_3}, \quad (11.5.6)$$

где A – константа интегрирования.

Для решения (11.5.5) следует найти граничные условия из (11.4.6) и (11.5.1) для $\Psi(\eta_1)$:

$$\Psi \Big|_{\eta_1=1} = 0; \quad (11.5.7)$$

$$\Psi' \Big|_{\eta_1=0} = 0. \quad (11.5.8)$$

Сформулированная задача (11.5.5) – (11.5.8) является задачей Штурма-Лиувилля о нахождении собственных значений параметров k_n и собственных функций Ψ_n . Общее решение задачи может быть построено путем суперпозиции частных

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n^2 \eta_1} \Psi_n(\eta_1), \quad (11.5.9)$$

где A_n – постоянные коэффициенты, тождественно удовлетворяющие условию во входном сечении (11.4.7).

Для определения коэффициентов A_n докажем свойство двух произвольных собственных функций $\Psi_n(\eta_1)$ и $\Psi_m(\eta_1)$, являющихся нетривиальными решениями уравнения (11.5.5) при условиях (11.5.7) и (11.5.8), и собственных значениях параметра k , равных k_n и k_m . Тогда из (11.5.5) имеем два тождества:

$$\frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\Psi_n}{d\eta_1} \right) + k_n^2 \eta_1 (1 - \eta_1^2) \Psi_n = 0;$$

$$\frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\Psi_m}{d\eta_1} \right) + k_m^2 \eta_1 (1 - \eta_1^2) \Psi_m = 0.$$

Умножая первое на Ψ_m , второе – на Ψ_n и вычитая из второго уравнения первое, затем, интегрируя полученное равенство от 0 до 1, а также учитывая граничное условие (11.5.7), получаем:

$$(k_n^2 - k_m^2) \int_0^1 \eta_1 (1 - \eta_1^2) \Psi_n \Psi_m d\eta_1 = 0.$$

При $m \neq n$, $k_n^2 \neq k_m^2$, поэтому

$$\int_0^1 \eta_1 (1 - \eta_1^2) \Psi_n \Psi_m \Big|_{m \neq n} d\eta_1 = 0, \quad (11.5.10)$$

что свидетельствует об ортогональности Ψ_n и Ψ_m с весом $\eta_1 (1 - \eta_1^2)$. Это позволяет определить коэффициенты A_n .

Предположим, что (11.5.9) удовлетворяет условию (11.4.7), тогда:

$$\varphi_1(\eta_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Psi_n.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\eta_1 (1 - \eta_1^2) \Psi_m$ и проинтегрировав от 0 до 1, получим

$$\int_0^1 \varphi_1 (1 - \eta_1^2) \eta_1 \Psi_m d\eta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \Psi_m \Psi_n \eta_1 (1 - \eta_1^2) d\eta_1.$$

В правой части этого выражения с учетом (11.5.10) из бесконечной суммы сохранится лишь один член при $m = n$ и поэтому

$$A_n = \frac{\int_0^1 \varphi_1 \eta_1 (1 - \eta_1^2) \Psi_n d\eta_1}{\int_0^1 \Psi_n^2 \eta_1 (1 - \eta_1^2) d\eta_1}. \quad (11.5.11)$$

Итак, остается определить Ψ_n и k_n , решив уравнение (11.5.5). Решение ищем в виде ряда [17]:

$$\Psi_n(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \eta_1^n. \quad (11.5.12)$$

Это решение удовлетворяет граничному условию (11.5.7) при любых B_n . Подстановка (11.5.12) в (11.4.3) дает:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 B_n \eta_1^{n-1} + k^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \eta_1^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \eta_1^{n+3} \right) = 0.$$

Преобразуем последнее выражение так, чтобы показатели степени при η_1 во всех его членах были одного значения m [17]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^2 B_{m+1} \eta_1^m + k^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_{m-1} \eta_1^m - \sum_{m=3}^{\infty} B_{m-3} \eta_1^m \right) = 0.$$

Запишем это уравнение в виде:

$$B_1 + (4B_2 + k^2 B_0) \eta_1 + (9B_3 + k^2 B_1) + \\ + \sum_{m=3}^{\infty} \left[(m+1)^2 B_{m+1} + k^2 (B_{m-1} - B_{m-3}) \right] \eta_1^m = 0.$$

Чтобы это уравнение удовлетворялось при любых значениях координаты η_1 , необходимо выполнение равенства нулю всех коэффициентов при членах с η_1 в разных степенях. Откуда:

$$B_1 = 0; \quad B_2 = -\frac{k^2}{4} B_0; \quad B_3 = -\frac{k^2}{9} B_1; \\ B_{m+1} = \frac{k^2}{(m+1)^2} (B_{m-1} - B_{m-3}). \quad (11.5.13)$$

Используя рекуррентное соотношение (11.3.12) при $m \geq 3$, получаем:

$$B_4 = \frac{k^2}{16} B_0 \left(1 + \frac{k^2}{4} \right); \quad B_5 = 0; \quad B_6 = -\frac{k^4}{64} B_0 \left(5 + \frac{k^2}{4} \right).$$

В развернутом виде решение с учетом (11.3.13) можно записать так:

$$\Psi(\eta_1) = B_0 \left[1 - \frac{k^2}{16} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \eta_1^4 - \frac{k^4}{64} \left(5 + \frac{k^2}{4} \right) \eta_1^6 + \dots \right] = \\ = B_0 \psi(\eta_1), \quad (11.5.14)$$

где $\psi(\eta_1)$ – функция, не зависящая от B_0 .

Используя граничное условие (11.3.7), получаем

$$1 - \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{16} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{64} \left(5 - \frac{k^2}{4} \right) + \dots = 0.$$

Это уравнение имеет бесконечное множество корней k_n , называемых собственными значениями. Нуссельт вычислил первые три корня:

$$k_1 = 2,705; \quad k_2 = 6,66; \quad k_3 = 10,3.$$

Каждому собственному значению k_n соответствует собственная функция $\psi(k_n, \eta_1) = \psi_n(\eta_1)$, которая может быть рассчитана по выражению (11.5.12) с использованием (11.5.13). Первые три функции для приведенных значений k_n показаны на рис. 11.2 [17].

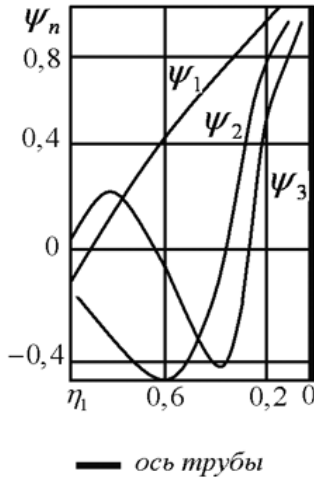


Рис. 11.2

Легко заметить, что окончательное выражение для θ_1 не будет зависеть от постоянного множителя B_0 , который

может оставаться произвольным. После подстановки (11.5.14) в (11.5.11) имеем

$$A_n = \alpha_n / B_0,$$

где

$$\alpha_n = \frac{\int_0^1 \varphi_1 \psi_n \eta_1 (1 - \eta_1^2) d\eta_1}{\int_0^1 \psi_n^2 \eta_1 (1 - \eta_1^2) d\eta_1};$$

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n e^{-k_n^2 \eta_1^2}. \quad (11.5.15)$$

Для частного случая, когда условие во входном сечении трубы может быть задано в относительно простом виде $\theta_1|_{\eta_1^2=0} = \varphi_1 = 1$, коэффициенты α_n рассчитаны Нуссельтом по формуле (11.5.15):

$$\alpha_1 = 1,447; \quad \alpha_2 = -0,810; \quad \alpha_3 = 0,385.$$

Поэтому выражение для температуры (для трех членов ряда) может быть записано так:

$$\theta_1 = 1,447 e^{-2,705^2 \eta_1^2} \psi_1(\eta_1) - 0,81 e^{-6,66^2 \eta_1^2} \psi_2(\eta_1) +$$

$$+ 0,385 e^{-10,3^2 \eta_1^2} \psi_3(\eta_1).$$

На рис. 11.3 приведено распределение температуры по радиусу и длине трубы (расчет выполнен по формуле (11.5.15))

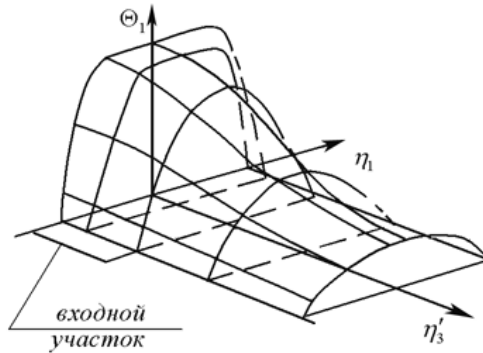


Рис. 11.3

Так как собственные значения k_n быстро растут с ростом n , то при достаточно больших η'_3 , учитывая экспоненциальный характер зависимости θ_1 от η'_3 , можно в (11.5.15) ограничиться приближенно только первым членом бесконечного ряда:

$$\theta_1 \approx 1,447^{-2,705^2 \eta'_3} = \psi_1(\eta_1) \approx \theta. \quad (11.5.16)$$

Таким образом, при достаточно больших η'_3 изменение θ по радиусу в любом сечении приближенно описывается одной функцией $\psi_1(\eta_1)$. Поэтому говорят о подобии профилей температур во всех сечениях, достаточно удаленных от входного. В связи с изложенным становится понятным, что поток жидкости в трубе можно условно разбить на два участка. Первый участок называется термическим начальным участком, а второй – участком стабилизированного теплообмена (УСТ), который определяется приближенно формулой (11.5.16).

Термический начальный участок прилегает непосредственно к входному сечению, на нём функция θ_1 не дает подобных профилей в отдаленных друг от друга сечениях, так

как при её расчете наряду с первым членом ряда (11.5.15) учитывается, по крайней мере, и второй.

Для характеристики УСТ введем среднемассовую температуру в произвольном сечении трубы $\eta'_3 = const$;

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\int_0^1 \theta_1 v_3 \eta_1 d\eta_1}{\int_0^1 v_3 \eta_1 d\eta_1} = 4 \int_0^1 \theta_1 \eta_1 (1 - \eta'_3) d\eta_1 .$$

Для УСТ, используя (11.5.16), получим:

$$\bar{\theta}_1 = 4\alpha_1 e^{-k_1^2 \eta'_3} \int_0^1 \psi_1(\eta_1) (1 - \eta_1^2) \eta_1 d\eta_1 .$$

На основании уравнения (11.5.5), справедливого для любой функции ψ_n , определим полученный выше интеграл:

$$\frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\psi_1}{d\eta_1} \right) = -k_1^2 \eta_1 (1 - \eta_1^2) \psi_1 ,$$

и интегрируя от 0 до 1, получим:

$$\int_0^1 \psi_1(\eta_1) \eta_1 (1 - \eta_1^2) d\eta_1 = -\frac{1}{k_1^2} \psi_1' \Big|_{\eta_1=1} .$$

Поэтому

$$\bar{\theta}_1 = -\frac{4\alpha_1}{k_1^2} e^{-k_1^2 \eta'_3} \psi_1' \Big|_{\eta_1=1} . \quad (11.5.17)$$

Для УСТ вычислим безразмерный тепловой поток от жидкости к поверхности трубы:

$$\delta \Big|_{\eta_1=1} = -\frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=1} = -\alpha_1 e^{-k_1^2 \eta'_3} \psi_1' \Big|_{\eta_1=1} . \quad (11.5.18)$$

Определим местный безразмерный коэффициент теплоотдачи Nu от потока жидкости к стенке трубы в любом фиксированном сечении потока, используя ЛГУ-3:

$$\delta \Big|_{\eta=1} = \frac{Nu}{2} (\bar{\theta}_1 - \theta_1) \Big|_{\eta=1} \equiv 0,5 Nu \bar{\theta}_1,$$

где $Nu = \alpha d / \lambda$ – характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности и переносом теплоты теплопроводностью через слой жидкости толщиной d : $d = 2x_0$ - диаметр трубы.

Для УСТ, используя (11.5.17) и (11.5.18), определим:

$$Nu = 0,5 k_1^2 \approx 3,66 \equiv Nu_\infty. \quad (11.5.19)$$

Из (11.5.19) следует, что предельный размерный коэффициент теплоотдачи α_∞ не зависит от продольной координаты: $\alpha_\infty = Nu_\infty \lambda / d$.

Для начального термического участка $(\eta'_3)_{HT}$ можно определить как расстояние от входного сечения, на котором число Nu с точностью до 1% принимает постоянное значение. Используя полное решение задачи теплообмена (11.5.15), можно получить следующее выражение для $(\eta'_3)_{HT}$:

$$(\eta'_3)_{HT} = 0,055 \quad \text{или} \quad (\eta'_3)_{HT} = 0,055 Pe. \quad (11.5.20)$$

Таким образом, с увеличением скорости потока Re и числа Pr длина $(\eta'_3)_{HT}$ возрастает. При заданном Re длина $(\eta'_3)_{HT}$ определяется числом Pr . Для жидкометаллических теплоносителей ($Pr < 1$) длина начального термического участка не превышает нескольких диаметров, для газов ($Pr \gg 1$) – нескольких десятков диаметров, для капельных Pr жидкостей – нескольких десятков тысяч диаметров. Отсюда следует, что в трубах теплообменных аппаратов для жидкостей с $Pr > 1$ теплообмен при ламинарном течении происходит в области $(\eta'_3)_{HT}$.

На рис. 11.4 на основании общего решения (11.5.15) получена зависимость числа Nu по длине трубы от конфи-

гурации её поперечного сечения (1 – плоская щель; 2 – круглая труба; 3 – равносторонний треугольник [17]). Наибольший теплообмен характерен для трубы, представляющей собой плоскую щель. Видно, что при $\eta'_3 \rightarrow 0$ $Nu \rightarrow \infty$.

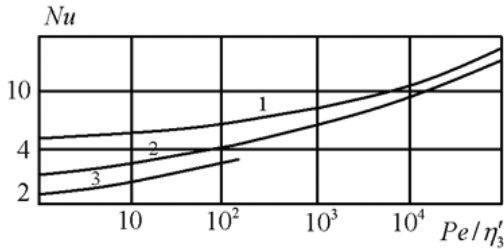


Рис 11.4

11.6. Теплоперенос при периодическом изменении температуры поверхности трубы

Рассмотрим перенос тепла в трубе в условиях периодического режима, когда температура поверхности вдоль координаты меняется по периодическому закону. Такой процесс имеет место в трубчатых холодильниках, в глиссажных трубах и т.д.

Полагая радиус закругления участков изгиба трубы большим по сравнению с радиусом самой трубы, можно считать профиль скорости поток жидкости по-прежнему параболическим (11.3.10).

Направляя ось η'_3 по оси трубы, изменение температуры вдоль неё на поверхности трубы можно представить в виде

$$\theta_1|_{\eta=1} = f(\eta'_3), \quad (11.6.1)$$

где $f(\eta'_3) = f(\eta''_3 + n l')$ – периодическая функция с периодом l' ; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $l' = L / x_0 Pe$ – безразмерный период; L – размерный период.

Исследуется поле температур в потоке на достаточно большом расстоянии от входного сечения, когда условия в нем не оказывают влияния на температурное поле и поэтому можно принять:

$$\theta_1 \Big|_{\eta'_3=0} = 0. \quad (11.6.2)$$

на оси симметрии трубы имеем:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta'_3} \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (11.6.3)$$

Итак, необходимо найти решение уравнение (11.4.3) при граничных условиях (11.6.1) – (11.6.3) для значений $\eta'_3 \rightarrow \infty$.

Для решения сформулированной задачи целесообразно воспользоваться методом преобразования Лапласа L [18] по координате η'_3 . Результат применения L к любой θ_1 назовем изображением этой функции:

$$\hat{\theta}_1(S, \eta) = I\theta_1 = \int_0^{\infty} e^{-S\eta'_3} \theta_1(\eta_1, \eta'_3) d\eta'_3, \quad (11.6.4)$$

S – параметр преобразования L , определенный в плоскости комплексного переменного.

Температура θ_1 по отношению к $\hat{\theta}$ называется оригиналом. Применим (11.6.4) к обеим частям уравнения (11.4.3):

$$\int_0^{\infty} e^{-S\eta'_3} (1 - \eta_1^2) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta'_3} d\eta'_3 = \int_0^{\infty} e^{-S\eta'_3} \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\eta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right) d\eta'_3. \quad (11.6.5)$$

Используя интегрирование по частям и условие (11.6.2), получаем вместо дифференциального уравнения в частных производных для изображения $\hat{\theta}_1$ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$S(1 - \eta_1^2) \hat{\theta}_1 = \frac{1}{\eta_1} \frac{d}{d\eta_1} \left(\eta_1 \frac{d\hat{\theta}_1}{d\eta_1} \right). \quad (11.6.6)$$

Преобразуем граничные условия (11.6.1) и (11.6.3):

$$\hat{\theta}_1 \Big|_{\eta_1=1} = \int_0^{\infty} e^{-S\eta'_3} f(\eta'_3) d\eta'_3. \quad (11.6.7)$$

Последнее выражение (11.6.7) может быть упрощено путем представления интеграла от 0 до ∞ в виде суммы ряда бесконечного числа слагаемых и использования при этом формулы для суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$\hat{\theta}_1 \Big|_{\eta_1=1} = \frac{1}{1-e^{-S'}} \int_0^{l'} e^{-S\eta'_3} f(\eta'_3) d\eta'_3. \quad (11.6.8)$$

Задачу сведем к решению обыкновенного дифференциального уравнения, математически аналогичного (11.5.14) (k^2 на S), при граничных условиях (11.6.6) и (11.6.8) не является однородным, поэтому сформулированная задача в целом не относится к задаче Штурма-Лиувилля.

Решение ищем в виде ряда:

$$\hat{\theta}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \eta_1^{2n}. \quad (11.6.9)$$

Чтобы (11.6.9) удовлетворяло уравнению (11.6.6), следует подчинить, как и ранее, коэффициенты B_n рекуррентным соотношениям:

$$B_1 = \frac{S}{4} B_0; \quad B_{n+2} = \frac{S}{4(n+2)} [B_{n+1} - B_n(n+1)].$$

Отсюда

$$B_2 = -\frac{S}{8} \left(1 - \frac{S}{4}\right) B_0; \quad B_3 = \frac{S^3}{96} \left(5 - \frac{S}{4}\right) B_0, \dots$$

Поэтому

$$\hat{\theta}_1 = B_0 \psi(-S, \eta_1) = B_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \eta_1^{2n}, \quad (11.6.10)$$

где $b_n = B_n / B_0$.

Постоянную B_0 определим из граничного условия (11.6.8):

$$B_0 = \frac{1}{\psi(-S, 1)(1 - e^{-Sl'})} \int_0^{l'} e^{-S\eta'_3} f(\eta'_3) d\eta'_3.$$

Окончательно получаем выражение для изображения:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\psi(-S, \eta)}{\psi(-S, 1)(1 - e^{-Sl'})} \int_0^{l'} e^{-S\eta'_3} f(\eta'_3) d\eta'_3. \quad (11.6.11)$$

Следующий этап – переход от изображения $\hat{\theta}_1$ к оригиналу θ_1 с использованием обратного преобразования Лапласа и теории вычетов [18]:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= L^{-1}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{S\eta'_3} \hat{\theta}_1(S, \eta_1) dS = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \left[e^{S\eta'_3} \hat{\theta}_1(S, \eta_1) \right] \Big|_{S=S_n}, \end{aligned} \quad (11.6.12)$$

где S_n - особые точки (полюсы) подынтегральной функции.

Для выполнения обратного преобразования L^{-1} в выражении (11.6.11) конкретизируем выбор функции $f(\eta'_3)$:

$$f(\eta'_3) = 0,5 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\eta'_3}{l'} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{l'} e^{-S\eta'_3} f(\eta'_3) d\eta'_3 &= 0,5 \int_0^{l'} \left(1 + \cos 2\pi \frac{\eta'_3}{l'} \right) e^{-S\eta'_3} d\eta'_3 = \\ &= \frac{1 - e^{-Sl'}}{2S} + \frac{S(1 - e^{-Sl'})}{2[S^2 + (2\pi/l')^2]}. \end{aligned} \quad (11.6.13)$$

Таким образом, выражение (11.6.11) запишем так:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2S} \frac{\psi(-S, \eta_1)}{\psi(-S, 1)} + \frac{1}{2} \frac{S}{S^2 + \left(\frac{2\pi}{l'}\right)^2} \frac{\psi(-S, \eta_1)}{\psi(-S, 1)}, \quad (11.6.14)$$

Анализ функции $\hat{\theta}_1$ (11.6.14) показывает, что она имеет лишь простые полюсы (полюсы первого порядка). Поэтому подынтегральную функцию в (11.6.12) представим в виде [18]:

$$e^{S\eta'_3} \hat{\theta}_1(S, \eta_1) = \frac{P(S, \eta_1) e^{S\eta'_3}}{\theta(S_1)}. \quad (11.6.15)$$

Для вычетов этой функции в точке $S = S_n$, где она имеет простой полюс, используем формулу:

$$\text{Res}\left(\hat{\theta}_1 e^{S\eta'_3}\right)\Big|_{S=S_n} = \frac{e^{S_n \eta'_3} P(S_n, \eta_1)}{\theta'(S_n)}, \quad (11.6.16)$$

где $\theta'(S_n) = \frac{d\theta(S)}{dS}\Big|_{S=S_n}$; S_n - n -й - корень уравнения $\theta'(S_n) = 0$.

Так как нас интересует величина θ_1 при $\eta'_3 \rightarrow \infty$, то можно не учитывать полюсы в действительных точках S_n , являющихся корнями уравнения $\psi(-S, 1) = 0$, равными $S_n = -k_n^2 < 0$. Действительно, согласно (11.6.16) для $S_n < 0$ соответствующие вычеты стремятся к нулю при $\eta'_3 \rightarrow \infty$.

Среди полюсов функции $\hat{\theta}_1$ нас будет интересовать следующие:

$$S_0 = 0; \quad S_{1,2} = \pm i2\pi / l'.$$

Тогда из выражения (11.6.12) с учетом (11.6.14) имеем:

$$\theta_1 \Big|_{\eta_3' = h'l' + \eta_3''} = 0,5 \frac{\psi(0, \eta_1)}{\psi(0, 1)} + 0,25 \left[\frac{\psi(-i2\pi / l', \eta_1)}{\psi(-i2\pi / l', 1)} e^{\frac{i2\pi}{l'} \eta_3''} + \frac{\psi(i2\pi / l', \eta_1)}{\psi(i2\pi / l', 1)} e^{-\frac{i2\pi}{l'} \eta_3''} \right] \quad (11.6.17)$$

В последней формуле первое слагаемое упрощается, так как согласно (11.6.10) $\psi(0, \eta_1) = \psi(0, 1) = 1$. Поэтому

$$\theta_1 \Big|_{\eta_3' = n'l' + \eta_3''} = 0,5 + 0,25 \left[\frac{\psi(-i2\pi / l', \eta_1)}{\psi(-i2\pi / l', 1)} e^{\frac{i2\pi}{l'} \eta_3''} + \frac{\psi(-i2\pi / l', \eta_1)}{\psi(-i2\pi / l', 1)} e^{\frac{i2\pi}{l'} \eta_3''} \right] \quad (11.6.18)$$

Анализ решения (11.6.17) показывает, что периодический нагрев и охлаждение стенки приводит к такому нагреву и охлаждению жидкости. Однако нагрев и охлаждение центральной зоны потока не просто повторяют нагрев и охлаждение поверхности, а имеют свои особенности (рис. 11.5) (на поверхности (сплошной) и оси трубы (пунктиром)). Во-первых, максимум θ_1 на оси потока смещен по отношению к максимуму θ_1 на поверхности на некоторую долю периода в направлении движения жидкости. Относительная величина этого смещения уменьшается с увеличением периода l' .

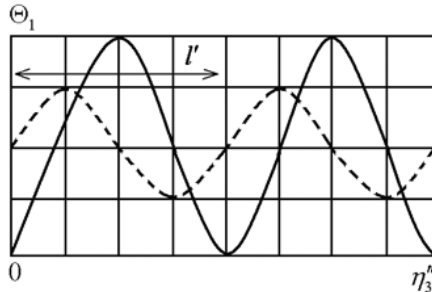


Рис. 11.5

Во-вторых, максимум θ_1 на оси трубы меньше по величине максимума θ_1 на поверхности (то же относится и к минимумам).

В-третьих, увеличение значения l' приближает максимумы (минимумы) θ_1 на оси трубы и на поверхности друг к другу по величине.

При необходимости учета выделения тепла внутри потока вследствие вязкой диссипации механической энергии к решению (11.6.17) следует прибавить величину θ_2 , определяемую формулой (11.4.9).

11.7. Теплоперенос при турбулентном движении жидкости в круглых трубах

В любой точке турбулентного потока вектор скорости, давление и температуру принято представлять, как сумму двух величин:

$$\vec{U} = \langle \vec{U} \rangle + \vec{U}'; P = \langle P \rangle + P'; T = \langle T \rangle + T', \quad (11.7.1)$$

где $\langle \vec{U} \rangle, \langle P \rangle, \langle T \rangle$ - усредненные величины скорости, давления и температуры; \vec{U}', P' и T' - пульсационные составляющие скорости, давления и температуры. Пользуясь безразмерными величинами, введенными ранее, соотношения (11.7.1) запишем так:

$$\vec{V} = \langle \vec{V} \rangle + \vec{V}'; \pi = \langle \pi \rangle + \pi'; \theta = \langle \theta \rangle + \theta'. \quad (11.7.2)$$

Искомые уравнения турбулентного движения и теплопереноса получаются путем подстановки в уравнения теплопереноса (11.3.2), движения (11.3.1) и неразрывности (11.3.3) вместо мгновенных значений соответствующих величин их представления в виде выражений (11.7.2) и последующего усреднения по времени этих уравнений. При этом в уравнении теплопереноса диссипативным членом пренебрегаем.

Введем безразмерный тензор вязких напряжений

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{\text{Re}} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial \eta_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \eta_i} \right),$$

и безразмерный молекулярный поток тепла

$$\bar{\delta}_T = -\frac{\text{grad}\theta}{\text{Pe}}.$$

Далее выполним следующие тождественные преобразования:

$$-\text{Div}\bar{\tau} = \frac{(\Delta\vec{V})}{\text{Re}}, \quad (11.7.3)$$

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V} = \text{Div}\overline{\overline{V\vec{V}}}; \quad (\vec{V}\nabla)\theta = \text{div}(\theta\vec{V}). \quad (11.7.4)$$

Используя выражения (11.7.3) и (11.7.4), а также полагая $\ell=1$, уравнения движения (11.3.1) и теплопереноса (11.3.2), запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial V}{\partial Fo} + \text{Div}\overline{\overline{V\vec{V}}} &= -Eu\nabla\pi - \text{Div}\bar{\tau}; \\ \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \text{div}(\theta\vec{V}) &= -\text{div}\bar{\delta}_T. \end{aligned}$$

После усреднения по времени уравнения (11.3.7) и (11.3.8) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial \langle \vec{V} \rangle}{\partial Fo} + \text{Div} \langle \overline{\overline{V\vec{V}}} \rangle &= -Eu\nabla\pi - \\ -\text{Div} \langle \bar{\tau} \rangle + \langle \overline{\overline{V\vec{V}'}} \rangle &); \end{aligned} \quad (11.7.5)$$

$$\frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} + \text{div} \langle \theta\vec{V} \rangle = -\text{div} \langle \bar{\delta}_T \rangle + \langle \theta\vec{V}' \rangle, \quad (11.7.6)$$

где средний тензор вязких напряжений $\langle \bar{\tau} \rangle$ и средний молекулярный поток тепла $\langle \bar{\delta}_T \rangle$ имеют вид

$$\langle \bar{\bar{\tau}} \rangle = -\frac{1}{\text{Re}} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial \eta_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial \eta_i} \right); \quad (11.7.7)$$

$$\langle \bar{\delta} \rangle = -\frac{1}{\text{Pe}} \text{grad} \langle \theta \rangle.$$

Применяя операцию усреднения к уравнению неразрывности (11.3.3), получаем два уравнения для средней величины скорости

$$\text{div} \langle \vec{V} \rangle = 0, \quad (11.7.8)$$

и пульсационной составляющей скорости

$$\text{div} \vec{V}' = 0. \quad (11.7.9)$$

Таким образом, из анализа уравнений (11.7.5) и (11.7.6) следует, что в турбулентных потоках тензор напряжений и вектор плотности теплового потока увеличиваются. Появляется дополнительный тензор турбулентных напряжений $\langle \bar{\bar{V}V'} \rangle$, обусловленный пульсациями скорости, и вектор турбулентного потока тепла $\langle \theta' \vec{V}' \rangle$, обусловленный пульсациями скорости и температуры, которые условно в соответствии с теорией Буссинеска [19] можно представить в виде, аналогичном выражениям (11.7.7):

$$\langle \bar{\bar{V}V'} \rangle = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{v_T}{\nu} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial n_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial n_i} \right); \quad (11.7.10)$$

$$\langle \theta' \vec{V}' \rangle = -\frac{1}{\text{Pe}} \frac{a_T}{a} \text{grad} \langle \theta \rangle,$$

где v_T, a_T – эффективные коэффициенты турбулентной кинематической вязкости и турбулентной теплопроводности.

Полный тензор напряжений $\langle \bar{\bar{\tau}}_n \rangle$ и полный вектор плотности потока тепла $\langle \bar{\vec{q}}_n \rangle$ можно с учетом (11.7.7) и (11.7.10) записать в виде:

$$\langle \bar{\bar{\tau}}_n \rangle = -\frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{v_T}{v} \right) \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial \eta_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial \eta_i} \right);$$

$$\langle \bar{\delta}_n \rangle = -\frac{1}{\text{Pe}} \left(1 + \frac{a_T}{a} \right) \text{grad} \langle \theta \rangle.$$

Уравнения (11.7.5) – (11.7.8) представляют собой систему уравнений движения и теплопереноса в турбулентных потоках несжимаемой жидкости. Из-за наличия в уравнениях усредненных произведений пульсаций скорости и температуры $\langle \bar{\bar{V}}\bar{V}' \rangle$ и $\langle \theta'\bar{V}' \rangle$ эта система уравнений незамкнута. Для получения решений реальной задачи необходимо постулировать некоторые дополнительные зависимости между пульсациями и соответствующими средними значениями скорости и температуры, вводить какие-либо другие допущения и привлекать константы, получаемые из эксперимента.

Будем считать процессы движения и теплопереноса осесимметричными, т.е. полагать искомые величины независимыми от угла φ . Задачу сформулируем в цилиндрической системе координат η_1, η_3, φ . Ось η_3 совпадает с направлением потока жидкости. Процесс считается установившимся, поэтому

$$\frac{\partial \langle \bar{V} \rangle}{\partial F_0} = \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial F_0} = 0. \quad (11.7.11)$$

Вектор средней скорости, как и при ламинарном движении жидкости, совпадает с направлением координатной оси η_3 , так что можно записать:

$$\langle \bar{V} \rangle = \bar{e}_3 \langle v_3 \rangle, \quad \bar{V}_1 = 0. \quad (11.7.12)$$

Из уравнения неразрывности с учетом выражения (11.7.12) следует, что $\langle v_3 \rangle$ не зависит от координаты η_3 и является функцией только радиальной координаты η_1 :

$$\langle v_3 \rangle = \langle v_3 \rangle (\eta_1).$$

Кроме того, предполагается, что усредненные произведения пульсаций скорости $\langle v'_1 v'_1 \rangle$, $\langle v'_1 v'_3 \rangle$ и $\langle v'_3 v'_3 \rangle$ также не зависят от координаты η_3 .

С учетом принятых допущений система уравнений движения (11.7.5) и неразрывности (11.7.9) в проекциях на оси примет вид:

$$Eu \frac{\partial \langle \pi \rangle}{\partial \eta_1} = -\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} (\eta_1 \langle v'_1 v'_1 \rangle); \quad (11.7.13)$$

$$Eu \frac{\partial \langle \pi \rangle}{\partial \eta_3} = -\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} (\eta_1 (\langle \tau_{31} \rangle + \langle v'_1 v'_3 \rangle)); \quad (11.7.14)$$

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} (\eta_1 v'_1) + \frac{\partial v'_3}{\partial \eta_3} = 0, \quad (11.7.15)$$

где

$$\langle \tau_{31} \rangle = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \langle v_3 \rangle}{\partial \eta_1}.$$

Выражение для $\langle v'_1 v'_3 \rangle$ по-прежнему определяем из соотношений (11.7.10):

$$\langle v'_1 v'_3 \rangle = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{v_T}{v} \frac{d \langle v_3 \rangle}{d \eta_1}. \quad (11.7.16)$$

Формулировку гидродинамической части задачи завершим постановкой граничных условий на стенке трубы:

$$\langle v_3 \rangle \Big|_{\eta_1=1} = v'_1 \Big|_{\eta_1=1} = v'_3 \Big|_{\eta_1=1} = \frac{\partial v'_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=1} = 0. \quad (11.7.17)$$

Перейдем теперь к постановке тепловой части задачи. Пренебрегая потоком тепла, теплопроводностью вдоль оси η_3 по сравнению с потоком тепла теплопроводностью поперек трубы, а также учитывая соотношения (11.7.11), (11.7.12), уравнение теплопереноса (11.7.6) запишем так:

$$\langle v_3 \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \eta_3} = -\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[\eta_1 \left(-\frac{1}{Pe} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \eta_1} + \langle \theta' v_1' \rangle \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta_3} (\langle \theta' v_3' \rangle). \quad (11.7.18)$$

Сформулируем к уравнению турбулентного теплопереноса (11.7.18) граничные условия. Пусть температура поверхности трубы поддерживается постоянной вдоль осевой координаты η_3 и равной минимальному значению $T_{II} = T_{\min}$. Тогда на стенке трубы имеем следующее условие:

$$\langle \theta \rangle \Big|_{\eta_1=1} = 0. \quad (11.7.19)$$

Кроме того, на стенке трубы отсутствуют пульсации температуры:

$$\theta' \Big|_{\eta_1=1} = 0. \quad (11.7.20)$$

Из анализа уравнения (11.7.18) видно, что в общем случае средняя температура $\langle \theta \rangle$ и её пульсация зависят от координаты η_3 . Поэтому необходимо записать еще одно граничное условие во входном сечении трубы ($\eta_3 = 0$). Однако есть возможность упростить задачу. Для этого предположим, что на некотором небольшом участке трубы, достаточно удаленном от входного сечения, температура вдоль осевой координаты практически не изменяется, а средняя температура на оси трубы считается известной величиной:

$$\langle \theta \rangle \Big|_{\eta_3=0} = \theta_0 = const. \quad (11.7.21)$$

С учетом принятого допущения справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial \eta_3} = \frac{\partial \theta'}{\partial \eta_3} = 0. \quad (11.7.22)$$

Принимая во внимание условие (11.7.22), уравнение теплопереноса (11.7.18) значительно упростим

$$\frac{d}{d\eta_1} \left[\eta_1 \left(-\frac{1}{Pe} \frac{d\langle \theta \rangle}{d\eta_1} + \langle \theta' v_1' \rangle \right) \right] = 0. \quad (11.7.23)$$

Вводя турбулентный коэффициент температуропроводности в соответствии с выражением (11.7.10), уравнение (11.7.23) запишем в виде:

$$\frac{d}{d\eta_1} \left[\eta_1 \left(-\frac{1}{Pe} \left(1 + \frac{a_T}{a} \right) \right) \frac{d\langle \theta \rangle}{d\eta_1} \right] = 0. \quad (11.7.24)$$

Таким образом, математическая модель тепловой части задачи турбулентного теплопереноса представляет собой систему, состоящую из обыкновенного дифференциального уравнения (11.7.23) или (11.7.24) и граничных условий (11.7.19)–(11.7.21).

Решение и обсуждение сформулированной задачи

Гидродинамическая часть задачи. Математическая модель гидродинамических процессов в трубе описывается уравнениями (11.7.13)–(11.7.15) и граничными условиями к ним (11.7.17). Решение задачи удобно выполнять с использованием новой переменной $\eta = 1 - \eta_1$, отсчитываемой от стенки трубы. Анализ задачи осуществляется для двух зон турбулентного потока: вблизи стенки трубы и в турбулентном ядре потока. При этом алгоритм решения гидродинамической части задачи предполагается читателю известным из курса теории турбулентности.

Решение задачи вблизи стенки трубы, когда $\eta \rightarrow 0$, имеет следующий вид:

$$\langle v_3 \rangle = \eta^* - \frac{S\eta^*}{5!}, \quad (11.7.25)$$

где $\eta^* = \text{Re}\eta$; S – константа.

При малых η^* , стремящихся к нулю, выражение (11.7.25) сводится к более простому:

$$\langle v_3 \rangle \approx \eta^*. \quad (11.7.26)$$

То предельное значение $\eta^* = \eta_{II}^*$, при котором выражение (11.7.26) еще остается справедливым, называется толщиной вязкого слоя. В пределах вязкого слоя роль турбулентных напряжений $\langle v_1'v_3' \rangle$ весьма мала по сравнению с таковым вязких напряжений $\frac{1}{\text{Re}} \frac{d \langle v_3 \rangle}{d\eta}$, что согласуется с малостью последнего слагаемого в выражении (11.7.25).

Рассмотрим теперь область турбулентного ядра потока, когда $\eta > \eta_{II}$. Здесь влияние стенок сказывается лишь на максимальном значении скорости и не сказывается на профиле скорости в ядре потока. Этот факт вытекает из малости вязкого тензора напряжений по сравнению с турбулентным тензором напряжений в рассматриваемой части потока. Сказанное позволяет в уравнениях (11.7.13)–(11.7.14) пренебречь величиной $\langle \tau_{31} \rangle$.

Упрощенное таким образом уравнения гидродинамики для турбулентного ядра потока обладают свойством инвариантности относительно преобразования подобия. На основании указанного свойства инвариантности А.С. Мониным и А.М. Ягломом [19] была получена формула для скорости, соответствующая логарифмическому профилю скорости:

$$\langle v_3 \rangle = A \ln \eta^* + B, \quad (11.7.27)$$

где A и B – универсальные константы, не зависящие от свойств жидкости.

По экспериментальным данным Никурадзе константы имеют следующие значения: $A = 2,5$ и $B = 5,5$. Тогда для средней скорости окончательно запишем:

$$\langle v_3 \rangle = 2,5 \ln \eta^* + 5,5. \quad (11.7.28)$$

Соотношение (11.7.28) справедливо при $\eta^* \geq \eta_{II}^* = 30$.
 Формула (11.7.26) для вязкого $\langle v_3 \rangle$ слоя справедлива до значений $\eta^* \leq \eta_{I}^* = 5$. На рис 11.6 показан профиль средней скорости при турбулентном движении жидкости в трубе.

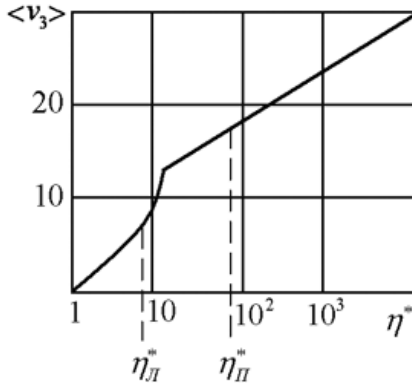


Рис. 11.6

Формула (11.7.25), учитывающая турбулентные пульсации скорости в вязком слое, позволяет определить $\langle v_3 \rangle$ в более широком интервале значений η^* (вплоть до $\eta_{II}^* = 30$). При этом константа S находится из условия равенства величин скорости $\langle v_3 \rangle$, определенных по формулам (11.7.25) и (11.7.28). Поэтому в вязком слое при $\eta_{II}^* \leq 30$ справедлива следующая формула:

$$\langle v_3 \rangle = \eta^* - 0,66 \cdot 10^{-6} \eta^{*5}.$$

Применяя формулу (11.7.26) для $\langle v_3 \rangle$ в области вязкого слоя, выражение (11.7.28) для $\langle v_3 \rangle$ в турбулентном ядре потока и привлекая соотношение (11.7.16), являющееся определением коэффициента вязкости, получаем следующую зависимость:

$$\frac{v_T}{\nu} = \begin{cases} 3,3 \cdot 10^{-6} \eta^{*4}, & \text{при } \eta^* \leq \eta_{II}^*; \\ 0,4 \cdot \eta^*, & \text{при } \eta^* \geq \eta_{II}^*. \end{cases} \quad (11.7.29)$$

Выбирая выражение для характерной скорости

$$U_0 = \sqrt{\frac{P_{\max} - P_{\min}}{\rho} \left(-\frac{\partial \langle \pi \rangle}{\partial \eta_3} \right)},$$

таким образом, чтобы напряжение на стенке трубы τ_0 обращалось в единицу, получим на основании решения уравнений (11.7.13)–(11.7.14) следующее соотношение:

$$\left(1 + \frac{v_T}{\nu} \right) \frac{d \langle v_3 \rangle}{d \eta^*} = 1. \quad (11.7.30)$$

Из анализа последнего соотношения вытекает, что граница η_{II}^* вязкой и турбулентной области может определяться из условия

$$\left. \frac{v_T}{\nu} \right|_{\eta^* = \eta_{II}^*} \approx 1. \quad (11.7.31)$$

Для вязкой области ($\eta^* \leq \eta_{II}^*$) величина $v_T / \nu < 1$ и в (11.7.30) ею можно пренебречь в сравнении с единицей. В турбулентной области ($\eta^* \geq \eta_{II}^*$) величина $v_T / \nu > 1$ и единицей можно пренебречь в сравнении с v_T / ν .

Тепловая часть задачи. Уравнение теплопереноса (11.7.24) вблизи стенки трубы ($\eta \rightarrow 0$) с учетом введенной ранее переменной может быть записано в более простой форме:

$$\frac{d}{d \eta} \left(\frac{1}{Pe} \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta} + \langle \theta' v_1' \rangle \right) = 0. \quad (11.7.32)$$

Интегрируя уравнение (11.7.32), получаем:

$$\frac{1}{Pe} \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta} + \langle \theta' v_1' \rangle = \delta_0 = const. \quad (11.7.33)$$

Учитывая граничные условия (11.7.17) и (11.7.20), имеем:

$$\delta_0 = \frac{1}{Pe} \left. \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta} \right|_{\eta=0}. \quad (11.7.34)$$

Из последнего соотношения видно, что величина δ_0 представляет собой некоторый безразмерный поток на стенку трубы.

Для дальнейших расчетов удобно характерную разность температур $T^* - T_{II}$ выбрать из условия равенства единице безразмерного потока тепла на стенку трубы:

$$\delta_0 = \frac{a}{u_0 \lambda} \frac{\langle q_0 \rangle}{T^* - T_{II}} = 1. \quad (11.7.35)$$

Учитывая, что $a = \lambda / (\rho c_p)$, соотношение (11.7.34) запишем в виде:

$$T^* - T_{II} = \langle q_0 \rangle / (u_0 \rho c_p), \quad (11.7.36)$$

где $\langle q_0 \rangle$ - размерный тепловой поток на стенку трубы.

Выражение (11.7.36) устанавливает линейную связь между характерной разностью температуры и потоком на стенку трубы. Одна из этих двух величин должна быть определена из решения тепловой части задачи.

Принимая во внимание соотношение (11.7.35) и заменяя η на η^* , уравнение (11.7.33) запишем следующим образом:

$$\frac{1}{Pr} \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta^*} + \langle \theta' v_1' \rangle = 1. \quad (11.7.37)$$

Из анализа последнего уравнения, учитывая результаты решения гидродинамической части задачи, можно предположить, что в общем случае безразмерная температура

$$\langle \theta \rangle = \frac{\langle T \rangle - T_{II}}{T^* - T_{II}}$$

будет функцией аргумента η^* и критерия Pr в некотором слое вблизи стенки трубы:

$$\langle \theta \rangle = \varphi(\eta^*, Pr).$$

Очевидно, что поле температуры может быть весьма разным в зависимости от числа Pr , характеризующего свойства жидкости.

Учитывая, что турбулентный поток тепла порождается тем же пульсационным движением, что и турбулентный поток импульса, при анализе температурного поля допускаем:

$$a_T \sim v_T. \quad (11.7.38)$$

Величина a_T определяется выражением (11.7.10), из которого следует, что

$$\langle \theta' v_1' \rangle = \frac{1}{Pe} \frac{a_T}{a} \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{a_T}{a} \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta^*}. \quad (11.7.39)$$

Тогда уравнение (11.7.37) может быть преобразовано к виду:

$$\left(1 + \frac{a_T}{a} \right) \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta^*} = Pr. \quad (11.7.40)$$

Из анализа выражения (11.7.40) следует, что для $a_T/a > 1$ можно пренебречь молекулярным переносом тепла в сравнении с турбулентным, а при $a_T/a < 1$, наоборот. Граничное значение координаты $\eta^* = \eta_T^*$, при котором $a_T/a \sim 1$, определяет толщину теплового слоя. Подобно выражению (11.7.31), толщина теплового слоя находится из выражения:

$$\frac{a_T}{a} \Big|_{\eta^* = \eta_T^*} \sim 1. \quad (11.7.41)$$

Используя выражения (11.7.31), (11.7.38) и (11.7.41), получаем:

$$\frac{v_T}{a} \Big|_{\eta^* = \eta_T^*} \sim \frac{v_T}{\nu} \Big|_{\eta^* = \eta_{II}^*},$$

или

$$v_T \Big|_{\eta^*=\eta_r^*} = \frac{v_T}{Pr} \Big|_{\eta^*=\eta_{II}^*}. \quad (11.7.42)$$

Если $Pr=1$, т.е. $\nu = a$, то из (11.7.42) следует

$$v_T \Big|_{\eta^*=\eta_r^*} = v_T \Big|_{\eta^*=\eta_{II}^*}.$$

В этом случае видно, что толщина вязкого и теплового слоев одинаковы ($\eta_T^* \sim \eta_{II}^*$). При этом уравнение теплопереноса (11.7.40) совпадает с уравнением движения (11.7.30). Последний факт позволяет говорить о подобии профилей скорости и температуры при $Pr=1$. На рис 11.7 показаны профили скорости и температуры для жидкостей с числами Прандтля, большими (а) и меньшими единицы (б).

Если $Pr \ll 1$, т.е. $a \gg \nu$, например для расплавленных металлов, то из выражения (11.7.42) следует, что $\eta_T^* > \eta_{II}^*$ (рис. 11.7, а).

Подставляя в соотношение (11.7.42) формулу для v_T (11.7.29), получаем:

$$\eta_T^* = b / Pr, \quad (11.7.43)$$

где $b = \alpha \cdot 3,3 \cdot 10^{-6} \cdot 30^4 / 0,4$; α - константа порядка единицы определяемая из эксперимента.

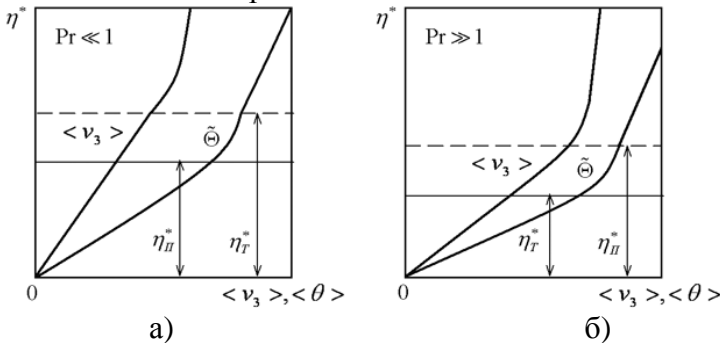


Рис. 11.7

Для сред с числом $Pr \gg 1$ по аналогичной схеме получаем следующее соотношение:

$$\eta_T^* = \gamma \eta_{II}^* / Pr^{1/4} = 30\gamma / Pr^{1/4}, \quad (11.7.44)$$

где γ - коэффициент пропорциональности, определяемый из эксперимента и имеющий порядок единицы.

Рассмотрим область потока, в которой перенос тепла определяется турбулентными пульсациями. Для всех жидкостей эта область определяется условием:

$$\eta^* \geq \text{Sup}(\eta_T^*, \eta_{II}^*).$$

Пренебрегая молекулярным потоком тепла по сравнению с турбулентным потоком в уравнении теплопереноса (11.7.23), приходим к свойству инвариантности поля температуры относительно подобного преобразования пространства. Основываясь на этом свойстве, может быть получена следующая формула для поля температуры, аналогичная формулам (11.7.27):

$$\langle \theta \rangle = A' \ln \eta^* + B', \quad (11.7.45)$$

где $A' = A = 2,5$. Коэффициент B' определим из условия на оси трубы (11.7.21):

$$B' = \langle \theta_0 \rangle - 2,5 \ln Re. \quad (11.7.46)$$

После подстановки (11.7.46) в (11.7.45) окончательно имеем:

$$\langle \theta \rangle = \langle \theta_0 \rangle + 2,5 \ln(\eta^* / Re). \quad (11.7.47)$$

поле температуры вблизи стенки трубы и потоков необходимо определять с учетом теплофизических свойств жидкости (раздельно для жидкостей с числами $Pr \ll 1$ и $Pr \gg 1$).

11.8. Теплоперенос при течении высокотеплопроводных жидкостей

Высокотемпературные жидкости характеризуются величиной $Pr \ll 1$ (расплавленные металлы). Для таких жидкостей $\sup(\eta_T^*, \eta_{II}^*) = \eta_T^*$. Профиль температуры в области $\eta^* > \eta_T^*$ определяется по формуле (11.7.47). Остается найти поле температуры в области теплового слоя.

Для области $\eta^* < \eta_T^*$ выполняется неравенство $a_T / a < 1$, поэтому уравнение (11.7.39) упрощается:

$$\frac{d\langle \theta \rangle}{d\eta^*} = Pr. \quad (11.8.1)$$

После интегрирования уравнения (11.8.1) имеем:

$$\langle \theta \rangle = Pr \eta^* + C.$$

Константу интегрирования определяем из условия на поверхности трубы (11.7.19): $C = 0$, поэтому последнее равенство принимает вид:

$$\langle \theta \rangle = Pr \eta^*.$$

Окончательно поле температуры в случае течения высокотеплопроводной жидкости в трубе определяется следующей системой формул:

$$\langle \theta \rangle = \begin{cases} Pr \eta^*, & \eta^* < \eta_T^*; \\ \langle \theta_0 \rangle + 2,5 \ln(\eta^* / Re), & \eta^* > \eta_T^*. \end{cases} \quad (11.8.2)$$

Учитывая условие непрерывности температуры на границе двух слоев, т.е. при $\eta^* = \eta_T^*$, из соотношения (11.8.2) получаем формулу для безразмерной температуры на оси трубы:

$$\langle \theta_0 \rangle = \frac{T_0 - T_{II}}{T^* - T_{II}} = Pr \eta_T^* - 2,5 \ln(\eta_T^* / Re). \quad (11.8.3)$$

Формула (11.8.3) позволяет найти характерную разность температур $T^* - T_{II}$, введенную ранее из соображений удобства.

Далее определим безразмерный тепловой поток на стенку трубы Ki :

$$Ki = \frac{\langle q_0 \rangle x_0}{\lambda(T_0 - T_{II})},$$

где Ki - критерий Кирпичева, представляющий собой отношение теплового потока, подводимого к стенке, к тепловому потоку, передаваемому через среду за счет теплопроводности [16]. Используя выражение (11.7.35) для безразмерного потока тепла на стенку δ_0 , нетрудно получить:

$$Ki = \text{Pr Re} / \langle \theta_0 \rangle. \quad (11.8.4)$$

Учитывая соотношение (11.8.3) и (11.7.43), а также связь между числами Рейнольдса

$$\text{Re} = \text{Re}_{cp} \sqrt{k_f},$$

запишем (11.8.4) в виде:

$$Ki = \frac{0,17 \text{Re}_{cp} \text{Pr} \sqrt{k_f}}{\lg \text{Re}_{cp} + \lg \text{Pr} + \lg(0,2 \sqrt{k_f}) + 2,4}, \quad (11.8.5)$$

где $\text{Re}_{cp} = u_{cp} x_0 / \nu$; u_{cp} – средняя скорость потока, определяемая экспериментально; k_f - коэффициент сопротивления.

При выводе формулы (11.8.5) имеем $b = 17,5$.

На рис. 11.8 показана зависимость теплового потока от числа Пекле: сплошная линия – расчет (11.8.5); точки – эксперимент

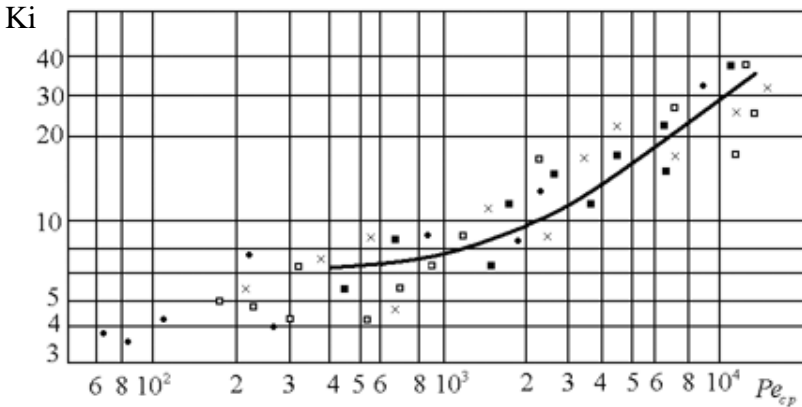


Рис. 11.8

Сопоставление результатов эксперимента, выполненного С.С. Кутателадзе [20] с расчетными данными в соответствии с формулой (11.8.5), свидетельствует об удовлетворительном их согласовании при достаточно больших значениях числа Pe_{cp} $Pr = Pe_{cp} \geq 4 \hat{1}$, когда имеет место развитой турбулентный режим течения (рис. 11.8).

11.9. Теплоперенос при течении малотеплопроводных жидкостей

Малотеплопроводные жидкости характеризуются величиной числа $Pr \gg 1$. Для этих жидкостей $\sup(\eta_T^*, \eta_{II}^*) = \eta_{II}^*$. Поэтому профиль температуры в области $\eta^* > \eta_{II}^*$ определяется формулой (11.7.47).

В соответствии с формулой (11.7.44) для таких жидкостей величина теплового слоя меньше динамического $\eta_T^* > \eta_{II}^*$. Для области $\eta^* < \eta_T^*$ молекулярный теплоперенос

преобладает над турбулентным ($a_T / a < 1$), поэтому уравнение (11.7.40) примет вид:

$$\frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta^*} = \text{Pr}.$$

Решая последнее уравнение с учетом граничного условия на поверхности трубы (11.7.19), получаем:

$$\langle \theta \rangle = \text{Pr} \eta^*, \quad \eta^* < \eta_T^*. \quad (11.9.1)$$

В области $\eta_T^* \leq \eta^* < \eta_{II}^*$ справедливо неравенство: $a_T / a > 1$. Поэтому уравнение (11.7.40) запишем в виде:

$$\frac{a_T}{a} \frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta^*} = \text{Pr}. \quad (11.9.2)$$

Учитывая, что $a_T \sim v_T$, или $a_T = \beta v_T$, а также выражение (11.7.29) при $\eta^* < \eta_{II}^*$, уравнение (11.9.2) запишем следующим образом:

$$\frac{d \langle \theta \rangle}{d \eta^*} = \frac{(\eta^*)^4}{3,3 \cdot 10^{-6} \beta}. \quad (11.9.3)$$

После интегрирования уравнения (11.9.3) имеем:

$$\langle \theta \rangle = C - (9,9\beta)^{-1} 10^6 (\eta^*)^{-3}. \quad (11.9.4)$$

Постоянную интегрирования C рассчитываем из условия смыкания профилей температуры, определяемых формулами (11.9.1) и (11.9.4):

$$C = \text{Pr} \eta_T^* + \frac{10^6}{9,9\beta} \left(\frac{1}{\eta_T^*} \right)^3.$$

Тогда в области $\eta_T^* \leq \eta^* < \eta_{II}^*$

$$\langle \theta \rangle = \text{Pr} \eta_T^* + \frac{10^6}{9,9\beta} (\eta_T^{*-3} - \eta^{*-3}).$$

Окончательно поле средней температуры в турбулентном потоке малотеплопроводной жидкости определяется системой уравнений:

$$\langle \theta \rangle = \begin{cases} \text{Pr } \eta^*, & \eta^* < \eta_T^* \\ \text{Pr } \eta_T^* + \frac{10^6}{9,9\beta} (\eta_T^{*-3} - \eta^{*-3}), & \eta_T^* \leq \eta^* < \eta_{II}^* \\ \langle \theta_0 \rangle + 2,5 \ln(\eta^* / \text{Re}), & \eta^* > \eta_{II}^* \end{cases} \quad (11.9.5)$$

Следующий этап решения задачи связан с расчетом безразмерного теплового потока Ki на стенку трубы. Для этого в соответствии с формулой (11.8.4) необходимо найти величину $\langle \theta_0 \rangle$. Соблюдая неразрывность значений $\langle \theta \rangle$ при переходе от вязкого к турбулентному слою, т.е. в точках $\eta^* = \eta_{II}^*$ из соотношения (11.9.5) находим

$$\langle \theta_0 \rangle = \text{Pr } \eta_T^* + \frac{10^6}{9,9\beta} (\eta_T^{*-3} - \eta_{II}^{*-3}) - 2,5 \ln(\eta_{II}^* / \text{Re}). \quad (11.9.6)$$

Подставляя соотношение (11.9.6) в формулу (11.8.4), учитывая выражения (11.7.44) и величину $\eta_{II}^* = 30$, имеем:

$$Ki = \frac{0,17 \text{Re}_{cp} \text{Pr} \sqrt{k_f}}{\lg \text{Re}_{cp} + \lg(0,2\sqrt{k_f}) + 0,5 \text{Pr}^{3/4}}. \quad (11.9.7)$$

В формуле (11.9.7) учтено, что неизвестные эмпирические постоянные β и γ определены экспериментально.

Сопоставление выражений для потоков тепла Ki в случае $\text{Pr} \ll 1$ (11.8.5) и в случае $\text{Pr} \gg 1$ (11.9.7) позволило В. Г. Левичу получить интерполяционную формулу, справедливую для любых значений числа Прандтля:

$$Ki = \frac{0,17 \text{Re}_{cp} \text{Pr} \sqrt{k_f}}{\lg \text{Re}_{cp} + \lg \text{Pr} + \lg(0,2\sqrt{k_f}) + 2,4 + 0,5 \text{Pr}^{3/4}}.$$

11.10 Теплоперенос при обтекании пластины малотеплопроводными жидкостями.

В однородный поток жидкости, имеющий скорость $\vec{U} = \vec{u}_0 = const$ и температуру $T = T_{max} = const$, погружена полубесконечная пластина, поверхность которой поддерживается при температуре $T = T_{min} = const$ (рис. 11.9). Процесс в гидродинамическом и тепловом отношении предполагается установившемся. Изменением коэффициента теплопроводности от температуры пренебрегаем.

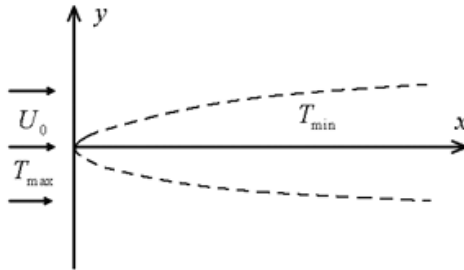


Рис. 11.9

Для малотеплопроводных жидкостей, характеризующихся числом Прандтля $Pr \gg 1$, наиболее удобным методом решения задачи теплопереноса является приближение пограничного слоя [21]. Систему уравнений движения и теплопереноса с учетом этого приближения в безразмерной форме запишем следующим образом:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (11.10.1)$$

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}; \quad (11.10.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (11.10.3)$$

где u и v - горизонтальная и вертикальная компоненты скорости. Здесь в качестве характерной скорости выбираем скорость набегающего потока u_0 , а в качестве характерной разности температур – величину $(T_{\max} - T_{\min})$.

Система уравнений (11.10.1)-(11.10.3) замыкается граничными условиями:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0; \quad u|_{y \rightarrow \infty} = 1; \quad (11.10.4)$$

$$\Theta|_{y=0} = 0; \quad \Theta|_{y \rightarrow \infty} = 1. \quad (11.10.5)$$

Решение *гидродинамической части задачи*.

Введя функцию тока ψ с помощью известных соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

и координату $x' = x/\text{Re}$, уравнение движения (11.10.1) приведем к уравнению относительно функции тока:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (11.10.6)$$

Граничные условия (11.10.4) преобразуем к виду

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{y=0} = 0; \quad (11.10.7)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \infty} = 1. \quad (11.10.8)$$

Из условия (11.10.7) может быть получено после интегрирования граничное условие для функции тока:

$$\psi|_{y=0} = 0. \quad (11.10.9)$$

Решение для ψ ищем с привлечением функции Блаузиуса:

$$\psi = -\sqrt{x'} \cdot f(P),$$

где $P = y / \sqrt{x'}$.

Тогда в новых переменных (f, P) задача (11.10.6) – (11.10.9) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$f''' + 0,5 f f'' = 0, \quad (11.10.10)$$

с граничными условиями:

$$f|_{P=0} = f'|_{P=0} = 0; \quad f'|_{P \rightarrow \infty} = 1. \quad (11.10.11)$$

Уравнение (11.10.10) с граничными условиями (11.10.11) решено в [21, 22]. Функция Блаузиуса и ее производные протабулированы и приводятся в справочниках и монографиях. Это позволяет определить компоненты скорости, воспользовавшись соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -f'; \quad v = \frac{1}{2 \operatorname{Re} \sqrt{x'}} (f - P f').$$

Решение тепловой части задачи ищем в виде

$$\Theta = \varphi(P, \operatorname{Pr}).$$

Тогда уравнение теплопереноса (11.10.2) и граничные условия в переменных φ и P запишем следующим образом:

$$\frac{\operatorname{Pr} f \varphi'}{2} + \varphi'' = 0; \quad (11.10.12)$$

$$\varphi|_{P=0} = 0; \quad \varphi|_{P \rightarrow \infty} = 1. \quad (11.10.13)$$

После интегрирования уравнения (11.10.12) с учетом граничных условий (11.10.13), имеем:

$$\Theta = \varphi = \frac{\int_0^P \exp \left[-\operatorname{Pr} / 2 \int_0^P f dP \right] dP}{\int_0^\infty \exp \left[-\operatorname{Pr} / 2 \int_0^P f dP \right] dP}.$$

Используя уравнение (11.10.10), находим:

$$\exp\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^P f dP\right] = \exp\left[\text{Pr} \ln \frac{f''(P)}{f''(0)}\right] = \left[\frac{f''(P)}{f''(0)}\right]^{\text{Pr}}. \quad (11.10.14)$$

С учетом выражения (11.10.14) решение для Θ упрощается:

$$\Theta = \frac{\int_0^P [f'']^{\text{Pr}} dP}{\int_0^\infty [f'']^{\text{Pr}} dP}. \quad (11.10.15)$$

Анализ результатов расчета. При значении числа $\text{Pr} = 1$, имеем:

$$\Theta = \frac{f'(P) - f'(0)}{f'(\infty) - f'(0)} = -f' = u.$$

В этом случае профиль безразмерной температуры совпадает с профилем безразмерной скорости (рис. 11.10 при $1 - \text{Pr} = 15$; $2 - \text{Pr} = 7$; $3 - \text{Pr} = 1$).

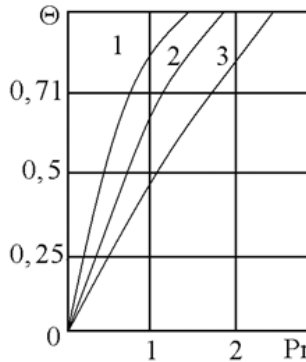


Рис. 11.10

При числах $\text{Pr} > 1$ значения Θ в соответствующих точках пограничного слоя больше значений u (рис. 11.10).

При числах $\text{Pr} < 1$ рассчитанные по формуле (11.10.15) значения Θ оказываются меньше значений u (рис. 11.10).

Однако для таких значений числа Pr едва ли справедливо вести расчет в приближении погранслоя, в особенности и для чисел $Pr \ll 1$.

Определим безразмерный коэффициент теплоотдачи Nu , позволяющий судить о характере теплообмена между потоком и пластиной:

$$Nu = 2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = 2 \frac{\partial \Theta}{\partial P} \Big|_{P=0} \cdot \frac{dP}{dy} = 2 \Theta' \Big|_{P=0} \sqrt{Re/x}.$$

Выбирая x_0 таким образом, чтобы $Re = 1$, получим следующее выражение для коэффициента теплоотдачи:

$$Nu = 2 \frac{[f''(0)]^{Pr}}{\int_0^\infty [f''(P)]^{Pr} dP} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{F(Pr)}{\sqrt{x}},$$

где $F(Pr)$ – функция Польгаузена. В интервале значений числа Pr [23] она может быть определена в виде

$$F(Pr) \approx 0,664 Pr^{1/3}. \quad (11.10.16)$$

Окончательно с учетом соотношения (11.10.16), получаем:

$$Nu(Pr) \approx 0,664 Pr^{1/3} / \sqrt{x}.$$

По мере приближения к передней кромке пластины, т.е. при $x \rightarrow 0$ коэффициент теплоотдачи от потока к пластине возрастает:

$$Nu \Big|_{x \rightarrow 0} \rightarrow \infty.$$

11.11. Обтекание пластины высокотеплопроводными жидкостями

Известно, что высокотеплопроводные жидкости (жидкие металлы) характеризуются малой величиной Прандтля: $Pr \ll 1$ [24]. Поэтому приближение пограничного слоя для

расчета процессов теплопередачи в таких средах оказывается неэффективным. Для таких сред применяется другой приближенный метод, основанный на идеях Буссинеска о теплопередаче в потоке «идеальной жидкости» [25].

Приближение «идеальной жидкости». Рассмотрим уравнения движения (11.3.1) и теплопереноса (11.3.2) для несжимаемой жидкости, устремив в них число Pr к нулю:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe(\vec{V}\nabla)\vec{V} = -Eu Pe \nabla \pi; \quad (11.11.1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Pe(\vec{V}\nabla)\Theta = \nabla(\ell \nabla \Theta). \quad (11.11.2)$$

В уравнении движения (11.11.1) исчез вязкий член, и оно представляет собой уравнение Эйлера для идеальной жидкости, а в уравнении теплопереноса (11.11.2) исчез диссипативный член. Таким образом, предположение о высокой теплопроводности среды приводит к тому, что при определении полей скорости и температуры можно пренебрегать вязкими эффектами, проявляющимися вблизи твердых границ, и считать жидкость идеальной. Это облегчает решение задачи, особенно для плоских потоков, так как позволяет использовать хорошо отработанный аппарат функций комплексного переменного.

Используя векторный анализ, уравнение (11.11.1) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + \frac{Pe}{2} \nabla(\vec{V}^2) - \vec{V} \times rot \vec{V} = -Eu Pe \nabla \pi. \quad (11.11.3)$$

Уравнение (11.11.3) вместе с уравнением неразрывности

$$\nabla \vec{V} = 0, \quad (11.11.4)$$

представляет собой полную систему уравнений, описывающих поля скоростей и давлений в потоке жидкости.

Для безвихревого движения, т.е. при

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0, \quad (11.11.5)$$

существует потенциал скорости φ :

$$\vec{V} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (11.11.6)$$

С учетом (11.11.5), (11.11.6) система уравнений (11.11.3), (11.11.4) может быть записана так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Fo} + Pe \frac{\vec{V}^2}{2} + Eu Pe \pi = f(Fo); \quad (11.11.7)$$

$$\Delta \varphi = 0. \quad (11.11.8)$$

Уравнение (11.11.7) представляет собой интеграл Коши [5, 22], полученный после интегрирования по пространству уравнения (11.11.1) с учетом условия (11.11.5). Оно может быть использовано для нахождения поля π после определения потенциала скорости из уравнения Лапласа (11.11.8) при соответствующих граничных условиях.

Преимущества использования теории функций комплексного переменного при решении гидродинамической части задачи заключаются в следующем. Использование этой теории позволяет деформировать обтекаемый сложный контур в простейший, решение для которого находится без особого труда. Этот метод называется методом конформных преобразований [18].

В этом случае существенным является свойство инвариантности уравнений Лапласа для функции ψ и потенциала φ , а также комплексного потенциала $\Phi(z)$ при любом конформном преобразовании:

$$\xi = f(z), \quad (11.11.9)$$

где

$$z = x + i y,$$

– исходная плоскость;

$$\xi = \varepsilon_1 + i \varepsilon_2,$$

– новая, удобная для анализа плоскость.

Преобразование Сретенского. При решении задач теплопереноса с использованием теории функций комплексного переменного важное значение приобретает свойство уравнения теплопереноса (11.11.2) для двумерного стационарного процесса сохранять инвариантность относительно любых конформных преобразований плоскости. Остановимся на доказательстве этого свойства.

Пусть выполнено конформное преобразование (11.11.9) плоскости в новую плоскость ξ . Комплексный потенциал $\Phi^*(\xi)$ и комплексная скорость $W^*(\xi)$ в новой плоскости запишутся так:

$$\begin{aligned}\Phi^*(\xi) &= \varphi^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + i\psi^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2); \\ W^*(\xi) &= \frac{d\Phi^*}{d\xi} = u^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - iv^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Учитывая свойство инвариантности комплексного потенциала при конформном преобразовании $\Phi(z) = \Phi^*(\xi)$, найдем связь между составляющими скорости u, v в плоскости z и составляющими u^*, v^* в плоскости ξ :

$$\begin{aligned}W(z) &= \frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi^*}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = W^* \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + i \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} \right) = \\ &= u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} + i \left(u^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - v^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (11.11.10)$$

Так как

$$W(z) = u - iv,$$

а функция (11.11.9) аналитическая, т.е. для нее выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = -\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}, \quad (11.11.11)$$

из выражения (11.11.10) следует:

$$\begin{aligned}
 u &= u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} ; \\
 v &= u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{11.11.12}$$

Используя соотношения (11.11.12) и условия (11.11.11), определим следующий оператор в новых переменных:

$$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} = \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \right)^2 \right] \left(u^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} + v^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \right). \tag{11.11.13}$$

Аналогично получаем формулу для оператора Лапласа в плоскости ξ :

$$\Delta = \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_2^2} \right). \tag{11.11.14}$$

Подставляя выражения (11.11.13) и (11.11.14) в уравнение (11.11.2), определим, что при переходе от плоскости z к плоскости ξ форма уравнения теплопереноса не изменяется:

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial \varepsilon_1} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial \varepsilon_2} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_2^2} \right),$$

что и требовалось доказать.

Формулировка задачи теплопереноса при обтекании пластинки металлическим расплавом. Поток жидкого металла набегаёт со скоростью U_0 на полубесконечную пластинку (рис. 11.9), температура поверхности которой поддерживается постоянной $T = T_{\min}$. Температура расплава на большом удалении от пластинки также постоянна ($T = T_{\max}$).

Процесс в тепловом и гидродинамическом отношении предполагается установившимся. Поэтому система уравнений движения и теплопереноса имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad (11.11.15)$$

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right), \quad (11.11.16)$$

где

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (11.11.17)$$

Граничные условия запишем так:

$$u_{x \rightarrow \infty} = u|_{y \rightarrow \infty} = 1; \quad v|_{y \rightarrow 0} = 0; \quad (11.11.18)$$

$$\Theta|_{y=0, x \geq 0} = 0; \quad (11.11.19)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} \Big|_{y=0, x < 0} = 0; \quad (11.11.20)$$

$$\Theta|_{y \rightarrow \infty} = 1. \quad (11.11.21)$$

Условие (11.11.20) выражает охлаждающее влияние пластинки на поток у передней кромки.

Решение гидродинамической части задачи (11.11.15), (11.11.17), (11.11.18) в плоскости $z = x + iy$ может быть представлено в виде:

$$\varphi = x. \quad (11.11.22)$$

Решение тепловой части задачи (11.11.16), (11.11.19) – (11.11.21) вызывает затруднения в связи с необычными граничными условиями для температуры на поверхности пластинки (11.11.19), (11.11.20). Поэтому предлагается использовать такое конформное преобразование исходной плоскости z в плоскость ξ , при котором полуось $y = 0, x \geq 0$ преобразуется в прямую $\varepsilon_2 = 0$, бесконечную в обоих направлениях, а полуось $y = 0, x < 0$ - в ортогональную ей прямую $\varepsilon_1 = 0$.

Такое отображение плоскости с разрезом вдоль действительной оси $x \geq 0$ в полуплоскости ξ достигается конформным преобразованием:

$$\xi = \sqrt{z}.$$

Тогда $\varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \sqrt{x + iy}$, откуда имеем

$$x = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2; \quad y = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (11.11.23)$$

Из системы уравнений (11.11.23) получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}. \quad (11.11.24)$$

Выразим граничные условия для температуры в новых переменных $[\varepsilon_1(x, y), \varepsilon_2(x, y)]$ применительно к плоскости ξ .

Используя условия Коши-Римана (11.11.11), определим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}. \quad (11.11.25)$$

Из выражений (11.11.24) имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} = \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (11.11.26)$$

Тогда равенство (11.11.25) с учетом (11.11.26) примет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} \right).$$

Поэтому условие отсутствия потока тепла (11.11.20) запишем следующим образом:

$$\left(\varepsilon_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} \right) \Big|_{\varepsilon_1=0} = 0,$$

или окончательно

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} \right) \Big|_{\varepsilon_1=0} = 0. \quad (11.11.27)$$

Остальные граничные условия (11.11.19) и (11.11.21) преобразуем к виду:

$$\Theta \Big|_{\varepsilon_2=0} = 0; \quad (11.11.28)$$

$$\Theta \Big|_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} = 1. \quad (11.11.29)$$

Уравнение теплопереноса (11.11.16) в новых переменных согласно теории Сретенского имеет вид:

$$u^* \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} + v^* \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \varepsilon_2^2} \right). \quad (11.11.30)$$

Для определения U^* и V^* воспользуемся выражениями (11.11.12) и (11.11.22):

$$u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} = 1;$$

$$u^* \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} + v^* \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} = 0.$$

Используя выражения (11.11.26), условия Коши-Римана (11.11.11), имеем:

$$\varepsilon_1 u^* - \varepsilon_2 v^* = 2\sqrt{x^2 + y^2}; \quad (11.11.31)$$

$$\varepsilon_2 u^* + \varepsilon_1 v^* = 0$$

Из выражений (11.11.23) устанавливаем связь

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2.$$

Тогда решение системы уравнений (11.11.31) дает:

$$U^* = 2\varepsilon_1; \quad V^* = -2\varepsilon_2. \quad (11.11.32)$$

С учетом полученных соотношений (11.11.32) уравнение теплопереноса (11.11.30) запишем так:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon_2} = \frac{1}{2Pe} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varepsilon_2^2} \right). \quad (11.11.33)$$

Решение для уравнения (11.11.33) ищем в виде следующей функциональной зависимости, удовлетворяющей граничному условию (11.11.27):

$$\Theta = f(\varepsilon_2).$$

После подстановки $f(\varepsilon_2)$ в уравнение (11.11.33), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$0,5 f'' / Pe + \varepsilon_2 f' = 0. \quad (11.11.34)$$

Решение уравнения (11.11.34) с учетом граничных условий (11.11.28) и (11.11.29) имеет вид

$$f = \Theta = \frac{\int_0^{\varepsilon_2} e^{-Pe\varepsilon_2^2} d\varepsilon_2}{\int_0^{\infty} e^{-Pe\varepsilon_2^2} d\varepsilon_2} = \frac{\int_0^{\varepsilon_2\sqrt{Pe}} e^{-S^2} dS}{\int_0^{\infty} e^{-S^2} dS}. \quad (11.11.35)$$

Вводя функцию Гаусса (интеграл ошибок),

$$erf(\varepsilon_2\sqrt{Pe}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon_2\sqrt{Pe}} e^{-S^2} dS,$$

а также учитывая условие ее нормировки

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-S^2} dS = 1,$$

выражение (11.11.35) запишем так:

$$\Theta = erf(\varepsilon_2\sqrt{Pe}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon_2\sqrt{Pe}} e^{-S^2} dS.$$

Переходя от координаты ε_2 к исходным x и y в соответствии с соотношениями (11.11.24), получим:

$$\Theta = erf \left[\frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \sqrt{\frac{Pe}{2}} \right]. \quad (11.11.36)$$

Выбрав характерный размер, равный $x_0 = \nu / U_0$, последнее выражение запишем в виде:

$$\Theta = \operatorname{erf} \left[\frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}}{2}} \right].$$

На рис. 11.11 штриховой линией нанесены изотермы в потоке жидкости с $\operatorname{Pr}=1$ в соответствии с формулой (11.10.15), полученной в приближении пограничного слоя. Сплошные линии построены в соответствии с формулой (11.11.36). В последнем случае наблюдается охлаждающее влияние пластинки перед ее передней кромкой. Этот эффект малосущественен для жидкостей с числом $\operatorname{Pr} \gg 1$ и поэтому не учитывается при решении задачи в приближении пограничного слоя [26, 27].

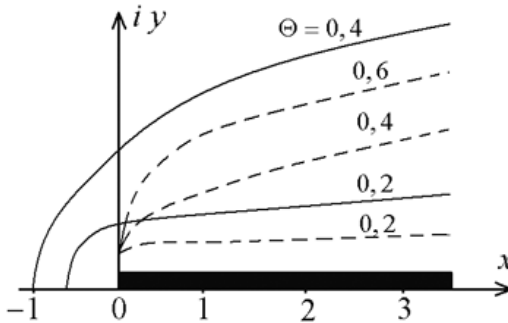


Рис. 11.11.

Если характерный размер определить из условия $Pe = 1$, то формула (11.11.36) примет вид:

$$\Theta = \operatorname{erf} \left[\frac{y}{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \right]. \quad (11.11.37)$$

Изотермы, приведенные на рис. 11.12, справедливы при любых достаточно малых значениях числа Прандтля рассчитанных по формуле (11.11.37).

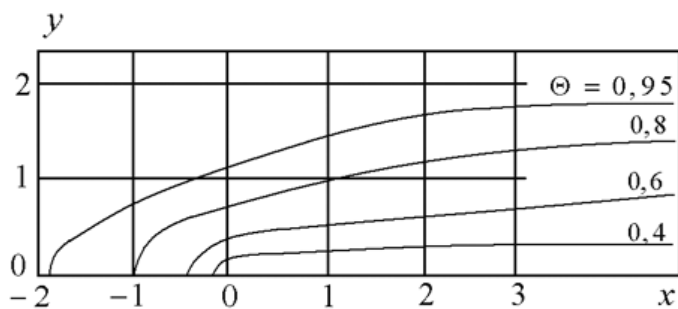


Рисунок 11.12

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов В.А. *Металлургическая теплотехника/ Арутюнов В.А., Миткалинный В.И., Старк С.Б.* – М.: *Металлургия*, 1974. – Т.1. – 672 с.
2. *Аэрогидромеханика: Учебное пособие/ Андрийчук Н.Д., Коваленко А.А., Кондауров Е.Н., Мальцев Я.И., Осенин Ю.И. Соколов В.И.* - Луганск: *Издательство ВНУ им. В. Даля*, 2009. – 516 с.
3. *Беляев Н.М. Основы теплопередачи/Беляев Н.М.* – Киев: *Вища шк.*, 1989. – 343 с.
4. *Голубева О.В. Курс механики сплошных сред/ О.В. Голубева.* – М.: *Высшая школа*, 1973. – 368 с.
5. *Гухман А.А. Введение в теорию подобия Герман А.А.* – М.: *Высш. шк.*, 1963. -254 с.
6. *Диффузионные процессы в стационарных газовых потоках: Учебное пособие/ Недопекин Ф.В., Коваленко А.А., Соколов В.И., Калужный Г.С., Андрийчук Н.Д.* – Луганск: *Издательство ВНУ им. В. Даля*, 2007. – 224 с.
7. *Кутателадзе С.С. Анализ подобия в теплофизике/ Кутателадзе С.С.* – Новосибирск: *Наука*, 1982. – 280 с.
8. *Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена/ Кутателадзе С.С.* – М.: *Атомиздат*, 1979. – 195 с.
9. *Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа/ Лойцянский Л.Г.* – М.: *Наука*, 1978. – 736 с.
10. *Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник/ Лыков А.В.* – М.: *Энергия*, 1978. – 480 с.
11. *Монин А.С. Статистическая гидромеханика/Беляев Н.М.* . – М.: *Наука*, 1965. – Ч.2. – 640 с.
12. *Недопёкин Ф.В. Основы механики сплошных сред: учебное пособие / Недопёкин Ф.В., Коваленко А.А., Соколов В.И.– Луганск: Издательство ВНУ им. В. Даля* 2010. – 277
13. *Недопёкин Ф.В. Моделирование гидродинамических и теплофизических процессов в сталеплавильных печах постоянного тока/ Недопекин Ф.В., Казак О.В., Семко А.Н.* –

- Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – 306с.
14. Недопёкин Ф.В. Процессы переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах/ Недопёкин Ф.В. – Донецк: ДонНУ, 2013. – 461 с.
 15. Недопекин Ф.В. Теоретические и прикладные аспекты теплотеноса/ Недопекин Ф.В., Гинкул С.И., Новикова Е.В.– Донецк: ДонНУ, 2013. – 321 с.
 16. Недопёкин Ф.В. Тепломассоперенос: учебное пособие. (издание второе, дополненное и переработанное) – Донецк: ДонНУ, 2007. – 174 с.
 17. Недопекин Ф.В. Физико-химическая гидродинамика: Учебное пособие/ Ф.В. Недопекин. – Донецк: Издательство «УкрНТЭК», 2002. – 106 с.
 18. Повх И.Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении/ Повх И.Л. – Л.: Машиностроение, 1974. – 480 с.
 19. Повх И.Л. Техническая гидромеханика/ И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
 20. Свешников А.Г. Теория функции комплексной переменной/ Свешников А.Г., Тихонов А.Н. . – М.: Наука, 1970. – 307 с.
 21. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике Седов Л.И.- М.: Наука, 1981. – 448 с.
 22. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, в двух томах, 1970.
 23. Сорока С.И. Реология жидкости: Учебное пособие/ С.И. Сорока. – Луганск: Издательство ВНУ им. В. Даля, 2001. – 48 с.
 24. Теория тепломассообмена / Под ред.. А.И. Леонтьева/ – М.: Высш. шк., 1979. – 416 с.
 25. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика/ Т.Е. Фабер. М.: Постмаркет, 2001. – 560 с.
 26. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя/ Шлихтинг Г.. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
 27. Эйгенсон Л.С. Моделирование/ Эйгенсон Л.С. – М.: Наука, 1952. – 372 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
РАЗДЕЛ 1 МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД, ЕЕ ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ	6
РАЗДЕЛ 2 КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	12
РАЗДЕЛ 3 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД	53
РАЗДЕЛ 4 ГИДРОДИНАМИКА. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ	64
РАЗДЕЛ 5 ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ	91
РАЗДЕЛ 6 НЕНЬЮТОНОВСКАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА	130
РАЗДЕЛ 7 ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ	158
РАЗДЕЛ 8 ДИФфуЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ	188

РАЗДЕЛ 9	
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ	
ЗАДАЧИ	218
РАЗДЕЛ 10	
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ	244
РАЗДЕЛ 11	
ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ.....	263
ЛИТЕРАТУРА	332

У ч е б н и к

НЕДОПЕКИН Федор Викторович
КОВАЛЕНКО Алим Алексеевич
АНДРИЙЧУК Николай Данилович
ГУСЕНЦОВА Яна Алимовна
ПИЛАВОВ Манолис Васильевич

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Ответственный за выпуск Коваленко А.А.
Технический редактор Коваленко А.А.
Оригинал макет Коваленко А.А.

Подписано к печати 28.04.2019
Формат 60x84 1/16. Бумага типограф. Гарнитура Times New Roman.
Печать офсетная. Услов. печат. листов. 27,9. Изд. печат. листов 28,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 28.

Издательство
Луганского национального университета
имени Владимира Даля
91034, м. Луганск, кв. Молодежный, 20а