

№ 3-4 (64-65) / 2018

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

- Ковалев А.М., Судаков С.Н.* Динамика движения баллистических ракет дальнего действия 3
- Горр Г.В., Ткаченко Д.Н.* Исследование движения тела в потенциальном силовом поле в случае трех инвариантных соотношений 9

Механика деформируемого твердого тела

- Болнокин В.Е., Пачева М.Н., Сторожев В.И., Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг* Анализ модели плоского гидроакустического экрана с периодической системой внутренних туннельных радиально-неоднородных цилиндрических включений..... 24
- Нагорная Р.М., Цванг В.А.* Специальная функция $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ для решения задач динамики пластин и оболочек 38
- Улитин Г.М., Царенко С.Н.* Динамика продольного удара неоднородного стержня об ограничитель 43
- Чехов В.Н., Загора С.В.* Напряжённое состояние трансверсально - изотропной полой сферической оболочки с жёстким круговым включением, нагруженным изгибающим моментом..... 51
- Авраменко Л.Е.* Влияние параметров теплообмена и скорости движущегося источника тепла на распределение усилий в ортотропных оболочках 64

**Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

<i>Канин В.А.</i> Принципы локализации выбросов угля и газа на основе теории послойного разрушения угля	74
<i>Голубев Ф.М.</i> Особенности прогноза влияния деформаций земной поверхности на подземные трубопроводы при отработке и затоплении очистных выработок	81
<i>Лобков Н.И.</i> Особенности разрушения породного слоя в зоне опорного давления впереди лавы	88

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 521.1:531

©2018. А.М. Ковалев, С.Н. Судаков

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ ДАЛЬНЕГО ДЕЙСТВИЯ

Изложенная в лекциях С.П. Королева простая математическая модель движения баллистической ракеты дальнего действия использована для исследования полета ракеты "Блю Стрик".

Ключевые слова: баллистическая ракета, траектория полета, активный участок полета, пассивный участок полета.

Введение. В 1949 году на Высших инженерных курсах, организованных при МВТУ им. Баумана для подготовки инженеров различных специальностей для работы в ракетостроительной промышленности, С.П. Королевым был прочитан курс лекций [3], в котором для описания движения баллистической ракеты на активном участке полета (т.е. с работающими двигателями) была использована простая математическая модель движения ракеты, на практике вполне себя оправдывающая. По ряду причин эта модель сохраняет свою актуальность и сейчас. Во-первых, ее изучение является хорошим введением в теорию полета ракет и космонавтику. Во-вторых, за прошедшее время появилось много математических методов и вычислительных средств, позволяющих по-новому подойти к ее исследованию и решению. Учитывая сказанное, в работе авторов [2] эта модель использована для исследования полета ракеты "Блю Стрик" (Blue Streak – Лазурная полоса) на активном участке полета. Конструктивные параметры ракеты достаточно подробно изложены в литературе [4] и Интернете.

Настоящая работа является дальнейшим развитием работы [2] и посвящена исследованию полета ракеты "Блю Стрик" на всем интервале времени, начиная с момента старта и до момента приземления.

1. Уравнения движения. Задача решается в декартовой системе координат, жестко связанной с Землей. Для постановки и решения задачи делаются следующие предположения:

1. Ось ракеты все время направлена по касательной к траектории ее движения, то есть, угол атаки равен нулю. Векторы реактивной силы и вектор силы лобового сопротивления также направлены по касательной к траектории.

2. Коэффициент силы лобового сопротивления принимается постоянным.

3. Земля считается неподвижной.

4. Движение ракеты считаем происходящим в плоскости, проходящей через центр Земли. Землю считаем сферической.

5. Секундный расход топлива и силу тяги считаем постоянными во все время работы двигателей.

В плоскости движения ракеты вводим прямоугольную декартову систему координат Oxy , начало которой O находится в точке старта, ось Ox направлена по касательной к поверхности Земли, а ось Oy – по радиусу Земли в сторону от ее центра. Следуя [3], уравнения движения на активном участке полета запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \\ \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta, \\ \frac{dy}{dt} &= v \sin \theta,\end{aligned}\tag{1}$$

где v – скорость ракеты, P – тяга двигателей, X – сила лобового сопротивления, g – ускорение свободного падения, m – масса ракеты, x, y – координаты ракеты в системе координат Oxy , θ – угол между касательной к траектории и осью Ox , t – время.

Сила тяги P определяется формулой

$$P = P_0 + S_\alpha(p_0 - p),\tag{2}$$

где P_0 – сила тяги, замеренная на стенде; p_0 – атмосферное давление у поверхности Земли; p – атмосферное давление на высоте полета ракеты; S_α – коэффициент, определяемый по формуле

$$S_\alpha = \frac{P_1 - P_0}{p_0},\tag{3}$$

где P_1 – тяга двигателя в пустоте.

Сила лобового сопротивления X задается выражением

$$X = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,\tag{4}$$

где S – площадь миделя ракеты, C_x – коэффициент аэродинамического сопротивления, который считается постоянным.

Масса ракеты m определяется формулой

$$m = m_0 - \dot{m}t,\tag{5}$$

где m_0 – начальная масса ракеты, \dot{m} – секундный расход топлива, считающийся постоянным.

Движение ракеты на пассивном участке полета описываются уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= G_x - X_x = -\frac{Gm_*m_1x}{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}C_xS\rho v_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= G_y - X_y = -\frac{Gm_*m_1(R+y)}{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}C_xS\rho v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, \\ \frac{dy}{dt} &= v_y,\end{aligned}\tag{6}$$

где v_x, v_y – проекции вектора скорости ракеты на оси координат Oxy , m_* – масса ракеты после выработки топлива и окислителя, m_1 – масса Земли, G – гравитационная постоянная, R – радиус Земли.

Высота полета ракеты h над поверхностью Земли определяется формулой

$$h = \sqrt{x^2 + (R+y)^2} - R.$$

Плотность атмосферы ρ и атмосферное давление p задаются интерполяционными полиномами, которые строятся по данным ГОСТ 4401-81 "Атмосфера стандартная. Параметры"[1]. Так, плотность атмосферы ρ для высот от 0 до 20000 м интерполируется полиномом

$$\begin{aligned}\rho &= -5.20123 \cdot 10^{-22}h^5 + 2.85855 \cdot 10^{-17}h^4 - 5.90010 \cdot 10^{-13}h^3 + \\ &+ 7.96192 \cdot 10^{-9}h^2 - 0.125504 \cdot 10^{-3}h + 1.2254,\end{aligned}$$

который при $h = 0; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000$ принимает значения плотности стандартной атмосферы на высотах $h = 0; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000$ м над уровнем моря, которые равны $\rho = 1.225; 0.8194; 0.4671; 0.2279; 0.1665; 0.0889$ кг/м³ соответственно. Коэффициенты интерполяционного многочлена вычислялись с помощью пакета Maple-12.

Аналогично, для высот от 20000 до 40000 м – плотность атмосферы интерполируется полиномом

$$\begin{aligned}\rho &= -1.38346 \cdot 10^{-23}h^5 + 2.71159 \cdot 10^{-18}h^4 - 2.13711 \cdot 10^{-13}h^3 + \\ &+ 8.54286 \cdot 10^{-9}h^2 - 0.175197 \cdot 10^{-3}h + 1.49580,\end{aligned}$$

который при $h = 20000; 24000; 28000; 32000; 36000; 40000$ принимает значения $\rho = 0.0889; 0.0469; 0.0251; 0.0136; 7.26 \cdot 10^{-3}; 4 \cdot 10^{-3}$.

На высотах от 40000 до 80000 м плотность воздуха интерполируется полиномом

$$\rho = -1.354 \cdot 10^{-11}h^3 + 0.2731 \cdot 10^{-5}h^2 - 0.1830h + 4094.0,$$

который при $y = 40000, 50000, 60000, 80000$ принимает значения $\rho = 4 \cdot 10^{-3}; 1.03 \cdot 10^{-3}; 3.0 \cdot 10^{-4}; 1.85 \cdot 10^{-5}$.

На высотах от 80000 до 150000 м плотность воздуха становится достаточно малой и ее будем задавать линейной функцией

$$\rho = -0.14 \cdot 10^{-4}h + 2.1,$$

которая при $y = 80000$; 150000 принимает значения $\rho = 1.85 \cdot 10^{-5}$; $2.00 \cdot 10^{-9}$ соответственно.

Атмосферное давление p для высот от 0 до 20000 м интерполируется полиномом

$$p = -1.09020 \cdot 10^{-17}h^5 + 6.28719 \cdot 10^{-13}h^4 - 2.08013 \cdot 10^{-8}h^3 + \\ + 0.616684 \cdot 10^{-3}h^2 - 12.0886h + 1.013300 \cdot 10^5,$$

который при $y = 0$; 4000; 9000; 14000; 16000; 20000 принимает значения $p = 101330.0$; 61661.0; 30801.0; 14170.0; 10353.0; 5529.0. Здесь и ниже атмосферное давление p имеет размерность Па или, что то же самое, n/m^3 .

Для высот от 20000 до 40000 м давление p задается полиномом

$$p = -1.23698 \cdot 10^{-18}h^5 + 2.19402 \cdot 10^{-13}h^4 - 1.59036 \cdot 10^{-8}h^3 + \\ + 0.594271 \cdot 10^{-3}h^2 - 11.5809h + 95521.2,$$

который при $h = 20000$; 24000; 28000; 32000; 36000; 40000 принимает значения $p = 5529.0$; 2971.0; 1616.0; 889.0499.0; 287.0.

Для высот от 40000 до 80000 м давление p задается полиномом

$$p = -1.354 \cdot 10^{-11}h^3 + 0.2731 \cdot 10^{-5}h^2 - 0.1830h + 4094,$$

который при значениях $y = 40000$; 50000; 60000; 80000 принимает значения $p = 278.0$; 80.0; 22.0; 1.0.

Для высот от 80000 до 150000 м давление p достаточно задать линейной функцией

$$p = -0.14 \cdot 10^{-4}h + 2.1,$$

принимающей при $h = 80000$; 150000 значения $p = 1$; $4.49 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

Угол θ является заданной функцией времени t и играет роль управления. Функция $\theta = \theta(t)$ может быть задана таблично, графически или аналитически. Если $\theta(t)$ задана таблично или графически, то ее нужно интерполировать подходящей функцией. В данной работе $\theta = \theta(t)$ задается следующим образом

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_1, \tag{7}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha \sin \omega(t - t_1)) \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2,$$

где $\alpha = 0.5$, $\omega = 0.005$. То есть, на промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ ракета поднимается вертикально вверх, а при $t_1 < t < t_2$ подъем происходит по наклонной

траектории. Здесь t_2 – время работы двигателей, t_1 – время, за которое ракета поднимется по вертикали на высоту 100 м. Время t_1 вычисляется в процессе решения задачи.

Начальные условия для системы уравнений (1) - (7) следующие

$$v = 0, \quad x = 0, \quad y = 0. \quad (8)$$

Уравнения движения (1) - (7) с начальными условиями (8) полностью определяют движение ракеты на активном участке. Для решения уравнений движения использовался численный метод Рунге-Кутты.

2. Численный пример. В качестве примера рассмотрим движение ракеты Блю-Стрик [2]. Ракета имеет два маршевых двигателя с общей тягой $P = 124280.0 \cdot 9.8$ н или $1.217944 \cdot 10^6$ н. Остальные параметры имеют следующие значения:

стартовая масса всей ракеты $m_0 = 104700$ кг;

масса ракеты без топлива и окислителя $m_* = 16700$ кг;

масса горючего и окислителя 88000 кг;

время работы двигателей $t_2 = 180$ с;

секундный расход топлива и окислителя $\dot{m} = 488.8888889$ кг/с;

масса Земли $m_1 = 5973 \cdot 10^{21}$ кг;

радиус Земли $R = 6371000$ м;

гравитационная постоянная $G = 6673 \cdot 10^{-14}$ м³с⁻²кг⁻¹.

Принимая радиус миделя ракеты равным 1.3 м находим $S = 1.69\pi$ м².

Система (1) - (7) с начальными условиями (8) решалась для $C_x = 0.1$.

Высота полета над поверхностью Земли определялась по формуле

$$h = \sqrt{x^2 + (R + y)^2} - R.$$

Скорость ракеты на пассивном участке полета выражается через v_x и v_y следующим образом:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Результаты расчетов представлены в таблице.

Расстояние вдоль поверхности Земли от точки старта до точки приземления дается соотношением

$$l = R \arcsin(x_*/R),$$

где x_* – значение координаты x в точке приземления. Проводя вычисления, находим $l = 1532345.5$ м.

Заключение. Результаты расчета, представленные в таблице, показывают, что при заданном управлении (7) и, входящими в него параметрами $\alpha = 0.5$, $\omega = 0.005$, ракета "Блю Стрик" преодолевает расстояние 1532 км за 17 мин., или, более точно, 1015 с. При этом она достигает высоты 745.8 км. Максимальная скорость полета достигается при приземлении и составляет 4048.6270 м/с.

Таблица. Координаты, высота и скорость полета ракеты

t (с)	x (м)	y (м)	h (м)	v (м/с)
0	0	0	0	0
10	0	100.9056	100.9051	21.1306
92.9818	4569.8638	20000.0261	20001.659	652.3111
117.6046	12184.6454	40000.0155	40011.596	1115.4357
147.1554	31763.7926	79999.9768	80078.177	1969.6759
177.7608	74308.7427	149999.8329	150423.204	3575.4918
180	76702.3258	153567.5797	154018.4180	3672.5014
280	278276.4204	414442.2290	420146.001	2949.5367
380	476341.0573	588750.5610	605032.445	2364.0617
480	668824.9783	681182.0772	712826.572	1962.1256
580	853806.5959	694399.7068	745801.158	1824.4282
680	1029330.7242	629359.6948	704631.251	1995.0632
780	1193241.1833	485415.5931	588472.631	2420.8869
880	1342988.8229	260235.6850	394863.263	3022.9791
970.3	1463395.3833	-16436.0554	149890.198	3683.0166
992.1735	1490104.8004	-94457.6884	79999.589	3858.6274
1004.1276	1504257.8757	-138975.7611	39999.757	3957.2484
1009.9642	1511048.2258	-161200.2131	19999.932	4005.7758
1015.70944	1517613.9863	-183392.2383	0.081	4048.6270

Принятые значения коэффициента аэродинамического сопротивления $C_x = 0.1$ и радиуса мишени ракеты 1.3 м не являются достоверными и могут значительно отличаться от истинных, что вносит соответствующие погрешности в проводимые расчеты.

1. Атмосфера стандартная // Большая советская энциклопедия.– В 30 томах.– Том 2.– С. 385.
2. Ковалев А.М. К вопросам динамики баллистических ракет дальнего действия / А.М. Ковалев, С.Н. Судаков // Механика твердого тела. – 2018.– Вып. 48.– С. 65–70.
3. Королев С.П. Основы проектирования баллистических ракет дальнего действия / Творческое наследие академика Сергея Павловича Королева. – М.: Наука, 1980.– С. 208–290.
4. Фертрегт М. Основы космонавтики / М. Фертрегт. – М.: Просвещение, 1969.– 304 с.

A.M. Kovalev, S.N. Sudakov

The dynamics of motion of ballistic rockets for long-range action.

The motion of the rocket Blue Streak on active and passive parts of flight investigated by the simple mathematical model presented in the lectures of S.P. Korolev.

Keywords: *ballistic rocket, trajectory of flight, active part of flight.*

УДК 53.38; 53.39

©2018. Г.В. Горр, Д.Н. Ткаченко

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ В СЛУЧАЕ ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрена задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потенциальном силовом поле. Указан новый случай трех нелинейных инвариантных соотношений уравнений движения. На основании комплексного подхода в истолковании движения тела исследованы свойства углов Эйлера, параметров Родрига–Гамильтона, годографов угловой скорости в методе Пуансо.

Ключевые слова: потенциальное поле сил, углы Эйлера, параметры Родрига–Гамильтона, метод Пуансо.

Введение. Наиболее общие подходы в исследовании уравнений движения твердого тела в потенциальном поле сил предложены Д.Н. Горячевым [1, 2]. Анализ результатов, полученных в этой задаче отражен в монографии А.В. Борисова и И.С. Мамаева [3]. Поскольку уравнения движения тела в потенциальном поле сил являются обобщениями классических уравнений динамики твердого тела (в частности, уравнений Эйлера–Пуассона и уравнений Кирхгофа–Пуассона), то проблемы интегрирования уравнений движения остаются прежними. То есть, в силу выводов С.Л. Зиглина [4], В.В. Козлова и Д.А. Онищенко [5], уравнения движения тела в потенциальном поле сил в общем случае неинтегрируемы в квадратурах. Хотя в отдельных случаях (см., например, статьи Д.Н. Горячева [1] и Х.М. Яхьи [6, 7]) можно найти дополнительный интеграл, что теоретически позволяет выполнить интегрирование уравнений в квадратурах.

Описывая состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела, П.В. Харламов [8] отмечал, что в силу неинтегрируемости в общем случае уравнений в этих задачах, актуальным становится исследование частных решений уравнений движения. Для этой цели в динамике твердого тела разработан метод инвариантных соотношений (ИС) [9, 10] особенности которых изучены в [11]. К настоящему времени построены многочисленные частные решения в классических и обобщенных задачах динамики (см. обзоры [12, 13, 14]). Это позволило с помощью теоремы Л. Пуансо [15] и уравнений П.В. Харламова [16] получить наглядное представление о свойствах движения твердого тела и гиростата. В статье [17] предложен модифицированный метод Пуансо, в основе которого лежит кинематическое представление движения тела с помощью вектора, коллинеарного вектору угловой скорости.

В данной статье построен новый класс решений уравнений движения тела в потенциальном поле сил, характеризующийся тремя нелинейными ИС. С помощью метода решения обратных задач динамики найдена силовая функция

и условия на главные моменты инерции, которые зависят от натурального показателя степени заданных ИС. Интересно отметить, что из этих условий при фиксированном значении показателя следует либо условие С.В. Ковалевской, либо условие Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина, а при произвольном натуральном значении они являются новыми.

Для исследуемых ИС задача интегрирования уравнений движения сведена к квадратурам. На основе найденного решения определены углы Эйлера, параметры Родрига–Гамильтона, подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости. Полученные результаты могут найти применение в приложениях механики твердого тела [18, 19].

1. Постановка задачи. Построение решения. Рассмотрим уравнения движения твердого тела в потенциальном поле сил:

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + \nu_3 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} - \nu_2 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3}, \quad (1)$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + \nu_1 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} - \nu_3 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1}, \quad (2)$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + \nu_2 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} - \nu_1 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2}, \quad (3)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2 \nu_1 - \omega_1 \nu_2. \quad (4)$$

Первые интегралы уравнений (1)–(4) таковы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1,$$

$$A_1 \omega_1 \nu_1 + A_2 \omega_2 \nu_2 + A_3 \omega_3 \nu_3 = k, \quad (5)$$

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E,$$

где k и E – произвольные постоянные. В формулах (1)–(5) введены обозначения: ω_i ($i = \overline{1, 3}$) – компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела, имеющего неподвижную точку; ν_i ($i = \overline{1, 3}$) – компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ оси симметрии силового поля; A_i ($i = \overline{1, 3}$) – главные моменты инерции тела; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – силовая функция.

Следуя статье [20], для уравнений (1)–(4) зададим три ИС

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \nu_3^{n-1} \left(-\frac{\mu_1 n}{n+2} \nu_1 + \beta_1 \mu_2 \right), \\ \omega_2 &= \nu_3^{n-1} \left(-\frac{\mu_1 n}{n+2} \nu_2 + \beta_2 \mu_2 \right), \\ \omega_3 &= \mu_1 \nu_3^n, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2$ – постоянные параметры, n – натуральное число или нуль. Поставим **обратную** задачу механики: найти условия существования ИС (6) системы (1)–(4). Для этой цели с помощью третьего соотношения системы (5) построим функцию $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. В силу (6) получим следующее выражение для силовой функции

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{2} \left\{ A_3(n+2) \nu_3^{2(n-1)} \left[\frac{n^2}{(n+2)^2} \mu_1^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2n}{n+2} \mu_1 \mu_2 (\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2) + \chi_0^2 \mu_2^2 \right] + A_3 \mu_1^2 \nu_3^{2n} \right\} - E. \quad (7)$$

Если в (7) $n = 0$, то силовая функция содержит сингулярные члены. Аналогичные случаи имели место и в работах [1, 7]. Физическую интерпретацию потенциальной функции с сингулярными членами в квантовой механике изучали И.В. Комаров и В.Б. Кузнецов [21, 22].

Подставим ω_i ($i = \overline{1, 3}$) из (6) в уравнения Пуассона из (4):

$$\dot{\nu}_1 = \nu_3^n \left(\frac{2(n+1)}{n+2} \mu_1 \nu_2 - \beta_2 \mu_2 \right), \\ \dot{\nu}_2 = \nu_3^n \left(-\frac{2(n+1)}{n+2} \mu_1 \nu_1 + \beta_1 \mu_2 \right), \\ \dot{\nu}_3 = \mu_2 \nu_3^{n-1} (\beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2). \quad (8)$$

Путем несложных вычислений можно показать, что уравнения (8) допускают ИС

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ \beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2(n+2)} [n - (n+1)\nu_3^2]. \quad (9)$$

Интеграл момента количества движения из системы (5) на ИС (6), (9) будет тождеством при выполнении равенств

$$A_2 = A_1 = A_3(n+2). \quad (10)$$

Интерес условий (10) состоит в том, что при $n = 0$ они являются условиями С.В. Ковалевской, при $n = 2$ – условиями Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина, а при произвольном натуральном n они описывают новый класс гироскопов.

Примем в качестве независимой переменной третью компоненту вектора $\boldsymbol{\nu}$. Из равенств (9) определим $\nu_1(\nu_3)$, $\nu_2(\nu_3)$:

$$\nu_1(\nu_3) = \frac{1}{\mu_2 \chi_0^2 (n+2)} [\mu_1 \beta_1 (n - (n+1)\nu_3^2) - \beta_2 \sqrt{F(\nu_3)}], \\ \nu_2(\nu_3) = \frac{1}{\mu_2 \chi_0^2 (n+2)} [\mu_1 \beta_2 (n - (n+1)\nu_3^2) + \beta_1 \sqrt{F(\nu_3)}]. \quad (11)$$

Здесь $\chi_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$ и

$$\begin{aligned} F(\nu_3) &= -\varepsilon_2^2 \nu_3^4 + \varepsilon_1 \nu_3^2 + \varepsilon_0, \\ \varepsilon_2 &= \mu_1(n+1), \quad \varepsilon_1 = 2\mu_1^2 n(n+1) - \chi_0^2 \mu_2^2 (n+2)^2, \\ \varepsilon_0 &= \chi_0^2 \mu_2^2 (n+2)^2 - n^2 \mu_1^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Если в уравнения (1)–(3) подставить величины (6) и воспользоваться уравнениями (8), инвариантными соотношениями (9), то при $k = 0$ получим тождества по переменной ν_3 . Для получения зависимостей $\nu_i(t)$ ($i = \overline{1, 3}$) обратимся к третьему уравнению системы (8). В силу очевидного тождества

$$(\beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2)^2 + (\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2)^2 = \chi_0^2 (1 - \nu_3^2)$$

и второго соотношения из (9) найдем

$$\beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2 = -\frac{1}{\mu_2(n+2)} \sqrt{F(\nu_3)}. \quad (13)$$

Подставим значение (13) в третье уравнение системы (8). Тогда получим, что функция $\nu_3(t)$ определяется путем обращения интеграла

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\nu_3^{n-1} \sqrt{F(\nu_3)}} = \frac{1}{n+2} (t - t_0), \quad (14)$$

где t_0 – начальное значение t , а $\nu_3^{(0)}$ – постоянная. Для получения функций $\omega_i(t)$ ($i = \overline{1, 3}$), необходимо в формулах (6) учесть $\nu_3(t)$. Таким образом, решение уравнений (1)–(4) построено, оно имеет место при наличии условий (10).

2. Исследование интеграла (14).

2.1. Случай $\varepsilon_0 = 0$ Положим в (14) $\varepsilon_0 = 0$. Тогда, в силу равенств (12), $\chi_0^2 \mu_2^2 (n+2)^2 - n^2 \mu_1^2 = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\nu_3^n \sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}} &= -\frac{\mu_1(n+1)}{n+2} (t - t_0), \\ \lambda_0^2 &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

то есть переменная $\nu_3 \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, где $\nu_3 \neq 0$.

Для того, чтобы интеграл из (15) вычислялся в элементарных функциях от ν_3 , положим $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Тогда из (15) найдем

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3^2}{(\nu_3^2)^{k+1} \sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}} = -\frac{4\mu_1(k+1)}{2k+3} (t - t_0). \quad (16)$$

С помощью замены $\lambda_0^2 - \nu_3^2 = z^2$ равенство (16) приведем к виду

$$\int_{z(0)}^z \frac{dz}{(\lambda_0^2 - z^2)^{k+1}} = \frac{2\mu_1(k+1)}{2k+3}(t-t_0). \quad (17)$$

Интеграл в левой части (17) вычисляется в элементарных функциях. Приведем результат для случая $k = 0$ ($n = 1$). Используя вышеприведенную замену, получим

$$\nu_3^2 = \frac{3e^w}{(e^w + 1)^2}, \quad w = \frac{2\mu_1(t-t_0)}{\sqrt{3}}. \quad (18)$$

Согласно соотношениям (18), начальное значение ν_3 принято равным $\frac{\sqrt{3}}{2}$. При $t \rightarrow \infty$ переменная $\nu_3 \rightarrow 0$, то есть решение (6) при $n = 1$ характеризуется тремя линейными ИС:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\mu_1}{3}\nu_1 + \beta_1\mu_2, \\ \omega_2 &= -\frac{\mu_1}{3}\nu_2 + \beta_2\mu_2, \\ \omega_3 &= \mu_1\nu_3 \end{aligned} \quad (19)$$

и описывает в силу (11), (19) асимптотическое к покою движение тела. Распределение масс этого тела удовлетворяет условиям

$$A_2 = A_1 = 3A_3.$$

Несмотря на то, что интеграл в левой части равенства (17) в общем случае представляется в достаточно сложной форме, характер движения тела описывается достаточно просто. Действительно, при $z \rightarrow \lambda_0$ ($\nu_3 \rightarrow 0$) интеграл в (17) расходится. На основании соотношений (6), (11) приходим к выводу о том, что при $t \rightarrow \infty$ ($\nu_3 \rightarrow 0$) тело асимптотически стремится к состоянию покоя.

Приведем результат исследования интеграла (17) в случае $k = 1$ ($n = 4$):

$$\ln \frac{\lambda_0 + z}{\lambda_0 - z} + \frac{2z}{\lambda_0^2 - z^2} = -\frac{16\lambda_0^2(t-t_0)}{5}.$$

Найти $z(t)$ из этого уравнения в элементарных функциях нельзя.

2.2. Случай $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}$). Рассмотрим уравнение $F(\nu_3) = 0$. В силу (12) имеем

$$\varepsilon_2^2\nu_3^4 - \varepsilon_1\nu_3^2 - \varepsilon_0 = 0. \quad (20)$$

Вычислим дискриминант уравнения (20)

$$D = \chi_0^2\mu_2^2(n+2)^2[4\mu_1^2(n+1) + \chi_0^2\mu_2^2(n+2)^2]. \quad (21)$$

Из условия (21) следует, что уравнение (20) по ν_3^2 имеет действительные корни. Будем отдельно рассматривать случаи

$$1. n^2\mu_1^2 < \chi_0^2\mu_2^2(n+2)^2 : \quad F(\nu_3) = -\varepsilon_2^2(\nu_3^2 - \beta_1^2)(\nu_3^2 + \alpha_1^2), \quad (22)$$

$$2. n^2 \mu_1^2 \geq \chi_0^2 \mu_2^2 (n+2)^2 : \quad F(\nu_3) = -\varepsilon_2^2 (\nu_3^2 - \beta_2^2) (\nu_3^2 - \alpha_2^2). \quad (23)$$

В формулах (22), (23) через β_1^2 и β_2^2, α_2^2 обозначены действительные корни уравнения (20) по ν_3^2 . В случае (22) переменная ν_3 изменяется на отрезке $[-\beta_1, \beta_1]$ ($\beta_1 > 0$); в случае (23) переменная ν_3 изменяется на двух отрезках, из которых будем рассматривать $[\alpha_2, \beta_2]$ ($\alpha_2 \geq 0, \beta_2 > 0$).

Запишем интегральное соотношение (14) при $n = 2k$ и $F(\nu_3)$ из (23):

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3^2}{(\nu_3^2)^k \sqrt{(\beta_2^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 - \alpha_2^2)}} = -\frac{\mu_1(2k+1)}{2(k+1)}(t-t_0). \quad (24)$$

Выполним замену переменных

$$\nu_3^2 = \frac{1}{2}[\alpha_2^2 + \beta_2^2 + (\alpha_2^2 - \beta_2^2) \sin \varphi]. \quad (25)$$

В силу (25) из (24) имеем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{[\alpha_2^2 + \beta_2^2 + (\alpha_2^2 - \beta_2^2) \sin \varphi]^k} = \frac{\mu_1(2k+1)}{(k+1)2^k}(t-t_0). \quad (26)$$

Из соотношения (24) при $\alpha_2 \neq 0$ следует, что ν_3 периодически изменяется на отрезке $[\alpha_2, \beta_2]$. Поэтому в качестве начального значения примем величину $\varphi = 0$ ($(\nu_3^2)_0 = (\alpha_2^2 + \beta_2^2)/2$). Запишем результат интегрирования при $k = 1$ ($n = 2$):

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \operatorname{tg} \tau}{2\alpha_2\beta_2 + (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \operatorname{tg} \tau}, \quad \tau = \frac{3\mu_1\alpha_2\beta_2}{4}(t-t_0). \quad (27)$$

Для получения зависимости $\nu_3(t)$ необходимо подставить в (25) $\varphi(t)$ из (27). Дальнейшее построение решения получим с помощью формул (6), (11). Из (6), (11), (25), (27) следует, что данное решение является периодическим. В силу (10) и принятого условия $k = 1$ распределение масс в теле удовлетворяет условиям Горячева–Чаплыгина. При $k > 1$ решение тоже периодическое, что следует из формул (6), (11), (26).

Формула (27) при $\alpha_2 = 0$ ($\varepsilon_0 = 0$) теряет смысл. Однако в этом случае можно использовать формулу (26). Полагая, что при $t = t_0$ переменная $\varphi = 0$, из (26) найдем

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{w(t)}{2 + w(t)}, \quad w(t) = \frac{3\mu_1\beta_2^2}{8}(t-t_0). \quad (28)$$

Из формулы (28) при $t \rightarrow \infty$ следует, что $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, то есть переменная $\nu_3 \rightarrow 0$ (см. формулу (25)). Движение тела носит асимптотический характер: при $t \rightarrow \infty$ $\omega_i \rightarrow 0$ ($i = \overline{1, 3}$). Аналогичное свойство имеет место и при $k \in N$ ($k \neq 1$).

Рассмотрим случай (22). Положим $k = 1$ ($n = 2$). Тогда из формулы (14) получим

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3^2}{\nu_3^2 \sqrt{(\beta_1^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 + \alpha_1^2)}} = -\frac{3\mu_1}{2}(t - t_0). \quad (29)$$

Переменная $\nu_3 \in [-\beta_1, \beta_1]$ (полагаем $\beta_1 > 0$). Выполним замену переменных:

$$\sqrt{(\beta_1^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 + \alpha_1^2)} = z(\nu_3^2 + \alpha_1^2). \quad (30)$$

Из равенства (30) следует

$$\nu_3^2 = \frac{\beta_1^2 - \alpha_1^2 z^2}{1 + z^2}. \quad (31)$$

В силу (30) новая переменная $z \in [0, \frac{\beta_1}{\alpha_1}]$. Начальное значение z выберем так: $z(0) = 0$. Тогда начальное значение ν_3 можно считать равным β_1 . Подставляя функцию (31) в левую часть формулы (29) и выполняя интегрирование, получим

$$z(t) = \frac{\beta_1(1 - e^{\varepsilon(t)})}{\alpha_1(1 + e^{\varepsilon(t)})}, \quad \varepsilon(t) = -\frac{3\mu_1\alpha_1\beta_1}{2}(t - t_0). \quad (32)$$

Свойства функции $z(t)$ из (32) очевидны: $z(0) = 0$, при $t \rightarrow \infty$ $z \rightarrow \frac{\beta_1}{\alpha_1}$. Функция $\nu_3(t)$ имеет также асимптотический характер: при $t \rightarrow \infty$ $\nu_3(t) \rightarrow 0$. Так как при $n = 2$ соотношения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \nu_3 \left(-\frac{\mu_1}{2} \nu_1 + \beta_1 \mu_2 \right), \\ \omega_2 &= \nu_3 \left(-\frac{\mu_1}{2} \nu_2 + \beta_2 \mu_2 \right), \\ \omega_3 &= \mu_1 \nu_3^2, \end{aligned} \quad (33)$$

то ω_i ($i = \overline{1, 3}$) являются ИС второго порядка. Если $t \rightarrow \infty$, то из (11), (32), (33) следует, что $\omega_i(t) \rightarrow 0$. Это означает, что движение тела обладает свойством асимптотичности к состоянию покоя. Следует отметить, что в силу (10) и $n = 2$ твердое тело представляет собой гироскоп Горячева–Чаплыгина. Таким образом, в этом случае имеем два варианта движения тела (см. п. 2.2).

2.3. Случай $\varepsilon_0 \neq 0$ $n = 1$. Пусть в формуле (14) $n = 1$. Тогда

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{F(\nu_3)}} = -\frac{1}{3}(t - t_0). \quad (34)$$

Интеграл (34) будем рассматривать в двух случаях

$$1. \mu_1^2 < 9\chi_0^2\mu_2^2 : \quad F(\nu_3) = 4\mu_1^2(\beta_1^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 + \alpha_1^2), \quad (35)$$

$$2. \mu_1^2 > 9\chi_0^2\mu_2^2 : \quad F(\nu_3) = 4\mu_1^2(\beta_2^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 - \alpha_2^2), \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_2^2 = \beta_1^2 &= \frac{1}{4\mu_1^2} \left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_0\varepsilon_2^2} \right), \\ \alpha_2^2 &= \frac{1}{4\mu_1^2} \left(\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_0\varepsilon_2^2} \right), \\ \alpha_1^2 &= \frac{1}{4\mu_1^2} \left(\sqrt{\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_0\varepsilon_2^2} - \varepsilon_1 \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь в силу (12) и $n = 1$:

$$\varepsilon_2 = 2\mu_1, \quad \varepsilon_1 = 4\mu_1^2 - 9\chi_0^2\mu_2^2, \quad \varepsilon_0 = 9\chi_0^2\mu_2^2 - \mu_1^2.$$

Применяя формулы (35), (36) из (14) получим два варианта:

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{(\beta_1^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 + \alpha_1^2)}} = -\frac{2\mu_1}{3}(t - t_0), \quad (38)$$

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{(\beta_2^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 - \alpha_2^2)}} = -\frac{2\mu_1}{3}(t - t_0). \quad (39)$$

Используя известный метод исследования интегралов Лежандра (38), (39), найдем в случае (38):

$$\begin{aligned} \nu_3(t) &= \beta_1 \operatorname{cn}(k_*, \tau_1), \\ k_* &= \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \\ \tau_1 &= \frac{2\mu_1 \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{3}(t - t_0); \end{aligned} \quad (40)$$

в случае (39):

$$\begin{aligned} \nu_3(t) &= \beta_2 \operatorname{dn}(k^*, \tau_2), \\ k^* &= \frac{\sqrt{\beta_2^2 - \alpha_2^2}}{\beta_2}, \\ \tau_2 &= \frac{2\mu_1 \beta_2}{3}(t - t_0), \end{aligned} \quad (41)$$

где полагаем $\mu_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. Таким образом, зависимости $\nu_3(t)$ определяются соотношениями (40), (41), где $\operatorname{cn}(k_*, \tau_1)$, $\operatorname{dn}(k^*, \tau_2)$ – эллиптические функции

Якоби, имеющие периодический характер. В случае (40) период функции $\nu_3(t)$ равен

$$T_1 = \frac{6K_1}{\mu_1 \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}, \quad K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 x}}, \quad (42)$$

а в случае (41) период функции $\nu_3(t)$ равен

$$T_2 = \frac{3K_2}{\mu_1 \beta_2}, \quad K_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - (k^*)^2 \sin^2 x}}. \quad (43)$$

В случае $n = 1$ соотношения (6) имеют вид (19), где на основании формул (11) функции $\nu_1(\nu_3)$ и $\nu_2(\nu_3)$ равны значениям

$$\nu_1(\nu_3) = \frac{1}{3\mu_2 \chi_0^2} [\mu_1 \beta_1 (1 - 2\nu_3^2) - \beta_2 \sqrt{F(\nu_3)}], \quad (44)$$

$$\nu_2(\nu_3) = \frac{1}{3\mu_2 \chi_0^2} [\mu_1 \beta_2 (1 - 2\nu_3^2) + \beta_1 \sqrt{F(\nu_3)}]. \quad (45)$$

В равенствах (44), (45) функция $F(\nu_3)$ может принимать значения из (35), (36), которые влияют на структуру функций (44), (45). Запишем их соответственно для вариантов (40), (41):

$$\sqrt{F(\nu_3)} = 2\mu_1 \beta_1 \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \operatorname{sn}(k_*, \tau_1) \operatorname{dn}(k_*, \tau_1), \quad (46)$$

$$\sqrt{F(\nu_3)} = 2\mu_1 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \operatorname{sn}(k^*, \tau_2) \operatorname{cn}(k^*, \tau_2). \quad (47)$$

Функции $\omega_i(t)$ найдем из (19) с учетом вариантов (40), (41) и выражений (46), (47). Таким образом, решение (19), (44), (45) в случае (40), (46) имеет период T_1 , в случае (41), (47) оно имеет период $2T_2$, где значения T_1 , T_2 указаны в формулах (42), (43). Решения с линейными ИС в динамике твердого тела рассматривались С.А. Чаплыгиным, П.В. Харламовым, Х. Яхьей (см. обзоры [13, 14]). Однако случай $n = 1$ ($A_2 = A_1 = 3A_3$) ими не изучался.

3. Углы Эйлера. Параметры Родрига–Гамильтона. Для нахождения углов Эйлера используем известные формулы (см., например, [23]), записанные в векторном виде:

$$\theta = \arccos(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2}, \quad (48)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)^2},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t)$ ($i = \overline{1,3}$) – единичные векторы подвижной системы координат. Используя соотношения (6), (11), (12) и переход к дифференцированию в третьей

формуле из (48) по независимой переменной ν_3 с помощью (14), из (48) получим

$$\begin{aligned} \theta(\nu_3) &= \arccos \nu_3, & \varphi(\nu_3) &= \arctg \frac{\mu_1 \beta_1 [n - (n+1)\nu_3^2] - \beta_2 \sqrt{F(\nu_3)}}{\mu_1 \beta_2 [n - (n+1)\nu_3^2] + \beta_1 \sqrt{F(\nu_3)}}, \\ \psi(\nu_3) &= \mu_1 \int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{\nu_3^2 d\nu_3}{(1 - \nu_3^2) \sqrt{F(\nu_3)}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Выпишем параметры Родрига–Гамильтона [23] как функции ν_3 :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_0(\nu_3) &= \cos \frac{\theta(\nu_3)}{2} \cos \frac{\psi(\nu_3) + \varphi(\nu_3)}{2}, \\ \tilde{\lambda}_1(\nu_3) &= \sin \frac{\theta(\nu_3)}{2} \cos \frac{\psi(\nu_3) - \varphi(\nu_3)}{2}, \\ \tilde{\lambda}_2(\nu_3) &= \sin \frac{\theta(\nu_3)}{2} \sin \frac{\psi(\nu_3) - \varphi(\nu_3)}{2}, \\ \tilde{\lambda}_3(\nu_3) &= \cos \frac{\theta(\nu_3)}{2} \sin \frac{\psi(\nu_3) + \varphi(\nu_3)}{2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Интерес формулы для функции $\psi(\nu_3)$ из (49) состоит в том, что при $\varepsilon_0 = 0$ можно указать явный вид этой функции

$$\psi(\nu_3) = -\arctg \sqrt{n(n+2) - (n+1)^2 \nu_3^2} + \psi_0, \quad (51)$$

где ψ_0 – постоянная, $n \in N$. Важно, что данный результат имеет место при $\varepsilon_0 = 0$ для произвольных натуральных значений n . Исследование интеграла (14) выполнено для нечетных n . В частности, для $n = 1$ получены соотношения (18). Подставим значение ν_3^2 из (18) в формулу (51)

$$\psi(t) = -\arctg \frac{\sqrt{3}(e^w - 1)}{2(e^w + 1)} + \psi_0, \quad (52)$$

где w указано в (18). При $t \rightarrow \infty$ угол прецессии (52) стремится к значению

$$\psi_0 = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (53)$$

то есть (53) показывает предельное значение $\psi(\nu_3)$. Для получения зависимостей углов θ и φ , а также параметров Родрига–Гамильтона от ν_3 необходимо ν_3^2 из формулы (18) подставить в соотношения (49), (50).

Рассмотрим интеграл из (49) при $\varepsilon_0 \neq 0$, $n = 1$. Так как в случае (40) имеет место формула (46), то для функции $\psi(\nu_3(\tau_1))$ из (49) получим

$$\psi(\tau_1) = -\frac{\beta_1 k_*}{2} \int_0^{\tau_1} \frac{\text{cn}^2(k_*, \tau_1) \cdot d\tau_1}{1 - \beta_1^2 \text{cn}^2(k_*, \tau_1)}. \quad (54)$$

По аналогии с (54) в случае (41) имеем

$$\psi(\tau_1) = -\frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} \frac{\operatorname{dn}^2(k^*, \tau_2) \cdot d\tau_2}{1 - \beta_2^2 \operatorname{dn}^2(k^*, \tau_2)}. \quad (55)$$

В данных вариантах для получения свойств углов Эйлера θ , φ и параметров Родрига–Гамильтона необходимо воспользоваться соотношениями (40), (41), (46), (47), (54), (55).

В случае $\varepsilon_0 \neq 0$ интеграл из (49) не представляется в виде элементарных функций переменной ν_3 , следовательно, и переменной t . Например, когда $n = 2$ имеем два варианта представления переменной ν_3 : первый вариант описывается соотношениями (25), (27), второй вариант – (31), (32). Функция $\psi(\nu_3)$ в первом из них такова

$$\psi(\nu_3) = -\frac{1}{3} \int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{\nu_3^2 d\nu_3}{(1 - \nu_3^2) \sqrt{(\beta_2^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 - \alpha_2^2)}},$$

где $\nu_3(t)$ в силу (25), (27) имеет периодический характер. Следовательно, функция $\psi(t) = b_0 t + x(t)$, где b_0 – ее среднее значение, $x(t)$ – периодическая функция t . То есть функция $\psi(t)$ имеет условно периодический характер. Для варианта (31), (32) получим следующее представление

$$\psi(\nu_3) = -\frac{1}{3} \int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{\nu_3^2 d\nu_3^2}{(1 - \nu_3^2) \sqrt{(\beta_1^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 + \alpha_1^2)}}.$$

В силу соотношений (31), (32) при $t \rightarrow \infty$ данная функция стремится к конечному пределу.

4. Уравнения неподвижного годографа угловой скорости.

Для применения теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела, имеющего неподвижную точку, используются уравнения неподвижного годографа, указанные П.В. Харламовым [16]. Данные уравнения получены в цилиндрической системе координат (ρ, ζ, α) . Если динамические уравнения (1)–(3) и уравнения Пуассона (4) проинтегрированы, то есть получены функции

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1(t) \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \omega_2(t) \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \omega_3(t) \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (56)$$

$$\boldsymbol{\nu} = \nu_1(t) \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \nu_2(t) \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \nu_3(t) \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (57)$$

то для компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной системе координат с единичными

векторами $\dot{\mathbf{i}}_1, \dot{\mathbf{i}}_2, \dot{\mathbf{i}}_3 = \boldsymbol{\nu}$ имеют место уравнения [16]:

$$\begin{aligned}\omega_\zeta(t) &= \omega_\rho(t) \cos \alpha(t), & \omega_\eta(t) &= \omega_\rho(t) \sin \alpha(t), & \omega_\zeta(t) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \nu_i(t), \\ \omega_\rho^2(t) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i^2(t) - \omega_\zeta^2(t), \\ \alpha(t) &= \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)} [\dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau))] d\tau.\end{aligned}\tag{58}$$

В статье [17] доказана более простая формула для полярного угла:

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \frac{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t)) \cdot (\boldsymbol{\nu}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t))},\tag{59}$$

поскольку с учетом формулы для $\frac{d\psi}{dt}$ из (48) из равенства (59) получим

$$\alpha(t) = \alpha_0^* + \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)^2} d\tau + \operatorname{arctg} \frac{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t)) \cdot (\boldsymbol{\nu}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t))}.\tag{60}$$

Следовательно, в отличие от $\alpha(t)$ из (58), выражения для $\alpha(t)$ из (60) не содержат производной $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

Найдем уравнения неподвижного годографа для решения (6), (11). В качестве вспомогательной функции опять примем ν_3 . Подставим значения (6), (11) в формулы для $\omega_\zeta, \omega_\rho^2$ из (58) и в формулу (60):

$$\omega_\zeta(\nu_3) = \frac{\mu_1(n+1)\nu_3^{n+1}}{n+2},\tag{61}$$

$$\omega_\rho^2(\nu_3) = \frac{\nu_3^{2(n-1)}}{(n+2)^2} [-\mu_1^2(n+1)^2\nu_3^4 + 2\mu_1^2(n+1)(n+2)\nu_3^2 + \varepsilon_0],\tag{62}$$

$$\alpha(\nu_3) = \mu_1 \int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{\nu_3^2 d\nu_3}{(1-\nu_3^2)\sqrt{F(\nu_3)}} + \operatorname{arctg} \frac{\mu_1\nu_3[(n+1)\nu_3^2 - (n+2)]}{\sqrt{F(\nu_3)}} + \alpha_0.\tag{63}$$

В дальнейшем будет использована формула

$$\alpha(\nu_3) = -\mu_1 \int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{G(\nu_3) d\nu_3}{H(\nu_3)\sqrt{F(\nu_3)}},\tag{64}$$

$$\begin{aligned}G(\nu_3) &= -\mu_1^2(n+2)(n+1)^2\nu_3^4 - 2(n+1)\varepsilon_0\nu_3^2 + (n+2)\varepsilon_0, \\ H(\nu_3) &= -\mu_1^2(n+1)^2\nu_3^4 + 2\mu_1^2(n+1)(n+2)\nu_3^2 + \varepsilon_0.\end{aligned}\tag{65}$$

Интеграл (64) получен из формулы П.В. Харламова (последняя формула из системы (58)). Для получения зависимости компонент неподвижного годографа от времени необходимо рассматривать интегральное соотношение (14). Отметим, что формула (63) значительно проще формулы (64).

В случае $\varepsilon_0 = 0$ из (63) получим

$$\alpha(\nu_3) = \operatorname{arctg} \frac{(n+2)}{\sqrt{n(n+2) - (n+1)^2\nu_3^2}} + \alpha_0. \quad (66)$$

Это же значение для $\alpha(\nu_3)$ следует и из (64), (65), однако после трудоемких вычислений интеграла (64), что показывает преимущество использования формул (60). Переменная ν_3 изменяется на отрезке:

$$\nu_3 \in \left[-\frac{n(n+2)}{n+1}, \frac{n(n+2)}{n+1} \right]. \quad (67)$$

Ранее (п. 2) наиболее полное исследование зависимости ν_3 из (15) проведено для случая $n = 2k + 1$. Например, при $k = 0$ имеют место формулы (18). В общем варианте, который характеризуется нечетными n , показан асимптотический характер изменения $\nu_3(t)$: при $t \rightarrow \infty$ $\nu_3 \rightarrow 0$.

Запишем функции (61), (62) при $\varepsilon_0 = 0$, $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned} \omega_\zeta(\nu_3) &= \frac{2\mu_1(k+1)}{2k+3} \nu_3^{2(k+1)}, \\ \omega_\rho^2(\nu_3) &= \frac{4\mu_1^2(k+1)}{(2k+3)^2} [2k+3 - (k+1)\nu_3^2] \nu_3^{2k(2k+1)}. \end{aligned} \quad (68)$$

Из формул (68) следует, что проекция неподвижного годографа угловой скорости на горизонтальную плоскость является кривой, заключенной в окружности.

Принимая в качестве начального значения ν_3 величину $\frac{\sqrt{(2k+1)(2k+3)}}{2(k+1)}$, получим, что, так как при $t \rightarrow \infty$ $\nu_3 \rightarrow 0$, то при $t \rightarrow \infty$ и $\omega_\rho \rightarrow 0$. Функция $\omega_\zeta(\nu_3)$ при $\nu_3 \rightarrow 0$ также стремится к нулевому значению. Функция $\alpha(\nu_3)$ при $\nu_3 \rightarrow 0$ стремится к значению:

$$\alpha_0 + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2k+3}{2k+1}}.$$

Таким образом, в случае $\varepsilon_0 = 0$ движение тела носит асимптотический характер: при $t \rightarrow \infty$ оно стремится к состоянию покоя. При этом проекция неподвижного годографа не является спиралевидной кривой.

Если $n = 1$ и $\varepsilon_0 \neq 0$, то в силу (40), (41) функции описываются периодическими (эллиптическими) функциями t . На основании соотношений (61)–(63) приходим к выводу о том, что движение тела, согласно [13], можно отнести к α -условно-периодическому движению.

Исследование движения тела в общем случае, которое может быть проведено с помощью формул (61)–(65), представляет собой самостоятельную задачу. В данной статье они рассмотрены в рамках комплексного подхода изучения свойств движения тела в потенциальном поле сил, описываемого ИС (6).

Сходимость интеграла из системы (58) для более общего класса ИС, чем ИС (6) уравнений (1)–(4) в случае асимптотического движения тела к состоянию покоя доказана в книге [24] и в статье [25].

1. *Горячев Д.Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела / Д.Н. Горячев. – Варшава, 1910. – 62 с.
2. *Горячев Д.Н.* Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки / Д.Н. Горячев. – Варшав. унив. изв., 1915. Кн. 3. – С. 1–11.
3. *Борисов А.В.* Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 384 с.
4. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела / С.Л. Зиглин // Тр. Москов. мат. о-ва. – 1980. – № 41. – С. 287–303.
5. *Козлов В.В.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В.В. Козлов, Д.А. Онищенко // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 6. – С. 1298–1300.
6. *Yehia H.M.* Transformations of mechanical systems with cyclic coordinates and new in-tegrable problems / H.M. Yehia // J. Phys. A.: Math. Con. – 2001, № 34. – P. 11167–11183.
7. *Yehia H.M.* New solvable problems in the dynamics of a rigid body about a fixed point in a potential field / H.M. Yehia // J. Mechanics Research Communications. – 2014, № 57. – P. 44–48.
8. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
9. *Леви-Чивита Т.* Курс теоретической механики. В 2-х т. / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
10. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
11. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии) / Г.В. Горр. – М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. – 424 с.
12. *Горр Г.В.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
13. *Гашененко И.Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 400 с.
14. *Горр Г.В.* Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
15. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps / L. Poinsot // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – № 16. – P. 289–336.
16. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – № 28, вып. 3. – С. 502–507.
17. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
18. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела / В.Н. Кошляков. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
19. *Челноков Ю.Н.* К теории гироскопа в параметрах Родрига–Гамильтона /

- Ю.Н. Челноков // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, № 1. – С. 111–116.
20. Горр Г.В. Об одном классе решений уравнений динамики твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2018. – Т. 82, вып. 5. – С. 547–558.
 21. Комаров И.В. Обобщенный гиростат Горячева–Чаплыгина в квантовой механике / И.В. Комаров, В.Б. Кузнецов // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. Записки научных семинаров ЛОМИ НАН СССР. – 1987. – № 9. – С. 134–141.
 22. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Квазиклассическое квантование волчка Ковалевской / И.В. Комаров, В.Б. Кузнецов // Теор. и мат. физика. – 1987. – Т. 73, № 3. – С. 335–347.
 23. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
 24. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г.В. Горр, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я.Савченко. – Киев: Наукова думка, 1984. – 288 с.
 25. Горр Г.В. Поведение неподвижного годографа для асимптотически равномерных движений гиростата в обобщенной задаче динамики / Г.В. Горр, Е.П. Носырева // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26 (I). – С. 13–20.

G.V. Gorr, D.N. Tkachenko

The research of a body motion in the case of three invariant relations.

The problem of motion of a rigid body with a fixed point in a potential force field is considered. The new case of three nonlinear invariant relations of the equations of motion is given. The properties of Euler angles, Rodrigues–Hamilton parameters, and angular velocity hodographs in the Poinsof method are researched on the basis of an integrated approach in the interpretation of body motion.

Keywords: *potential force field, Euler angles, Rodrigues–Hamilton parameters, Poinsof method.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
gugorr@gmail.com

Получено 11.12.18

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 004.031:539.3:534.1

©2018. В.Е. Болнокин, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг

АНАЛИЗ МОДЕЛИ ПЛОСКОГО ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ЭКРАНА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВНУТРЕННИХ ТУННЕЛЬНЫХ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Дано описание теоретической численно-аналитической методики исследования пространственной модели гидроакустического экрана в виде деформируемого слоя с периодическим рядом однотипных параллельных плоским граням внутренних протяженных туннельных цилиндрических полостей, содержащих идеально контактирующие радиально-неоднородные цилиндрические включения. Методика предусматривает введение представлений для потенциалов поля волн деформаций в многосвязном слое в виде рядов по базисным частным решениям волновых уравнений в связываемых со слоем основных прямоугольных координатах и в локальных цилиндрических координатных системах с полюсами в центрах сечений перфорирующих полостей. В рамках разрабатываемого алгоритма исследования используются теория Флоке, теоремы сложения цилиндрических функций, разложения Якоби, а также методика интегрирования уравнений динамического деформирования функционально-градиентных цилиндров в степенных рядах по радиальной координате. На заключительном этапе реализации методики, на основе применения метода ортогональных рядов для алгебраизации функциональных граничных условий контакта материала слоя с окружающей акустической средой и внутренними включениями, задача сводится к анализу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов в представлениях потенциалов акустической среды и в рядах по базисным частным решениям волновых уравнений для слоя.

Ключевые слова: плоский гидроакустический экран, изотропный упругий слой, внутренняя периодическая перфорация, туннельные цилиндрические полости с включениями, внешняя акустическая среда, численно-аналитическая методика анализа, уравнения для волновых потенциалов, метод суперпозиции рядов по базисным решениям, теория Флоке, теоремы сложения цилиндрических функций, метод ортогональных рядов, бесконечные системы алгебраических уравнений.

Введение и постановка задачи. Разработка методов теоретического анализа различных модификаций моделей функционирования плоских гидроакустических экранов [1-7] остается актуальным направлением исследований в волновой механике деформируемых сред. Одной из моделей данного типа является рассмотренная в работе [8] модель трансформации упругих волн при их распространении по толщине контактирующего с акустическими средами деформируемого слоя с периодическим рядом однотипных внутренних параллельных плоским граням незаполненных протяженных туннельных цилиндрических

полостей. При этом подлежат исследованию и вопросы эффективности функционирования экранов такого типа в случае заполнения внутренних полостей упругими включениями с различными физико-механическими свойствами. В этой связи, целью данной работы является построение модифицированного варианта теоретической численно-аналитической методики для анализа волнового деформирования слоя с периодическим рядом внутренних туннельных цилиндрических полостей, содержащих идеально контактирующие упругие цилиндрические включения из изотропных радиально-неоднородных функционально-градиентных материалов.

Аналогично работе [8], рассматривается конструкция в виде перфорированного изотропного слоя с параметрами Ламе λ , μ и плотностью ρ . В слое содержится бесконечный периодический ряд отстоящих друг от друга на расстояние $2l$ туннельных цилиндрических полостей радиуса R ($R < h$) с центрами на оси Ox_1 . Материал слоя распределен в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ по области

$$V_L = \{-h \leq x_3 \leq h, (x_1, x_2) \in R^2\} \setminus \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} V_p, \quad (1)$$

а подобластях-полостях $V_p = \{(x_1 - 2pl)^2 + x_3^2 \leq R^2, -\infty < x_2 < \infty\}$ с граничными поверхностями $\Gamma_p = \{(x_1 - 2pl)^2 + x_3^2 = R^2, -\infty < x_2 < \infty\}$, в сечениях которых введены локальные полярные координатные системы $O_p r_p \theta_p$, $r_p \cdot \exp(i\theta_p) = x_1 - 2pl + ix_3$ с центрами в точках $O_p(2pl, 0, 0)$, содержатся однотипные по физико-механическим свойствам упругие включения I_p из изотропного функционально-градиентного радиально-неоднородного материала, которые идеально контактируют с материалом слоя. Параметры плотности и модулей Ламе включений имеют представления

$$\lambda_p = \lambda_0 \cdot \exp(\varsigma r_p), \quad \mu_p = \mu_0 \cdot \exp(\varsigma r_p), \quad \rho_p = \rho_0 \cdot \exp(\varsigma r_p) \quad (2)$$

Полубесконечные области $V_+ = \{h < x_3, (x_1, x_2) \in R^2\}$ и $V_- = \{x_3 < -h, (x_1, x_2) \in R^2\}$, как и в [8], полагаются заполненными одинаковой по свойствам идеальной слабо сжимаемой жидкостью. Распространение гидроакустических волн в этих областях соответственно описывается определяемыми из уравнений $\Delta \varphi_{\pm} = (c_0^{(\pm)})^{-2} \partial_t^2 \varphi_{\pm}$ потенциалами φ_+, φ_- , а поля скоростей \vec{v}_+, \vec{v}_- волновых колебательных смещений и давлений p_+, p_- в акустической среде описываются соотношениями

$$\vec{v}_{\pm} = -\text{grad } \varphi_{\pm}, \quad p_{\mp} = \rho_0^{(\pm)} \partial_t \varphi_{\pm}. \quad (3)$$

В уравнениях для φ_+, φ_- и выражениях (3) $c_0^{(\pm)} = (\kappa^{(\pm)} \rho_0^{(\pm)})^{-2}$ – скорости объемных акустических волн в окружающих экран жидкостях, $\rho_0^{(\pm)}$ – плотности акустических сред в невозмущенном состоянии, $\kappa^{(\pm)}$ – адиабатические модули сжимаемости для акустических сред.

В подлежащей анализу задаче рассматривается падение из глубины полубесконечной области V_- на поверхность $\Gamma_- = \{x_3 = -h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ плоской

монохроматической волны гидроакустического давления с циклической частотой ω и комплексным потенциалом

$$\varphi_-^{(0)} = P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)} x_3)), \quad (4)$$

и возникновение в результате взаимодействия с экранирующим слоем V_L отраженной в V_- гидроакустической волны с потенциалом

$$\varphi_-^{(1)} = P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)} x_3)), \quad (5)$$

и прошедшей в область V_+ за граничной поверхностью $\Gamma_+ = \{x_3 = h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ экранирующего слоя V_L гидроакустической волны с потенциалом

$$\varphi_+ = P_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)} x_3)). \quad (6)$$

В выражениях (4) – (6) $P_0^{(-)}$ – задаваемый амплитудный параметр, $k_f^{(\pm)}$ – волновые числа; $P_1^{(-)}$, $P_0^{(+)}$ – подлежащие определению амплитудные характеристики.

На поверхностях контакта полупространств V_+ , V_- и слоя V_L задаются краевые условия

$$\begin{aligned} (\sigma_{33} + p_{\pm})_{x_3=\pm h} = 0, \quad (\sigma_{3j})_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = 1, 2) \\ (\partial_t u_3 - v_{3\pm})_{x_3=\pm h} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых $v_{3\pm}$ – компоненты векторов \vec{v}_+ , \vec{v}_- скоростей движения частиц акустических сред.

В слое V_L под действием падающей волны генерируется поле двухпарциальных упругих волн плоской деформации в коллинеарных Ox_1x_3 плоскостях с определяемыми из уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)D^2\Phi(x_1, x_3, t) - \rho\partial^2/\partial t^2\Phi(x_1, x_3, t) = 0, \\ \mu D^2\Psi(x_1, x_3, t) - \rho\partial^2/\partial t^2\Psi(x_1, x_3, t) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

потенциалами $\Phi(x_1, x_3, t)$, $\Psi(x_1, x_3, t)$, а поле динамических упругих перемещений описывается соотношением

$$\begin{aligned} \vec{u}(x_1, x_3, t) = (u_1(x_1, x_3, t), u_3(x_1, x_3, t)) = \\ = \text{grad } \Phi(x_1, x_3, t) + \text{rot } \Psi(x_1, x_3, t) \cdot e_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Для функционально-градиентного материала цилиндрических включений уравнения гармонического волнового динамического деформирования следуют из системы соотношений

$$\begin{aligned} [\partial/\partial r + r^{-1}] \sigma_{rr} + [-r^{-1}] \sigma_{\theta\theta} + [r^{-1}\partial/\partial\theta] \sigma_{r\theta} + \rho(\partial^2/\partial t^2)u_r = 0, \\ [\partial/\partial r + 2r^{-1}] \sigma_{r\theta} + [r^{-1}\partial/\partial\theta] \sigma_{\theta\theta} + \rho(\partial^2/\partial t^2)u_{\theta} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \exp(\varsigma r)[(\lambda_0 + 2\mu_0)\partial/\partial r + \lambda_0/r]u_r + ((\lambda_0/r)\partial/\partial\theta)u_\theta, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \exp(\varsigma r)[(\lambda_0\partial/\partial r + (\lambda_0 + 2\mu_0)/r)u_r + (((\lambda_0 + 2\mu_0)/r)\partial/\partial\theta)u_\theta], \\
 \sigma_{r\theta} &= \exp(\varsigma r)\mu_0[(r^{-1}\partial/\partial\theta)u_r + (\partial/\partial r - r^{-1})u_\theta].
 \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом априорного свойства периодичности u_r, u_θ по угловой координате θ и введения представлений

$$\begin{aligned}
 u_r &= \tilde{u}_{r n}(r) \cdot \exp(in\theta) \cdot \exp(-i\omega t), \\
 u_\theta &= \tilde{u}_{\theta n}(r) \cdot \exp(in\theta) \cdot \exp(-i\omega t), \\
 \sigma_{\alpha\beta} &= \tilde{\sigma}_{\alpha\beta n}(r) \cdot \exp(in\theta) \cdot \exp(-i\omega t),
 \end{aligned} \tag{12}$$

а также на основе последующего перехода к модифицированным соотношениям

$$\begin{aligned}
 [d/dr + r^{-1}] \tilde{\sigma}_{r r n} + [-r^{-1}] \tilde{\sigma}_{\theta \theta n} + [inr^{-1}] \tilde{\sigma}_{r \theta n} - \rho\omega^2 \tilde{u}_{r n} &= 0, \\
 [d/dr + 2r^{-1}] \tilde{\sigma}_{r \theta n} + [inr^{-1}] \tilde{\sigma}_{\theta \theta n} - \rho\omega^2 u_{\theta n} &= 0;
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{r r n} &= \exp(\varsigma r)[(\lambda_0 + 2\mu_0)d/dr + \lambda_0/r]\tilde{u}_{r n} + (in\lambda_0/r)\tilde{u}_{\theta n}, \\
 \tilde{\sigma}_{\theta \theta n} &= \exp(\varsigma r)[(\lambda_0 d/dr + (\lambda_0 + 2\mu_0)/r)\tilde{u}_{r n} + (in(\lambda_0 + 2\mu_0)/r)\tilde{u}_{\theta n}], \\
 \tilde{\sigma}_{r \theta n} &= \exp(\varsigma r)\mu_0[(inr^{-1})\tilde{u}_{r n} + (d/dr - r^{-1})\tilde{u}_{\theta n}],
 \end{aligned} \tag{14}$$

из (13), (14) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{u}_{r n}(r), \tilde{u}_{\theta n}(r)$. Ее решения в рамках применения описываемой в работе [9] методики строятся в виде системы базисных функций, представляемых абсолютно сходящимися степенными рядами по радиальной переменной r . Тем самым, описание полей волновых упругих перемещений и динамических напряжений в функционально-градиентных цилиндрических включениях формируются в виде ортогональных рядов по угловой переменной θ с подлежащими определению постоянными коэффициентами. В частности, для характеристик напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ в областях включений в каждой из локальных координатных систем записываются представления [9]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} D_q F_{qrr}(r) \exp(in\theta), \\
 \sigma_{r\theta} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} D_q F_{qr\theta}(r) \exp(in\theta)
 \end{aligned} \tag{15}$$

с произвольными подлежащими определению коэффициентами D_q .

С введением в рассмотрение комплексных амплитудных характеристик волновых упругих перемещений $\{u_{r_p}^{(L)}(r_p, \theta_p), u_{\theta_p}^{(L)}(r_p, \theta_p)\}$ и динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(L)}(r_p, \theta_p)$ ($\alpha, \beta = r_p, \theta_p$) для материала слоя V_L в локальных координатных системах, а также амплитудных характеристик $\{u_{r_p}^{(I)}(r_p, \theta_p), u_{\theta_p}^{(I)}(r_p, \theta_p)\}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(I)}(r_p, \theta_p)$ волнового двумерного напряженно-деформированного состояния цилиндрических включений I_p , граничные условия идеального механического контакта включений и слоя на поверхностях Γ_p записываются в виде

$$\begin{aligned} (u_{r_p}^{(L)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p} &= (u_{r_p}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}, & (u_{\theta_p}^{(L)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p} &= (u_{\theta_p}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}; \\ (\sigma_{rr}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} &= (\sigma_{rr}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}, & (\sigma_{r\theta}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} &= (\sigma_{r\theta}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом, ввиду учитываемой далее периодичности, контактные краевые условия на цилиндрических границах рассматриваются только для центральной поверхности Γ_0 .

1. Методика исследования рассматриваемой проблемы. Для решения сформулированной задачи применяется методика, являющаяся обобщением описанной в работе [8] методики анализа гидроакустического экрана в виде слоя с внутренней перфорацией на случай заполнения полостей упругими цилиндрическими функционально-градиентными включениями.

С учетом свойства периодичности упругих перемещений и напряжений вдоль Ox_1 с периодом $2l$, обеспечивающего возможность применения теории Флоке [10, 11], потенциалы волнового поля и представления входящих в граничные условия характеристик напряженно-деформированного состояния в V_L записываются в форме суперпозиций базисных решений в основных координатах Ox_1x_3 и в локальных координатных системах $O_p r_p \theta_p$ с неизвестными постоянными коэффициентами $A_{n\pm}, C_{n\pm}, B_q, G_q$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\alpha r_p) \exp(iq\theta_p) \right] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + C_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\beta r_p) \exp(iq\theta_p) \right] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (\rho\omega^2/(\lambda + 2\mu))^{1/2}, & \beta &= (\rho\omega^2/\mu)^{1/2}, & a &= (\lambda + 2\mu)/\mu \\ \zeta_{n\pm} &= \pm(\rho\omega^2/(\lambda + 2\mu) + n^2\pi^2/l^2)^{1/2}, \\ \xi_{n\pm} &= \pm(\rho\omega^2/\mu + n^2\pi^2/l^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (19)$$

и далее в окрестности Γ_+ , Γ_- , аналогично методике работы [8], записываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm} = & \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \right. \\ & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p + \operatorname{sgn}(x_3)q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q. \quad (20) \\ & \left. \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\zeta_{qp}x_3) \right] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} = & \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + C_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \right. \\ & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p + \operatorname{sgn}(x_3)q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q. \quad (21) \\ & \left. \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\zeta_{qp}x_3) \right] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{(\pm)} = & 2\mu\partial_1\partial_3\Phi_{\pm} + \mu(\partial_1^2 - \partial_3^2)\Psi_{\pm} = \\ = & [2\mu \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+}in\pi l^{-1}\zeta_{n+} \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + \right. \\ & \left. + A_{n-}in\pi l^{-1}\zeta_{n-} \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \right. \\ & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q. \\ & \left. \cdot (iq\pi l^{-1})(\mp\zeta_{qp}) \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) \right] + \quad (22) \\ & + \mu \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + \right. \\ & \left. + C_{n-}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \right. \\ & \left. + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q. \right. \\ & \left. \cdot ((iq\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{qp})^2) \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) \right] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(\pm)} = & (\lambda\partial_1^2 + (\lambda + 2\mu)\partial_3^2)\Phi_{\pm} + 2\mu\partial_1\partial_3\Psi_{\pm} = \\ = & \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + \quad (23) \right. \\ & \left. + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot \\
& \quad \cdot (\lambda(iq\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\mp\zeta_{qp})^2) \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] + \\
& \quad + 2\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + \\
& \quad + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \\
& + 2\mu \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot \\
& \quad \cdot (iq\pi l^{-1})(\mp\zeta_{qp}) \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] \cdot \exp(i\omega t), \\
& \quad \partial_t u_3 = \partial_t(\partial_3 \Phi_{\pm} + \partial_1 \Psi_{\pm}) = \\
& \quad [\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+}\zeta_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + \\
& \quad + A_{n-}\zeta_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \\
& + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot \\
& \quad \cdot (\mp\zeta_{qp}) \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) + \\
& \quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+}(in\pi l^{-1}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + \\
& \quad + C_{n-}(in\pi l^{-1}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \\
& + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot \\
& \quad \cdot (iq\pi l^{-1}) \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] \cdot \exp(i\omega t),
\end{aligned} \tag{24}$$

Непосредственно на Γ_+ и Γ_- граничные разложения (22) – (24) представляют собой ортогональные ряды по x_1 .

Соответственно, на контуре Γ_0 волновые потенциалы и характеристики напряженно-деформированного состояния, с использованием представленных в [10-12] приемов, также записываются в форме ортогональных разложений

$$\begin{aligned}
\Phi & = \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+} i^q ((\zeta_{n+} - n\pi l^{-1})/(\zeta_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \cdot \\
& \quad \cdot J_q(((\zeta_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n-} i^q ((\zeta_{n-} - n\pi l^{-1})/(\zeta_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} J_q(((\zeta_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \\
& \quad + B_q H_q^{(1)}(\alpha r_0) + S_q J_q(\alpha r_0)] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t) =
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+} \chi_{nq+} J_q(\gamma_{n+r_0}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n-} \chi_{nq-} J_q(\gamma_{n-r_0}) + \right. \\
 &\quad \left. + B_q H_q^{(1)}(\alpha r_0) + S_q J_q(\alpha r_0) \right] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t), \\
 \Psi &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n+} i^q ((\xi_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \right. \\
 &\quad \cdot J_q(((\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \\
 &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n-} i^q ((\xi_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \right. \\
 &\quad \cdot J_q(((\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \\
 &\quad \left. + G_q H_q^{(1)}(\beta r_0) + P_q J_q(\beta r_0) \right] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t) = \\
 &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n+} \eta_{nq+} J_q(\delta_{n+r_0}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n-} \eta_{nq-} J_q(\delta_{n-r_0}) + \right. \\
 &\quad \left. + G_q H_q^{(1)}(\beta r_0) + P_q J_q(\beta r_0) \right] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t),
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= (-2\mu) \times \\
 &\quad \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \chi_{nq+} (a\gamma_{n+}^2 J_q(\gamma_{n+r_0}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+r_0}) + q(\gamma_{n+r_0})^{-1} J_q(\gamma_{n+r_0})) - (q/r_0)^2 J_q(\gamma_{n+r_0})) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + A_{n-} \chi_{nq-} (a\gamma_{n-}^2 J_q(\gamma_{n-r_0}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-r_0}) + q(\gamma_{n-r_0})^{-1} J_q(\gamma_{n-r_0})) - (q/r_0)^2 J_q(\gamma_{n-r_0})) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - C_{n+} \eta_{nq+} iqr_0^{-1} (\delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+r_0}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + q(\delta_{n+r_0})^{-1} J_q(\delta_{n+r_0})) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n+r_0})) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - C_{n-} \eta_{nq-} iqr_0^{-1} (\delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-r_0}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + q(\delta_{n-r_0})^{-1} J_q(\delta_{n-r_0})) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n-r_0})) \right] \right] + \\
 &\quad + B_q (a\alpha^2 H_q^{(1)}(\alpha r_0) + \alpha (-H_{q+1}^{(1)}(\alpha r_0) + \\
 &\quad + q(\alpha r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) - (q/r_0)^2 H_q^{(1)}(\alpha r_0) + \\
 &\quad + S_q (a\alpha^2 J_q(\alpha r_0) + \alpha (-J_{q+1}(\alpha r_0) + \\
 &\quad + q(\alpha r_0)^{-1} J_q(\alpha r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\alpha r_0) + \\
 &\quad - G_q iqr_0^{-1} (\beta (-H_{q+1}^{(1)}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) + r_0^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) - \\
 &\quad - P_q iqr_0^{-1} (\beta (-J_{q+1}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} J_q(\beta r_0)) + \\
 &\quad + r_0^{-1} J_q(\beta r_0)) \right] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t),
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} &= (2\mu) \times \\
 &\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \eta_{mq+} ((\delta_{n+}^2/2) J_q(\delta_{n+} r_0) + \right. \\
 &+ \delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+} r_0) + q(\delta_{n+} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n+} r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\delta_{n+} r_0)) + \\
 &\quad + C_{n-} \eta_{mq-} ((\delta_{n-}^2/2) J_q(\delta_{n-} r_0) + \\
 &+ \delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-} r_0) + q(\delta_{n-} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n-} r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\delta_{n-} r_0)) - \\
 &\quad - A_{n+} \chi_{nq+} i q r_0^{-1} (\gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+} r_0) + \\
 &\quad + q(\gamma_{n+} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) - \\
 &\quad - A_{n-} \chi_{nq-} i q r_0^{-1} (\gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-} r_0) + \\
 &\quad + q(\gamma_{n-} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) \left. \right] + \\
 &\quad + G_q((\beta^2/2) H_q^{(1)}(\beta r_0) + \beta(-H_{q+1}^{(1)}(\beta r_0) + \\
 &\quad + q(\beta r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) - (q/r_0)^2 H_q^{(1)}(\beta r_0)) + \\
 &\quad + P_q((\beta^2/2) J_q(\beta r_0) + \beta(-J_{q+1}(\beta r_0) + \\
 &\quad + q(\beta r_0)^{-1} J_q(\beta r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\beta r_0)) + \\
 &\quad - B_q i q r_0^{-1} (\alpha(-H_{q+1}^{(1)}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) + r_0^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) - \\
 &\quad - P_q i q r_0^{-1} (\alpha(-J_{q+1}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} J_q(\alpha r_0)) + \\
 &\quad + r_0^{-1} J_q(\alpha r_0)) \left. \right] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t), \\
 S_q &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_p(H_{q-p}^{(1)}(2\alpha kl) + H_{p-q}^{(1)}(2\alpha kl)), \\
 P_q &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} G_p(H_{q-p}^{(1)}(2\phi kl) + H_{p-q}^{(1)}(2\beta kl)).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Характеристики полей гидроакустических волн в процессе построения решения рассматриваемой задачи записываются в виде

$$\begin{aligned}
 v_{3-} &= (ik_f^{(-)}) (-P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)} x_3)) + \\
 &\quad + P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)} x_3))), \\
 v_{3+} &= (-ik_f^{(+)}) P_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)} x_3)), \\
 p_- &= \rho_0^{(-)} \partial_t \varphi_- = (-i\omega \rho_0^{(-)}) \cdot (P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)} x_3)) + \\
 &\quad + P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)} x_3))), \\
 p_+ &= \rho_0^{(+)} \partial_t \varphi_+ = P_0^{(+)} \rho_0^{(+)} (-i\omega) \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)} x_3)).
 \end{aligned} \tag{29}$$

На последнем шаге реализации представляемой методики с использованием свойств ортогональности контурных представлений функциональные краевые

условия рассматриваемой задачи трансформируются в подлежащую дальнейшему редуцированию бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_{n\pm}$, $C_{n\pm}$, B_q , G_q , D_q , $P_1^{(-)}$, $P_0^{(+)}$, имеющую вид:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \chi_{nq+} (a\gamma_{n+}^2 J_q(\gamma_{n+}R) + \gamma_{n+}(-J_{q+1}(\gamma_{n+}R) + \\
 & \quad + q(\gamma_{n+}R)^{-1} J_q(\gamma_{n+}R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n+}R)) + \\
 & \quad + A_{n-} \chi_{nq-} (a\gamma_{n-}^2 J_q(\gamma_{n-}R) + \gamma_{n-}(-J_{q+1}(\gamma_{n-}R) + \\
 & \quad + q(\gamma_{n-}R)^{-1} J_q(\gamma_{n-}R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n-}R)) - \\
 & \quad - C_{n+} \eta_{mq} + iqR^{-1}(\delta_{n+}(-J_{q+1}(\delta_{n+}R) + \\
 & \quad + q(\delta_{n+}R)^{-1} J_q(\delta_{n+}R)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n+}R)) - \\
 & \quad - C_{n-} \eta_{mq} - iqR^{-1}(\delta_{n-}(-J_{q+1}(\delta_{n-}R) + \\
 & \quad + q(\delta_{n-}R)^{-1} J_q(\delta_{n-}R)) + R^{-1} J_q(\delta_{n-}R)) + \\
 & \quad + B_q(a\alpha^2 H_q^{(1)}(\alpha R) + \alpha(-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) - (q/R)^2 H_q^{(1)}(\alpha R)) + \\
 & \quad + S_q(a\alpha^2 J_q(\alpha R) + \alpha(-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} J_q(\alpha R)) - (q/R)^2 J_q(\alpha R)) + \\
 & \quad - G_q iqR^{-1}(\beta(-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) + R^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) - \\
 & \quad - P_q iqR^{-1}(\beta(-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} J_q(\beta R)) + r_0^{-1} J_q(\beta R)) = 0 \\
 & \quad (q = -\infty, \infty);
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \eta_{mq+} ((\delta_{n+}^2/2) J_q(\delta_{n+}R) + \delta_{n+}(-J_{q+1}(\delta_{n+}R) + \\
 & \quad + q(\delta_{n+}R)^{-1} J_q(\delta_{n+}R)) - (q/R)^2 J_q(\delta_{n+}R)) + \\
 & \quad + C_{n-} \eta_{mq-} ((\delta_{n-}^2/2) J_q(\delta_{n-}R) + \delta_{n-}(-J_{q+1}(\delta_{n-}R) + \\
 & \quad + q(\delta_{n-}R)^{-1} J_q(\delta_{n-}R)) - (q/R)^2 J_q(\delta_{n-}R)) - \\
 & \quad - A_{n+} \chi_{nq+} iqR^{-1}(\gamma_{n+}(-J_{q+1}(\gamma_{n+}R) + q(\gamma_{n+}R)^{-1} J_q(\gamma_{n+}R)) + R^{-1} J_q(\gamma_{n+}R)) - \\
 & \quad - A_{n-} \chi_{nq-} iqR^{-1}(\gamma_{n-}(-J_{q+1}(\gamma_{n-}R) + q(\gamma_{n-}R)^{-1} J_q(\gamma_{n-}R)) + R^{-1} J_q(\gamma_{n-}R)) + \\
 & \quad + G_q((\beta^2/2) H_q^{(1)}(\beta R) + \beta(-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) - (q/R)^2 H_q^{(1)}(\beta R)) + \\
 & \quad + P_q((\beta^2/2) J_q(\beta R) + \beta(-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} J_q(\beta R)) - (q/R)^2 J_q(\beta R)) + \\
 & \quad - B_q iqR^{-1}(\alpha(-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) + R^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) - \\
 & \quad - P_q iqR^{-1}(\alpha(-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} J_q(\alpha R)) + R^{-1} J_q(\alpha R)) = 0 \\
 & \quad (q = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2[A_{n+}in\pi l^{-1}\zeta_{n+} \cdot \exp(\zeta_{n+}h) + A_{n-}in\pi l^{-1}\zeta_{n-} \cdot \exp(\zeta_{n-}h) + \\
 & \quad + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1})(\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(-\zeta_{np}h)] + \\
 & + (C_{n+}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(\xi_{n-}h)) + \\
 & \quad + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot ((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2) \exp(-\zeta_{np}h) = 0 \\
 & \quad (n = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2[A_{n+}in\pi l^{-1}\zeta_{n+} \cdot \exp(-\zeta_{n+}h) + A_{n-}in\pi l^{-1}\zeta_{n-} \cdot \exp(-\zeta_{n-}h) + \\
 & \quad + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1})(\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(\zeta_{np}h)] + \\
 & + (C_{n+}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(-\xi_{n-}h)) + \\
 & \quad + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot ((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2) \exp(\zeta_{np}h) = 0 \\
 & \quad (n = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n+}h) + \\
 & + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n-}h)) + \\
 & + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot \\
 & \quad \cdot (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np}h)] + \\
 & + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(-\xi_{n-}h)) + \\
 & \quad + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (in\pi l^{-1})(\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}h) = \\
 & = \nu_{n0}(-i\omega\rho_0^{(-)}) \cdot (P_0^{(-)} \cdot \exp(-ik_f^{(-)}h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)}h)), \\
 & \quad (\nu_{00} = 1; \nu_{n0} = 0, n \neq 0), (n = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(\zeta_{n+}h) + \\
 & + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(\zeta_{n-}h) + \\
 & + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot \\
 & \cdot (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) + \\
 & + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(\xi_{n-}h)) + \\
 & + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (in\pi l^{-1})(-\zeta_{qp}) \exp(-\zeta_{qp}h) = \\
 & = \nu_{n0}(-i\omega\rho_0^{(+)}) \cdot P_0^{(+)} \exp(ik_f^{(+)}h), \\
 & (\nu_{00} = 1; \nu_{n0} = 0, n \neq 0), (n = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{n+}\zeta_{n+} \exp(-\zeta_{n+}h) + A_{n-}\zeta_{n-} \exp(-\zeta_{n-}h) + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}x_3) + \\
 & + C_{n+}(in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n-}h) + \\
 & + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{qp}h) = \\
 & = \nu_{n0}(ik_f^{(-)})(-P_0^{(-)}) \cdot \exp(-ik_f^{(-)}h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)}h) \\
 & (n = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{n+}\zeta_{n+} \exp(\zeta_{n+}h) + A_{n-}\zeta_{n-} \exp(\zeta_{n-}h) + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (-\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}x_3) + \\
 & + C_{n+}(in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n-}h) + \\
 & + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{qp}h) = \\
 & = \nu_{n0}(-ik_f^{(+)})P_0^{(+)} \cdot \exp(ik_f^{(+)}h) \\
 & (n = -\infty, \infty).
 \end{aligned}$$

Порядок редукции системы (30) определяется в процессе численных экспериментов в соответствии с устанавливаемыми требованиями к относительной точности удовлетворения граничным условиям.

Выводы. Результатом представленных в работе исследований является разработка численно-аналитической методики анализа модели расчета характеристик функционирования плоского гидроакустического экрана в виде многосвязного деформируемого изотропного слоя с периодическим рядом коллинеарных плоским граням внутренних туннельных радиально-неоднородных изотропных цилиндрических включений. Методика базируется на использовании комплекса приемов получения контурных представлений в ортогональных рядах для характеристик волнового деформирования слоя многосвязного поперечного сечения и волнового деформирования функционально градиентных цилиндров-включений. С ее применением исходная рассматриваемая задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов по базисным частным решениям волновых уравнений, которая подлежат редукции в процессе численной реализации методики.

1. *Кормилицын Ю.Н.* Устройство подводных лодок: в 2 т. Т. 1. / Ю.Н. Кормилицын, О.А. Хализев. – СПб: «Элмор», 2008. – 336 с.
2. *Кормилицын Ю.Н.* Устройство подводных лодок: в 2 т. Т. 2. / Ю.Н. Кормилицын, О.А. Хализев. – СПб: «Элмор», 2009. – 280 с.
3. *Корякин Ю.А.* Корабельная гидроакустическая техника: состояние и актуальные проблемы / Ю.А. Корякин, С.А. Смирнов, Г.В. Яковлев. – СПб: Наука, 2004. – 410 с.
4. *Урик Р.Джс.* Основы гидроакустики / Р.Дж. Урик. – Л.: Судостроение, 1978. – 448 с.
5. *Болнокин В.Е.* Исследование систем гидроакустического экранирования для подводных транспортных средств / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай. – Воронеж: Научная книга, 2016. – 196 с.
6. *Глазанов В.Е.* Некоторые задачи распространения звука в упругих средах. Курс лекций / В.Е. Глазанов. – Таганрог: Таганрогский радиотехнический институт, 1970. – 123 с.
7. *Глазанов В.Е.* Акустические экраны для подводных преобразователей и антенн. Теория и расчет / В.Е. Глазанов. – СПб.: СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. – 175 с.
8. *Болнокин В.Е.* Методика анализа модели плоского гидроакустического экрана с периодической системой внутренних туннельных цилиндрических полостей / В.Е. Болнокин, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1–2 (62–63). – С. 3–15.
9. *Моисеенко И.А.* Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134–146.
10. *Гузь А.Н.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. – Киев: Наукова думка, 1972. – 255 с.
11. *Головчан В.Т.* Распространение упругих волн сдвига в упругом слое, перфорированном рядом цилиндрических полостей / В.Т. Головчан, А.Н. Гузь // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 9. – С. 18–33.
12. *Космодамианский А.С.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наукова думка, 1985. – 176 с.

tunnel radially inhomogeneous cylindrical inclusions.

A description of a theoretical numerical-analytical technique for studying the model of a hydroacoustic screen in the form of a deformable layer with a periodic series of the same internal tunneling cylindrical cavities parallel to flat faces and containing ideally contacting radially inhomogeneous cylindrical inclusions is given. The methodology based on representations for the potentials of the deformation wave field in a multiply connected layer in the form of series on the basis of particular solutions of the wave equations in the rectangular coordinates associated with the layer and in local cylindrical coordinate systems with poles in the centers of the sections of the perforating cavities. In the research algorithm under development, Floquet theory, theorems of addition of cylindrical functions, Jacobi decomposition, as well as a technique for integrating the equations of dynamic deformation of functionally gradient cylinders in power series along the radial coordinate are used. At the final stage of the implementation of the methodology, based on the application of the orthogonal series method for the algebraization of the functional boundary conditions for the contact of the layer material with the surrounding acoustic environment and internal inclusions, the problem reduces to the analysis of infinite systems of linear algebraic equations with respect to constant coefficients in the representations of the potentials of the acoustic medium and in the series from basis particular solutions of wave equations for a layer.

Keywords: *flat hydroacoustic screen, isotropic elastic layer, internal periodic perforation, tunnel cylindrical cavities with inclusions, external acoustic medium, numerical-analytical analysis technique, equations for wave potentials, method superpositions of series in basic solutions, Floquet theory, addition theorems for cylindrical functions, the method of orthogonal series, infinite systems of algebraic equations.*

Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
Центральный научно-исследовательский Институт Военно-
морских сил Вьетнама, Хайфон
ФГБОУ ВО “Национальный исследовательский университет
“МЭИ” МОН РФ, Москва
stvistvi@mail.ru

Получено 03.09.18

УДК 539.3

©2018. Р.М. Нагорная, В.А. Цванг

СПЕЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Приведены определение и свойства новой специальной функции гипергеометрического типа, позволяющие использовать эту функцию как аппарат для аналитических и численных решений динамических задач теории тонких пластин и оболочек.

Ключевые слова: специальные функции, тонкие оболочки, динамические задачи.

Введение. В работах [1-3] разработан аналитический аппарат построения фундаментальных решений уравнений динамики тонких пластин и оболочек, основанный на использовании метода интегральных преобразований Фурье и Лапласа. Предложена новая методика обращения оригиналов интегральных преобразований, позволяющая получать в аналитической форме решения широкого класса задач динамической теории пластин и оболочек.

Основу этой методики составляет использование новой специальной функции $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ гипергеометрического типа. Определение и свойства этой функции представлены в данной работе.

1. Специальная функция $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ и ее свойства. Специальная функция гипергеометрического типа $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ введена соотношением

$$G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z) = G_{2,4}^{2,1} \left(z \left| \begin{matrix} 1 - \frac{\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2} \\ n_1, n_2, n_3, n_4 \end{matrix} \right. \right), \quad (1)$$

$$n_1 = -\frac{\nu + \gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, \quad n_2 = -\frac{\nu + \gamma - 1}{2} + \frac{\mu}{4},$$

$$n_3 = -\frac{\nu + \gamma - 1}{2} - \frac{\mu}{4}, \quad n_4 = -\frac{\nu + \gamma}{2} - \frac{\mu}{4}.$$

Условия существования, области определения ее аргумента и индексов определяются соответствующими для G -функции Мейера [4-6].

При этом под функцией гипергеометрического типа от переменной z следует понимать [7] функцию $F(z)$, представимую в окрестности точки $z = 0$ в форме линейной комбинации функций вида $f((a), (b), \alpha) z^{\alpha} {}_pF_q((a); (b); hz^{\nu})$, где $f((a), (b), \alpha)$ – некоторая функция параметров $(a), (b), \alpha; \alpha, \nu > 0, h = const$;

$${}_pF_q((a); (b); z) \equiv {}_pF_q \left(\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \middle| z \right) \equiv {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right) -$$

обобщенный гипергеометрический ряд, а также всякую функцию, которую можно непрерывно получить из такой линейной комбинации предельными переходами по параметрам.

Специальная функция $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ для решения задач динамики пластин и оболочек

Приведем свойства функции $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ ($\arg(z) = 0, z = x$).

1.1 Интегральное представление функции $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(x)$

$$G_{\nu,\mu}^{\gamma}(x) = 2^{4\nu+4\gamma+1} \int_0^{+\infty} t^{-\gamma-1} \frac{J_{\nu}\left(\frac{1}{8\sqrt{x}}t\right)}{t^{\nu}} J_{\mu}(\sqrt{t}) dt \quad (2)$$

для $x > 0, -\operatorname{Re}\left(\nu + \frac{\mu}{2}\right) < -\operatorname{Re}(\gamma + \nu) < \frac{7}{4}$.

1.2 Представление функции $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(x)$ через обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_q\left(\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \middle| -x\right)$.

Функция $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(x)$ с использованием теоремы Слейтер [7] определяется выражением

$$\begin{aligned} G_{\nu,\mu}^{\gamma}(x) &= 2^{\mu}(\sqrt{x})^{-\nu-\gamma+\mu/2} \Gamma\left[\begin{matrix} -\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{4} \\ \frac{2\nu+\gamma}{2} - \frac{\mu}{4} + 1, \mu + 1 \end{matrix}\right] \times \\ &{}_2F_3\left(\frac{-2\nu-\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, -\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}; \frac{\mu}{2}, \frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2} + 1; -x\right) - \\ &2^{\mu+2}(\sqrt{x})^{-\nu-\gamma+\mu/2+1} \Gamma\left[\begin{matrix} -\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\mu}{4} \\ \frac{2\nu+\gamma+1}{2} - \frac{\mu}{4}, \mu + 2 \end{matrix}\right] \times \\ &{}_2F_3\left(\frac{1-2\nu-\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, \frac{-\gamma+1}{2} + \frac{\mu}{4}; \frac{3}{2}, \frac{\mu}{2} + 1, \frac{\mu+3}{2}; -x\right). \end{aligned} \quad (3)$$

1.3 Представление функции $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(x)$ в виде бесконечного ряда в окрестности точки $x = 0$

$$\begin{aligned} G_{\nu,\mu}^{\gamma}(x) &= 2^{\mu}(\sqrt{x})^{-\nu-\gamma+\mu/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(16x)^m}{\Gamma(2m+1)\Gamma(2\alpha-1+2m)} \times \\ &\left[\frac{\Gamma(\beta+m)}{\Gamma(\nu-\beta+1-m)} - 4\sqrt{x} \frac{\Gamma(\beta+1/2+m)}{\Gamma(\nu-\beta+1/2-m)(2m+1)(2\alpha-1+2m)}\right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{\mu}{2} + 1, \quad \beta = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}$, и получается из формулы (3) путем замены выражения для обобщенной гипергеометрической функции ${}_pF_q\left(\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \middle| -x\right)$ степенным рядом [8].

1.4 Квадратурные формулы (интегрирование с весовой функцией).

Имеют место квадратурные формулы вида

$$\int_0^1 u^{\nu+2n+1} (1-u^2)^{\beta-1} G_{\nu,\mu}^{\gamma}\left(\frac{x}{u^2}\right) du = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu+1+n)}{\Gamma(\nu+1)} \Gamma(\beta) \times$$

$$x^{(n+\beta)/2} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1+m)} C_n^m x^{-m} G_{m+n+\beta+\nu, \mu}^{-2m+\gamma}(x) \quad (5)$$

при $\operatorname{Re}(\beta) > 0, \operatorname{Re}(\nu) > -n - 1$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$;

$$\int_0^1 u^{-\alpha} (1-u)^{\alpha-\beta-1} G_{\nu, \mu}^{\gamma}(xu) du = \Gamma(\alpha - \beta) G_{3,5}^{2,2} \left(x \left| \begin{array}{c} \alpha, 1 - \frac{\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2} \\ n_1, n_2, n_3, n_4, \beta \end{array} \right. \right), \quad (6)$$

$$n_1 = -\frac{\nu + \gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, \quad n_2 = -\frac{\nu + \gamma - 1}{2} + \frac{\mu}{4},$$

$$n_3 = -\frac{\nu + \gamma - 1}{2} - \frac{\mu}{4}, \quad n_4 = -\frac{\nu + \gamma}{2} - \frac{\mu}{4}$$

при $\operatorname{Re}(\beta) < \operatorname{Re}(\alpha) < \operatorname{Re}\left(-\frac{\nu + \gamma - 2}{2} + \frac{\mu}{4}\right)$.

1.5 Рекуррентные формулы.

Пользуясь рекуррентными формулами для функций Бесселя [9], можно получить соответствующие соотношения для функции $G_{\nu, \mu}^{\gamma}(x)$:

$$G_{\nu, \mu}^{\gamma}(x) = (\nu - 1)\sqrt{x} G_{\nu-1, \mu}^{\gamma+2}(x) - G_{\nu-2, \mu}^{\gamma+2}(x), \quad (7)$$

$$G_{\nu, \mu}^{\gamma}(x) = \frac{\mu}{2} G_{\nu, \mu}^{\gamma+1/2}(x) - G_{\nu, \mu-1}^{\gamma}(x). \quad (8)$$

1.6 Формула дифференцирования.

$$32x\sqrt{x} \frac{d}{dx} G_{\nu, \mu}^{\gamma}(x) = G_{\nu+1, \mu}^{\gamma-1}(x) - G_{\nu-1, \mu}^{\gamma+1}(x). \quad (9)$$

1.7 Асимптотика $G_{\nu, \mu}^{\gamma}(z)$ на бесконечности.

Функция $G_{\nu, \mu}^{\gamma}(z)$ имеет две особые точки: $x = 0$ и $x = \infty$. Точка $x = 0$ является правильной или регулярной особой точкой, а $x = \infty$ – неправильной или иррегулярной [3].

Если

$$-\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, -\frac{\gamma-1}{2} + \frac{\mu}{4} \neq 0, -1, -2, \dots \text{ и } x \rightarrow +\infty,$$

то имеет место соотношение

$$G_{\nu, \mu}^{\gamma}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\nu-\gamma-3/4} \cos \left[2\sqrt{x} + \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} + \nu - \mu \right) \right] \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right\} +$$

$$x^{-\nu/2} \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, -\frac{\gamma-1}{2} + \frac{\mu}{4} \\ \frac{\gamma+1}{2} + \frac{\mu}{4}, \frac{\gamma+2}{2} + \frac{\mu}{4}, \nu+1 \end{array} \right] \times$$

Специальная функция $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ для решения задач динамики пластин и оболочек

$${}_4F_1\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, -\frac{\gamma-1}{2} + \frac{\mu}{4}; \frac{1-\gamma}{2} - \frac{\mu}{4}, -\frac{\gamma}{2} - \frac{\mu}{4}; \nu+1; -\frac{1}{x}\right). \quad (10)$$

Главным членом данного асимптотического представления является либо

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\nu-\gamma-3/4} \cos\left[2\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2} + \nu - \mu\right)\right], \quad (11)$$

$$\text{если } \nu + \gamma + \frac{3}{4} < \frac{\nu}{2};$$

либо

$$x^{-\nu/2}\Gamma\left[\begin{array}{c} -\frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, -\frac{\gamma-1}{2} + \frac{\mu}{4} \\ \frac{\gamma+1}{2} + \frac{\mu}{4}, \frac{\gamma+2}{2} + \frac{\mu}{4}, \nu+1 \end{array}\right], \quad (12)$$

$$\text{если } \nu + \gamma + \frac{3}{4} > \frac{\nu}{2};$$

либо сумма (11) и (12),

$$\text{если } \nu + \gamma + \frac{3}{4} = \frac{\nu}{2}.$$

Заключение. В данной работе приведен ряд формул и соотношений для функции $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$, а также изучены ее свойства. Это позволяет использовать функцию $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ как в аналитических исследованиях, так и в вычислениях на ЭВМ. Фундаментальные решения уравнений динамики тонких пластин и оболочек могут быть представлены в форме двойных рядов по функциям $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$.

1. *Нагорная Р.М.* Аналитические и численные решения задач о действии локальных динамических нагрузок на тонкие оболочки / Р.М. Нагорная, В.А. Цванг; Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. – 1997. – № 1. – С. 71–76.
2. *Нагорная Р.М.* Фундаментальные решения динамических уравнений теории пологих оболочек / Р.М. Нагорная, В.А. Цванг, В.П.Шевченко; Изв. АН СССР. МТТ. – 1994. – № 3. – С. 173–180.
3. *Нагорная Р.М.* Исследования напряженного состояния тонких сферических оболочек при действии сосредоточенных динамических нагрузок / Р.М. Нагорная, В.А. Цванг // Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы III Межд. научн. конференции (Донецк, 25 октября 2018 г.). – Т. 1 : Физико-математические и технические науки. – С. 302.
4. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 295 с.
5. *Янке Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
6. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
7. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул) / О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1978. – 312 с.
8. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

Р.М. Нагорная, В.А. Цванг

9. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

R.M. Nagorna, V.A. Tsvang

Special function $G_{\nu,\mu}^{\gamma}(z)$ for solving dynamic problems for plates and shells.

The definition and properties of a new special function of the hypergeometric type presented, which make it possible to use this function as an apparatus for analytical and numerical solutions of the dynamic problems of the theory of thin plates and shells.

Keywords: *special functions, thin shells, dynamic problems.*

Донецкий национальный университет, Донецк
vatsvang@gmail.com

Получено 06.09.18

УДК 539.3

©2018. Г.М. Улитин, С.Н. Царенко

ДИНАМИКА ПРОДОЛЬНОГО УДАРА НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ОБ ОГРАНИЧИТЕЛЬ

Рассматривается задача об ударе стержня с произвольной степенной неоднородностью продольной жесткости и линейной плотности о жесткий ограничитель. Математическая модель продольных деформаций стержня представлена в соответствии с волновой теорией плоского удара в виде дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в частных производных. Решение уравнения получено методом Фурье в функциях Бесселя. Выполнены исследования ударного импульса для двух схем удара стержня о преграду торцом с меньшей и большей площадью. Получены значения коэффициента восстановления для рассматриваемых схем удара стержней различной геометрической формы.

Ключевые слова: продольный удар, неоднородный стержень, метод Фурье, функции Бесселя, коэффициент восстановления.

Введение. При частично упругом ударе импульс системы соударяющихся тел после удара меньше, чем был до удара. Для учета потерь энергии вводится т.н. коэффициент восстановления K_2 , который в «классической» теории удара считается зависящим только от физических свойств материалов соударяющихся тел [1]. Коэффициентом восстановления учитываются такие следствия удара: как остаточные деформации, звуковые колебания, нагревание тел, изменение механических свойств материалов и пр. [1]. Проблеме определения коэффициента восстановления посвящены, как теоретические [2,3], так и экспериментальные работы [4,5].

Одним из основных критериев применения формул классической механики является условие, что время прохождения упругих волн деформаций через все тело много меньше времени удара, а в случае если эти величины сопоставимы, следует использовать волновую теорию удара [1]. Однако, как показали исследования удара упругих однородных стержней о жесткий ограничитель, выполненные на основе волновой теории [6,7], результат ударного взаимодействия стержня с ограничителем полностью согласуется с положениями классической теории об ударе абсолютно-упругого тела. Т.е. в процессе удара происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию деформации тела и последующее полное восстановление кинетической энергии ($v_1 = v_0$). Тем не менее, при ударе ступенчато-неоднородного стержня [7,8] или конического [9] восстановление скорости происходит не в полной мере, часть энергии уходит на собственные колебания стержня после удара. Данное явление может приводить к снижению энергоэффективности силовых установок импульсного действия. Таким образом, коэффициент восстановления может служить одним из ключевых показателей для оценки эффективности использования неоднородных стержней в качестве бойков и волноводов в установках ударного действия, следовательно,

разработка метода определения коэффициента восстановления является актуальной научно-практической задачей.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим две схемы удара упругого стержня с произвольной степенной неоднородностью (рис. 1): схема *а*) – удар стержня об ограничитель торцом с меньшей площадью, схема *б*) – удар торцом с большей площадью. Линейная плотность m и площадь сечения F стержня изменяется по степенному закону от продольной координаты x

$$m = \gamma F; \quad F = F_2 z^\alpha;$$

$$z = (1 - k) \frac{x}{l} + k, \quad k = \frac{h_1}{h_2} \quad (0 < k < 1), \quad (1)$$

где γ – плотность материала, F_2 – площадь поперечного сечения большего основания стержня, h_1 и h_2 – параметры поперечных торцевых сечений, определяются геометрией сечения стержня (для конических конструкций – радиусы сечений), показатель степени α зависит от конфигурации стержня, например для плоского клина $\alpha = 1$, а для конического стержня сплошного сечения $\alpha = 2$.

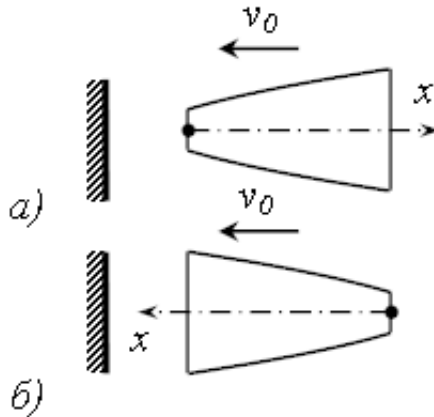


Рис. 1. Схемы удара неоднородного стержня о жесткий ограничитель

Уравнение продольных перемещений $u(x, t)$, с учетом принятых обозначений, будет иметь вид [10]

$$z^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha z^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\gamma l^2}{E(1-k)^2} z^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{l^2}{EF_2(1-k)^2} p(z, t), \quad (2)$$

где E – модуль упругости, $p(z, t)$ – внешняя нагрузка.

Решение уравнения (2) методом Фурье для случая свободных колебаний $p(z, t) \equiv 0$ имеет вид [10]

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_n(t) = \\
 &= z^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} k^{-\nu} A(\lambda_n z) + \frac{N_{0n} l}{EF_2(1-k)} \frac{k^{\nu-1}}{\lambda_n} B(\lambda_n z) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n),
 \end{aligned} \tag{3}$$

а выражение для продольных усилий представлено зависимостью

$$\begin{aligned}
 N(z, t) &= EFu'_x = \\
 &= z^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} \frac{EF_2(1-k)}{l} k^{-\nu} \lambda_n C(\lambda_n z) + N_{0n} k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где u_{0n} , N_{0n} – продольное перемещение и усилие в нулевом сечении n -й формы колебаний, ω_n , μ_n – частота и фаза n -й формы колебаний, $\nu = \frac{1-\alpha}{2}$; $\lambda_n = \frac{\omega_n l}{(1-k)c}$ – собственные значения, $c = \sqrt{\frac{E}{\gamma}}$ – скорость продольных волн деформаций, также введены следующие обозначения функций:

$$A(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_{\nu}(\zeta) Y_{\nu-1}(\zeta_0) - Y_{\nu}(\zeta) J_{\nu-1}(\zeta_0));$$

$$B(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_{\nu}(\zeta) J_{\nu}(\zeta_0) - J_{\nu}(\zeta) Y_{\nu}(\zeta_0));$$

$$C(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_{\nu-1}(\zeta) Y_{\nu-1}(\zeta_0) - Y_{\nu-1}(\zeta) J_{\nu-1}(\zeta_0));$$

$$D(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_{\nu-1}(\zeta) J_{\nu}(\zeta_0) - J_{\nu-1}(\zeta) Y_{\nu}(\zeta_0)),$$

где $J_{\nu}(\zeta)$ и $Y_{\nu}(\zeta)$ – функции Бесселя ζ_0 – значение аргумента в начальной точке отсчета.

Для исследования динамики ударного процесса, решим задачу (2) с граничными условиями:

– для схемы а)

$$u(0, t) = 0; \quad u'_x(l, t) = 0, \tag{5}$$

– для схемы б)

$$u'_x(0, t) = 0; \quad u(l, t) = 0, \tag{6}$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = \mp v_0 e(x), \tag{7}$$

где v_0 – скорость удара, $e(x)$ – единичная функция.

Подставляя начальные условия (5) и (6) в зависимости (3) и (4), а также с учетом первого начального условия (7) получаем выражения для продольных перемещений и усилий:

– для схемы а)

$$u(z, t) = z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{0n} l}{EF_2 (1-k)} \frac{k^{\nu-1}}{\lambda_n} B(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (8)$$

$$N(z, t) = z^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} N_{0n} k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \sin \omega_n t, \quad (9)$$

– для схемы б)

$$u(z, t) = z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} k^{-\nu} A(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (10)$$

$$N(z, t) = z^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} \frac{EF_2 (1-k)}{l} k^{-\nu} \lambda_n C(\lambda_n z) \sin \omega_n t, \quad (11)$$

Удовлетворяя вторым граничным условиям (5) и (6), получим уравнения для нахождения собственных значений:

– для схемы а)

$$D(\lambda_n) = 0;$$

– для схемы б)

$$A(\lambda_n) = 0.$$

Выражение для квадрата нормы собственных функций ортогональных с весом $\rho(z) = z^{1-2\nu}$ для произвольного вида граничных условий имеет вид [10]

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2} \left(z^{2-2\nu} Z_n^2 + \frac{z^{2\nu}}{\lambda_n^2} (z^{1-2\nu} Z_n')^2 - \frac{2\nu}{\lambda_n^2} (z^{1-2\nu} Z_n') Z_n \right) \Big|_k^1. \quad (12)$$

Принимая во внимание граничные условия (5) и (6), получим соответствующие выражения квадрата нормы:

– для схемы а)

$$\Delta_n^2 = \frac{k^{2\nu-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2\nu}}{2\lambda_n^2}, \quad (13)$$

– для схемы б)

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2} \left(k^{-2\nu} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2\nu} \right). \quad (14)$$

Из второго начального условия (7) по методу Фурье определяются начальные параметры:

– для схемы а)

$$N_{0n} = -EF_2 \frac{v_0}{c} \frac{1}{\lambda_n^3 \Delta_n^2}, \quad (15)$$

– для схемы б)

$$u_{0n} = l \frac{v_0}{c} \frac{k^{-\nu} C(\lambda_n)}{(1-k) \lambda_n^2 \Delta_n^2}. \quad (16)$$

Подставляя начальные параметры (15) и (16) с учетом зависимостей (13) и (14) в выражения (8) – (11) получаем окончательные выражения продольных перемещений и усилий:

– для схемы а)

$$u(z, t) = -2 \frac{lv_0}{c} \frac{k^{\nu-1}}{1-k} z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 (k^{2\nu-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2\nu})} B(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (17)$$

$$N(z, t) = -2EF_2 \frac{v_0}{c} k^{\nu-1} z^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n (k^{2\nu-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2\nu})} D(\lambda_n z) \sin \omega_n t, \quad (18)$$

– для схемы б)

$$u(z, t) = 2l \frac{v_0}{c} \frac{k^{-2\nu}}{1-k} z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)}{\lambda_n^2 (k^{-2\nu} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2\nu})} A(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (19)$$

$$N(z, t) = 2EF_2 \frac{v_0}{c} k^{-2\nu} z^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)}{\lambda_n (k^{-2\nu} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2\nu})} C(\lambda_n z) \sin \omega_n t. \quad (20)$$

2. Исследование параметров импульса в ударном торце стержня.

Рассмотрим взаимодействие стержня с преградой с позиции элементарной теории удара [7]

$$M\bar{v}_1 - M\bar{v}_0 = \bar{S}, \quad (21)$$

где \bar{S} - импульс реакции опоры, $M\bar{v}_0$, $M\bar{v}_1$ - количество движения тела до и после соударения,

$$M = \int_0^l m dx = \frac{\gamma F_2 l}{1-k} \int_k^1 z^{1-2\nu} dz = \frac{\gamma F_2 l (1 - k^{2-2\nu})}{2(1-k)(1-\nu)} - \text{масса стержня.}$$

Взяв проекции на ось x для векторных величин в равенстве (21) получим зависимость для определения скорости стержня после соударения

$$v_1 = \frac{1}{M} \int_T P(t) dt - v_0. \quad (22)$$

Введем следующие обозначения величин: безразмерное усилие в ударном сечении – $\tilde{P} = -\frac{P}{EF} \frac{c}{v_0}$, безразмерное время – $\tau = tc/l$. С учетом введенных обозначений, выражение (22) примет вид

$$v_1 = \left(\frac{2(1-\nu)F}{(1-k^{2-2\nu})F_2} \int_0^{\tau_0} \tilde{P} d\tau - 1 \right) v_0, \quad (23)$$

где τ_0 – относительное время удара (для однородного стержня $\tau_0 = 2$ [11]). Из формулы (23) следует зависимость для нахождения коэффициента восстановления

$$K_2 = \frac{v_1}{v_0} = \frac{2(1-\nu)F}{(1-k^{2-2\nu})F_2} \int_0^{\tau_0} \tilde{P} d\tau - 1. \quad (24)$$

Выражения для определения усилий в ударном торце получим из зависимостей (18) и (20):

– для схемы *a*)

$$\tilde{P}(\tau) = -\frac{N(k, \tau) c}{EF_1 v_0} = 2k^{2\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n (k^{2\nu-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2\nu})} \sin((1-k)\lambda_n \tau); \quad (25)$$

– для схемы *б*)

$$\tilde{P}(\tau) = \frac{N(1, \tau) c}{EF_2 v_0} = 2k^{-2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)^2}{\lambda_n (k^{-2\nu} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2\nu})} \sin((1-k)\lambda_n \tau). \quad (26)$$

Подставив выражения усилий (25), (26) в формулу (24) в окончательном виде получим зависимости для определения коэффициентов восстановления:

– для схемы *a*)

$$K_2 = \frac{4(1-\nu)}{1-k^{2-2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 (k^{2\nu-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2\nu})} (1 - \cos((1-k)\lambda_n \tau_0)) - 1; \quad (27)$$

– для схемы *б*)

$$K_2 = \frac{4(1-\nu)}{1-k^{2-2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)^2}{\lambda_n^2 (C(\lambda_n)^2 - k^2)} (1 - \cos((1-k)\lambda_n \tau_0)) - 1. \quad (28)$$

На рис. 2 показаны импульсы в ударном торце конического стержня с отношением размеров торцевых сечений $d_1 : d_2 = 1 : 5$ ($k = 0, 2$) для схем удара *a*) и *б*) соответственно.

Продолжительность удара τ_0 определяется численно из условия сохранения знака усилия в ударном торце (неудерживающая связь). Для рассматриваемого

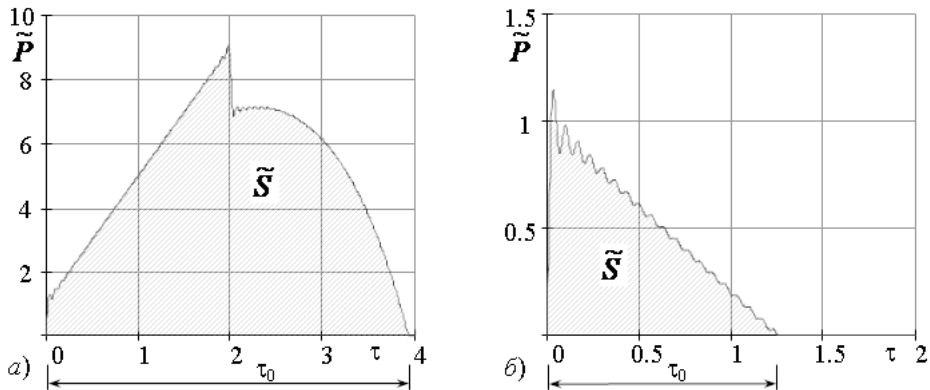


Рис. 2. Зависимость относительного усилия в ударном торце конического стержня ($d_1 : d_2 = 1 : 5$) от безразмерного времени для схемы удара а) и б) соответственно

примера значения τ_0 будут: $\tau_0 = 3,94$ – для схемы а), $\tau_0 = 1,25$ – для схемы б), соответственно значения коэффициентов восстановления по формулам (27), (28) будут: $K_2 = 0,96$ – для схемы а), $K_2 = 0,5$ – для схемы б).

Заключение. По разработанной методике выполнены исследования динамики продольного удара для стержней различной формы. Результаты исследования показали, что расход энергии на упругие колебания не значителен для стержней с большим отношением размеров торцевых сечений ($k = 0,7 \div 1$). С уменьшением параметра k , при ударе стержня по торцу с минимальной площадью, происходит вначале увеличение доли энергии на собственные колебания стержня, а за тем ее снижение. При этом наблюдается увеличение продолжительности контактного взаимодействия стержня с опорой, и при значениях $\tau_0 \geq 3$ – более 90% потенциальной энергии идет на восстановление кинетической. Это в свою очередь подтверждает положение о том, что если время прохождения упругих волн через все тело меньше времени удара, то влиянием упругих колебаний можно пренебречь [1]. В случае удара стержня по торцу с максимальной площадью, при уменьшении параметра k происходит только усиление волновых процессов в стержне, на которые уходит значительная доля энергии, при этом время удара существенно сокращается. Так стержень гиперболического очертания близкий к остrokонечной форме можно рассматривать, как абсолютно неупругое тело. Аналогичный эффект получен в работе [12] при рассмотрении поперечных колебаний заостренного стержня, и связывается данный эффект с отсутствием отраженных волн со стороны заостренного конца.

1. Кочетков А.В. Некоторые вопросы теории удара / А.В. Кочетков, П.В. Федотов // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2013. – № 5. Ст. 110ТВН513. – URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/110tvn513.pdf> (дата обращения 05.05.2018)
2. Лашков В.А. Коэффициент восстановления скорости при ударе под углом / В.А. Лашков // Вестник СПбГУ. Серия 1. – 2010. – Вып. 2. – С. 31–38.
3. Кадомцев И.Г. Определение коэффициента восстановления при упругопластическом соударении тел / И.Г. Кадомцев // Механика твердого тела. – 1991. – № 6. – С. 89–91.

4. Лашков В.А. Об экспериментальном определении коэффициентов восстановления скорости частиц потока газовзвеси при ударе о поверхность / В.А. Лашков // Инж.-физ. журнал. – 1991. – Т. 60, № 2. – С. 197–203.
5. Кангур Х.Ф. Экспериментальное и расчетное определение коэффициента восстановления при ударе / Х.Ф. Кангур, И.Р. Клейс // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 5. – С. 182–185.
6. Манжосов В.К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В.К. Манжосов, В.В. Слепучин // Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.
7. Александров Е.В. Прикладная теория и расчеты ударных систем. / Е.В. Александров, В.Б. Соколинский. – М.: Наука, 1969. – 199 с.
8. Санкин Ю.Н. Продольные колебания упругих стержней ступенчато-переменного сечения при соударении с жёстким препятствием / Ю.Н. Санкин, Н.А. Юганова // ПММ. – 2001. – Т. 65, № 3. – С. 444–450.
9. Улітін Г.М. Удар конічного стрижня об жорстку перешкоду / Г.М. Улітін, С.М. Царенко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 56–63.
10. Stepanov R. Dynamics of Longitudinal Impact in the Variable Cross-Section Rods / R. Stepanov, D. Romenskyi, S. Tsarenko // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 317 – P. 012029 URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/317/1/012029> (дата обращения: 19.09.2018)
11. Улитин Г.М. Метод усреднения в задачах о продольном ударе стержней переменного сечения / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 1. – С. 43–48.
12. Миронов М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акустический журнал. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 3–8.

G.M. Ulitin, S.N. Tzarenko

Dynamics of longitudinal impact of an inhomogeneous rod on limiter.

The problem of the impact on a rod with an arbitrary degree of inhomogeneity of the longitudinal stiffness and mass distribution of the hard limiter is considered. The mathematical model of the longitudinal deformations of a rod in accordance with the wave theory of a flat impact is presented in the form of a second-order differential equation with variable coefficients in partial derivatives. The solution of the equation is obtained by the Fourier method in Bessel functions. The analysis of the impact impetus for two schemes of impact a rod against an obstacle with an end face with a smaller and larger area was performed. Values of recovery factor for the corresponding schemes of impact for rods of different geometric shapes have been obtained.

Keywords: *longitudinal impact, inhomogeneous rod, Fourier method, Bessel functions, recovery coefficient.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,
Донецк
tzarenko@gmail.com

Получено 23.11.18

УДК 539.3

©2018. В.Н. Чехов, С.В. Загора

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО - ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЁСТКИМ КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, НАГРУЖЕННЫМ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ.

Применение многозначных аналитических решений в рамках теории типа С.П. Тимошенко позволило получить уточненное аналитическое решение задачи о напряженном состоянии пологой сферической оболочки с круговым жестким включением, нагруженным изгибающим моментом. В результате численных исследований установлено, что при увеличении параметра поперечного сдвига и уменьшении радиуса жесткого включения относительные напряжения возрастают в несколько раз. Также обнаружено, что влияние поперечного сдвига особенно важно для относительно небольших диаметров жестких включений.

Ключевые слова: аналитическое решение, теория типа С.П. Тимошенко, полая сферическая оболочка, трансверсально-изотропный материал, круговое включение, деформация поперечного сдвига.

Введение. В различных областях современной техники широкое распространение в качестве элементов конструкций получили тонкостенные оболочки. Под действием различных факторов в них могут возникать высокие концентрации напряжений, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации таких конструкций. К настоящему времени достаточно полно разработаны методы определения напряженного состояния и решен ряд задач для оболочек с концентраторами напряжений в виде технологических отверстий [1–5], включений [2, 5–7] и локальных воздействий [2, 3]. В меньшей степени исследовано распределение напряжений в тонкостенных оболочках, нагруженных усилием и моментом через жесткое включение; аналитические решения и численные результаты получены для изотропных (в рамках классической теории Кирхгофа-Лява) сферической [3, 7] и цилиндрической [2] оболочек.

Всё большее применение в современной технике находят композиционные трансверсально-изотропные материалы. Поэтому является актуальным получение решений перечисленных выше задач для трансверсально-изотропных оболочек. Трансверсально-изотропные материалы, как правило, обладают низкой сдвиговой жёсткостью, для которых гипотезы классической теории не соблюдаются, и наиболее приемлемой для них оказалась сдвиговая модель, сформулированная С.П. Тимошенко. Наиболее плодотворным стал разработанный в [1,2] на базе теории типа С.П. Тимошенко метод решения задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями и включениями. На базе этой - же сдвиговой модели в работе [5] был предложен приближённый вариант «технической теории трансверсально-изотропных оболочек». Использование этих подходов позволило получить результаты для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями,

подкрепляющими кольцами и включениями [2,4,5]. Ряд результатов по изучению концентрации напряжений около отверстий и жёстких включений в оболочках, изготовленных из композитных материалов, получен также с использованием вариационных конечно-разностных методов (например, в [8]) и наиболее полно изложен в обзорной статье [9]. Но в постановке этих задач и их решении предполагалось нагружение оболочки равномерным внутренним давлением, растяжением или кручением.

В данной статье в рамках теории С.П. Тимошенко предлагается аналитическое решение и численные исследования задачи о напряженном состоянии пологой трансверсально-изотропной сферической оболочки при ее нагружении изгибающим моментом, приложенным через круговое абсолютно жесткое включение. При этом здесь, в отличие от [10], применяются многозначные решения [2], что и позволило исследовать случай нагружения изгибающим моментом.

1. Постановка задачи. Рассматривается полая трансверсально-изотропная сферическая оболочка с круговым недеформируемым включением (рис. 1). Предполагается, что жёсткая шайба нагружена изгибающим моментом B_y .

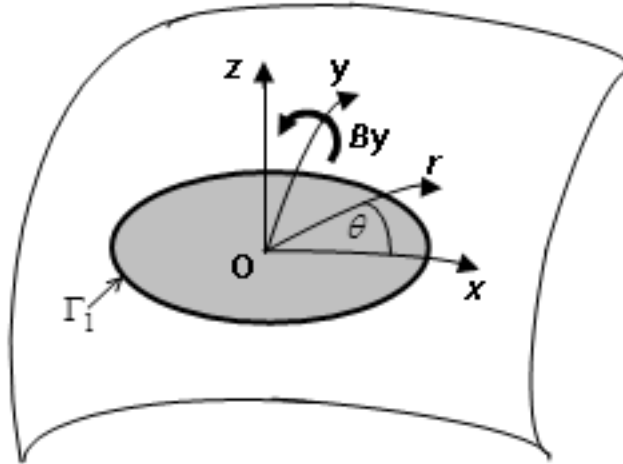


Рис. 1.

Для решения задачи используется система однородных разрешающих дифференциальных уравнений, основанных на уточнённой теории типа С.П. Тимошенко, учитывающей деформации поперечного сдвига [2]:

$$\nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w = 0; \quad (1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U - 2\delta \nabla^2 \nabla^2 U = 0; \quad (2)$$

$$(1 - \nu) \delta \nabla^2 \chi - \chi = 0. \quad (3)$$

Здесь U, w, χ – искомые функции усилий, прогиба и поперечного сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат (ρ, θ) , где $\rho = \frac{r}{\sqrt{cR}}$ – безразмерный радиус – вектор, $r \cdot e^{i\theta} = x + iy$; $\delta = \frac{Ehc}{2KR}$ – относительный безразмерный параметр податливости поперечным сдвигам, где $K = \mu G_1 h$, $c = h / \sqrt{12(1 - \nu^2)}$, E – модуль Юнга, G_1 – модуль трансверсального сдвига, $\mu = 5/6$ – коэффициент сдвига, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, i – мнимая единица.

2. Построение аналитических решений. Решения системы дифференциальных уравнений (1)-(3) определяются с помощью цилиндрической, полигармонической и аналитической частей:

$$U = U_c + i \frac{R}{2} U_a, \quad (4)$$

$$w = w_c + \frac{R}{2} w_p. \quad (5)$$

Аналитическая часть U_a в (4) согласно [2] имеет вид:

$$U_a(r, \theta) = (\alpha_1 + \bar{\alpha}_2) [(1 + 2 \ln r) r \cos \theta - 2r \sin \theta] + (\beta_1 + \bar{\beta}_2) (1 + \ln r) + (\gamma_1 + \bar{\gamma}_2) \frac{1}{r} \cos \theta. \quad (6)$$

При этом согласно [2] необходимо выполнить условия однозначности комплексных смещений:

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \beta_1 = -\beta_2, \quad (7)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 4icR(1 + \nu)\bar{\alpha}_1.$$

Главный вектор и главный момент внешних усилий, приложенных к жёсткой шайбе, определяются согласно [2]:

$$\begin{aligned} F_X &= 2\pi EhcR \operatorname{Im}(\alpha_1 - \alpha_2), \\ F_Y &= 2\pi EhcR \operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2), \\ F_Z &= \pi Ehc \operatorname{Im}(\beta_1 - \beta_2), \\ B_Z &= -\pi EhcR \operatorname{Re}(\beta_1 - \beta_2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$B_X = \pi Ehc \operatorname{Re} [(\gamma_1 - \gamma_2) + 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

$$B_Y = \pi Ehc \operatorname{Im} [(\gamma_1 - \gamma_2) - 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = \overline{1,2}$) определяются из системы уравнений (7)-(8) при заданных значениях соответствующих компонент.

3. Аналитическое решение по уточненной теории типа С.П. Тимошенко при нагружении изгибающим моментом B_Y . Задано $B_Y = B_Y^0$ а остальные компоненты полагаются равными нулю. Из системы уравнений (7)-(8) следует, что

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 0, \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= 0, \\ \gamma_1 &= \frac{iB_Y^0}{2\pi Ehc}, \\ \gamma_2 &= -\frac{iB_Y^0}{2\pi Ehc}.\end{aligned}\tag{9}$$

Аналитическая часть (6) примет вид:

$$U_a(r, \theta) = 2\gamma_1 \frac{\cos(\theta)}{r} = \frac{iB_Y^0 \cos(\theta)}{\pi Ehc r}.\tag{10}$$

Цилиндрические части решения в (4), (5), убывающие по абсолютной величине при удалении от контура Γ_1 , имеют три различные аналитические формы в зависимости от диапазона изменения параметра податливости поперечным сдвигам δ [2]. Для данного случая цилиндрическая и полигармоническая части будут содержать только 1-ю гармонику:

– в интервале $0 \leq \delta < 1$:

$$\begin{aligned}U_c &= aK_1(\sigma\rho) \cos \theta, \\ w_c &= \sigma^2 aK_1(\sigma\rho) \cos \theta;\end{aligned}\tag{11}$$

– для $\delta = 1$:

$$\begin{aligned}U_c &= [AK_1(\rho) + B\rho K_0(\rho)] \cos \theta, \\ w_c &= [(A - 2B) K_1(\rho) + B\rho K_0(\rho)] \cos \theta;\end{aligned}\tag{12}$$

– при $\delta > 1$:

$$\begin{aligned}U_c &= [AK_1(\omega\rho) + BK_1(\rho/\omega)] \cos \theta, \\ w_c &= [\omega^2 AK_1(\omega\rho) + \omega^{-2} BK_1(\rho/\omega)] \cos \theta.\end{aligned}\tag{13}$$

Для всего диапазона δ :

$$\begin{aligned}\chi &= M \cdot K_1(\lambda\rho) \sin \theta, \\ w_p &= \frac{F}{r} \cos \theta.\end{aligned}\tag{14}$$

Здесь $K_m(z)$ – цилиндрические функции Макдональда; $\omega = \sqrt{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1 + \delta} + i\sqrt{1 - \delta})$, $a = A + iB$, где A , B , M и F – вещественные постоянные; $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu)\delta}}$.

На границе Γ_1 абсолютно жесткого включения формулируются деформационные краевые условия

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tau\tau} |_{\Gamma_1} &= 0, & \kappa_{\tau\tau} |_{\Gamma_1} &= 0, \\ \kappa_{n\tau} |_{\Gamma_1} &= 0, & \kappa_{\tau\nu} |_{\Gamma_1} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

4. Выражения для деформационных краевых величин, усилий и моментов. Выражения для деформационных краевых величин, вошедших в (15) имеют вид:

$$\begin{aligned} Eh\varepsilon_{\tau\tau} &= T_\theta - \nu T_\rho, \\ \frac{Eh^2}{2}\kappa_{\tau\tau} &= \frac{6}{h}(G_\theta - \nu G_\rho) - \frac{\delta\sqrt{3-3\nu^2}}{\rho}\sqrt{\frac{R}{c}}Q_\rho, \\ \frac{Eh^2}{2}\kappa_{\tau\nu} &= \frac{6(1+\nu)}{h}H_{r\theta} - \delta\sqrt{3-3\nu^2}\sqrt{\frac{R}{c}}\frac{dQ_\theta}{d\rho}, \\ Eh\kappa_{n\tau} &= \frac{dT}{dr} - (1+\nu)\frac{1}{r}\frac{dS_{\rho\theta}}{d\theta} - \delta\sqrt{\frac{R}{c}}Q_\rho. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения для усилий и моментов, вошедших в (16), имеют вид:

$$\begin{aligned} T_\theta &= \frac{Eh}{R}Re\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}, \\ T_r &= \frac{Eh}{R}Re\nabla^2 U - T_\theta, \\ T &= T_r + T_\theta, \\ H_{r\theta} &= \frac{Eh}{R}(1-\nu)cRe\left[\delta\left(\nabla^2\chi - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2}\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)\right], \\ G_r &= \frac{Eh}{R}cRe\left[\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} - \nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\right)\right], \end{aligned} \quad (17)$$

В.Н. Чехов, С.В. Загора

$$\begin{aligned}
 S_{r\theta} &= -\frac{Eh}{R} Re \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \\
 G_\theta &= -\frac{Eh}{R} (1 + \nu) c Re \nabla^2 g - G_r, \\
 Q_r &= \frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} Re \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 g \right), \\
 Q_\theta &= -\frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} Re \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 g \right),
 \end{aligned}$$

где $g = w + 2\delta \nabla^2 w - 4\delta^2 \nabla^2 U$.

При подстановке усилий и моментов (17) с учётом (16) в краевые условия (15) и приравнивании членов при одинаковых гармониках, может быть получена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных вещественных постоянных A, B, F, M . Поскольку комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = \overline{1, 2}$) предварительно найдены в (9), то аналитическими частями (10) также определяются правые части системы.

После решения полученной системы отискиваются безразмерные коэффициенты концентрации мембранных, изгибных и касательных напряжений

$$\begin{aligned}
 k_\theta^T &= \frac{T_\theta}{d}, & k_r^T &= \frac{T_r}{d}, \\
 k_\theta^B &= \frac{6G_\theta}{dh}, & k_r^B &= \frac{6G_r}{dh}, \\
 \tau_{r\theta}^T &= \frac{S_{r\theta}}{d}, & \tau_{r\theta}^B &= \frac{6H_{r\theta}}{dh}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$d = \frac{B_Y^0}{\pi c \sqrt{Rc \cdot sca}}, \quad (18)$$

где sca - масштабный множитель.

Затем вычисляются относительные эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности [2]:

$$\begin{aligned}
 k_\theta &= k_\theta^T \pm k_\theta^B, & k_r &= k_r^T \pm k_r^B, \\
 k_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^T \pm \tau_{r\theta}^B,
 \end{aligned} \quad (19)$$

$$k_{eq} = \sqrt{k_r^2 + k_\theta^2 - k_r k_\theta + 3k_{r\theta}^2}. \quad (20)$$

Относительным эквивалентным напряжениям на наружной поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} в формулах (19), (20) соответствует знак «+», а на внутренней k_{eq}^{Int} – знак «-».

5. Численные результаты. Были проведены расчёты для трансверсально - изотропной сферической оболочки с коэффициентом Пуассона $\nu=0.3$ при различных значениях радиуса жёсткой шайбы ρ_0 в зависимости от параметра сдвига δ . В таблицах и на графиках для нагружения моментом B_y приведены значения вычисленных напряжений на контуре Γ_1 кругового жесткого включения в увеличенном масштабе 10:1, т.е. значение масштабного множителя в (18) $sca = 10$.

На рис. 2 приведены графики относительных эквивалентных напряжений в зависимости от параметра сдвига δ в точке $\theta=0$. На рис. 2 эквивалентные напряжения на наружной поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} показаны сплошными линиями, а на внутренней поверхности k_{eq}^{Int} – длинными штрих пунктирными; над линиями указаны соответствующие им значения радиуса жёсткой шайбы ρ_0 .

На рис. 3 приведены графики относительных напряжений в зависимости от угла θ при значениях параметров $\rho_0=0.7$ и $\delta=1$. На рис. 3 эквивалентные

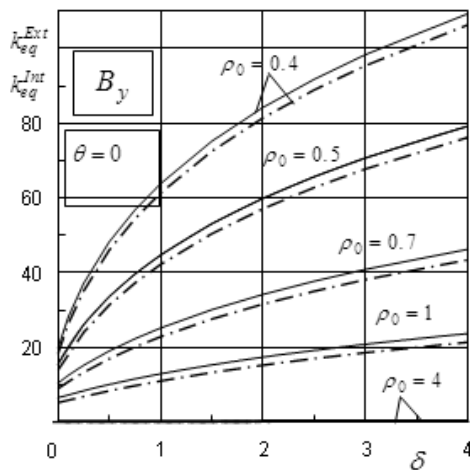


Рис. 2.

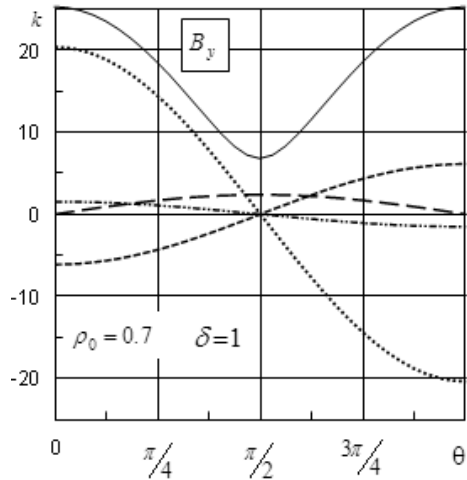


Рис. 3.

напряжения на наружной поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} показаны сплошными линиями; мембранные напряжения k_r^T – штрих - двух - пунктирными линиями, k_θ^T – штрих - пунктирными; изгибные напряжения k_r^B – пунктирными линиями и k_θ^B – штриховыми линиями.

В табл. 1 и 2 представлены результаты вычисленных напряжений для значений $\rho_0=2$ (табл. 1) и $\rho_0=0.4$ (табл. 2) при различных значениях параметра сдвига δ (от 0 до 4). Из табл. 1, 2 и рис. 2 видно, что наибольшими являются относительные эквивалентные напряжения k_{eq}^{Ext} на наружной поверхности оболочки, а наиболее опасными будут точки $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. При этом из табл. 1, 2 и рис. 3 видно, что наибольший вклад в рост относительных эквивалентных напряжений k_{eq}^{Ext} , k_{eq}^{Int} вносят изгибные напряжения k_r^B и k_θ^B .

Из рис. 2 и табл. 1, 2 видно, что при увеличении параметра поперечного

Таблица 1. Значения напряжений в зависимости от δ при $\rho_0 = 2$

δ	θ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	$\tau_{r\theta}^T$	$\tau_{r\theta}^B$	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0	0	0.342	0.102	1.820	0.546	0.000	0.000	1.922	1.314
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.342	0.000	0.592	0.592
0.5	0	0.418	0.126	2.101	0.195	0.000	0.000	2.375	1.649
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.418	-0.110	0.534	0.915
1	0	0.466	0.140	2.329	-0.070	0.000	0.000	2.761	1.977
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.466	0.013	0.829	0.784
2	0	0.525	0.157	2.696	-0.480	0.000	0.000	3.394	2.551
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.525	0.261	1.361	0.457
3	0	0.561	0.168	2.995	-0.802	0.000	0.000	3.912	3.038
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.561	0.483	1.809	0.135
4	0	0.586	0.176	3.252	-1.073	0.000	0.000	4.357	3.463
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.586	0.682	2.196	0.166

Таблица 2. Значения напряжений в зависимости от δ при $\rho_0 = 0.4$

δ	θ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	$\tau_{r\theta}^T$	$\tau_{r\theta}^B$	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0	0	0.835	0.251	21.377	6.413	0.000	0.000	19.742	18.258
	$\pi/2$	0.000	0.000	00.000	0.000	0.835	0.000	1.446	1.447
0.5	0	1.464	0.439	39.913	-12.054	0.000	0.000	2.375	1.649
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	1.464	3.395	8.416	3.345
1	0	1.704	0.511	49.201	-21.225	0.000	0.000	63.834	61.326
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	1.704	10.631	21.364	15.463
2	0	1.955	0.586	61.208	-33.067	0.000	0.000	84.238	81.471
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	1.955	20.905	39.595	32.823
3	0	2.092	0.628	69.485	-41.236	0.000	0.000	98.381	95.475
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	2.092	28.339	52.709	45.460
4	0	2.181	0.654	75.905	-47.580	0.000	0.000	109.378	106.385
	$\pi/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	2.181	34.239	63.081	55.527

сдвига материала оболочки δ и уменьшении радиуса жёсткой шайбы ρ_0 относительные напряжения возрастают в несколько раз. При этом влияние деформации поперечного сдвига особенно существенно при малых площадках жестких шайб. Так из табл. 1 видно, что при $\rho_0=2$ и увеличении δ от 0 до 4 наибольшие напряжения k_{eq}^{Ext} в точке $\theta=0$ увеличиваются в 2.3 раза. А из табл. 2 видно, что при $\rho_0=0,4$ и тех же изменениях δ напряжения k_{eq}^{Ext} увеличиваются уже в 5.5 раз.

6. Достоверность полученных результатов. Все вычисления проводились в среде пакета Maple. Точность вычислений можно регулировать, задавая значение системной переменной *Digits*, которая здесь принималась *Digits* = 15.

Проверялась точность удовлетворения заданных граничных условий в точках контура. Так, для случаев, представленных в табл. 2, при численной реали-

зации абсолютная погрешность выполнения граничных условий не превышала 10^{-9} ; при этом максимальное значение напряжений не превышало 110. В случаях, представленных в табл. 1, соответственно – 10^{-12} ; при этом максимальное значение напряжений не превышает 4.5 (чем, по-видимому, и объясняется большая точность).

Проверялась точность выполнения исходных дифференциальных уравнений (1)-(3) с неизвестными коэффициентами и с коэффициентами, определёнными после решения системы. Абсолютная погрешность не превышала 10^{-9} и соответственно – 10^{-10} .

После решения системы вычислялись составляющие главного вектора и главного момента, определяемые как интегралы в соответствии с [2] (например: $B_z = \rho^2 \int_0^{2\pi} S_{r\theta} d\theta$ и т.д.). Получено хорошее совпадение с заданными компонентами: абсолютная погрешность не превышала 10^{-9} , при этом максимальное значение не превышало 20π .

Для сравнения были проведены расчёты при $\delta = 1$ и при $\delta = 1 \pm 10^{-12}$, т.е. близких к 1. Получено совпадение результатов, рассчитанных по разным формулам: (11) для $\delta < 1$, (12) для $\delta = 1$ и (13) для $\delta > 1$.

7. Решение задачи по технической теории трансверсально-изотропных оболочек. Рассматривается та же задача, для решения которой применяется техническая теория, предложенная Б.Л. Пелехом [4,5] и учитывающая деформации поперечного сдвига. В этом случае система однородных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w = 0; \quad (21)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U = 0; \quad (22)$$

$$(1 - \nu) \delta \nabla^2 \chi - \chi = 0. \quad (23)$$

(т.е. в уравнении (22) по сравнению с (2) опущено слагаемое с параметром податливости поперечным сдвигам.)

Решение системы дифференциальных уравнений (21) - (23) определяется с помощью цилиндрической, полигармонической и аналитической частей

$$U = U_c + i \frac{R}{2} U_a, \quad (24)$$

$$w = w_c + \frac{R}{2} w_p. \quad (25)$$

Цилиндрические части решения, которые убывают по абсолютной величине при удалении от Γ_1 и не зависят от угла θ , записываются в виде

$$U_c = iaK_1(\sigma\rho) \cos(\theta), \quad w_c = -aK_1(\sigma\rho) \cos(\theta). \quad (26)$$

$$\chi = M \cdot K_1(\lambda\rho) \sin \theta, \quad w_p = \frac{F}{r} \cos \theta. \quad (27)$$

Здесь $\sigma = \sqrt{i}$; $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu)\delta}}$; $a = A + iB$.

Далее решение задачи строится аналогично основному случаю, описанному выше для решения по уточненной теории (в разделах 2 и 4). Т.е. остаются прежними: аналитическая часть U_a (6),(10); краевые условия на границе Γ_1 (15); выражения для деформационных краевых величин (16); выражения для усилий и моментов (16); комплексные постоянные $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ (7), (9) и формулы для расчёта напряжений (18) - (20).

8. Сопоставление результатов, полученных по технической и уточненной теориям. В табл. 3 и табл. 4 приведены значения коэффициентов концентрации напряжений в зависимости от δ в наиболее опасной точке $\theta = 0$ контура Γ_1 , полученных по технической теории и по уточненной теории для значений радиуса жёсткой шайбы $\rho_0=2$ и $\rho_0=0.4$ при $\nu=0.3$.

Таблица 3. Сопоставление результатов, полученных по технической и уточненной теориям при $\rho_0 = 2$

δ	теория	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}	$\varepsilon\%$	Δ
0	техн.	0.342	0.102	1.820	0.546	1.922	1.314		
	уточн.	0.342	0.102	1.820	0.546	1.922	1.314	0.0%	$4 \cdot 10^{-15}$
0.1	техн.	0.378	0.113	1.880	0.466	2.032	1.361		
	уточн.	0.361	0.108	1.882	0.464	2.018	1.377	-0.7%	0.21
0.15	техн.	0.395	0.119	1.879	0.420	2.058	1.358		
	уточн.	0.370	0.111	1.911	0.426	2.066	1.411	0.4%	0.31
0.2	техн.	0.412	0.123	1.859	0.370	2.069	1.342		
	уточн.	0.378	0.113	1.940	0.389	2.112	1.444	2.1%	0.41
0.27	техн.	0.435	0.130	1.808	0.293	2.064	1.300		
	уточн.	0.389	0.117	1.980	0.341	2.176	1.492	5.1%	0.54
0.3	техн.	0.445	0.134	1.780	0.257	2.058	1.278		
	уточн.	0.393	0.118	1.996	0.320	2.203	1.512	6.6%	0.60
0.35	техн.	0.463	0.139	1.730	0.194	2.047	1.240		
	уточн.	0.400	0.120	2.023	0.288	2.247	1.547	8.9 %	0.69
0.4	техн.	0.482	0.145	1.681	0.128	2.041	1.208		
	уточн.	0.406	0.122	2.050	0.256	2.291	1.581	10.9%	0.77
0.5	техн.	0.529	0.159	1.634	-0.011	2.093	1.199		
	уточн.	0.418	0.126	2.101	0.195	2.375	1.649	11.9%	0.94

Приведены также значения ε отличий наибольших относительных эквивалентных напряжений k_{eq}^{Ext} , полученных по этим теориям $\varepsilon = \frac{(k_{eq}^{Ext} \text{ уточн} - k_{eq}^{Ext} \text{ техн})}{k_{eq}^{Ext} \text{ уточн}} \times 100\%$. В последнем столбце таблиц приведены Δ - абсолютные значения погрешностей выполнения (и невыполнения) дифференциального уравнения (2) системы (1)–(3) $\Delta = |\nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U - 2\delta \nabla^2 \nabla^2 U|$ при подстановке в них решений (26)–(27), полученных по технической теории.

Из табл. 3 и табл. 4 видно, что при $\delta=0$ результаты, полученные по обеим

Таблица 4. Сопоставление результатов, полученных по технической и уточненной теориям при $\rho_0 = 0.4$

δ	теория	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}	$\varepsilon\%$	Δ
0	техн.	0.835	0.251	21.377	6.413	19.742	18.258		
	уточн.	0.835	0.251	21.377	6.413	19.742	18.258	0.0%	10^{-11}
0.15	техн.	1.192	0.358	28.008	-1.773	29.933	27.942		
	уточн.	1.142	0.343	29.578	-1.802	31.475	29.566	4.9%	3.54
0.16	техн.	1.208	0.362	28.147	-2.172	30.301	28.293		
	уточн.	1.156	0.347	29.973	-2.196	32.093	30.169	5.6%	3.78
0.17	техн.	1.222	0.367	28.257	-2.564	30.637	28.613		
	уточн.	1.169	0.351	30.359	-2.580	32.699	30.760	6.3%	4.01
0.2	техн.	1.264	0.379	28.417	-3.689	31.467	29.400		
	уточн.	1.206	0.362	31.464	-3.680	34.449	32.468	8.7%	4.72
0.3	техн.	1.368	0.411	27.190	-7.044	32.389	30.246		
	уточн.	1.310	0.393	34.711	-6.903	39.678	37.584	18.4%	7.08
0.4	техн.	1.430	0.429	23.357	-9.943	30.671	28.562		
	уточн.	1.394	0.418	37.478	-9.645	44.213	42.030	30.6%	9.44
0.5	техн.	1.450	0.435	16.915	-12.465	26.513	24.598		
	уточн.	1.464	0.439	39.913	-12.054	48.244	45.986	45.0%	11.80
0.6	техн.	1.429	0.429	7.753	-14.599	20.377	18.996		
	уточн.	1.524	0.457	42.098	-14.214	51.887	49.566	60.7%	14.16
0.7	техн.	1.360	0.408	-4.333	-16.268	14.602	14.682		
	уточн.	1.577	0.473	44.088	-16.178	55.218	52.842	73.6%	16.52

теориям, совпадают. Но далее, из табл. 3 для $\rho_0=2$ видно, что при $\delta=0.3$ относительные эквивалентные напряжения k_{eq}^{Ext} , полученные по уточненной теории, превышают их значения, полученные по технической теории на 6.6 %. При последующем увеличении параметра податливости δ это отличие растёт: например, при $\delta= 0.5$ оно составляет уже 11.9%.

Для меньших значений радиуса включения диапазон параметра податливости, при котором отличие не превышает 6%, уменьшается. Так из табл. 4 для $\rho_0=0.4$ видно, что отличие в 4.9% достигается при $\delta= 0.15$; при $\delta= 0.2$ оно составляет уже 8.7%, а при $\delta=0.7$ даже 73.6%.

Таким образом, из табл. 3 и табл. 4 следует, что при увеличении параметра податливости δ увеличивается отличие относительных эквивалентных напряжений k_{eq}^{Ext} , полученных по разным теориям. Объяснение этому дает анализ последнего столбца таблиц для Δ . При увеличении параметра податливости δ растёт погрешность Δ невыполнения дифференциального уравнения (2) исходной системы (1) – (3) при подстановке решения (26), (27), полученного по технической теории.

Таким образом, чтобы не превышать погрешность в 5- 6%, техническую теорию [4] следует применять для небольших значений параметра податливости δ .

Например, чтобы не превышать погрешность в 5%, при $\rho_0=2$ следует брать $\delta < 0.27$; а при $\rho_0=0.4$ – соответственно $\delta < 0.16$.

Выводы. Получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии пологой трансверсально - изотропной сферической оболочки с круговым абсолютно жестким включением, нагруженным изгибающим моментом. При этом здесь, в отличие от [10], применяются многозначные решения [2], что и позволило исследовать такой случай нагружения.

Приведенные в статье численные исследования показали, что при увеличении параметра поперечного сдвига материала оболочки и уменьшении радиуса жёсткого включения относительные эквивалентные напряжения в ней растут и могут увеличиться в несколько раз. Влияние деформации поперечного сдвига особенно существенно при малых площадках жестких шайб. Уменьшить напряжение можно путем увеличения радиуса жесткой шайбы. Техническая теория трансверсально-изотропных оболочек [4] применима для небольших значений параметра податливости δ .

Результаты работы вместе с разработанной в среде Maple программой расчета могут быть использованы в инженерной практике с целью определения величины концентрации напряжений и подбора оптимального радиуса шайбы для уменьшения опасных напряжений.

1. Гузь А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко – Киев: Наук. думка, 1970. – 323 с.
2. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов [и др.] . – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. – Т. 1.)
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью / Б.Л. Пелех – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
5. Пелех Б.Л. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках / Б.Л. Пелех, А.А. Сяський. – К.: Наук. думка, 1975. – 198 с.
6. Chekhov V.N. Stress concentration in a transversely isotropic spherical shell with two circular rigid inclusions / V.N. Chekhov, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 47, No. 4 – P. 441–448.
7. Shevchenko V.P. Stresses in a Spherical Shell Loaded Through Rigid Inclusions / V.P. Shevchenko, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, No. 2 – P. 159–166.
8. Maksimyuk V.A. Nonlinear deformation of thin isotropic and orthotropic shells of revolution with reinforced holes and rigid inclusions / V.A. Maksimyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.–2013, - Vol. 49, No 6. – P. 685–692.
9. Maksimyuk V.A. Variational-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V.A. Maksimyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.–2012, - Vol. 48, No 6. – P. 613–687.
10. Чехов В.Н. Концентрация напряжений в трансверсально-изотропной сферической оболочке с жестким круговым включением, нагруженным нормальной силой / В.Н. Чехов, С.В. Загора // «Журнал теоретической и прикладной механики», ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».– 2017. – № 2(59). – С. 27–39.

V.N. Chekhov , S.V Zakora

Stressed state in a shallow transversely isotropic spherical shell with a rigid circular inclusion that is loaded by a bending moment..

In the framework of the refined theory of the S.P. Timoshenko type, which takes into account the deformations of the transverse shear, an analytical solution of the problem for the stress state of a shallow transversely isotropic spherical shell with a circular absolutely rigid inclusion is obtained. The shell has been loaded by a bending moment through the rigid circular inclusion. As a result of numerical studies, a significant increase in the stresses was observed with an increase of the shear parameter and a decrease in the radius of the rigid inclusion.

Keywords: *stresses, bending moment, transversely isotropic, spherical, shell, rigid circular inclusion, Timoshenko type theory..*

Таврическая Академия Крымского федерального университета
им. В.И. Вернадского, Симферополь
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
chekhov40@mail.ru
zakora41@yandex.ua

Получено 07.12.18

УДК 539.3

©2018. Л.Е. Авраменко

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛООБМЕНА И СКОРОСТИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧКАХ

Решена задача термоупругости тонких ортотропных оболочек неотрицательной гауссовой кривизны, находящегося под действием локального импульсного источника тепла. Рассматривался линейный теплообмен по толщине оболочки и конвективный теплообмен по закону Ньютона с боковых поверхностей оболочки. С помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа получено решение задачи в аналитическом виде. Исследовано влияние величины и характера теплообмена, скорости источника тепла на распределение усилий в оболочке.

Ключевые слова: ортотропная оболочка, интегральные преобразования, локальный импульсный источник, термоупругость, теплообмен.

Введение. Основные уравнения. Актуальность решения температурных задач для оболочек обусловлена их широким распространением в виде элементов современных конструкций, работающих в условиях неравномерного нагрева, например, при сварочных процессах, шлифовании, резке, обработке плазменной струей и т. п. В результате чего возникают дополнительные деформации элементов конструкций и температурные напряжения, которые существенно влияют на несущие свойства конструкций.

Поведение изотропных пластин и оболочек при действии на них различных температурных воздействий изучено достаточно хорошо и рассматривалось в работах [1 – 4]. В меньшей степени, в силу сложности решений, исследовано поведение ортотропных и анизотропных оболочек, в частности распространение напряжений, которые возникают при лазерной и электронно-лучевой обработках материалов [5 – 8].

Данная работа посвящена исследованию влияния величины и характера теплообмена, скорости источника тепла на распределение усилий в ортотропной оболочке неотрицательной гауссовой кривизны при действии локального импульсного источника тепла, движущегося по ее поверхности по закону

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad (1)$$

Уравнения теплопроводности имеют вид [9]:

$$\begin{aligned} h^2 \nabla_{\lambda}^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_3 T_2 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= -(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + W_1); \\ h^2 \nabla_{\lambda}^2 T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1 + W_2). \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_1(x, y, \tau) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t(x, y, z, \tau) dz$, $\{T_2(x, y, \tau) = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^h z t(x, y, z, \tau) dz$ – интегральные характеристики температурного поля (средняя температура и температурный момент), $t(x, y, z, \tau)$ – температура оболочки; $\nabla_\lambda^2 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} – главные коэффициенты теплопроводности; $\mu_{1,2} = (B_i^+ \pm B_i^-)/2$, где $B_i^\pm = \alpha^\pm h / \lambda_{33}$ – критерий Био, α^\pm – коэффициенты теплообмена на поверхностях $z = \pm h$; $\mu_3 = \mu_2 - 2k_3 h$, $k_3 = (k_1 + k_2)/2$ – средняя кривизна срединной поверхности; $k_{1,2} = 1/R_{1,2}$, $R_{1,2}$ – главные радиусы кривизны оболочки; $t_{1,2} = (t_c^+ \pm t_c^-)/2$, t_c^\pm – температура среды на поверхностях $z = \pm h$; c – удельная теплоемкость материала; $a = \lambda_{33}/c\rho$ – коэффициент температуропроводности; ρ – плотность вещества; $W_1 = \frac{h}{2\lambda_{33}} \int_{-h}^h W_0 dz$, $W_2 = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-h}^h z W_0 dz$ – плотность источников средней температуры и температурного момента (W_0 – объемная плотность источников тепла, равная количеству тепла, которое производится в единице объема за единицу времени, [Дж/(м³·с)]). В соответствии с определением W_1 и W_2 являются функциями интегральных характеристик источников тепла и измеряются в градусах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную оболочку толщиной $2h$, по поверхности которой движется локальный импульсный источник тепла. Оболочка находится в тепловом контакте с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона. В качестве закона распределения мощности подаваемой внешней энергии в данной работе принимаем нормально-круговой источник [10-11]. Плотность его удельного теплового потока имеет вид

$$q(x, y, \tau) = q_0 e^{-k_0[(x-x(\tau))^2 + (y-y(\tau))^2]}, \quad (3)$$

где $q_0 = q(0)$ – наибольший тепловой поток в центре площадки нагрева, k_0 – коэффициент сосредоточенности, характеризующий форму кривой нормального распределения. Данное тепловое воздействие моделируем распределением источников средней температуры W_1 и источников температурного момента W_2 по области нагреваемого участка. Такое моделирование позволяет исследовать воздействие теплового потока сварочной дуги или газовой горелки. Нагреваемый участок поверхности будем называть пятном нагрева [10].

Постановка задачи теплопроводности для локально нагретых оболочек предполагает, что возмущение, вносимое локальным воздействием, не распространяется до края рассматриваемой оболочки. Справедливость данного предположения проверяется после решения конкретной задачи. Встает вопрос об области пятна нагрева. В этом случае могут быть приняты разные варианты. Например, за границу области пятна принимают координаты тех точек поверхности оболочки, в которых граничная интенсивность потока (поток энергии от внешнего источника на границе пятна) составляет менее 5% от максимального значения в центре пятна нагрева.

Поскольку в работе используется аналитическое обращение функции пото-

ка энергии, которая определена во всей области, а модель локального нагрева ограничивает его действие размерами пятна, то в полученное решение вносится погрешность, связанная с учетом потока энергии, действующего на оболочку вне зоны пятна нагрева оболочки. Эта погрешность будет тем меньше, чем меньше принятая граничная интенсивность потока энергии и чем больше коэффициент сосредоточенности. Данную погрешность можно оценить, как отношение количества энергии, вне пятна нагрева и внутри этого пятна.

Так как размер пятна нагрева определяется геометрией потока внешнего источника (3), то предполагаем также, что размеры пятна нагрева намного меньше размеров оболочки.

В начальный момент времени температуру оболочки полагаем равной нулю. Так как в данной постановке задачи температура окружающей среды не зависит от координат, ее можно приравнять к нулю. В противном случае полученное решение будет отличаться на константы, которые легко находятся в силу линейности дифференциальных уравнений.

Перейдем к безразмерной системе координат: $x' = x/h$, $y' = y/h$, $z' = z/h$, $\tau' = \tau a/h^2$ и упростим исходные уравнения, приняв температуру окружающей среды равной нулю ($T_c^\pm = 0$). Тогда уравнения (2) примут вид

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_3 T_2 - \frac{\partial T_1}{\partial \tau'} &= -W'_1; \\ \nabla_\lambda^2 T_2 - 3(1 + \mu_1)T_2 - 3\mu_2 T_1 - \frac{\partial T_2}{\partial \tau'} &= -3W'_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Действие движущегося импульсного локального источника тепла моделируется с помощью закона распределения теплового потока (3) и функции Хэвисайда [5], стоящих в правой части уравнения теплопроводности. Плотность источников средней температуры и температурного момента в этом случае в безразмерной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} W(i)'(x', y', \tau') &= \sum_{k=0}^{m-1} W_i^0 e^{-k_0[(x'-x'(\tau'))^2 + (y'-y'(\tau'))^2]} \times \\ &\times [S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2)] = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} W'_{Li}(x', y', \tau') [S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $W'_{Li}(x', y', \tau') = W_i^0 e^{-k_0[(x'-x'(\tau'))^2 + (y'-y'(\tau'))^2]}$, W_1^0 – мощность источника (максимальное значение) средней температуры в центре пятна нагрева; W_2^0 – мощность источника температурного момента в центре пятна нагрева; $S_+[\tau] = 1$ при $\tau > 0$ и $S_+[\tau] = 0$ при $\tau \leq 0$ – функция Хэвисайда [5]; τ_1 – продолжительность импульса, τ_2 – продолжительность перерыва (паузы) в работе источника тепла; m – количество пауз.

Для исследования напряженно-деформированного состояния оболочки систему (3) дополним уравнениями равновесия в перемещениях [4]

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + (k_1 + \nu_2 k_2) \frac{\partial w}{\partial x'} \right) + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \right) = \\
 & = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial x'}; \\
 & \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + (k_1 \nu_1 + k_2) \frac{\partial w}{\partial y'} \right) + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \right) = \\
 & = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial y'}; \\
 & \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \nu_1 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} \right) + \\
 & + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \frac{4}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \\
 & + \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \nu_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x'} + \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + \\
 & + \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (k_1 + k_2 \nu_2) + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (k_1 \nu_1 + k_2) \right) w = \\
 & = \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \right) T_1 - \\
 & - \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2} \right), \quad (6)
 \end{aligned}$$

где u , v , w – перемещения в направлении осей координат x' , y' , z' ; E_1 , E_2 , $G_{1,2}$ – модули упругости для поверхностей, параллельных срединной поверхности оболочки; ν_1 , ν_2 – коэффициенты Пуассона для главных направлений; α_1 , α_2 – температурные коэффициенты линейного расширения для главных направлений.

Введем замену:

$$A = 2/(1 - \nu_1 \nu_2), \quad B = 2G_{12}/\sqrt{E_1 E_2}, \quad A_1 = A\sqrt{E_1/E_2}, \quad A_2 = A\sqrt{E_2/E_1},$$

$$B_1 = A_1 \nu_2 + B, \quad B_2 = A_2 \nu_1 + B, \quad c_1 = (k_1 + \nu_2 k_2), \quad c_2 = (k_1 \nu_1 + k_2),$$

$$d_2 = (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2), \quad C_1 = A_1 c_1, \quad C_2 = A_2 c_2, \quad D_1 = A_1 d_1,$$

$$D_2 = A_2 d_2, \quad F_1 = A_1/3, \quad F_2 = A_2/3, \quad P_1 = A_1 k_1 d_1, \quad P_2 = A_2 k_2 d_2, \quad P = P_1 + P_2,$$

$$O_1 = A_1 k_1 c_1, \quad O_2 = A_2 k_2 c_2, \quad O = O_1 + O_2, \quad R_1 = F_1 d_1, \quad R_2 = F_2 d_2, \\ L_1 = A_1 k_1 + A_2 k_2 \nu_1, \quad L_2 = A_1 k_1 \nu_1 + A_2 k_2, \quad J = F_1 \nu_2 + F_2 \nu_1 + 4B/3.$$

Тогда уравнения (6) примут вид

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + B_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + C_1 \frac{\partial w}{\partial x'} = D_1 \frac{\partial T_1}{\partial x'}; \\ A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + C_2 \frac{\partial w}{\partial y'} = D_2 \frac{\partial T_1}{\partial y'}; \quad (7)$$

$$F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + F_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + J \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \left(L_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + L_2 \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + Ow = PT_1 - R_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} - R_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2}.$$

Уравнение (4), (5), (7) – система уравнений искомой задачи термоупругости ортотропных оболочек в безразмерной системе координат.

Выражения для усилий, моментов и перерезывающих сил с учетом замены имеют вид

$$N_1 = A_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x'} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial y'} + c_1 w - d_1 T_1 \right]; \quad N_2 = A_2 \left[\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + c_2 w - d_2 T_1 \right]; \\ M_1 = -F_1 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_1 T_2 \right]; \quad M_2 = -F_2 \left[\nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_2 T_2 \right]; \\ S = B \left[\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \right]; \quad H = -\frac{2}{3} B \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'}; \\ Q_1 = -F_1 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} + \nu_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2} + d_1 \frac{\partial T_2}{\partial x'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2}; \\ Q_2 = -F_2 \left[\nu_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'} + \frac{\partial^3 w}{\partial y'^3} + d_2 \frac{\partial T_2}{\partial y'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'}. \quad (8)$$

2. Решение задачи. Применяя к уравнениям (5), (6), (8) преобразование Фурье по (x', y') и Лапласа по [12-15], приходим к системе линейных алгебраических уравнений в пространстве трансформант, после решения которой получаем выражения трансформант для компонент температурного поля и напряженно-деформированного состояния оболочки, а также для усилий, моментов и перерезывающих сил. Данная методика подробно описана в работах [16-17].

Методика вычисления оригиналов основана на обратном преобразовании Фурье и Лапласа [13, 15]. Для температуры и температурного момента, а также компонент напряженно-деформированного состояния оболочки детально описана в работах [1, 8, 16, 17].

Приведем лишь полученные оригиналы для температуры, температурного момента, мембранных усилий и изгибающих моментов. Они имеют вид:

$$T_{1,2}(x', y', \tau') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \sum_{i=1}^2 b'_{i,i+2} \sum_{k=0}^{m-1} [S_+(\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)) \times$$

Усилия при импульсном нагреве оболочки движущимся источником тепла

$$\times \int_0^{\tau' - k(\tau_1 + \tau_2)} \text{Int } d\tau_0 - S_+(\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2) \int_0^{\tau' - (k+1)\tau_1 - k\tau_2} \text{Int } d\tau_0]; \quad (9)$$

$$N_j(x', y', \tau') = -A_j \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i [\text{Im}(G(N_{j3}) - G(N_{j1})) - GT(N_{j3})] + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re}(G(N_{j2})) + d_j T_1 \right\};$$

$$M_j(x', y', \tau') = -F_j \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i \text{Re}(G(M_{j2})) + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} [\text{Im}G(M_{j3}) - GT(M_{j3})] + d_j T_1 \right\}.$$

Здесь

$$G(z) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \cdot L(z, 0);$$

$$L(z, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+l)}}{4^{(n+l)} l! (2n+l+\beta)!} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} [(c + \ln i) \tau_{1\beta} + \tau_{2\beta}] t_1(z) + \tau_{1\beta} t_2(z) + \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \text{Re}(G(N_{j2})) + d_j T_1 \right\} + \sum_{m=1}^{n+l} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{4\beta} t_4(z);$$

$$GT(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} e^{-\frac{r^2}{4\tau_0 t}} \frac{d\theta d\tau_0}{t\tau_0} - 4 \cos 2\varphi \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r^2} \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} \gamma \left(2, \frac{r^2}{4\tau_0 t} \right) \cos 2\theta d\theta d\tau_0 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cos 2n\varphi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{4^{(n+l)} l! (2n+l)!} \times$$

$$\times \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+l+1} (r^{2(n+l)} e^{-a_i \tau_0})}{d\tau_0^{n+l+1}} d\tau_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+l+1)} \cos 2n\theta d\theta;$$

$$GT(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} e^{-\frac{r^2}{4\tau_0 t}} \frac{d\theta d\tau_0}{t\tau_0} -$$

$$-4 \cos 2\varphi \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i \tau_0}}{r^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} \gamma \left(2, \frac{r^2}{4\tau_0 t} \right) \cos 2\theta d\theta d\tau_0 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cos 2n\varphi \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{4^{(n+l)} l! (2n+l)!} \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+l+1} (r^{2(n+l)} e^{-a_i \tau_0})}{d\tau_0^{n+l+1}} d\tau_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+l+1)} \cos 2n\theta d\theta;$$

$$t_1(z) = \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta;$$

$$t_2(z) = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t \right) \theta_{10}^{\frac{n+l+p+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta;$$

$$t_3(z) = \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+q+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l+p+q+k}{2}} \theta(z) t^{p+q} d\theta;$$

$$t_4(z) = \int_0^{\pi/2} \theta_{10}^{\frac{n+l-m+k-2}{2}} \theta_9^{-\frac{n+l-m+k}{2}} \theta(z) t^{-m} d\theta;$$

$$\tau_{1\beta} = \int_0^{\tau'} r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0; \quad \tau_{2\beta} = \int_0^{\tau'} \ln(\tau_0) r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} d\tau_0;$$

$$\tau_{3\beta} = \int_0^{\tau'} r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^{p+q} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0; \quad \tau_{4\beta} = \int_0^{\tau'} r^{2(n+l)+\beta} \tau_0^{-m} e^{-a_i \tau_0} d\tau_0,$$

где

$$\theta(N_{j1}) = [(\sigma_{1j} p_{21} + c_j p_{71}) \cos^4 \theta + (\sigma_{1j} p_{22} + \sigma_{2j} p_{51} + c_j p_{72}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{2j} p_{52} + c_j p_{73}) \sin^4 \theta] \cos 2n\theta;$$

$$\theta(N_{j2}) = [(\sigma_{1j} p_{31} + c_j p_{81}) \cos^6 \theta + (\sigma_{1j} p_{32} + \sigma_{2j} p_{61} + c_j p_{82}) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{1j} p_{33} + \sigma_{2j} p_{62} + c_j p_{83}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + (\sigma_{2j} p_{63} + c_j p_{84}) \sin^6 \theta] \cos 2n\theta;$$

$$\theta(M_{j2}) = [\sigma_{1j} p_{71} \cos^6 \theta + (\sigma_{1j} p_{72} + \sigma_{2j} p_{717}) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{1j} p_{73} + \sigma_{2j} p_{72}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \sigma_{2j} p_{73} \sin^6 \theta] \cos 2n\theta;$$

$$\theta(M_{j3}) = [\sigma_{1j} p_{81} \cos^8 \theta + (\sigma_{1j} p_{82} + \sigma_{2j} p_{81}) \cos^6 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{1j} p_{83} + \sigma_{2j} p_{82}) \times \cos^4 \theta \sin^4 \theta + (\sigma_{1j} p_{84} + \sigma_{2j} p_{83}) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + \sigma_{2j} p_{84} \sin^8 \theta] \cos 2n\theta;$$

$$r^2 = (x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2;$$

$$Int = \exp \left(-k_0 \left[\frac{(x' - x'(\tau' - \tau_0))^2}{4k_0 \tau_0 \lambda_1 + 1} + \frac{(y' - y'(\tau' - \tau_0))^2}{4k_0 \tau_0 \lambda_2 + 1} \right] \right) \times \frac{\exp(-a_i \tau_0)}{\sqrt{(1 + 4k_0 \lambda_1 \tau_0)(1 + 4k_0 \lambda_2 \tau_0)}};$$

$$b'_i = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \{s_{11}W_1^0 - s_{21}W_2^0\}; \quad b'_{i+2} = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \{s_{12}W_2^0 - s_{22}W_1^0\};$$

$$s_{11} = (3(1 + \mu_1) - a_i); \quad s_{21} = 3\mu_3; \quad s_{12} = (3\mu_1 - a_i); \quad s_{22} = 3\mu_2.$$

Выражения (9) – оригиналы для усилий и моментов оболочки.

3. Числовые результаты. Рассмотрим случай, когда источник тепла движется вдоль оси x' с постоянной скоростью v' . Введем подвижную систему координат: $x'_1 = x' - v'\tau'$, $y'_1 = y'$. Тогда в выражениях (9): $r^2 = (x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2 = (x'_1 + v'\tau_0)^2 + y_1'^2$.

Для численных исследований влияния параметров теплообмена и скорости движения источника тепла на напряженно-деформированное состояние ортотропной оболочки рассматривался склопластик косоугольной намотки, имеющий сильную анизотропию. Он имеет такие термомеханические свойства: $E_1 = 3,673 \cdot 10^3$ МПа, $E_2 = 9,807 \cdot 10^2$ МПа, $G_{12} = 3,923 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_1 = 0,2798$, $\nu_2 = 0,0747$, $\alpha_1 = 0,7 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$, $\alpha_2 = 3,8 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$, $a_{11} = 2,79 \cdot 10^{-7}$ м 2 /с, $a_{22} = 1,21 \cdot 10^{-7}$ м 2 /с, где $a_{ii} = \lambda_{ii}/c\rho$ – коэффициенты теплопроводности вдоль главных направлений. Пусть $\lambda_{33} = \lambda_{22}$, тогда $\lambda_1 = 2,306$, $\lambda_2 = 1$.

На рис. 1 – 3 представлены графики зависимости мембранных усилий N_1 и N_2 от координаты x' , ($y' = 0$) для момента времени $\tau' = 1$ при действии на оболочку движущегося импульсного локального источника средней температуры ($W_1^0 = 1$, $W_2^0 = 0$). Сплошные линии соответствуют N_1 , штриховые – N_2 . Рассматривалась сферическая оболочка ($k_1 = k_2 = 0,025$), находящаяся под действием импульсного $\tau_1 = 0,5$, $\tau_2 = 0,2$, $m = 4$ локального источника тепла. Мембранные усилия представлены в масштабе $N_1 \cdot 10^7$ и $N_2 \cdot 10^7$.

На рис. 1 представлены графики распределения мембранных усилий N_1 и N_2 для ортотропного материала при $\varphi = 0$. Рассматривался симметричный теплообмен. Кривые 1 соответствуют случаю симметричного теплообмена $Bi^\pm = 0,1$, кривые 2 – $Bi^\pm = 0,01$, кривые 3 – $Bi^\pm = 1$. Здесь скорость движения источника тепла $v' = 1$.

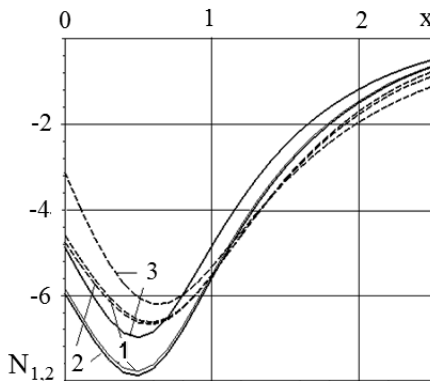


Рис. 1

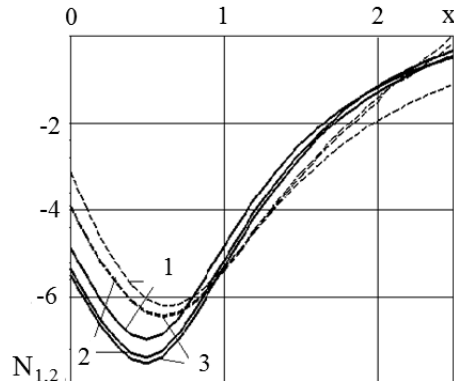


Рис. 2

Из рисунка видно, что распределение усилий зависит от величины параметров теплообмена с боковых поверхностей оболочки.

На рис. 2 приведены графики распределения мембранных усилий N_1 и N_2 в зависимости от характера теплообмена с боковых поверхностей оболочки. Рассматривался симметричный $Bi^\pm = 1$ (кривые 1), верхний односторонний $Bi^+ = 1, Bi^- = 0$ (кривые 2) и нижний односторонний $Bi^- = 1, Bi^+ = 0$ (кривые 3) теплообмен.

Из рисунка видно, что характер теплообмена оказывает существенное влияние на распределение усилий в оболочке.

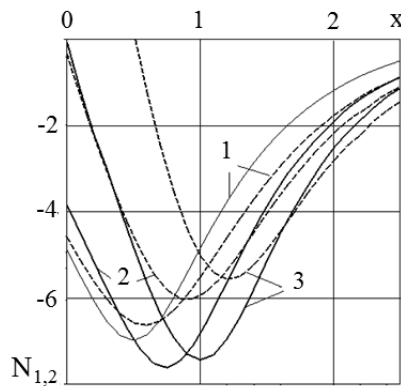


Рис. 3

На рис. 3 приведены графики распределения мембранных усилий N_1 и N_2 для ортотропного материала при $\varphi = 0, k_0 = 10$ при симметричном теплообмене ($Bi^\pm = 0, 1$) в зависимости от скорости движения источника тепла. Кривые 1 соответствуют случаю $v' = 1$, кривые 2 – $v' = 1,5$, кривые 3 – $v' = 2$.

Из рисунка видно, что распределение усилий существенно зависит от скорости движения источника тепла.

Заключение. Таким образом, исследования показали, что при определении мембранных усилий в ортотропных оболочках, находящихся под действием импульсного локального источника тепла, необходимо учитывать характер теплообмена и величину параметров теплообмена, а также скорость движения источника тепла.

1. Авраменко Л.Е. Теплопроводность и термоупругость тонких изотропных оболочек при импульсном нагреве движущимся источником тепла / Л.Е. Авраменко, В.П. Шевченко // Прикл. механика. 2006. – Т. 42, № 11. – С. 85 – 92.
2. Коваленко А.Д. Термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1975. – 302 с.
3. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
4. Подстригач Я.С. Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец. – К.: Наук. думка, 1978. – 343 с.

5. Levin P. A general solution 3-D quasi – steady – state problem of a moving heat source on a semi – infinite solid / P. Levin // Mechanics research communications. – USA, 2007. – P. 151–157.
6. Температурные напряжения и деформации в оболочках вращения средней толщины из функционально-градиентного материала при термическом импульсном нагружении / Takezono Shigeo, Tao Katsumi, Inamura Eijiroh, Ozawa Yoshihiro // Nihon Kikai gakkai ronbunshu. A. – 2000. – Vol. 66, N 645. – P. 1060 – 1067
7. Коляно Ю.М. Температурные напряжения от объемных источников / Ю.М. Коляно, А.Н. Кулик – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
8. Авраменко Л.Е. Термопружність ортотропних оболонок під дією рухомого зосередженого джерела тепла / Л.Е. Авраменко, В.П. Шевченко // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2009. – Т. 52, № 2. – С. 138 – 151.
9. Авраменко Л.Е. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
10. Рыкалин Н.Н. Тепловые процессы при сварке / Н.Н. Рыкалин. – М.: Изд-во АН СССР, 1953.– № 2. – 290 с.
11. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1963. – 253 с.
12. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: в 12т.; Т.7). – С. 159–196.
13. Шевченко В.П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.П. Шевченко. – Донецк: Изд-во Донецкого ун-та, 1977. – 114 с.
14. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учеб. пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
15. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон . – М.: Иностранная литература, 1955. – 667 с.
16. Авраменко Л.Е. Теплопроводность тонких ортотропных пологих оболочек под действием движущегося импульсного локального источника тепла / Л.Е. Авраменко // Проблемы прочности и пластичности. 2018. – Т. 20, № 4. – С. 466 – 476.
17. Авраменко Л.Е. Напряженно-деформированное состояние термоупругих ортотропных оболочек под действием движущегося импульсного локального источника тепла / Л.Е. Авраменко // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. 2018. – № 3-4 – С. 3–12.

L.Y. Avramenko

Influence of heat exchange parameters and the speed of a moving heat source on the distribution of forces in orthotropic shells.

The problem of thermoelastisity for a thin orthotropic shells non-negative curvature is solved at action moving on a surface of a shell of the local impulsive source of heat. Linear distribution of temperature on thickness of a shell and convection heat exchange under the law of Newton from its lateral surfaces was supposed. With the help of integrated transformations Fourier and Laplace the decision in an analytical kind is received. The influence of the size and nature of the heat exchange parameters, as well as the speed of the heat source on the distribution of forces in the shell is studied.

Keywords: *orthotropic shell, integrated transformations, impulsive source, thermoelastisity, heat-exchange.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.267.5:622.235.535

©2018. В.А. Канин

ПРИНЦИПЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВЫБРОСОВ УГЛЯ И ГАЗА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОСЛОЙНОГО РАЗРУШЕНИЯ УГЛЯ.

В статье рассмотрена принципиальная возможность локализации выбросов угля и газа в начальной стадии их развития на основе использования энергетически-силовой теории выбросов. Приведены результаты шахтных экспериментов, подтверждающих правомерность этой теории и ее практических приложений.

Ключевые слова: выбросы угля и газа, послойное разрушение угля, локализация выбросов в начальной стадии развития.

Введение. Существующая энергетически-силовая теория внезапных выбросов угля, породы и газа [1, 2] базируется на известных закономерностях формирования выбросоопасных ситуаций, инициирования, протекания и затухания процесса разрушения газонасыщенного угольного (породного) массива. Основные из них можно сформулировать следующим образом:

- выбросы угля и газа не происходят на не газовых и дегазированных пластах; на пологих пластах Донбасса верхняя граница выбросов располагается ниже границы метановых газов на 100-300 м;

- объем газа, выделяющегося при выбросах изменяется от нескольких десятков до нескольких сотен метров кубических на одну тонну выброшенного угля. По этой причине в XIX столетии подобные явления назывались «внезапными выделениями газа с выбросом измельченного угля»;

- разрушение угля при выбросе не является одномоментным актом; его продолжительность изменяется от нескольких секунд до нескольких десятков секунд и может состоять из нескольких фаз;

- образующиеся при выбросах полости чаще всего имеют узкую горловину и расширяются к средней части; иногда полости имеют причудливую разветвляющуюся форму, а между полостью и забоем может оставаться угольный целик;

- средний диаметр частиц выброшенного угля изменяется в пределах от 2 до 9 мм; преобладание плоских частиц с отношением максимального размера к минимальному 1,5-5,5 (в среднем 3,1) свидетельствует в пользу представлений о преимущественном разрушении угля при выбросе путем отрыва;

- для устойчивого протекания послойного разрушения угля не должны существовать механические препятствия, затормаживающие внезапный выброс в начальной стадии его развития.

Впервые идею остановки внезапного выброса угля и газа в начальной стадии его развития с использованием различных механических средств высказал А.Э. Некрасовский [3]. К этой мысли он пришел, наблюдая за работой старых опытных забойщиков, которые перед выемкой угля в восстающих печах возводили защитные деревянные полки, а при бурении в опасных зонах шпуров и скважин регулировали усилие нажима на буровой инструмент.

1. Математическая модель. В соответствии с энергетически-силовой теорией [1, 2] для устойчивого протекания выброса угля и газа необходимо обязательное выполнение энергетического условия, которое можно представить в виде соотношения, определяющего скорость массы угля и газа за фронтом волны дробления [1]

$$w = a_0 \sqrt{2} [\varkappa(\varkappa - 1)(1 + \varkappa)]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \zeta - B} \quad (1)$$

Исходя из этого условия, остановка выброса произойдет в том случае, если

$$1 - \zeta - B = 0, \quad (2)$$

где ζ – коэффициент, оценивающий часть внутренней энергии газа, которая расходуется на работу, совершаемую этим газом при расширении пустот угля к моменту его дробления; B – коэффициент, оценивающий потери энергии газа на преодоление сопротивления, оказываемого движущейся газо-угольной смеси давлением за фронтом волны дробления.

Если известно значение ζ , то используя соотношения

$$B = (\rho/\rho_0)^{n-1} \left\{ 1 + m_{\Gamma}(\varkappa - 1) \frac{(\rho_0/\rho) - 1}{1 + m_{\Gamma}[(\rho_0/\rho) - 1]} \right\}. \quad (3)$$

и

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^n \quad (4)$$

где ρ_0 и ρ – соответственно плотность газа перед фронтом волны дробления и за фронтом; p_0 и p – то же давление газа; n – показатель политропы; \varkappa – показатель адиабаты; m_{Γ} – коэффициент, оценивающий долю поверхности, к которой приложено давление газа перед фронтом волны дробления.

Можно определить $p = p_{кр}$, удовлетворяющее условию (2). Следовательно, нахождение давления $p_{кр}$, препятствующего распространению волны дробления, сводится к определению значения ζ .

Поскольку наибольшей частотой выбросов угля и газа характеризуется буровзрывная технология проведения выработок, то при решении указанной задачи принята следующая модель инициирования выбросов. Перемещение забоя выработки после взрывной отбойки угля происходит со скоростью порядка 30-50 м/с

и сопровождается перераспределением напряжений у вновь образуемой поверхности. При этом возникает волна упругой разгрузки, за фронтом которой происходит раскрытие тектонических трещин, а в окрестности пор и микротрещин при расширении заполняющего их газа создается предельно-напряженное состояние. При падении напряжений ниже критического уровня расширение газа в этих пустотах приводит к массовому прорастанию трещин, которое распространяется по массиву в виде волны разрушения и при соответствующих условиях может перерасти в волну дробления. В этом случае, полагая, что процесс расширения газа за фронтом волны упругой разгрузки до момента прорастания трещин является адиабатическим и что параметры начального состояния газа (p_1 и T_1) в пустотах одинаковы, соотношение, определяющее значение ζ , можно представить в виде

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^n v_{ni} \left[1 - (p_{0i}/p_0)^{(\alpha-1)/\alpha} \right]}{m_0 \left[1 - (p_a/p_0)^{(\alpha-1)/\alpha} \right]}, \quad (5)$$

где v_i – объем пустот i -того размера в единице объема угля; p_{0i} – давление газа в пустотах i -того размера за фронтом волны упругой разгрузки; p_a – атмосферное давление; m_0 – полный фильтрующий объем угля.

2. Выбор исходных данных. Значения p_{0i} в формуле (5) определялись с использованием решения задачи об изменении объема сферических и дискообразных пустот в упруго-изотропной среде под действием растягивающего напряжения [4]. Геометрические параметры пустот определялись по результатам исследований пористо-трещиноватой структуры угля [5], а значения приведенного диаметра частиц угля, разрушаемого при выбросах – по данным гранулометрического состава выброшенного угля [6].

Коэффициент m_T из-за отсутствия натуральных данных о росте трещин и разрушении угля под действием расширяющегося газа интерпретируется в настоящее время как доля поверхности, к которой приложено газовое давление. В этом случае при низкой водонасыщенности угля и равномерном распределении пор величина m_T примерно соответствует пористости угля. С таким физическим смыслом этот коэффициент использовался и при выводе соотношения (3). Вместе с тем следует отметить, что в сообщении массе раздробленного угля начальной скорости участвует не весь содержащийся в угле газ, а только та его часть, которая успевает выделиться за период времени между прохождением волн упругой разгрузки и дробления. Остальная часть газа выделяется из угля в процессе его перемещения по выработке. Поэтому при аналитическом описании процесса распространения волны дробления в угольном массиве m_T можно трактовать как коэффициент, оценивающий долю объема пор, которая содержит газ, участвующий в сообщении массе раздробленного угля начальной скорости. Его величина в этом случае будет определяться соотношением

$$m_{\Gamma} = q(t) p_{\Gamma} T_0 / p_0 T_{\Gamma} \quad (6)$$

где $q(t)$ – объем газа, выделяющийся из единицы объема угля к внутренним поверхностям отрываемых частиц из пор, трещин и сорбционного объема угля за время $t = 2 \cdot 10^{-4}$ с, что соответствует скорости распространения разрушения массива при выбросе 0,6-1,5 м/с [7] и толщине отрываемого слоя 0,02 см.

3. Результаты расчетов. Полученная на основании выполненных расчетов результирующая зависимость $p_{kp} = f(p_0)$ приведена на рис. 1. Из нее следует, что величина противодействия, необходимого для локализации выбросов в начальной стадии их развития, значительно меньше давления газа, заключенного в угольном пласте, и на максимальных глубинах разработки выбросоопасных пластов в Донбассе не превышает 0,4 МПа.

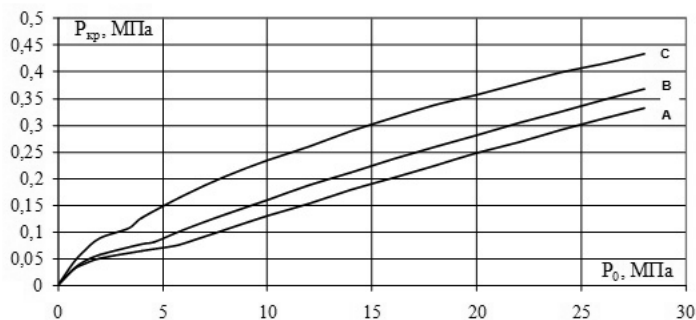


Рис. 1. Графики зависимости p_{kp} от p_0 при различной категории нарушения угля: А – слабо нарушенный (I и II тип); В – средней нарушенности (III тип); С – сильно нарушенный (IV и V тип).

Сравнение значений p_{kp} с динамическими нагрузками, которые были рассчитаны по величине скорости массы угля и газа за фронтом волны дробления (w), найденной из выражения (1), показало (табл. 1), что критические значения давления газа за фронтом волны дробления во всем диапазоне изменения горно-геологических условий и степени нарушения угля превышают динамические нагрузки от скоростного напора ($p_{ск}$) и воздушной ударной волны ($p_{уд}$) и являются наибольшим силовым фактором, который необходимо учитывать при разработке средств локализации выбросов угля и газа.

При выполнении аналитических исследований были определены также значения объемной концентрации твердой фазы в газо-угольной смеси (β). В настоящее время зависимости от величины β выделяются:

- поток газозвеси ($\beta < 0,03$),
- флюидный поток ($0,03 < \beta < 0,3$),
- поток в плотной фазе ($0,3 < \beta < 0,7$),
- гравитационно движущийся слой ($\beta > 0,7$).

Таблица 1. Сравнение значений $p_{кр}$ с динамическими нагрузками за фронтом волны дробления.

p_0 , МПа	$(p_{кр} - 0,1)$, МПа	$p_{ск}$, МПа	$p_{уд}$, МПа
<i>При категории нарушенности угля А</i>			
8	0,004	0,002	0,002
10	0,030	0,016	0,005
18	0,124	0,067	0,012
26	0,212	0,112	0,018
<i>При категории нарушенности угля С</i>			
8	0,007	0,005	0,003
10	0,134	0,089	0,016
18	0,238	0,149	0,024
26	0,315	0,191	0,030

В нашем случае значения объемной концентрации твердой фазы в газо-угольной смеси, как это показано на рис. 2, составили $0,10 < \beta < 0,35$.

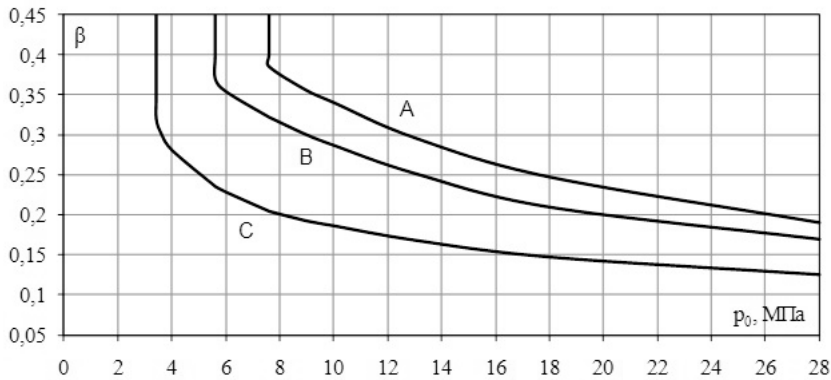


Рис. 2. Графики зависимости $p_{кр}$ от p_0 при различной категории нарушенности угля: А – слабо нарушенный (I и II тип); В – средней нарушенности (III тип); сильно нарушенный (IV и V тип)

Из представленных на рисунке данных следует вывод, что в типичных условиях производства взрывных работ на выбросоопасных пластах Донбасса, в случае инициирования выброса угля и газа движение газо-угольной смеси в начальной стадии выброса происходит в режиме флюидного потока. Кризис течения такого потока наступает при скорости газа $w_{кр} = 10-15$ м/с, ниже которой начинается интенсивное осаждение угольных частиц. Следовательно, для исключения возможности распространения твердой фазы газо-угольного потока через некую преграду его скорость должна быть уменьшена до уровня $w \leq w_{кр}$.

4. Практическое применение. В качестве одного из вариантов технического средства локализации выброса угля и газа можно рассматривать разрушенную породу, располагающуюся у забоя выработки после производства

взрывных работ. Известно [8], что формирование породного развала при сотрясательном взрывании происходит в течение 0,13-0,30с, а длительность подготовительного периода выбросов, спровоцированных взрывной отбойкой угля подчиняется логнормальному распределению с параметрами $\mu_L = -0.285$ и $\sigma_L^2 = 0.426$, поэтому вероятность того, что породный развал будет образован до начала развязывания выброса, составляет 0.921-0.997. При инициировании выброса газо-угольный поток поступает в пустоты породного развала с начальной скоростью w_1 . В процессе своего движения в результате потерь напора, обусловленных силами вязкого трения, изменением направления движения, увеличением площади фильтрации и т.п., скорость потока снижается до величины w_2 . При соответствующей высоте породного развала l скорость w_2 может уменьшиться до уровня $w_{кр}$, при котором флюидный поток существовать не может. Тогда на участке развала, начиная с которого $w_2 = w_{кр}$, начнется интенсивное осаждение угольных частиц. По мере заполнения фильтрующих каналов развала выброшенным углем его проницаемость будет снижаться, достигая в пределе проницаемости выброшенного угля. Одновременно с этим будет происходить увеличение давления газа за фронтом волны дробления от p_1 до p_2 . При $p_2 = p_{кр}$ распространение волны дробления в угольном массиве прекратиться.

Определение параметра l , удовлетворяющего фильтрационному условию локализации выбросов $w_2 \leq w_{кр}$, выполнялось путем оценки потерь давления, обусловленных действием сил вязкого трения при турбулентной фильтрации газа по формуле

$$l = (w_1^2 \rho_1 - w_2^2 \rho_2) k_T^2 / 2w_2^2 n^2, \quad (7)$$

где k_T – коэффициент турбулентной фильтрации; n – величина просвета перемычки в направлении фильтрации; а высота, обеспечивающая устойчивость развала к сдвигающему усилию, действующему на его внутреннюю поверхность со стороны полости выброса, определялась из условия предельного равновесия сыпучего материала (разрушенной породы) в призабойной зоне выработки.

Заключение. Разработанный на основе изложенных соображений способ локализации насыпными породными перемычками выбросов угля и газа, спровоцированных сотрясательным взрыванием в подготовительных выработках, был включен в отраслевой нормативный документ [9]. При использовании этого способа на шахтах, разрабатывавших особо выбросоопасный пласт h_8 («Восточная», «Глубокая», ш/у «Донбасс») были получены как визуальные, так и инструментальные (по сейсмограммам и аппаратуре контроля метана) подтверждения целого ряда случаев, когда выбросы угля и газа были локализованы в пределах породного развала в начальной стадии своего развития. Причем эти локализованные выбросы по удельному объему выделившегося газа, по характеру разрушения и гранулометрическому составу выброшенного угля, по характеристикам сейсмограмм акустических сигналов, зарегистрированных при разрушении угля, практически ничем не отличались от обычных выбросов, за исключением количества выброшенного угля, который располагался исключи-

тельно в пределах породного развала, и небольшой полости в краевой части пласта, забученной угольной мелочью.

1. Христианович С.А. Свободное течение грунтовой массы, вызванное расширением содержащегося в порах газа высокого давления. Волна дробления / С.А. Христианович. – М.: Ин-т проблем механики АН СССР. – 1979. – 61 с.
2. Петухов И.М. Механизм развязывания и протекания выбросов угля (породы) и газа / И.М. Петухов, А.М. Линьков // Основы теории внезапных выбросов угля, породы и газа: Сб. науч. тр. – М.: Недра, 1978. – с. 62–91.
3. Некрасовский Я.Э. Разработка пластов подверженных внезапным выбросам угля и газа / Я.Э. Некрасовский. – Москва-Харьков: Углетехиздат, 1951. – 223 с.
4. Коваленко Ю.Ф. Элементарный акт явления внезапного выброса. Выброс в скважину / Ю.Ф. Коваленко. – М.: Ин-т проблем механики АН СССР. – 1980.- 44 с.
5. Иванов Б.М. Механические и физико-механические свойства углей выбросоопасных пластов / Б.М. Иванов, Г.Н. Фейт, М.Ф. Яновская. – М.: Наука, 1979. – 196 с.
6. Канин В.А. Особенности угля, разрушенного при внезапных выбросах / В.А. Канин // Уголь. – 1979. - № 6. – С. 58–60.
7. Статистический анализ параметров выбросов угля, породы и газа, отражающих динамику процесса / Г.А. Шевелев, В.А. Бушева, Н.Ф. Трофимова [и др.] // Разработка месторождений полезных ископаемых. – 1980. – Вып. 56. – С. 32-34.
8. Канин В.А. Длительность подготовительного периода выбросов угля и газа, спровоцированных сотрясательным взрыванием / В.А. Канин, А.Е. Жуков // Безопасность труда в промышленности. – 1988. – № 5. – С. 17-19.
9. Руководство по выбору способов сотрясательного взрывания, снижающих интенсивность и частоту выбросов угля и газа. – Макеевка: Донбасс, 1986. – 27 с.

V.A. Kanin

Principles of elimination of coal-and-gas outbursts based on the theory of layer-by-layer coal destruction.

The article discusses the possibility of eliminating coal-and-gas outbursts in the initial stage of their development based on the energy-force outburst theory. The results of experiments in mines are given that prove the theory and its practical applications.

Keywords: *coal-and-gas outbursts, layer-by-layer coal destruction, elimination of coal-and-gas outbursts in the initial stage of development.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 14.08.18

УДК 622.83

©2018. Ф.М. Голубев

ОСОБЕННОСТИ ПРОГНОЗА ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ПОДЗЕМНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ ПРИ ОТРАБОТКЕ И ЗАТОПЛЕНИИ ОЧИСТНЫХ ВЫРАБОТОК

В статье рассмотрены основные проблемы прогноза напряжений в трубопроводе, вызванных подработкой земной поверхности. Описан метод прогноза концентрации напряжений в конкретных расчетных точках. Проанализированы риски активизации геомеханических процессов при ликвидации угольных шахт для ряда трубопроводных коммуникаций.

Ключевые слова: сдвигения земной поверхности, затопление горных выработок, подработка, газопровод.

Введение. В условиях многократной подработки земной поверхности горными выработками, деформации трубопроводов по их длине могут сильно варьироваться. Существующая методика расчета газопроводов на прочность с учетом влияния на них горных выработок [2,3] позволяет определять максимальные напряжения для всего участка полумульды, при этом лишь вскользь упоминая о возможности выявить, в какой точке полумульды значения напряжений в газопроводе начинают превышать предельно допустимое, и в какой точке заканчивают. Это часто делает необходимым вскрытие всего газопровода, в пределах мульды сдвижения, что требует значительных финансовых и человеческих ресурсов. Актуален также вопрос прогноза напряжений в газопроводах на полях ликвидируемых шахт.

1. Постановка задачи и анализ полученных результатов. В случаях, когда газопровод полностью пересекает мульду сдвижения (рис. 1), характер распространения напряжений в газопроводе аналогичен характеру распространения горизонтальных (относительных) деформаций земной поверхности в пределах участка мульды, в котором проходит труба (рис. 2).

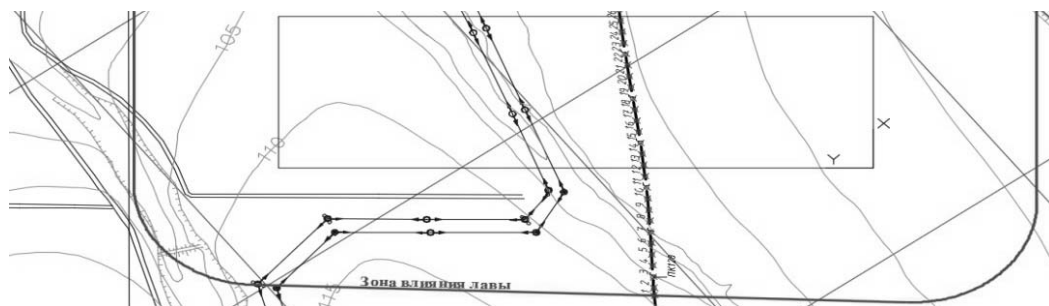


Рис. 1. Пример пересечения мульды газопроводом высокого давления.

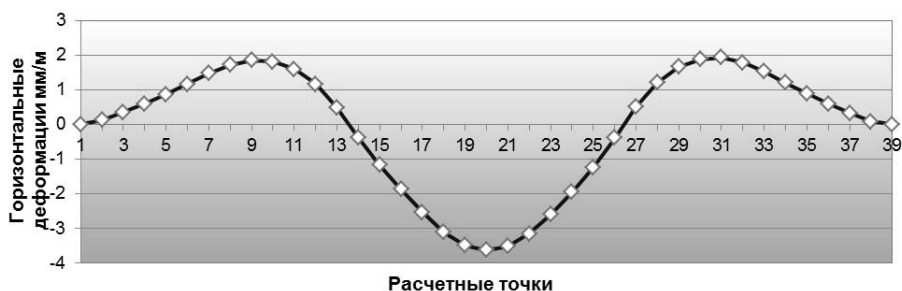


Рис. 2. Продольные горизонтальные деформации в пределах мулды сдвига рассчитанные по отраслевому стандарту [1].

График напряжений, в отличие от деформаций не сводится к нулю на краях мулды, так как напряжения, вызванные деформацией грунта в пределах зоны влияния очистной выработки распространяются на определенном участке трубопровода и за ней. Длину участка трубопровода, находящегося вне зоны влияния очистной выработки, однако подверженного воздействию напряжений, вызванных сдвигами и деформациями земной поверхности, можно определить основываясь на данных [2] при помощи зависимости отраженной на рис. 3.

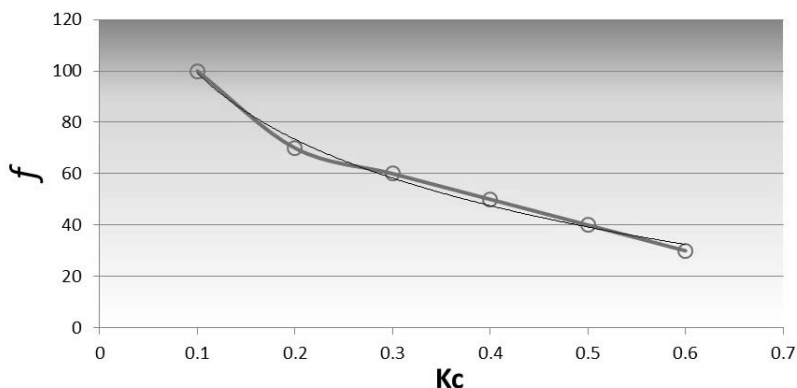


Рис. 3. Зависимость длины участка трубопровода, находящегося за пределами зоны влияния очистной выработки, но испытывающего влияние повышенных напряжений, вызванных подработкой, от коэффициента упругого сдвига грунта.

Описать такой график можно следующей логарифмической зависимостью

$$f = -37.31 \times \ln(K_c) + 13.339,$$

где K_c – коэффициент упругого сдвига грунта определяемый по формуле (1)

$$K_c = 10^3 \sqrt{\frac{Q_0}{E \delta \Delta_0}}; \quad (1)$$

Q_0 – предельная величина силового воздействия грунта на трубу при взаимных перемещениях вдоль газопровода, определяемая по формуле (2); E – модуль упругости стали; δ – толщина стенки труб; Δ_0 – величина критического сдвига грунта вдоль газопровода, принимаемая для суглинков равной 2 см;

$$Q_0 = K_9(K_m \gamma_3^n H_3 \text{tg} \varphi_3^n + C^n); \quad (2)$$

K_9 – коэффициент, зависящий от срока эксплуатации газопровода определяется по зависимостям приведенным на рис. 4; K_m – коэффициент концентрации нагрузок, принимаемый по табл. 20 [2]; γ_3^n – удельный вес грунта, принимаемый равным $0,0185 \text{ МН/м}^3$; φ_3^n – угол внутреннего трения грунта, принимаемый равным 22° ; C^n – удельное сцепление грунта, принимаемое равным $0,020 \text{ МПа}$; l – длины участков однозначных деформаций растяжения грунта в полумульдах.

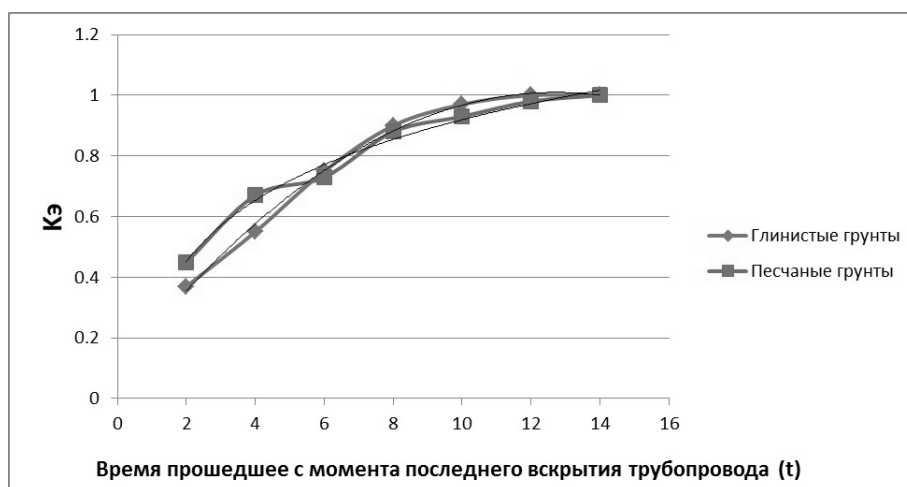


Рис. 4. Зависимость коэффициента K_9 от времени, прошедшего с момента последнего вскрытия трубопровода.

Исходя из приведенных на рисунке графиков определить коэффициент зависящий от срока эксплуатации газопровода в глинистых грунтах можно следующим образом:

$$K_9 = 0.29 \ln(t) + 0.25. \quad (3)$$

Для песчаных грунтов определение коэффициента зависящего от срока эксплуатации газопровода происходит при помощи следующей зависимости:

$$K_9 = -0.0057t^2 + 0.1447t + 0.0886 \quad (4)$$

где t – время, прошедшее с момента последнего вскрытия трубопровода.

Для определения напряжений в каждой точке трубопровода, согласно классическим методам [3], необходимо рассчитать максимальное смещение трубопровода в растянутых участках, которое может быть выполнено по формуле:

$$\lambda_0 = 0.5 \left[\psi_1 - \sqrt{\psi_1^2 - 3.75 \frac{Q_0 l^2 \xi_0 \Phi_1}{E \delta}} \right], \quad (5)$$

где ψ_1 – значение определяемое по формуле:

$$\psi_1 = 0.2\Delta_0 + \xi_0 + \frac{Q_0 l^2 \Phi_1}{E \delta}; \quad (6)$$

Δ_0 – величина критического сдвига грунта вдоль трубопровода, 2 см для суглинков; ξ_0 – максимальные горизонтальные сдвиги в растянутых участках трубопровода, определяемые по графику смещения земной поверхности; Φ_1 – безразмерный коэффициент, определяемый по формуле (7).

При отработке лав по падению для определения максимальных горизонтальных сдвигов необходимо использовать результаты их динамического расчета и деформаций земной поверхности, так как в таких случаях промежуточные значения деформаций могут существенно превышать значения, установившиеся в по окончании процесса сдвижения.

$$\Phi_1 = 0.9 - 0.65 \text{Sin} \left(\frac{l}{l_T} - 0.5 \right) \pi. \quad (7)$$

Используя приведенные выше зависимости, можно рассчитать напряжения в любой точке трубопровода:

$$\sigma_\xi = 1.57 \frac{E \lambda_0}{l_T} \times \text{Sin} \frac{\pi x}{l_T}, \quad (8)$$

где E – модуль упругости стали; λ_0 – максимальное смещение трубопровода в растянутых участках; l_T – длина участка газопровода с учетом его деформаций за пределами смещения земной поверхности; x – точка, в которой производится расчет.

Выявление точек, в которых напряжение будет превышать допустимое, в таком случае позволяет рационализировать затраты на проведение вскрытия трубопровода (пример определения превышения в точках показан на рис. 5).

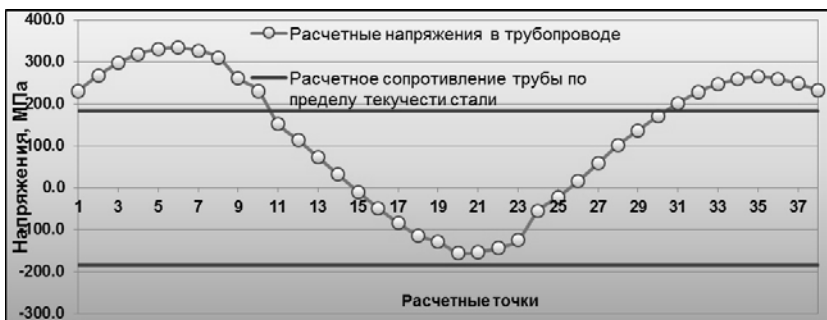


Рис. 5. График распространения напряжений в трубопроводе.

Такой график позволяет определить участки поверхности, где необходимо выполнить вскрытие (рис. 6).

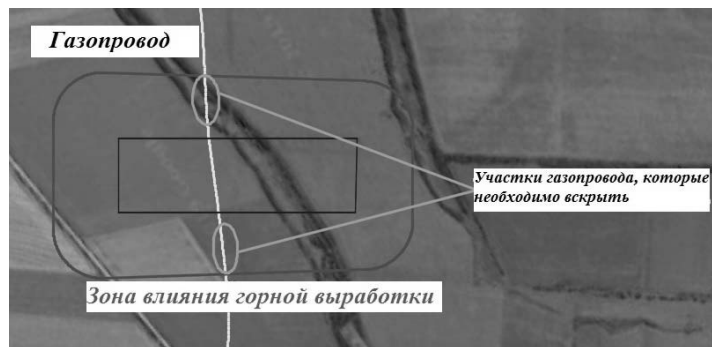


Рис. 6. Схема вскрытия газопровода.

Стоит отметить, что расчетное сопротивление трубы по пределу текучести стали с учетом коэффициента условий работы варьируется в зависимости от марки стали от 180 до 220 МПа. Практика показывает, что достижение предельно допустимых значений для трубопроводов возможно при размерах максимальных горизонтальных сдвижений от 220 мм. Развитие таких горизонтальных сдвижений происходит не только при подработке земной поверхности очистными выработками, но и при затоплении горнодобывающих предприятий. Так, расчет деформаций земной поверхности от активизации геомеханических процессов при затоплении угледобывающих предприятий для 9 шахт Центрального района Донбасса согласно методике [4] показал, что горизонтальные сдвигения на горных отводах ликвидируемых шахт в результате активизации геомеханических процессов могут достигать 400 миллиметров (рис. 7).

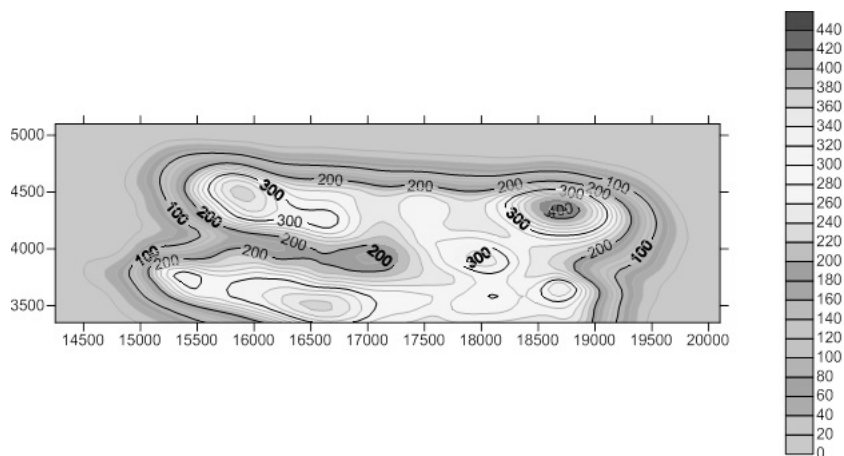


Рис. 7. Прогнозируемые горизонтальные сдвигения на поле шахты Красный Профинтерн.

Горизонтальные (относительные) деформации согласно расчетным данным

при затоплении горнодобывающих предприятий на некоторых участках могут превышать 2 мм/м (рис. 8).

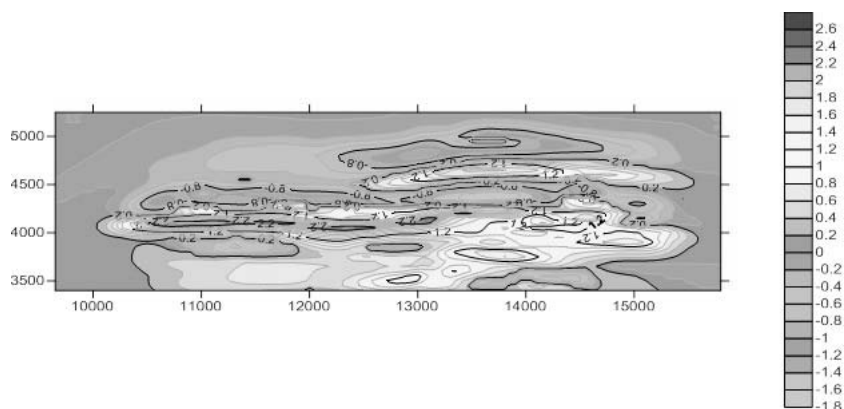


Рис. 8. Прогнозируемые горизонтальные деформации на поле шахты Карла Маркса.

В условиях Донбасса, где большинство трубопроводов укладывается в су-глинки, такой показатель, согласно отраслевому стандарту [1], превышает нормативные допустимые значения для целого ряда трубопроводных коммуникаций:

- подземных газопроводов из стали с пределом текучести до 245 МПа;
- подземных, секционных водопроводов из чугунных раструбных труб диаметром менее 500 миллиметров;
- канализационных сетей.

Выводы. На основании вышесказанного можно сделать следующие выводы:

1. Оптимизация расчета напряжений в газопроводе, вызванных подработкой земной поверхности, с привязкой к местности позволяет рационализировать порядок вскрытия трубопровода.
2. Несмотря на безопасность подъема уровня воды в ликвидированных выработках для сохранности большинства зданий, деформации, вызванные затоплением шахт, могут представлять опасность для подземных газопроводов, а также других видов трубопроводов.
3. Выявление точек, в которых напряжение будет превышать допустимое, в масштабах шахтного поля при ликвидации угледобывающих предприятий требует проведения дополнительных исследований, которые позволят рационализировать затраты на проведение вскрытия трубопроводов.

1. ГСТУ 101.00159226.001 – 2003 Правила підробки будівель, споруд і природних об’єктів при видобуванні вугілля підземним способом. Введ. 01.01.2004.– К., 2004. – 128 с.
2. Руководство по проектированию зданий и сооружений на подрабатываемых территориях. Часть III. Башенные, транспортные и заглубленные сооружения, трубопроводы / Донецкий Промстройинститут, НИИСК Госстроя СССР. – М.: Стройиздат, 1986. – 225 с.
3. РДИ 204 УССР 025-91. Инструкция по проектированию защиты, строительству и эксплуатации газопроводов на территории угольных бассейнов Украинской ССР / Донецкий

Промстройниипроект. – Донецк, 1991.– 58 с.

4. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004- 98: Утв. Министерством угольной промышленности Украины 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.

Ph.M. Golubev

Predicting considerations of mine subsidence impact on the buried pipelines when mining and flooding with water production workings.

The article presents the points of concern in predicting stresses in the pipeline due to mine subsidence. A method to predict accumulation of stresses in specific check points is described. Risks of intensification of geomechanical processes when coal mines are being abandoned are assessed for a number of pipeline communications.

Keywords: *mine subsidence, flooding workings with water, impacts of underground mining on overlying structure, gas pipeline.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 11.09.18

УДК 622.831.24

©2018. Н.И. Лобков

ОСОБЕННОСТИ РАЗРУШЕНИЯ ПОРОДНОГО СЛОЯ В ЗОНЕ ОПОРНОГО ДАВЛЕНИЯ ВПЕРЕДИ ЛАВЫ

В результате физического и компьютерного моделирования установлено, что разрушение породного слоя над выработанным пространством происходит при возникновении и распространении по всей мощности трещины разрушения. Критерием разрушения является эффективная поверхностная энергия породы, как интегральная характеристика трещинообразования.

Ключевые слова: породный слой, опорное давление, лава, разрушение слоя, разрушающая трещина, продвижение, выработанное пространство.

Введение и постановка задачи. С удалением забоя лавы от разрезной печи увеличивается длина породных слоев кровли, залегающих над выработанным пространством. Породные слои можно рассматривать как плиты, заземленные с четырех, трех и двух сторон (рис. 1).

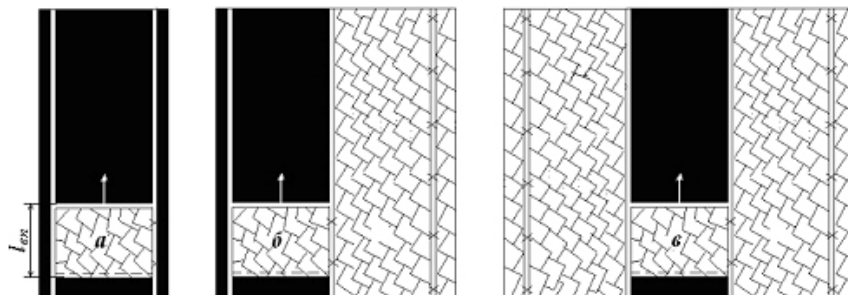


Рис. 1. Положение лавы относительно выработанного пространства: а – одиночная лава в массиве угля; б – лава, примыкающая к выработанному пространству; в – лава, которую с двух сторон окружает выработанное пространство ранее отработанных лав.

С ростом длины выработанного пространства $l_{вн}$, увеличивается число изгибающихся породных слоев, участвующих в формировании давления на опору, увеличиваются горизонтальные и вертикальные напряжения в слоях.

При определенных величинах пролета слоя $l_{вн}$ происходит его обрушение (посадка кровли), что является основной причиной снижения уровня безопасности работ и ведет к простоям очистного забоя. Величина шага посадки породного слоя $l_{вн}$ зависит от характера его разрушения в процессе ведения очистных работ.

Целью работы является установление особенностей разрушения породного слоя, изгибающегося над выработанным пространством.

Каждый породный слой кровли пласта над выработанным пространством можно представить тонкой плитой [1]. Максимальный изгиб центра плиты ана-

логичен изгибу балки, жестко заземленной на опорах, с ошибкой менее 1% [2]. Балка, достигнув предельного пролета (пролет перед обрушением) обрушается, или, как говорят, теряет свою прочность.

В последнее время в горной механике получили развитие механические теории прочности, учитывающие среднее по величине главное напряжение. Эти теории прочности большей частью применяются при расчетах разрушения пород вокруг подготовительных горных выработок, где на действие горного давления не влияют очистные работы, то есть, оно стабилизировалось и является практически постоянным в процессе эксплуатации выработки. При работе очистного забоя происходит практически постоянное его подвигание, рост пролета слоя кровли и изменение действующих напряжений. Кроме того, механические теории прочности являются феноменологическими [2], поскольку дают внешнее описание разрушения и не раскрывают его внутреннего механизма. Причиной этого являются методы испытания образцов массива, направленные на установление предельных значений напряжений на сжатие и растяжение. Эти испытания ведут к большим погрешностям. Ошибки возникают из-за недостаточного учета микродефектности горного массива. Подобный учет микродефектов материала позволяет осуществлять теория трещинообразования. Хрупкое разрушение горных пород удовлетворительно описывается с помощью микродефектной теории прочности или теории трещинообразования, которая лежит в основе критерия разрушения А. Гриффитса и раскрывает внутренний механизм хрупкого разрушения [3,4]. Согласно теории А. Гриффитса концентраторы напряжений типа трещин, включений менее прочного материала и других микродефектов, являются причиной разрушения хрупких материалов. Разрушение начинается тогда, когда на контуре дефектов растягивающие напряжения достигают предела прочности молекулярных связей.

1. Анализ результатов моделирования. Результаты физического моделирования поведения породного массива над выработанным пространством лав, дающие качественную картину сдвижения породных слоев, позволили установить, что обрушение слоя происходит при превышении предельного пролета. Обрушению предшествует разрушение слоя за счет возникновения трещины на верхней кромке и распространение ее до нижней кромки. После пересечения трещиной слоя по всей мощности происходит его обрушение (рис. 2).

Вид трещины и характер ее роста дают возможность представлять характер ее возникновения от действия растягивающих напряжений.

Компьютерное моделирование изгиба породных слоев над выработанным пространством дает возможность исследовать изменение напряжений в породных слоях при сдвижении (рис. 3). На рисунке 3 приведены полупролеты изгибающихся породных слоев над выработанным пространством.

На верхних кромках слоев непосредственной кровли и несущего слоя группы слоев основной кровли наблюдаются концентрации горизонтальных растягивающих напряжений (растягивающие напряжения со знаком плюс). Результаты компьютерного моделирования концентрации растягивающих напряжений на

верхней кромке породного слоя, а также представленное на рисунке 2 расположение разрушающей трещины, позволяют утверждать, что зарождение трещины произошло на верхней кромке слоя.

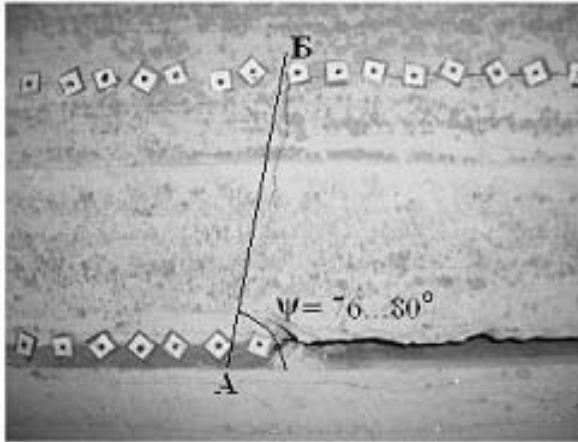


Рис. 2. Расположение трещины в породном слое при его обрушении: АБ – линия обрушения пород.

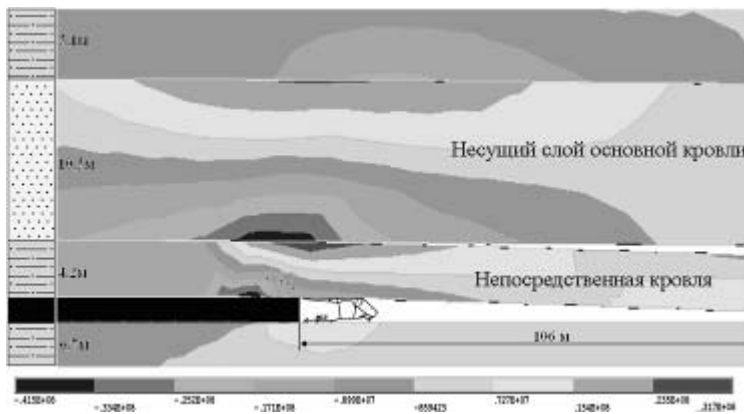


Рис. 3. Распределение горизонтальных напряжений в изгибающихся слоях.

По А. Гриффитсу разрушение хрупких материалов начинается тогда, когда растягивающие напряжения на контуре концентраторов напряжений типа трещин, включений менее прочного материала и других микроскопических дефектов, достигают прочности молекулярных связей [5].

Модель образования трещины [6] в точке А приведена на рисунке 4.

Под действием максимальных горизонтальных растягивающих напряжений от верхней кромки слоя начинает развиваться трещина. С достижением трещиной длины a , максимум растягивающих напряжений смещается вниз на такое же расстояние. При этом увеличивается максимальная величина горизонтальных напряжений. Увеличение действующих горизонтальных напряжений

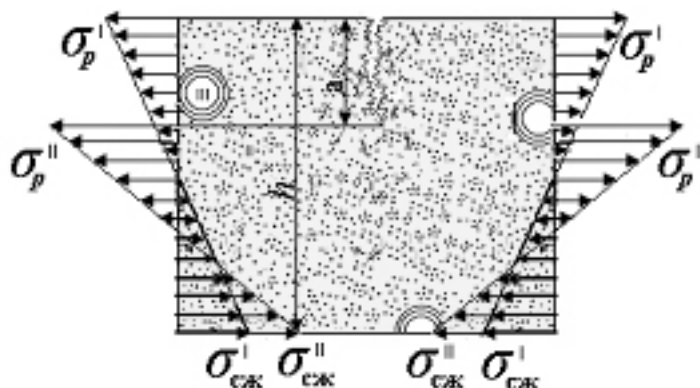


Рис. 4. Модель образования и развития трещины в породном слое: a – длина трещины.

ведет к увеличению скорости развития трещины и ее распространению к нижней кромке слоя. Увеличение растягивающих горизонтальных напряжений с увеличением длины трещины a обеспечивает ее практически мгновенное распространение от верхней кромки слоя к нижней. Обрушение породного слоя происходит при пересечении его трещиной по всей мощности.

Величина горизонтальных напряжений в породном слое может быть определена, как для изогнутой балки при ее жестком защемлении с двух сторон на опорах [7]:

$$\sigma_{\rho} = \frac{ql_{np}^2}{2h^2}, \text{ МПа.} \quad (1)$$

При изгибе консольной балки с жестким защемлением:

$$\sigma_{\rho} = \frac{3ql_{np}^2}{h^2}, \text{ МПа.} \quad (2)$$

Здесь q – распределенная нагрузка на породный слой, Мн/м^2 ; l_{np} – предельный пролет слоя перед обрушением, м; h – мощность несущего породного слоя, м.

Величина распределенной нагрузки, обусловленная весом одного слоя, имеет вид

$$q_i = \gamma h, \text{ Мн/м}^2 \quad (3)$$

где γ – объемный вес породы, Мн/м^3 .

Величина распределенной нагрузки, обусловленная весом группы слоев, выражается соотношением

$$q = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i, \text{ Мн/м}^2 \quad (4)$$

где Σq – суммарная нагрузка группы слоев, Мн/м^2 ; n – количество слоев в группе.

С учетом нарушенности вмещающего массива, разрушение породного слоя при изгибе начнется с роста существующей трещины, критическая длина которой определится из выражения:

$$l_{кр} = \frac{2EG_c}{\pi\sigma_p^2}, \text{ м} \quad (5)$$

где G_c – эффективная поверхностная энергия, Дж/м²; σ_p – предел прочности породы на растяжение, МПа.

Энергетический критерий разрушения преимущественно используется в настоящее время при расчете на прочность металлических конструкций. Так как горные породы относятся к хрупким твердым телам, ослабленным различными дефектами типа трещин, включений более слабых материалов, то при рассмотрении процесса разрушения необходимо использовать параметр, который характеризует способность материала сопротивляться возникновению и развитию трещин.

Установлено, что на зарождение и рост трещин в твердых телах расходуется упругая энергия [8], которая является основной характеристикой процесса разрушения. А. Гриффитс [4] отождествлял эту энергию с поверхностной. Трещинообразование в твердых телах описывается в настоящее время с помощью силового и энергетического критериев разрушения. Силовой критерий характеризует разрыв межатомных связей за период времени, равный периоду межатомных колебаний, и является достаточным. Энергетический критерий определяет возможность разрыва связей и является необходимым [9].

Многочисленные исследования разрушения твердых тел указывают на то, что любое разрушение сопровождается пластическими деформациями, а в хрупких телах отмечается малая величина пластического деформирования. Сосредоточение пластических деформаций наблюдается в зоне действия максимальных напряжений, зона пластических деформаций существует у вершины трещины, что требует определенных энергетических затрат. В связи с этим, кроме поверхностной энергии необходимо учитывать энергию пластической деформации, энергию накопления упругой деформации материала на краях растущей трещины, кинетическую энергию нарушенных частей, энергию выделения поверхностного заряда и трения на берегах трещины. Эта суммарная энергия носит название эффективной поверхностной энергии (ЭПЭ). ЭПЭ суммарно учитывает все процессы, поглощающие энергию перед фронтом трещины. Поэтому ЭПЭ является наиболее полной характеристикой сопротивляемости горных пород разрушению. Эффективная поверхностная энергия является постоянной характеристикой материала и определяется в лабораторных условиях. Подставляя значения действующих напряжений (1)–(3) в (5) и проводя преобразования, получаем выражения для определения предельного пролета кровли над выработанным пространством.

При первичном обрушении породного слоя

$$l_{np}^2 = \frac{2h_c}{\gamma_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{kp}}}, \text{ м}^2 \quad (6)$$

где l_{np} – предельный пролет породного слоя перед первичной посадкой, м; h_c – мощность рассчитываемого слоя, м; γ_c – объёмная масса породы, Н/м³; l_{kp} – критическая длина трещины в слое, м.

При первичном обрушении группы слоев

$$l_{np}^2 = \frac{2h_c^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{kp}}}, \text{ м}^2 \quad (7)$$

где $\sum_{i=1}^n \gamma_c h_c$ – распределенная нагрузка группы слоев, МН/м².

При вторичном обрушении породного слоя

$$l_{np}^2 = \frac{h_c}{3\gamma_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{kp}}}, \text{ м}^2. \quad (8)$$

При вторичном обрушении группы слоев

$$l_{np}^2 = \frac{h_c^2}{3 \sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{kp}}}, \text{ м}^2. \quad (9)$$

Выводы. Таким образом, вышеизложенное позволяет сделать следующие выводы.

1. В процессе изгиба слоя над выработанным пространством на верхней его кромке в месте заделки над пластом и на нижней кромке в середине выработанного пространства концентрируются горизонтальные растягивающие напряжения, достигающие максимума перед обрушением породного слоя.

2. Разрушение происходит за счет образования трещины на верхней кромке слоя, развития её до пересечения слоя по всей мощности.

3. Разработана гипотеза разрушения породных слоев над выработанным пространством при ведении очистных работ, представляющая процесс разрушения слоя как образование и развитие трещины, пересекающей слой по всей мощности. Критерием разрушения служит эффективная поверхностная энергия породы, как интегральная характеристика трещинообразования.

4. Обрушение породного слоя над выработанным пространством происходит в результате возникновения и распространения трещины по всей мощности от верхней кромки до нижней.

1. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин / И.Г. Бубнов. – М.: Государственное изд-во техн.-теор. лит., 1953. – 423 с.

2. *Баклашов И.В.* Деформирование и разрушение породных массивов / И.В. Баклашов. – М.: Недра, 1988. – 271 с.
3. *Алексеев А.Д.* Предельное состояние горных пород / А.Д. Алексеев, Н.В. Недодаев. – Киев: Наукова думка, 1982. – 200 с.
4. *Griffiths A.* The phenomenon of rupture and flow in solids / A. Griffiths // Phil. Trans, Roy. Soc. – 1920. – V. 220. – P. 150–160.
5. *Griffiths A.* The theory of rupture / A. Griffiths // Proceeding of 1-st International Intq. Appl. Mech. – Delft, 1924. – P. 55–63.
6. *Лобков Н.И.* Определение разрушающих напряжений при первичной посадке кровли / Н.И. Лобков, А.И. Сергиенко, Е.Н. Халимендигов // Вісті Дніецького гірничого інституту. – 2008. – № 2.– С. 79–86.
7. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Учебник под. Ред Г.С. Варданяна – М., Издательство АСВ, 1995.– 568 с.
8. *Партон В.З.* Механика разрушения: От теории к практике / В.З. Партон.– М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., – 1990. – 240 с.
9. *Клочко И.И.* Формирование разрушающих напряжений в породных слоях при ведении очистных работ / И.И. Клочко, Н.И. Лобков // Вісті Донецького гірничого інституту. – 2011. – № 1. – С. 106–111.

N.I. Lobkov

Rock layer fracturing behavior within the bearing pressure zone ahead of longwall face.

Physical and computer simulations show that failure of rock layer over the mined out area arises when the fracture crack occurs and spreads over the whole thickness of the fracture crack. The failure criterion is the effective surface energy of rock as an integral characteristic of fracturing.

Keywords: *rock layer, bearing pressure, longwall panel (face), failure of the layer, breaking fracture, advance, mined out area.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 12.10.18