

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 1 (66)

2019

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: В.И. Сторожев

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: С.А. Калоеров

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: Пачева М.Н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Анциферов А.В.

Белоусов В.В.

Болнокин В.Е.

Болонов Н.И.

Ватульян А.О.

Вовк Л.П.

Глазунов В.А.

Глухов А.А.

Гольцев А.С.

Горр Г.В.

Губанов В.В.

Дрибан В.А.

Ковалев А.М.

Коносевиц Б.И.

Левин В.М.

Муцанов В.Ф.

Недопекин Ф.В.

Петраков А.А.

Судаков С.Н.

Улитин Г.М.

Шалдырван В.А.

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71
E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 1 (66) / 2019

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика жидкости, газа и плазмы

- Сторожев С.В., Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг* Учет неопределенности экзогенных параметров при моделировании процессов распада струи жидкости в пневматических распылителях 3

Механика деформируемого твердого тела

- Вовк Л.П., Кисель Е.С.* Моделирование распространения трещины из вершины острого v-образного выреза модели, ослабленной разгружающим отверстием..... 18
- Моисеенко И.А., Моисеенко В.А.* Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения..... 31
- Болнокин В.Е., Прийменко С.А., Номбре С.Б., Сторожев С.В.* Нечетко-множественная методика учета неопределенности исходных данных в моделях расчета скоростей ультразвуковых волн в пьезоэлектрических материалах..... 54

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 33.338:519.7:66.069

©2019. С.В. Сторожев, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг

УЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ РАСПАДА СТРУИ ЖИДКОСТИ В ПНЕВМАТИЧЕСКИХ РАСПЫЛИТЕЛЯХ

Представлена численно-аналитическая теоретическая методика учета влияния погрешностей разброса в экспериментальных и конструктивных значениях исходных физико-механических и геометрических параметров в модели функционирования пневматического распылителя – генератора газожидкостной аэрозольной смеси. Потребность в разработке методики обусловлена задачами обеспечения адекватности результатов предпроектных расчетов рассматриваемых конструкций. Предложенный подход основывается на использовании соотношений ранее разработанного детерминистического варианта рассматриваемой модели с переходом в ее расчетных соотношениях к нечетко-множественным аргументам путем фрагментированного поэтапного применения альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения в сочетании с методами нечетко-интервальной арифметики. Приводится пример применения разработанной расчетной методики.

Ключевые слова: газожидкостные аэрозольные смеси, пневматические распылители жидкости, математическая модель функционирования, нечетко-множественное обобщение, учет разбросов экзогенных параметров, методы нечетко-интервальной арифметики, эвристический принцип обобщения.

Введение. Одним из эффективных способов создания охлаждающих газожидкостных субстанций, наряду с механизмами распыления в центробежных и центробежно-струйных форсунках, являются процессы распада струи жидкости в пневматических распылителях [1 – 6]. Важнейшими вопросами математического моделирования этих процессов является нахождение зависимостей скорости движения распыленной струи от давления и расхода жидкости с различной плотностью.

Однако анализ моделей, используемых для конструкторских предпроектных расчетов параметров функционирования пневматических распылителей [1 – 6], приводит к заключению о весьма высокой степени неопределенности экзогенных параметров моделирования в расчетных алгоритмах, что делает крайне актуальной разработку модификаций соответствующих вариантов детерминистических моделей, учитывающих факторы нечеткости на основе применения методов вероятностно-стохастического анализа [7], либо методов теории нечетких множеств [8 – 19].

1. Детерминистический вариант модели процесса распада струи жидкости в пневматическом распылителе. Представленные на рис. 1 – рис. 4 аспекты принципиальной конструктивной технологической схемы функционирования пневматического распылителя иллюстрируют основные элементы рассматриваемого далее варианта детерминистической модели.

Процесс распада струи, согласно одной из гипотез моделирования, включает этап формирования пленки жидкости, поступающей из четырех отверстий малого диаметра Δ_4 в мембране распылителя, в результате ее равномерного растекания по внутренней цилиндрической поверхности диаметра Δ_1 .

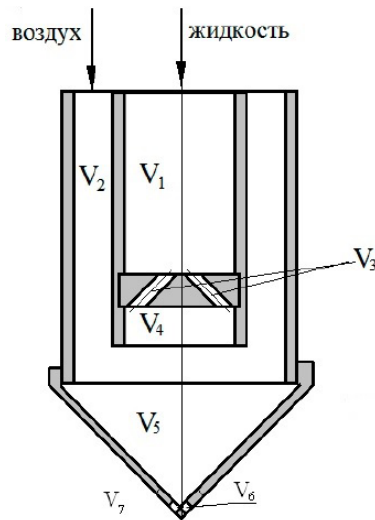


Рис. 1. Принципиальная конструктивная технологическая схема пневматического распылителя [6].

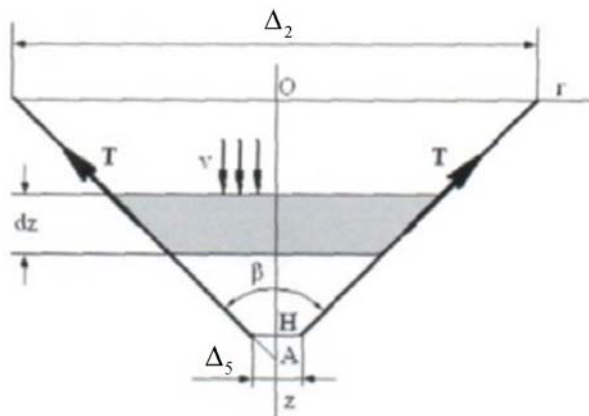


Рис. 2. Характеристика процессов, протекающих в конической зоне пневматического распылителя [6].

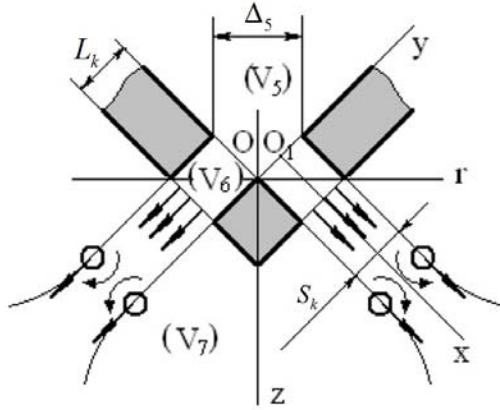


Рис. 3. Конструктивная схема и параметры распылительной головки пневматической форсунки [6].

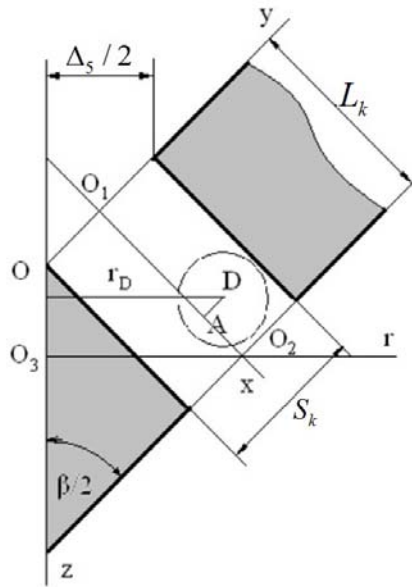


Рис. 4. Геометрические характеристики канала распылительной головки пневматической форсунки [6].

На этом этапе формируется цилиндрический слой жидкости с параметром длины вдоль образующей L_4 , внешним диаметром Δ_1 и внутренним диаметром

$$\Delta_2 = (\Delta_1^2 - 4\Delta_4^2)^{1/2}. \quad (1)$$

При задаваемом параметре Q_0 расхода жидкости на входе в распылитель скорость ее движения V_L в пристеночном слое имеет величину

$$V_L = Q_0 / (\pi\Delta_4^2), \quad (2)$$

где $\Delta_4 = ((\Delta_1^2 - \Delta_2^2)/4)^{1/2}$.

Процесс распада и капельного дробления жидкости пристеночного слоя после его схода с поверхности длины L_4 и последующего смешивания с потоком газа предложено [6, 20 – 26] моделировать с использованием модифицированного параметра Вебера We_1 , определяемого соотношением

$$We_1 = \Delta_d V_g^2 \rho_g \alpha^{-1}, \quad (3)$$

в котором Δ_d [мкм] – диаметр капель распадающегося пристеночного слоя; V_g [м/с] – параметр относительной скорости обтекания капли газом; ρ_f [кг/м³] – параметр плотности распыляемой вязкой жидкости; α [Н/м²] – коэффициент поверхностного натяжения.

Для градации процессов каплеобразования при распаде пристеночного потока вводятся характеристики

$$We_{1*} = 5(1 + (3/2)L_\rho^{-0,37}), \quad We_{1**} = 15, \quad We_{1***} = 2L_\rho^{1/3}, \quad (4)$$

выражающиеся через параметр Лапласа

$$L_\rho = \Delta_d \rho_f \mu_f^{-2} \alpha, \quad (5)$$

где μ_f – коэффициент вязкости жидкости. При этом, соответственно альтернативно реализующимся оценкам

$$\begin{aligned} We_{1*} < We_1 < We_{1**}, \\ We_{1**} < We_1 < We_{1***}, \\ We_{1***} < We_1, \end{aligned} \quad (6)$$

выделяют три режима дробления.

Представленное в [6] моделирование процессов динамики капельной смеси в конической подобласти пневматической форсунки базируется на интерпретации смеси как однородной (однокомпонентной) баротропной среды с параметрами плотности ρ_c и осевой скорости V_c , усредненными по сечениям этой, рассматриваемой как усеченный конус с диаметрами оснований Δ_2 , Δ_5 , углом раствора β и высотой h , подобласти. Параметр давления p_c в данной среде определяется приведенным уравнением состояния

$$p_c = \rho_c \chi_c, \quad (7)$$

в котором χ_c экспериментально определяемый феноменологический коэффициент.

Параметры плотности ρ_{0g} и скорости V_{0g} газа, а также плотности ρ_f и скорости V_{0f} жидкостной компоненты на входе в коническую подобласть пневматической форсунки, определяют характеристики массового R_m и объемного R_v

расходов газокапельной смеси, а затем и параметры усредненной плотности ρ_{c0} и средней барицентрической скорости V_{c0} смеси на входе в эту подобласть:

$$R_v = (\pi/4)((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)V_{0g} + \Delta_1^2V_{0f}), \quad (8)$$

$$R_m = (\pi/4)((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g} + \Delta_1^2\rho_fV_{0f}), \quad (9)$$

$$\rho_{c0} = ((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g} + \Delta_1^2\rho_fV_{0f})/((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)V_{0g} + \Delta_1^2V_{0f}), \quad (10)$$

$$V_{c0} = ((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g}^2 + \Delta_1^2\rho_fV_{0f}^2)/((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g} + \Delta_1^2\rho_fV_{0f}). \quad (11)$$

После прохождения газокапельной смесью зоны меньшего сечения конической подобласти, поток достигает зоны распылительной головки и истекает через кольцевое отверстие в нижней части конуса пневматической форсунки. Моделируемыми характеристиками на этой фазе процесса работы форсунки являются параметр R_k расхода и скорость V_k истечения смеси на выходе из кольцевого отверстия, для которых могут быть записаны представления

$$\begin{aligned} V_k &= F_V(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta) = \\ &= 3V_{0k}\Delta_5L_k^2[4S_k(3\Delta_5L_k^2 + 6L_k^3\cos(\beta/2) - S_k^2\Delta_5 + 2S_k^2L_k\cos(\beta/2))]^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R_k &= F_R(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta) = \\ &= 2\pi V_k[\Delta_5S_k/2 + L_kS_k\cos(\beta/2) - (\Delta_5/2 + L_k\cos(\beta/2))(S_k^3/(3L_k^2))]. \end{aligned} \quad (13)$$

В представлениях (12), (13) S_k – параметр радиальной ширины кольцевого отверстия распылительной головки; L_k – параметр толщины стенки конструкции распылительной головки. Характеристика V_{0k} является [6] параметром скорости $V(h)$ газокапельного потока при прохождении нижнего сечения с диаметром Δ_5 в конусной части зоны его накопления, которая может быть определена и использованием эмпирической интерполяционной зависимости $V^*(h)$, аппроксимирующей отыскиваемое численными методами решение $V(z)$ $z \in [0, h]$ начальной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} V'(z) &= -[(\lambda\rho(z)V^2(z))/(2\Delta(z)) + (16tg(\beta/2)C_0\chi_c)/(\pi\Delta^3(z)V^2(z))] \cdot \\ &\cdot [\rho(z)V(z) - (4C_0\chi_c(\pi\Delta^2(z)V^2(z))^{-1})^{-1}], V(0) = V_{c0}. \end{aligned} \quad (14)$$

В уравнении (14)

$$C_0 = \pi\Delta_2^2\rho_{c0}V_{c0}, \quad (15)$$

$$\Delta(z) = \Delta_5 + 2(h - z)tg(\beta/2); \quad (16)$$

величины ρ_{c0} , V_{c0} задаются соотношениями (10), (11).

2. Нечетко-множественные оценки в модели распада струи жидкости в пневматическом распылителе. Представленное описание детерминистического варианта модели процесса распада струи жидкости в пневматическом распылителе, описывающей, по существу, характеристики его функционирования, указывает на весьма существенную степень неопределенности преимущественного числа экзогенных параметров данной модели. Для построения модифицированного варианта модели, учитывающего факторы неопределенности экзогенных параметров на основе информации о характере разбросов в их значениях, зачастую не имеющей корректной статистической природы, получаемой на основе экспертных заключений и оценок, целесообразно применить методологические принципы теории нечетких множеств.

Предлагаемая методика получения поэтапно формируемых нечетко-множественных оценок для цикла параметров функционирования распылителя базируется на гипотезе описания обладающих разбросами неопределенных экзогенных геометрических и физико-механических параметров нечетким трапецидальными интервалами.

На начальном этапе анализа нечетко-интервальные представления вводятся для диаметров отверстий в мембране распылителя Δ_4 и диаметра внутренней цилиндрической поверхности трубки Δ_1

$$\tilde{\Delta}_1 = (\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}), \quad \tilde{\Delta}_4 = (\Delta_{41}, \Delta_{42}, \Delta_{43}, \Delta_{44}). \quad (17)$$

На этой основе формируется следующая из соотношения (1) с учетом свойств

$$\partial\Delta_2/\partial\Delta_1 > 0, \quad \partial\Delta_2/\partial\Delta_4 < 0, \quad (18)$$

нечетко-множественная оценка для внутреннего диаметра Δ_2 цилиндрического растекающегося слоя жидкости вдоль образующей трубки

$$\tilde{\Delta}_2 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Delta}_{2\alpha}, \overline{\Delta}_{2\alpha}], \quad (19)$$

$$\underline{\Delta}_{2\alpha} = (\underline{\Delta}_{1\alpha}^2 - 4\overline{\Delta}_{4\alpha}^2)^{1/2}, \quad \overline{\Delta}_{2\alpha} = (\overline{\Delta}_{1\alpha}^2 - 4\underline{\Delta}_{4\alpha}^2)^{1/2},$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)\Delta_{11} + \alpha\Delta_{12}, & \overline{\Delta}_{1\alpha} &= \alpha\Delta_{13} + (1 - \alpha)\Delta_{14}, \\ \underline{\Delta}_{4\alpha} &= (1 - \alpha)\Delta_{41} + \alpha\Delta_{42}, & \overline{\Delta}_{4\alpha} &= \alpha\Delta_{43} + (1 - \alpha)\Delta_{44}. \end{aligned} \quad (20)$$

С введением учитывающего возможные разбросы значений нечетко-интервального исходного параметра объемного расхода жидкости на входе в распылитель

$$\tilde{Q}_0 = (Q_{01}, Q_{02}, Q_{03}, Q_{04}), \quad (21)$$

и с учетом свойств

$$\partial V_L/\partial Q_0 > 0, \quad \partial\Delta_2/\partial\Delta_4 < 0, \quad (22)$$

для неопределенной характеристики скорости движения жидкости V_L в пристеночном слое следует оценка

$$\begin{aligned}\tilde{V}_L &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{L\alpha}, \overline{V}_{L\alpha}], \\ \underline{V}_{L\alpha} &= \underline{Q}_{0\alpha} / (\pi \overline{\Delta}_{4\alpha}^2), \quad \overline{V}_{L\alpha} = \overline{Q}_{0\alpha} / (\pi \underline{\Delta}_{4\alpha}^2),\end{aligned}\tag{23}$$

где

$$\underline{Q}_{0\alpha} = (1 - \alpha)Q_{01} + \alpha Q_{02}, \quad \overline{Q}_{0\alpha} = \alpha Q_{03} + (1 - \alpha)Q_{04}.\tag{24}$$

Нечетко-множественная модификация соотношения (3) при введении нечетко-множественного эндогенного параметра $\tilde{W}e_1$ и нечетко-интервальных экзогенных параметров

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_d &= (\Delta_{d1}, \Delta_{d2}, \Delta_{d3}, \Delta_{d4}), \quad \tilde{V}_g = (V_{g1}, V_{g2}, V_{g3}, V_{g4}), \\ \tilde{\rho}_g &= (\rho_{g1}, \rho_{g2}, \rho_{g3}, \rho_{g4}), \quad \tilde{\rho}_f = (\rho_{f1}, \rho_{f2}, \rho_{f3}, \rho_{f4}), \\ \tilde{\alpha} &= (\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \alpha_{p3}, \alpha_{p4}), \quad \tilde{\mu}_f = (\mu_{f1}, \mu_{f2}, \mu_{f3}, \mu_{f4})\end{aligned}\tag{25}$$

и с учетом свойств знакоопределенности производных

$$\partial W e_1 / \partial \Delta_d > 0, \quad \partial W e_1 / \partial V_g > 0, \quad \partial W e_1 / \partial \rho_f > 0, \quad \partial W e_1 / \partial \alpha < 0,\tag{26}$$

записывается в виде

$$\begin{aligned}\tilde{W}e_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{W}e_{1\alpha}, \overline{W}e_{1\alpha}], \\ \underline{W}e_{1\alpha} &= \underline{\Delta}_{d\alpha} \underline{V}_{g\alpha}^2 \underline{\rho}_{g\alpha} \underline{\alpha}_\alpha^{-1}, \quad \overline{W}e_{1\alpha} = \overline{\Delta}_{d\alpha} \overline{V}_{g\alpha}^2 \overline{\rho}_{g\alpha} \overline{\alpha}_\alpha^{-1},\end{aligned}\tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}_{d\alpha} &= (1 - \alpha)\Delta_{d1} + \alpha\Delta_{d2}, \quad \overline{\Delta}_{d\alpha} = \alpha\Delta_{d3} + (1 - \alpha)\Delta_{d4}; \\ \underline{V}_{g\alpha} &= (1 - \alpha)V_{g1} + \alpha V_{g2}, \quad \overline{V}_{g\alpha} = \alpha V_{g3} + (1 - \alpha)V_{g4}; \\ \underline{\rho}_{f\alpha} &= (1 - \alpha)\rho_{f1} + \alpha\rho_{f2}, \quad \overline{\rho}_{f\alpha} = \alpha\rho_{f3} + (1 - \alpha)\rho_{f4}; \\ \underline{\alpha}_\alpha &= (1 - \alpha)\alpha_{p1} + \alpha\alpha_{p2}, \quad \overline{\alpha}_\alpha = \alpha\alpha_{p3} + (1 - \alpha)\alpha_{p4}.\end{aligned}\tag{28}$$

Также определяется нечеткий параметр Лапласа

$$\begin{aligned}\tilde{L}_p &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{L}_{p\alpha}, \overline{L}_{p\alpha}], \\ \underline{L}_{p\alpha} &= \underline{\Delta}_{d\alpha} \underline{\rho}_{f\alpha} \underline{\mu}_{f\alpha}^{-2} \underline{\alpha}_\alpha, \quad \overline{L}_{p\alpha} = \overline{\Delta}_{d\alpha} \overline{\rho}_{f\alpha} \overline{\mu}_{f\alpha}^{-2} \overline{\alpha}_\alpha,\end{aligned}\tag{29}$$

находятся нечетко-множественные представления (4)

$$\begin{aligned}\tilde{W}e_{1*} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{W}e_{1*\alpha}, \overline{W}e_{1*\alpha}], \\ \underline{W}e_{1*\alpha} &= 5(1 + (3/2)\underline{L}_{p\alpha}^{-0,37}), \quad \overline{W}e_{1*\alpha} = 5(1 + (3/2)\overline{L}_{p\alpha}^{-0,37});\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}e_{1***} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [W\underline{e}_{1***\alpha}, \overline{W}e_{1***\alpha}], \\ \underline{W}e_{1***\alpha} &= 2\underline{L}_{\rho\alpha}^{1/3}, \quad \overline{W}e_{1***} = 2\overline{L}_{\rho\alpha}^{1/3};\end{aligned}\tag{31}$$

и ранжирование по формуле (5) трансформируется в процедуру сравнения [27 – 29] нечетких множеств $\tilde{W}e_1$, $\tilde{W}e_{1*}$, $\tilde{W}e_{1***}$, либо сопоставления параметров их дефаззификации по методу медиан [8 – 18].

Нечетко-множественные обобщения соотношений (8) – (11) с ведением модифицированной записи выражений (9) – (11)

$$\begin{aligned}R_m &= R_{mg} + R_{mf}, \\ R_{mg} &= (\pi/4)(\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g}, \quad R_{mf} = (\pi/4)\Delta_1^2\rho_fV_{0f}; \\ \rho_{c0} &= R_m/R_v; \quad V_{c0} = (R_{mg}V_{0g} + R_{mf}V_{0f})/R_m;\end{aligned}\tag{32}$$

с использованием в рамках выполняющихся с учетом разбросов предположений $V_{0g} > V_{0f}$, $V_{0g}\rho_{0g} < V_{0f}\rho_{0f}$, а также с использованием свойств

$$\begin{aligned}\partial R_v/\partial V_{0g} < 0, \quad \partial R_v/\partial V_{0f} > 0, \quad \partial R_v/\partial \Delta_2 > 0, \quad \partial R_v/\partial \Delta_1 < 0; \\ \partial R_m/\partial V_{0g} < 0, \quad \partial R_m/\partial V_{0f} > 0, \quad \partial R_m/\partial \Delta_2 > 0, \quad \partial R_m/\partial \Delta_1 > 0, \\ \partial R_m/\partial \rho_{0g} < 0, \quad \partial R_m/\partial \rho_{0f} > 0,\end{aligned}\tag{33}$$

могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned}\tilde{R}_v &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{v\alpha}, \overline{R}_{v\alpha}], \\ \underline{R}_{v\alpha} &= (\pi/4)((\underline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \overline{\Delta}_{1\alpha}^2)\overline{V}_{0g\alpha} + \overline{\Delta}_{1\alpha}^2\underline{V}_{0f\alpha}), \\ \overline{R}_{v\alpha} &= (\pi/4)((\overline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \underline{\Delta}_{1\alpha}^2)\underline{V}_{0g\alpha} + \underline{\Delta}_{1\alpha}^2\overline{V}_{0f\alpha});\end{aligned}\tag{34}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_m &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{m\alpha}, \overline{R}_{m\alpha}], \\ \underline{R}_{m\alpha} &= (\pi/4)((\underline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \underline{\Delta}_{1\alpha}^2)\overline{\rho}_{0g\alpha}\overline{V}_{0g\alpha} + \underline{\Delta}_{1\alpha}^2\underline{\rho}_{f\alpha}\underline{V}_{0f\alpha}), \\ \overline{R}_{m\alpha} &= (\pi/4)((\overline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \overline{\Delta}_{1\alpha}^2)\underline{\rho}_{0g\alpha}\underline{V}_{0g\alpha} + \overline{\Delta}_{1\alpha}^2\overline{\rho}_{f\alpha}\overline{V}_{0f\alpha}).\end{aligned}\tag{35}$$

В представлениях (34) – (35) представлены также ранее не вводившиеся нечетко-интервальные экзогенные параметры

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{0g} &= (V_{0g1}, V_{0g2}, V_{0g3}, V_{0g4}) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{0g\alpha}, \overline{V}_{0g\alpha}],\end{aligned}$$

Учет неопределенности экзогенных параметров при моделировании распада

$$\begin{aligned}
\underline{V}_{0g\alpha} &= (1 - \alpha)V_{0g1} + \alpha V_{0g2}, & \overline{V}_{0g\alpha} &= \alpha V_{0g3} + (1 - \alpha)V_{0g4}; \\
\tilde{V}_{0f} &= (V_{0f1}, V_{0f2}, V_{0f3}, V_{0f4}) = \\
&= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{0f\alpha}, \overline{V}_{0f\alpha}], \\
\underline{V}_{0f\alpha} &= (1 - \alpha)V_{0f1} + \alpha V_{0f2}, & \overline{V}_{0f\alpha} &= \alpha V_{0f3} + (1 - \alpha)V_{0f4}; \\
\tilde{\rho}_{0f} &= (\rho_{0f1}, \rho_{0f2}, \rho_{0f3}, \rho_{0f4}) = \\
&= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{0f\alpha}, \overline{\rho}_{0f\alpha}] \\
\underline{\rho}_{0f\alpha} &= (1 - \alpha)\rho_{0f1} + \alpha\rho_{0f2}, & \overline{\rho}_{0f\alpha} &= \alpha\rho_{0f3} + (1 - \alpha)\rho_{0f4}; \\
\tilde{\rho}_{0g} &= (\rho_{0g1}, \rho_{0g2}, \rho_{0g3}, \rho_{0g4}) = \\
&= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{0g\alpha}, \overline{\rho}_{0g\alpha}], \\
\underline{\rho}_{0g\alpha} &= (1 - \alpha)\rho_{0g1} + \alpha\rho_{0g2}, & \overline{\rho}_{0g\alpha} &= \alpha\rho_{0g3} + (1 - \alpha)\rho_{0g4}.
\end{aligned}$$

С расширением степени неопределенности и с применением выражений

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{mf} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{mf\alpha}, \overline{R}_{mf\alpha}], \\
\underline{R}_{mf\alpha} &= (\pi/4)(\underline{\Delta}_{1\alpha}^2 \underline{\rho}_{f\alpha} \underline{V}_{0f\alpha}), & \overline{R}_{mf\alpha} &= (\pi/4)(\overline{\Delta}_{1\alpha}^2 \overline{\rho}_{f\alpha} \overline{V}_{0f\alpha}); \\
\tilde{R}_{mg} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{mg\alpha}, \overline{R}_{mg\alpha}],
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\underline{R}_{mg\alpha} = (\pi/4)((\underline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \overline{\Delta}_{1\alpha}^2) \overline{\rho}_{0g\alpha} \overline{V}_{0g\alpha}), \quad \overline{R}_{mg\alpha} = (\pi/4)((\overline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \underline{\Delta}_{1\alpha}^2) \underline{\rho}_{0g\alpha} \underline{V}_{0g\alpha});$$

можно также записать представления

$$\tilde{\rho}_{c0} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{m\alpha}/\overline{R}_{v\alpha}, \overline{R}_{m\alpha}/\underline{R}_{v\alpha}], \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}_{c0} = \\
&= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(\underline{R}_{mg\alpha} \underline{V}_{0g\alpha} + \underline{R}_{mf\alpha} \underline{V}_{0f\alpha})/\overline{R}_{m\alpha}, (\overline{R}_{mg\alpha} \overline{V}_{0g\alpha} + \overline{R}_{mf\alpha} \overline{V}_{0f\alpha})/\underline{R}_{m\alpha}]. \tag{38}
\end{aligned}$$

Параметрические нечетко-множественные описания $\tilde{R}_k(\beta)$, $\tilde{V}_k(\beta)$ для определяемых соотношениями (12), (13) в детерминистической версии рассматриваемой модели параметров расхода и скорости истечения смеси на выходе из кольцевого отверстия головки форсунки с учетом свойств

$$\partial F_R(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta)/\partial V_{0k} > 0, \quad \partial F_V(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta)/\partial V_{0k} > 0, \tag{39}$$

могут быть получены в виде

$$\tilde{R}_k(\beta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{k\alpha}(\beta), \overline{R}_{k\alpha}(\beta)], \quad \tilde{V}_k(\beta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{k\alpha}(\beta), \overline{V}_{k\alpha}(\beta)], \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{R}_{k\alpha}(\beta) &= \inf_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \overline{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \overline{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \overline{L}_{k\alpha}]} } F_R(\underline{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta), \\ \overline{R}_{k\alpha}(\beta) &= \sup_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \overline{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \overline{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \overline{L}_{k\alpha}]} } F_R(\overline{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta); \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \underline{V}_{k\alpha}(\beta) &= \inf_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \overline{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \overline{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \overline{L}_{k\alpha}]} } F_V(\underline{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta), \\ \overline{V}_{k\alpha}(\beta) &= \sup_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \overline{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \overline{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \overline{L}_{k\alpha}]} } F_V(\overline{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta); \end{aligned} \quad (42)$$

$$\underline{V}_{k0\alpha} = (1 - \alpha)V_{k01} + \alpha V_{k02}, \quad \overline{V}_{k0\alpha} = \alpha V_{k03} + (1 - \alpha)V_{k04}. \quad (43)$$

При этом в рассмотрение вводятся нечетко-интервальные обобщения для экзогенных параметров

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k0} &= (V_{k01}, V_{k02}, V_{k03}, V_{k04}), \quad \tilde{\Delta}_5 = (\Delta_{51}, \Delta_{52}, \Delta_{53}, \Delta_{54}), \\ \tilde{S}_k &= (S_{k1}, S_{k2}, S_{k3}, S_{k4}), \quad \tilde{L}_k = (L_{k1}, L_{k2}, L_{k3}, L_{k4}), \end{aligned} \quad (44)$$

где \tilde{V}_{k0} характеризует разбросы скорости газочапельного потока при прохождении нижнего сечения в конусной части зоны его накапливания; $\tilde{\Delta}_5$ характеризует разбросы диаметра нижнего сечения в конусной части зоны накапливания газочапельного потока; \tilde{S}_k описывает разбросы радиальной ширины кольцевого отверстия распылительной головки; \tilde{L}_k характеризует разбросы величины толщины стенки в конструкции распылительной головки.

В качестве примера реализации описанной методики получения нечетко-множественных характеристик для параметров процесса распыления жидкости в пневматической форсунке рассматривается следующий вариант задания нечетко-интервальных экзогенных параметров:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &= (98l_*, 100l_*, 102l_*, 105l_*), \quad \tilde{\Delta}_4 = (8.7l_*, 8.9l_*, 9.0l_*, 9.4l_*), \\ \tilde{Q}_0 &= (1.3Q_*, 2.1Q_*, 2.8Q_*, 3.8Q_*), \quad \tilde{\Delta}_d = (10l_*, 14l_*, 16l_*, 19l_*), \end{aligned}$$

Учет неопределенности экзогенных параметров при моделировании распада

$$\begin{aligned}\tilde{V}_g &= (3.0V_*, 3.8V_*, 4.2V_*, 4.9V_*), & \tilde{V}_f &= (0.32V_*, 0.40V_*, 0.44V_*, 0.52V_*), \\ \tilde{\rho}_g &= (0.7\rho_*, 0.9\rho_*, 1.1\rho_*, 1.4\rho_*), & \tilde{\rho}_f &= (780\rho_*, 800\rho_*, 840\rho_*, 920\rho_*), \\ \tilde{L}_k &= (18l_*, 20l_*, 22l_*, 25l_*), & \tilde{\alpha} &= (0.015\alpha_*, 0.019\alpha_*, 0.021\alpha_*, 0.024\alpha_*), \\ \tilde{\mu}_f &= (0.93\mu_*, 0.98\mu_*, 1.03\mu_*, 1.12\mu_*), & \tilde{V}_{k0} &= (2.7V_*, 2.9V_*, 3.4V_*, 4.4V_*), \\ \tilde{\Delta}_5 &= (65l_*, 70l_*, 72l_*, 74l_*), & \tilde{S}_k &= (9.6l_*, 10.0l_*, 10.4l_*, 11.0l_*), \\ l_* &= 10^{-4}[\text{м}], & Q_* &= 10^{-6}[\text{м}^3/\text{с}], & V_* &= 1[\text{м}/\text{с}], \\ \rho_* &= 1[\text{кг}/\text{м}^3], & \alpha_* &= 1[\text{Па}], & \mu_* &= 10^{-3}[\text{Па} \cdot \text{с}].\end{aligned}$$

Результаты расчетов ряда описываемых соотношениями (17) – (44) нечетко-множественных эндогенных характеристик исследуемой модели при указанном варианте задания неопределенных исходных параметров приведены на рисунках 5 – 14.

Так, на рисунке 5 представлена функция принадлежности для нечетко-множественной оценки $\tilde{\Delta}_2$ внутреннего диаметра цилиндрического растекающегося слоя жидкости вдоль образующей трубки в области V_4 , а на рисунке 6 – функция принадлежности для нечетко-множественной оценки \tilde{V}_L скорости ее движения в пристеночном слое.

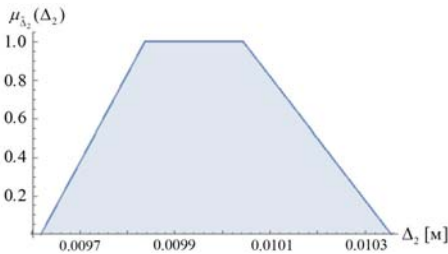


Рис. 5. Функция принадлежности $\tilde{\Delta}_2$

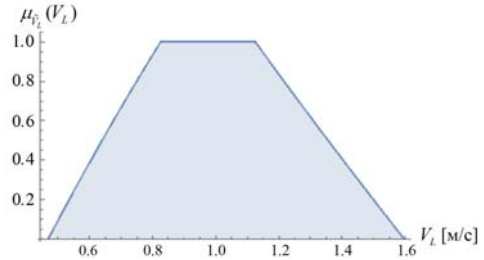


Рис. 6. Функция принадлежности \tilde{V}_L

На рисунках 7 – 10 соответственно дано описание функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик величин \tilde{L}_p , \tilde{We}_1 , \tilde{We}_{1*} , \tilde{We}_{1***} .

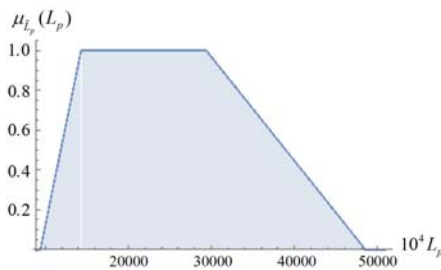


Рис. 7. Функция принадлежности \tilde{L}_p

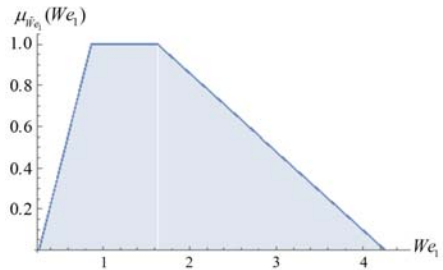


Рис. 8. Функция принадлежности \tilde{We}_1

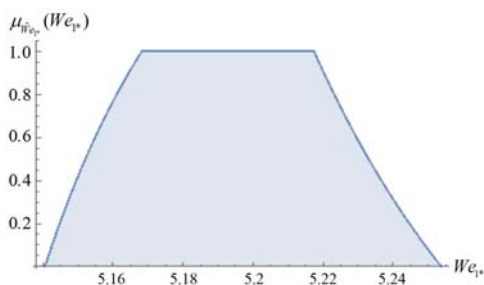


Рис. 9. Функция принадлежности $\tilde{W}e_{1*}$

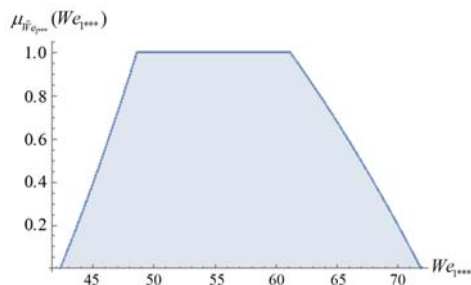


Рис. 10. Функция принадлежности $\tilde{W}e_{1***}$

На рисунке 11 в качестве примера дано описание нечетко-множественной характеристики массового расхода \tilde{R}_m . Рисунок 12 иллюстрирует вид функции принадлежности для нечетко-множественной оценки $\tilde{V}_k(2\pi/3)$.

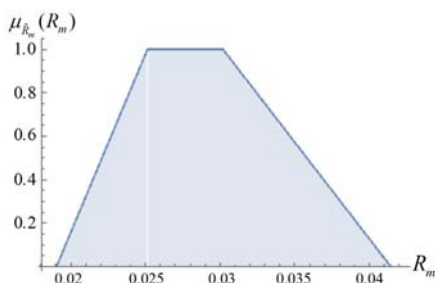


Рис. 11. Функция принадлежности \tilde{R}_m

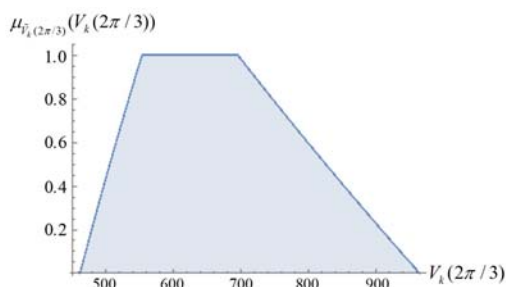


Рис. 12. Функция принадлежности $\tilde{V}_k(2\pi/3)$

Наконец, рисунки 13 и 14 описывают параметрические зависимости от угловой координаты β для значений границ $\mu = 0$ носителей и границ $\mu = 1$ областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенных параметров $\tilde{V}_k(\beta)$, $\tilde{R}_k(\beta)$. Как следует из этих распределений, при рассматриваемых значениях заданных с разбросами параметров угловые зависимости характеристик $\tilde{R}_k(\beta)$ незначительны, а изменения характеристик $\tilde{V}_k(\beta)$ свидетельствуют о росте скоростей $V_k(\beta)$ с увеличением данного параметра.

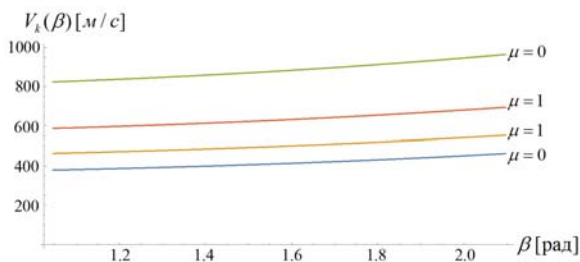


Рис. 13. Нечетко-интервальное параметрическое описание возможных значений фазовых скоростей $V_k(\beta)$.

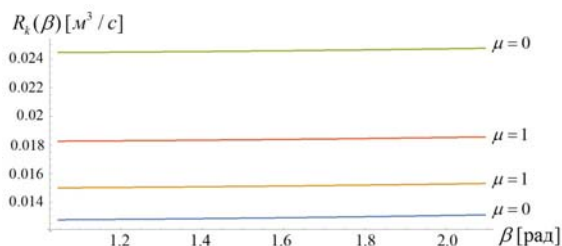


Рис. 14. Нечетко-интервальное параметрическое описание возможных значений параметра расхода $R_k(\beta)$.

Выводы. Таким образом, итогом представленных исследований является разработка нечетко-множественной методики учета разбросов исходных значений физико-механических и геометрических параметров в модели функционирования пневматического распылителя, оказывающих влияние на прогнозные результаты предпроектных конструкторских расчетов. Оценки, получаемые в результате применения методики, позволяют установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях анализируемых характеристик скоростей, расходов, а также характеристик процессов каплеобразования при заданных разбросах исходных параметров, а также границы предельных достижимых значений анализируемых характеристик на минимальном уровне уверенности.

1. Дитякин Ю.Ф. Распыливание жидкостей / Ю.Ф. Дитякин, Л.А. Клячко, Б.В. Новиков, В.И. Ягодкин. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
2. Пажи Д. Основы техники распыления жидкости / Д. Пажи, В. Галустов. – М.: Химия, 1984. – 256 с.
3. Соколов Е.Я. Струйные аппараты / Е.Я. Соколов, Н.М. Зингер. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 352 с.
4. Солдатова М.С. Моделирование процесса распыления жидкости из форсунки / М.С. Солдатова // Решетневские чтения. – 2017. – С. 374 – 375.
5. Софронов В.Л. Расчет струйных аппаратов: Учебное пособие / В.Л. Софронов, И.Ю. Рузаков, Т.В. Ощепкова. – М.: СТИ НИЯУ МИФИ, 2011. – 33 с.
6. Славкова Л.Г. Математическое моделирование движения потока газа в пневматическом распылителе жидкости / Л.Г. Славкова // Науковий вісник Луганського національного аграрного університету. – 2011. – Вип. 30. – С. 266–271.
7. Зайчик Л.И. Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости / Л.И. Зайчик, В.М. Алинченков. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 2007. – 312 с.
8. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2002. – 352 с.
9. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: «Издательство Машиностроение - 1», 2004. – 397 с.
10. Ротштейн А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
11. Kaufmann A. Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications / A. Kaufmann, M. Gupta. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.

12. *Anastassiou G.A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
13. *Kandasamy W.B.V.* Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K.Ilanthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
14. *Sonbol A.H.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42 – P. 702–712.
15. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.
16. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
17. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
18. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
19. *Бобков В.И.* Подход к исследованию теплопроводности нечеткими численными методами в условиях неопределенности теплофизических характеристик / В.И. Бобков, В.В. Борисов, М.И. Дли // Системы управления, связи и безопасности. – 2017. – №3. – С. 73–83.
20. *Ходырев А.И.* О распределении капель по размерам в спектре при распыливании жидкости центробежной форсункой / А.И. Ходырев, Д.А. Ходырев, М.Г. Блохина // Труды Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина. – 2017. – № 4. – С. 101–113.
21. Метод исследования структуры факела распыла эжекционной форсунки / В.А. Архипов [и др.] // Ползуновский вестник. – 2016. – № 3. – С. 96–100.
22. *Freret L.* Pulsated free jets with polydisperse spray injection: experiments and numerical simulations / L. Freret, C. Lacour, S. Chaisemartin, S. Ducruix, D. Durox, F. Laurent, M. Massot // Proc. of Combustion Inst. – 2009. – Vol. 32. – P. 2215–2222.
23. *Fujisawa N.* Simultaneous measurement of droplet size and velocity field by an interferometric imaging technique in spray combustion / N. Fujisawa, A. Hosokawa, S. Tomimatsu // Measurement Science and Technology. – 2003. – Vol. 14. – P. 1341–1349.
24. *Maeda M.* Improvements of the interferometric technique for simultaneous measurement of droplet size and velocity vector field and its application to a transient spray / M. Maeda, Y. Akasaka, T. Kawaguchi // Experiments in Fluids. – 2002. – No. 33. – P. 125–134. – doi: 10.1007/s00348-002-0453-4
25. *Arkhipov V.* Dispersiveness of liquid droplets sprayed with cocurrent gas flow / V. Arkhipov, A. Antonnikova, S. Basalayeve, I. Zharova, S. Orlov // EPJ Web of Conferences. – 2016. – Vol. 110, 01002. – 5 p.
26. *Ortiz C.* Acceleration of a liquid drop suddenly exposed to a highspeed airstream / C. Ortiz, D.D. Joseph, G.S. Beavers // International Journal of Multiphase Flow. – 2004. – Vol. 30. – P. 217–224.
27. *Cheng C.H.* A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method / C.H. Cheng // Fuzzy Sets and Systems. – 1998. – V. 95. – P. 307–317.
28. *Thorani Y.L.P.* Ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers / Y.L.P. Thorani, P.P.B. Rao, N.R. Shankar // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2012. – Vol. 7, no. 12. – P. 555–573.
29. *Wang Y.-M.* On the centroids of fuzzy numbers / Y.-M. Wang, J.-B. Yang, D.-L. Xu, K.-S. Chin // Fuzzy Sets and Systems. – 2006. – Vol. 157. – P. 919–926

S.V. Storozhev, Nguyen Kuok Shi, Tran Ba Le Hoang

Accounting the uncertainty of exogenous parameters in modeling processes of liquid jet decomposition in pneumatic sprayers.

A numerical-analytical theoretical technique for taking into account the influence of scatter errors in

the experimental and structural values of the initial physical, mechanical and geometric parameters in the model of functioning of a pneumatic atomizer-generator to create a gas-liquid aerosol mixtures is presented. The need for the development of the methodology is due to the tasks of ensuring the adequacy of the results of pre-design calculations of the structures under consideration. The proposed approach is based on the use of the relations of the previously developed deterministic version of the model under consideration with the transition in its calculation relations to fuzzy-multiple arguments by fragmented phased application of the alpha-level form of the heuristic generalization principle in combination with fuzzy-interval arithmetic methods. An example of the application of the developed calculation method is given.

Keywords: *gas-liquid aerosol mixtures, pneumatic liquid sprayers, mathematical model of functioning, fuzzy-set generalization of model, accounting of scatter errors of exogenous parameters, methods of fuzzy-interval arithmetic, heuristic generalization principle.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
ФГБОУ ВО “Национальный исследовательский университет
“МЭИ” МОН РФ, Москва
stvistvi@mail.ru

Получено 18.02.19

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 519.6

©2019. Л.П. Вовк, Е.С. Кисель

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ
ИЗ ВЕРШИНЫ ОСТРОГО V-ОБРАЗНОГО ВЫРЕЗА
МОДЕЛИ, ОСЛАБЛЕННОЙ РАЗГРУЖАЮЩИМ ОТВЕРСТИЕМ

Проведено экспериментальное исследование зарождения и развития трещины в вершине остроуго V-образного выреза. Рассмотрен нормальный отрыв образца прямоугольного поперечного сечения, ослабленного V-образным вырезом и разгружающим отверстием, т.е. при нагружении по типу отрыва (тип трещины I). Проведено компьютерное моделирование зарождения и развития трещины из вершины V-образного выреза и численные эксперименты по разрушению образцов различной геометрической конфигурации. Получены зависимости механических характеристик от локализации выреза и отверстия, их геометрических параметров и схемы нагружения модели. Методом конечных элементов получены коэффициенты интенсивности напряжений при одноосном растяжении. Предложены практические рекомендации относительно геометрических параметров модели и схемы нагружения.

Ключевые слова: трещина, угловой вырез, критерий разрушения, компьютерное моделирование, метод конечных элементов.

Введение. В классической механике разрушения силовые и деформационные критерии разрушения ориентированы на их применение к областям, содержащим трещины. Оценке хрупкой прочности областей с трещинами при нагружениях, соответствующих трем классическим типам трещин, посвящено большое количество работ. Так, в обзорной статье [1] рассмотрен ряд проблем, относящихся к построению основ механики разрушения однородных и композитных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в одной или нескольких параллельных плоскостях. Рассмотрены результаты, полученные в рамках упругих, пластических и вязкоупругих моделей деформируемых тел. В то же время влияние угловых вырезов на величину разрушающей нагрузки изучено недостаточно. Это объясняется, прежде всего, тем обстоятельством, что все известные критерии разрушения не приспособлены к угловым точкам. Следует отметить, однако, что в инженерной практике такого рода проблематика встречается достаточно часто. Подробно данный вопрос исследовался в [2]. В связи с этим для определения несущей способности элемента конструкции, а также трещиностойкости материала в конкретных условиях необходимы методы оценки соответствующих характеристик трещиностойкости. Для решения подобных задач механики разрушения оправдано проведение расчётов с применением МКЭ (метода конечных элементов). Однако следует отметить, что

создание КЭ (конечноэлементной) сетки вручную для задач о распространении трещины может занять достаточно много времени, тем самым меньше времени остаётся непосредственно на проведение расчёта, анализ полученных результатов и, в конечном итоге, на принятие мер по замене либо ремонту детали.

Ранее в задачах механики разрушения традиционно использовались строго структурированные сетки в окрестности фронта трещины, состоящие из концентрических слоёв гексаэдрических и призматических конечных элементов. Такой подход был обоснован, поскольку обеспечивал возможность разбиения сложной геометрии у фронта трещины в условиях слабо развитых методов автоматического построения сетки, а также гарантировал сходимость расчёта (наличие трещины приводит к появлению сингулярности на фронте) [3]. Однако на реальных деталях со сложными геометрическими формами реализация таких алгоритмов представляла существенные затруднения, тем более что направление развития трещины точно определяется только в процессе расчёта, и далеко не всегда может быть задано заранее. В последней версии продукта ANSYS Mechanical 2019 R2 стал доступным метод расчёта параметров механики разрушения для неструктурированных сеток UMM (Unstructured Mesh Method) [3].

Данный метод расчёта для неструктурированных сеток (UMM) предполагает решение задач механики разрушения на сетках, состоящих из тетраэдрических элементов, т.е. с использованием всех преимуществ современных алгоритмов по построению сеток в объёмах произвольной геометрии.

1. Цель работы. Данное исследование является развитием обобщённого подхода [4] к оценке прочности деталей с трещинами путем компьютерного моделирования в конечно-элементном комплексе ANSYS Mechanical 2019 R2. В основе данного подхода лежит оценка возможности применения технологии SMART (Separating, Morphing and Adaptive Remeshing Technology – технология разделения, изменения и адаптивного перестроения сетки) для многопараметрического анализа прочности конструкций, ослабленных V-образными вырезами. Целью работы стало получение адекватных результатов компьютерного моделирования и экспериментального исследования зарождения и развития трещины в вершине острого V-образного выреза для модели с разгружающим отверстием при нагружении по типу отрыва, а также анализ и обобщение полученных результатов численного исследования.

2. Постановка задачи и методика эксперимента. Геометрия модели была создана и импортирована из программного модуля ANSYS SpaceClaim Direct Modeler (SCDM), позволяющего выполнять трехмерное геометрическое моделирование, создавать и редактировать параметрические модели на основе подхода, известного как «прямое моделирование» (Direct Modelling). Материал модели оставляем предлагаемым программой по умолчанию, т.е. сталь (AISI 1020 Steel, cold rolled, материал представлен в библиотеке материалов программного комплекса). Тестовая модель представляет собой толстую пластину с краевой трещиной и круглым сквозным отверстием. Линейные размеры пластины выбираем следующим образом: по оси X: $a = 5,2 \text{ e-}002 \text{ м}$, по оси Y: $b = 2,6 \text{ e-}002 \text{ м}$,

по оси Z: $c = 3,0 \cdot 10^{-3}$ м, радиус отверстия $r = 2,83 \cdot 10^{-3}$ м, начальная длина трещины составляет $l = 1,4 \cdot 10^{-2}$ м (рис. 1а).

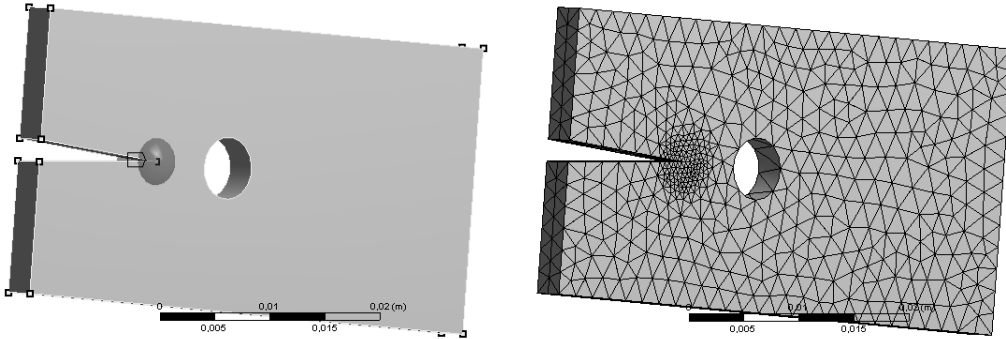


Рис. 1. а – геометрия модели; б – уточнение сетки КЭ

Технология SMART предполагает использование тетраэдрических конечных элементов сетки. Размер конечных элементов следует уточнить вокруг конца трещины. Для этого используем метод «сферы влияния» (sphere of influence method), основанный на изменении размера конечных элементов, полученных при пересечении модели и вспомогательной сферы. Моделируем сферу на геометрическом ребре, определяющем фронт трещины таким образом, чтобы ее центр оказался серединой выбранного отрезка, а диаметр превосходил его на величину около 20% и строим сетку конечных элементов. Наблюдаем необходимое сгущение сетки в окрестности фронта трещины (рис. 1б).

Указываем геометрические объекты, определяющие трещину. Это фронт трещины, верхняя и нижняя поверхности трещины. Для фронта трещины определяем локальную систему координат, компоненты которой указывают направление распространения трещины (X) и направление раскрытия трещины (Y). В дерево Model добавляем новый объект Fracture (разлом, трещина). Так программный комплекс геометрический V-образный вырез сможет в перспективе после указания необходимых опций идентифицировать как трещину. Тип трещины указываем Pre-Meshed Crack. Следует заметить, что инструментарий ANSYS позволяет создавать трещины любого типа на основе подготовленной геометрии или сетки КЭ. Фронт трещины и нормаль к плоскости трещины (рис. 2а) определяются в настройках объекта Pre-Meshed Crack.

Коэффициент интенсивности напряжений K_I вычислялся с помощью инвариантного J-интеграла, который измеряет величину сингулярных напряжений и деформаций около вершины трещины (рис. 2б), где r - произвольный контур вокруг вершины трещины, n - единичный внешний вектор, нормальный к пути; s - расстояние вдоль пути r . Инвариантность является характерным свойством J-интеграла, т.е. он не зависит от контура интегрирования, как для упругих, так и для упругопластических тел, если нагружение последних близко к простому. Для хрупких тел этот критерий разрушения эквивалентен критерию Гриффит-

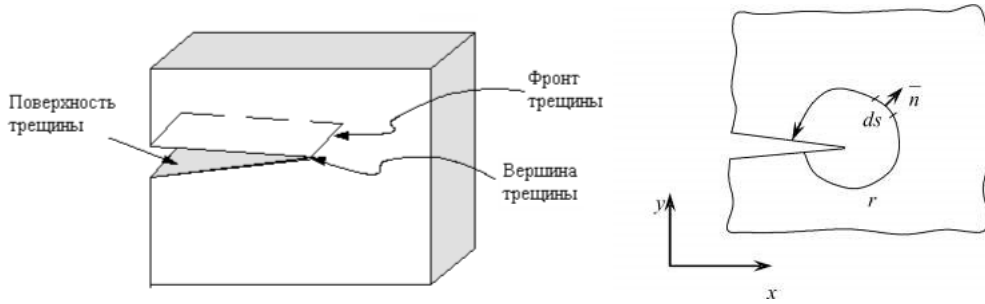


Рис. 2. а – структура трещины; б – произвольный путь вокруг вершины трещины

са, а для квазихрупких критерию Орована-Ирвина, что позволяет в ряде случаев определять границы применимости критериев линейной механики разрушения.

Разделение J-интеграла на моды в пакете ANSYS базируется на методе интегрирования по областям, согласно которому контурный интеграл преобразуется в интеграл по площади, интегрирование ведется по кольцу элементов, окружающих вершину трещины, напряжения вычисляются внутри элементов в точках гауссовых квадратур. Первый контур для области интегрирования J-интеграла оценивается по элементам, которые ассоциированы с узлом вершины или фронта трещины. Второй контур для области интегрирования J-интеграла оценивается по элементам, которые являются смежными к элементам первого контура. Эта процедура повторяется для всех контуров. Для обеспечения корректных результатов, элементы контура интегрирования не должны выходить за границы модели (за исключением поверхности трещины).

В расчете использовались 6 контуров интегрирования. Все значения J-интеграла, а значит и K_I (кроме первого) при адекватной сетке должны будут показать хорошую сходимость, что послужит проверкой достоверности вычислений [4]. Поэтому не целесообразно указывать число контуров интегрирования бóльшим, это лишь увеличит время расчета. Подход механики разрушения позволяет при анализе избежать сингулярности напряжений на конце трещины. Трещина будет распространяться, когда коэффициент интенсивности напряжений K_I превышает табличное критическое значение K_C [5]. Вычисление значения K_I выполняется каждый раз при продвижении фронта трещины, определяя, таким образом, траекторию развития трещины. В роли такого критерия программный комплекс позволяет также выбирать J-интеграл [3]. На рис. 3 меткой А обозначена грань вдоль которой модель жестко закреплена, а меткой В грань, к которой приложено растягивающее давление.

В выводимые результаты включаем: общие перемещения (Total Deformation), эквивалентные напряжения (Equivalent Stress), коэффициент интенсивности напряжений stress-intensity factors, SIFs (K_I), зависимость значения K_I от длины трещины (SIFs (K_I) Probe), а также зависимость величины раскрытия и/или расширения трещины (crack extension Probe) от номера итерации. Число итераций укажем равным 20. Основным параметром, описывающим механизм раз-

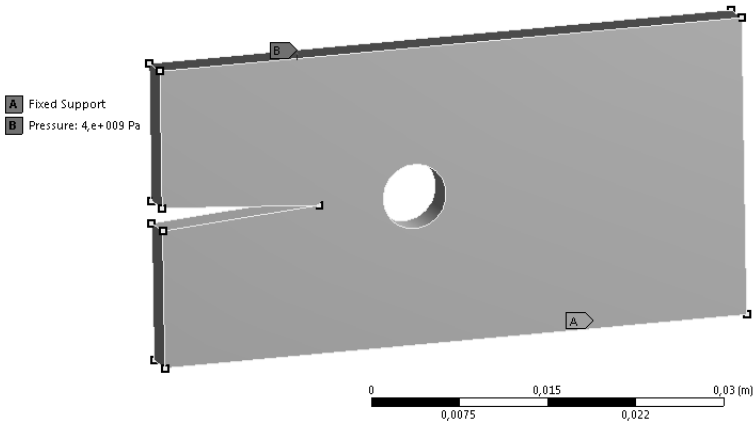


Рис. 3. Граничные условия и нагрузки

рушения и режим раскрытия трещины при растяжении для данной модели, является (SIFs) (K_I).

Есть возможность также включить в запрашиваемые результаты SIFs (K_{II}), коэффициента интенсивности напряжений при поперечном сдвиге поверхностей трещины. Эта величина является вторичной для данной модели, однако может стать определяющей для трещины при возникновении деформации поперечного сдвига (например, при значительной толщине пластины и несимметричности граничных условий и нагрузок).

3. Анализ численных результатов.

Коэффициент интенсивности напряжений K_I . На рис. 4 показаны шесть кривых, которые представляют шесть контуров, указанных в настройках объекта Pre-Meshed Crack для растягивающей нагрузки $P_2 = 2, e+009$ Па. Они могут использоваться для проверки сходимости значения K_I . Первая кривая относится к контуру, ближайшему к фронту трещины, остальные соответствуют пяти контурам, удаляющимся от фронта. Кривые быстро сходятся, подтверждая, что сетка модели адекватна. Имеем K_I равный $2,77e+9$ Па·м^(0,5), что значительно превосходит табличное значение K_C [5] для данного материала и типа нагрузки.

Выполняем три расчета с разной историей нагружения, растягивающей нагрузке, прикладываемой перпендикулярно к верхней грани последовательно придаем значения $P_1 = 4, e+009$ Па, $P_2 = 2, e+009$ Па, $P_3 = 9, e+008$ Па. Во всех случаях наблюдаем статическое разрушение модели, проявляющееся в разной степени.

Достоверность расчета подтверждается получаемыми значениями K_I , превосходящими критическое значение K_C [5]. При $K_I > K_C$ нарушается так называемый критерий устойчивости, трещина становится неустойчивой и начинает развитие. Критерий устойчивости проверяется на каждой итерации (шаге расчета), в случае его нарушения, получаем прирост длины трещины.

Таким образом, расчет развития трещины можно представить, как суммар-

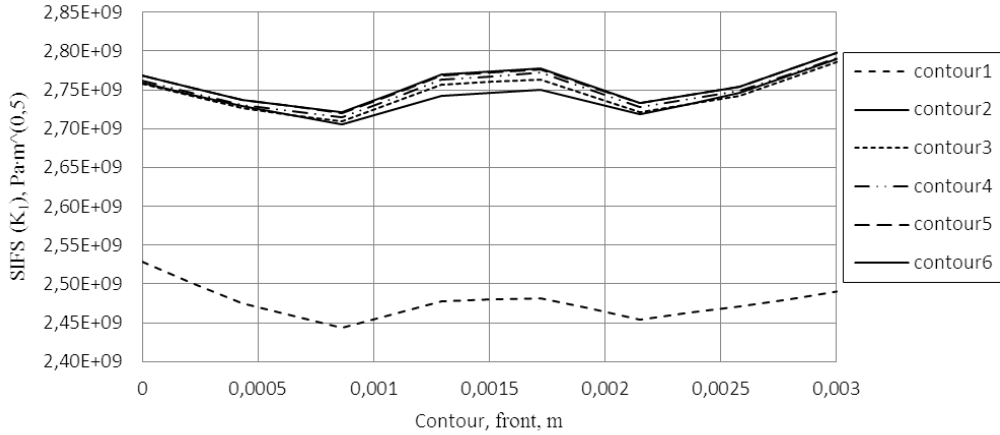


Рис. 4. Распределение K_I вдоль фронта трещины по 6-ти контурам

ную последовательность ее раскрытий (приращений длины) на указанном числе итераций. Количество итераций (шагов) определяется пользователем и техническими возможностями конкретного компьютера. На рисунках 5, 6, 10 точки графиков соответствуют номерам итераций 1..20.

Величина прикладываемой нагрузки оказывает значительное влияние на результаты расчета. Так, при $P_1 = 4, \text{e}+009$ Па имеем развитие трещины вплоть до ее слияния с разгружающим отверстием на 18-ой итерации. При этом наблюдаем резкий скачок значений деформации от $1,77 \text{e}-02$ м до $2,61 \text{e}-02$ м (рис. 5) и одновременное падение эквивалентных напряжений (рис. 6) от отметки $2,09 \text{e}+11$ Па до $1,12 \text{e}+11$ Па на 18-ой итерации при вхождении в отверстие.

Поле напряжений при этом перераспределяется таким образом, что максимальные значения наблюдаем на внутренней поверхности отверстия с противоположной стороны от трещины.

Этот эффект связан с деформационной природой развития трещины в окрестности границы отверстия, в соответствии с которой при подходе фронта трещины к отверстию, напряжения начинают уменьшаться, а при «входе» в отверстие – перераспределяться по поверхности отверстия.

При меньших величинах нагрузки $P_2 = 2, \text{e}+009$ Па и $P_3 = 9, \text{e}+008$ Па наблюдаем равномерный рост трещины в направлении разгружающего отверстия, причем более значительный при $P_2 = 2, \text{e}+009$ Па, что хорошо визуализируется на эшорах (рис.7-9).

Изменение SIFS (K_I) вдоль траектории развития трещины. Анализируя изменение SIFS (K_I) модели вдоль растущей трещины (рис.10), отмечаем рост значений вдоль всей траектории развития трещины, пропорционально прикладываемой нагрузке. Лишь на 18-ой итерации при максимальной нагрузке после пикового значения K_I равного $5,67 \text{e}+09$ Па·м^{^(0,5)}, наблюдаем его падение

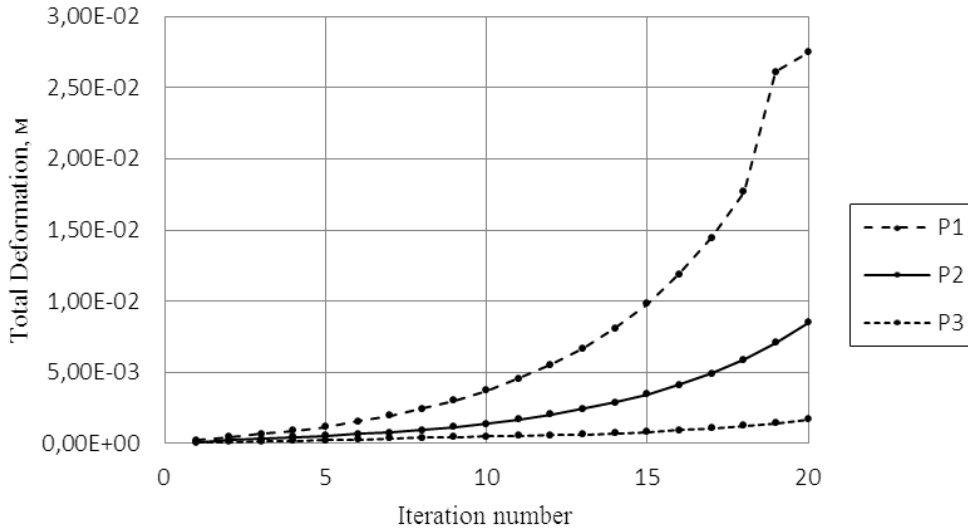


Рис. 5. Изменение общей деформации модели за время разрушения при нагрузках P_1 , P_2 , P_3

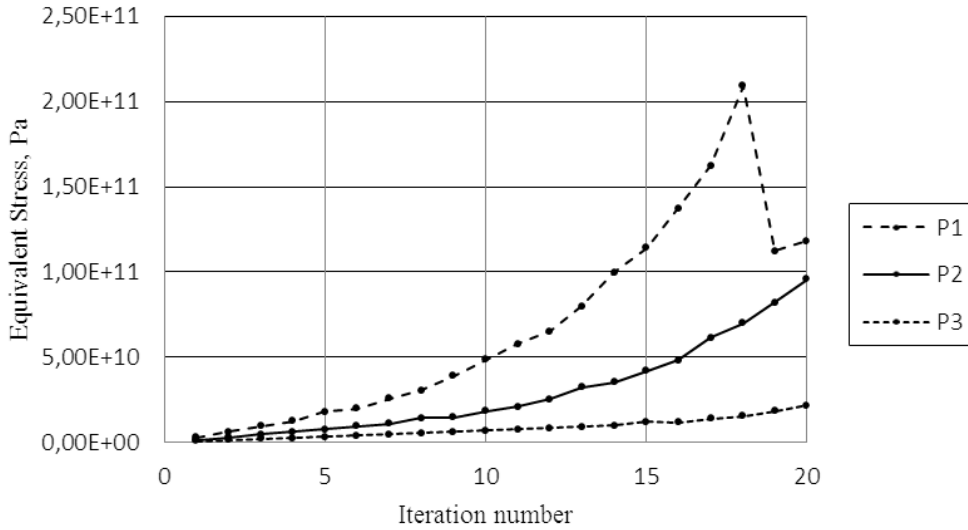


Рис. 6. Изменение эквивалентных напряжений модели за время разрушения при нагрузках P_1 , P_2 , P_3

до нуля.

На рис. 10 треугольными маркерами отмечены итерации, на которых начинается перестройка сетки модели, что происходит при перераспределении напряжений в окрестности вершины трещины. Наблюдаем небольшие сингулярности на представленных кривых, которые возникают тем раньше, чем больше вели-

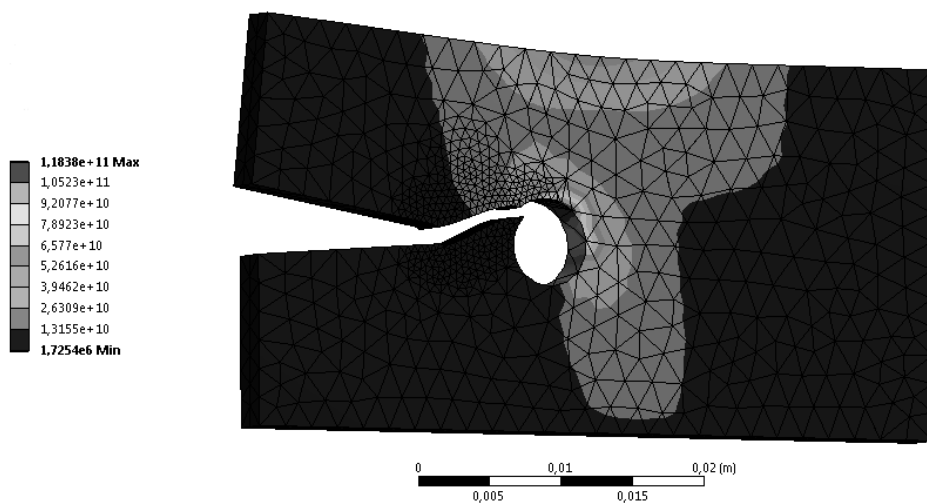


Рис. 7. Эпюра эквивалентных напряжений модели, нагрузка P_1

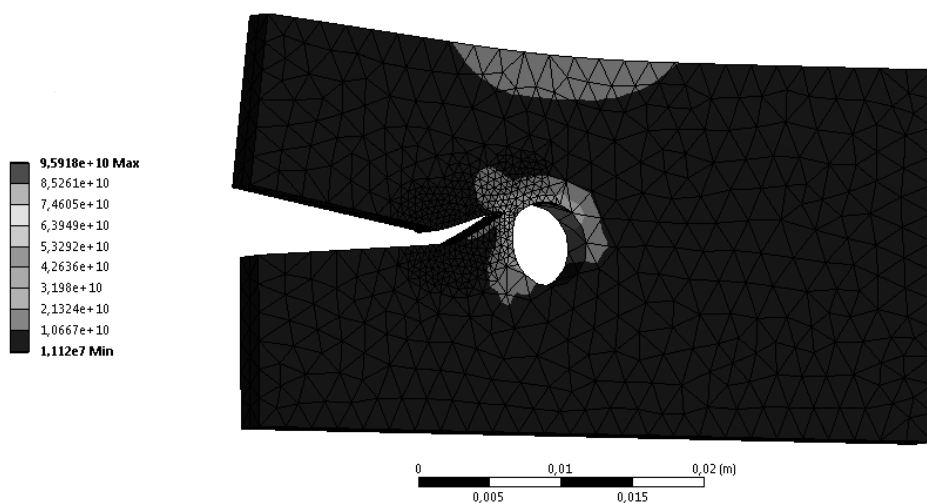


Рис. 8. Эпюра эквивалентных напряжений модели, нагрузка P_2

чина прикладываемой нагрузки.

Размер разгружающего отверстия. Исследуем влияние размера разгружающего отверстия и его близости к фронту трещины на распространение трещины. Для этого, выполним серию расчетов, когда, не изменяя геометрическое расположение центра отверстия, изменяем его радиус в диапазоне от $r \in [0,83e-3; 2,83e-3]$ м. При этом разгружающее отверстие, увеличиваясь в объеме и ослабляя общую прочность детали в целом, приближается к фронту трещины.

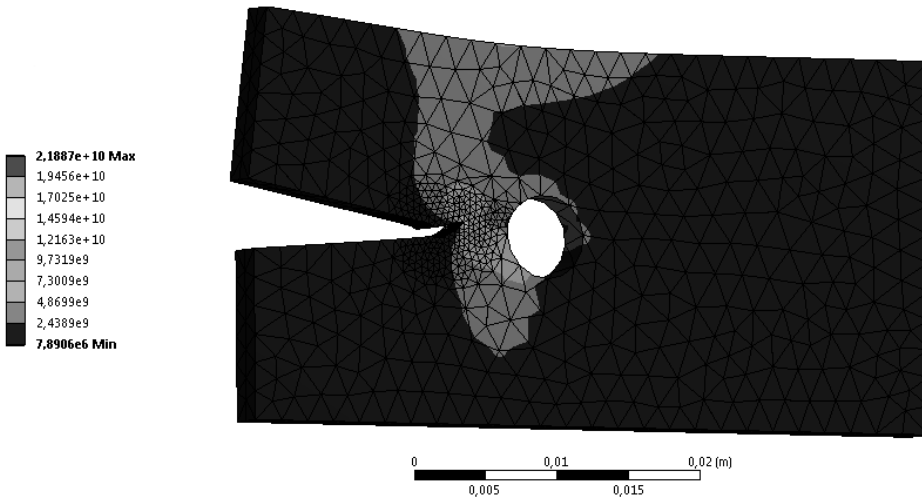


Рис. 9. Эпюра эквивалентных напряжений модели, нагрузка P_3

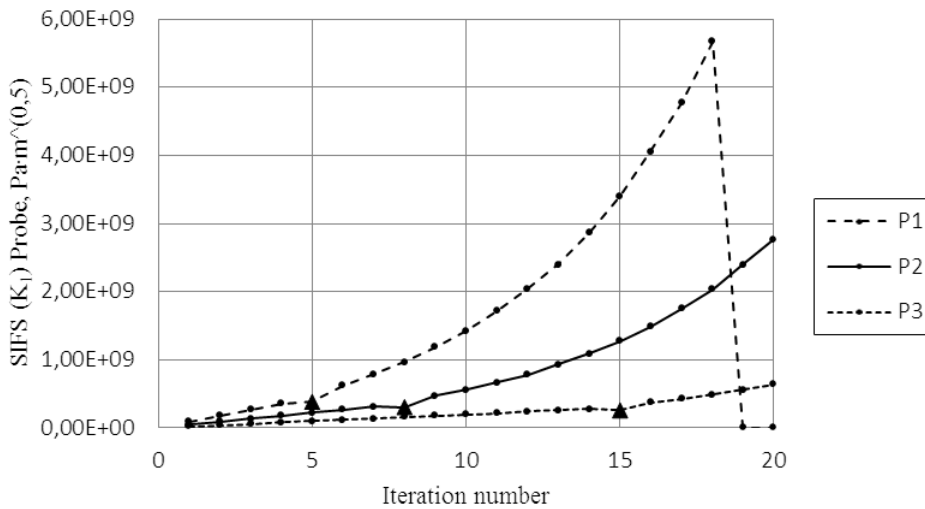


Рис. 10. Изменение K_I модели по траектории развития трещины при нагрузках P_1 , P_2 , P_3

На рис. 11 представлена полученная зависимость эквивалентных напряжений от радиуса разгружающего отверстия при нагрузке P_1 . Представленные кривые соответствуют итерациям 8..20, т.к. на более ранних итерациях отмечаются очень незначительные изменения эквивалентных напряжений и интереса для исследования они не представляют. Для моделей с $r < 2,33e-3$ м наблюдалось преждевременное прерывание расчета по причине купирования трещины в области фронта в виде незначительного разлома.

Согласно полученным результатам, при $r > 2,33e-3$ м на всех итерациях на-

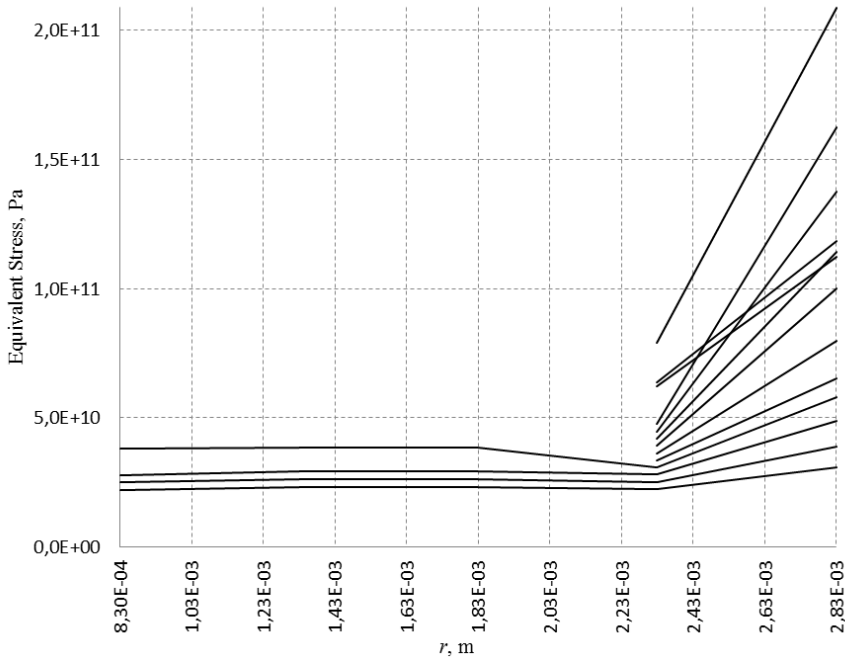


Рис. 11. Зависимость эквивалентных напряжений от радиуса разгружающего отверстия, на первых десяти итерациях, нагрузка P_1

блюдается резкое увеличение концентрации напряжений, которая у вершины разреза приводит к появлению пластического течения, предшествующего образованию новых поверхностей, т.е. зарождению (рис. 12) и развитию трещины. Расстояние от разгружающего отверстия до фронта трещины составляло 30-50% исходной длины трещины. При этом на эпохах не всегда присутствует симметрия линий разлома на передней и задней поверхностях модели, что, свидетельствует о возможном влиянии толщины пластины и, как следствие, значения K_{II} , входящего в определяющее выражение для J-интеграла [5].

Этот факт подтверждается данными рис. 13, который отражает зависимость K_I от радиуса разгружающего отверстия, на итерациях 8..20. Очевиден резкий скачок значений K_I при $r > 2,33e-3$ м. Линии, соответствующие итерациям 19, 20 на рис. 13 не изображены, поскольку при $r > 2,33e-3$ м происходит разрыв отверстия и падение пикового значения K_I .

Очевидна значительная роль разгружающего отверстия в вопросе купирования развития трещины. На рис. 14 представлена эпоха модели без отверстия. Сравнивая значения максимальных напряжений при соответствующих нагрузках, на рис. 7-9 и рис. 14 отмечаем, что отверстие оказывает значительное разгружающее воздействие на поле эквивалентных напряжений в области фронта трещины, уменьшая значения максимальных напряжений на 20-30%. При входе трещины в отверстие максимальные напряжения (после их перераспределения) наблюдаются на правом участке границы отверстия.

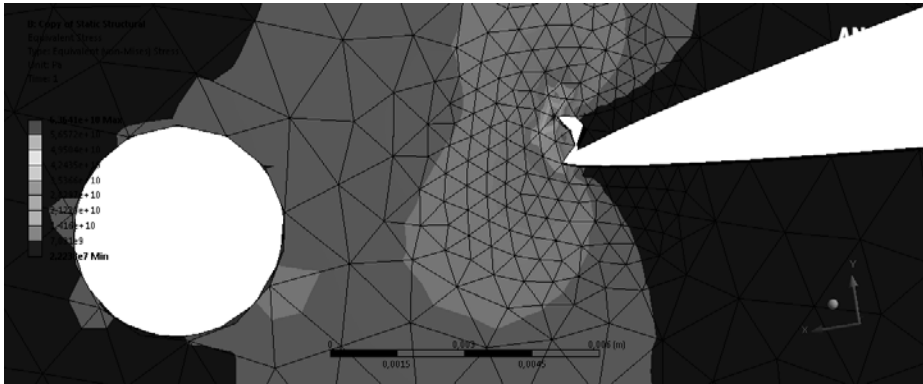


Рис. 12. Зарождение трещины

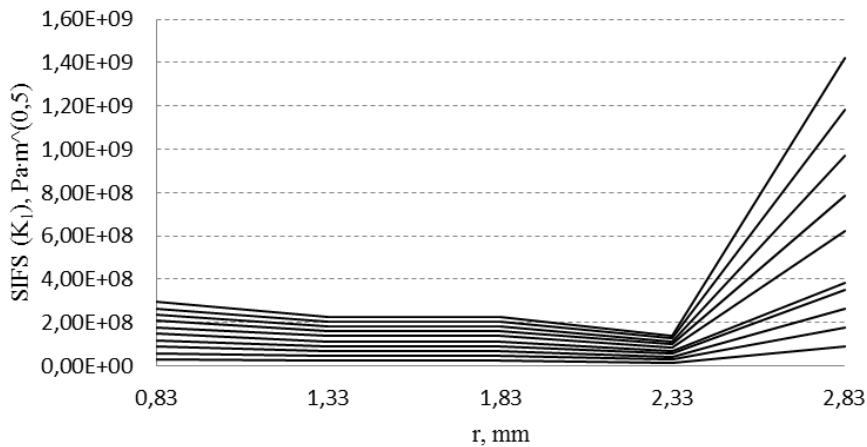


Рис. 13. Зависимость K_I от радиуса разгружающего отверстия, на первых десяти итерациях, нагрузка P_1

Выводы. Примененная технология SMART конечно-элементного комплекса ANSYS Mechanical является достаточно удобным и точным инструментом изучения процесса трещинообразования в образцах произвольной геометрии. На основании проведенных расчетов можно сформулировать следующие выводы:

1. Для рассмотренного образца имеем хорошее согласование с известными табличными величинами. При выполнении условия $K_I > K_C$ нарушается критерий устойчивости, вследствие чего трещина становится неустойчивой и начинает развитие. Данный факт подтверждается соответствующими эпюрами и графиками. При верно подобранной геометрии (расстояния от фронта трещины до разгружающего отверстия и его объема) можно достичь эффекта слияния трещины с разгружающим отверстием, т.е. тормозящего эффекта.

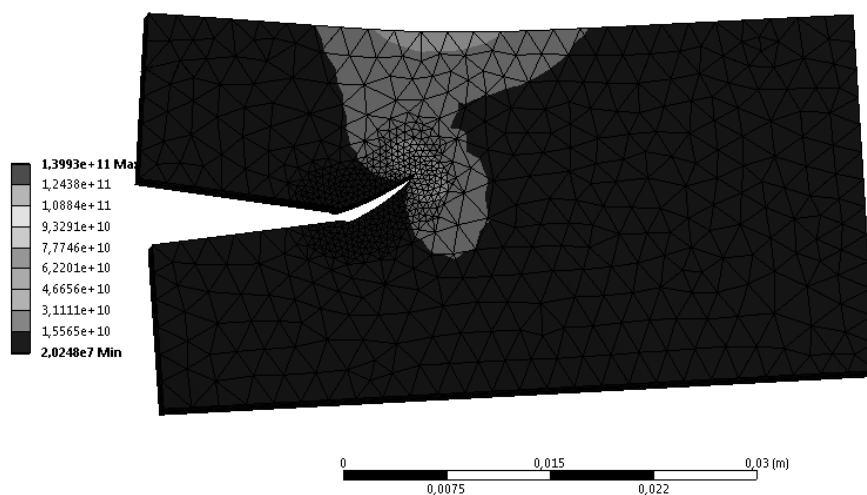


Рис. 14. Эпюра эквивалентных напряжений модели, нагрузка P_1

2. Величина прикладываемой нагрузки к исследуемому образцу оказывает существенное влияние на характер разрушения. Исследована зависимость закономерностей распространения трещины в зависимости от величины прикладываемой нагрузки.
3. Разгружающее отверстие способно понизить значения максимальных напряжений на 20-30% при адекватной геометрии и нагрузке модели. Даже при незначительном объеме разгружающего отверстия оно способно остановить развитие трещины в области ее фронта на этапе зарождения. При этом фронт трещины не должен отстоять от разгружающего отверстия более чем на 50% длины исходной трещины (выреза).

Нелинейные задачи механики разрушения имеют дело с произвольно ориентированными, наклонными, разветвляющимися трещинами, сочетающими в себе сразу несколько типов деформации и, следовательно, для одной модели иногда невозможно аналитически вывести формулы для расчёта коэффициентов интенсивности, с помощью которых и определяется прочность и предел стойкости конструкции. Поэтому перспективным направлением исследования является изучение влияния на распространение трещины при нагрузке по I типу коэффициента K_{II} , а также влияние смешанной нагрузки по I и II типам, толщины пластины, наличия и формы конструктивных стопперов.

1. Гузь А.Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) / А. Н. Гузь // Прикладная механика. - 2014. - Т. 50, № 1. - С. 5-88.
2. Zhang X. A fictitious crack XFEM with two new solution algorithms for cohesive crack growth modeling in concrete structures / X. Zhang, T.Q. Bui // Engineering Computations. – 2015. – V 32. – P. 473–497.
3. ANSYS V19.R2 User's Manual. - USA: Swanson Analysis Systems Inc., 2019.

4. Вовк Л.П. Определение параметров разрушения пластины с трещиной при наличии концентраторов напряжения в процессе упругопластического деформирования / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Вестник ДонНТУ. – 2018. – № 4. – С. 8–15.
5. Бигалиева А.З. Расчет на прочность трехмерных объектов проектирования / А.З. Бигалиева, М.М. Коккоз // Современные наукоемкие технологии. – 2012. – № 2. – С. 41–44.
6. Эксплуатационная надежность металлических конструкций и сооружений производственных зданий в экстремальных условиях Севера / В.В. Филиппов [и др]; под редакцией чл.-корр. РАН В.В. Филиппова. - М.: Физматлит, 2012. – 436 с.

L.P. Vovk , E.S. Kisel

Modeling the distribution of cracks from top of acute v-cut models, destroyed by the unloading hole.

An experimental study of the origin and development of a crack at the apex of a sharp V-shaped notch was carried out. The normal detachment of a sample of rectangular cross section weakened by a V-shaped notch and a discharge opening, i.e. when loading on the type of separation (crack type I). A computer simulation of the nucleation and development of a crack from the top of a V-shaped notch and numerical experiments on the destruction of samples of various geometrical configurations have been carried out. The dependences of the mechanical characteristics on the localization of the cutout and the hole, their geometrical parameters and the model loading scheme are obtained. The finite element method is used to derive stress intensity factors for uniaxial tension. Practical recommendations regarding the geometric parameters of the model and the loading scheme are proposed.

Keywords: *crack, corner cut, fracture criterion, computer modelling, finite element method.*

АДИ ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”, Горловка
lv777@list.ru
e.s.kisel@gmail.com

Получено 25.02.19

УДК 539.3:534.1

©2019. И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко

ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ

Волновое движение описывается на основе полной системы уравнений линейной динамической теории упругости. Модуль сдвига и плотность изотропного материала цилиндра задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Базисные решения системы дифференциальных уравнений модели строятся в матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решения в равномерно и абсолютно сходящиеся степенные ряды по обобщенной кольцевой координате. Представлены также дисперсионные соотношения, описывающее спектры гармоник нормальных волн для случаев одновременно жестко закрепленных и свободных граничных поверхностей полого цилиндра. Изучены эффекты влияния фактора радиальной неоднородности на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, изотропный волновод, нормальные волны, базисные решения, дисперсионные соотношения, фазовая скорость, групповая скорость.

1. Введение. При исследовании задач о распространении нормальных упругих волн вдоль изотропных цилиндров кольцевого сечения вопрос сводится к построению общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В классическом случае однородного материала волновода эти уравнения разрешимы через цилиндрические функции, что становится невозможным при переходе к рассмотрению нового поколения функционально-градиентных материалов. Одним из подходов, обеспечивающих возможность построения общих аналитических решений указанной системы дифференциальных уравнений, является задание специального вида функционального закона радиального изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной кольцевой координате. Так в осесимметричном случае для экспоненциального закона радиальной неоднородности материала волновода построены в аналитическом виде общие решения модели и исследованы эффекты влияния фактора радиальной неоднородности трансверсально-изотропных материалов на характеристики дисперсионных спектров и фазовых скоростей бегущих нормальных крутильных волн в полых цилиндрах [1]. В данном исследовании указанная методика распространена на более общий случай экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности изотропного материала волновода.

2. Постановка задачи. Рассматривается протяженный волновод, имеющий в поперечном сечении форму концентрического кругового кольца с радиусами R_1 и R_2 . Вводится нормирующий параметр R_* , на который накладываются огра-

ничения $R_1 \leq R_* \leq R_2$ и $R_2/2 < R_*$. Вводится также безразмерный параметр

$$h = \max \{1 - R_1/R_*, R_2/R_* - 1\} \quad (0 < h < 1). \quad (1)$$

В нормированной параметром R_* безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ волновод занимает область V

$$V = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\},$$

$$V \subseteq \{r \in [1 - h, 1 + h]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Граничная поверхность Γ волновода определяется так:

$$\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}, \quad \Gamma^{(j)} = \{r = R_j/R_*, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (j = \overline{1, 2}).$$

Полагается, что изотропный материал волновода является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по таким своим физико-механическим свойствам ($\nu = const$)

$$\rho(r) = \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda, q}(r)), \quad G(r) = \tilde{G} \exp(f_{\lambda, q}(r)), \quad f_{\lambda, q}(r) = \lambda ((r - 1)/h)^q. \quad (2)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона; ρ и G – соответственно плотность и нормированный параметром C_* модуль сдвига неоднородного материала; $\tilde{\rho}$ и \tilde{G} соответственно плотность и нормированный параметром C_* модуль сдвига однородного материала. Параметры λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) и q ($q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) в представлениях (2) характеризуют соответственно относительный максимальный уровень и форму локализации в теле волновода радиальной неоднородности материала.

Пространственная линейная математическая модель динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел в системе координат $Or\theta z$ включает систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

соотношения линейного закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= G(C_1 \varepsilon_{rr} + C_2 (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})), \quad \sigma_{\theta\theta} = G(C_1 \varepsilon_{\theta\theta} + C_2 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})), \\ \sigma_{zz} &= G(C_1 \varepsilon_{zz} + C_2 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})), \quad \sigma_{\theta z} = G \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = G \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = G \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (4)$$

уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций ε_{nm} ($n, m = r, \theta, z$) и отнесенными к нормирующему параметру R_* компонентами безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений u_n ($n = r, \theta, z$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, & \varepsilon_{\theta\theta} &= r^{-1} u_r + r^{-1} \partial_\theta u_\theta, & \varepsilon_{zz} &= \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1} \partial_\theta u_z, & \varepsilon_{rz} &= \partial_z u_r + \partial_r u_z, & \varepsilon_{r\theta} &= r^{-1} \partial_\theta u_r + (\partial_r - r^{-1}) u_\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $C_1 = 2(1 - \nu) / (1 - 2\nu)$, $C_2 = 2\nu / (1 - 2\nu)$; σ_{nm} ($n, m = r, \theta, z$) – отнесенные к нормирующему параметру C_* безразмерные характеристики напряженно-деформированного состояния; t – время; $\partial_s = \partial / \partial s$ ($s = r, \theta, z, t$).

Представленная модель включает также однородные граничные условия свободной

$$\sigma_{rs} |_{(r,\theta,z) \in \Gamma} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (6)$$

либо жестко закрепленной

$$u_s |_{(r,\theta,z) \in \Gamma} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (7)$$

граничной поверхности волновода.

3. Система используемых обозначений. Ниже будут использоваться следующие обозначения: i – мнимая единица; выделение жирным шрифтом – для обозначения матричных и векторных объектов; \mathbf{O} и $\hat{\mathbf{O}}$ – нулевые соответственно квадратная матрица и вектор-столбец; \mathbf{I} – единичная квадратная матрица; обозначения $[\mathbf{X}]_{j,p}$ и $[\mathbf{X}]_j$ при $j, p \in \mathbb{N}$ используется для индексного доступа к элементам соответственно матричных и векторных объектов, а при j либо p заданных индексным диапазоном вида $n..m$ или (n_1, n_2, \dots, n_m) – для определения соответственно подматрицы либо подвектора; операция $[\]$ – для определения матричных и векторных объектов (формально $[\mathbf{X}] \equiv \mathbf{X}$); операция транспонирования \mathbf{X}^T ; операция комплексного сопряжения $\overline{\mathbf{X}}$; операция обращения неособенной квадратной матрицы \mathbf{X}^{-1} ; $\|\mathbf{X}\|$ – мультипликативная согласованная евклидова норма [2].

4. Получение рекуррентных соотношений. Модель (2) – (7) применяется для исследования нормальных волн вдоль оси Oz в протяженных полых цилиндрах геометрии V с круговой частотой ω , нормированным параметром R_* продольным волновым числом \tilde{k} ($\tilde{k} \in \mathbb{C}$) и окружным волновым числом τ ($\tau \in \mathbb{Z}$). В матричной форме вводятся следующие комплексные представления

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \exp\left(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (8)$$

где δ ($\delta \in \mathbb{R}$) – произвольный параметр; $\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)$ – диагональная матрица размерности 3×3 , отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)\right]_{1,1} &= \cos(\tau\theta + \beta), & \left[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)\right]_{2,2} &= \sin(\tau\theta + \beta), \\ \left[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)\right]_{3,3} &= i \cos(\tau\theta + \beta) \quad (\beta \in \{0, \pi/2\}); \end{aligned} \quad (9)$$

вектор-столбцы

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, \theta, z, t) &= [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) &= [\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r)]^T. \end{aligned} \quad (10)$$

Параметр β в соотношениях (9) задает тип симметрии волновых движений относительно плоскости $\theta = 0$. При $\beta = 0$ исследованию подлежат условно симметричные волны со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= u_z(r, \theta, z, t), \end{aligned}$$

а при $\beta = \pi/2$ – условно антисимметричные волны со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= -u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= -u_z(r, \theta, z, t). \end{aligned}$$

Представления (8) – (10) определяют независимые задачи исследования осесимметричных крутильных ($\tau = 0$, $\beta = \pi/2$) и продольно-сдвиговых ($\tau = 0$, $\beta = 0$) волн, а также неосесимметричных волн ($\tau \in \mathbb{N}$, $\beta = 0$).

В результате подстановки представлений (8) – (10) последовательно в соотношения (4) и (3) получается

$$\mathbf{S}(r, \theta, z, t) = \exp\left((1 - \delta) f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r), \quad (11)$$

где $\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)$ – диагональная матрица размерности 6×6 , отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \cos(\tau\theta + \beta) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{4,4} = i \sin(\tau\theta + \beta), \\ [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{5,5} &= i \cos(\tau\theta + \beta), \quad [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{6,6} = \sin(\tau\theta + \beta); \end{aligned} \quad (12)$$

вектор-столбцы

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(r, \theta, z, t) &= [\sigma_{rr}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \sigma_{zz}(r, \theta, z, t), \\ &\quad \sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t), \sigma_{rz}(r, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t)]^T, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) &= [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(r)]^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Для векторов $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$ получаются также дифференциальные соотношения связи

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{G} \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (14)$$

где $\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 6×3 , отличные от нуля элементы которого имеют вид

$$\left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,1} = C_1 D(r) + C_2 r^{-1}, \quad \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,1} = C_2 D(r) + C_1 r^{-1},$$

$$\left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{3,1} = C_2 (D(r) + r^{-1}),$$

$$\left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,2} = \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{3,2} = C_2 \tau r^{-1}, \quad \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,2} = C_1 \tau r^{-1},$$

$$\left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,3} = \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,3} = -C_2 \tilde{k}, \quad \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} = -C_1 \tilde{k},$$

$$\left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{4,2} = \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{5,1} = \tilde{k}, \quad \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{4,3} = \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{6,1} = -\tau r^{-1},$$

$$\left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{5,3} = D(r), \quad \left[\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{6,2} = D(r) - r^{-1}.$$

Здесь $D(r) = d_r - \delta \lambda q h^{-q} (r-1)^{q-1}$, $d_r = d/dr$.

Из дифференциальных уравнений движения (3) с учетом соотношений (8) – (14) получается однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно компонент вектора $\mathbf{U}^{(\tau)}(r)$ следующего вида

$$\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in (r_0, r_1)). \quad (15)$$

Здесь используется некоторая область (r_0, r_1) изменения переменной r , удовлетворяющая требованиям $0 < r_0 < 1 - h < 1 + h < r_1 < 2$. Из выражений (1) следует, что такая область всегда существует. В соотношениях (15) $\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)$ – квадратный матричный размерности 3×3 дифференциальный оператор с элементами

$$\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{1,1} = C_1 \left(r^2 d_r^2 + \left(1 + (1 - 2\delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \right) r d_r - 1 \right) - \tau^2 +$$

$$+ \kappa^2 r^2 + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left(\delta (1 - qr - (1 - \delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^q) C_1 + (r-1) C_2 \right),$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{1,2} &= \tau \left(C_3 r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (C_2 - \delta C_3) - C_4 \right), \\
 \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{1,3} &= -\tilde{k} r \left(C_3 r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (C_2 - \delta C_3) \right), \\
 \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{2,1} &= -\tau \left(C_3 r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (1 - \delta C_3) + C_4 \right), \\
 \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{2,2} &= r^2 d_r^2 + \left(1 + (1 - 2\delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \right) r d_r - 1 - \tau^2 C_1 + \\
 &+ \kappa^2 r^2 - \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left(1 + \delta - (1 - \delta q) r - \delta (1 - \delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^q \right), \\
 \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{2,3} &= \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,2} = \tilde{k} \tau C_3 r, \\
 \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,1} &= \tilde{k} r \left(C_3 (1 + r d_r) + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (1 - \delta C_3) \right), \\
 \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} &= r^2 d_r^2 + \left(1 + (1 - 2\delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \right) r d_r - \tau^2 + \\
 &+ \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1 \right) r^2 + \delta \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left(1 - q r - (1 - \delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^q \right),
 \end{aligned}$$

где $\Omega^2 = \tilde{\rho} \omega^2 R_*^2 / (C_* \tilde{G})$, $C_3 = 1 / (1 - 2\nu)$, $C_4 = (3 - 4\nu) / (1 - 2\nu)$, $\kappa^2 = \Omega^2 - \tilde{k}^2$.

С целью построения частных решений уравнения (15) заменой переменных

$$r = hx + 1, \quad x \in (x_0, x_1) \quad (-h^{-1} < x_0 < -1, \quad 1 < x_1 < h^{-1}) \quad (16)$$

вводится обобщенная кольцевая координата [3]. Здесь $x_0 = (r_0 - 1) h^{-1}$, $x_1 = (r_1 - 1) h^{-1}$. В результате замены переменных (16) соотношения (8), (10), (11), (13) – (15) преобразуются так:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}(x, \theta, z, t) &= \exp \left(-\delta \lambda x^q - i \omega t + i \tilde{k} z \right) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x), \\
 \mathbf{S}(x, \theta, z, t) &= \exp \left((1 - \delta) \lambda x^q - i \omega t + i \tilde{k} z \right) \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x),
 \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mathbf{U}(x, \theta, z, t)$, $\mathbf{S}(x, \theta, z, t)$, $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x)$, $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x)$ – вектор-столбцы

$$\mathbf{U}(x, \theta, z, t) = [u_r(x, \theta, z, t), u_\theta(x, \theta, z, t), u_z(x, \theta, z, t)]^T,$$

$$\mathbf{S}(x, \theta, z, t) = [\sigma_{rr}(x, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(x, \theta, z, t), \sigma_{zz}(x, \theta, z, t)],$$

$$\sigma_{\theta z}(x, \theta, z, t), \sigma_{rz}(x, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(x, \theta, z, t)]^T;$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) = [\tilde{u}_r^{(\tau)}(x), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(x), \tilde{u}_z^{(\tau)}(x)]^T,$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) = [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(x)]^T;$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) = \tilde{G} \mathbf{M}_3^{(\tau)}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x), \quad (18)$$

где $\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 6×3 , отличные от нуля элементы которого имеют вид

$$[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{1,1} = C_1 \tilde{D}(x) + C_2 (hx + 1)^{-1}, \quad [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{2,1} = C_2 \tilde{D}(x) + C_1 (hx + 1)^{-1},$$

$$[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{3,1} = C_2 (\tilde{D}(x) + (hx + 1)^{-1}),$$

$$[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{1,2} = [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{3,2} = C_2 \tau (hx + 1)^{-1}, \quad [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{2,2} = C_1 \tau (hx + 1)^{-1},$$

$$[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{1,3} = [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{2,3} = -C_2 \tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{3,3} = -C_1 \tilde{k},$$

$$[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{4,2} = [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{5,1} = \tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{4,3} = [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{6,1} = -\tau (hx + 1)^{-1},$$

$$[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{5,3} = \tilde{D}(x), \quad [\mathbf{M}_3^{(\tau)}(x)]_{6,2} = \tilde{D}(x) - (hx + 1)^{-1},$$

$$\tilde{D}(x) = h^{-1} (d_x - \delta \lambda q x^{q-1}), \quad d_x = d/dx;$$

$$\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) = \hat{\mathbf{O}} \quad (x \in (x_0, x_1)), \quad (19)$$

где $\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 3×3 с элементами

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x)]_{1,1} = \\ & = C_1 \left((hx + 1)^2 d_x^2 + (h + (1 - 2\delta) \lambda q (hx + 1) x^{q-1}) (hx + 1) d_x - h^2 \right) - \\ & \quad - \tau^2 h^2 + \kappa^2 h^2 (hx + 1)^2 + \end{aligned}$$

$$+\lambda q (hx + 1) x^{q-2} (\delta (1 - q (hx + 1) (1 + (1 - \delta) \lambda x^q)) C_1 + hx C_2),$$

$$\left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{1,2} = h\tau (C_3 (hx + 1) d_x + \lambda q (hx + 1) x^{q-1} (C_2 - \delta C_3) - hC_4),$$

$$\left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{1,3} = -h\tilde{k} (hx + 1) (C_2 (hx + 1) d_x + \lambda q (hx + 1) x^{q-1} (C_2 - \delta C_3)),$$

$$\left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{2,1} = -h\tau (C_2 (hx + 1) d_x + \lambda q (hx + 1) x^{q-1} (1 - \delta C_3) + hC_4),$$

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{2,2} = \\ & = \left((hx + 1)^2 d_x^2 + (h + (1 - 2\delta) \lambda q (hx + 1) x^{q-1}) (hx + 1) d_x - h^2 \right) - \\ & \quad - h^2 \tau^2 C_1 + \kappa^2 h^2 (hx + 1)^2 - \\ & \quad - \lambda q (hx + 1) x^{q-2} (\delta - hx - \delta q (hx + 1) - \delta (1 - \delta) \lambda q (hx + 1) x^q), \end{aligned}$$

$$\left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{2,3} = \left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{3,2} = h^2 \tilde{k} \tau C_3 (hx + 1),$$

$$\left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{3,1} = h\tilde{k} (hx + 1) (C_3 (hx + 1) d_x + hC_3 + \lambda q (hx + 1) x^{q-1} (1 - \delta C_3)),$$

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{M}_4^{(\tau)}(x) \right]_{3,3} = (hx + 1)^2 d_x^2 + (h + (1 - 2\delta) \lambda q (hx + 1) x^{q-1}) (hx + 1) d_x - \\ & \quad - h^2 \tau^2 + (\Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1) h^2 (hx + 1)^2 + \\ & \quad + \delta \lambda q (hx + 1) x^{q-2} (1 - q (hx + 1) - (1 - \delta) \lambda q (hx + 1) x^q). \end{aligned}$$

Искомые частные решения уравнения (19) строятся в виде степенных рядов по обобщенной кольцевой координате. Водится следующее представление

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{X}_m^{(\tau)} \quad (x \in [x_0, x_1]), \quad (20)$$

где $\mathbf{X}_m^{(\tau)}$ – неизвестные векторные коэффициенты. Полагается, что ряд (20) для $x \in [x_0, x_1]$ сходится абсолютно и равномерно. С учетом представления (20) уравнение (19) преобразуется в функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau)} &= \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0), \\ \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left(\sum_{j=0}^4 \mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{m,5+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_{m,9+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(\tau)} \right) &= \hat{\mathbf{O}} \quad (21) \\ &\quad (x \in [x_0, x_1]), \end{aligned}$$

из которого получается рекуррентная последовательность алгебраических уравнений для определения векторных коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(\tau)}$ такого вида

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau)} &= \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0), \\ \sum_{j=0}^4 \mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{m,5+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_{m,9+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(\tau)} &= \hat{\mathbf{O}} \quad (22) \\ &\quad (m = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Отличные от нуля элементы квадратных матричных коэффициентов $\mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)}$ в уравнениях (22) определяются так:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}]_{1,1} &= m(m-1)C_1, \quad [\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}]_{2,2} = m(m-1), \quad [\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}]_{3,3} = m(m-1), \\ [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{1,1} &= h(m-1)(2m-3)C_1, \quad [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{1,2} = h\tau(m-1)C_3, \\ [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{1,3} &= -h\tilde{k}(m-1)C_3, \quad [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{2,1} = -h\tau(m-1)C_3, \\ [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{2,2} &= h(m-1)(2m-3), \quad [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{3,1} = h\tilde{k}(m-1)C_3, \\ [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{3,3} &= h(m-1)(2m-3), \quad [\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)}]_{1,1} = h^2 \left(((m-2)^2 - 1)C_1 + \kappa^2 - \tau^2 \right), \\ [\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)}]_{1,2} &= h^2\tau((m-2)C_2 - C_1 + m - 3), \quad [\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)}]_{1,3} = -2(m-2)h^2\tilde{k}C_3, \\ [\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)}]_{2,1} &= -h^2\tau((m-2)C_2 + C_1 + m - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= h^2 \left((m-3)(m-1) + \kappa^2 - \tau^2 C_1 \right), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{2,3} &= \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{3,2} = h^2 \tilde{k} \tau C_3, \quad \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{3,1} = h^2 \tilde{k} (2m-3) C_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= h^2 \left((m-2)^2 + \Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1 - \tau^2 \right), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{2,2} = 2h^3 \kappa^2, \quad \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{1,3} = -h^3 \tilde{k} (m-3) C_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{2,3} &= h^3 \tilde{k} \tau C_3, \quad \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{3,1} = \tilde{k} h^3 (m-2) C_3, \quad \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{3,2} = h^3 \tilde{k} \tau C_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= 2h^3 \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1 \right), \quad \left[\mathbf{Q}_{m,4}^{(\tau)} \right]_{1,1} = \left[\mathbf{Q}_{m,4}^{(\tau)} \right]_{2,2} = h^4 \kappa^2, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,4}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= h^4 \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1 \right), \quad \left[\mathbf{Q}_{m,5}^{(\tau)} \right]_{1,1} = -\lambda q (q-m-\delta(1+q-2m)) C_1, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,5}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= \left[\mathbf{Q}_{m,5}^{(\tau)} \right]_{3,3} = -\lambda q (q-m-\delta(1+q-2m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= -\lambda q h \left((2(1+q-m) - \delta(5+2q-4m)) C_1 - C_2 \right), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= -\lambda q h (3+2q-2m-\delta(5+2q-4m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= -\lambda q h (2(1+q-m) - \delta(5+2q-4m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tau h (C_2 - \delta C_3), \quad \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{2,1} = -\lambda q \tau h (1 - \delta C_3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{1,3} &= -\lambda q \tilde{k} h (C_2 - \delta C_3), \quad \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{3,1} = \lambda q \tilde{k} h (1 - \delta C_3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= -\lambda q h^2 \left((2+q-m-\delta(4+q-2m)) C_2 - C_2 \right), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= -\lambda q h^2 (3+q-m-\delta(4+q-2m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= -\lambda q h^2 (2+q-m-\delta(4+q-2m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tau h^2 (C_2 - \delta C_3), \quad \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{2,1} = -\lambda q \tau h^2 (1 - \delta C_3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{1,3} &= -2\lambda q \tilde{k} h^2 (C_2 - \delta C_3), & \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{3,1} &= 2\lambda q \tilde{k} h^2 (1 - \delta C_3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,8}^{(\tau)} \right]_{1,3} &= -\lambda q \tilde{k} h^3 (C_2 - \delta C_3), & \left[\mathbf{Q}_{m,8}^{(\tau)} \right]_{3,1} &= \lambda q \tilde{k} h^3 (1 - \delta C_3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,9}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1) C_1, & \left[\mathbf{Q}_{m,9}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,9}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1), & \left[\mathbf{Q}_{m,10}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1) C_1, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,10}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1), & \left[\mathbf{Q}_{m,10}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,11}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1) C_1, & \left[\mathbf{Q}_{m,11}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,11}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1) \quad (m = \overline{0, \infty}).
 \end{aligned}$$

Представления (18) с учетом разложения (20) получают следующий вид

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \mathbf{X}_m^{(\tau)} \quad (x \in [x_0, x_1]). \quad (23)$$

Отличные от нуля элементы матричных размерности 6×3 коэффициентов $\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{1,1} &= p_1(x) C_1 + p_2(x) C_2, & \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{2,1} &= p_1(x) C_2 + p_2(x) C_1, \\
 \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{3,1} &= (p_1(x) + p_2(x)) C_2, \\
 \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{1,2} &= \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{3,2} = \tau p_2(x) C_2, & \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{1,3} &= \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{2,3} = -\tilde{k} C_2, \\
 \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{2,2} &= \tau p_2(x) C_1, & \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{3,3} &= -\tilde{k} C_1, \\
 \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{4,2} &= \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{5,1} = \tilde{k}, & \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{4,3} &= \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{6,1} = -\tau p_2(x), \\
 \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{5,3} &= p_1(x), & \left[\mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) \right]_{6,2} &= p_1(x) + p_2(x),
 \end{aligned}$$

где $p_1(x) = h^{-1} (m x^{-1} - \delta q \lambda x^{q-1})$, $p_2(x) = (h x + 1)^{-1}$.

5. Базисные решения в случае крутильных волн. При $\tau = 0$ и $\beta = \pi/2$ представления (17) преобразуются к такому виду

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(TW)}(x, z, t) &= \exp\left(-\delta\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x), \\ \mathbf{S}^{(TW)}(x, z, t) &= \exp\left((1-\delta)\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(TW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\mathbf{T}_2^{(TW)}$ – диагональная матрица размерности 2×2 , отличные от нуля элементы которой равны $[\mathbf{T}_2^{(TW)}]_{1,1} = i$, $[\mathbf{T}_2^{(TW)}]_{2,2} = 1$; $\mathbf{S}^{(TW)}(x, z, t)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x)$ – вектор-столбцы с элементами

$$\mathbf{S}^{(TW)}(x, z, t) = [\sigma_{\theta z}(x, z, t), \sigma_{r\theta}(x, z, t)]^T, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x) = [\tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(x)]^T.$$

Тогда уравнение (19) преобразуется к виду

$$\left[\mathbf{M}_4^{(0)}(x)\right]_{2,2} \cdot \tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x) = 0 \quad (x \in [x_0, x_1]), \quad (25)$$

а представления (20) и (23) соответственно переписываются так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m X_m^{(TW)} \quad (x \in [x_0, x_1]), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m X_m^{(TW)} \mathbf{H}_m^{(TW)}(x) \quad (x \in [x_0, x_1]). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\mathbf{H}_m^{(TW)}(x) = [\tilde{k}, p_1(x) + p_2(x)]^T$. Рекуррентная последовательность алгебраических уравнений (22) для определения скалярных коэффициентов $X_m^{(TW)}$ получает такой вид

$$\begin{aligned} X_m^{(TW)} &= 0 \quad (m < 0), \\ \sum_{j=0}^4 Q_{m,j}^{(TW)} X_{m-j}^{(TW)} + \sum_{j=0}^3 Q_{m,5+j}^{(TW)} X_{m-q-j}^{(TW)} + \sum_{j=0}^2 Q_{m,9+j}^{(TW)} X_{m-2q-j}^{(TW)} &= 0 \quad (27) \\ &(m = 0, 1, \dots), \end{aligned}$$

где $Q_{m,j}^{(TW)} = [\mathbf{Q}_{m,j}^{(0)}]_{2,2}$ ($j = \overline{0, 11}$; $m = \overline{0, \infty}$).

При $m = 0$ и $m = 1$ для любых $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ уравнения (27) принимают такой вид

$$0 \cdot X_0^{(TW)} = 0 \quad (m = 0), \quad 0 \cdot X_1^{(TW)} = 0 \quad (m = 1). \quad (28)$$

Поскольку $Q_{m,0}^{(TW)} \neq 0$ ($m \geq 2$), следовательно, из уравнений (27) с учетом соотношений (28) с точностью до произвольного скалярного множителя определяются два набора коэффициентов $\left\{ X_m^{(TW,s)} \right\}_{m=0}^{\infty}$ ($s = \overline{1,2}$)

$$\begin{aligned} X_m^{(TW,1)} &= 0 \quad (m < 0), \quad X_0^{(TW,1)} = 1, \quad X_1^{(TW,1)} = 0, \\ X_0^{(TW,2)} &= 0, \quad X_1^{(TW,2)} = 1, \\ X_m^{(TW,s)} &= \sum_{j=1}^4 A_{m,j}^{(TW)} X_{m-j}^{(TW,s)} + \sum_{j=0}^3 A_{m,5+j}^{(TW)} X_{m-q-j}^{(TW,s)} + \sum_{j=0}^2 A_{m,9+j}^{(TW)} X_{m-2q-j}^{(TW,s)} \quad (29) \\ &\quad (m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1,2}). \end{aligned}$$

Здесь

$$A_{m,j}^{(TW)} = -Q_{m,j}^{(TW)} / Q_{m,0}^{(TW)} \quad (j = \overline{1,11}; m = \overline{2, \infty}). \quad (30)$$

Тогда представления (26) с учетом (29) определяют два линейно независимых частных решения уравнения (25) и, соответственно, общее решение уравнения (25) может быть представлено через матричное базисное решение так:

$$\tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x) = \left[\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x) \mathbf{B} \right]_{1,1}, \quad (31)$$

где \mathbf{B} – произвольный векторный коэффициент второго порядка; $\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x)$ – матричное размерности 1×2 решение следующего вида

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[X_m^{(TW,1)}, X_m^{(TW,2)} \right] \quad (x \in [x_0, x_1]). \quad (32)$$

По аналогии с выражением (31) вводится представление

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x) = \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x) \mathbf{B} \quad (33)$$

в котором используется полученные с учетом соотношений (26), (32) матричные размерности 2×2 решения следующего вида

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[X_m^{(TW,1)} \mathbf{H}_m^{(TW)}(x), X_m^{(TW,2)} \mathbf{H}_m^{(TW)}(x) \right] \quad (x \in [x_0, x_1]). \quad (34)$$

Для коэффициентов $A_{m,j}^{(TW)}$ (30) получены следующие асимптотические при $m \rightarrow \infty$ оценки

$$\left| A_{m,1}^{(TW)} + 2h \right| \leq m^{-1} 3h, \quad \left| A_{m,2}^{(TW)} + h^2 \right| \leq m^{-1} 3h^2,$$

$$\left| A_{3,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-2} 2h^3 |\kappa^2|, \quad \left| A_{4,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-2} h^4 |\kappa^2|$$

$$\left| A_{5,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-1} q |\lambda (2\delta - 1)|, \quad \left| A_{6,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-1} 2qh |\lambda (2\delta - 1)|,$$

$$\left| A_{7,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-1} qh^2 |\lambda (2\delta - 1)|, \quad \left| A_{8,j}^{(TW)} \right| = 0, \quad \left| A_{9,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-2} \lambda^2 q^2 |\delta (\delta - 1)|,$$

$$\left| A_{10,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-2} 2\lambda^2 q^2 h |\delta (\delta - 1)|, \quad \left| A_{9,j}^{(TW)} \right| \leq m^{-2} \lambda^2 q^2 h^2 |\delta (\delta - 1)|.$$

Следовательно, асимптотическое при $m \rightarrow \infty$ представление для рекуррентных соотношений (29) записывается в виде $X_m^{(TW,s)} = -2hX_{m-1}^{(TW,s)} - h^2X_{m-2}^{(TW,s)}$, а его характеристическое уравнение

$$\zeta^2 + 2h\zeta + h^2 = 0 \quad (35)$$

имеет кратный корень $\zeta = -h$, определяющий для разложения (26), (32), (34) радиус сходимости $h^{-1} > 1$. Таким образом, заложенное в соотношениях ограничение $[x_0, x_1] \subset (-h^{-1}, h^{-1})$ обеспечивает справедливость исходного положения об абсолютной и равномерной сходимости указанных разложений на отрезке $x \in [x_0, x_1]$ [4].

6. Базисные решения в случае продольно-сдвиговых волн. При $\tau = 0$ и $\beta = 0$ представления (17) приобретают такой вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp\left(-\delta\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x), \\ \mathbf{S}^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp\left((1-\delta)\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t)$, $\mathbf{S}^{(LSW)}(x, z, t)$, $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x)$ – вектор-столбцы с элементами

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)} &= [u_r(x, z, t), u_z(x, z, t)]^T, \\ \mathbf{S}^{(LSW)}(x, z, t) &= [\sigma_{rr}(x, z, t), \sigma_{\theta\theta}(x, z, t), \sigma_{zz}(x, z, t), \sigma_{rz}(x, z, t)]^T, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= [\tilde{u}_r^{(LSW)}(x), \tilde{u}_z^{(LSW)}(x)]^T, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x) &= [\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(x)]^T; \end{aligned}$$

$\mathbf{T}_1^{(LSW)}$ и $\mathbf{T}_2^{(LSW)}$ – диагональные матрицы размерности соответственно 2×2 и 4×4 , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{T}_1^{(LSW)} \right]_{1,1} &= 1, \quad \left[\mathbf{T}_1^{(LSW)} \right]_{2,2} = i, \\ \left[\mathbf{T}_2^{(LSW)} \right]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad \left[\mathbf{T}_2^{(LSW)} \right]_{4,4} = i. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (19) преобразуется к виду

$$\left[\mathbf{M}_4^{(0)}(x) \right]_{(1,3),(1,3)} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) = \hat{\mathbf{O}} \quad (x \in [x_0, x_1]), \quad (37)$$

а представления (20) и (23) соответственно переписываются так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{X}_m^{(LSW)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW)}(x) \mathbf{X}_m^{(LSW)} \quad (x \in [x_0, x_1]). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь $\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x) = \left[\mathbf{H}_m^{(0)}(x) \right]_{(1,2,3,5),(1,3)}$. Рекуррентная последовательность алгебраических уравнений (22) для определения векторных коэффициентов второго порядка $\mathbf{X}_m^{(LSW)}$ получает такой вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(LSW)} &= \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0), \\ \sum_{j=0}^4 \mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-j}^{(LSW)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{m,5+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(LSW)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_{m,9+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(LSW)} &= \hat{\mathbf{O}} \quad (39) \\ &(m = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)} = \left[\mathbf{Q}_{m,j}^{(0)} \right]_{(1,3),(1,3)}$ ($j = \overline{0,11}$; $m = \overline{0, \infty}$).

Уравнения (39) при $m = 0$ и $m = 1$ для любых $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ записываются в виде

$$\mathbf{O} \mathbf{X}_0^{(LSW)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 0), \quad \mathbf{O} \mathbf{X}_1^{(LSW)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 1). \quad (40)$$

Уравнения (40) имеют четыре линейно независимых нетривиальных векторных решения, которые могут быть объединены в два матричных решения такого вида

$$\mathbf{X}_0^{(LSW,1)} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}_1^{(LSW,1)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_0^{(LSW,2)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_1^{(LSW,2)} = \mathbf{I}. \quad (41)$$

Представления (41) приведены с точностью до произвольного векторного множителя. Тогда для определения матричных размерности 2×2 коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(LSW,s)}$ ($s = \overline{1,2}$; $m \geq 2$) с учетом того, что $\det \left(\mathbf{Q}_{m,0}^{(LSW)} \right) \neq 0$ ($m \geq 2$) получаются явные рекуррентные представления

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_m^{(LSW,s)} &= \mathbf{O} \quad (m < 0; \quad s = \overline{1,2}), \\
 \mathbf{X}_m^{(LSW,s)} &= \\
 &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-j}^{(LSW,s)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(LSW,s)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(LSW,s)} \quad (42) \\
 &\quad (m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1,2}).
 \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} = - \left(\mathbf{Q}_{m,0}^{(LSW)} \right)^{-1} \mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)}$ ($j = \overline{1,11}$). Следовательно, общее решение уравнения (37) может быть записано через матричные базисные решения так:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x) \mathbf{B}, \\
 \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[\mathbf{X}_m^{(LSW,1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)} \right] \quad (x \in [x_0, x_1]). \quad (43)
 \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{B} – произвольный векторный коэффициент четвертого порядка. На основании представлений (38), (43) получается

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x) &= \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x) \mathbf{B}, \\
 \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW)}(x) \left[\mathbf{X}_m^{(LSW,1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)} \right] \quad (x \in [x_0, x_1]). \quad (44)
 \end{aligned}$$

Для матричных коэффициентов $\mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)}$ в рекуррентных соотношениях (42) получены следующие асимптотические при $m \rightarrow \infty$ оценки

$$\begin{aligned}
 \left\| \mathbf{A}_{m,1}^{(LSW)} + 2h\mathbf{I} \right\| &\leq \kappa_1/m, \quad \left\| \mathbf{A}_{m,2}^{(LSW)} + h^2\mathbf{I} \right\| \leq \kappa_2/m, \\
 \left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} \right\| &\leq \kappa_j/m \quad (j = 3, 5, 6, 7), \quad \left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} \right\| \leq \kappa_j/m^2 \quad (j = 4, 8, 9, 10, 11).
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= h \sqrt{18 + \left| \tilde{k} \right|^2 C_3^2 (C_1^{-2} + 1)}, \quad \kappa_2 = h^2 \sqrt{18 + 4 \left| \tilde{k} \right|^2 C_3^2 (C_1^{-2} + 1)}, \\
 \kappa_3 &= h^3 \left| \tilde{k} \right| C_3 \sqrt{C_1^{-2} + 1}, \quad \kappa_4 = h^4 \sqrt{C_1^{-2} \left| \Omega^2 - \tilde{k}^2 \right|^2 + \left| \Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1 \right|^2}, \\
 \kappa_5 &= \sqrt{2}q \left| \lambda (1 - 2\delta) \right|, \quad \kappa_6 = 2\sqrt{2}qh \left| \lambda (1 - 2\delta) \right|, \quad \kappa_7 = \sqrt{2}qh^2 \left| \lambda (1 - 2\delta) \right|, \\
 \kappa_8 &= h^3 \sqrt{q \left| \tilde{k} \lambda \right| \sqrt{C_1^{-2} \left| C_2 - \delta C_3 \right|^2 + \left| 1 - \delta C_3 \right|^2}}, \quad \kappa_9 = \sqrt{2} \lambda^2 q^2 \left| \delta (1 - \delta) \right|,
 \end{aligned}$$

$$\kappa_{10} = 2\sqrt{2}\lambda^2 q^2 h |\delta(1-\delta)|, \quad \kappa_{11} = \sqrt{2}\lambda^2 q^2 h^2 |\delta(1-\delta)|.$$

Следовательно, асимптотическое при $m \rightarrow \infty$ представление для рекуррентных соотношений (42) принимает вид $\mathbf{X}_m^{(LSW,s)} = -2h\mathbf{X}_{m-1}^{(LSW,s)} - h^2\mathbf{X}_{m-2}^{(LSW,s)}$. Поскольку характеристическое уравнение для него имеет вид (35), следовательно, как показано в случае крутильных волн, разложения в соотношениях (38), (43), (44) сходятся абсолютно и равномерно для $x \in [x_0, x_1]$.

Базисные решения в случае неосесимметричных волн. При $\tau \in \mathbb{N}$ и $\beta = 0$ уравнения (22) для любых $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, а также $m = 0$ и $m = 1$ принимают такой вид

$$\mathbf{O} \mathbf{X}_0^{(\tau)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 0), \quad \mathbf{O} \mathbf{X}_1^{(\tau)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 1). \quad (45)$$

Уравнения (45) имеют шесть линейно независимых нетривиальных векторных решений, которые после объединения в два матричных решения записываются так:

$$\mathbf{X}_0^{(\tau,1)} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}_1^{(\tau,1)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau,2)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_1^{(\tau,2)} = \mathbf{I}. \quad (46)$$

Матричные размерности 3×3 представления (46) приведены с точностью до произвольного векторного множителя. Поскольку $\det(\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}) \neq 0$ ($m \geq 2$), значит, для определения матричных размерности 3×3 коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(\tau,s)}$ ($s = \overline{1,2}$; $m \geq 2$) из уравнений (22) получаются явные рекуррентные представления

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau,s)} &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \\ \mathbf{X}_m^{(\tau,s)} &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-j}^{(\tau,s)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(\tau,s)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(\tau,s)} \quad (47) \\ &(m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1,2}). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} = -(\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)})^{-1} \mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)}$ ($j = \overline{1,11}$). Тогда для заданного значения параметра τ общее решение уравнения (19) записывается через матричные базисные решения так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(x) \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m [\mathbf{X}_m^{(\tau,1)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,2)}] \quad (x \in [x_0, x_1]), \end{aligned} \quad (48)$$

где \mathbf{B} – произвольный векторный коэффициент шестого порядка. Аналогичные представления получаются с учетом соотношений (23) и для вектора $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) &= \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(x) \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(\tau)}(x) [\mathbf{X}_m^{(\tau,1)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,2)}] \quad (x \in [x_0, x_1]). \end{aligned} \quad (49)$$

Для матричных коэффициентов $\mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)}$ в рекуррентных соотношениях (47) получены следующие асимптотические при $m \rightarrow \infty$ оценки

$$\left\| \mathbf{A}_{m,1}^{(\tau)} + 2h\mathbf{I} \right\| \leq \kappa_1/m, \quad \left\| \mathbf{A}_{m,2}^{(\tau)} + h^2\mathbf{I} \right\| \leq \kappa_2/m,$$

$$\left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} \right\| \leq \kappa_j/m \quad (j = 3, 5, 6, 7), \quad \left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} \right\| \leq \kappa_j/m^2 \quad (j = 4, 8, 9, 10, 11),$$

где

$$\kappa_1 = h \sqrt{27 + \left(\tau^2 + |\tilde{k}|^2 \right) C_3^2 (C_1^{-2} + 1)},$$

$$\kappa_2 = h^2 \sqrt{27 + \left(\tau^2 + 4|\tilde{k}|^2 \right) C_3^2 (C_1^{-2} + 1)},$$

$$\kappa_3 = h^3 |\tilde{k}| C_3 \sqrt{C_1^{-2} + 1}, \quad \kappa_4 = h^4 \sqrt{(C_1^{-2} + 1) |\Omega^2 - \tilde{k}^2|^2 + |\Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1|^2},$$

$$\kappa_5 = \sqrt{3}q |\lambda(1 - 2\delta)|, \quad \kappa_6 = 2\sqrt{3}qh |\lambda(1 - 2\delta)|, \quad \kappa_7 = \sqrt{3}qh^2 |\lambda(1 - 2\delta)|,$$

$$\kappa_8 = h^3 \sqrt{q |\tilde{k}\lambda|} \sqrt{C_1^{-2} |C_2 - \delta C_3|^2 + |1 - \delta C_3|^2}, \quad \kappa_9 = \sqrt{3}\lambda^2 q^2 |\delta(1 - \delta)|,$$

$$\kappa_{10} = 2\sqrt{3}\lambda^2 q^2 h |\delta(1 - \delta)|, \quad \kappa_{11} = \sqrt{3}\lambda^2 q^2 h^2 |\delta(1 - \delta)|.$$

Поскольку асимптотическое при $m \rightarrow \infty$ представление для рекуррентных соотношений (47) принимает вид $\mathbf{X}_m^{(\tau,s)} = -2h\mathbf{X}_{m-1}^{(\tau,s)} - h^2\mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,s)}$ с характеристическим уравнением (35), следовательно, как показано в случае крутильных волн, разложения в соотношениях (47) – (49) сходятся абсолютно и равномерно для $x \in [x_0, x_1]$.

7. Получение дисперсионных соотношений. Рассматриваемая математическая модель волновых процессов в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения включают условия свободной (6) либо жестко закрепленной (7) граничной поверхности. С учетом полученных представлений решений уравнений модели через базисные решения указанные однородные граничные условия порождают трансцендентное уравнение, определяющее дисперсионный спектр целевой задачи, $\det(\mathbf{A}) = 0$, а также однородное алгебраическое матричное уравнение $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{O}$ для определения векторного коэффициента \mathbf{V} в представлении решений целевой граничной задачи. Для задачи исследования процесса распространения нормальных волн в свободном либо жестко закрепленном протяженном цилиндре геометрии V соответственно получается в случае крутильных волн ($\tau = 0, \beta = \pi/2$)

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_0) \right]_{2,(1..2)} \\ \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_1) \right]_{2,(1..2)} \end{array} \right] \text{ либо } \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_0) \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_1) \end{array} \right];$$

в случае продольно-сдвиговых волн ($\tau = 0, \beta = 0$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0) \right]_{(1,4),(1..4)} \\ \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_1) \right]_{(1,4),(1..4)} \end{bmatrix} \text{ либо } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0) \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_1) \end{bmatrix};$$

в случае неосесимметричных волн ($\tau \in \mathbb{N}$, $\beta = 0$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0) \right]_{(1,5,6),(1..6)} \\ \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_1) \right]_{(1,5,6),(1..6)} \end{bmatrix} \text{ либо } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0) \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_1) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\tilde{x}_0 = -(1 - R_1/R_*)h^{-1}$, $\tilde{x}_1 = (R_2/R_* - 1)h^{-1}$ ($x_0 < -1 \leq \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 \leq 1 < x_1$).

8. Анализ результатов численного эксперимента. В качестве однородного материала для представлений (1) был выбран алюминий с характеристиками

$$\tilde{G} = 2.61, \quad \nu = 0.35, \quad \tilde{\rho} = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad C_* = 10^{10} \text{ н/м}^2.$$

При численном эксперименте значение параметра δ бралось фиксированным $\delta = 1/2$. Этот выбор был обусловлен результатами проведенного с высокой точностью вычислений анализа скорости сходимости разложений в базисных решениях (32), (34), (43), (44), (48), (49).

Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных продольно-сдвиговых волн (LSW) и изгибных ($\tau = 1$) волн (BW) проводился в диапазонах изменения безразмерных волновых параметров $\Omega \in [0; 55]$ и $k \in [0; 55]$. Выполнен анализ ряда эффектов влияния параметров неоднородности на топологическую структуру и свойства действительных ветвей дисперсионных спектров указанных волн в радиально неоднородном $(\lambda, q) \in (\ln(1/2), 6)$ (Рис. 1-2) и однородном $(\lambda, q) = (0, 0)$ цилиндрах кольцевого сечения ($R_1 = 0.75$ м, $R_2 = 1.25$ м, $R_* = 1$ м) со свободной граничной поверхностью.

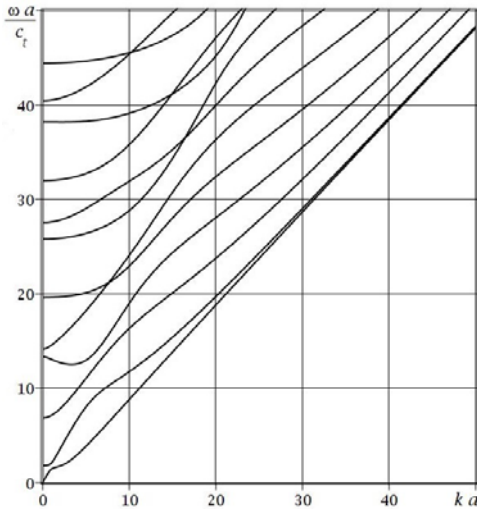


Рис. 1. Спектр LSW.

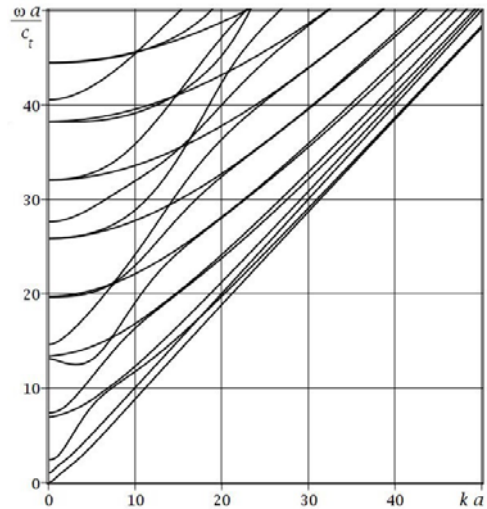


Рис. 2. Спектр BW.

В представлении нормализованной частоты $\Omega = \omega a/c_t$ и нормализованного волнового числа $\tilde{k} = ka$ используются обозначения для нормирующего параметра размерности длины $a = R_*$ и скорости эквиволлюминальной волны $c_t = \sqrt{C_* \tilde{G} / \tilde{\rho}}$. Для анализа количественных различий в поведении мод сопоставляемых спектров использовалась функция сравнения $\Delta\Omega(ka) = (\omega_{\lambda,q}(ka) - \omega_{0,0}(ka))a/c_t$ поведения мод с одинаковыми номерами. Ниже представлены результаты сравнительного анализа поведения низших пяти мод спектров LSW (Рис. 3) и BW (Рис. 4) в неоднородном $(\lambda, q) \in (\ln(1/2), 6)$ и однородном $(\lambda, q) = (0, 0)$ волноводах. В качестве основных результатов отмечается, что рассмотренный тип неоднородности практически не сказывается на поведении двух низших мод спектра LSW трех низших мод спектра BW в длинноволновом диапазоне $ka \in [0; 2]$, в то время как на моды с последующими номерами в соответствующих спектрах влияние существенным образом сказывается на всем исследованном диапазоне варьирования волнового числа. При этом отмеченное влияние проявляется, в первую очередь, в системном увеличении фазовых скоростей мод неоднородного волновода.

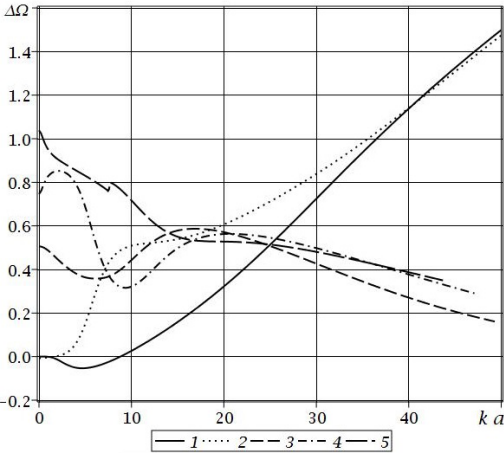


Рис. 3. Анализ парных мод спектров LSW.

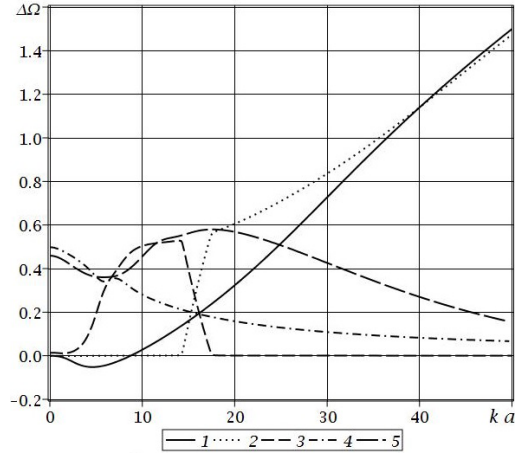


Рис. 4. Анализ парных мод спектров BW.

Представленный на рис. 2 спектр бегущих изгибных волн в неоднородном полом цилиндре характеризуется, по сравнению со спектром продольно-сдвиговых волн в том же цилиндре, существенным усложнением картины влияния фактора неоднородности на топологическую структуру спектра, обусловленной большим числом узких частотных диапазонов локального сближения и расталкивания смежных мод спектра с выраженной картиной «обмена» групповыми скоростями соответствующих этим модам нормальных бегущих волн. Общей тенденцией в распределениях дисперсионных кривых в областях взаимного влияния двух смежных мод является резкое сближение верхней из сходящихся кривых после прохождения точки расталкивания с траекторией соответствующей кривой

для однородного цилиндра и противоположный эффект «отдаления» нижней из сходящихся кривых после расталкивания от траектории соответствующей моды однородного цилиндра. Данный эффект для мод с номерами в спектре 2 – 3 и 6 – 7 соответственно проиллюстрирован на рис. 5.

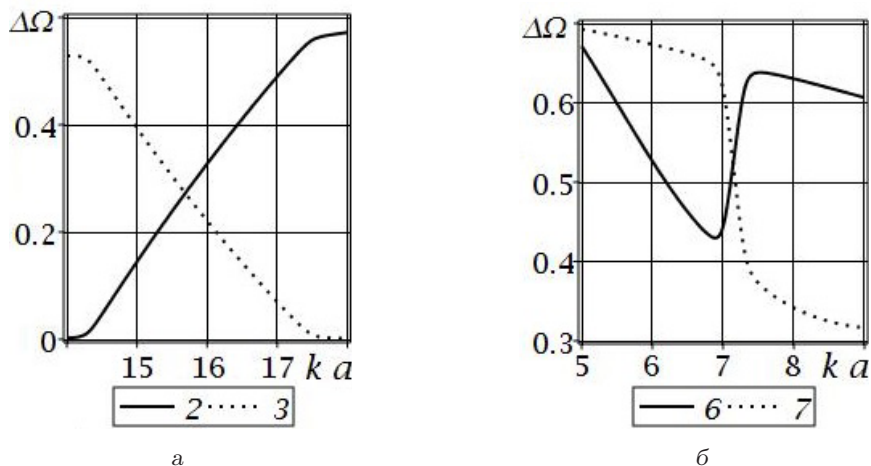


Рис. 5. Анализ фрагментов парных мод спектров BW.

В областях взаимного влияния трех смежных мод тенденция меняется на противоположную – резкое сближение нижней из трех сходящихся кривых после прохождения точки расталкивания с траекторией соответствующей кривой для однородного цилиндра и эффект «отдаления» верхней из трех сходящихся кривых после расталкивания от траектории соответствующей моды однородного цилиндра. Данный эффект для мод с номерами в спектре 8 – 10, 14 – 15, 18 – 20 соответственно проиллюстрирован на рис. 6.

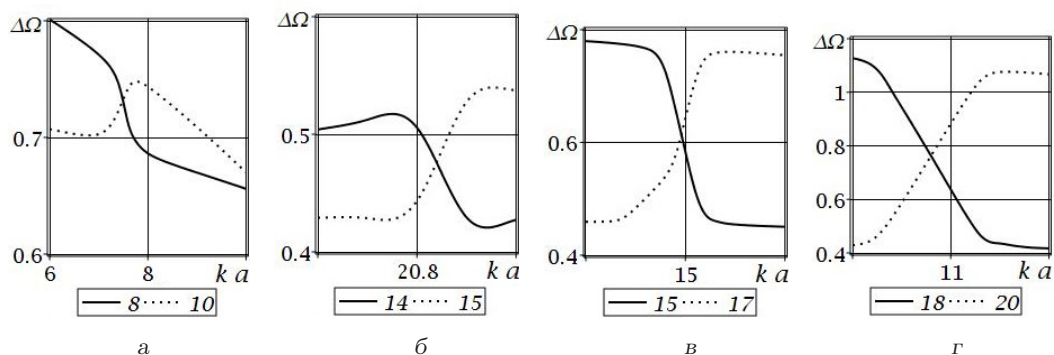


Рис. 6. Анализ фрагментов парных мод спектров BW.

Распределения нормализованных фазовых скоростей бегущих нормальных продольно-сдвиговых и изгибных волн в неоднородном полом цилиндре представлены соответственно на рис. 7-8, а распределения нормализованных групповых скоростей указанных волн – на рис. 9-10.

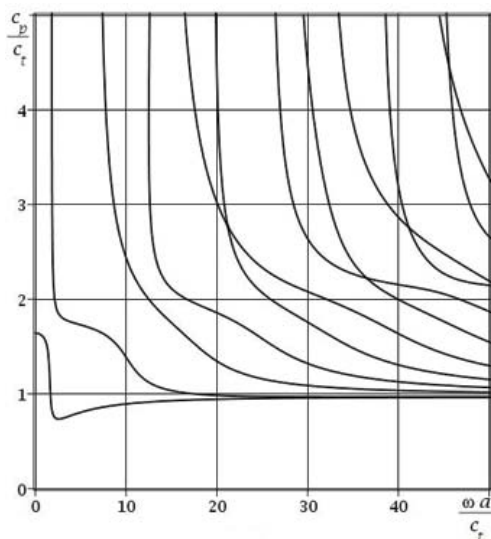


Рис. 7. Нормализованные фазовые скорости LSW.

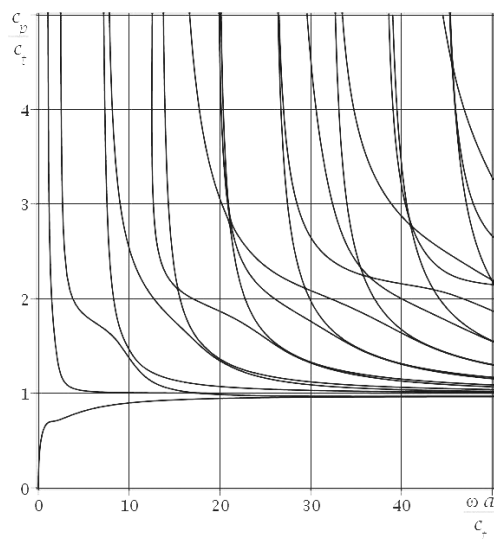


Рис. 8. Нормализованные фазовые скорости BW.

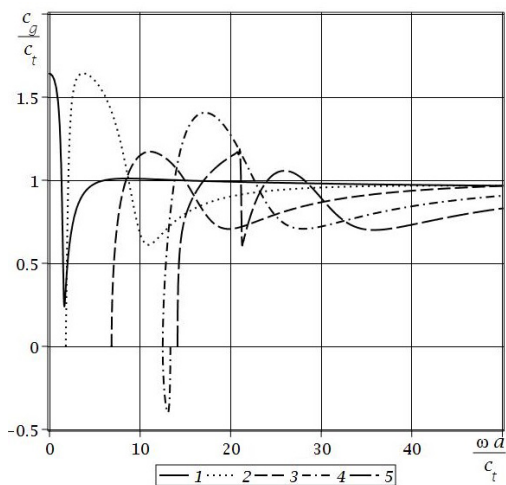


Рис. 9. Нормализованные групповые скорости LSW.

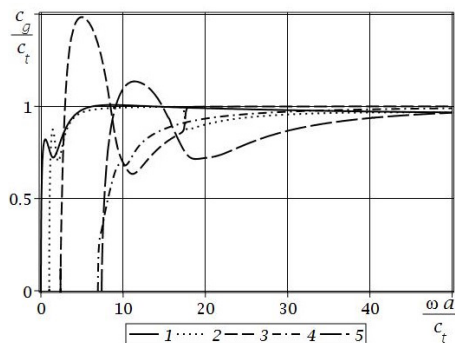


Рис. 10. Нормализованные групповые скорости BW.

9. Выводы. Разработана методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования изотропных цилиндров кольцевого поперечного сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью материала для краевых задач о спектрах осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов решения рассматриваемого класса задач, с применением которых проведен сравнительный анализ топологического строения дисперсионных спектров, распределений фазовых и групповых скоростей бегущих

нормальных продольно-сдвиговых и изгибных волн в однородных и радиально неоднородных изотропных протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения для случая свободной граничной поверхности, проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала волновода. Полученные результаты перспективны для использования в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализа моделей ультразвуковой диагностики.

1. Моисеенко И.А. Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132–139.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
3. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полой цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1974. Т. 10, № 9. – С. 14–18.
4. Туляков Д.Н. Асимптотики решений рекуррентных соотношений / Д.Н. Туляков. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук. – Москва. – 2011. – 236 с.

I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko

Deformation waves in functionally gradient cylinders of annular section.

The wave motion is described on the basis of a complete system of linear dynamical equations of elasticity theory. The shear modulus and density of the isotropic material of cylinder are specified by an exponential-power function of the radial coordinate. The basic solutions of the system of differential equations of the model are constructed in matrix form in the form of decompositions of the radial components of the solution into uniformly and absolutely converging power series off the generalized annular coordinate. The dispersion relations describing the harmonic spectra of normal waves in the cases of rigidly fixed and free both boundary surfaces of a hollow cylinder, is presented. The effects of the radial inhomogeneity factor on the topology of dispersion spectra, the distribution of phase and group velocities of propagating normal waves are studied.

Keywords: *FGMs, isotropic waveguide, normal waves, basic solutions, dispersion relations, phase velocity, group velocity.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
miami733@mail.ru

Получено 06.03.19

УДК 521.1:531

©2019. В.Е. Болнокин, С.А. Прийменко, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ МЕТОДИКА УЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ В МОДЕЛЯХ РАСЧЕТАХ СКОРОСТЕЙ УЛЬТРААКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛАХ

Представлена численно-аналитическая теоретическая методика учета влияния погрешностей разброса в экспериментальных значениях исходных параметров при исследовании характеристик распространения объемных электроупругих волн в анизотропных пьезокристаллических и пьезокерамических средах на основе моделей, учитывающих связанные деформационные механические и электромагнитные взаимодействия. Анализируемые проблемы связаны с разработкой передовых конструкторских решений при создании компонентов акустоэлектронных устройств и требуют получения в максимальной степени достоверных высокоточных оценок для скоростей и показателей амплитудного затухания волновых информационных сигналов. Разработанный подход базируется на переходе в соотношениях детерминистических моделей распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических материалах к нечетко-множественным аргументам путем поэтапного фрагментированного применения методов нечетко-интервальной арифметики и использования альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения. Представлены примеры применения разработанной расчетной методики.

Ключевые слова: *объемные электроупругие волны, пьезокерамические и пьезокристаллические тела, пьезоэлектрические среды с конечной проводимостью, модели с разбросом экзогенных параметров, нечетко-множественный учет факторов неопределенности, методы нечетко-интервальных вычислений, эвристический принцип обобщения.*

Введение. Решение актуальных проблем создания новых продвинутых конструкций акустоэлектронных устройств связано с совершенствованием методов математического моделирования процессов, лежащих в основе их функционирования [1–5]. Прежде всего, представляют интерес данные о скоростях и показателях энергетического рассеяния ультраакустических волновых сигналов, полученные без использования гипотезы о квазистатическом приближении при описании электрического поля в связанных электроупругих волнах. Среди направлений совершенствования расчетных методов можно также указать на задачу еще более точного и корректного учета факторов неопределенности экзогенных параметров моделирования, в частности, неопределенности, обусловленной разбросами в экспериментальных и технологических значениях физико-механических, геометрических и эксплуатационных характеристик.

Для учета эффектов влияния таких разбросов, при условии, что исходная информация об ошибках рассеяния экзогенных параметров в моделях конструкторских расчетов акустоэлектронных компонентов из пьезоэлектрических материалов имеет корректный статистический тип, могут быть соответственно применены методы вероятностно-стохастического анализа [6, 7]. При отсутствии в

достаточной степени корректных статистических данных о разбросах, которые следует принимать во внимание, описание неопределенных экзогенных параметров и последующее определение эндогенных параметров для моделей рассматриваемого типа может быть реализовано с применением методов теории нечетких множеств. Условием применения этих методов являются менее строгие требования к типу исходной информации по сравнению с методами теории вероятностей. Соответственно, целью представляемого в данной работе исследования является разработка теоретической численно-аналитической нечетко-множественной [8 – 12] методики учета неопределенности исходных данных в передовых технологических моделях конструкторских расчетов акустоэлектронных компонентов из пьезоэлектрических материалов на основе использования расчетных соотношения детерминистических версий рассматриваемых моделей и эвристического принципа обобщения для перехода в этих соотношениях к нечетко-множественным аргументам [13, 14].

1. Учет параметрической неопределенности в модели распространения электроупругих волн в пьезокристаллах тетрагонального класса с конечной проводимостью. Разрабатывается методика описания процессов распространения связанных стационарных объемных электроупругих волн вдоль оси симметрии пьезокристалла ADP тетрагонального класса 42m с учетом магнитных свойств и электропроводности. В детерминированной версии рассматриваемой модели учтены эффекты частотного затухания амплитуд и дисперсии волновых движений в пьезоэлектрических кристаллах с конечной проводимостью. В [2] проанализированы два типа электроупругих волн, используемых в акустоэлектронных компонентах из кристаллов этого класса.

Первым типом таких волн являются поперечные волны со связанными компонентами вектора упругих перемещений $u_2(x_1, t)$ и вектора напряженности сопряженного электрического поля $E_3(x_1, t)$, для которых ведущие расчетные характеристики прикладного моделирования в виде фазовых скоростей $V_f^{(j)}$ и коэффициентов амплитудного затухания $\vartheta_f^{(j)}$ имеют вид [2]

$$V_f^{(j)} = [Re k_j]^{-1}\omega, \quad \vartheta_f^{(j)} = Im k_j, \quad (1)$$

где

$$k_j = (\omega/\sqrt{2})[(\rho c^{-1} + \mu_0 \varepsilon + \mu_0 e^2 c^{-1} - i\sigma \mu_0 \omega^{-1}) + (-1)^j [(\rho c^{-1} + \mu_0 \varepsilon + \mu_0 e^2 c^{-1} - i\sigma \mu_0 \omega^{-1})^2 - 4\rho c^{-1}(\mu_0 \varepsilon - i\sigma \mu_0 \omega^{-1})]^{1/2}]^{1/2}, \quad (2)$$

ρ – параметр плотности кристалла; σ – параметр проводимости пьезоэлектрической среды; μ_0 – параметр магнитной проницаемости пьезоэлектрической среды; $c = c_{66}$ – компонента матрицы адиабатических модулей упругости; $e = e_{63}$ – компонента матрицы пьезоэлектрических постоянных; $\varepsilon = \varepsilon_{33}$ – компонента матрицы диэлектрических проницаемостей пьезокристалла.

Вторым типом анализируемых волн являются волны сдвига со связанными компонентами вектора упругих перемещений $u_3(x_1, t)$ и вектора напряженности сопряженного электрического поля $E_2(x_1, t)$, для которых соотношения для

расчета характеристик фазовых скоростей $V_f^{(j)}$ и коэффициентов затухания $\vartheta_f^{(j)}$ также имеют вид (1), (2), с заменами параметров $c = c_{44}$, $e = e_{14}$, $\varepsilon = \varepsilon_{11}$.

Критерии точности расчетных соотношений для данной сферы технологического моделирования, как отмечено ранее, требуют учета при реализуемом анализе влияния возможных разбросов в значениях экзогенных физико-механических параметров даже для таких высокостабильных по свойствам сред, как пьезокристаллические материалы [3]. Применение для получения оценок влияния таких разбросов на эндогенные параметры скоростей и показателей энергетического рассеяния методов нечетко-множественного анализа реализуется и использованием приема расширения областей определения расчетных соотношений (1), (2) на аргументы нечетко-интервального типа на основе эвристического принципа обобщения.

Для применения предлагаемого алгоритма поэтапного фрагментированного нечетко-множественного анализа рассматриваемой модели на начальной стадии осуществляется преобразование расчетных соотношений (1), (2), имеющих форму

$$V_f^{(j)} = F_V^{(j)}(\omega, \rho, \mu_0, \sigma, c, e, \varepsilon), \quad \vartheta_f^{(j)} = F_\vartheta^{(j)}(\omega, \rho, \mu_0, \sigma, c, e, \varepsilon), \quad (3)$$

к модифицированной версии

$$V_f^{(j)} = F_{V_*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \sqrt{2}[\operatorname{Re}[(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i\omega^{-1}\delta_4) + (-1)^j[(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i\omega^{-1}\delta_4)^2 - 4\delta_1(\delta_2 - i\omega^{-1}\delta_4)]^{1/2}]^{1/2}]^{-1}, \quad (4)$$

$$\vartheta_f^{(j)} = F_{\vartheta_*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = (\omega/\sqrt{2})\operatorname{Im}[(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i\omega^{-1}\delta_4) + (-1)^j[(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i\omega^{-1}\delta_4)^2 - 4\delta_1(\delta_2 - i\omega^{-1}\delta_4)]^{1/2}]^{1/2}], \quad (5)$$

где

$$\delta_1 = \rho c^{-1}, \quad \delta_2 = \mu_0 \varepsilon, \quad \delta_3 = \mu_0 e^2 c^{-1}, \quad \delta_4 = \mu_0 \sigma. \quad (6)$$

Далее вводятся нечетко-множественные представления экзогенных параметров $\rho, \mu_0, \sigma, c, e, \varepsilon$ в виде нормальных трапециевидальных нечетких интервалов [15, 16]

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \mu_{03}, \mu_{04}), \quad \tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \\ \tilde{c} &= (c_1, c_2, c_3, c_4), \quad \tilde{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4), \quad \tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4), \end{aligned} \quad (7)$$

и в соответствии с правилами нечетко-интервальной арифметики формируются нечетко-интервальные представления величин $\tilde{\delta}_p$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1 &= (\rho_1 c_4^{-1}, \rho_2 c_3^{-1}, \rho_3 c_2^{-1}, \rho_4 c_1^{-1}), \quad \tilde{\delta}_2 = (\mu_{01} \varepsilon_1, \mu_{02} \varepsilon_2, \mu_{03} \varepsilon_3, \mu_{04} \varepsilon_4), \\ \tilde{\delta}_3 &= (\mu_{01} e_1^2 c_4^{-1}, \mu_{02} e_2^2 c_3^{-1}, \mu_{03} e_3^2 c_2^{-1}, \mu_{04} e_4^2 c_1^{-1}), \\ \tilde{\delta}_4 &= (\mu_{01} \sigma_1, \mu_{02} \sigma_2, \mu_{03} \sigma_3, \mu_{04} \sigma_4). \end{aligned} \quad (8)$$

Следующий шаг разрабатываемого теоретического алгоритма заключается в переходе в соотношениях (4), (5) к нечетко-интервальным аргументам $\tilde{\delta}_p$ с применением α – уровневой формы эвристического принципа обобщения и на основе введения представлений

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_p &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\delta}_{p\alpha}, \bar{\delta}_{p\alpha}], \\ \underline{\delta}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)\rho_1 c_4^{-1} + \alpha \rho_2 c_3^{-1}, & \bar{\delta}_{1\alpha} &= \alpha \rho_3 c_2^{-1} + (1 - \alpha)\rho_4 c_1^{-1}; \\ \underline{\delta}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)\mu_{01}\varepsilon_1 + \alpha\mu_{02}\varepsilon_2, & \bar{\delta}_{2\alpha} &= \alpha \mu_{03}\varepsilon_3 + (1 - \alpha)\mu_{04}\varepsilon_4; \\ \underline{\delta}_{3\alpha} &= (1 - \alpha)\mu_{01}e_1^2 c_4^{-1} + \alpha\mu_{02}e_2^2 c_3^{-1}, & \bar{\delta}_{3\alpha} &= \alpha \mu_{03}e_3^2 c_2^{-1} + (1 - \alpha)\mu_{04}e_4^2 c_1^{-1}; \\ \underline{\delta}_{4\alpha} &= (1 - \alpha)\mu_{01}\sigma_1 + \alpha\mu_{02}\sigma_2, & \bar{\delta}_{4\alpha} &= \alpha\mu_{03}\sigma_3 + (1 - \alpha)\mu_{04}\sigma_4. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом параметрические частотные нечетко-множественные представления для эндогенных характеристик $\tilde{V}_f^{(j)}(\omega)$, $\tilde{\vartheta}_f^{(j)}(\omega)$ рассматриваемой модели принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{V}_f^{(j)}(\omega) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{j\alpha}(\omega), \bar{V}_{j\alpha}(\omega)], & \tilde{\vartheta}_f^{(j)}(\omega) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{j\alpha}(\omega), \bar{\vartheta}_{j\alpha}(\omega)], \\ \underline{V}_{j\alpha}(\omega) &= \inf_{\substack{\delta_1 \in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 \in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 \in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 \in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}]} } F_{V_*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\}, \\ \bar{V}_{j\alpha}(\omega) &= \sup_{\substack{\delta_1 \in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 \in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 \in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 \in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}]} } F_{V_*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\}, \\ \underline{\vartheta}_{j\alpha}(\omega) &= \inf_{\substack{\delta_1 \in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 \in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 \in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 \in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}]} } F_{\vartheta}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\}, \\ \bar{\vartheta}_{j\alpha}(\omega) &= \sup_{\substack{\delta_1 \in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 \in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 \in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 \in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}]} } F_{\vartheta}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Применение данной методики для частного случая поперечных волн со связанными компонентами вектора упругих перемещений $u_2(x_1, t)$ и вектора напряженности сопряженного электрического поля $E_3(x_1, t)$ при задании обладающих разбросами значений экспериментальных параметров [3, 4] рассматриваемой мо-

дели в виде

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} &= (1.79\rho_*, 1.803\rho_*, 1.805\rho_*, 1.809\rho_*), \\
 \tilde{\mu}_0 &= (1.18\mu_*, 1.24\mu_*, 1.27\mu_*, 1.32\mu_*), \\
 \tilde{\sigma} &= (0.15\sigma_*, 0.2\sigma_*, 0.22\sigma_*, 0.26\sigma_*), \quad \tilde{c} = (0.582c_*, 0.59c_*, 0.596c_*, 0.599c_*), \\
 \tilde{e} &= (9.44e_*, 9.52e_*, 9.57e_*, 9.64e_*), \quad \varepsilon = (14.8\varepsilon_*, 15.4\varepsilon_*, 15.6\varepsilon_*, 16.1\varepsilon_*), \quad (11) \\
 \rho_* &= 10^3[\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}], \quad \mu_* = 10^{-6}[\text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}], \\
 \sigma_* &= 10^{-9}[\text{ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}], \quad c_* = 10^{10}[\text{Па}], \\
 \varepsilon_* &= 8.85 \cdot 10^{-12}[\text{Ф} \cdot \text{м}^{-1}], \quad e_* = 1[\text{Кл} \cdot \text{м}]
 \end{aligned}$$

дает нечетко-множественные оценки для эндогенных параметров рассматриваемой модели, представленные на рис. 1 и рис. 2.

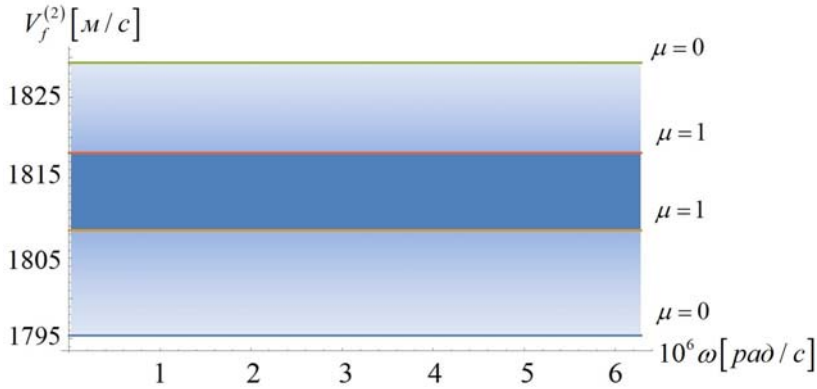


Рис. 1. Нечетко-множественное параметрическое описание возможных значений фазовых скоростей $V_f^{(2)}(\omega)$.

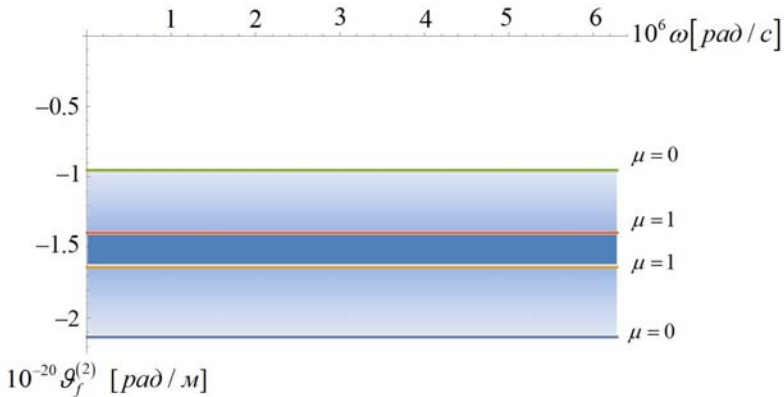


Рис. 2. Нечетко-множественное параметрическое описание возможных значений параметра затухания $\vartheta_f^{(2)}(\omega)$.

Распределения на этих рисунках описывают диапазоны значений эндогенных параметров с соответствующими функциями принадлежности μ в полученных нормальных нечетко-множественных оценках для различных значений частотного параметра. На них представлены кривые значений границ $\mu = 0$ носителей и границ $\mu = 1$ областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенных параметров $\tilde{V}_f^{(2)}(\omega)$, $\tilde{\vartheta}_f^{(2)}(\omega)$. Частотная зависимость для анализируемых характеристик в рассматриваемом случае оказывается крайне малой.

Вид функций принадлежности для нечетко-множественных величин $\tilde{V}_f^{(2)}(\omega)$, $\tilde{\vartheta}_f^{(2)}(\omega)$ при максимальных представленных на рис. 1 и рис. 2 значениях частотного параметра ω_{\max} соответственно описан на рис. 3 и рис. 4.

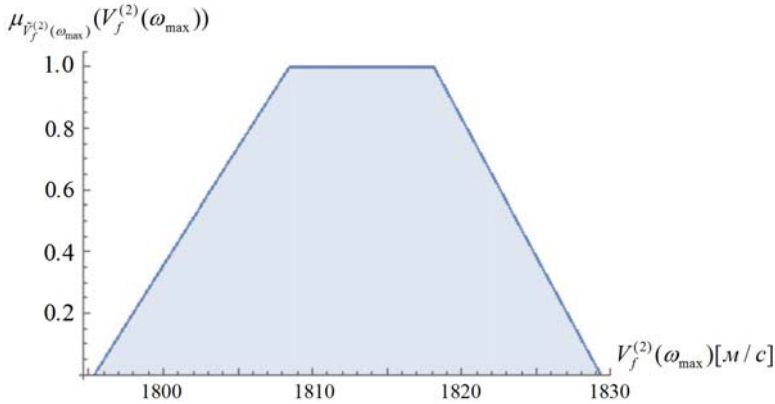


Рис. 3. Вид функции принадлежности для $\tilde{V}_f^{(2)}(\omega_{\max})$.

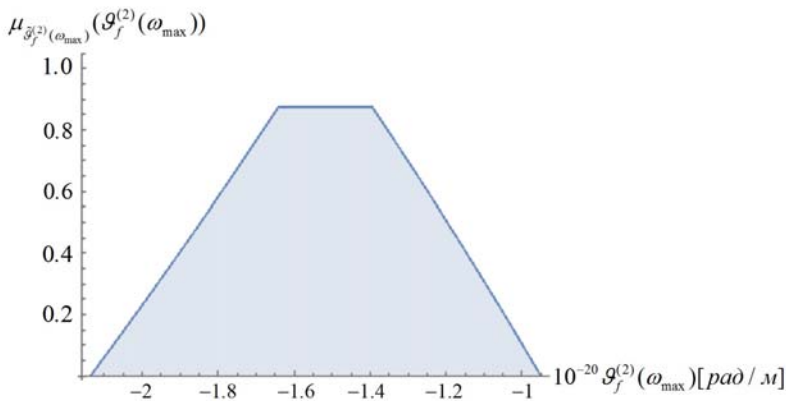


Рис. 4. Вид функции принадлежности для $\tilde{\vartheta}_f^{(2)}(\omega_{\max})$.

2. Учет влияния неопределенности характеристик пьезокерамических материалов. В магнитно изотропной диэлектрической пьезокерамической среде гексагонального класса *6mm* с ориентированной вдоль координатно-

го направления Ox_3 осью поляризации фазовые скорости распространяющихся вдоль направления в плоскости изотропии материала электроупругих волн со связанными компонентами вектора перемещений $u_1(x_1, t)$ и вектора напряженности сопряженного электрического поля $E_3(x_1, t)$ описываются [3] представлениями

$$V_f^{(j)} = R_V^{(j)}(\rho, c_{11}, e_{31}, \varepsilon_{33}, \mu_0) = \sqrt{2}[\mu_0 \varepsilon_{33}(1 + e_{31}^2 c_{11}^{-1} \varepsilon_{33}^{-1}) + \rho c_{11}^{-1} + (-1)^j (\mu_0 \varepsilon_{33}(1 + e_{31}^2 c_{11}^{-1} \varepsilon_{33}^{-1})) - 4\rho c_{11}^{-1} \mu_0 \varepsilon_{33}]^{1/2} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (12)$$

в которых ρ , c_{11} , e_{31} , ε_{33} , μ_0 – соответственно параметр плотности, упругая постоянная, пьезоэлектрический модуль, модули диэлектрической и магнитной проницаемости. В данном случае рассматриваемые волны являются волнами без дисперсии и энергетического рассеяния.

Нечетко-множественное обобщение расчетных соотношений (12) на основе принятых ранее гипотез о нечетко-интервальном способе задания экзогенных параметров с разбросами значений в детерминистической модели описывается выражениями

$$\tilde{V}_f^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{j\alpha}, \bar{V}_{j\alpha}] \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{V}_{j\alpha} &= \inf_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}] \\ e_{31} \in [\underline{e}_{31\alpha}, \bar{e}_{31\alpha}] \\ \varepsilon_{33} \in [\underline{\varepsilon}_{33\alpha}, \bar{\varepsilon}_{33\alpha}] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}]} R_V^{(j)}(\rho, c_{11}, e_{31}, \varepsilon_{33}, \mu_0)\}, \\ \bar{V}_{j\alpha} &= \sup_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}] \\ e_{31} \in [\underline{e}_{31\alpha}, \bar{e}_{31\alpha}] \\ \varepsilon_{33} \in [\underline{\varepsilon}_{33\alpha}, \bar{\varepsilon}_{33\alpha}] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}]} R_V^{(j)}(\rho, c_{11}, e_{31}, \varepsilon_{33}, \mu_0)\}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_\alpha &= (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha \rho_2, & \bar{\rho}_\alpha &= \alpha \rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4; \\ \underline{c}_{11\alpha} &= (1 - \alpha)c_{111} + \alpha c_{112}, & \bar{c}_{11\alpha} &= \alpha c_{113} + (1 - \alpha)c_{114}; \\ \underline{e}_{31\alpha} &= (1 - \alpha)e_{311} + \alpha e_{312}, & \bar{e}_{31\alpha} &= \alpha e_{313} + (1 - \alpha)e_{314}; \\ \underline{\varepsilon}_{33\alpha} &= (1 - \alpha)\varepsilon_{331} + \alpha \varepsilon_{332}, & \bar{\varepsilon}_{33\alpha} &= \alpha \varepsilon_{333} + (1 - \alpha)\varepsilon_{334}; \\ \underline{\mu}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)\mu_{01} + \alpha \mu_{02}, & \bar{\mu}_{0\alpha} &= \alpha \mu_{03} + (1 - \alpha)\mu_{04}. \end{aligned} \quad (15)$$

В другом важном для приложений случае выбора направления распространения объемных ультразвуковых волн с плоским фронтом, которое лежит в вертикальной плоскости Ox_1x_3 и составляет угол θ с осью поляризации, для

электростатического варианта модели фазовые скорости рассматриваемых волн имеют представления [2]

$$V_f^{(j)}(\theta) = (2\rho)^{-1/2}(q_j + q_{11} + q_{22})^{1/2} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (16)$$

$$V_f^{(3)}(\theta) = \rho^{-1/2}(l^2((c_{11} - c_{12})/2) + n^2 c_{44})^{1/2}, \quad (17)$$

в которых

$$\begin{aligned} q_j &= (-1)^j [(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2]^{1/2}, \\ q_{11} &= l^2 c_{11} + n^2 c_{44} + (l^2 n^2 (e_{31} + e_{15})^2 / (l^2 \varepsilon_{11} + n^2 \varepsilon_{33})), \\ q_{22} &= l^2 c_{44} + n^2 c_{33} + ((l^2 e_{15} + n^2 e_{33})^2 / (l^2 \varepsilon_{11} + n^2 \varepsilon_{33})), \\ q_{12} &= l \cdot n (c_{13} + c_{44} + ((e_{31} + e_{15})(l^2 e_{15} + n^2 e_{33}) / (l^2 \varepsilon_{11} + n^2 \varepsilon_{33}))), \\ l &= \sin \theta, \quad n = \cos \theta; \end{aligned} \quad (18)$$

$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ – модули упругости ьезокерамики; ρ – параметр плотности; e_{15}, e_{31}, e_{33} – пьезоэлектрические постоянные; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ – параметры диэлектрической проницаемости; $\theta \in [0, \pi/2]$.

Для получения оценок значений рассматриваемых скоростей в предположении о задании параметра $\theta \in [0, \pi/2]$ как четкой величины в данном случае частично применима модификация α – уровневого эвристического принципа, базирующаяся на возможности получения оценок знакоопределенности для частных производных для представлений

$$\begin{aligned} V_f^{(j)}(\theta) &= G_j(\theta, \rho, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, e_{15}, e_{31}, e_{33}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}) = \\ &= G_j(\theta, \rho, q_1, q_2, q_{11}, q_{22}, q_{12}) \quad (j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$V_f^{(3)}(\theta) = G_3(\theta, \rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}), \quad (20)$$

по их аргументам во всей области их определения:

$$\begin{aligned} \partial G_3 / \partial \rho < 0, \quad \partial G_3 / \partial c_{11} > 0, \quad \partial G_3 / \partial c_{12} < 0, \\ \partial G_3 / \partial c_{44} > 0, \quad \partial G_j / \partial \rho < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Также используется методика поэтапного вычисления входящих в обобщенные выражения (16), (19) нечетко-множественных величин $\tilde{q}_1(\theta), \tilde{q}_2(\theta), \tilde{q}_{11}(\theta), \tilde{q}_{22}(\theta), \tilde{q}_{12}(\theta)$ через нечетко-интервальные [15, 16] экзогенные параметры $\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{13}, \tilde{c}_{33}, \tilde{c}_{44}, \tilde{e}_{15}, \tilde{e}_{31}, \tilde{e}_{33}, \tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{\varepsilon}_{33}$, представляемые кортежами

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11} &= (c_{111}, c_{112}, c_{113}, c_{114}), \\ \tilde{c}_{12} &= (c_{121}, c_{122}, c_{123}, c_{124}), \dots, \tilde{e}_{15} = (e_{151}, e_{152}, e_{153}, e_{154}), \dots, \\ \tilde{\varepsilon}_{11} &= (\varepsilon_{111}, \varepsilon_{112}, \varepsilon_{113}, \varepsilon_{114}), \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = (\varepsilon_{331}, \varepsilon_{332}, \varepsilon_{333}, \varepsilon_{334}), \end{aligned} \quad (22)$$

с применением арифметики нечетких интервалов. Получаемые нечеткие интервалы $\tilde{q}_1(\theta), \tilde{q}_2(\theta), \tilde{q}_{11}(\theta), \tilde{q}_{22}(\theta), \tilde{q}_{12}(\theta)$ далее представляются в форме суперпозиции множеств α – уровня.

В итоге, для нечетко-множественных эндогенных характеристик $V_f^{(j)}(\theta)$ ($j = \overline{1, 2}$), $V_f^{(3)}(\theta)$ получены расчетные представления

$$\tilde{V}_f^{(j)}(\theta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{j\alpha}(\theta), \bar{V}_{j\alpha}(\theta)], \quad V_f^{(3)}(\theta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{3\alpha}(\theta), \bar{V}_{3\alpha}(\theta)], \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{V}_{j\alpha}(\theta) &= \inf_{\substack{q_1 \in [q_{1\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ q_2 \in [q_{2\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ q_{11} \in [q_{11\alpha}, \bar{q}_{11\alpha}] \\ q_{22} \in [q_{22\alpha}, \bar{q}_{22\alpha}] \\ q_{12} \in [q_{12\alpha}, \bar{q}_{12\alpha}]} \{G_j(\theta, \bar{\rho}_\alpha, q_1, q_2, q_{11}, q_{22}, q_{12})\}, \\ \bar{V}_{j\alpha}(\theta) &= \sup_{\substack{q_1 \in [q_{1\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ q_2 \in [q_{2\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ q_{11} \in [q_{11\alpha}, \bar{q}_{11\alpha}] \\ q_{22} \in [q_{22\alpha}, \bar{q}_{22\alpha}] \\ q_{12} \in [q_{12\alpha}, \bar{q}_{12\alpha}]} \{G_j(\theta, \underline{\rho}_\alpha, q_1, q_2, q_{11}, q_{22}, q_{12})\}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \underline{V}_{3\alpha}(\theta) &= G_3(\theta, \bar{\rho}_\alpha, \underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}, \underline{c}_{44\alpha}), \\ \bar{V}_{3\alpha}(\theta) &= G_3(\theta, \underline{\rho}_\alpha, \bar{c}_{11\alpha}, \underline{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}). \end{aligned} \quad (25)$$

В частности, характеристика параметрической нечетко-множественной оценки $\tilde{V}_f^{(3)}(\theta)$ $\theta \in [0, \pi/2]$ для случая среды со свойствами пьезокерамики $BaTiO_3$ [2 – 4] при задании нечетко-интервальных экзогенных параметров вида

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (1.79\rho_*, 1.803\rho_*, 1.805\rho_*, 1.809\rho_*), \\ \tilde{c}_{11} &= (16.52c_*, 16.6c_*, 16.67c_*, 16.78c_*), \\ \tilde{c}_{12} &= (7.54c_*, 7.62c_*, 7.66c_*, 7.72c_*), \quad \tilde{c}_{44} = (4.26c_*, 4.29c_*, 4.31c_*, 4.38c_*), \end{aligned} \quad (26)$$

представлена на рис. 5. Как и на рис. 1, рис. 2, представленные здесь кривые

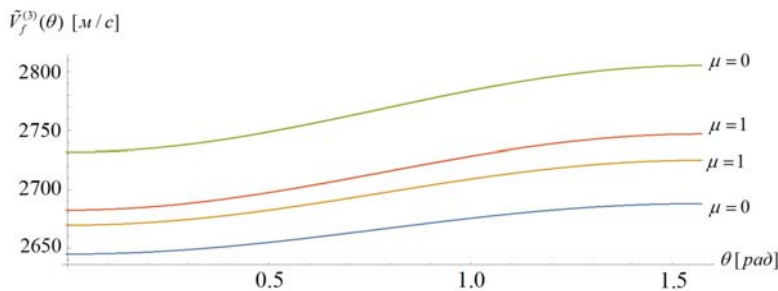


Рис. 5. Нечетко-множественное параметрическое описание возможных значений фазовых скоростей $V_f^{(3)}(\theta)$.

описывают границы $\mu = 0$ носителей и границы $\mu = 1$ областей максимальной достоверности для параметрических нечетко-множественных оценок эндогенной характеристики $\tilde{V}_f^{(3)}(\theta)$. Кроме того, на рис. 6 и рис. 7 даны описания функций принадлежности для нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_f^{(3)}(0)$ и $\tilde{V}_f^{(3)}(\pi/2)$.

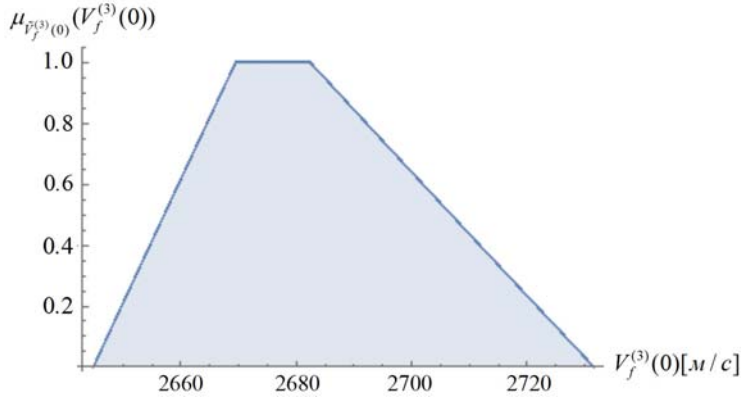


Рис. 6. Вид функции принадлежности для $\tilde{V}_f^{(3)}(0)$.

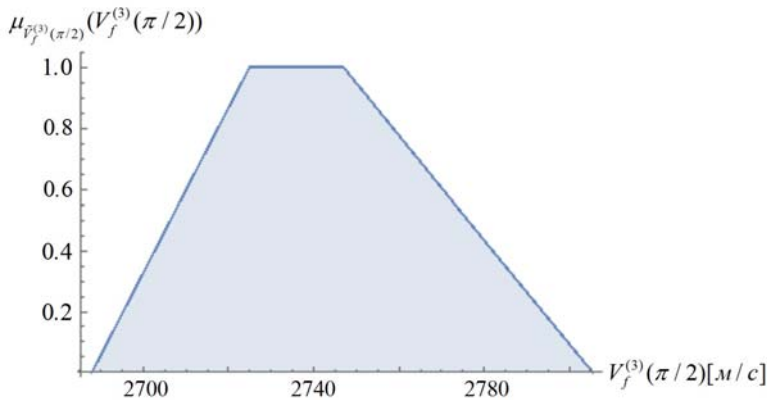


Рис. 7. Вид функции принадлежности для $\tilde{V}_f^{(3)}(\pi/2)$.

Выводы. Результатом исследований является синтез теоретической нечетко-множественной методики для учета влияния разбросов в экспериментальных значениях физико-механических параметров пьезоэлектрических материалов с конечной электропроводностью на значения скоростей и показателей энергетического рассеяния распространяющихся в них объемных электроупругих волн. Для анализа использованы модели, учитывающие связанные деформационные механические и электромагнитные взаимодействия. Оценки, получаемые в результате применения методики, позволяют установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях анализируемых волновых характеристик при заданных разбросах исходных параметров, а также границы предельных дости-

жимых значений фазовых скоростей и коэффициентов затухания электроупругих волн на минимальном уровне уверенности.

1. *Abd-alla A.N.* Calculation of Bulk Acoustic Wave Propagation Velocities in Trigonal Piezoelectric Smart Materials / A.N. Abd-alla, N.A. Askar // Applied Mathematics and Information Sciences. – 2014. – V. 8, N 4. – P. 1625–1636.
2. *Бардзокас Д.И.* Распространение волн в электромагнитоупругих средах / Д.И. Бардзокас, Б.А. Кудрявцев, Н.А. Сенник. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 336 с.
3. *Uchino K.* Advanced Piezoelectric Materials / K. Uchino. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2011. – 696 p.
4. *Панич А.А.* Кристаллические и керамические пьезоэлектрики / А.А. Панич, М.А. Мароховский, Д.В. Мотин // Инженерный вестник Дона. – 2011. – № 1.
URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/325>
5. *Блистанов А.А.* Кристаллы квантовой и нелинейной оптики / А.А. Блистанов. – М.: МИСИС, 2000. – 432 с.
6. *Rokhlin S.I.* Elastic wave scattering in random anisotropic solids / S.I. Rokhlin, J. Li // International Journal of Solids and Structures. – 2016. – V. 78-79, N. 1. – P. 110–124.
7. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
8. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: «Издательство Машиностроение - 1», 2004. – 397 с.
9. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
10. *Kandasamy W.B.V.* Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
11. *Sonbol A.H.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42 – P. 702–712.
12. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
13. *Storozhev S.V.* Fuzzy-multiple estimates of the parameter uncertainty influence in the computing devices elements calculating theory / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.G. Vyskub, Duong Minh Hai, V.E. Bolnokin // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – V. 1399, Is. 3. – 033044 – doi:10.1088/1742-6596/1399/3/033044.
14. *Storozhev S.V.* Fuzzy estimates of resonance frequencies for three-layer composite cylindrical panels in smart aerospace and industrial structures / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – V. 1399, Is. 4. – 044028 – doi:10.1088/1742-6596/1399/4/044028.
15. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
16. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

V.E. Bolnokin, S.A. Priyenko, S.B. Nombre, S.V. Storozhev

Fuzzy-set method for accounting of uncertainties of initial data in models of calculations of speeds ultra-acoustic waves in piezoelectric materials.

A numerical-analytical theoretical technique for taking into account the influence of scatter errors

of the experimental values ??of initial parameters when studying the propagation characteristics of bulk electroelastic waves in anisotropic piezocrystalline and piezoceramic media based on models that take into account the coupled mechanical deformation and electromagnetic interactions is presented. The analyzed problems to the development of advanced design solutions for creating components of acoustoelectronic devices wish required the receipt of the most reliable estimates for the velocities and amplitude attenuation parameters of wave information signals are related. The developed approach is based on the transition in the ratios of deterministic models of the propagation of electroelastic waves in piezoelectric materials to fuzzy-set arguments by phased fragmented application of methods of fuzzy-interval arithmetic's and of the use of heuristic generalizations principle in the alpha-level form. Examples of application of the developed calculation methodic are presented.

Keywords: *bulk electroelastic waves, piezoceramic and piezocrystalline bodies, piezoelectric media with finite conductivity, models with a scutter errors of exogenous parameters, fuzzy-set methods for accounting of uncertainty factors, methods of fuzzy-interval arithmetic, heuristically generalization principle.*

ФГБУН “Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН”,
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
stvistvi@mail.ru

Получено 15.03.19