

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К.

Алгебра и начала анализа

10 класс

Углубленный уровень

Донецк 2020

УДК 37.02:512

ББК 74.26

А 94

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 10 от 18 июня 2020 г.)

Афанасьева О. Н. Алгебра и начала анализа. 10 класс. Углубленный уровень. Учебное пособие / О. Н. Афанасьева, Я. С. Бродский, А. Л. Павлов, А. К. Слипенко ... - ДонНУ, 2020. - 510с.

Рецензенты:

Горр Г.В., главный научный сотрудник ГУ «Институт прикладной математики и механики», доктор физ-мат наук, профессор

Машаров П.А., доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», кандидат физ-мат наук

Предлагаемое учебное пособие соответствует авторской программе по алгебре и началам анализа углубленного уровня, разработанной его авторами. Оно направлено на обеспечение готовности обучающихся широко и сознательно применять математику при описании объектов окружающего мира. Эту ориентацию обеспечивают содержание курса, характер изложения учебного материала, подбор иллюстраций и примеры применений, система упражнений и контрольных вопросов.

Для обучающихся классов естественно-научных профилей и учителей общеобразовательных учреждений.

Содержание

Дорогой юный друг!	6
Введение	8
Раздел I Функции, уравнения и неравенства	14
Готовимся к изучению темы "Функции, уравнения и неравенства"	15
§ 1. Числовые множества	20
1. Множество рациональных чисел.....	20
2. Множество вещественных чисел	23
§ 2. Множества, операции над ними	32
1. Множество и его элементы.....	32
2. Основные операции над множествами	34
§ 3. Понятие функции, способы ее задания	39
§ 4 Основные свойства функций	48
1. Четность и нечетность функций	48
2. Убывание и возрастание функций	51
3. Непрерывность и точки разрыва функции	56
4. Чтение графиков функций	59
§ 5. Простейшие функциональные зависимости, их свойства и графики ...	65
1. Линейная функция	65
2. Квадратичная функция	69
3. Обратная пропорциональность	73
§ 6. Построение графиков функций	79
§ 7 Понятие обратной функции	90
§ 8. Уравнения и неравенства	95
1. Равносильные уравнения и уравнения-следствия	95
2. Простейшие уравнения с параметрами	99
3. Рациональные неравенства. Метод интервалов	103
4. Применение графиков и свойств функций к решению уравнений и нера-	
венств	110
§ 9. Многочлены от одной переменной	117
1. Многочлены и операции над ними	117
2. Теорема Безу и следствия из неё	121
3. Метод математической индукции	124
Готовимся к тематическому оцениванию по теме "Функции, уравнения и нера-	
венства"	132
Таблицы для систематизации материала раздела	137
Исторический комментарий	142
Раздел II. Степенные функции	145
Готовимся к изучению темы «Степенные функции»	145
§ 10. Корни n -й степени	148
1. Степенные функции с натуральными показателями	148
2. Понятие корня n -й степени	154
3. Свойства арифметического корня n -й степени	158

4. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и ее свойства	166
§ 11. Иррациональные уравнения и неравенства	177
1. Иррациональные уравнения	177
2. Иррациональные неравенства	184
§ 12. Степень с рациональным показателем	191
§ 13. Степенные функции с рациональными показателями	201
Готовимся к тематическому оцениванию по теме " Степенные функции " ..	210
Таблицы для систематизации материала раздела	213
Исторический комментарий	215
Раздел III Тригонометрические функции	216
Готовимся к изучению темы «Тригонометрические функции»	217
§ 14. Измерение углов	222
§ 15. Тригонометрическая окружность	228
§ 16. Тригонометрические функции числового аргумента	238
§ 17. Основные соотношения между тригонометрическими функциями ...	247
§ 18. Формулы приведения	254
§ 19. Периодические функции	261
§ 20. Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$	269
§ 21. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$	282
§ 22. Гармонические колебания	294
§ 23. Тригонометрические тождества	298
1. Формулы сложения	298
2. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента .	302
3. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и обратные преобразования	307
Готовимся к тематическому оцениванию по теме "Тригонометрические функции"	317
Таблицы для систематизации материала раздела	322
Исторический комментарий	325
Раздел IV Тригонометрические уравнения и неравенства	327
Готовимся к изучению темы «Тригонометрические уравнения и неравенства»	328
§ 24. Простейшие тригонометрические уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$	332
1. Уравнение $\sin x = a$	332
2. Уравнение $\cos x = a$	338
§ 25. Простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$	344
§ 26. Простейшие тригонометрические неравенства	351
§ 27. Решение тригонометрических уравнений методом замены переменной	358
§ 28. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители..	365
§ 29. Функционально-графические методы решения тригонометрических уравнений и неравенств	372
§ 30. Частные методы решения тригонометрических уравнений	377
§ 31. Обратные тригонометрические функции	388

Готовимся к тематическому оцениванию по теме "Тригонометрические уравнения и неравенства"	397
Таблицы для систематизации материала раздела	400
Исторический комментарий	403
Раздел V Показательная и логарифмическая функции	404
Готовимся к изучению темы «Показательная и логарифмическая функции»	404
§ 32 Показательная функция	409
1. Степени с действительными показателями	409
2. Свойства и график показательной функции	416
§ 33. Логарифмы и их применение	428
1. Логарифмы и их свойства	428
2. Свойства и график логарифмической функции	435
§ 34. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем	446
1. Показательные уравнения и неравенства	446
2. Логарифмические уравнения и неравенства	455
Готовимся к тематическому оцениванию по теме «Показательная и логарифмическая функции»	470
Таблицы для систематизации материала раздела	474
Исторический комментарий	476
Ответы и указания к задачам	478
Предметный указатель	507

Дорогой юный друг!

Обучение в старших классах связано с решением сверхсложной задачи: выбором профессии, сферы будущей деятельности, подготовкой к учебе по избранному направлению. Овладение математикой старшей школы поможет вам в ее решении. Математика способна помочь, как говорят, и ум в порядок привести, и мир познать.

Перед вами учебное пособие по предмету «Алгебра и начала анализа». Его главное предназначение — помочь вам систематизировать, расширить и углубить знания и умения, необходимые для математического моделирования и исследования процессов и явлений с помощью функций, уравнений и других математических объектов, овладеть смежными предметами (физикой, химией, биологией и т. д.), и тем самым удостовериться в могуществе математических методов для познания окружающей действительности, в решении различных проблем.

Книга состоит из пяти разделов. Каждому разделу предшествует материал, изучавшийся ранее и необходимый для изучения этого раздела. Он представлен в виде таблиц. Для обеспечения готовности к изучению материала раздела приводится диагностический тест.

Разделы пособия разделены на параграфы, некоторые из которых, в свою очередь, делятся на пункты. К каждому пункту даны контрольные вопросы, целью которых является обеспечение активного усвоения основных понятий и фактов в их взаимосвязи.

Изложение учебного материала в каждом пункте структурировано по уровням. На первом уровне (он обозначен буквой **Б**) излагаются основные понятия, факты темы, хотя чаще всего без формальных доказательств. Этот материал является базой для дальнейшего изучения темы, более основательного и полного. Поэтому естественным является и его символическое обозначение — первая ступенька усвоения темы.

На втором уровне (он обозначен буквой **О**) приводится более полное обоснование предыдущего материала, его расширение. Материал на этих двух уровнях полностью обеспечивает овладение предметом согласно требованиям программы на профильном уровне обучения. Третий уровень изложения (он обозначен буквой **П**) рассчитан на учащихся, ориентированных на углубленное изучение математики.

Изложение теоретического материала сопровождается примерами и решением типовых заданий соответствующего уровня. Начало и конец доказательств утверждений и решений примеров обозначены знаками □ и ■.

Система заданий, упражнений и контрольных вопросов, приведенных в пособии, имеет три уровня сложности: первый уровень сложности обозначен символом «°», второй не имеет обозначений, третий обозначен символом «*».

В общую систему заданий включены упражнения на повторение, которые должны способствовать обеспечению готовности к овладению последующим

материалом, сохранению умений и навыков, сформированных при изучении предыдущих разделов.

Каждый раздел завершается материалом для подготовки к тематическому оцениванию, состоящим из вопросов для самоконтроля (с ответами) и образца тематической контрольной работы. Для повторения и систематизации учебного материала раздела приведены соответствующие таблицы.

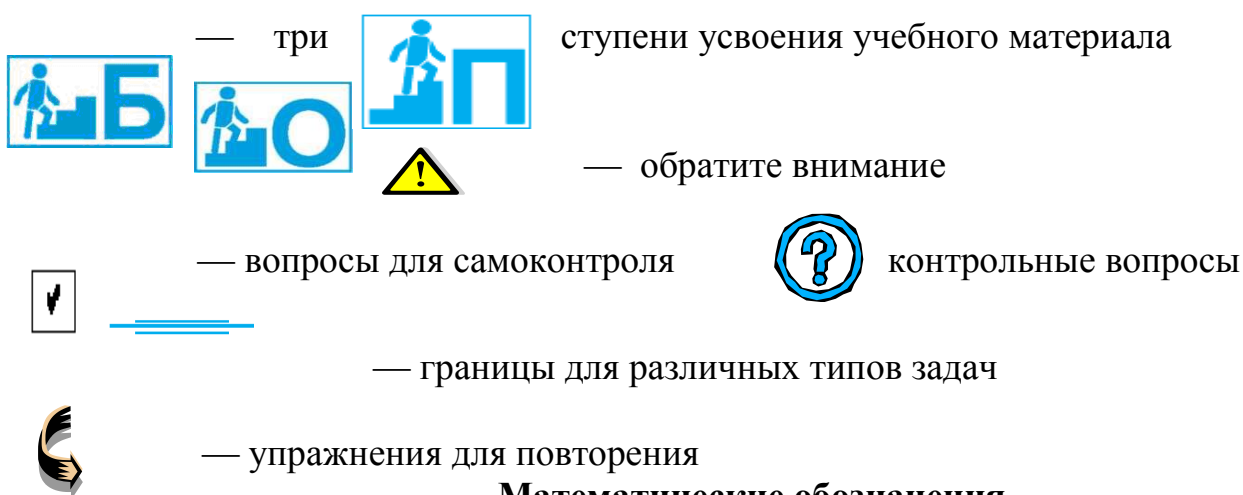
Учебное пособие содержит указания и ответы к задачам, предметный указатель.

Чтение книги не является легким делом. Некоторые фрагменты доказательств оставлены для самостоятельной проработки. Не пропускайте их!

Желаем успехов!

Коллектив авторов

Условные обозначения



Математические обозначения

R — множество всех действительных чисел

Z — множество всех целых чисел

N — множество всех натуральных чисел

Q — множество всех рациональных чисел

$\in, \notin$ — принадлежит, не принадлежит (число или точка некоторому множеству)

$\cup, \cap$ — объединение, пересечение (множеств, событий)

$\Rightarrow$ — если ..., то (в формулировках теорем), или уравнение - следствие, неравенство - следствие

$\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда (в формулировках теорем), или равносильное (уравнение, неравенство, система)

$y = f(x)$ — функция

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — множество значений функции f

$\uparrow, \downarrow$ — возрастает, убывает (о функции)

$|x|$ — модуль числа x

D — дискриминант квадратного трехчлена

Введение

Развитие общества и математика

Одной из характерных особенностей нашего времени является широкое применение математики в различных отраслях деятельности человека. Без математики не обойтись при проектировании и строительстве зданий, производстве приборов и их деталей, важную роль играет эта наука в планировании хозяйственной деятельности, управлении технологическими процессами, организации работы предприятий и т. п.

Существенное ускорение процесса математизации науки, техники, хозяйственной деятельности началось в середине XX ст. Оно связано с созданием электронно-вычислительных машин, автоматизацией процессов производства, новейшими технологиями, существенными изменениями в характере труда человека.

Математика стала универсальным средством моделирования и исследования окружающего мира, надежным орудием решения практических задач. Поэтому изучение математики, ее приложений является неотъемлемым условием формирования мировоззрения человека и подготовки современного специалиста — квалифицированного рабочего, техника, инженера, экономиста и т. д.

Практика — основной источник развития математики

Несомненно, математика возникла на ранней стадии развития человечества под воздействием потребностей практической деятельности. Развитие ремесел, земледелия, торговли и обмена, навигации, управление государством потребовали усовершенствования измерений и расчетов.

Невозможно точно ответить на вопрос, когда именно были сформированы первые математические понятия. Однако есть убедительные письменные свидетельства (папирусы, глиняные таблички), подтверждающие высокий уровень математических знаний у мощных цивилизаций Древнего Востока — в Египте и Вавилоне — за три-две тысячи лет до н.э. Математика того времени имела ярко выраженный конкретный характер. Её достижения дошли до нас в виде задач, большинство из которых относятся к разряду хозяйственных, и их решений. В них речь идет об измерении площадей и объемов, о подсчетах урожая и величины налогов, о вычислениях, связанных с уплатой долгов и др.

Примерно в VII ст. до н.э. начался расцвет греческой цивилизации, отличавшейся от стран Древнего Востока политическим строем, экономикой и культурой. Расцвет науки и искусства в Древней Греции сопровождался плодотворными теоретическими исследованиями. Стремление древних греков понять строение Вселенной, определить роль и место человека в природе и обществе привели к утверждению новых форм рационального мышления. В математике эта форма мышления проявлялась в стремлении доказать все утверждения, исходя из небольшого количества начальных утверждений. До того времени математика имела «рецептурный» характер. Поэтому обоснование общепринятых практических «рецептов» стало одной из основных задач греческих математиков. Уже в III ст. до н.э. Евклид создал книгу «Начала», в которой в дедуктивной форме изложил основы тогдашней математики. На протяжении двух тыся-

челетий «Начала» Евклида считались образцом строгости и существенно влияли на развитие математики. Впрочем, аксиоматический метод, с помощью которого Евклид изложил основы геометрии, является общепризнанным при построении современных наук и не только математических.

В Древней Греции были сделаны открытия, которые на многие века определили направления развития математики. Вместе с достижениями теоретического характера ученые того времени имели много сугубо практических достижений. Самым знаменитым представителем прикладной математики того времени историки считают Архимеда (примерно 287—212 гг. до н. э.). Он был не только математиком, но и талантливым инженером. Его труды по вычислению площадей и объемов стали предвестниками мощнейших современных методов математики.

Последний период развития античного общества связан с влиянием Римской империи, где, в отличие от Греции, математикой интересовались мало. Любопытно, что в V ст. н.э. римский император Юстиниан даже запретил занятия математикой под угрозой смерти.

После упадка Римской империи центр математических исследований переместился на Восток. Наиболее значительными достижениями средневековой математики является использование в Индии современной десятичной позиционной системы записи чисел, введение отрицательных чисел и нуля, создание арабскими математиками (аль-Караджи, аль-Бируни, аль-Хайями и др.) основ алгебры, впоследствии выделившейся в самостоятельный раздел математики. Математические исследования на Востоке имели арифметико-алгебраический характер и были более прикладными, чем во времена античности. Арабские математики, учитывая необходимость астрономических исследований и потребности навигации, существенно развили тригонометрию.

В то время, когда Восток продолжал развиваться, Западная Европа постепенно приходила в упадок. Феодалные дразги, низкий уровень культуры и производства никоим образом не способствовали развитию науки. Изучение математики в культурных центрах того времени — монастырях — ограничивалось изучением арифметики и основных понятий геометрии.

В начале XII ст. экономическая жизнь Запада активизируется, устанавливаются торговые связи с Востоком. Благодаря арабам, Европа знакомится с трудами греческих ученых, в европейских странах оживляется интерес к математике.

Конец средневековья (XV-XVI ст.) в Западной Европе характеризуется бурными изменениями, связанными с распадом феодального общества и формированием рыночных отношений. Развитие промышленности, торговли, мореходства, печатного дела привело к расцвету культуры, искусства и науки. Математика становится важным средством научного Возрождения. В процессе активных занятий ею ученые создали современную алгебраическую символику.

Уже в эпоху Возрождения началось использование различных машин и механизмов в мануфактуре, в строительстве, горном деле и т. д. Появились предпосылки для развития теоретической механики и изучения механического

движения. Ученые должны были позаботиться о создании соответствующего математического аппарата. В начале XVII ст. Рене Декарт (1596 — 1650) ввел в обращение понятие переменной величины. С тех пор основным объектом математики стало понятие функции. Усилиями Ньютона, Лейбница, их учеников и последователей для изучения функциональных зависимостей был разработан новый математический аппарат. Его применение при решении задач механики, астрономии и других наук надолго определило последующие пути развития математики.

Развитие рыночных отношений в XVIII и XIX веках сопровождалось перестройкой производства с применением паровых машин, других технических средств. Развитие математики в то время было тесно связано с технической революцией, требованиями практики. Создание геометрических теорий, развитие понятия о числе, изучение функций стимулировались необходимостью решения научно-технических проблем в области кораблестроения и мореходного дела, баллистики, гидротехники, геодезии и картографии, астрономии.

Со временем непосредственное влияние практики на развитие математики несколько уменьшалось. Однако становление различных естественных и технических наук, прежде всего — физики, было тесно связано с совершенствованием математических методов, расширением сферы их приложений.

Таким образом, связь математики с практикой чаще всего осуществляется через естественные и технические науки.

Важным источником развития математики является ее внутренние потребности, направленные на систематизацию теорий, их обобщение, совершенствование научных методов и т. п.

Развитие математики в XIX ст. определялось как ее внутренними потребностями, так и потребностями практики. Яркие результаты были получены и на том, и на другом пути. Нередко абстрактные математические теории со временем становились прикладными. Так, например, неевклидова геометрия, творцами которой были немец К. Ф. Гаусс (1777 — 1855), венгр Я. Больяи (1802 — 1860) и россиянин Н. И. Лобачевский (1792 — 1856), появилась благодаря попыткам усовершенствовать «Начала» Евклида. В начале XX ст. это открытие стало неотъемлемой частью современных физических теорий.

Её возможности существенно выросли в результате создания электронно-вычислительных машин. Современный этап развития общества характеризуется значительным ростом сфер применения математики.

Чем же объясняется многообразие применений математики и универсальность ее методов? Во-первых, математика использует достаточно общие и четкие объекты для описания окружающих явлений (геометрические фигуры, числа, уравнения, векторы и т. д.). А, во-вторых, учеными разработан ряд мощных методов исследования математических объектов: метод координат, алгебраические методы, методы математического анализа и др.

Таким образом, математика является удобным и эффективным средством для описания и исследования закономерностей реального мира.

Математическое моделирование

Применение математики для описания и исследования процессов и явлений действительности ставит нас перед необходимостью найти ответ на вопрос: «А в чем заключается сущность решения прикладной задачи с помощью математики?». Собственно, об этом мы и поговорим.

Всем вам приходилось применять математические знания для расчета скорости заполнения бассейна, времени выполнения работы и др. Эти приложения предусматривают замену реальных объектов и отношений между ними математическими объектами и отношениями между ними (функциями, уравнениями, геометрическими фигурами).

Для этого необходимо, прежде всего, выделить существенные характеристики реальных объектов и отношений между ними, проигнорировав несущественные, а потом — именно их заменить математическими объектами и связями между ними. Процесс такого замещения называют **математическим моделированием**.

Математическими моделями обычно называют чаще всего приближенные описания какого-то класса явлений внешнего мира, выраженные с помощью математических понятий и отношений между ними.

Математической моделью свободного падения тела на землю является функция

$$h = h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t,$$

где h — высота, м; g — ускорение свободного падения, м/с²; t — время, с; v_0 — начальная скорость, м/с; h_0 — начальная высота тела, м. Эта функция описывает зависимость расстояния точки от Земли в момент времени t ; если $t = 0$, она находится на высоте h_0 . А если нас интересует вопрос: "Когда тело упадет на Землю?", то математической его моделью является задача: найти значение t , при котором

$$h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t = 0$$

Применение математики при решении практических задач сводится к их переводу на язык математики, решению полученной математической задачи, толкованию результатов решения.

Рассмотрим задачу, которая демонстрирует применение метода математического моделирования на практике. Построение математических моделей основывается на пренебрежении несущественными свойствами объектов или понятий, которые моделируются. Например, во многих случаях свободное падение тела можно изучать в предположениях:

- 1) Земля — инерционная система;
- 2) ускорение свободного падения является постоянной величиной;
- 3) Земля является плоской;
- 4) сопротивление воздуха можно не учитывать;
- 5) структуру и размеры тела можно не учитывать.

Эти предположения, как нам подсказывает опыт, естественны и справедливы при определенных условиях (тело имеет небольшие размеры, оно симметрично, начальная скорость небольшая и т. п.)

Создание математических моделей базируется на использовании законов, характеризующих процесс. Это могут быть законы физики, химии, биологии и других наук. В рассмотренном примере таким является второй закон Ньютона, который описывает движение тела под действием силы.

Математическая задача, к которой свелось определение времени падения тела с высоты h_0 , имеет, как мы видели, вид квадратного уравнения :

$$h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t = 0.$$

Поскольку дискриминант этого уравнения $D = v_0^2 + 2gh_0 > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

В более сложных случаях математическая задача, которая возникает при моделировании, не такая простая. Например, если учитывать силу сопротивления воздуха при падении тела, то зависимость высоты от времени и уравнения для нахождения времени падения будут значительно сложнее. Необходимо иметь определенные математические знания и навыки, чтобы исследовать математические модели. Потребности в использовании математики для изучения экономических, социальных процессов и других нетрадиционных областей ее применений требуют разработки новых математических идей и методов. В этом проявляется влияние практики на развитие математики в наше время.

Решение полученной при моделировании математической задачи не завершает решение данной прикладной задачи, для которой была построена математическая модель. Полученные результаты используются для принятия каких-то решений или прогнозирования поведения изучаемого процесса. И должна быть уверенность, что полученными результатами можно воспользоваться для этих целей. Другими словами, необходимо быть уверенными в соответствии построенной модели изучаемому явлению (понятно, что в той мере, насколько этого требует данная задача).

Рассмотрим, например, падение камня, брошенного в колодец, движение парашютиста в свободном падении, спуск кабины космического корабля в атмосфере. Понятно, что точность расчетов и сложность моделей, которые используются в данных примерах, разные. Однако, расчеты и глубины колодца, и скорости приземления спускового аппарата должны быть достоверными.

Исследование адекватности математической модели изучаемому явлению, выявление того, насколько близки к реальным результаты, полученные с помощью математической модели, является наиболее сложным и ответственным этапом математического моделирования. На этом этапе в существующую модель могут вносить изменения, которые делают ее реальнее, совершенней, хотя, как правило, и более сложной. Например, учтя в рассмотренной задаче,

что Земля имеет форму шара и вращается вокруг оси, а твердое тело свободно падает с большой высоты на Землю, можно сделать все расчёты значительно точнее, чем с помощью рассмотренной ранее формулы. Необходимость в уточнении математических моделей определяется требованиями практики.

Подводя итоги, процесс математического моделирования можно изобразить как процесс, состоящий из трех этапов:

1) *выбор или построение математической модели для описания данной задачи;*

2) *исследование построенной модели, то есть решение математической задачи;*

3) *содержательное толкование результатов исследования, установление соответствия полученного результата цели исследований.*

При необходимости уточняется сама математическая модель и результаты, которые из нее вытекают.

Роль математики в подготовке специалистов

Подготовка высококвалифицированных специалистов невозможна без фундаментальных математических знаний. Действительно, изучение многих специальных предметов требует владения определенным математическим аппаратом. Математические знания и умения необходимы и в профессиональной деятельности.

Основой применения математики, как уже отмечалось, является процесс математического моделирования. К этой деятельности вы готовились, изучая курс математики в основной школе. Там создавался запас математических моделей, формировались навыки их исследований, вырабатывались навыки моделирования.

В данном курсе предусматривается систематизация, углубление и расширение знаний, полученных в основной школе, а также навыков моделирования. Для моделирования реальных объектов и отношений, с которыми вы встретитесь при изучении других дисциплин, в будущей профессиональной деятельности, необходимо существенно расширить средства математического моделирования и исследования математических моделей, за счет введения новых классов функций и математических методов. Данная книга поможет вам в достижении этих целей.

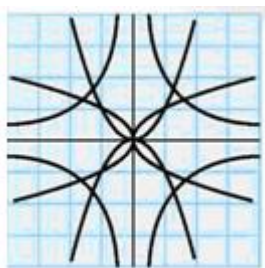


Раздел 1.

ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Каждому человеку постоянно приходится иметь дело с различными зависимостями между величинами. Поэтому изучение зависимостей является основным содержанием его обучения в школе, а также в высшем учебном заведении. Чтобы убедиться в этом, достаточно полистать страницы учебников по физике, химии, техническим или общественным дисциплинам, научно-популярных журналов и других изданий. С окончанием обучения не исчезает потребность учитывать, рассматривать и исследовать различные зависимости. Для строителей важной является зависимость стоимости строительства от его длительности, зависимость качества выполненных работ от качества строительных материалов. Для предприятий автомобильного транспорта представляет интерес зависимость расходов топлива от качества дорог. Перечень таких примеров из народного хозяйства, быта, политики и других сфер деятельности человека можно продолжить.

Начиная с XVII ст. изучение важнейших типов зависимостей стало одной из основных задач математики. В математику прочно вошли понятия переменной величины и функции, которые стали и остаются до настоящего времени мощными средствами моделирования реальных процессов, а потому и одними из главных объектов исследования. В данном разделе заложены основы для изучения функциональных зависимостей между переменными величинами, выделены некоторые важнейшие классы функций, изучаются элементарные методы исследования функций.



Готовимся к изучению темы «Функции, их свойства и графики»

Изучение темы «Функции, их свойства и графики» базируется практически на всем алгебраическом материале, изучавшемся в предыдущих классах. Главное предназначение этой темы как раз и заключается в его повторении, систематизации и углублении. Соответствующий материал представлен в виде таблиц.

Числа и вычисления

Таблица 1

Обыкновенные дроби	Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$ Чтобы сложить или вычесть дроби с разными знаменателями, их вначале приводят к общему знаменателю, а затем выполняют действие по правилу сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Умножение: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$ Деление: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$	$\frac{3}{5} + \frac{5}{6} = \frac{18}{30} + \frac{25}{30} = \frac{43}{30} = 1\frac{13}{30}.$
Проценты и пропорции	$1\% = 0,01$ $p\%$ от числа a равны $\frac{ap}{100}.$ Если $p\%$ от числа a равны b, то $a = \frac{b}{p} \cdot 100.$ Процентное отношение чисел a и b равно $\frac{a}{b} \cdot 100\%.$ Основное свойство пропорции $a:b=c:d \rightarrow ad=bc.$	
Положительные и отрицательные числа	Сложение. Пусть a и b — положительные числа. Если $a > b$, то $a + (-b) = a - b$ Если $a < b$, то $a + (-b) = b - a$ $(-a) + (-b) = -(a + b)$	
	Вычитание. $a - b = a + (-b)$ $-a = 0 - a$; $a + (-a) = 0$	
	Умножение. Пусть a и b — положительные числа. $a \cdot b = ab$; $a \cdot (-b) = -ab$; $(-a) \cdot b = -ab$; $(-a) \cdot (-b) = ab$	
	Деление. $a:b = a \cdot \frac{1}{b}$	

Выражения и их преобразования

Таблица 2

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

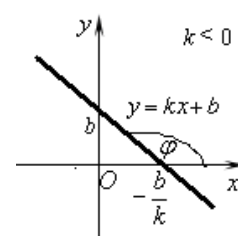
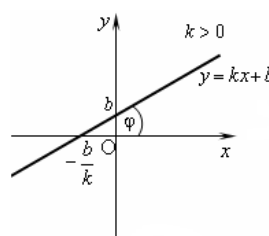
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_1 \text{ и } x_2 \text{ — корни уравнения } ax^2 + bx + c = 0.$$

Функции и графики

Таблица 3

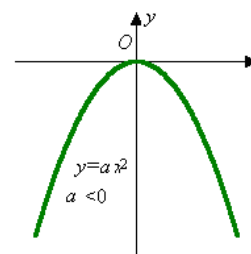
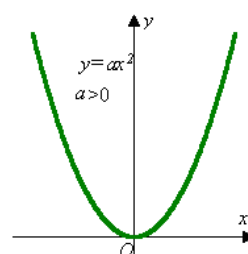
1. Линейная функция $y = kx + b$.

График — прямая, не параллельная оси y . Коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси x : $k = \operatorname{tg} \varphi$.



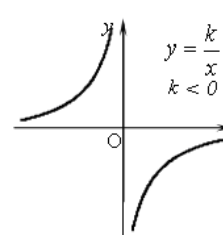
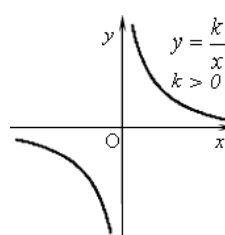
2. Квадратичная функция $y = ax^2$, $a \neq 0$

График — парабола, ветви которой направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.



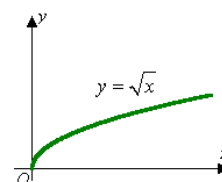
3. Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

График — гипербола, которая при $k > 0$ расположена в I и III четвертях, а при $k < 0$ — во II и IV четвертях.



4. Функция $y = \sqrt{x}$.

Определена на промежутке $[0; +\infty)$



Уравнения

Таблица 4

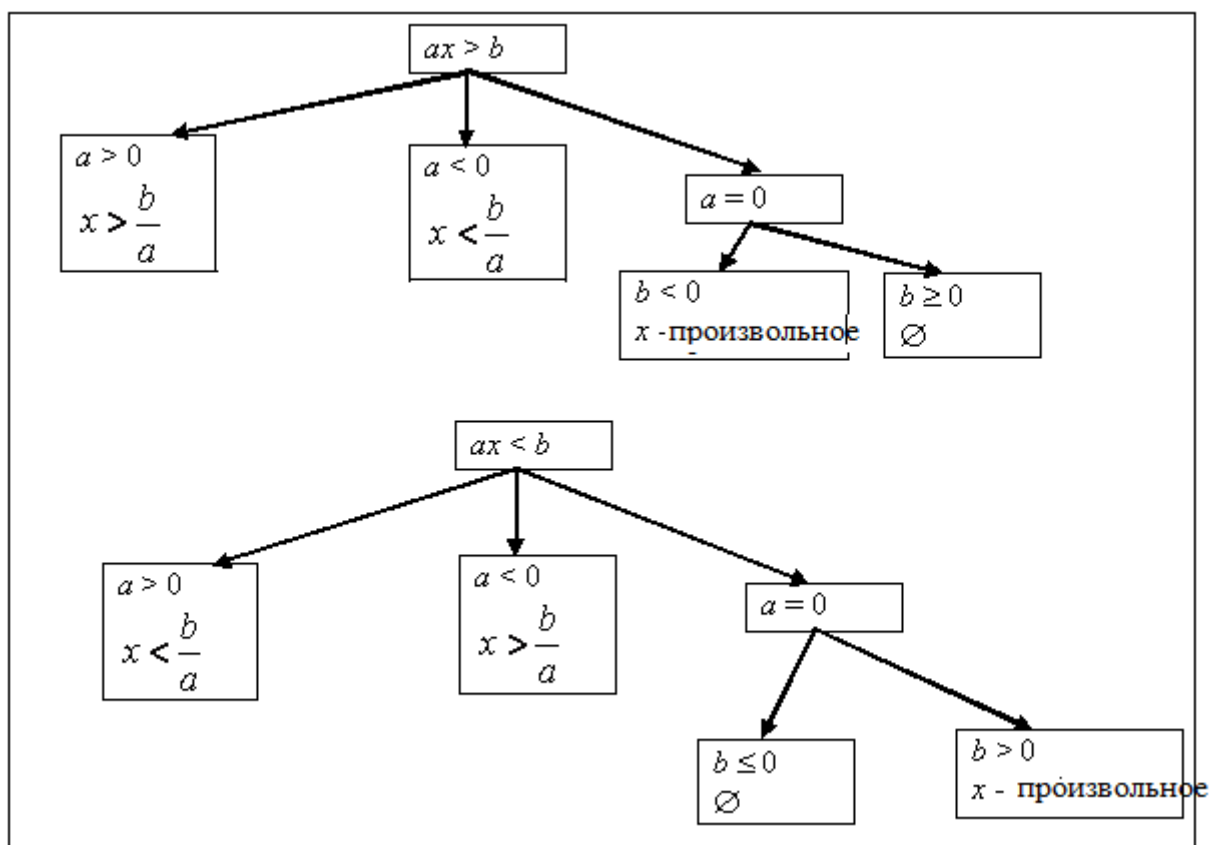
Тип уравнения	Решение
Линейное уравнение $ax = b$	Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$.
	Если $a = 0, b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.
	Если $a = 0, b = 0$, то любое x является корнем уравнения.
Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$ $D = b^2 - 4ac$ — его дискриминант	Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней. Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
Неполное квадратное уравнение (хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0)	$ax^2 + bx = 0$ или $x(ax + b) = 0$, поэтому $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$. $ax^2 + c = 0$ или $x^2 = -\frac{c}{a}$. Если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней.
Теорема Виета Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$	
Теорема, обратная к теореме Виета Если числа m и n такие, что $m + n = -p$ и $m \cdot n = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.	

Таблица 5

Основные свойства числовых неравенств

1.	Если $a > b, b > c$, то $a > c$.
2.	Если $a > b$, то $a + m > b + m$.
3.	Если $a_1 > b_1, a_2 > b_2$, то $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$.
4.	Если $a > b$, то $a \cdot m > b \cdot m$ при $m > 0$ и $a \cdot m < b \cdot m$ при $m < 0$.
5.	Если $a_1 > b_1 \geq 0, a_2 > b_2 \geq 0$, то $a_1 \cdot a_2 > b_1 \cdot b_2$.
6.	Если $a > b, a \cdot b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
7.	Если $0 < a < b$, то $a^n < b^n, n \in \mathbb{N}$.

Линейные неравенства



Определение степени с целым показателем

Таблица 7

Степень с натуральным показателем	$n \in \mathbb{N}, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \quad a^1 = a.$
Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1, a \neq 0.$
Степень с целым отрицательным показателем	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$

Свойства степени с целым показателем

Таблица 8

Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in \mathbb{Z}.$
Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in \mathbb{Z}.$
Возведение степени в степень	$(a^x)^y = a^{xy}, x, y \in \mathbb{Z}.$
Степень произведения	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in \mathbb{Z}.$
Степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, x \in \mathbb{Z}.$

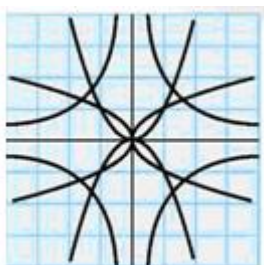
Арифметический квадратный корень и его свойства

Таблица 9

Определение	$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0, (\sqrt{a})^2 = a$
Арифметический квадратный корень из произведения	$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$
Арифметический квадратный корень из дроби	$a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$
Арифметический квадратный корень из квадрата	$\sqrt{a^2} = a .$

Тест для диагностики готовности к изучению темы “Функции, уравнения и неравенства”

- Вычислите: $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-3}$.
 А. $-\frac{27}{8}$. Б. $\frac{8}{27}$. В. $-\frac{8}{27}$. Г. $\frac{27}{8}$.
- Найдите значение выражения $\frac{x+x^3}{4}$ при $x=-\sqrt{3}$.
 А. $\sqrt{3}$. Б. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В. $-\sqrt{3}$. Г. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Вычислите квадрат числа $\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}$.
 А. $-\frac{3}{2}$. Б. $\frac{3}{2}$. В. $\frac{9}{2}$. Г. $\frac{1}{2}$.
- Сравните без вычислительных средств числа $a=3\sqrt{5}$ и $b=4\sqrt{3}$.
 А. $a < b$. Б. $a = b$. В. $a > b$. Г. Сравнить невозможно.
- После снижения цен на 10% цена товара равнялась 1800 руб. Какой была начальная цена этого товара?
 А. 1900 руб. Б. 2100 руб. В. 2000 руб. Г. 1980 руб.
- Упростите выражение $\frac{3(x-2)-(4-x^2)}{x-2}$.
 А. $5-x$. Б. $x+5$. В. $x+1$. Г. $-1+x$.
- Сократите дробь $\frac{a+2}{a^2-4}$.
 А. $\frac{1}{a+2}$. Б. $\frac{1}{a-2}$. В. $a-2$. Г. $\frac{1}{2-a}$.
- Упростите выражение $\left(\frac{a+b}{3} : \frac{9}{a-b}\right) \cdot \frac{27a}{a+b}$.



§ 1. Числовые множества

В этом параграфе систематизируется, обобщается материал, связанный с разными числовыми множествами.

1. Множество рациональных чисел



Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., которые используются при счете, образуют **множество натуральных чисел**. Натуральные числа, противоположные им (отрицательные) числа и число нуль составляют **множество целых чисел**, целые и дробные числа — **множество рациональных чисел**.

Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой N , множество целых чисел — Z , множество рациональных чисел — Q .

Каждое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное. Одно и то же рациональное число можно изобразить в виде обыкновенной дроби разными способами. Например,

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{5}{15}; \quad -0,4 = \frac{-2}{5} = \frac{-4}{10} = \frac{-10}{25}; \quad 7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{35}{5}.$$

Среди дробей, с помощью которых записывают данное рациональное число, существует дробь с наименьшим знаменателем. Эта дробь является несократимой. В приведенных примерах это, соответственно $\frac{1}{3}, \frac{-2}{5}, \frac{7}{1}$. Таким

образом, $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{5}{15}$ являются различными **дробями**, но все они представляют одно **дробное число**.

Каждое рациональное число можно представить также в виде десятичной дроби, конечной или бесконечной. Например,

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad 2\frac{22}{125} = 2\frac{176}{1000} = 2,176; \quad \frac{1}{3} = 0,3333....$$

Последняя десятичная дробь является периодической, с периодом 3 и её записывают так: $0,(3)$.

Т е о р е м а 1. Каждое рациональное число можно представить в виде десятичной периодической дроби.

Для конкретных чисел в правильности приведенного утверждения можно убедиться, непосредственно выполняя деление и учитывая то, что каждая конечная десятичная дробь, в частности целое число, можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с нулями в конце, то есть с периодом 0.

Если знаменатель дроби имеет своими простыми множителями лишь числа 2 и 5, то такая дробь преобразуется в конечную десятичную дробь, которую можно записать в виде десятичной периодической дроби с периодом 0.

Пример 1. Записать числа $\frac{7}{20}$ и $\frac{7}{8}$ в виде десятичной периодической дроби.

Так как $20 = 2^2 \cdot 5$, $8 = 2^3$, то $\frac{7}{20} = 0,35 = 0,35000... = 0,35(0)$,
 $\frac{7}{8} = 0,875 = 0,875000... = 0,875(0)$. ■

Ответ: 0,35(0); 0,875(0).

Дроби, знаменатели которых в разложениях на простые множители содержат числа, отличные от 2 и 5, обращаются в десятичные периодические дроби с периодом, отличным от нуля.

Пример 2. Записать числа $\frac{13}{9}$, $\frac{5}{54}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{42}$ в виде десятичной периодической дроби.

□ $\frac{13}{9} = 1,4444... = 1,(4)$; $\frac{5}{54} = 0,0925925925... = 0,0(925)$;
 $\frac{2}{15} = 0,1333... = 0,1(3)$;
 $\frac{3}{7} = 0,428571428571... = 0,(428571)$; $\frac{5}{42} = 0,1190476190476... = 0,1(190476)$. ■



Общий способ представления положительного рационального числа x в виде бесконечной десятичной дроби заключается в следующем:

1) выделяют целую часть a_0 числа x , то есть наибольшее целое число, которое не превышает x ;

2) дробную часть числа x , то есть $x - a_0 = \frac{m}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, а $m \in \mathbb{N}$ или $m = 0$, преобразуют в десятичную дробь делением числителя на знаменатель; в необходимых случаях разложение дополняют справа бесконечной последовательностью нулей.

В результате получают периодическую десятичную дробь.

Действительно, при делении натурального числа на произвольное натуральное число n возможны лишь n различных остатков $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Это вытекает из того, что для любых натуральных чисел m и n существуют такие целые неотрицательные числа q и r , что $m = n \cdot q + r$, где $0 \leq r < n$. Числа q и r называются, соответственно, частным и остатком от деления m на n . Обратите внимание на то, что остаток не превышает делитель. Например, $37 = 9 \cdot 4 + 1$, $42 = 7 \cdot 6 + 0$. Поэтому любой из остатков встретится во второй раз не более, чем через n шагов деления. Начиная с этого момента, будут повторяться цифры в частном.

Если x — отрицательное рациональное число, то в виде бесконечной десятичной дроби представляют ему противоположное число и перед полученным числом ставят знак "минус".

Верно и обратное утверждение.

Т е о р е м а 2. Каждая десятичная периодическая дробь представляет определенное рациональное число.

Это утверждение является почти очевидным для тех десятичных дробей, которые имеют своим периодом число 0. Например,

$$3,45(0) = 3,45000... = 3,45 = \frac{345}{100} = \frac{69}{20}.$$

Несколько сложнее его доказать, когда период отличается от нуля. В этом случае необходимо воспользоваться формулой суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, \quad (1)$$

где a_1 — первый член геометрической прогрессии, q — её знаменатель ($|q| < 1$).

Пример 3. Записать в виде обыкновенной дроби периодическую дробь:

1) $3,(7)$; 2) $1,7(61)$.

□ 1) Запишем периодическую десятичную дробь без скобок: $3,7777... .$

Представим полученную дробь в виде суммы целой части, десятых, сотых и т. д. частей:

$$3,7777... = 3 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$$

Слагаемые суммы $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$ являются членами бесконечной

убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = \frac{7}{10}$ и знаменате-

лем $q = \frac{1}{10}$ ($|q| < 1$).

Вычислим сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии,

по формуле (1). Имеем: $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$. Следовательно,

$$3,(7) = 3\frac{7}{9}.$$

$$2) 1,7(61) = 1,7616161... = 1 + \frac{7}{10} + \frac{61}{1000} + \frac{61}{100000} + ... =$$

$$= 1 + \frac{7}{10} + \frac{0,061}{1 - 0,01} = 1 + \frac{7}{10} + \frac{61}{990} = 1 + \frac{7 \cdot 99 + 61}{990} = 1\frac{754}{990} = 1\frac{377}{495}. \blacksquare$$

Ответ: 1) $3\frac{7}{9}$; 2) $1\frac{377}{495}$.

Различные бесконечные десятичные дроби изображают различные рациональные числа. Исключение составляют дроби с периодом 9, которые можно считать другой записью дробей с периодом 0: $1,(9) = 1,999... = 2,000... = 2$; $0,3(9) = 0,3999... = 0,4000... = 0,4$. Для бесконечных десятичных дробей с периодом 9, как правило, применяют запись дробями с периодом 0.

✓ **Контрольные вопросы**

1°. Верно ли, что:

- а) каждое целое число является натуральным;
- б) каждое целое число является рациональным?

2°. Какое множество дополняет множество целых чисел до множества рациональных чисел?

3°. Чему равен период десятичной дроби $49,35727272...$?

4°. Какие из следующих обыкновенных дробей обращаются в конечные десятичные дроби: $\frac{3}{16}, \frac{7}{49}, \frac{5}{6}, \frac{7}{50}, \frac{11}{15}, \frac{3}{25}, \frac{21}{80}, \frac{2}{21}, \frac{7}{125}$?

5. Сколько цифр содержит период представления рационального числа $\frac{3}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби?

6. Каким является наименьший знаменатель в представлении числа $3,(27)$ в виде обыкновенной дроби?

7. * Является ли произведение двух периодических десятичных дробей периодической десятичной дробью?

2. Множество действительных чисел



Необходимость расширения множества рациональных чисел обусловлена геометрическими и алгебраическими соображениями. Так, для точного измерения длин отрезков рациональных чисел не хватает. Например, не существует рационального числа, равного длине гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника, если длина его катета является единицей измерения ($\sqrt{2}$ не является рациональным числом!)

Точно так же во множестве рациональных чисел не всякое уравнение вида $x^2 = a$ имеет решение. Например, уравнение $x^2 = 2$ во множестве рациональных чисел не имеет решений, так как не существует рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2.

Новые числа можно ввести, используя бесконечные непериодические десятичные дроби.

В предыдущем пункте было показано, что любое рациональное число можно записать в виде периодической десятичной дроби, и каждая десятичная периодическая дробь является рациональным числом. Если же бесконечная десятичная дробь не является периодической, то она не является рациональным

числом. Например, дробь $0,12345678910111213\dots$, в которой после запятой записаны все натуральные числа, — непериодическая, а потому она не изображает никакого рационального числа. Данная дробь является иррациональным числом.

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Примеры иррациональных чисел: $0,3535535553555\dots$ (после первой тройки — одна пятерка, после второй — две и т. д.), $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$, $\pi = 3,1415926535\dots$ (отношение длины окружности к диаметру).

Иррациональные числа x и y , записанные в виде бесконечных десятичных дробей, сравниваются по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби. Если целая часть числа x меньше целой части числа y , то $x < y$. Если целые части двух чисел равны, то для их сравнения придется обратиться к их дробным частям. Например, $12,72241\dots < 12,72250\dots$, поскольку у этих чисел равны целые части и первые три десятичных знака после запятой, а четвертый знак после запятой у левого числа меньше: $4 < 5$.

Рациональные и иррациональные числа образуют **множество действительных** или **вещественных чисел**. Это множество обозначают буквой R . Каждое действительное число изображается в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной).

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (при условии, что делитель отличен от нуля). Действия над действительными числами обладают теми же свойствами, что и действия над рациональными числами. В прикладных задачах при выполнении действий над действительными числами их заменяют рациональными приближенными значениями.

Пример 4. Две материальные точки вращаются по окружностям радиусов 3 м и 4 м. Каждая из них за 1 с делает один оборот. Какое расстояние они вместе преодолеют за 1 с? Вычисления выполнить с точностью до 1 м.

□ Искомое расстояние равно сумме длин двух окружностей, описанных данными материальными точками за 1 с. Поскольку длина окружности вычисляется по формуле $l = 2\pi R$, где R — радиус окружности, l — её длина, то можно вычислить длину каждой окружности (при вычислении сохраняем один дополнительный десятичный знак): $l_1 = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \approx 6 \cdot 3,1 = 18,6$ (м), $l_2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 8 \cdot 3,1 = 24,8$ (м). Искомое же расстояние равно $l_1 + l_2 \approx 18,6 + 24,8 = 43,4$ (м). Округлив результат до 1 м, получим: $l_1 + l_2 \approx 43$ (м). ■

Ответ. 43 м.

Геометрически действительные числа изображаются точками координатной прямой, то есть прямой с выбранными началом координат, положительным направлением отсчета и единицей масштаба.

Основное свойство действительных чисел.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой, и наоборот, каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу.

Учитывая это соответствие, часто не различают число и изображающую его точку. Например, говорят «точка 5», «точка 2», «точка x » и обозначают соответствующую точку координатной прямой числом «5», «2», « x ». Координатную прямую называют также **числовой осью**. То, что точка A имеет координату x , записывают так: $A(x)$.

Обычно координатную прямую располагают горизонтально, положительное направление выбирают слева направо, начало координат обозначают буквой O . При этом, если $a < b$, то точка a расположена на числовой оси левее точки b (рис. 1); если же $a > b$, то точка a расположена правее точки b (рис. 2).

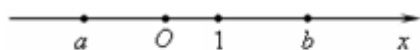


Рис. 1



Рис. 2

Пример 5. На координатной прямой изобразить точки по их координатам:

$$A(-2); B\left(\frac{2}{3}\right); C\left(-\frac{1}{2}\right); D(0,3); E(\sqrt{2}).$$

□

Точку $A(-2)$ получим, если на координатной прямой отложим от начала координат в отрицательном направлении две единицы масштаба (рис. 3). Точку

$B\left(\frac{2}{3}\right)$ можно построить, если разделить единицу масштаба на три равные части

и отложить вправо две такие части. Точки $C\left(-\frac{1}{2}\right); D(0,3)$ строятся аналогично

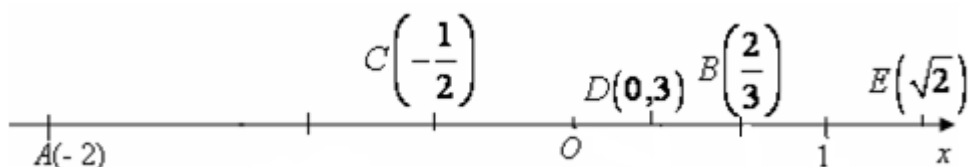


Рис. 3

(единица масштаба делится соответственно на две и на 10 равных частей). Для изображения точки $E(\sqrt{2})$ можно воспользоваться приближенным значениям $\sqrt{2}$, например, 1,4. ■

Геометрическая интерпретация действительных чисел позволяет наглядно ввести понятие модуля числа.

Расстояние от начала координат O до точки x называется модулем числа x и обозначается через $|x|$.

Из определения вытекает, что при $x \geq 0$ расстояние от O до x равняется x , то есть модулем неотрицательного числа является само это число. Если же $x < 0$, то расстояние от O до x равняется $-x$, то есть модулем отрицательного числа является противоположное ему число. Следовательно, $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Это равенство можно рассматривать как алгебраическую запись определения модуля действительного числа. Например,

$$|3|=3, |-5|=5, |1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1, |x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{если } x \geq 1, \\ 1-x, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

На координатной прямой также изображают числовые промежутки: отрезки, интервалы, полуинтервалы. Ниже приведена их запись с помощью скобок, неравенств, а на рис. 4 — изображение на координатной прямой.

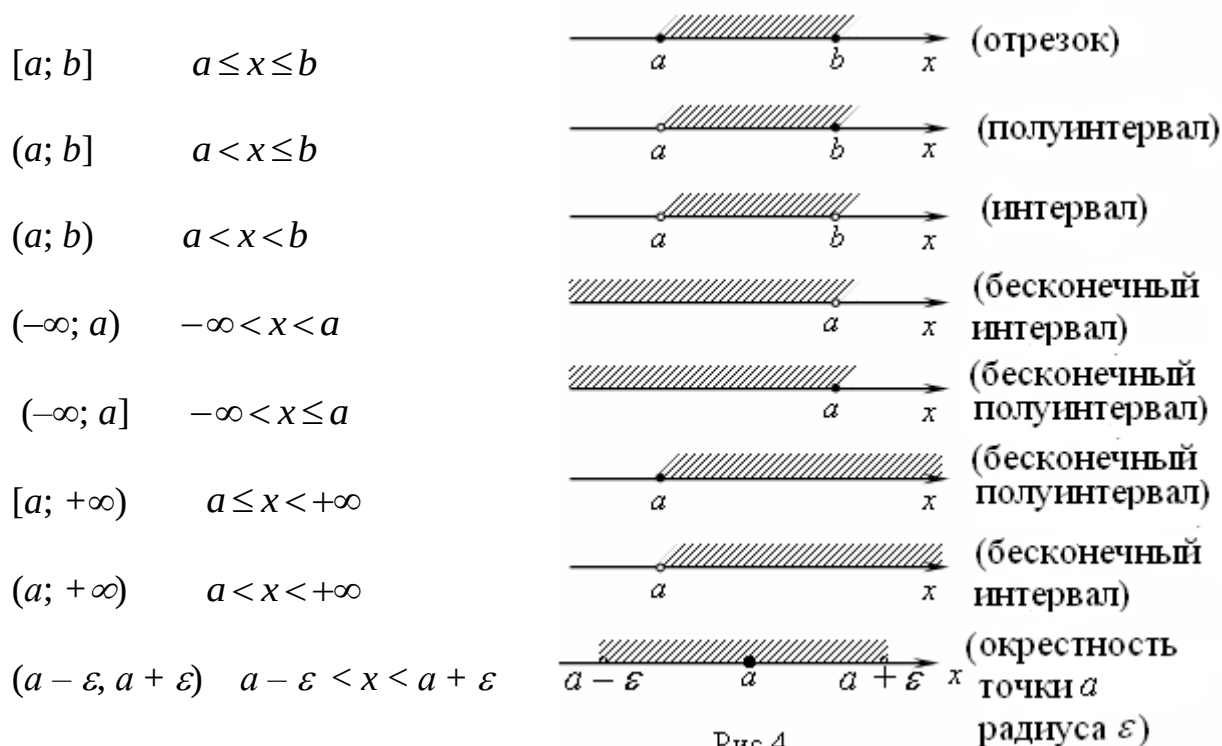


Рис.4

Принадлежность конечной точки промежутка этому промежутку обозначается на координатной прямой закрашенным кружочком. Незакрашенный кружочек обозначает точку, не принадлежащую промежутку.

Число $b - a$ является **длиной** каждого из промежутков $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$.

Промежуток $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется **окрестностью** точки a радиуса $\varepsilon > 0$. Точка a является серединой этого промежутка, его длина равна 2ε .



Понятие модуля действительного числа, его геометрическая интерпретация широко применяются при решении разнообразных задач.

Теорема 3. Расстояние между точками координатной прямой равно модулю разности соответствующих им чисел.

□ Пусть даны точки $A(x_1)$, $B(x_2)$. Требуется доказать, что $AB = |x_1 - x_2|$. Доказательство теоремы сводится к рассмотрению различных случаев расположения точек $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на координатной прямой. Если $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, (рис.



Рис. 5а

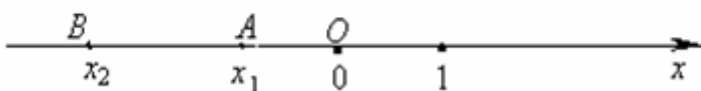


Рис. 5б

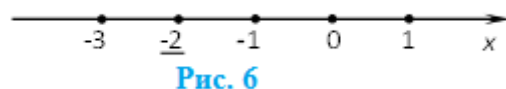
5а), то $AB = AO + OB = x_1 + (-x_2) = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$. Если $x_1 < 0, x_2 < 0, |x_1| < |x_2|$, то есть точка A расположена ближе к точке O , чем точка B (рис. 5, б), то $AB = BO - OA = -x_2 - (-x_1) = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Мы доказали, что **модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, изображающими данные числа.** ■

Пользуясь понятием модуля, легко записать некоторые геометрические утверждения в алгебраической форме. Например, «расстояние от точки x до точки 1 равно 2» означает, что $|x - 1| = 2$, а «расстояние от точки x до точки -1 меньше 3» — $|x + 1| < 3$.

Геометрическим смыслом модуля удобно пользоваться при решении простейших уравнений и неравенств, содержащих выражения с модулями.

Пример 6. Решить уравнение $|x + 2| = 1$.

□ Перепишем данное уравнение в виде $|x - (-2)| = 1$. Геометрически оно означает, что расстояние от точки -2 до искомой точки x равно 1. Откладывая на координатной прямой

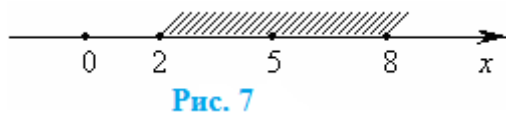


(рис. 6) от точки -2 по обе стороны от нее отрезки длиной 1, получим: $x_1 = -3, x_2 = -1$. ■

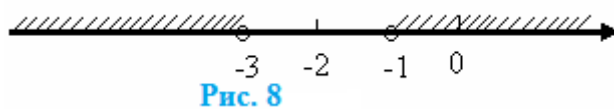
Ответ. $-3; -1$.

Пример 7. Решить неравенство: 1) $|x - 5| \leq 3$; 2) $|x + 2| > 1$.

□ 1) Геометрический смысл задания состоит в том, чтобы найти множество точек, удалённых от точки 5 на расстояние, не большее 3. Изобразим эти точки на рисунке (рис. 7). Запишем искомые точки в виде промежутка: $[2; 8]$. Решением неравенства являются точки отрезка $[2; 8]$.



2) Неравенство можно переписать в виде: $|x - (-2)| > 1$. Необходимо найти множество точек x , удалённых от точки -2 на расстояние, превышающее 1. Изобразим эти точки на рисунке (рис. 8). Решением неравенства являются точки множества $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. ■



Ответ. 1) $[2; 8]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Пример 8. Найти координату x середины отрезка с концами $A(a)$ и $B(b)$.

□ Пусть точка $X(x)$ является серединой отрезка AB , тогда $AX = XB$, или $|x - a| = |x - b|$. По условию $a < x < b$, поэтому $x - a = b - x$. Отсюда $x = \frac{a + b}{2}$. ■

Ответ: $x = \frac{a + b}{2}$.

При выполнении действий над вещественными числами их в практических задачах часто заменяют приближенными значениями.

Рассмотрим положительное вещественное число x : $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$. Обозначим через x_n конечную десятичную дробь, образованную из x в результа-

те отбрасывания всех десятичных знаков после n -го: $x_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$. Конечная десятичная дробь x_n называется **десятичным приближением вещественного числа x с недостатком**: $x_n < x$.

Если последнюю цифру a_n десятичного приближения x_n (при условии, что она отличается от 9) увеличить на единицу, то получим **десятичное приближение x'_n числа x с избытком**: $x'_n > x$. В общем случае десятичные приближения числа x с недостатком и избытком связаны соотношением: $x'_n = x_n + \frac{1}{10^n}$.



Число x больше своего произвольного десятичного приближения с недостатком, но меньше каждого десятичного приближения с избытком, точка x_n на координатной прямой расположена левее точки x , а x'_n — правее.

Например, для числа $\sqrt{2} = 1,41421\dots$:

$$1 < \sqrt{2} < 2; 1,4 < \sqrt{2} < 1,5; 1,41 < \sqrt{2} < 1,42; \dots$$

Аналогично находят десятичные приближения и для отрицательных вещественных чисел.

Каждому вещественному числу x соответствуют две бесконечные последовательности чисел: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ и $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n, \dots$, причём $x_{n+1} \geq x_n$, а $x'_{n+1} \leq x'_n$. Первая последовательность составлена из десятичных приближений числа x с недостатком, вторая — из десятичных приближений числа x с избытком, причем

$$x_0 \leq x \leq x'_0, \quad x_1 \leq x \leq x'_1, \quad x_2 \leq x \leq x'_2, \quad \dots, \quad x_n \leq x \leq x'_n, \dots$$

Отметим, что

$$x - x_0 < 1; \quad x - x_1 < 0,1; \quad \dots; \quad x - x_n < \frac{1}{10^n}; \quad x'_0 - x < 1; \quad x'_1 - x < 0,1; \quad \dots; \quad x'_n - x < \frac{1}{10^n}.$$

Подведем итог рассмотрения свойств десятичных приближений вещественного числа.

Т е о р е м а 4. Любое вещественное число больше произвольного десятичного приближения этого числа с недостатком или равняется ему и меньше произвольного десятичного приближения этого числа с избытком, или равняется ему. При этом модули разностей $|x - x_n|, |x - x'_n|$ могут быть как угодно малыми числами при достаточно большом n .

А как выполняются действия над вещественными числами? Для рациональных чисел $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$. Если, по крайней мере, одно число является иррациональным, то что понимать под суммой этих чисел? На координатной прямой сумма положительных вещественных чисел изображается отрезком, длина которого равняется сумме длин отрезков, изображающих слагаемые. Аналогично можно изобразить сумму произвольных

вещественных чисел. Это геометрическое толкование суммы. Арифметическое содержание операции сложения вещественных чисел может быть выяснено с помощью десятичных приближений слагаемых.

Пусть нужно найти сумму чисел $\frac{2}{7}$ и $\sqrt{3}$. Представим данные числа в виде бесконечных десятичных дробей: $\frac{2}{7} = 0,285714285714\dots$; $\sqrt{3} = 1,732050807\dots$

Пользуясь десятичными приближениями этих чисел с недостатком и с избытком, можно получить десятичные приближения суммы с недостатком и с избытком с произвольно заданной точностью. Например, с точностью до сотых $\frac{2}{7} + \sqrt{3} =$

$$2,01. \quad \text{Действительно,} \quad 0,285 + 1,732 < \frac{2}{7} + \sqrt{3} < 0,286 + 1,733 \quad \text{или} \\ 2,017 < \frac{2}{7} + \sqrt{3} < 2,019.$$

Аналогично вычисляют произведение двух вещественных чисел. Вычитание и деление вещественных чисел определяются как операции, обратные, соответственно, сложению и умножению.

Что дало введение в математику вещественных чисел? Она обогатилась содержанием, без них не могла бы развиваться дальше. Но при практических вычислениях можно было бы обойтись даже не всеми рациональными числами, а лишь конечными десятичными дробями.



Контрольные вопросы

1°. Среди приведенных чисел укажите натуральные, целые, рациональные, иррациональные: $(-3)^3$; $(-3)^2$; 3,14; π ; $\sqrt{64}$; $\sqrt{50}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{9}{3}$; 1,0(56).

2°. Какие числа удовлетворяют уравнению:

а) $|x| = 4$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -4$?

3°. Какие из следующих чисел можно представить в виде периодических десятичных дробей, а какие — в виде бесконечных непериодических десятичных

дробей: $\frac{2}{11}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{8}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{25}$; $-\frac{12}{17}$; $-\sqrt{6}$?

4°. Может ли произведение рациональных чисел быть иррациональным числом?

5. Может ли произведение иррациональных чисел быть рациональным числом?

6. Какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ верно, если: 1) $x = \sqrt{2} - 1$; 2) $x = \sqrt{3} - 2$;

3) $x = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$; 4) $x = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$?

Задачи

1°. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби:

1) 5; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $-\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{5}$.

2. Представьте число в виде обыкновенной дроби:

1°) 0,27; 2) 0,2222...; 3) 2,(31); 4) 3,4(52).

3°. Сравните числа:

1) ° $\frac{11}{315}$ и $\frac{11}{305}$; 2) ° $-\frac{6}{7}$ и $\frac{5}{7}$; 3) ° $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$; 4) ° 0,58 и $\frac{7}{12}$.

4. Выполните действия и запишите результат в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

1) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{9} + 0,25$; 3) $\frac{5}{21} \cdot 3,15$; 4) $\frac{2}{15} : 3,2$.

5. Дано два рациональных числа:

1) 0,53 и 0,64; 2) -0,03 и 0,03; 3) 0,3462 и 0,3463; 4) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{7}$.

Укажите, по крайней мере, одно рациональное число, содержащееся между ними.



6. Назовите несколько положительных значений переменной a , при которых значение выражения $\sqrt{a}$ является:

1) иррациональным числом; 2) рациональным числом.

7°. На рисунке изображены числовые множества. Запишите заданные множества в виде числовых промежутков.

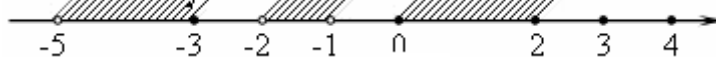
8°. Изобразите на координатной прямой числовые множества:

1) (3; 4); 2) [-2; 1); 3) [-2; -1]; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $[1; +\infty)$.

9°. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

1) $1 < x < 2$; 2)

$< x \leq 1$; 4) $x >$



$1 \leq x \leq 3$; 3) - 1

4; 5) $x \leq -3$.

10°. Как запи-

сать в виде не-

равенства с модулем двойное неравенство:

1) $-2 < x < 2$; 2) $-1 < x < 3$; 3) $-5 < x < 3$?



11. Даны точки $A(3)$ и $B(5)$. Найдите координаты точки:

1) симметричной точке A относительно B ;

2) симметричной середине отрезка AB относительно точки B .

12. Для каждого из следующих интервалов укажите его длину и координату его середины:

1) (1,3; 2,56); 2) $(-\pi; 2\pi)$; 3) (-2,13; 2,15).

13. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

1) $|x| = 3$; 2) $|x| \leq 3$; 3) $|x| > 3$; 4) $|x| > -3$; 5) $|x| < -3$.

14. Найдите $|x|$, если:

1) $x = \frac{7}{8} - \frac{8}{9}$; 2) $x = 3 - \sqrt{8}$; 3) $x = 4 - 3\sqrt{2}$; 4) $x = 2, (251) - 2, 25(1)$.

15. Вычислите значение выражения: 1)

$|-a| - 2|b|$, если $a = -1, b = -2$;

2) $\frac{-1 - |-3a| + 4|b|}{2|a| + |b|}$, если $a = -4, b = 0$.

16. Решите уравнение:

1) $|2x+1|=3$; 2) $|2-4x|=1$; 3) $|2x-5|=-2$; 4) $|x+2|=x+2$.

17. Решите неравенство:

1) $|x+3|>2$; 2) $|4x-1|<1$; 3) $|x-2|<1-\sqrt{2}$.

18*. Сравните значения выражений:

1) $|a|$ и a ; 2) $-|a|$ и a ; 3) $|a^2|$ и a^2 .



Упражнения для повторения

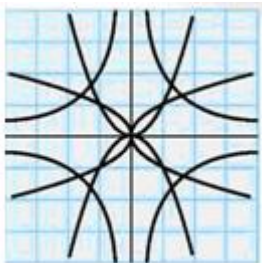
19. Запишите в виде обыкновенной дроби:

1) 6 %; 2) 18 %; 3) $\frac{2}{3}$ %; 4) $3\frac{3}{4}$ %; 5) $112\frac{1}{2}$ %; 6) 350%.

20. Выразите в процентах: 1) 0,08; 2) 0,6; 3) 2; 4) 3,2; 5) 0,0043.

21. На сколько процентов увеличится площадь круга, если его радиус увеличить на 20%?

22. Богдан и Гриша играли в одной баскетбольной команде. Богдан за игру 20 раз бросал мяч в корзину, при этом 15 раз его броски были меткими. Гриша сделал 25 бросков, из которых 18 оказались меткими. Кто из них был более метким в этой игре?



§2. Множества, операции над ними

С некоторыми обозначениями и понятиями, касающимися теоретико-множественного языка, вы знакомы из основной школы. В данном параграфе идет речь об определенном упорядочении и расширении этих понятий.



1. Множество и его элементы

Понятие множества относится к первичным, основным, не определяемым. В повседневной жизни для слова "множество" употребляют такие синонимы как система, совокупность, комплекс и др. (система мероприятий, совокупность людей, комплекс сооружений). В математике также этим термином обозначают некоторое собрание математических объектов: совокупности чисел — числовые множества, множества геометрических фигур — классы фигур, семьи кривых — множества кривых и много др. **Во всех случаях под множеством следует понимать определенную совокупность некоторых элементов, которые имеют общее свойство, и которая воспринимается как единое целое.**

Множества могут состоять из конечного количества элементов, и тогда они называются **конечными множествами**, и бесконечного количества — **бесконечные множества**. Множество цифр в десятичной записи чисел, множество диагоналей в данном многоугольнике, множество вершин куба — все это конечные множества, а множества натуральных, целых, рациональных чисел, множества прямых, треугольников плоскости, множества уравнений, точек данного отрезка, окружности — бесконечные множества.

Множества чаще всего определяются путем перечня их характеристических свойств, с помощью которых можно точно установить, какие элементы принадлежат или не принадлежат данному множеству, или же перечнем всех элементов множества. Например, $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ — множество всех цифр; $\{-2; -1; 1; 2\}$ — множество решений биквадратного уравнения $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. При этом элементы множеств при их выписывании обычно берут в фигурные скобки.

А вот примеры задания множеств с помощью характеристических свойств: множество целых отрицательных чисел; множество правильных дробей со знаменателем 23; множество четырехугольников плоскости и т. п.

Для обозначения множеств чаще всего употребляют большие латинские буквы (возможно с индексами): $A, B, C_1, X_3, X_n, \dots$, а для обозначения элементов множеств — малые латинские буквы: $a, b, x_5, y_i, \dots$. Если элемент x принадлежит множеству A , то это записывают так: $x \in A$, а если не принадлежит, то — $x \notin A$. Количество элементов конечного множества A обозначают через $|A|$. Так, если $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, то $|A| = 10$, если $A = \{-2; -1; 1; 2\}$, то $|A| = 4$.

Для обозначения множества, которое не содержит ни одного элемента, его называют **пустым множеством**, используют знак $\emptyset$. Например, множество жителей Луны можно считать пустым множеством. Таким же является и мно-

жество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$, общих решений уравнений $x + b = 1$ и $x + b = 2$ и т. п.

Равенство двух множеств A и B обозначается $A = B$, и это означает, что A и B состоят из одних и тех же элементов, то есть, если $x \in A$, то $x \in B$, и наоборот, если $x \in B$, то $x \in A$. В соответствии с определением, множества $\{8; 6; 4; 2\}$ и $\{2; 4; 6; 8\}$ считают равными.

Иногда для задания множеств с помощью характеристических свойств употребляют следующую символику: если надо, например, задать множество чётных натуральных чисел, то пишут $\{x \in \mathbf{N} \mid x = 2k\}$. Запись $\{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x < 100\}$ задаёт все натуральные числа от 4 до 99.

В § 1 рассматривались числовые промежутки. Множество $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ обозначается более сжато $[a; b]$ — это не что другое, как все вещественные числа, которые принадлежат отрезку числовой оси вместе с его концами a и b . Употребление круглой скобки исключает конец отрезка: $(a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$, $(a; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$. Наконец, записи $[a; \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$, $(-\infty; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$, $(-\infty; \infty) = \mathbf{R}$ и др. определяют бесконечные промежутки на числовой оси.



Контрольные вопросы

1. ° Что означает запись:

а) $A = \{3; 6; 9\}$; б) $A = \{4\}$; в) $\emptyset$; г) $M = \{\emptyset\}$; д) $|M| = 3$; е) $5 \in \mathbf{N}$; ж) $0,5 \notin \mathbf{Z}$?

2. ° Принадлежит ли число:

а) 4 множеству $[2; 4)$; б) $-0,75$ множеству $[-0,9; 0]$; в) 0 множеству $(-\infty; 0]$; г) 7 множеству $\{x \in \mathbf{N} \mid x = 2k\}$; д) 100 множеству $\{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x < 100\}$; е) 5,5 множеству $\{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x < 100\}$; ж) 5 множеству $\{x \in \mathbf{N} \mid x = 2k + 1\}$; з) $-0,4$ множеству $\mathbf{Q}$?

3. Что представляет собой множество чисел:

а) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k\}$; б) $\{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ имеет ровно два натуральных делителя}\}$; в) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x < 0\}$; г) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$; д) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k \text{ и } x = 3l\}$?

4. Пусть A — множество всех параллелограммов плоскости. Что представляет собой множество:

а) $\{x \in A \mid \text{стороны } x \text{ равны между собой}\}$; б) $\{x \in A \mid \text{диагонали } x \text{ равны между собой}\}$; в) $\{x \in A \mid \text{один из углов } x \text{ — прямой}\}$?

5. Какие из приведенных чисел принадлежат множеству решений неравенства $x^2 - 9x + 14 < 0$: 1,5; 2; 3; -1; 6; 7?

6. Что представляет собой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению:

а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $x^2 + y^2 = -1$; в) $x^2 + y^2 = 0$; г) $x = y$; д) $x \leq y$?

2. Основные операции над множествами



Рассмотрим множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Из некоторых элементов этого множества можно образовать новое множество, например, $B = \{1; 3; 5\}$. Оно характеризуется тем, что каждый его элемент принадлежит множеству A . В этом случае говорят, что множество B является **подмножеством** множества A . Вообще, если каждый элемент множества B является одновременно элементом множества A , то пишут $B \subset A$ и **множество B называют подмножеством множества A** . Знак $\subset$ называют еще знаком включения для множества. Например, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\{1; 2; 5\} \subset \mathbb{N}$.

Само множество A является своим подмножеством, потому что каждый элемент A принадлежит множеству A . Принимается, что пустое множество $\emptyset$ является подмножеством произвольного множества.

Обращаем внимание на различие между знаками $\in$ и $\subset$. Первый из них ставится между элементом и множеством, а второй — между двумя множествами.

Подобно тому, как над числами вводят действия сложения, вычитания и др., над множествами тоже вводят определенные операции.

Пересечением множеств A и B называется множество, которое состоит из всех общих для A и B элементов.

Пересечение множеств A и B будем обозначать $A \cap B$.

Для иллюстрации этой операции удобно обратиться к так называемым кругам Эйлера. Их еще называют диаграммами Венна. Если множества A и B изобразить кругами (рис. 9), то множество $A \cap B$ изображается заштрихованной фигурой.

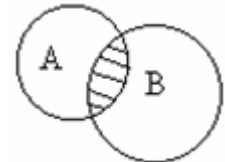


Рис. 9

Пересечением множеств прямоугольников и ромбов во множестве параллелограммов является множество квадратов; пересечением множества целых чисел и множества положительных рациональных чисел во множестве всех вещественных чисел является множество натуральных чисел. Пересечением множеств решений двух уравнений во множестве вещественных чисел является множество решений системы этих уравнений. Если два множества не имеют общих точек, то их пересечением является пустое множество. Например $\{-2; 0; 1; 2\} \cap \{-1; 5; 7\} = \emptyset$.

Нетрудно заметить, что для произвольного множества A выполняются равенства:

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Кроме операции пересечения над множествами широко используется операция **объединения** множеств.

Объединением множеств A и B называется множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые входят, по крайней мере, в одно из множеств A или B .

Объединение множеств A и B будем обозначать $A \cup B$. На рис. 10 множество $A \cup B$ заштриховано.



Рис. 10

Понятно, что объединением множеств рациональных и иррациональных чисел является множество вещественных чисел; объединением множества натуральных чисел и $\{0\}$ есть множество целых неотрицательных чисел; $\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; решением неравенства $x^2 - 1 \geq 0$ является множество $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

Нетрудно заметить, что для произвольного множества A выполняются равенства:

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A.$$



Введенные операции над множествами можно выполнять несколько раз, придерживаясь определенного порядка. Последовательность выполнения операций над множествами, как это делается и для чисел, определяют скобки. Так, запись $(A \cup B) \cap C$ означает, что необходимо найти сначала множество $A \cup B$, а потом его пересечение с множеством C . И вообще, определение операций над множествами приводит к созданию своеобразной алгебры множеств, подобной "числовой" алгебре. Не вдаваясь в систематическое изложение этой алгебры, укажем несколько простых и полезных свойств операций над множествами.

Т е о р е м а. Для произвольных множеств A, B, C выполняются следующие равенства

- 1) $A \cap B = B \cap A$;
- 2) $A \cup B = B \cup A$;
- 3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

□ Воспользовавшись определением равенства множеств, докажем, например, соотношение 3). Пусть $x \in (A \cap B) \cap C$, тогда $x \in (A \cap B)$ и $x \in C$, а потому $x \in A$, $x \in B$, и $x \in C$. Далее $x \in A$ и $x \in B \cap C$ и, наконец, $x \in A \cap (B \cap C)$. Проведя доказательство в обратном порядке, имеем: если $x \in A$ и $x \in B \cap C$, то $x \in (A \cap B) \cap C$. Аналогично доказываются остальные тождества. ■

Соотношения 1) - 2) выражают переместительные законы для операций пересечения и объединения множеств, а 3) - 4) — сочетательные законы. Данные законы дают возможность упрощать результаты действий над множествами, а еще — уменьшать количество скобок при записи выражений, содержащих множества и операции над ними. Например, в выражении $(-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; \infty)$ можно обойтись без скобок, которые определяют очередность выполнения двух операций объединения, ведь согласно тождеству 4) итоговый результат будет тот же самый.

При решении задач относительно действий над множествами существенную помощь могут оказать круги Эйлера.

Пример. Выяснить, верно ли равенство $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ для произвольных множеств A, B, C .

□ Обратимся к кругам Ейлера. На рис. 11 заштрихованная фигура изображает множество $(A \cap B) \cup C$, а на рис. 12 — $A \cap (B \cup C)$. Как видим, эти фигуры не равны, а поэтому указанное в условии соотношение неверно. ■

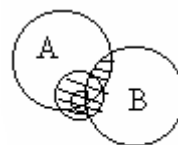


Рис. 11

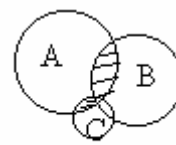


Рис. 12



Во многих случаях целесообразно рассматривать множества, которые являются подмножествами некоторого множества U , которое иногда называют **универсальным**.

Например, области определения числовых функций являются подмножествами множества вещественных чисел $\mathbf{R}$. В этом смысле $\mathbf{R}$ является универсальным множеством.

Полезно иметь в виду и использовать операцию дополнения на подмножествах универсального множества U . Дополнение данного подмножества A к множеству U составляют все элементы U , которые не входят в A . Обозначать его будем символом $\bar{A}$. На рис. 13 дополнение к A заштриховано.

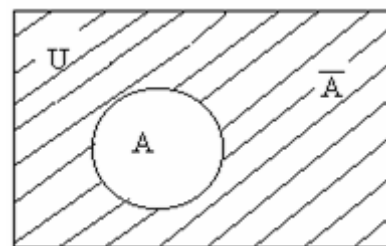


Рис. 13

Конечно, состав $\bar{A}$ зависит как от A , так и от множества U , в границах которого рассматривается A . Если считать, что $U = \mathbf{Q}$, то $\bar{\mathbf{Z}}$ — все рациональные нецелые числа, а при $U = \mathbf{R}$ — все вещественные нецелые числа. Понятно, что

$$\bar{\bar{A}} = A, \bar{\emptyset} = U, \bar{U} = \emptyset, A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset.$$



Контрольные вопросы

- ° Пусть $A = \{1; 2\}$. Какие из приведенных далее записей являются правильными:
а) $\{1\} \in A$; б) $1 \in A$; в) $1 \subset A$; г) $\{1\} \subset A$; д) $\emptyset \in A$; е) $\emptyset \subset A$?
- ° Сколько существует подмножеств множества $\{a; b\}$? Выпишите их.
- ° Если $A \subset B$, то чему равняется: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$?
- Одно множество состоит из 20 элементов, другое — из 15. Сколько элементов может быть в их: а) пересечении; б) объединении?
- Чему равняется количество элементов объединения двух конечных множеств, если их пересечение является пустым множеством?
- Чему равняется количество элементов объединения двух конечных множеств, если их пересечение не является пустым множеством?
- На координатной прямой (рис. 14) изображены точки $A(1)$, $B(2)$, $C(3)$, $D(4)$. Что собой представляет:
а) пересечение промежутков $[2; 3]$ и $[2; 4]$;
б) пересечение промежутков $(1; 3]$ и $(2; 4]$;
в) объединение промежутков $[1; 2)$ и $(2; 3]$;
г) объединение множеств $\{2\}$ и $(2; 3)$?

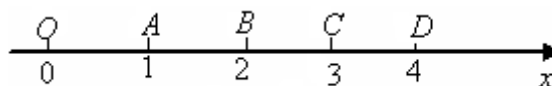


Рис. 14

Задачи

23. ° Даны множеств $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6\}$. Найдите:
1) пересечение A и B ; 2) пересечение A и C ; 3) пересечение B и C ;
4) объединение A и B ; 5) объединение A и C ; 6) объединение B и C .
24. ° Даны множества $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6\}$. Найдите:
1) $A \cup B \cup C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $(A \cup B) \cap C$; 4) $(A \cap B) \cup C$.
25. ° Найдите:
1) $[4; 10] \cap [5; 15]$; 2) $(-2; 2) \cap [-2; 0]$; 3) $[-2; 2] \cap [0; 2]$; 4) $(-2; 0] \cap [2; +\infty)$;
5) $[-2; 0) \cup [0; 5]$; 6) $[1; +\infty) \cup [0; +\infty)$; 7) $\{3\} \cup (-\infty; 3)$; 8) $(0; 3) \cup [0; 3]$.
26. Найдите:
1) пересечение множества равнобедренных треугольников и множества прямоугольных треугольников;
2) объединение множеств трапеций и параллелограммов;
3) пересечение множества четырёхугольников, в которые можно вписать окружность, и множества четырёхугольников, около которых можно описать окружность;
4) объединение и пересечение кругов, имеющих один и тот же центр, с радиусами 3 см и 5 см.
27. Изобразите на плоскости объединение и пересечение множеств точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют соотношениям:
1) $x^2 + y^2 \leq 4$ и $x^2 + y^2 \geq 1$; 2) $x^2 + y^2 = 1$ и $|x| + |y| = 1$; 3) $y \geq x^2$ и $y \leq 2$.
28. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, если:
1) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ делится на } 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ делится на } 5\}$;
2) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ делится на } 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ делится на } 6\}$.
29. Найдите $A \cup B \cup C$, если A — множество нечётных целых чисел, не делящихся на 3, B — множество чётных целых чисел, C — множество целых чисел, делящихся на 3.
-
30. Равны ли друг другу множества:
1) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x - 6 \leq 0\}$ и $(-\infty; 2) \cap [-3; 5]$;
2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$ и $(-\infty; -4) \cap [2; 10000]$;
3) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 < 1\}$ и множество значений x , удовлетворяющие уравнению $x + y = y$ для всех действительных значений y ;
4) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 < 4\}$ и множество значений x , удовлетворяющих уравнению $xu = y$ для всех действительных значений y ?
31. Из 100 туристов 10 человек не знают ни английского, ни немецкого языка, 75 знают немецкий язык и 83 — английский. Сколько туристов знают и английский, и немецкий языки?
32. Из 38 учащихся 16 играют в баскетбол, 17 — в хоккей, 18 — в волейбол. Насколько учащихся увлекаются двумя видами спорта: баскетболом и хоккеем — 4, баскетболом и волейболом — 3, волейболом и хоккеем — 5. Трое не увлека-

ются ни баскетболом, ни хоккеем, ни волейболом. Сколько учащихся увлекаются одновременно тремя видами спорта?

33. При исследовании читательских интересов учащихся оказалось, что 60% учащихся читают журнал А, 50% — В, 50% — С, 30% — А и В, 20% — В и С, 30% — А и С, 10% читают все три журнала.

1) Сколько процентов учащихся не читают ни одного из этих журналов?

2) Сколько процентов учащихся читают ровно один из перечисленных журналов; ровно два из перечисленных журналов?

34. Выпишите все подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.

35. Дано n -элементное множество. Сколько оно содержит:

1) двухэлементных подмножеств;

2) * всех подмножеств.

36. Докажите, что для произвольных подмножеств A, B, C множества U выполняются следующие равенства:

1) * $\bar{\bar{A}} = A$; 2) * $A \cup \bar{A} = U$; 3) * $A \cap \bar{A} = \emptyset$; 4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; 6) * $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; 7) * $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

37. Изобразите с помощью кругов Ейлера множества:

1) $A \subseteq B \subseteq C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $A \cap \bar{B}$.

Упражнения для повторения



38. Функцию задано формулой $y = \frac{1}{2}x - 4$.

1) Постройте её график.

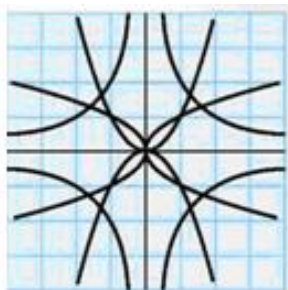
2) Найдите точки его пересечения с осями координат.

3) Найдите значения функции при x , равных -4 ; 0 ; 12 .

4) При каких значениях x значение функции равно 1 ; 0 ; -7 ?

39. Постройте графики функций $y = 0,8x - 0,7$ и $y = -1,5x + 4,4$. Найдите по рисунку координаты точек пересечения графиков.

40. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx$, если $k < 0$; $k > 0$?



§3. Функциональные зависимости

Функциональные зависимости между величинами могут задаваться различными способами: с помощью формул, графиков, таблиц, словесных описаний. Совершенствованию умений пользоваться этими способами, получать из них необходимую информацию посвящен данный параграф.



Изучение многих реальных процессов и явлений сводится к установлению связей (зависимостей) между переменными величинами, характеризующими их. Среди различных зависимостей особую роль играют функциональные зависимости. Напомним сначала то, что изучалось о функциональных зависимостях ранее.

Пусть заданы две переменные x и y , и D — множество значений переменной x .

Зависимость между переменными x и y , которая для каждого значения x из D определяет единственное значение y , называется функциональной зависимостью или функцией y от x с областью определения D .

Например, формула $y = 3x - 1$ определяет функциональную зависимость y от x , поскольку для каждого значения x из множества действительных чисел $\mathbf{R}$ она определяет **единственное** значение y .

Переменную x в таких зависимостях называют **независимой переменной** или **аргументом**, переменную y — **зависимой переменной**.

Функции обычно обозначают латинскими (иногда греческими) буквами — f, g, F, φ и т. п.

Функция — от латинского *function* — действие, выполнение.

Область определения функции f часто обозначают $D(f)$. Значение переменной y , которое соответствует x , называют **значением функции f в точке x** и обозначают $f(x)$. Запись « $y = f(x)$ » означает, что задана функция f . Функциональную зависимость переменной y от x иногда записывают так: $y = y(x)$.

Множество значений, которые принимает зависимая переменная y , если x пробегает область определения функции f , называют **множеством значений этой функции** и обозначают $E(f)$. Иногда также говорят, что функция $y = f(x)$ отображает элемент x на y , а множество $D(f)$ — на множество $E(f)$.



Фраза «задать функцию y от x » означает сформулировать правило, с помощью которого для каждого допустимого значения переменной x можно найти соответствующее ему значение переменной y .

Существуют различные способы задания функции. В математике функциональная зависимость чаще всего задается **формулами**, например, $y = 3x + 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{x-1}{x+1}$. Такой способ задания функции называется **аналитическим**.

Заметим, что не всякая зависимость между переменными является функциональной. Например, зависимость между переменными y и x , заданная урав-

нением $x^2 + y^2 = 1$, не является функциональной, так как, например, значению $x = 0$ соответствуют значения $y_1 = -1, y_2 = 1$.

Если функция задана формулой, то при отсутствии дополнительных замечаний или условий считают, что ее областью определения является множество всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл. Её иногда называют *естественной областью определения функции*.

Так, если $y = -3x + 1$, то x может принимать произвольные значения, то есть естественной областью определения функции является вся координатная прямая: $-\infty < x < +\infty$. Естественной областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, поскольку извлечение квадратного корня из отрицательных чисел невозможно.

Функция $y = \frac{x-1}{x+1}$ определена на всей координатной прямой за исключением $x = -1$, поскольку при этом значении x знаменатель дроби равен нулю.

Линейная функция $y = kx + b$, квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ определены при всех значениях x , то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ определена при всех значениях x , кроме $x = 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 1. Дана функция $y = \frac{2x}{x^2 - 3}$. Найти:

- 1) область определения функции;
- 2) значение функции в точке $x = -1$;
- 3) значения аргумента, при которых функция принимает значение 1.

□ 1) Функция определена при всех значениях x , для которых знаменатель дроби не равен нулю, то есть при всех x , кроме $x = \pm\sqrt{3}$.

Следовательно, $D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

2) Значение функции в точке $x = -1$ равно: $y(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{(-1)^2 - 3} = \frac{-2}{1 - 3} = 1$.

3) Чтобы найти значения аргумента, при которых функция принимает значение 1, решим уравнение $1 = \frac{2x}{x^2 - 3}$. Получим: $x^2 - 3 = 2x$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Следовательно, в этих точках функция принимает значение 1. ■

Ответ. 1) $D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$; 2) 1; 3) -1; 3.

При решении многих прикладных задач область определения функции устанавливают, исходя из физического или геометрического смысла задачи. Например, если рассматривать зависимость площади квадрата от длины его стороны x , то областью определения этой функции будет интервал $(0; +\infty)$, так

как длина стороны квадрата может выражаться только положительным числом. В таком случае иногда пишут: $y = x^2$, $x > 0$.



Обратите внимание на то, что функции $y = x^2$ и $y = x^2$, $x > 0$ различны. У них не только не совпадают области определения, они также обладают различными свойствами.

Функции называются равными, если они имеют одинаковую область определения и в каждой точке области определения принимают одинаковые значения.

Например, функции $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ и $y = x^2 - 1$ не являются равными, ибо у них не совпадают области определения (проверьте это самостоятельно!).

В математике и ее приложениях очень распространен **графический способ задания функции**. Существует много самопишущих приборов, которые вычерчивают кривые, устанавливая тем самым зависимость между исследуемыми величинами. Так, сейсмограф вычерчивает график колебания земной коры. По этому графику можно, например, изучать силу и характер толчков при землетрясении.

С помощью линии, изображенной на рис. 15, можно для каждого момента времени $0 \leq t \leq 12$ указать единственное значение температуры воздуха T , то есть эта линия задает функциональную зависимость между переменными t и T .

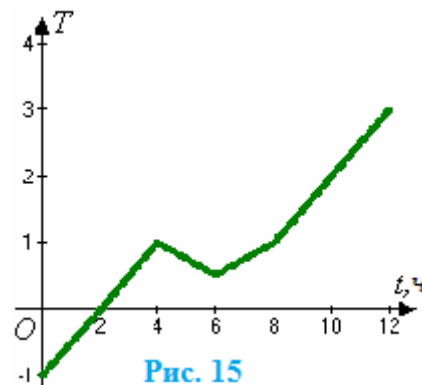


Рис. 15

Не всякая линия на координатной плоскости задаёт некоторую функцию. Чтобы некоторая линия определяла функциональную зависимость y от x , необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая, параллельная оси y , и ось y пересекали эту линию не более чем в одной точке. Так, линии на рис. 16 определяют функциональные зависимости y от x . Линии, изображённые на рис. 17, не задают функции y от x , так как можно указать вертикальные прямые, пересекающие линию в двух точках.

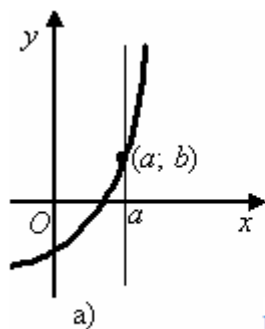


Рис. 16

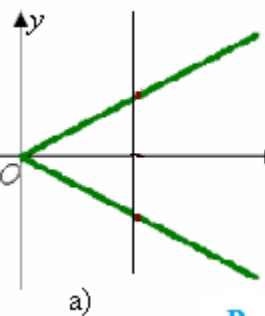
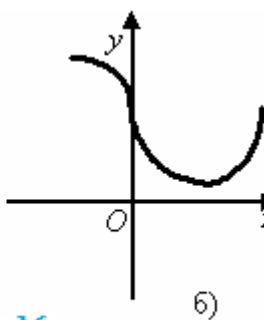
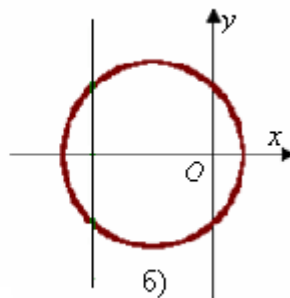


Рис. 17



Графический способ задания функции более наглядный по сравнению с аналитическим. По нему легко охарактеризовать исследуемую величину. Например, по графику на рис. 15, можно сказать, что температура воздуха в течение 12 часов изменялась от -1° до $+3^\circ$. В два часа она равнялась 0° , а в четы-

ре часа и в восемь часов она составляла 1° , также легко проследить, когда температура увеличивалась и когда уменьшалась.

Аналитическое задание функции часто сопровождают графиком. Для этого на плоскости вводят прямоугольную систему координат и строят точки с координатами $(x; f(x))$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Так, графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая, графиком квадратической функции $y = ax^2$ ($a \neq 0$) — парабола (см. табл. 3 на с 7–8).

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 18). Указать:

- 1) её область определения;
- 2) её множество значений;
- 3) значение функции при $x = 5$;
- 4) значение аргумента x , при котором функция принимает значение 3;
- 5) количество нулей функции, то есть значений аргумента, при которых значения функции равны нулю.

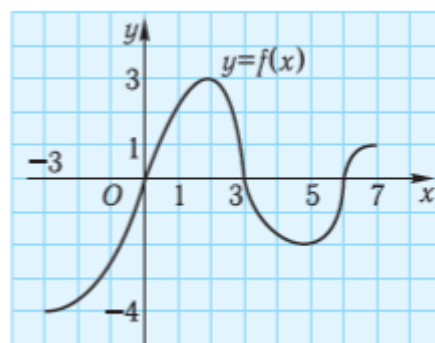


Рис. 18

□ 1) Областью определения функции является отрезок $[-3; 7]$.

2) Множеством значений функции является отрезок $[-4; 3]$.

3) $f(5) = -2$.

4) Значение 3 функция принимает при $x = 2$.

5) Функция в трёх точках принимает нулевое значение, то есть она имеет три нуля. ■

Ответ. 1) $[-3; 7]$; 2) $[-4; 3]$; 3) -2 ; 4) 2; 5) три.



Обратите внимание на то, что на рисунках, на которых иллюстрируются качественные свойства функций, масштабы на осях обычно не указывают (см., например, рис. 16, 17)

Кроме аналитического и графического способов задания функций, применяется также табличный способ. В физике и технике часто зависимости между переменными фиксируются на шкалах измерительных приборов. В таких случаях функцию задают в виде таблицы, в первой строке которой содержатся значения независимой переменной $x_1, x_2, x_3, \dots$, во второй — соответствующие им значения функции. Наиболее распространёнными являются таблицы с постоянными разностями $x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots$, причем, значение разности называется **шагом таблицы**. Для таких таблиц независимая переменная принимает значения $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$, где h — шаг таблицы.

Ниже приведены данные, полученные во время наблюдения за колебаниями тела, подвешенного на пружине:

Масса тела, г	50	100	150	200	250	300
Период колебаний, с	0,72	0,85	0,96	1,06	1,16	1,23

Имеем табличное задание зависимости периода колебаний от массы. Шаг таблицы равняется 50.

Табличный способ задания функций имеет определенные связи с аналитическим и графическим способами. Если функция задана аналитически, то можно составить таблицу ее значений. Например, часть такой таблицы для функции $y = x^2$ имеет вид:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,01	0,04	0,09	0,16

Конечно, невозможно выписать все значения x , для которых функция определена, поскольку область определения функции, обычно, является бесконечным множеством. В этом случае целесообразно пользоваться графиком функции, который является полной "таблицей" функции и содержит всю информацию о ней.



Некоторые функции можно задавать «словесно». Таким способом, например, задают функцию $y = [x]$ — целую часть числа: каждому вещественному числу x поставлено в соответствие наибольшее целое число, не превышающее x . Так, $[2,5] = 2$, $[-2,5] = -3$, $[4] = 4$; $[0,5] = 0$, $[-0,5] = -1$ и т. д. График этой функции изображен на рис. 19.

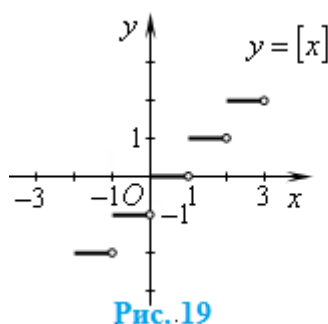


Рис. 19

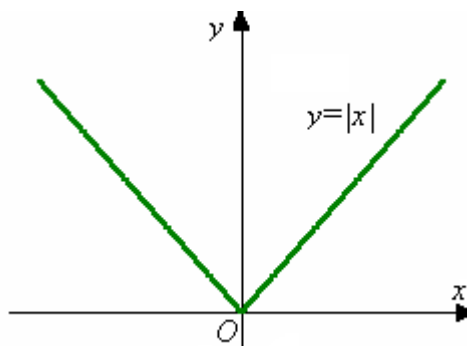


Рис. 20

Иногда функция на разных участках области определения может задаваться разными формулами. С одной из таких функций вы уже встречались в § 1. Это функция $y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$ Ее график изображен на рис. 20. Очень

важно научиться работать с такими функциями, потому что с их помощью описываются некоторые реальные процессы.

Пусть, например, материальная точка начинает двигаться под воздействием некоторой постоянной силы. Тогда ее скорость v пропорциональна времени t . Потом сила перестает действовать, а точка продолжает равномерное движение с набранной скоростью. В целом скорость точки изменяется по закону:

$$v = \begin{cases} at & \text{при } 0 \leq t \leq t_0; \\ at_0 & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Пример 3. Дана функция $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 1, \\ x^2 - 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$ Найти:

- 1) область определения функции;
 - 2) значение функции в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$;
 - 3) значения аргумента, при которых функция принимает значения 3; -1;
- 2.

□ 1) Функция определена при любых значениях x , то есть $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Поскольку $x = 0$ принадлежит промежутку $(-\infty; 1)$, то $f(0) = -1$; $f(1) = 1^2 - 1 = 0$; $f(2) = 2^2 - 1 = 3$, потому что $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$ принадлежат промежутку $[1; +\infty)$.

3) На промежутке $(-\infty; 1)$ функция принимает значение -1. Потому будем искать точки, в которых функция принимает значение 3, на промежутке $[1; +\infty)$. На этом промежутке функция задается формулой $y = x^2 - 1$. Чтобы найти нужные точки, решим уравнение $3 = x^2 - 1$. Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Значение $x_1 = -2$ меньше 0, оно не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому только в точке $x = 2$ функция принимает значение 3. Значение -1 функция принимает при всех значениях $x < 1$ и не принимает при $x \geq 1$ (проверьте!). Функция не принимает значения -2 ни при $x < 1$, где она принимает значение -1, ни при $x \geq 1$, потому что уравнение $x^2 - 1 = -2$ или $x^2 = -1$ корней не имеет. ■

Ответ: 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) -1; 0; 3; 3) 3; $(-\infty; 1)$; не существует.

Пример 4. Дана функция $y = \frac{|x|}{x}$. Найти ее область определения и множество значений. Построить график функции.

□ Функция определена при всех значениях x , кроме точки $x = 0$, то есть $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Функция принимает лишь два значения: 1 при $x > 0$ и -1 при $x < 0$. Таким образом, функцию можно записать в виде $y = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$ Ее график изображен на рис.

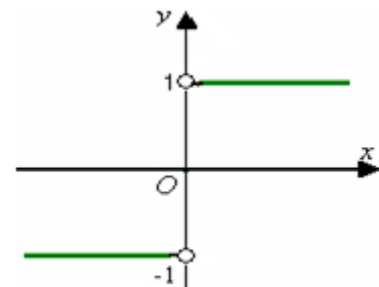


Рис. 21

21. ■

Незарисованными кружочками отмечены точки, которые не принадлежат графику функции ("выколотые" точки). В нашем случае это говорит о том, что функция $y = \frac{|x|}{x}$ в точке $x = 0$ не определена. А вот функция, график

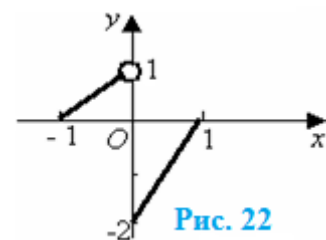


Рис. 22

которой изображен на рис. 22, определена в точке $x = 0$ и ее значение в этой точке равняется -2, а не 1. Точка с координатами (0; 1) не принадлежит графику.



Одним из важных классов функций являются числовые последовательности.

Последовательностью называется функция, которая задана на множестве N натуральных чисел или же на ее подмножестве $1, 2, \dots, n$, где n — произвольное натуральное число.

Если $y = f(n)$ — последовательность, то значение $f(n)$ обычно обозначают a_n и называют n -м членом последовательности. Вся последовательность обозначается традиционно (a_n) или $\{a_n, n \in N\}$. Арифметическая и геометрическая прогрессии являются примерами последовательностей с n -ми членами, имеющими, соответственно, вид: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Вместе с заданием последовательности путем представления его n -го члена через n , широко используют так называемое **рекуррентное задание последовательности**. Оно означает, что n -й член выражается через k предыдущих. При этом необходимо указать k первых членов последовательности. Самыми простыми примерами рекуррентного задания последовательности являются определения арифметической прогрессии соотношениями $a_n = a_{n-1} + d$, a_1 , и геометрической — $b_n = b_{n-1}q$, b_1 .



Контрольные вопросы

1. ° Какие из следующих зависимостей являются функциональными:
 - а) каждому числу ставится в соответствие квадрат этого числа;
 - б) каждому неотрицательному числу a ставятся в соответствие корни уравнения $x^2 = a$;
 - в) каждому числу, не равному нулю, ставится в соответствие обратное ему число?
2. ° Является ли графиком какой-то функции y от x множество точек координатной плоскости, которое изображено на рис. 23 а) – з)?

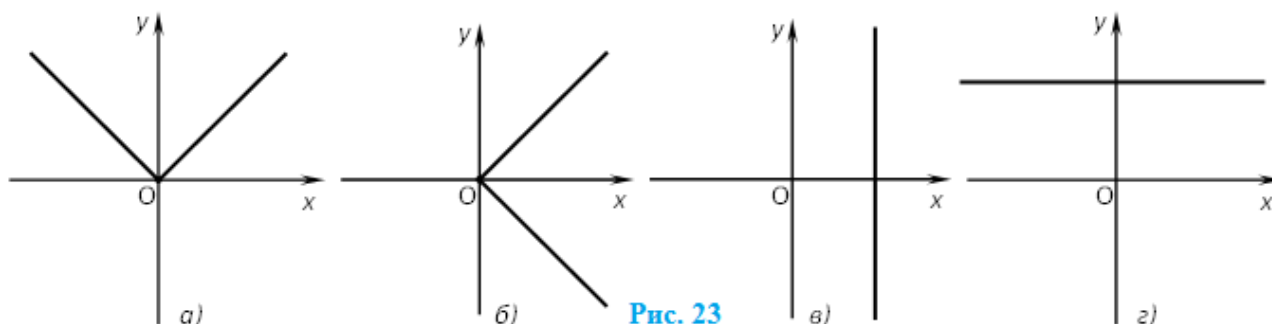


Рис. 23

3. ° Может ли график функции y от x в нескольких точках пересекаться с прямой:
 - а) $y = a$; б) $x = a$?
4. ° Какие из точек $A_1(0; -1)$, $A_2(-1; 1)$, $A_3(1; -1)$ принадлежат графику функции $y = 3x^2 + x - 1$?
5. ° При каких значениях аргумента функция $y = |x|$ принимает значения: а) 2; б) -2?

6. Сколько имеется точек пересечения графика функции $y = \frac{x-2}{x-1}$:

а) с осями координат; б) с прямой $y = -1$; в) с прямой $y = 1$?

7. При каком значении k график функции $y = kx - 2$ проходит через точку с координатами $(-1; 1)$?

8. ° На рисунке 24 задан график функции.

а) Определена ли эта функция в точках $x = -3$; $x = 0$; $x = 4$?

б) Каково значение функции в точке $x = 3$?

в) В каких точках значения функции равняется 4?

г) Принимает ли функция значение 10?

д) Укажите область определения функции.

е) Симметрична ли область определения функции относительно нуля?

ж) Укажите множество значений функции.

9. ° Какие из приведенных пар функций являются парами равных функций:

а) $y = \frac{x}{x}$, $y = 1$; б) $y = x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$, $y = x^2$; в) $y = \frac{x}{|x|}$, $y = \frac{|x|}{x}$;

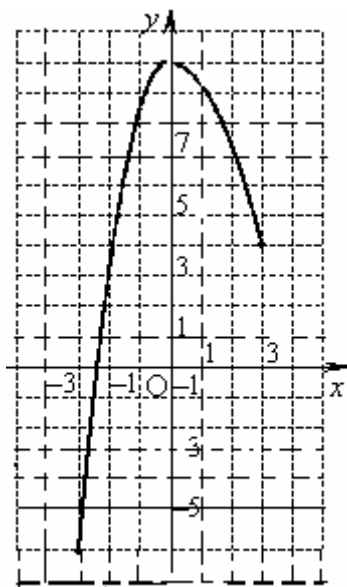


Рис. 24

г) $y = \sqrt{x^2}$, $y = x$; д) $y = (\sqrt{x})^2$, $y = \sqrt{x^2}$; е) $y = \sqrt{x^2}$, $y = |x|$?

10. Может ли множество значений функции, заданной на всей координатной оси, состоять из одной точки?

11. Какова зависимость площади квадрата от его стороны?

Задачи

41. Найдите значения $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$, если функция задана формулой:

$$1) \circ f(x) = 0,5x + 3 - x^2; \quad 2) \circ f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{4-x}}; \quad 3) f(x) = \begin{cases} |2x-1| & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

42. Найдите значения аргумента, при которых функция $y = f(x)$ принимает значение 1:

$$1) \circ f(x) = 0,4x + 3; \quad 2) \circ f(x) = \frac{2x+1}{x-3}; \quad 3) \circ f(x) = x^2 + 5x - 13; \quad 4) f(x) = |x + 2|.$$

43. Найдите область определения функции :

$$1) \circ y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}; \quad 2) \circ y = \frac{x}{1-x^2}; \quad 3) \circ y = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}; \quad 4) \circ y = \sqrt{2x+3};$$

$$5) y = \frac{\sqrt{x+1}}{3x^2+7x-6}; \quad 6) y = \sqrt{2-|x|}; \quad 7) y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x^2}; \quad 8) * y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} + \frac{1}{[x]}.$$

44. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{5x}{x+3} & \text{при } x > -2. \end{cases}$

1) Вычислите $f(-2)$, $f(-3)$, $f(2)$.

2) Найдите нули функции.

3) * При каких значениях аргумента функция принимает значение 3?

4) * Укажите промежутки, на которых функция принимает отрицательные (положительные) значения.

45.* Приведите пример любой аналитически заданной функции, областью определения которой является: 1) множество всех вещественных чисел за исключением -2 и 1 ; 2) промежутков $(-3; 3)$; 3) промежутков $[2; +\infty)$.

46.* Укажите все точки графика функции $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}$, в которых абсцисса равняется ординате.



Упражнения для повторения

47. Какие из следующих пар точек симметричны относительно оси y , относительно начала координат: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(0; 1)$, $B(0; -1)$; 3) $A(1; 2)$, $B(-1; 2)$; 4) $A(1; 2)$, $B(-1; -2)$?

48. Укажите функции, графики которых симметричны относительно оси y , относительно начала координат:

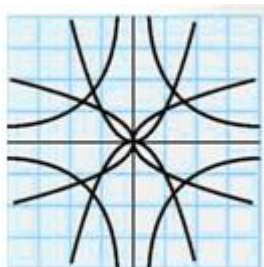
1) $y = x$; 2) $y = -x + 1$; 3) $y = x^2$; 4) $y = x^3$; 5) $y = \frac{1}{x}$; 6) $y = \sqrt{x}$?

49. Докажите, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = \sqrt{x}$.

50. Чему равняется расстояние между точками:

1) $A(x)$ и $B(2)$; 2) $A(a)$ и $B(-3)$; 3) $A(a)$ и $B(b)$; 4) $A(a)$ и $B(-b)$?



§ 4. Основные свойства функций

Изучение реальных процессов часто сводится к исследованию математических зависимостей, описывающих эти процессы. Исследовать функциональную зависимость — значит установить ее характерные особенности. Характерными особенностями функции является, например, ее возрастание или убывание, чётность или нечётность, непрерывность. Рассмотрению этих свойств и посвящен данный параграф.



1. Чётность и нечётность функций

Графики функций имеет очень разнообразный вид. Очевидно, что функции, графики которых изображены на рис. 25, существенно отличаются друг от друга. В этом многообразии существуют графики, симметричные относительно оси y (рис. 25 б).

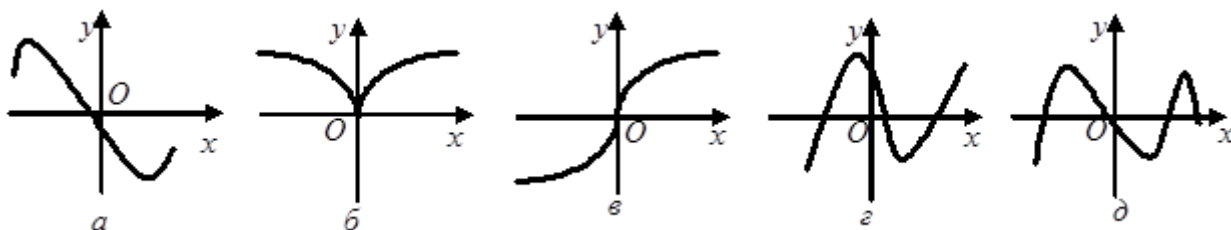


Рис. 25

Функцию, график которой симметричен относительно оси y , называют **чётной**. Если функция $y = f(x)$ является чётной, то ее область определения симметрична относительно начала координат, и в точках x и $-x$, симметричных относительно начала координат, функция принимает одно и то же значение: $f(-x) = f(x)$. Поэтому можно дать следующее определение чётной функции.

Функция $y = f(x)$ называется чётной, если:

- 1) её область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку $-x$;
- 2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:
$$f(-x) = f(x).$$



Из данного определения и предыдущих рассуждений вытекает утверждение:

функция является чётной тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно оси ординат.

График функции на рис. 25 в симметричен относительно начала координат. Такие функции называют **нечётными**. Если функция является нечётной, то ее область определения симметрична относительно начала координат, и в

точках x и $-x$, симметричных относительно начала координат, функция принимает противоположные значения: $f(-x) = -f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если:

- 1) ее область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку $-x$;
- 2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x).$$



Из данного определения и предыдущих рассуждений вытекает утверждение:

функция является нечётной тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно начала координат.

Установление четности или нечётности функции облегчает построение графика, уменьшает объем необходимых исследований: можно исследовать поведение функции и строить ее график только для неотрицательных значений аргумента, а для отрицательных — воспользоваться упомянутой выше симметрией.

Исследования функции на четность или нечётность проводят установлением соответствующих признаков. *Если хотя бы один из этих признаков не выполняется в каждом из этих определений, то функция не является ни чётной, ни нечётной.*

Пример 1. Исследовать на четность и нечётность функцию:

$$1) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}; \quad 2) f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 3}; \quad 3) f(x) = \frac{x^3}{x - 3}; \quad 4) f(x) = x^2 + x.$$

□ 1) Проверим, является ли симметричной относительно начала координат область определения функции. Область определения функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

содержит все действительные числа, отличные от $\pm\sqrt{3}$, то есть она симметрична относительно начала координат. Найдем выражение для $f(-x)$:

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = -\frac{x^3}{x^2 - 3} = -f(x)$. Следовательно, $f(x) = -f(x)$, и $f(x)$ — нечётная функция.

2) Область определения функции $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 3}$ совпадает с областью определения функции из предыдущего задания. Имеет место равенство:

$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2 - 3} = \frac{x^4}{x^2 - 3} = f(x)$. Поэтому данная функция является чётной.

3) Функция $f(x) = \frac{x^3}{x - 3}$ не является ни чётной, ни нечётной, поскольку ее область определения не симметрична относительно начала координат: точка $x = -3$ входит в область определения, а точка $x = 3$ — не входит.

4) Функция $f(x) = x^2 + x$ не является ни чётной, ни нечётной. Ее область определения симметрична относительно начала координат, но в симметричных точках 1 и -1 она принимает значения 2 и 0, которые не являются ни равными,

ни противоположными числами. Поэтому не выполняется ни равенство $f(-x) = f(x)$, ни равенство $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения. ■



В исследованиях функций полезными являются следующие свойства чётных и нечётных функций.

Свойство 1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются чётными, то функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ являются также чётными.

Например, функция $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ является чётной. Чётной является также функция $y = x^2 - 1$. Следовательно, и функция $y = \frac{x^4}{x^2 - 1} + x^2 - 1$ также является чётной.

Свойство 2. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются нечётными, то функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ являются также нечётными, а функции $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ — чётными.

Свойство 3. Если одна из функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$ является чётной, а другая — нечётной, то функции $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ — нечётны.

Доказательство свойства 1 основывается на том, что из равенств $f(-x) = f(x)$ и $g(-x) = g(x)$ вытекают соответствующие равенства для функций, образованных из функций $f(x)$ и $g(x)$ с помощью арифметических операций:

$$y(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = y(x);$$

$$y(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) = y(x);$$

$$y(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = y(x);$$

$$y(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = y(x).$$

Осталось лишь отметить, что области определения образованных функций симметричны относительно начала координат. Это вытекает из симметричности областей определения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Доказательство свойств 2 и 3 проводится аналогично.

Контрольные вопросы



1.° Какие координаты имеет точка, симметричная точке $(3; -2)$ относительно: а) оси y ; б) начала координат?

2. Как расположены на координатной плоскости точки: а) $(x; y)$ и $(-x; y)$; б) $(x; y)$ и $(-x; -y)$?

3°. Какие из функций, графики которых изображены на рис. 26, а) – г), могут быть: а) чётными; б) нечётными?

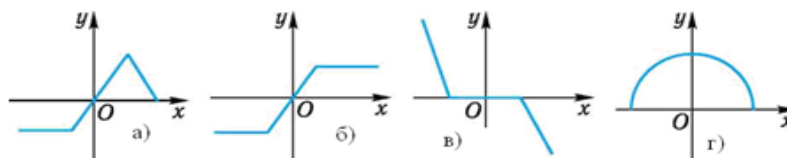


Рис. 26

4°. Графики каких функций симметричны относительно оси y :

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^3$; г) $y = |x|$; д) $y = 1$; е) $y = \frac{x-1}{x-1}$?

5°. Графики каких функций симметричны относительно начала координат:

а) $y = 3x$; б) $y = x^2 + 1$; в) $y = x^3$; г) $y = \frac{|x|}{x}$?

6. Известно, что функция $y = f(x)$ является чётной и $f(2) = 1$. Чему равняется $f(-2)$?

7. Известно, что функция $y = f(x)$ является нечётной и $f(-3) = 2$. Чему равняется $f(3)$?

8. Областью определения чётной функции является промежуток $[a; b]$. Какая существует связь между числами a и b ?

9. Известно, что функция $y = f(x)$ является нечётной и точка $x = 0$ принадлежит ее области определения. Чему равняется значение функции в этой точке?

10*. Существуют ли функции, которые одновременно являются и чётными, и нечётными?

2. Убывание и возрастание функций



Рассмотрим функции, графики которых изображены на рис.

27. Характерной особенностью этих функций является то, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Такие функции называют **возрастающими**.

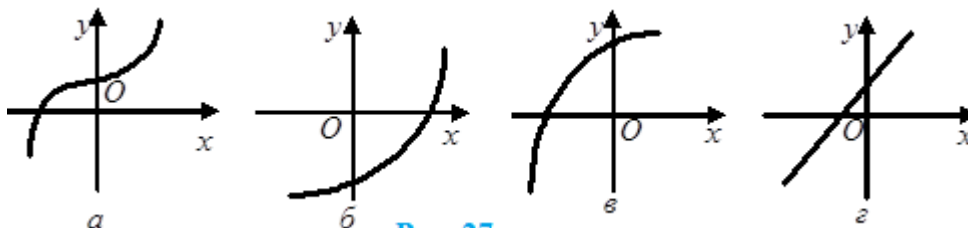


Рис. 27

Возрастающие функции описывают процессы и явления, в которых зависимая величина увеличивается с ростом независимой. Например, температура воды при нагревании повышается с течением времени до момента кипения. Также увеличивается со временем скорость тела при свободном падении до момента падения.

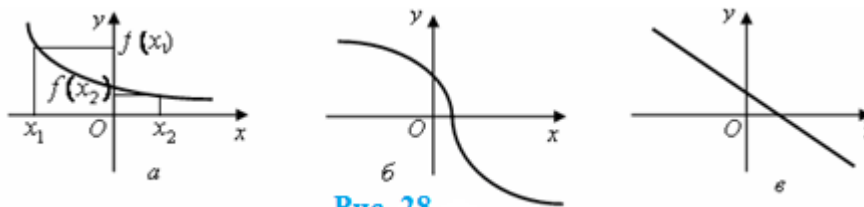


Рис. 28

Если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то такую функцию называют **убывающей** (рис. 28).

Процессы и явления, в которых зависимая величина уменьшается с ростом независимой, описываются убывающими функциями. Например, уменьшается атмосферное давление при увеличении высоты над уровнем моря, скорость тела при торможении.

Возрастающие или убывающие функции называют **монотонными**.

Монотонный — по гречески $\mu\upsilon\upsilon\omicron\tau\omicron\nu\omicron\varsigma$ (monotonos), от $\mu\upsilon\upsilon\omicron\varsigma$ (monos) — один, и $\tau\omicron\nu\omicron\varsigma$ (tonos) — натяжение, напряжение — один, единый, монотонный, однообразный.

Во многих случаях зависимая величина то увеличивается, то уменьшается с ростом независимой. Рассмотрим график функции на рис. 29. Очевидно, что эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей. Но на промежутке $[-1; 2]$ функция возрастает.

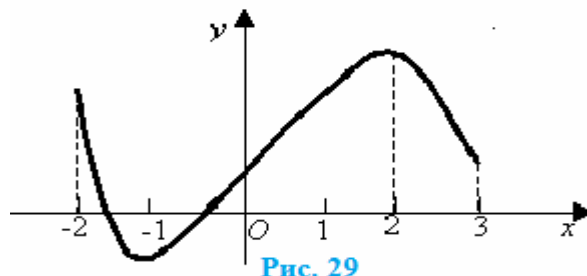


Рис. 29

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если для произвольных точек этого промежутка x_1 и x_2 , таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на некотором промежутке, если для произвольных точек этого промежутка x_1 и x_2 , таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На каждом из промежутков $[-2; -1]$ и $[2; 3]$ рассматриваемая функция убывает.

Возрастание функции $y = f(x)$ на промежутке $[a; b]$ иногда символично записывают так: $f(x) \nearrow x \in [a; b]$, а убывание: $f(x) \searrow x \in [a; b]$.

Установление промежутков, на которых функция возрастает или убывает, является важным заданием в исследовании этой функции. Это задание называют **нахождением промежутков монотонности функции**. Для функций, заданных графически, оно решается достаточно легко. Для функций, заданных аналитически, его решение иногда требует значительных усилий.



Чтобы узнать, является ли функция $y = f(x)$ монотонной на некотором промежутке, можно действовать по такой схеме:

1) взять такие произвольные точки x_1 и x_2 этого промежутка, что $x_1 < x_2$;

2) рассмотреть разность $f(x_2) - f(x_1)$ и выяснить, положительна она, или отрицательна на этом промежутке;

3) если $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$, то функция $y = f(x)$ возрастает на рассматриваемом промежутке; если $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то функция убывает на нем.

Пример 2. Доказать, что функция $y = kx + b$ при $k > 0$ возрастающая, а при $k < 0$ — убывающая.

□ Областью определения данной функции $y = f(x)$ является числовая прямая. Возьмем такие произвольные точки x_1 и x_2 , что $x_1 < x_2$, то есть $x_2 - x_1 > 0$. Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$. Установим знак этой разности.

Если $k > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, так как $x_2 - x_1 > 0$. Если же $k < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$, потому что $x_2 - x_1 > 0$. Таким образом, если $k > 0$, то функция $y = kx + b$ возрастает, если же $k < 0$, то эта функция убывает. ■

Пример 3. Доказать, что функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

□ Возьмем такие произвольные точки x_1 и x_2 из этого промежутка, что $x_1 < x_2$. Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$, ибо $x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + x_1 < 0$ по условию. Поэтому $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. ■

Находить промежутки монотонности функции часто помогают следующие утверждения, которые нетрудно доказать, пользуясь определением монотонности и свойствами числовых неравенств.

Свойство 1. Если функция $y = f(x)$ является чётной и возрастает на промежутке $[a; b]$, $a > 0$, то она убывает на промежутке $[-b; -a]$. И наоборот, если функция $y = f(x)$ является чётной и убывает на промежутке $[a; b]$, $a > 0$, то она возрастает на промежутке $[-b; -a]$. Для нечётных функций возрастание на промежутке $[a; b]$, $a > 0$, обуславливает возрастание на промежутке $[-b; -a]$.

Например, в предыдущем примере доказано, что функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. Поскольку она чётная, то она возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Свойство 2. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то функция $y = f(x) + c$, где c — некоторое число, также возрастает (убывает) на этом промежутке.

Свойство 3. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то функция $y = cf(x)$, где c — некоторое положительное число, также возрастает (убывает) на этом промежутке.

Свойство 4. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастают (убывают) на некотором промежутке, то функция $y = f(x) + g(x)$ также возрастает (убывает) на этом промежутке.

Докажем, например, свойство 3.

□ Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на некотором промежутке и $c > 0$ — некоторое число. Возьмем из указанного промежутка произвольные точки x_1 и x_2 , такие, что $x_1 < x_2$. Согласно определению возрастающей на промежутке функции имеем: $f(x_2) > f(x_1)$. Умножив обе части последнего неравенства на положительное число c , будем иметь: $cf(x_2) > cf(x_1)$. Из полученного неравенства на основании определения возрастающей функции вытекает, что функция $y = cf(x)$ возрастает на рассматриваемом промежутке. ■

Из свойства 4 вытекает, что функция $y = x^2 + x + 1$ возрастает на промежутке $[0; \infty)$, поскольку обе функции $y = x^2$ и $y = x + 1$ возрастают на этом промежутке.

Обобщением понятий возрастающей и убывающей функции являются понятия неубывающей и невозрастающей функций. Они возникают для описания процессов, которые графически изображены на рис. 30. Так, неубывающей является функция, которая описывает процесс нагревания воды: сначала температура повышается, а потом при парообразовании остается неизменной (рис. 30а). Зависимость пути от времени, если тело движется с остановками, также является неубывающей функцией (черт. 30 б).

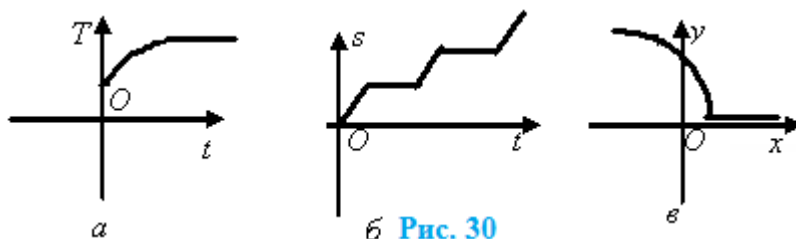


Рис. 30

Функция $y = f(x)$ называется неубывающей на промежутке, если для произвольных точек этого промежутка x_1 и x_2 , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется невозрастающей на промежутке, если для произвольных точек этого промежутка x_1 и x_2 , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.



График невозрастающей функции изображен на рис. 30 в.

Выше мы определили монотонность функции на некотором промежутке. Но существуют функции, областью определения которых являются произвольные числовые множества, например, объединения промежутков или даже множество натуральных чисел (числовые последовательности). Естественно возникает вопрос о возрастании или убывании этих функций в их областях определения.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве X , если для произвольных точек этого множества x_1 и x_2 , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множестве X , если для произвольных точек этого множества x_1 и x_2 , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Например, числовая последовательность $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ является убывающей функцией. Действительно, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $x_{n+1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно вышеприведенному определению последовательность $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ убывает.

В то же время функция $y = \frac{1}{x}$ не является убывающей в своей области определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Сравним, например, значения этой функции в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$: $y(1) = 1 > y(-1) = -1$, то есть большему значению аргу-

мента соответствует большее значение функции. Однако, она убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Вообще, возрастание (убывание) функции на промежутках $[a; c]$ и $[c; b]$ не гарантирует возрастание (убывание) функции на промежутке $[a; b]$. Например, функция, график которой изображен на рис. 22, возрастает на каждом из промежутков $[-1; 0]$ и $[0; 1]$, но не возрастает на промежутке $[-1; 1]$.

Но если функция возрастает (убывает) на некотором промежутке, то она возрастает (убывает) на любом его подмножестве (докажите это самостоятельно).



Контрольные вопросы

1. ° Какая из функций, графики которых изображены на рис. 31, а) - г), является: 1) возрастающей; 2) убывающей?

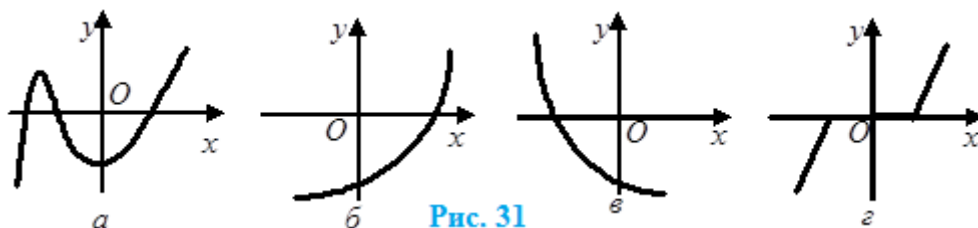


Рис. 31

2. ° Какие из функций, графики которых изображены на рис. 32, а)-г), возрастают на промежутке $[0; 1]$?

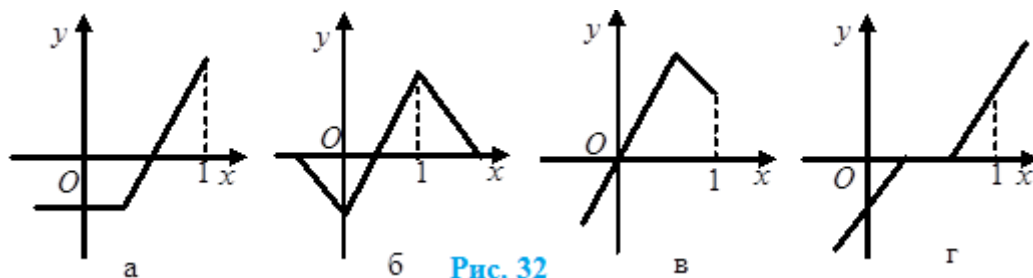


Рис. 32

3. Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[-2; 2]$. Сравните, если это возможно, числа $f(-0,5)$ и $f(-1)$.

4. ° Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[-3; 3]$. Сравните числа $f(-2)$ и $f(2)$.

5. Известно, что $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$. Может ли функция $y = f(x)$ быть монотонной в своей области определения?

6. Функция $y = f(x)$ является чётной и возрастает на промежутке $[1; 2]$. Возрастает ли она на промежутке $[-2; -1]$?

7. Функция $y = f(x)$ является чётной и возрастает на промежутке $[0; 3]$. Можно ли сравнить числа $f(-3)$ и $f(2)$?

8. Функция $y = f(x)$ является нечётной и убывает на промежутке $[-2; -1]$. Является ли она убывающей на промежутке $[1; 2]$?

9. Функция $y = f(x)$ является нечётной и возрастает на промежутке $[-3; 0]$. Сравните, если это возможно, числа $f(-2)$ и $f(3)$.

10. Может ли возрастающая функция быть: а) чётной; б) нечётной?

11. * Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Каким свойством обладает последовательность $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$?

12. * Функция возрастает на каждом из промежутков а) $[-1; 0]$ и $[0; 1]$; б) $[-1; 0]$ и $[0; 1]$. Обязательно ли она возрастает на промежутке $[-1; 1]$?

3. Непрерывность и точки разрыва функций



Познакомимся еще с одним важным свойством функции — **непрерывностью**. Этим свойством мы уже неоднократно пользовались. Так, иногда при построении графика функции мы находили несколько его точек и соединяли их линией. Аналогично действуют, когда строят график функции, пользуясь таблицей ее значений. Возникает вопрос, всегда ли можно так делать. Оказывается, что в первую очередь это зависит от того, будет ли функция **непрерывной** или **разрывной**.

Рассмотрим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, изображенные на рис. 33 и 34.

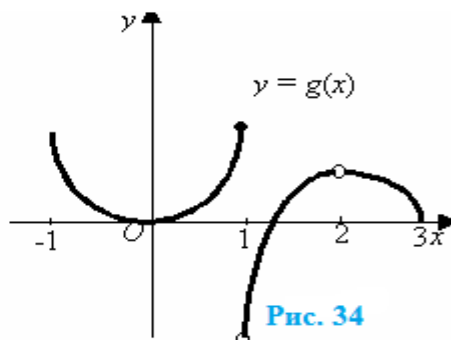
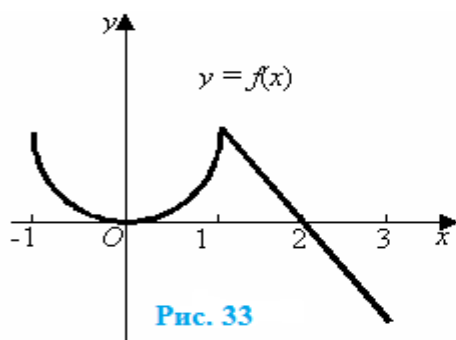


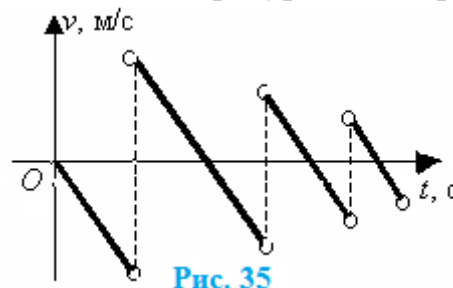
График функции $y = f(x)$ является неразрывной линией, то есть такой, которую можно начертить, не отрывая карандаша от листа бумаги. График функции $y = g(x)$ таким свойством не обладает.

Если функция задана на некотором промежутке, и ее график на нем является неразрывной линией, то функцию называют **непрерывной** на этом промежутке.

Функция $y = f(x)$ (рис. 33) непрерывна на промежутке $[-1; 3]$, а о функции $y = g(x)$ (рис. 34) говорят, что точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ являются её **точками разрыва**.

Непрерывная функция описывает процессы, происходящие плавно, без «прыжков», то есть когда исследуемая величина за малый промежуток времени изменяется мало. Именно так в обычных условиях изменяется длина пути, пройденного телом, скорость механического движения, температура тела при охлаждении.

! Однако существуют процессы, в которых исследуемая величина меняется прыжками, например, скорость мяча, который падает на пол и упруго отскакивает от него. При подсакиваниях от пола изменяется направление движения, а следова-



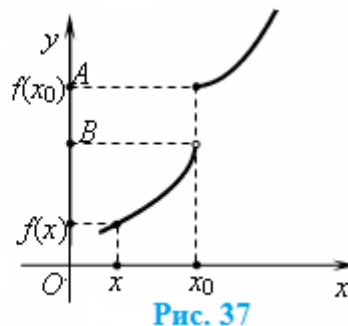
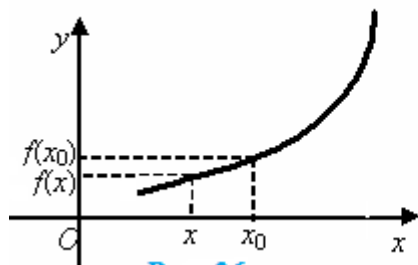
тельно, и направление, и величина его скорости. На рис. 35 изображен график зависимости скорости мяча $v = v(t)$ от времени t . Функция $v = v(t)$ имеет разрывы в моменты времени, когда мяч отскакивает от пола.



По графику функции легко определить, является ли она непрерывной. Однако, часто придется иметь дело с функциями, заданными аналитически. Поэтому мы сейчас дадим свойству непрерывности аналитическую характеристику.

Пусть необходимо вычислить значение функции $f(x) = 10x - 7$ в точке $x_0 = \pi$. Для этого заменим π его десятичными приближениями: $x_1 = 3$; $x_2 = 3,1$; $x_3 = 3,14$; ..., а значение функции в точке $x_0 = \pi$ — ее значениями в точках $x_1, x_2, x_3, \dots$. Допущенная в начальных данных погрешность $|\pi - x_n|$ приводит к некоторой погрешности $|f(\pi) - f(x_n)|$ в значениях функции. Оценим эту погрешность: $|f(x_n) - f(\pi)| = |10x_n - 7 - 10\pi + 7| = 10|x_n - \pi|$. Это равенство показывает, что если x_n — десятичное приближение числа π с точностью до 10^{-n} , то $f(x_n) \approx f(\pi)$ с точностью до 10^{-n+1} . Таким образом, допущенную погрешность $|f(x_n) - f(\pi)|$ можно сделать как угодно малой, если n взять достаточно большим, то есть x_n взять достаточно близким к π . Это свойство является характерным для всех непрерывных функций.

Если функция непрерывна на промежутке, то для произвольной точки x_0 из этого промежутка расстояние между точками $f(x)$ и $f(x_0)$ можно сделать как угодно малым, если x брать достаточно близким к x_0 (рис. 36). Фраза «расстоя-



ние между точками $f(x)$ и $f(x_0)$ можно сделать как угодно малым» означает, что его можно сделать меньше любого заданного положительного числа, если x брать достаточно близким к x_0 . Следовательно, малое изменение значений аргумента приводит к малому изменению значений функции в точке x_0 .

Этим свойством не обладают функции, у которых есть разрыв в точке x_0 . Рассмотрим, например, график функции, изображенный на рис. 37. Как бы близко влево от x_0 мы не брали x , расстояние между точками $f(x)$ и $f(x_0)$ будет больше, чем расстояние между точками A и B .

Поскольку расстояние между точками x и x_0 равняется $|x - x_0|$, а расстояние между точками $f(x)$ и $f(x_0)$ равняется $|f(x) - f(x_0)|$, то свойство непрерывности функции в точке x_0 можно сформулировать следующим образом.

Функция $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0 , если величину $|f(x) - f(x_0)|$ можно сделать меньше любого положительного числа для всех

значений x , достаточно близких к x_0 , то есть таких, для которых величина $|x - x_0|$ достаточно мала. Функция, непрерывная в каждой точке промежутка, является непрерывной на этом промежутке.

Пример 4. Доказать, что произвольная линейная функция $f(x) = kx + b$ непрерывна в произвольной точке x_0 .

□ Действительно, $|f(x) - f(x_0)| = |kx + b - kx_0 - b| = k|x - x_0|$. Отсюда вытекает, что величину $|f(x) - f(x_0)|$ можно сделать как угодно малой, если x брать достаточно близким к x_0 , то есть когда величина $|x - x_0|$ является достаточно малой. ■

Непрерывные функции обладают следующим свойством.

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то в этой точке непрерывны и функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, последняя — при условии, что $g(x_0) \neq 0$.

Отсюда вытекает, что функция $y = x^2$ является непрерывной, как произведение двух непрерывных функций $f(x) = x$ и $g(x) = x$. Аналогично можно доказать, что непрерывной функцией является многочлен произвольной степени.



Поведение функций в окрестности точек разрыва может существенно отличаться. Во-первых, точка разрыва может принадлежать области определения функции, а может и не принадлежать.

Так, функция $y = g(x)$, график которой изображен на рис. 34, определена в точке разрыва $x_1 = 1$ и не определена в точке разрыва $x_2 = 2$. Во-вторых, функция в точке разрыва может иметь конечный прыжок (рис. 37), а может иметь "бесконечный" прыжок (рис. 38 - 39). В последнем случае графики функций приближаются как угодно близко к прямой $x = x_0$, которую называют *вертикальной асимптотой графика*.

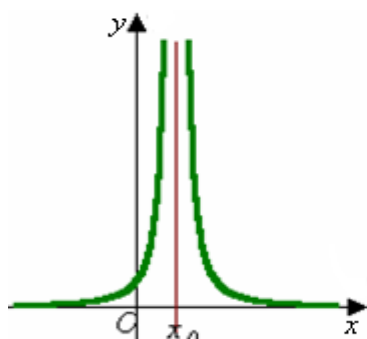


Рис. 38

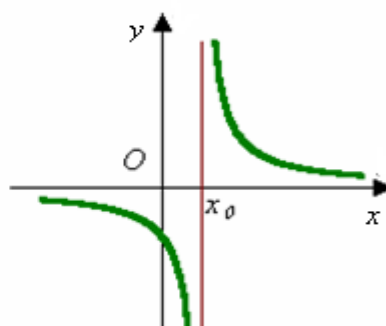


Рис. 39

Непрерывные функции обладают свойствами, которые достаточно часто используют при решении и исследовании уравнений.

Пусть функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения с разными знаками. Тогда график этой функции является непрерывной кривой, которая соединяет

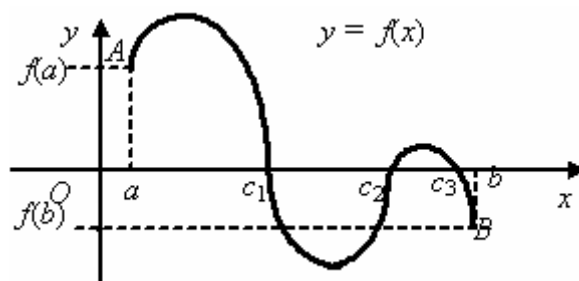


Рис. 40

точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Одна из этих точек лежит выше оси x , вторая — ниже (рис. 40). Следовательно, в какой-то точке кривая должна пересечь ось абсцисс. Поэтому существует, по крайней мере, одна точка c на интервале $(a; b)$ такая, что $f(c) = 0$. Это утверждение составляет содержание теоремы **Больцано - Коши**.

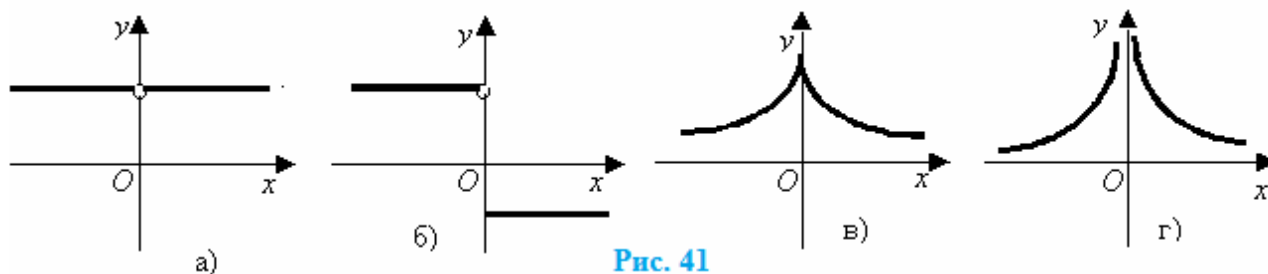
Т е о р е м а. Если непрерывная на некотором отрезке функция принимает на его концах значения с разными знаками, то на этом отрезке найдется, по крайней мере, одна точка, в которой данная функция равняется нулю.

Эта теорема помогает выделить промежутки, которые содержат корни уравнения. Например, уравнение $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$ имеет на промежутке $[0; 1]$, по крайней мере, один корень, поскольку функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ является непрерывной, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 4 > 0$.



Контрольные вопросы

1. Какие из функций, графики которых изображены на рис. 41, являются непрерывными?

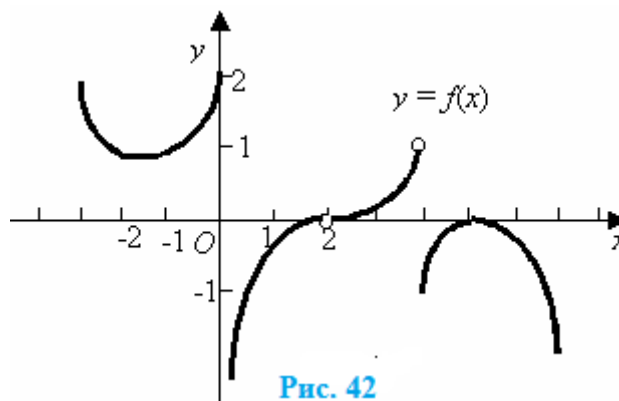


2. На рис. 42 изображен график функции $y = f(x)$.

а) Какие точки являются точками разрыва этой функции?

б) Чему равняются значения функции в тех точках разрыва, которые входят в область определения функции?

в) * Имеет ли график функции вертикальные асимптоты?



3. Если функция непрерывна в точке x_0 , то обязательно ли она определена в этой точке?

4. * Обязательно ли функция не определена в своей точке разрыва?

5. * Может ли непрерывная функция, изменяющая знак на некотором промежутке, не иметь нулей на этом промежутке?

6. * Обязательно ли функция, изменяющая знак на некотором промежутке, имеет нули на этом промежутке?

4. Чтение графиков функций



Если функция задана графически, то нетрудно установить ее основные свойства, в частности такие:

- 1) область определения;
- 2) четность, нечетность функции;
- 3) нули функции;
- 4) промежутки знакопостоянства;
- 5) промежутки возрастания и убывания функции;
- 6) наибольшее и наименьшее значения функции;
- 7) множество значений функции;
- 8) непрерывность функции.

Описание свойств функции по ее графику обычно называют «**чтением графика**».

Пример 5. На рис. 43 задан график функции $y = f(x)$. Установить ее основные свойства.

□ Ниже в таблице 10 представлены результаты анализа графика функции, изображенного на рис. 43, по приведенной схеме.

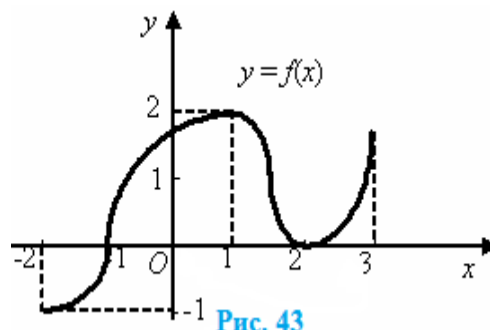


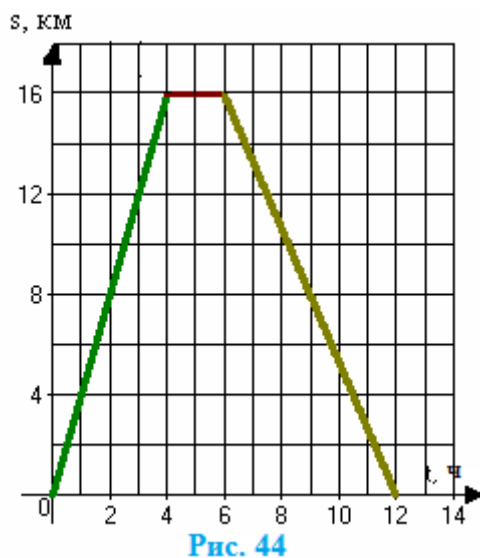
Таблица 10

№	Свойства функции	Графическая интерпретация	Результаты анализа
1.	Область определения	Проекция графика на ось x	$D(f) = [-2; 3]$.
2.	Четность, нечетность функции	Симметрия графика относительно оси y или начала координат	Функция не является ни четной, ни нечетной.
3.	Нули функции	Точки пересечения графика с осью x	$x_1 = -1, x_2 = 2$.
4.	Промежутки знакопостоянства функции	Промежутки на оси x , соответствующие точкам графика, лежащим выше (ниже) оси x	$f(x) > 0$ на множестве $(-1; 2) \cup (2; 3)$; $f(x) < 0$ на промежутке $(-2; -1)$.
5.	Промежутки монотонности функции (промежутки возрастания и убывания)	Промежутки на оси x , на которых большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции	$f(x)$ возрастает на промежутках $[-2; 1], [2; 3]$; $f(x)$ убывает на промежутке $[1; 2]$.
6.	Наибольшее и наименьшее значения функции	Ординаты наивысшей и наинизшей точек графика	$f(x)$ принимает наибольшее значение, равное 2, в точке $x = 1$; $f(x)$ принимает наименьшее значение, равное -1, в точке $x = -2$.
7.	Множество значений функции	Проекция графика на ось y	$E(f) = [-1; 2]$.
8.	Непрерывность функции	Неразрывность графика	Функция непрерывна в своей области определения.

При чтении графиков зависимостей величин необходимо сначала перевести условие задания на математический язык, потом установить соответствующие свойства графика и, наконец, сформулировать ответы.

Пример 6. На рис. 44 изображен график движения пешехода из пункта А в пункт В и назад.

- 1) ° Сколько часов длилось путешествие?
- 2) ° Сколько часов двигался пешеход?
- 3) ° Сколько часов понадобилось пешеходу, чтобы преодолеть путь от А до В и сколько — от В до А?
- 4) ° Каково расстояние между А и В?
- 5) ° С какой скоростью двигался пешеход из А в В и с какой из В в А?



6) Задайте аналитически закон его движения, то есть зависимость расстояния от А от времени на каждом промежутке времени: $0 \leq t \leq 4$; $4 \leq t \leq 6$; $6 \leq t \leq 12$.

□ 1) Длительность путешествия равняется длине промежутка, являющегося областью определения функции, график которой изображен на рис., то есть 12 часам.

2) Пешеход двигался с 0 ч до 4 ч и с 6 ч до 12 ч, то есть всего 10 часов.

3) Из А в В пешеход двигался 4 часа и из В в А — 6 часов.

4) Расстояние между В и А равняется длине промежутка, являющегося множеством значений соответствующей функции, то есть 16 км.

5) Пешеход двигался равномерно, путь от А к В, составляющий 16 км, он преодолел за 4 часа, поэтому он двигался со скоростью $v_1 = \frac{16}{4} = 4$ км / ч; из В в

А он двигался со скоростью $v_2 = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$ км / ч.

6) На промежутке $[0; 4]$ имеем линейную зависимость с угловым коэффициентом, равным 4; на промежутке $[6; 12]$ линейную функцию можно восстановить по точкам с координатами $(6; 16)$ и $(12; 0)$. Следовательно, $s = 4t$ при $0 \leq t \leq 4$; $s = 16$ при $4 \leq t \leq 6$; $s = -\frac{8}{3}t + 32$ при $6 \leq t \leq 12$. ■

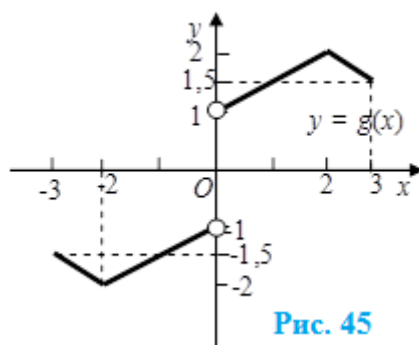


Несколько сложнее читать график функции, имеющей точки разрыва.

Пример 7. На рис. 45 изображен график функции $y = g(x)$.

1. Указать характерные свойства этой функции.

2. * Указать все значения параметра a , при которых уравнение $g(x) = a$ имеет ровно один ко-



рень.

□ 1. 1) $D(g) = [-3; 0) \cup (0; 3]$.

2) $y = g(x)$ — нечётная функция, потому что ее график симметричен относительно начала координат.

3) Функция не имеет нулей.

4) $g(x) > 0$ на промежутке $(0; 3]$ и $g(x) < 0$ на промежутке $[-3; 0)$.

5) Функция возрастает на промежутках $[-2; 0)$, $(0; 2]$ и убывает на промежутках $[-3; -2]$, $[2; 3]$.

6) Наименьшее значение функции равняется -2 , наибольшее — 2 .

7) $E(g) = [-2; -1) \cup (1; 2]$.

8) Функция непрерывна на промежутках $[-3; 0)$ и $(0; 3]$, $x = 0$ — ее точка разрыва, в которой функция не определена.

2. Пересечём график функции $y = g(x)$ прямыми $y = a$ и отследим, при каких значениях a графики пересекаются ровно в одной точке. Это произойдёт, если $a = -2$, $-1,5 < a < -1$, $1 < a < 1,5$, $a = 2$. При этих значениях a уравнение имеет ровно один корень. ■



Контрольные вопросы

1. ° Как можно найти по графику функции ее область определения? Множество ее значений?
2. ° Какова геометрическая интерпретация нулей функции?
3. ° Каким свойством обладает функция, если ее график лежит в верхней координатной полуплоскости?
4. ° Как по графику определить, является ли функция на данном промежутке возрастающей (убывающей)?
5. ° Какую особенность имеет график функции, если она является чётной (нечётной)?
6. Обязательно ли функция изменяет свой знак, если она имеет нули?

ЗАДАЧИ

51. ° Докажите, что:

1) функция $y = x^4 - x^2 + 1$ является чётной;

2) функция $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ является нечётной;

3) функция $y = x^2 + x - 1$ не является ни чётной, ни нечётной.

52. Выясните, является ли чётной или же нечётной функция:

1) ° $y = 1$; 2) ° $y = 2x - 1$; 3) ° $y = x^2 - 3$; 4) ° $y = x^2 + (x+1)^2$; 5) ° $y = |x| - x$;

6) ° $y = \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}$; 7) ° $y = 4x^3 + x$; 8) ° $y = 4x^3 + x - 1$;

9) ° $y = |x| - x^2 + 0,5$; 10) $y = |2x - 1| + |2x + 1|$;

11) $y = \frac{x-1}{x-1}$; 12) $y = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$; 13) $y = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$; 14) $y = \frac{x}{x^4 + x + 1}$.

53. ⁰ На рис. 46 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите:

- 1) область ее определения;
- 2) множество ее значений;
- 3) нули функции и промежутки знакопостоянства;
- 4) промежутки возрастания, убывания функции.

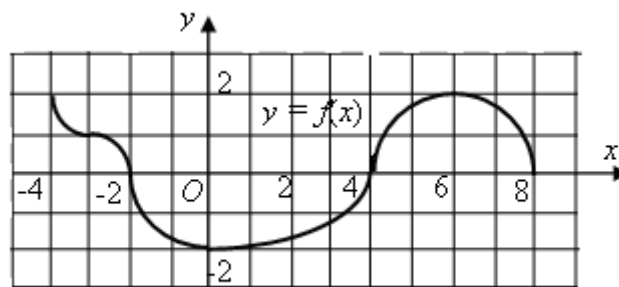


Рис. 46

54. ⁰ На рис. 47 изображена зависимость электрической проводимости раствора $\frac{1}{R}$ при данной температуре от процентного содержания K фосфорной кислоты в растворе.

- 1) При какой концентрации раствора его электрическая проводимость возрастает, а при какой — убывает?

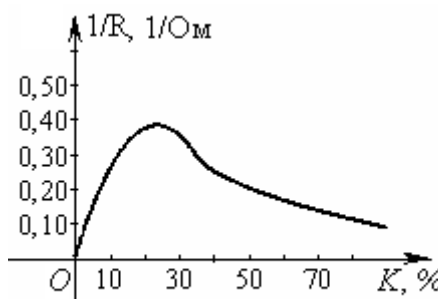


Рис. 47

- 2) Какова наибольшая электрическая проводимость?

55. Постройте график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям:

- 1) $^\circ$ функция определена и возрастает на промежутке $[-2; 0]$, $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$;
- 2) $^\circ$ функция возрастает на промежутке $[1; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$;
- 3) функция чётная и возрастает на промежутке $[-1; 0]$;
- 4) функция нечётная и убывающая.

56. Докажите, пользуясь определением, что функция возрастает:

- 1) $y = 5x + 1$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = x^2, x \geq 0$.

57. * Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 48). Достройте каждый из них (если это возможно) до графика: а) чётной функции; б) нечётной функции.

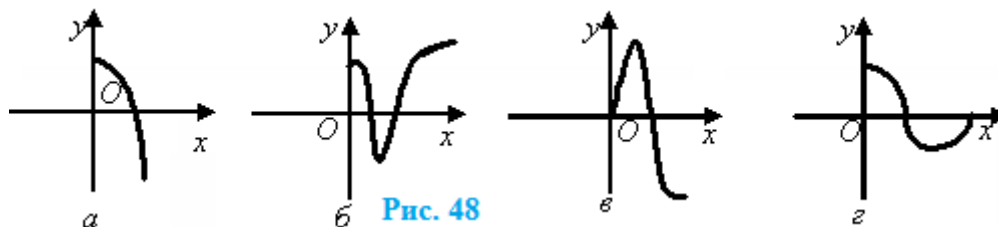


Рис. 48

58. Исследуйте на монотонность функцию:

- 1) $y = x^3 - 1$; 2) $y = \frac{1}{x} + 1, x > 0$; 3) $y = x^3 + x - 1$; 4) * $y = x^2 + \sqrt{x}$.

59. * Докажите, что последовательность $x_n = \frac{6-n}{5n-1}$ убывает.

60. Исследуйте функцию, график которой изображен на рис.:

1) ° 49; 2) ° 50; 3) ° 51; 4) 52; 5) 53.

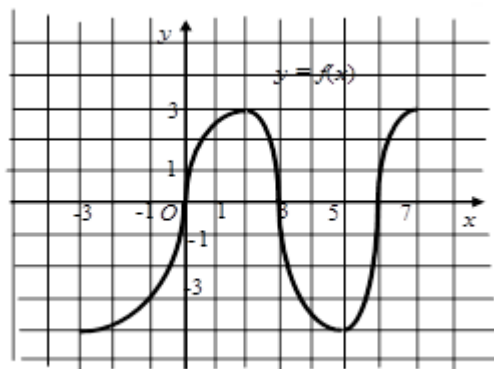


Рис. 49

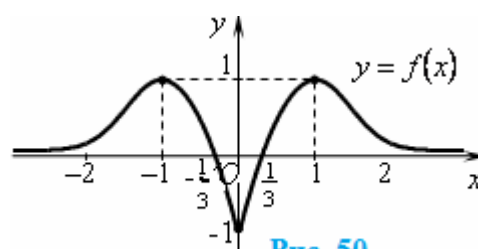


Рис. 50

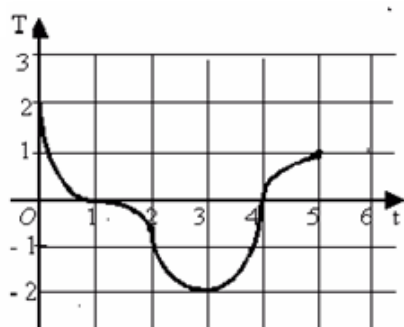


Рис. 51

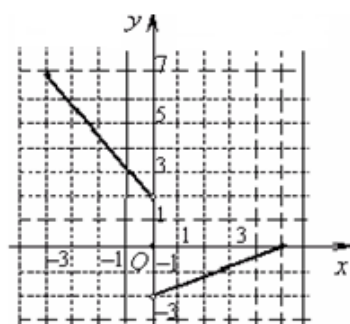


Рис. 52

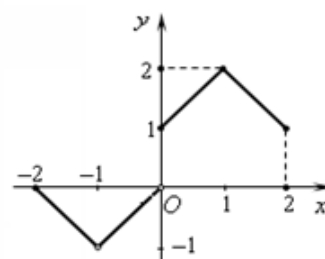


Рис. 53

61. Графики функций на рис. 54 разбиты на классы: {а; в}, {б, е}, {г, д}. Какие свойства соответствующих функций положены в основу классификации?

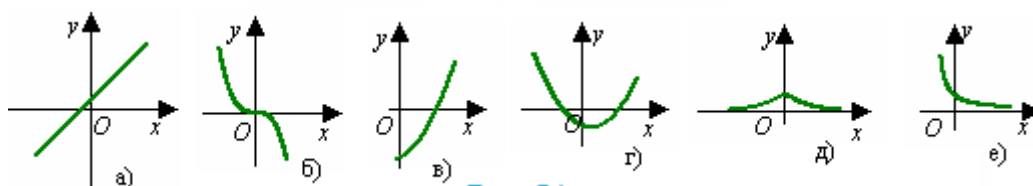


Рис. 54

62. * Для каждого из графиков, изображенных на рис. 55 - 57, выберите соответствующую функцию из приведенных: 1) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; 2) $y = x(x - 2)^2$; 3) $y = x^4 - x^2$.

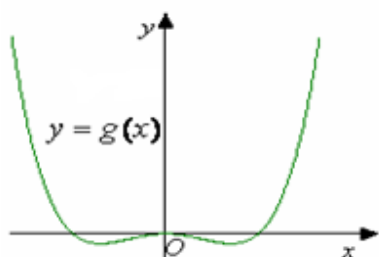


Рис. 55

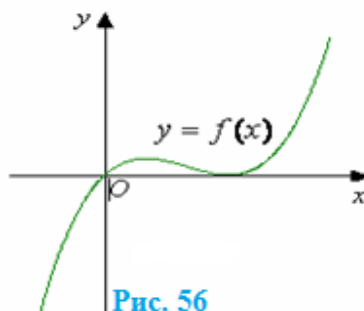


Рис. 56

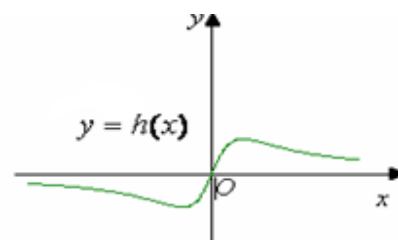


Рис. 57

$x^4 - x^2$.



Упражнения для повторения

63. Даны функции:

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = \frac{x}{2} + 1$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{10x - 7}{5}$; 5) $y = x^2 - 3$.

а) Какие из них являются линейными, квадратичными, обратными пропорциональностями?

б) Для каждой линейной функции укажите ее угловой коэффициент.

в) Как направлены ветки квадратичной функции?

г) Имеет ли квадратичная функция нули?

64. Для каждой из функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{x^3}{x}$; 3) $y = \sqrt{x^2}$; 4) $y = \frac{x}{x}$; 5) $y = \frac{|x|}{x}$; 6) $y = (\sqrt{x})^2$

укажите соответствующий ей график на рис. 58 а) - е).

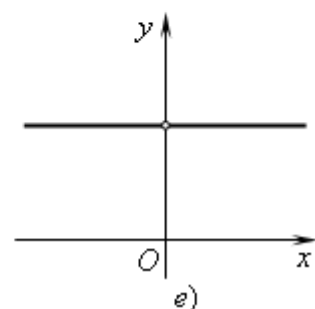
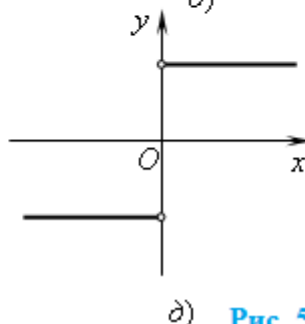
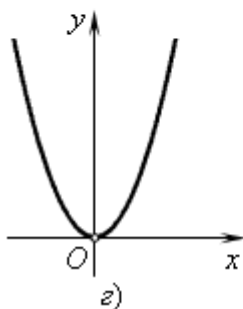
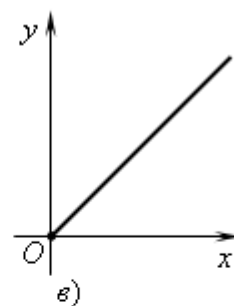
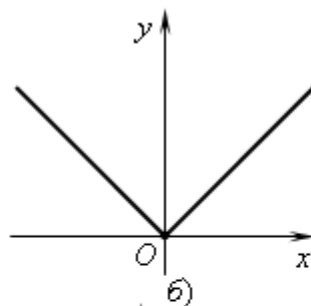
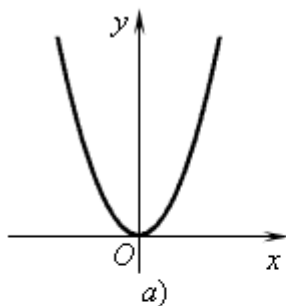
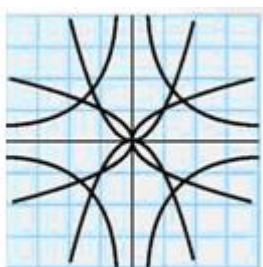


Рис. 58



§ 5. Простейшие функциональные зависимости, их свойства и графики

В данном параграфе приведен обзор некоторых основных функций, которые изучались раньше, их свойств и графиков.

1. Линейная функция



Простейшим и очень важным в математике и ее приложениях является класс линейных функций.

Линейной называется функция, имеющая вид $y = kx + b$, где k, b — некоторые числа.

Известно, что графиком линейной функции является прямая.

Коэффициент k равняется тангенсу угла наклона прямой $y = kx + b$ к оси x и называется ее угловым коэффициентом.

Если $k = \operatorname{tg} \varphi > 0$, то $0^\circ < \varphi < 90^\circ$. Следовательно, угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x является острым, и функция $y = kx + b$ возрастает в своей области определения (рис. 59 а)).

Если $k = \operatorname{tg} \varphi < 0$, то $90^\circ < \varphi < 180^\circ$. Следовательно, угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x является тупым и функция $y = kx + b$ убывает (рис. 59 б)).

Если $k = 0$, то имеем постоянную функцию $y = b$, графиком которой является прямая, параллельная оси x (рис. 59 в)).

Если $b = 0$, то линейная функция имеет вид $y = kx$ и называется **прямой**

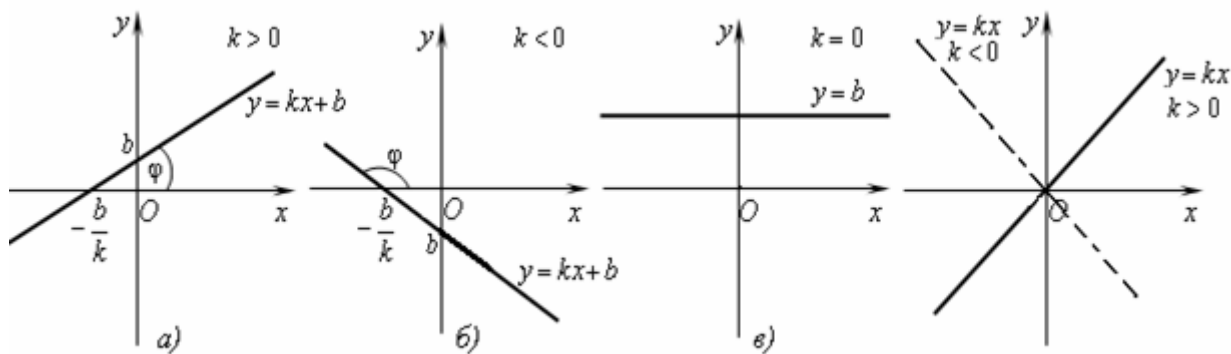


Рис. 59

Рис. 60

пропорциональностью. Её графиком является прямая, проходящая через начало координат (рис. 60).

Для построения графика линейной функции достаточно знать координаты двух его точек.

Одной из задач, которые часто встречаются в приложениях, является задача о нахождении линейной функции по некоторым условиям, например, по двум точкам ее графика, или по точке графика и углу его наклона к осям координат.

Пример 1. Найти линейную функцию $y = kx + b$, график которой:

- 1) проходит через точки $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$;
- 2) образует угол 30° с осью абсцисс и проходит через точку $C(-\sqrt{3}; 2)$.

□ 1) Для нахождения k и b составим систему уравнений :

$$\begin{cases} k(-1) + b = 1, \\ k \cdot 2 + b = 4. \end{cases}$$

Решим ее методом подстановки.

$$\begin{cases} b - k = 1, \\ b + 2k = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} b = k + 1, \\ k + 1 + 2k = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} b = k + 1, \\ 3k = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} b = k + 1, \\ k = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 + 1 = 2, \\ k = 1. \end{cases}$$

Следовательно, искомой является функция $y = x + 2$.

- 2) По условию $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $k(-\sqrt{3}) + b = 2$. Следовательно, $b = 2 + 1 = 3$,

и $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$. ■

Ответ: 1) $y = x + 2$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$.

Пример 2. Скорость тела линейно зависит от времени. В начале движения скорость была 5 м/с, а через 12 с она достигла 23 м/с. Найти зависимость скорости тела от времени.

□ По условию, $v(t) = kt + b$, $v(0) = 5$, $v(12) = 23$. Отсюда: $k \cdot 0 + b = 5$, $k \cdot 12 + b = 23$. Решая полученную систему, получим: $b = 5$, $k = 1,5$; $v = 1,5t + 5$. ■

Ответ: $v = 1,5t + 5$.



Линейные функции широко применяют при описании различных процессов и явлений. Характерным свойством этих явлений является равномерность изменения зависимой величины при равномерном изменении независимой, то есть эти явления изменяются с постоянной скоростью. Действительно, важнейшим и самым простым примером таких явлений является равномерное движение материальной точки вдоль прямой. Если на этой прямой ввести систему координат, то положение материальной точки x изменяется по закону $x = vt + x_0$. Это закон прямолинейного равномерного движения. Параметр v имеет простой физический смысл — это скорость движения.

Много процессов и явлений описываются законом $y = kx$. Например, напряжение U в электрической сети с постоянным сопротивлением R прямо пропорционально силе тока I : $U = RI$ (закон Ома). Зависимость силы F , действующей на пружину, от величины ее растяжения имеет вид $F = -kx$ (закон Гука).

Основные свойства функции $y = kx + b$ в зависимости от знака k представлены в таблице 11.

Таблица 11

	$k > 0$	$k < 0$
1.	Область определения функции — множество всех вещественных чисел R .	
2.	При $k \neq 0$ и $b \neq 0$ функция $y = kx + b$ не является ни чётной, ни нечётной. Если $k \neq 0$ и $b = 0$, то функция $y = kx$ является нечётной.	
3.	Функция имеет единственный нуль $x = -\frac{b}{k}$.	
4.	Функция является положительной на промежутке $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ и отрицательной на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$.	Функция является положительной на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ и отрицательной на промежутке $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$.
5.	Функция возрастает в своей области определения.	Функция убывает в своей области определения.
6.	Множество значений функции — множество всех вещественных чисел R .	
7.	Функция является непрерывной.	



Свойства 5 и 7 линейной функции были обоснованы в § 4 (примеры 2 и 4). Доказать остальные свойства нетрудно. Так, чтобы найти промежутки знакопостоянства линейной функции $y = kx + b$, достаточно решить неравенства $kx + b > 0$ и $kx + b < 0$ с

учетом знака числа k . Функция принимает произвольные действительные значения, поскольку уравнение $kx + b = c$ имеет решение при любом значении c при условии $k \neq 0$.

При $k = 0$ функция является постоянной: $y = b$. Ее свойства рекомендуем сформулировать самостоятельно.

Характерной особенностью линейной функции является то, что если переменная x изменяется равномерно, то есть на одно и то же число, то переменная y тоже изменяется равномерно. Пусть x принимает значения $a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh, \dots$, где h — некоторое число. Тогда функция $y = kx + b$ принимает соответственно значения $ka + b, k(a + h) + b = (ka + b) + kh, \dots, k(a + nh) + b = (ka + b) + nkh, \dots$. Каждое из этих значений отличается от предыдущего на одно и то же число kh , то есть линейная функция переводит одну арифметическую прогрессию в другую арифметическую прогрессию.

Контрольные вопросы



1. ° Какая линейная функция среди приведенных убывает?

а) $y = 3x - 1$; б) $y = 3 - x$; в) $y = 1 - 3x$; г) $y = -3$.

2. ° Какие знаки имеют числа k и b , если график линейной функции $y = kx + b$ изображен на рис. 61?

3. ° Проходит ли график функции $y = 5x + 2$ через точку: а) $A(0; 5)$; б) $B(0; 2)$; в) $C(-1; -2)$; г) $D(-1; 3)$?

4. ° В каких точках прямая $y = 1 - 4x$ пересекает оси координат?

5. ° Укажите несколько точек, через которые проходит график линейной функции $y = -2$.

6. Что можно сказать о коэффициентах k и b , если график линейной функции $y = kx + b$ лежит в нижней координатной полуплоскости?

7. Какой формулой задается функция, график которой изображен на рис. 62?

8. При каких значениях k и b график функции $y = kx + b$:

а) проходит через I и III четверти координатной плоскости;

б) отсекает треугольник во второй четверти;

в) * проходит через начало координат и лежит между прямыми $y = 0$ и $y = -x$?

9. Является ли любая прямая на координатной плоскости графиком линейной функции?

10. Какая из следующих прямых не пересекается с графиком функции $y = 1 - x$?

а) $y = 1 + x$; б) $y = -1 + x$; в) $y = 2 - x$; г) $y = \frac{1-x}{2}$.

11. Чему равняется угловой коэффициент прямой AB , если график линейной

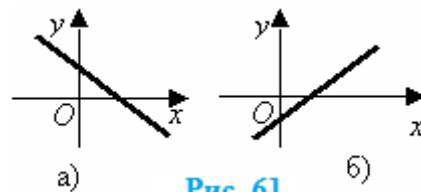


Рис. 61

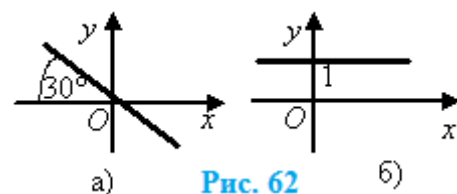


Рис. 62

функции проходит через точки $A(0; 1)$ и $B(1; 0)$?

12. Чему равняется угол наклона прямой AB к положительному направлению оси x , если график линейной функции проходит через точки $A(0; 1)$ и $B(1; 0)$?

2. Квадратичная функция

Не менее важной, чем линейная функция, в математике и ее приложениях является квадратичная функция.



Квадратичной называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — некоторые числа.

Квадратичная функция определена на множестве всех вещественных чисел.

Если $b = c = 0$, то имеем функцию $y = ax^2$. Она имеет единственный нуль $x = 0$: $y(0) = 0$. При $a > 0$ функция $y = ax^2$ принимает неотрицательные значения ($ax^2 \geq 0$), при $a < 0$ — неположительные ($ax^2 \leq 0$). Функция $y = ax^2$ является чётной: $y(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = y(x)$. Как известно, ее графиком является парабола с вершиной в точке $B(0; 0)$, ветки которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$. На рис. 63, 64 изображены графики функции $y = ax^2$ в зависимости от знака числа a .

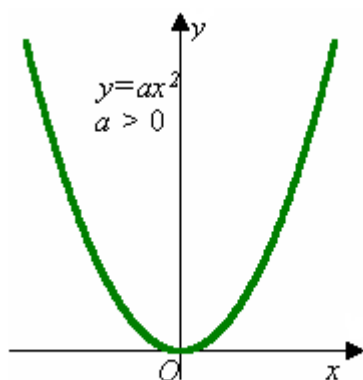


Рис. 63

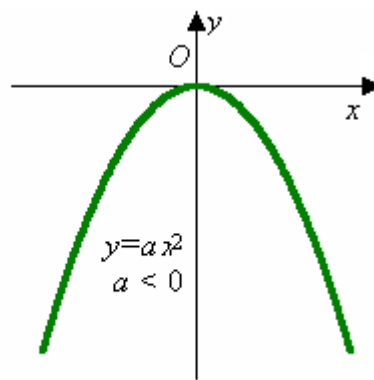


Рис. 64

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ также является парабола. Ее расположение на координатной плоскости зависит от коэффициентов a, b, c . Направление ее веток зависит от знака числа a : при $a > 0$ они направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. Вершина ее находится в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Парабола может не пересекать ось x , а может иметь с ней одну или две общие точки. Это зависит от количества корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Параболу обычно строят по ее характерным точкам: вершине и точкам пересечения с осями координат. Рассмотрим на конкретных примерах построение графиков квадратичной функции.

Пример 3. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 6x + 8$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 3$.

□ 1) Найдем абсциссу вершины параболы по формуле: $x_0 = -\frac{b}{2a}$:

$x_0 = -\frac{6}{2} = -3$. Ордината вершины равна значению квадратичной функции при $x_0 = -3$: $y_0 = y(-3) = 9 - 18 + 8 = -1$. Следовательно, координаты вершины: $(-3; -1)$. Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$. Получим $x_1 = -4$; $x_2 = -2$. Найдем точку пересечения графика с осью y . Для этого вычислим значение функции $y = x^2 + 6x + 8$ при $x = 0$: $y(0) = 8$. График пересекает ось y в точке $(0; 8)$. Ветки параболы направлены вверх, ведь коэффициент при x^2 является положительным. Построим график, учитывая полученные результаты (рис. 65).

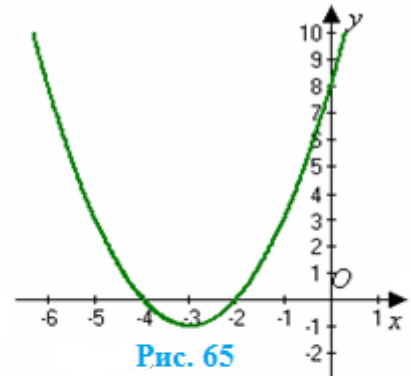


Рис. 65

2) Вершина параболы находится в точке с координатами $(1; 4)$. Точки пересечения параболы с осью абсцисс имеют координаты $(-1; 0)$ и $(3; 0)$. График функции пересекает ось y в точке с координатами $(0; 3)$. Ветки параболы направлены вниз. График изображен на рис. 66.

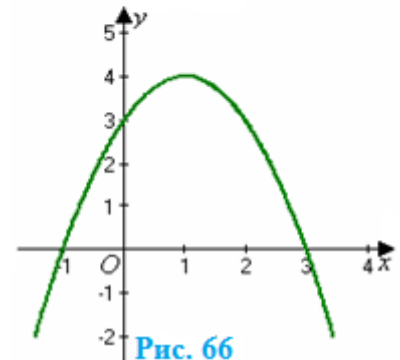


Рис. 66

3) Вершина параболы находится в точке с координатами $(1; 1)$. Парабола не пересекает ось x , поскольку уравнение $2x^2 - 4x + 3 = 0$ не имеет корней. Парабола пересекает ось y в точке с координатами $(0; 3)$. Для уточнения положения графика вычислим значение функции в точке $x = 2$: $y(2) = 3$, то есть парабола проходит через точку A с координатами $(2; 3)$. График изображен на рис. 67. ■

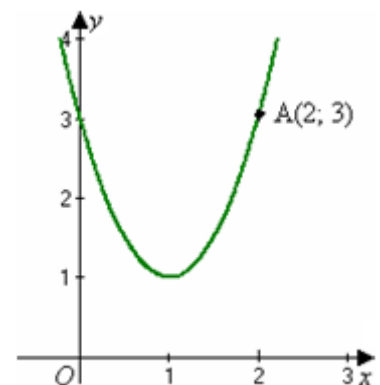


Рис. 67

Немало физических зависимостей выражаются с помощью квадратичной функции. Например, движение тела вдоль координатной прямой под действием постоянной силы можно представить в виде

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{ зависимость кинетической энергии}$$

тела W , масса которого равняется m , от скорости v выражается формулой

$$W = \frac{mv^2}{2}.$$

Тела, брошенные горизонтально или под углом к горизонту, будут двигаться по параболической траектории под действием силы притяжения (рис. 68 а, б).

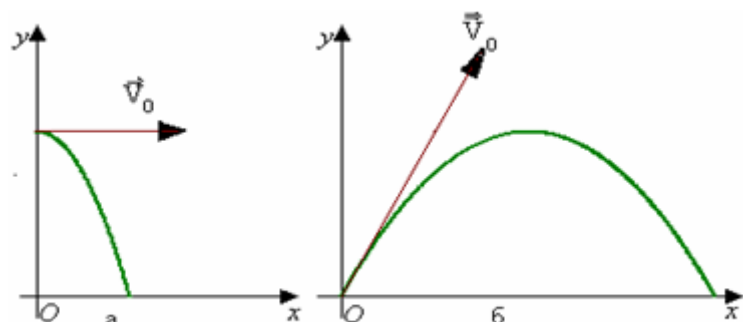


Рис. 68



В таблице 12 представлены графики функций $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ и знака коэффициента a . Через $x_0 = -\frac{b}{a}$ обозначена абсцисса вершины параболы.

Таблица 12

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

В таблице 13 представлены свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Таблица 13

	$a > 0$	$a < 0$
1.	Область определения функции — множество всех вещественных чисел R .	
2.	При $b \neq 0$ функция не является ни чётной, ни нечётной. При $b = 0$ она является чётной.	
3.	Функция в зависимости от знака дискриминанта может иметь один или два нуля, или не иметь их вообще (см. табл. 8).	
4.	Промежутки знакопостоянства зависят от знаков a и D (см. табл. 8).	
5.	Функция убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$, где $x_0 = -\frac{b}{a}$ — абсцисса вершины параболы, и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$.	Функция возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$, где $x_0 = -\frac{b}{a}$ — абсцисса вершины параболы, и убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$.
6.	Наименьшее значение функция принимает при $x = x_0$.	Наибольшее значение функция принимает при $x = x_0$.
7.	Множество значений функции — промежуток $[y(x_0); +\infty)$.	Множество значений функции — промежуток $(-\infty; y(x_0)]$.

8. Функция непрерывна на множестве всех вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Пример 4. При свободном падении тела с достаточно большой высоты с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с зависимость пройденного пути от времени $t \geq 0$ выражается формулой: $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, де s — путь, м; t — время, с; $g \approx 10$ м/с² — ускорение свободного падения.

1) Какой путь пройдет тело за первые 2 с?

2) За какое время тело пройдет 15 м?

3) Построить график зависимости, описанной в условии.

□ 1) Чтобы найти искомый путь, нужно вычислить значение функции

$$s \text{ при } t = 2: s(2) \approx 10 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 40 \text{ (м).}$$

2) Чтобы найти искомое время, нужно решить квадратное уравнение: $10t + 5t^2 = 15$. Оно имеет два корня: -3 и 1 , но условию задачи удовлетворяет только значение $t = 1$. Следовательно, тело преодолеет 15 м примерно за 1 с.

3) График функции $s = 10t + 5t^2$, $t \geq 0$ изображен на рис. 69. ■

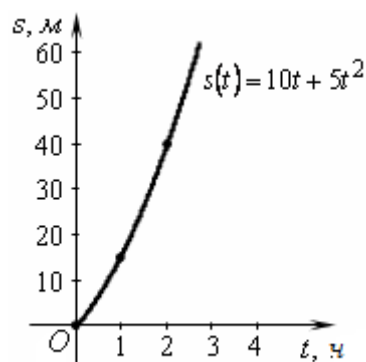


Рис. 69

Ответ. 1) ≈ 40 м; 2) ≈ 1 с.



Очень часто невозможно изобразить точки графика, пользуясь обычной, с одинаковыми масштабами на осях абсцисс и ординат прямоугольной системой координат. Поэтому при построении графиков функций широко используют системы координат с разными масштабами по осям. Выбор соотношений масштабов зависит от конкретной ситуации. В примере 4 масштаб по оси абсцисс в 10 раз больше масштаба по оси ординат.

Для нахождения линейной функции достаточно задать два условия. Для нахождения квадратичной функции этого уже недостаточно. Невозможно восстановить квадратичную функцию по двум произвольным точкам ее графика, потому что через эти точки проходит бесконечное множество парабол. Например, через точки $A(1; 1)$ и $B(-1; 1)$ проходят параболы $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 3 - 2x^2$ и много других.

Для нахождения коэффициентов квадратичной функции достаточно указать:

1) три точки, лежащие на ее графике, или

2) две точки ее графика, причем одна из них — вершина параболы.

Пример 5. Найти квадратичную функцию, если своё наименьшее значение $y = -3$ она принимает при $x = 2$, а ее график проходит через точку $A(0; 1)$.

□ Найти квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ — это значит найти ее коэффициенты a , b , c . Поскольку по условию график функции проходит через точку $A(0; 1)$, то есть $y(0) = 1$, то $c = 1$. Кроме того, известно, что график функ-

ции проходит через точку с координатами $(2; -3)$, которая является вершиной параболы. Отсюда имеем систему:

$$\begin{cases} y(2) = -3, \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4a + 2b + 1 = -3, \\ b = -4a, \end{cases} \quad \text{решив которую, получим } a = 1, b = -4.$$

Таким образом, $y = x^2 - 4x + 1$. ■

Ответ: $y = x^2 - 4x + 1$.



Контрольные вопросы

1. ° В каких из следующих парабол ветки направлены вверх:
а) $y = 1 - x + 2x^2$; б) $y = 5x - 3x^2 - 1$; в) $y = 1 - x^2$?
2. ° Укажите абсциссу вершины параболы :
а) $y = 1 - 3x + 2x^2$; б) $y = -5x^2 + x - 2$; в) $y = (x + 5)(x - 1)$?
3. ° Какая из следующих парабол не пересекает ось x :
а) $y = 5x^2 + 2x - 1$; б) $y = x^2 - 2x + 1$; в) $y = x^2 - x + 1$?
4. Чему равняется наибольшее значение функции $y = -3x^2 + 6x - 1$?
5. Каков промежуток убывания функции:
а) $y = -\frac{x^2}{3}$; б) $y = 2x^2 - 8x + 1$; в) $y = -x^2 + 4x$?
6. Чему равняется коэффициент k , если график функции $y = kx^2$ проходит через точку $A(2; -4)$?
7. При каких значениях параметра a функция $y = (1 - a)x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$?
8. На каком из рис. 70 а) - в) изображен график функции $y = (x + 1)(2 - x)$?

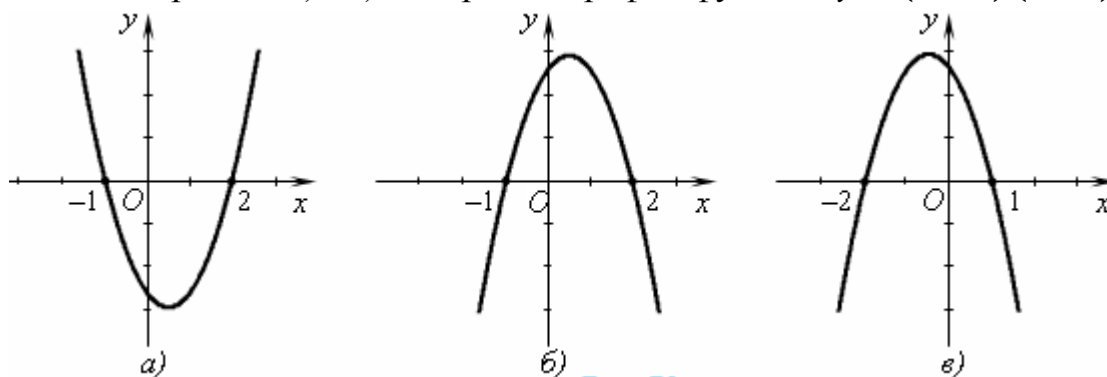


Рис. 70

9. На рис. 70 а) – в) изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Какие знаки имеют числа a, b, c ?



3. Обратная пропорциональность

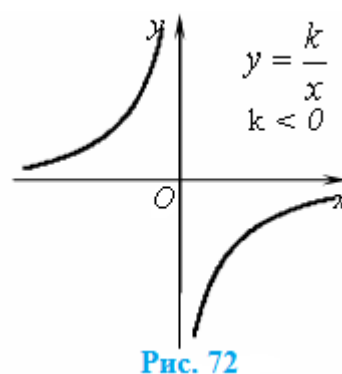
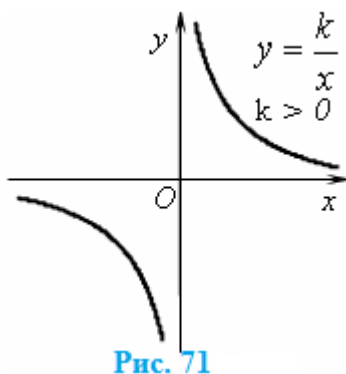
Обратной пропорциональностью называется функция, имеющая вид $y = \frac{k}{x}$,

где k — некоторое отличное от нуля число.

Она определена на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, является нечётной, поскольку

$$y(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -y(x). \text{ Как известно,}$$

графиком обратной пропорциональности является гипербола, расположение которой зависит от знака числа k (рис. 71 и 72). Если $k > 0$, то функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Если $k < 0$, то функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.



Пример 6. График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ проходит через

точку $A(-1; 2)$.

1) Проходит ли он через точку $B(4; -0,5)$?

2) Возрастает или убывает обратная пропорциональность на промежутке $(0; +\infty)$?

□ 1) Поскольку график функции проходит через точку A , то выполняется равенство $2 = \frac{k}{-1}$. Отсюда находим $k = -2$. Заданная функция имеет вид $y = -\frac{2}{x}$.

Поскольку $-0,5 = \frac{-2}{4}$, то график функции проходит через точку $B(4; -0,5)$.

2) Поскольку $k = -2$, то функция возрастает на промежутке $(0; +\infty)$. ■

Ответ: 1) Проходит; 2) возрастает.

Обратная пропорциональность имеет широкое применение для описания зависимостей между величинами. Она часто связана с прямой пропорциональностью. Действительно, если s_0 — расстояние между пунктами A и B , то время t движения из A в B обратно пропорционально скорости движения v : $t = \frac{s_0}{v}$. Об-

ратно пропорциональными является: зависимость между сторонами прямоугольника при заданной площади; зависимость между давлением газа и его объемом при постоянной температуре; зависимость между концентрацией жидкости и объемом растворяемого вещества при заданном количестве жидкости и т. п.



В таблице 14 приведены все основные свойства обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ в зависимости от знака числа k .

Таблица 14

	$k > 0$	$k < 0$
1.	Область определения функции — множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.	
2.	Функция является нечётной.	
2.	Функция не имеет нулей.	
4.	Функция принимает положительные значения на промежутке $(0; +\infty)$ и отрицательные на промежутке $(-\infty; 0)$.	Функция принимает отрицательные значения на промежутке $(0; +\infty)$ и положительные на промежутке $(-\infty; 0)$.
5.	Функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.	Функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.
6.	Множество значений функции — объединение промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.	
7.	Функция не является непрерывной. Точка $x = 0$ — ее точка разрыва.	

Свойства 1 – 4 проверяются легко. Докажем свойство 5, а именно, что функция при $k > 0$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$. Рассмотрим промежуток $(-\infty; 0)$. Пусть x_2 и x_1 принадлежат этому промежутку ($x_2 < 0$, $x_1 < 0$) и $x_2 > x_1$. Тогда $y(x_2) = \frac{k}{x_2}$, $y(x_1) = \frac{k}{x_1}$. Оценим разность:

$y(x_2) - y(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_2 \cdot x_1} < 0$, потому что $k > 0$, $x_1 - x_2 < 0$, $x_2 \cdot x_1 > 0$ по условию. Следовательно, $y(x_2) < y(x_1)$, а это, согласно определению, и означает, что функция убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

Функция $y = \frac{k}{x}$ является нечётной. Поэтому она убывает и на промежутке $(0; \infty)$.

Найдем множество значений функции $y = \frac{k}{x}$. Она может принимать любое значение, кроме нуля, потому что уравнение $\frac{k}{x} = b$ имеет корень $x = \frac{k}{b}$ при любом $b \neq 0$. Это означает, что множеством значений функции является объединение промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. В отличие от квадратичной и линейной функций обратная пропорциональность имеет точку разрыва $x = 0$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки. Если значения аргумента x положительны и приближаются к нулю, то значения функции становятся как угодно большими. График функции неограниченно поднимается вверх, приближаясь к оси y . Рассмотрим поведение функции слева от нуля. Функция является нечётной. Поэтому, если значения аргумента x отрицательны и приближаются к нулю, то график функции неограниченно направляется вниз, также приближаясь к оси y . Таким образом, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика. Если значения аргумента неограниченно возрастают, то значения функции уменьшаются, приближаясь к нулю. График функции как угодно бли-

зко приближается к оси x . Прямую $y = 0$ называют *горизонтальной асимптотой*. Таким образом, гипербола имеет две асимптоты.



Контрольные вопросы

1. ° Какая из приведенных функций возрастает на промежутке $(0; +\infty)$:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = \frac{1}{3x}$; в) $y = \frac{1}{-3x}$; г) $y = -\frac{x}{3}$?

2. ° Чему равняется число k , если гипербола $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку с координатами $(-2; 1)$?

3. ° Чему равняется значение функции, являющейся обратной пропорциональностью и график которой изображен на рис. 73, в точке $x = 1$?

4. ° В скольких точках пересекаются графики функций:

а) $y = \frac{2}{x}$, $y = x$; б) $y = \frac{2}{x}$, $y = -x$; в) $y = -\frac{2}{x}$, $y = x^2$?

5. Могут ли пересекаться гиперболы $y = \frac{k}{x}$ при разных значениях k ?

6. Сколько асимптот имеет гипербола?

7. * Можно ли утверждать, что функция $y = \frac{1}{x}$ убывает в своей области определения?

8. * При каких значениях k функция $y = \frac{k^2 - 1}{x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$?

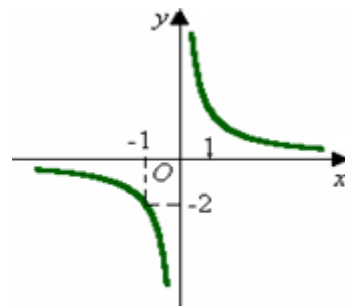


Рис. 73

Задачи

65. Постройте график функции :

1) ° $y = 2 - \frac{x}{3}$; 2) ° $y = \frac{1}{2}(x+1)$; 3) ° $y = -4$; 4) $y = 4x^2$; 5) ° $y = x^2 - 2$;

6) ° $y = (x+1)(x-3)$; 7) ° $y = (x+2)(3-x)$; 8) ° $y = x^2 - 2x + 4$;

9) ° $y = x^2 - 5x + 4$; 10) ° $y = -3x^2 - 2x + 1$; 11) ° $y = -x^2 + x - 1$;

12) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$ 13) $y = \begin{cases} x(x+2) & \text{при } x \leq 1, \\ 4-x & \text{при } x > 1; \end{cases}$ 14) * $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

66. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 0, \\ x-1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

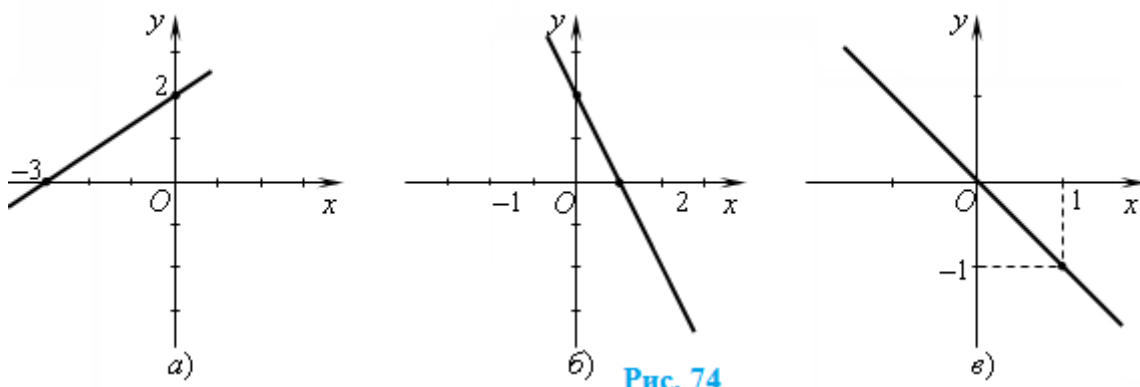
1) Постройте ее график.

2) Укажите промежутки ее возрастания и убывания.

3) Является ли функция чётной или нечётной?

4) Измените значение функции в одной точке так, чтобы она стала нечётной.

67. ⁰ Задайте с помощью формул функции, графики которых изображены на рис. 74 а) - в).



68. ⁰ Напряжение в электрической сети равномерно возрастает. В начале опыта напряжение равнялось 10 В, а в конце опыта, который длился 5 с, напряжение увеличилось в 1,5 раза.

1) Выразите зависимость роста напряжения от времени и постройте график этой функции.

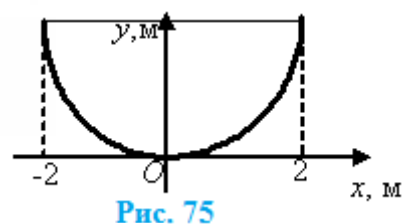
2) Каким было напряжение через 3 с после начала опыта?

69. ⁰ По закону Бойля-Мариотта, давление p и объем газа V связаны формулой

$$p = \frac{c}{V}, \text{ где } c \text{ — постоянная величина для данной массы и температуры газа.}$$

Постройте график этой зависимости, если при давлении $p = 10$ Па объем газа равняется 0,5 л.

70. На рис 75 изображено поперечное сечение канала, основание которого имеет форму параболы $y = 3x^2$. Какова его наибольшая глубина?



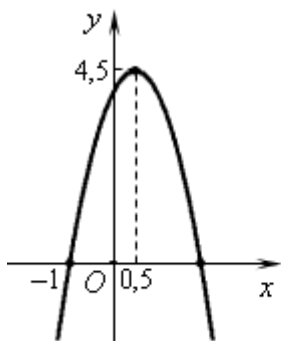
71. * Найдите квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

1) график ее проходит через точки $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(2; 3)$;

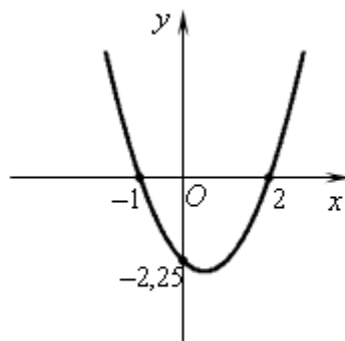
2) вершина параболы, которая является ее графиком, имеет координаты $A(2,5; -0,25)$, и парабола проходит через точку $B(1; 2)$;

3) свое наименьшее значение $y = -2$ она принимает в точке $x = 1$, а ее график пересекает ось абсцисс при $x = 5$.

72. * Задайте с помощью формулы функции, графиками которых являются параболы, изображённые на рис. 76 а) - в).

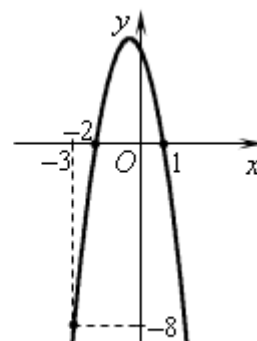


а)



б)

Рис. 76



в)

73. ⁰ Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый полный оборот был сделан колесом за 8 с. На какой угол **по-**вернулось колесо за первые 2 с движения?

74. Камень, брошенный с поверхности Земли вверх, движется по закону

$$h = -\frac{gt^2}{2} + 20t, \text{ где } h \text{ — высота, м; } t \text{ — время, с; } g \approx 10 \text{ м/с}^2 \text{ — ускорение свободного падения.}$$

Через сколько секунд камень упадет на Землю? Чему равняется наибольшая высота, на которую взлетит камень?

75. Пусть арка моста имеет форму дуги параболы (рис. 77). Высота арки составляет 3 м, а длина хорды, стягивающей ее, равняется 24 м. Арка имеет 5 вертикальных стояков, которые расположены на одинаковом расстоянии друг от друга и от концов моста. Вычислите длины стояков.

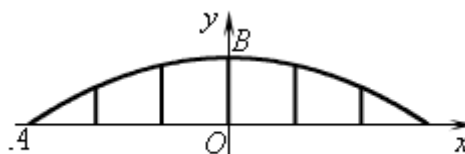


Рис. 77

76. Вершина прямого угла равнобедренного треугольника имеет координаты (0; 1). Основание треугольника лежит на оси x . Найдите уравнения прямых, на которых лежат боковые стороны треугольника.

77. Квадрат со стороной 2 пересекается прямой, параллельной его диагонали (рис. 78).

1) Выразите зависимость площади закрашенной части квадрата от x .

2) Постройте график полученной функции.

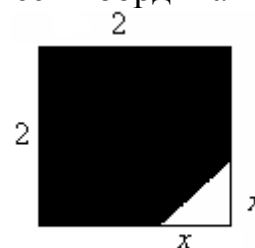


Рис. 78

Упражнения для повторения

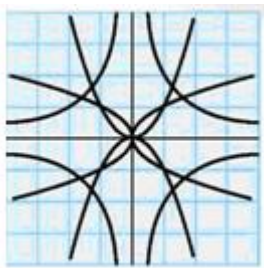
78. При параллельном переносе точка $A(1; 1)$ переходит в точку $B(-1; 0)$. В какую точку переходит начало координат? Точка $C(-1; 0)$?

79. Постройте на одном рисунке графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = (x - 1)^2$; 2) $y = x^2$ и $y = x^2 + 1$; 3) $y = x^2$ и $y = 2x^2$;

4) $y = x^2$ и $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$; 5) $y = x^2$ и $y = -x^2$.

С помощью каких геометрических преобразований график второй функции можно получить из графика первой?



§6. Построение графиков функций

Под построением графика функции понимают построение рисунка (чаще всего линии), который отображает графически все основные свойства функции. В данном параграфе будут рассматриваться некоторые способы построения графиков функций.



Произвольной выбор точек и построение графика по этим точкам может привести к существенным ошибкам.

Например, чтобы построить график функции $y = \frac{1}{x}$, составим некоторую

таблицу ее значений.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Теперь изобразим соответствующие точки на координатной плоскости и, соединив их линиями, получим кривую, изображенную на рис. 79. Однако она совсем не похожа на график функции

$y = \frac{1}{x}$. Какие мы допустили ошибки?

Дело в том, что график функции нужно строить не по произвольно взятым точкам, а по характерным для данной функции точкам, которыми являются точки пересечения графика функции с

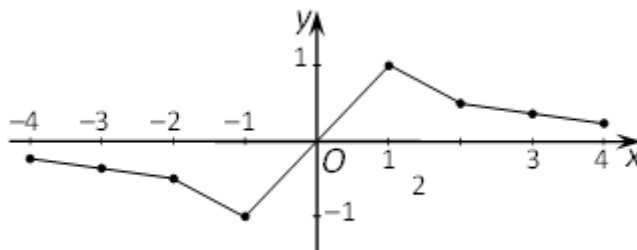


Рис. 79

осями координат, точки, которые разграничивают промежутки возрастания и убывания функции, точки, в которых график разрывается (например, точка $x = 0$ для гиперболы $y = \frac{1}{x}$). Одна из главных задач при построении графика функции за-

ключается в исследовании свойств функции и выявлении ее характерных точек.

Существуют и другие способы построения графиков функций. Один из них основывается на геометрических преобразованиях уже известных графиков. Рассмотрим подробнее этот метод.

Параллельный перенос графика

Напомним, как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = f(x) + a$ и $y = f(x + b)$, где a и b — некоторые произвольные числа.

Если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $B(x_0; y_0 + a)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + a$. Установим связь между графиками функций $y = f(x)$ и $y = f(x + b)$. Если первая функция принимает некоторое значение $f(x_0)$ в точке x_0 , то вторая будет иметь то же самое значение при $x = x_0 - b$. И мы приходим к следующим правилам.

График функции $y = f(x) + a$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси y на $|a|$ единиц: в направлении оси y , если $a > 0$ и в противоположном направлении, если $a < 0$ (рис. 80).

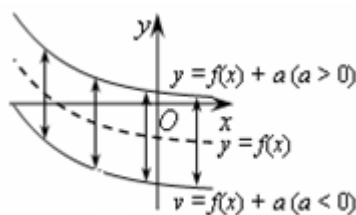


Рис. 80

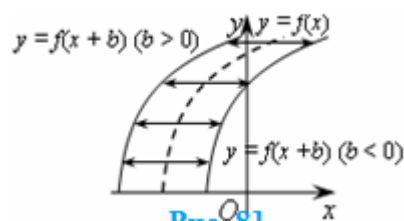


Рис. 81

График функции $y = f(x + b)$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом

вдоль оси x на $|b|$ единиц: в направлении оси x , если $b < 0$ и в противоположном направлении, если $b > 0$ (рис. 81).

Например, график функции $y = x^2 - 1$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = x^2$ на одну единицу в направлении, противоположном направлению оси y (рис. 82). График функции $y = (x - 1)^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом последнего на одну единицу в направлении оси x (рис. 83).

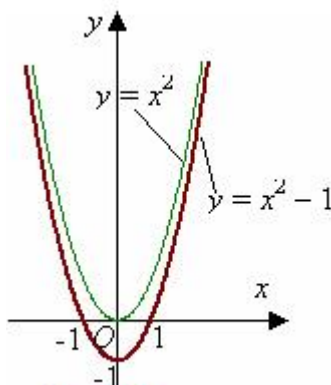


Рис. 82

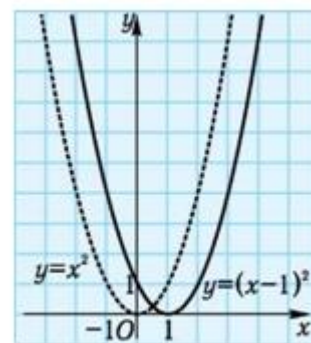


Рис. 83

Иногда приходится последовательно выполнять параллельный перенос графика функции сначала вдоль одной оси, потом вдоль второй.

Пример 1. Построить график функции:

1) $y = (x - 1)^2 - 1$; 2) $y = 2 + \frac{1}{x - 1}$.

□ 1) График функции $y = (x - 1)^2 - 1$ можно построить параллельным переносом графика $y = x^2$ на единицу в направлении оси x и на единицу в направлении, противоположном направлению оси y (рис. 84).

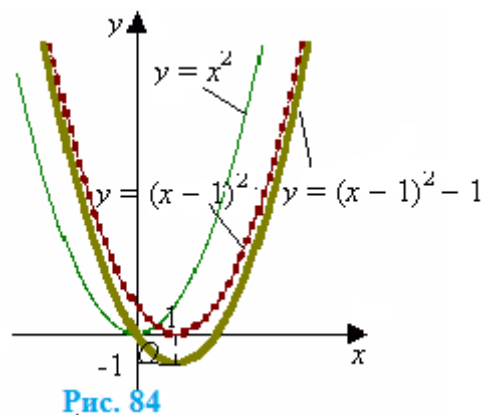


Рис. 84

2) График данной функции получим из гиперболы — параллельным переносом ее на единицу в направлении оси x и на две единицы в направлении оси y (рис. 85 а) - в)). ■

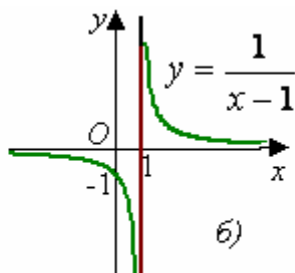
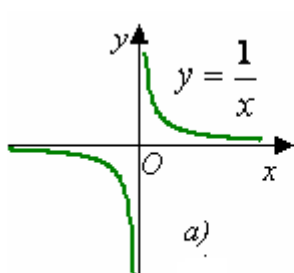
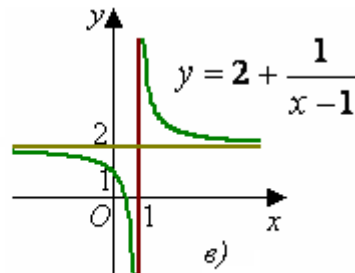


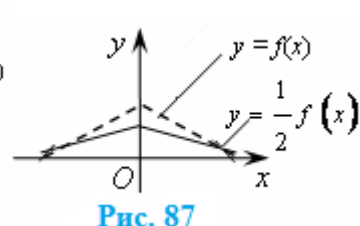
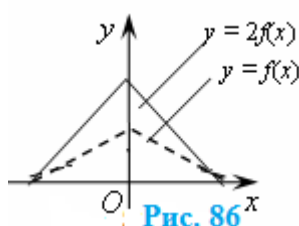
Рис. 85



Сжатие и растяжение графика функции

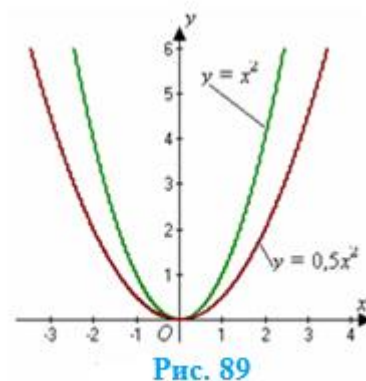
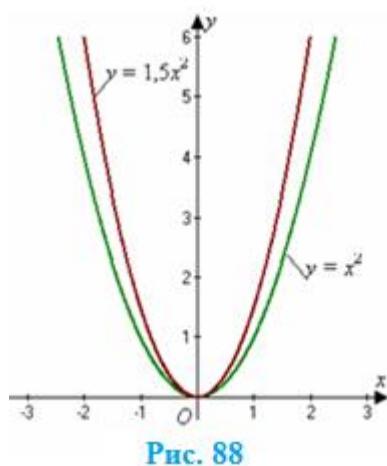
Напомним, как по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = kf(x)$, где k — некоторое положительное число. Сначала рассмотрим частные случаи, когда $k = 2$ и $k = \frac{1}{2}$. Функция $y = 2f(x)$ в каждой точке области определения принимает значения, вдвое большие по модулю, чем функция $y = f(x)$. Функция $y = \frac{1}{2}f(x)$ в каждой точке области определения принимает значения, вдвое меньшие по модулю, чем функция $y = f(x)$. Все эти функции имеют одни и те же нули. Таким образом, график функции $y = f(x)$ в первом случае растягивается от оси x вдвое, а во втором случае сжимается к оси x вдвое. Приведем общее правило построения графика функции $y = kf(x)$.

График функции $y = kf(x)$ ($k > 0$) получают из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз от оси x при $k > 1$ (рис. 86) и сжатием в $\frac{1}{k}$ раз к оси x при $0 < k < 1$ (рис. 87).



Пример 2. Построить графики функций $y = 1,5x^2$, $y = 0,5x^2$.

□ График функции $y = 1,5x^2$ получим из графика функции $y = x^2$ растяжением от оси x в 1,5 раза (рис. 88). График функции $y = 0,5x^2$ получим из графика $y = x^2$ сжатием его к оси x в 2 раза (рис. 89). ■



Напомним, как по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(\omega x)$, где ω — некоторое положительное число. Начнем с частных случаев: построим графики функций $y = f(2x)$ и $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$, если известен график функции $y = f(x)$. Значение $f(x_0)$, которое функция $y = f(x)$ принимает в точке x_0 , функция $y = f(2x)$ принимает в точке $\frac{x_0}{2}$ ($2x = x_0$), а функция $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ — в точке $2x_0$ ($\frac{x}{2} = x_0$). Точка $\frac{x_0}{2}$ находится вдвое ближе к оси y , а точка $2x_0$ — вдвое дальше от оси y , чем точка x_0 . Следовательно, график функции $y = f(2x)$ получим из графика функции $y = f(x)$ сжатием его к оси y

вдвое, а график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ получим из графика функции $y = f(x)$ растяжением его от оси y вдвое.

Сформулируем правило для общего случая построения графика функции $y = f(\omega x)$.

График функции $y = f(\omega x)$ ($\omega > 0$) получают из графика функции $y = f(x)$ сжатием его к оси y в ω раз при $\omega > 1$ (рис. 90) и растяжением в $\frac{1}{\omega}$ раз от оси y при $0 < \omega < 1$ (рис. 91).

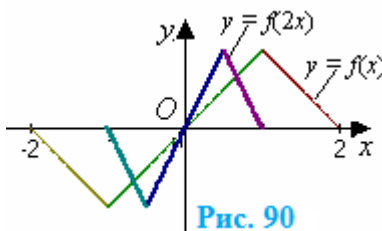


Рис. 90

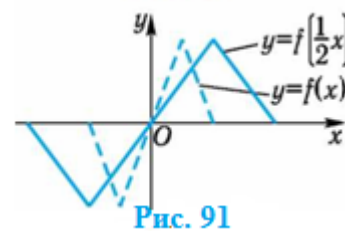


Рис. 91

Например, график

функции $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$

можно построить, растянув график функции $y = \sqrt{x}$ от оси y в 3 раза (рис. 92). График функции $y = \sqrt{3x}$ получим из графика функции $y = \sqrt{x}$, сжав его к оси y в три раза (рис. 93).

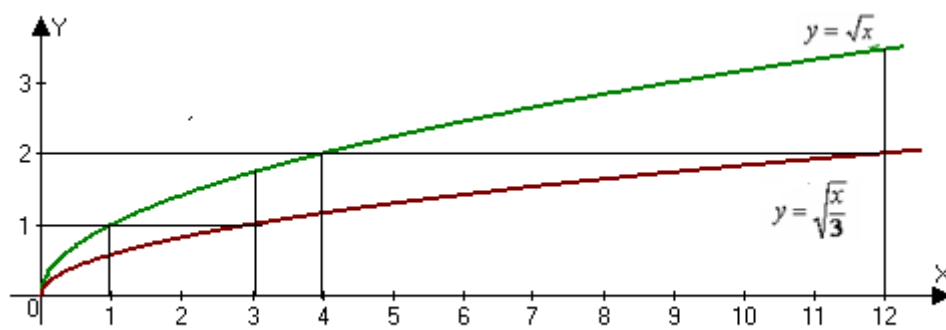


Рис. 92

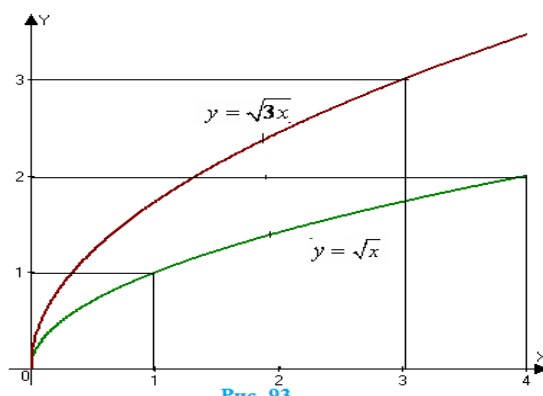


Рис. 93

Симметричное отражение графика функции относительно координатных осей

Напомним, как по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = -f(x)$, которая в любой точке области определения принимает значение, противоположное значению функции $y = f(x)$. Графики этих функций симметричны относительно оси x . Следовательно, можно сформулировать правило построения графика функции $y = -f(x)$ по графику функции $y = f(x)$.

График функции $y = -f(x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением его относительно оси x (рис. 94).

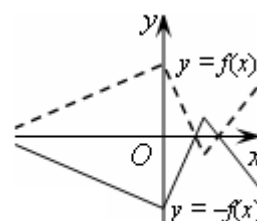


Рис. 94

Пример 3. Построить график функции $y = -\sqrt{x} + 1$.

□ Построим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 95). Отобразим его симметрично относительно оси x . Потом перенесем полученный график в положительном направлении оси y на 1 единицу. Имеем искомый график, он изображен на рис. 95 более толстой линией. ■

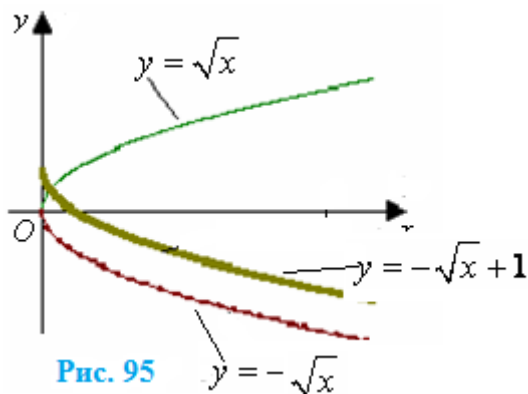


Рис. 95

Обратите внимание на то, что при построении графика функции мы дважды использовали геометрические преобразования: сначала симметрию относительно оси x , потом параллельный перенос вдоль оси y .

Подумайте, можно ли было сначала выполнить параллельный перенос, а потом симметрию относительно оси x .

Теперь рассмотрим, как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ принимает значение $f(x_0)$, то это значение функция $y = f(-x)$ примет в точке $-x_0$. Точки x_0 и $-x_0$ расположены симметрично относительно начала координат. Поэтому графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ будут симметричны относительно оси y . Отсюда вытекает следующее правило:

График функции $y = f(-x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси y (рис. 96).

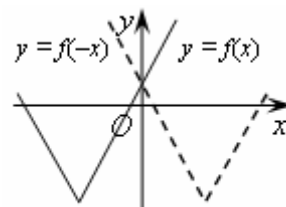


Рис. 96

Пример 4. В скольких точках пересекаются графики функций $y = \sqrt{-x}$ и $y = x^2 - 2$?

□ На одном рисунке строим графики функций $y = \sqrt{-x}$, $y = x^2 - 2$. Первый график получим из графика функции $y = \sqrt{x}$ симметричным отражением его относительно оси y . Второй график получим из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом последнего на 2 единицы в направлении, противоположном оси y (рис. 97). Графики пересекаются в единственной точке. ■

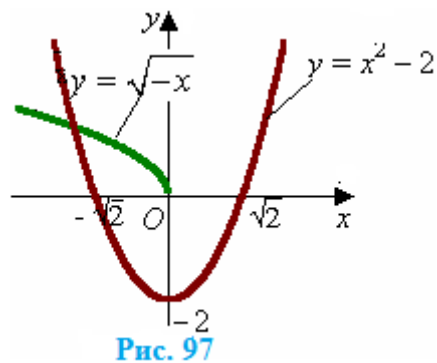


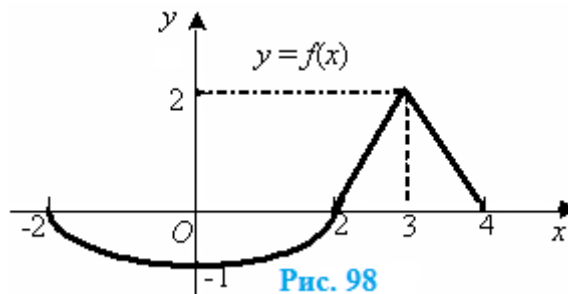
Рис. 97

Ответ. В одной.



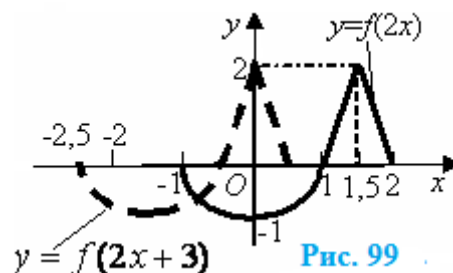
Иногда для построения графика функции приходится выполнять несколько геометрических преобразований. С этим мы уже сталкивались при решении примеров 1 и 3. Теперь мы рассмотрим построение графиков функций $y = f(ax + b)$, где $a > 0$ и b — некоторые числа. Представим функцию в виде $y = f\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right)$ и построим график

функции по такой схеме: $y = f(x) \rightarrow y = f(\omega x) \rightarrow y = f\left(\omega\left(x + \frac{b}{\omega}\right)\right)$. Если $\omega > 1$, то график функции сожмем к оси y в ω раз, а потом перенесем полученный график вдоль оси x на $\left|\frac{b}{\omega}\right|$ единиц. Направление параллельного переноса зависит от знака числа $\frac{b}{\omega}$. Если $0 < \omega < 1$, то график функции растянем от оси y в $\frac{1}{\omega}$ раз и перенесем на $\left|\frac{b}{\omega}\right|$ единиц с учетом знака числа $\frac{b}{\omega}$.



Пример 5. На рис. 98 изображен график функции $y = f(x)$. Построить график функции $y = f(2x+3)$.

□ График функции $y = f\left(2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right)$ будем строить по такой схеме: $y = f(x) \rightarrow y = f(2x) \rightarrow y = f\left(2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right)$, то



есть сначала график функции сожмем к оси y вдвое, потом перенесем полученный график в направлении, противоположном направлению оси x , на $\frac{3}{2}$ единицы (рис. 99). ■

Подумайте, можно ли сначала перенести график функции $y = f(x)$ на 3 единицы вдоль оси x , а потом сжать полученный график к оси y вдвое.

Пример 6. Дана функция $y = -2x^2 - 3x + \frac{7}{8}$.

1. Построить ее график, используя геометрические преобразования.
2. Указать её промежутки возрастания и убывания.
3. Найти множество значений функции.

□ 1. Для построения графика функции выделим полный квадрат трех-

$$-2x^2 - 3x + \frac{7}{8} = -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{16}\right) = -2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{7}{16}\right) =$$

члена:

$$= -2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 1\right) = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + 2.$$

График заданной функции строим по следующей схеме:

$$y = x^2 \rightarrow y = 2x^2 \rightarrow y = -2x^2 \rightarrow y = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow y = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + 2:$$

а) растянем график функции $y = x^2$ от оси x вдвое; б) отобразим полученный график симметрично относительно оси x ;

в) перенесем на $\frac{3}{4}$ единицы в отрицательном направлении оси x ;

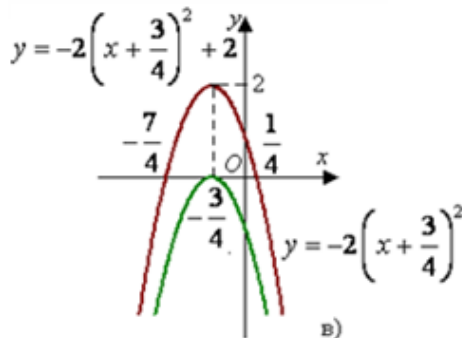
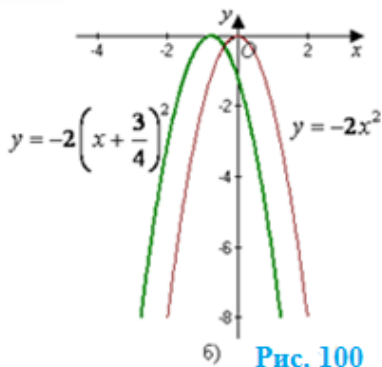
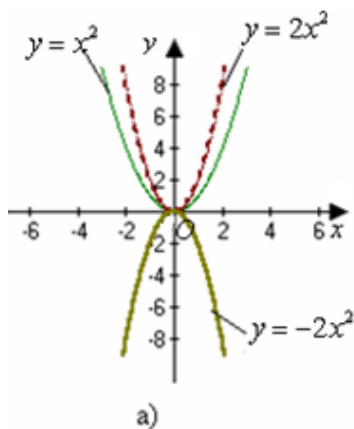


Рис. 100

г) перенесем на 2 единицы в положительном направлении оси y (рис. 100 а), б), в).

Для более точного построения графика можно найти нули функции: $x_1 = -\frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ (рис. 101).

2. На промежутке $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$ функция возрастает, на промежутке $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$ функция убывает.

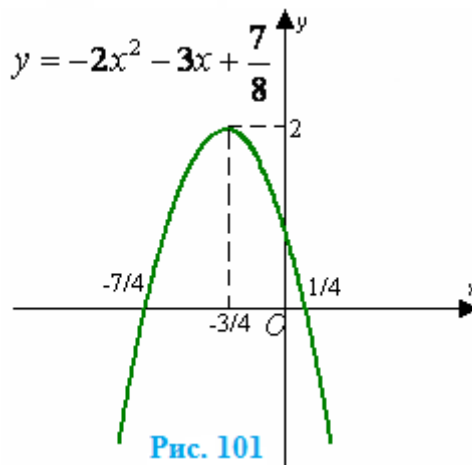


Рис. 101

ет.

3. $E(f) = (-\infty; 2]$. ■



С помощью геометрических преобразований можно строить и графики функций, содержащих модуль.

Пусть известен график функции $y = f(x)$ и нужно построить график функции $y = |f(x)|$. По определению модуля имеем:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Из этого равенства вытекает, что точки графика функции $y = f(x)$, ординаты которых неотрицательны, являются и точками графика функции $y = |f(x)|$. Для значений x , в которых $f(x) < 0$, точки графиков функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ симметричны относительно оси x . Следовательно, получено правило построения графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y = f(x)$.

Чтобы из графика функции $y = f(x)$ полу-

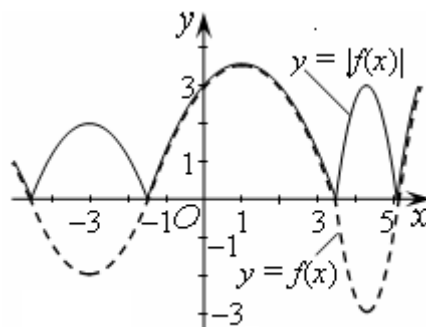


Рис. 102

читать график функции $y = |f(x)|$, нужно части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси абсцисс, оставить без изменения, а части, лежащие под осью абсцисс, отобразить симметрично относительно этой оси (рис. 102).

Пример 7. Построить график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$.

□ Сначала построим график квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 3$. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Представим функцию в виде $y = (x - 1)^2 - 4$ и применим параллельный перенос вдоль осей x и y к графику функции $y = x^2$.

Второй способ. Найдем нули функции, решив уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Абсцисса вершины параболы равняется $-\frac{-2}{2} = 1$. Следовательно, координаты вершины — $(1; -4)$. По этим точкам строим эскиз графика. Независимо от способа построения получим график, изображенный на рис. 103.

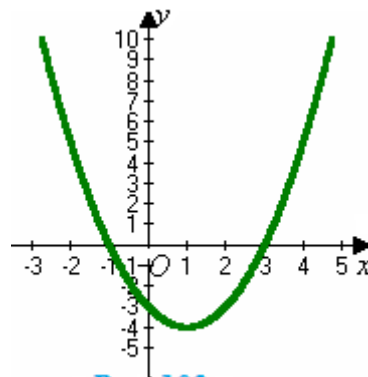


Рис. 103

Пользуясь правилом построения графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y = f(x)$, часть графика, лежащую под осью x , отобразим симметрично относительно этой оси. Получим искомый график (рис. 104). ■

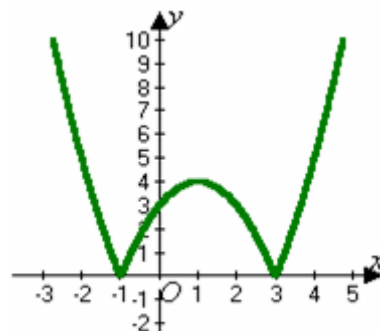


Рис. 104

Теперь выясним, как можно построить график функции $y = f(|x|)$, если имеем график функции $y = f(x)$. Понятно, что для $x \geq 0$ график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Для $x < 0$ $f(|x|) = f(-x)$.

Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(|x|)$, надо построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$, а потом "продолжить" его в левую полуплоскость $x < 0$ с помощью симметричного отражения относительно оси ординат (рис. 105).

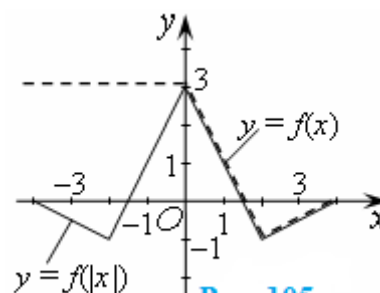


Рис. 105

При построении графика функции $y = f(|x|)$ по графику функции $y = f(x)$ мы "забываем" о той его части, которая лежит в левой полуплоскости. И связано это с тем, что функция $y = f(|x|)$ — чётная, а потому ее график определяется частью, которая лежит в правой полуплоскости.

Пример 8. Построить график функции:

1) $y = x^2 - 2|x| - 3$; 2) $y = |2 - 2|x||$.

□ 1) На рис. 103 изображен график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Согласно вышеприведенному правилу, оставляем ту часть графика функции, кото-

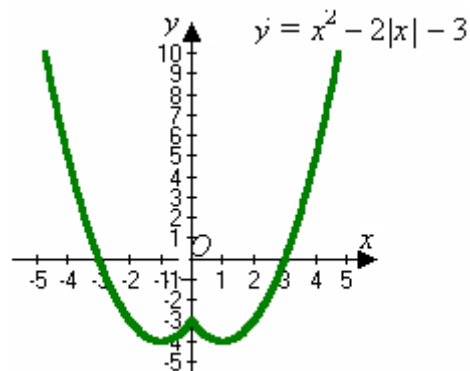


Рис. 106

рая находится в правой полуплоскости, и отображаем ее симметрично относительно оси y . Получим график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$ (рис. 106).

2) Построим сначала график функции $y = 2 - 2x$ (рис. 107 а). Потом построим график функции $y = |2 - 2x|$ (рис. 107 б), пользуясь правилом построения графика функции $y = |f(x)|$. А из него получим искомый график (рис. 107 в), воспользовавшись правилом построения графика функции $y = f(|x|)$. ■

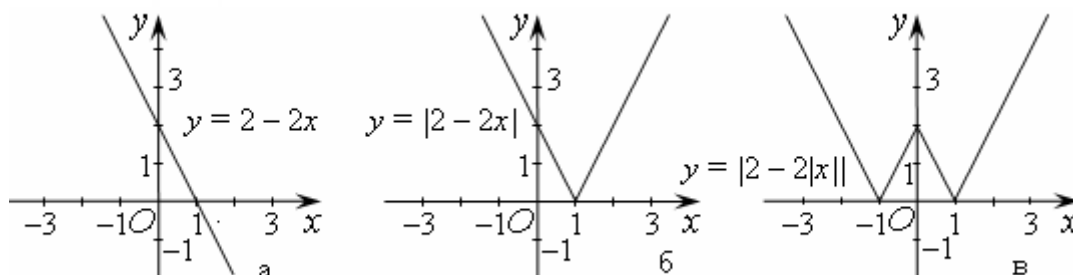


Рис. 107



Контрольные вопросы

1. ° На сколько единиц и в каком направлении следует перенести параболу $y = x^2$, чтобы ее вершина оказалась в точке с координатами: а) $(-2; 0)$; б) $(0; 2)$; в) $(3; 4)$?

2. ° На сколько единиц и в каком направлении следует перенести параболу $y = (x + 1)^2$, чтобы получить параболу $y = x^2 + 1$?

3. ° График какой функции получим из графика функции $y = 2x + 3$ параллельным переносом на 1 единицу в направлении, противоположном направлению оси y ?

4. ° График какой функции получим из графика функции $y = \sqrt{x}$ растяжением его от оси y втрое?

5. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции:

- а) ° $y = 2f(x)$; б) ° $y = f(x + 2)$; в) ° $y = -f(x)$;
г) ° $y = f(-x)$; д) $y = f(2x + 1)$; е) $y = 2f(x) + 1$?

6. Областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок $[0; 1]$. Какова область определения функции:

- а) $y = f(x - 3)$; б) $y = f(x) + 3$; в) $y = f(2x)$; г) $y = f(2x - 1)$?

7. Функция $y = f(x)$ убывает в своей области определения. Будет ли возрастать или убывать функция:

- а) $y = f(x) - 1$; б) $y = f(x - 1)$; в) $y = -2f(x)$;
г) $y = f(2x)$; д) $y = f(-x)$; е) $y = f(2x - 1)$?

8. На рисунке 108 изображен график функции

$$y = \frac{1}{x+a} + b. \text{ Какие знаки имеют числа } a \text{ и } b?$$

9. График какой функции получим, если параболу $y = x^2$ сначала растянем от оси y вдвое, а потом перенесем в направлении оси x на единицу? График какой функции получим, если эти два преобразования выполним в обратном порядке: сначала перенесем параболу $y = x^2$ на единицу в направлении оси x , а потом найденную кривую растянем от оси y вдвое?

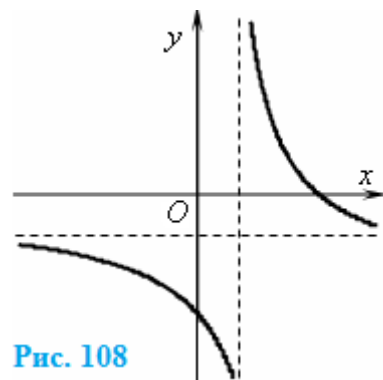


Рис. 108

10. На сколько единиц и в каких направлениях надо перенести параболу $y = x^2 + 1$ вдоль осей x и y , чтобы получить параболу $y = x^2 - 2x + 4$?

11. Каким свойством обладает график функции $y = f(x)$, если он совпадает с графиком функции $y = f(-x)$?

12. * Функция $y = f(x)$ является чётной. Каково уравнение оси симметрии графика функции: а) $y = f\left(x + \frac{3}{2}\right)$; б) $y = f(3x + 2)$?

13. * При каких значениях параметра a графики функций $y = ax^2 + 3$ и $y = (1 - a)x^2 + 2x + 1$ могут быть получены друг из друга только с помощью параллельных переносов?

Задачи

80. Постройте графики функций:

1)⁰ $y = \frac{1}{x} - 2$; 2)⁰ $y = \frac{1}{x-2}$; 3)⁰ $y = (x+1)^2 - 3$; 4)⁰ $y = \sqrt{x} - 1$;

5)⁰ $y = \sqrt{x+1}$; 6)⁰ $y = -\sqrt{x+1}$; 7)⁰ $y = \sqrt{-x} + 2$; 8)⁰ $y = \sqrt{x+2} - 1$;

9)⁰ $y = \left|x + \frac{2}{3}\right|$; 10)⁰ $y = 3|x|$; 11)⁰ $y = |x| + \frac{2}{3}$; 12) $y = \frac{1-x}{x}$; 13)

$y = \frac{3x+1}{x-1}$;

14) $y = \frac{2x+1}{4x+2}$; 15) $y = \sqrt{2x+3}$; 16)* $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$; 17) * $y = |x^2 - x - 2|$;

18) * $y = x^2 - |x| - 2$; 19) * $y = |x^2 - |x| - 2|$; 20) *

$y = \left|\frac{1-x}{x}\right|$.



81. На рис. 109 изображен график функции $y = f(x)$.

1) Постройте график функции $y = 2f(x)$.

2) Постройте график функции $y = f(2x)$.

3) Найдите область определения функции $y = f(x+2)$.

4) Найдите множество значений функции $y = f(x) - 2$.

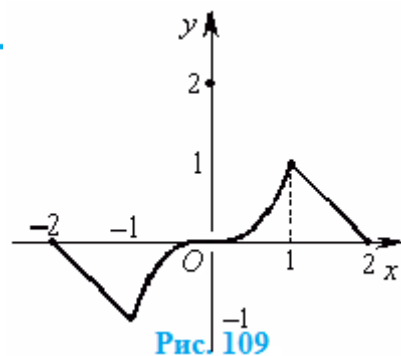


Рис. 109

5) Найдите нули функции $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

6) Найдите промежутки возрастания (убывания) функции $y = -f(x)$.

7) * Найдите наименьшее значение функции $y = f(|x|)$.

82. На рис. 110 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(x - 1)$; 2) $y = f(x) - 1$;

3) $y = 3f(x)$; 4) $y = f(3x)$; 5) $y = -f(x)$;

6) $y = f(-x)$; 7) * $y = |f(x)|$;

8) * $y = f(|x|)$; 9) * $y = f(|x| - 1)$.

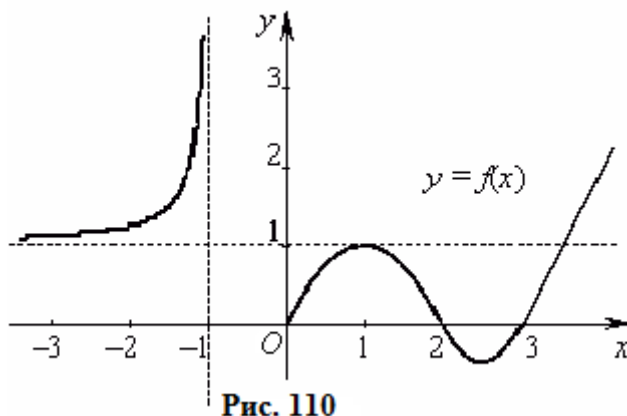


Рис. 110

83. Найдите функцию, график которой симметричен относительно оси абсцисс (оси ординат) графику функции:

1) $y = 3x - 4$; 2) $y = 2x^2 - x + 1$; 3) $y = \frac{x+2}{2x-1}$; 4) $y = -1$.

84. Найдите функцию, график которой симметричен относительно начала координат графику функции:

1) $y = -x + 5$; 2) $y = 2$; 3) $y = 4x - 3x^2 + 1$; 4) $y = \frac{-2x+3}{3x-2}$.

85*. Задайте аналитически функцию, если известно, что:

1) она является чётной, и $f(x) = x^2 - x$ при $x \geq 0$;

2) она является нечётной, и $f(x) = x^2 - 3x$ при $x \leq 0$.

Упражнения для повторения



86°. Может ли график функции пересекаться прямой $x = a$ в нескольких точках? А прямой $y = a$?

87°. Найдите значения аргумента, при которых функция $y = \frac{x}{x+2}$ принимает значение: 0; 1.

нимает значение: 0; 1.

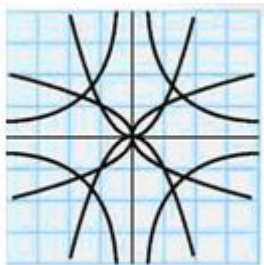
88. Найдите точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $a = 0$; 2) $f(x) = |2x - 1|$, $a = 2$; 3) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$, $a = \frac{1}{2}$.

89. Какая из следующих функций принимает каждое своё значение в единственной точке области определения?

1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \frac{1}{x-2}$; 4) $y = -x^2$, $x \leq 0$.

90. Камень бросили с высоты 20 м. Путь, пройденный им, можно определить по формуле $s = 5t^2$, где t — время, с; s — путь, м. Через сколько с камень упадет на Землю?



§ 7. Обратимые функции

Данный параграф посвящен рассмотрению функций, которые каждое своё значение принимают лишь в одной точке. Это позволяет строить новые функции.



Как известно, площадь круга S является функцией от радиуса r : $S = \pi r^2, r > 0$. С помощью этой формулы можно найти площадь круга S при произвольном значении радиуса r . И наоборот, если известна площадь круга S , то можно определить его радиус, решив уравнение $S = \pi r^2$ относительно r : $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Теперь уже переменную r можно трактовать как функцию от переменной S .

Аналогичные ситуации в практической деятельности встречаются достаточно часто. Например, зная форму зависимости пути от времени $s = f(t)$, можно решить обратную задачу: вычислить время, за которое тело прошло тот или иной путь. Задача о нахождении массы тела по его объему — обратная к задаче вычисления объема тела по заданной массе и т. п. Решение таких задач сводится к нахождению зависимостей, обратных данным.

Рассмотрим линейную функцию $y = 2x + 1$, которая каждому значению $x \in \mathbf{R}$ ставит в соответствие единственное значение y . С другой стороны, любому значению $y \in \mathbf{R}$ соответствует единственное значение x , которое можно найти по формуле $x = \frac{y-1}{2}$. Эта зависимость x от y также является функциональной. Если, как обычно, обозначить аргумент буквой x , то получим функцию $y = \frac{x-1}{2}$. Эта функция называется **обратной** к функции $y = 2x + 1$.

Таким образом, линейная функция произвольное свое значение принимает только в одной точке из области определения. Функции, обладающие таким свойством, называются **обратимыми**.

Следовательно, **обратимая функция — это такая функция, которая каждое свое значение принимает лишь в одной точке области определения**.

Геометрически это означает, что график функции не имеет точек с разными абсциссами, но с одинаковыми ординатами. Иначе говоря, график обратимой функции пересекается осью абсцисс и каждой прямой, параллельной оси абсцисс, не более чем в одной точке. Линейная функция $y = kx + b$ при произвольных b и $k \neq 0$ обратима.

Функция $y = x^2$ необратима, поскольку уравнение $y = x^2$ имеет два решения: $x_1 = \sqrt{y_0}$; $x_2 = -\sqrt{y_0}$. Произвольная прямая $y = y_0, y_0 > 0$, пересекает пара-

болу $y = x^2$ в двух точках. Однако, если требовать, чтобы x принимало только неотрицательные значения, то функция $y = x^2, x \geq 0$, обратима.

Пусть $y = f(x)$ — некоторая обратимая функция с областью определения D и множеством значений E . Если каждому y из E поставим в соответствие единственное значение x из D такое, что $f(x) = y$, то получим функцию $x = g(y)$ с областью определения E и множеством значений D .

Если перейти к обычным обозначениям аргумента, получим функцию $y = g(x)$, которую называют обратной к функции $y = f(x)$.

Если функция $y = g(x)$ является обратной к функции $y = f(x)$, то функция $y = f(x)$ является обратной к функции $y = g(x)$. Поэтому такие функции называются **взаимно обратными**.

Обратную функцию имеют все возрастающие или убывающие функции, то есть монотонные функции.

Для того, чтобы найти для данной функции $y = f(x)$ обратную, необходимо:

- 1) **убедиться, что функция $y = f(x)$ имеет обратную;**
- 2) **решить уравнение $y = f(x)$ относительно x ;**
- 3) **поменять местами переменные x и y .**

Пример 1. Найти обратную функцию для $y = 3x - 1$.

□ 1) Данная функция возрастает на всей числовой прямой, поэтому она имеет обратную.

2) Решим уравнение $y = 3x - 1$ относительно x : $x = \frac{y+1}{3}$.

3) Поменяв местами буквы, которыми обозначены переменные, получим искомую функцию $y = \frac{x+1}{3}$. ■

Ответ: $y = \frac{x+1}{3}$.

Построим на одном рисунке графики функций $y = 3x - 1$ и $y = \frac{x+1}{3}$ (рис. 111). Обратите внимание на то, что эти графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример 2. Найти функцию, обратную для функции $y = x^2, x \geq 0$.

□ 1) Эта функция возрастает на области определения $[0; +\infty)$, а следовательно, она имеет обратную.

2) Решим уравнение $y = x^2$ относительно x : $x = \pm\sqrt{y}$. Поскольку $x \geq 0$, то берем лишь неотрицательные значения корня: $x = \sqrt{y}$.

3) Заменяя обозначения переменных, получим $y = \sqrt{x}$. ■

Ответ: $y = \sqrt{x}$.

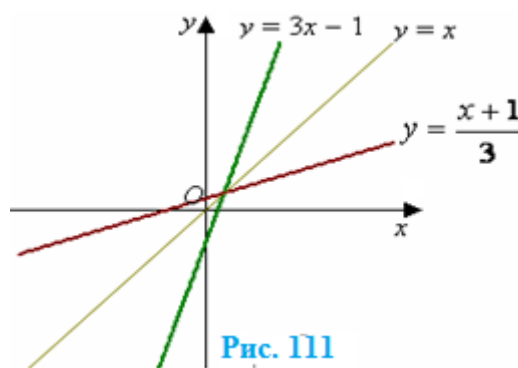


Рис. 111

Аналогично можно показать, что функция $y = -\sqrt{x}$ является обратной к функции $y = x^2, x \leq 0$.

Построим на одном рисунке графики функций $y = x^2, x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$. (рис. 112). Обратите внимание на то, что эти графики, как и в примере 1, симметричны относительно прямой $y = x$.

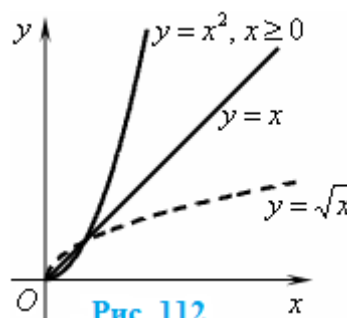


Рис. 112



Рассмотрим особенности графиков взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в общем случае. Пусть точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то есть $y_0 = f(x_0)$. Тогда, согласно определению обратной функции, $x_0 = g(y_0)$, то есть точка $B(y_0; x_0)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$. Нетрудно заметить, что точки A и B симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Поэтому графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Иллюстрациями этого факта являются рис. 111, 112.

Вы уже заметили, что, зная свойства одной из взаимно обратных функций, нетрудно установить свойства второй и даже построить ее график. Так, при переходе от некоторой функции к обратной для нее функции область определения и множество значений меняются местами. Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно биссектрисы I и III координатных углов. Кроме этого, взаимно обратные функции обладают таким свойством.

Свойство 1. Если $y = f(x)$ — возрастающая (убывающая) функция, то обратная к ней функция $y = g(x)$ также возрастает (убывает).

□ Будем считать, что $y = f(x)$ — возрастающая функция. Докажем, что обратная к ней функция $y = g(x)$ также возрастает. Пусть x_2 и x_1 — произвольные точки из области определения функции $y = g(x)$ такие, что $x_2 > x_1$, и пусть $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$. По определению обратной функции $x_1 = f(y_1)$ и $x_2 = f(y_2)$. Поскольку $y = f(x)$ является возрастающей функцией и по условию $x_2 > x_1$, то $y_2 > y_1$. Таким образом, из условия $x_2 > x_1$ вытекает, что $g(x_2) > g(x_1)$. Это и надо было доказать. ■

Например, из возрастания функции $y = x^2, x \geq 0$ сразу вытекает возрастание функции $y = \sqrt{x}$.



Существуют немонотонные функции, являющиеся обратимыми, то есть имеющие обратную функцию. Например, функция $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ x-1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ (см. рис. 113) не является

монотонной, поскольку $y(-1) = 1$, $y(0) = -1$. Однако она является обратимой, так как каждой прямой, параллельной оси x , и осью x её график пересекается в одной точке. Рекомендуем построить график обратной функции.

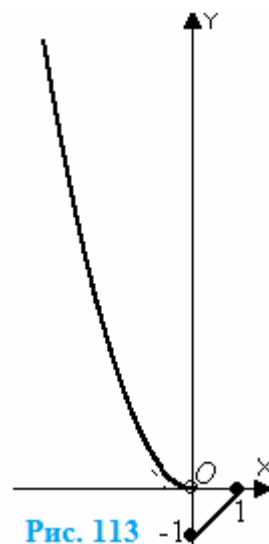


Рис. 113



Контрольные вопросы

1. ° Функция $y = f(x)$ является монотонной. Каква область определения функции, обратной к данной?
2. ° Имеет ли каждая возрастающая (убывающая) функция обратную?
3. ° Имеет ли каждая линейная функция обратную?
4. ° Какие из функций, которые заданы графиками на рис. 114, имеют обратные?

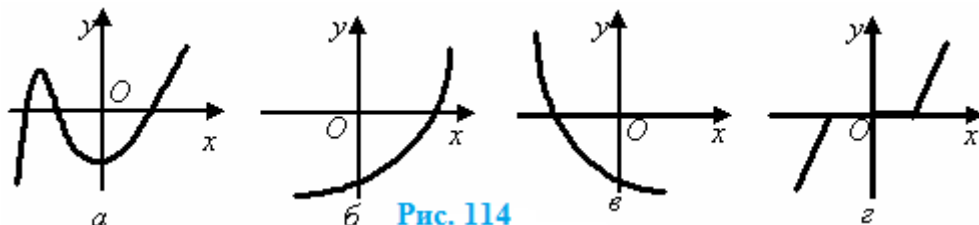


Рис. 114

5. ° Имеет ли обратную функция: а) $y = x^2$; б) $y = x^2, -1 \leq x \leq 2$; в) $y = x^2, -1 \leq x \leq 0$; г) $y = x^3$?
6. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает, а ее график проходит через точку $A(2; 5)$. Через какую точку проходит график обратной ей функции?
7. Относительно какой прямой симметричны графики взаимно обратных функций?
8. Являются ли функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рис. 115, взаимно обратными?
9. Какие особенности имеет график функции, обратной самой себе?
10. * Графики взаимно обратных функций имеют одну точку пересечения. Где она расположена?
11. * Известно, что некоторая функция имеет обратную. Обязательно ли она монотонна?
12. * Функция возрастает на каждом из промежутков $[-1; 0)$ и $[0; 1]$. Обязательно ли она имеет обратную?

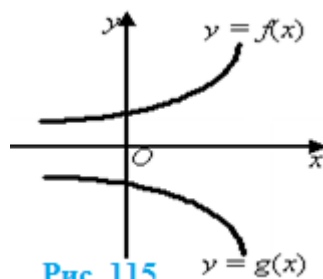


Рис. 115

Задачи

91. Найдите функцию, обратную данной. Укажите ее область определения и множество значений. Постройте на одном рисунке графики этих функций.

- 1) $y = 0,1x + 4$; 2) $v = 3u + 5$; 3) $z = \sqrt{t}$; 4) $y = \frac{1}{x}$;
- 5) $y = 3x^2, x \in [0; \infty)$; 6) $y = x^2, 1 \leq x \leq 3$; 7) $y = \frac{x}{x-1}$; 8) $y = \frac{t+1}{3t-2}$;
- 9) $u = \sqrt{x+3}$.

92. Известно, что при напряжении $U = 2,4$ В сила тока $I = 0,8$ А. Используя закон Ома, найдите зависимость:

- 1) напряжения от силы тока;
- 2) силы тока от напряжения.

93. Найдите зависимость:

1) площади S прямоугольного равнобедренного треугольника от длины его катета a ;

2) длины катета a прямоугольного равнобедренного треугольника от его площади S .

Постройте графики этих зависимостей на одном рисунке.

94. По заданному графику функции $y = f(x)$ (рис. 116, 117) найдите:

1) значение обратной ей функции в точках $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$;

2) область определения и множество значений обратной функции. Постройте график обратной функции.

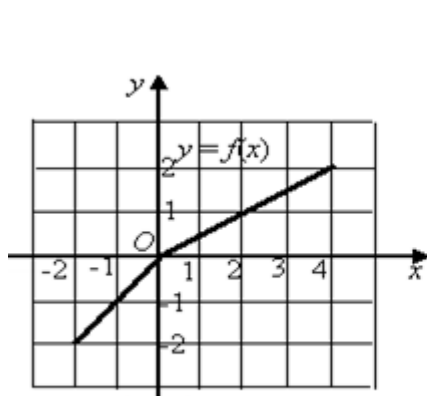


Рис. 116

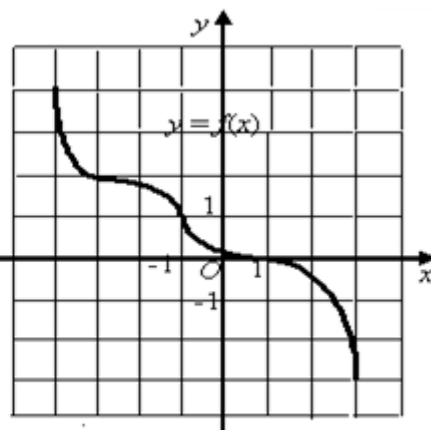


Рис. 117

95. Докажите, что функции $y = \frac{1}{x-2}$ и $y = \frac{2x+1}{x}$ являются взаимно обратными.

96. * Для функции $y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$ найдите обратную, если она существует.

Постройте графики обеих функций на одном рисунке.

97. * Функция задана формулой $y = (-3)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Является ли эта функция монотонной? Имеет ли она обратную?

98. * Докажите, что функция $y = 5x^3 + 2x - 1$ имеет обратную.

99. * Докажите, что функция $y = 3x^4 + 5x^2 + 2$ не имеет обратной.

Упражнения для повторения

100. Решите уравнение: 1) $6(x-1)+2=0$; 2) $3x-2=5x+1$; 3)

$3x^2-2x-1=0$; 4) $\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$; 5) $\frac{3x^2-2x}{-6x+4}=0$;

6) $\frac{x^2-3x-4}{2x^2-x-3}=0$; 7) $|5x-2|=1$; 8) $|x^2+x-1|=-6$.

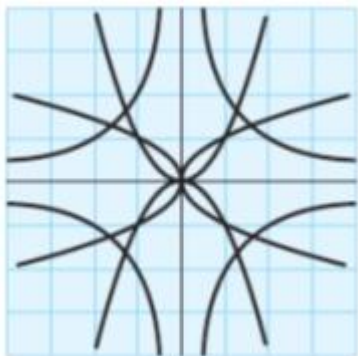
101. При каких значениях c график функции $y = x^2 - 2cx + c^2$ проходит через точку $A(1; 4)$?

102. Решите неравенство:

1) $1-1,5x < x$; 2) $2 \leq 2-x < 5$; 3) $x^2 \geq 3$; 4) $x^2 < 3$; 5) $x^2 > -3$; 6) $x^2 < -3$; 7) $x^2 \geq x$;
8) $7x^2 - 4x - 3 < 0$; 9) $7x^2 - 4x + 3 \geq 0$; 10) $(x+1)(3-x) < 0$.

103. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{1-5(x+3)}$; 2) $y = \sqrt{x(x+1)}$; 3) $y = \sqrt{5x-20} + \sqrt{9-2x}$.



§ 8. Уравнения и неравенства

В данном параграфе систематизируются и обобщаются основные понятия, связанные с уравнениями и неравенствами, рассматриваются некоторые методы их решения.



1. Рациональные уравнения

Вам уже приходилось решать линейные, квадратные, дробно-рациональные уравнения. Теперь наряду с систематизацией методов решения таких уравнений, будем решать такие же уравнения, но с параметрами.

Сначала напомним основные понятия, связанные с решением уравнений.

Значение переменной, при котором уравнение обращается в правильное числовое равенство, называется корнем или решением уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни, или доказать, что оно не имеет корней.

Уравнения называются равносильными, если они имеют одни и те же корни или не имеют корней.

Равносильность двух уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ обозначается символом $\Leftrightarrow$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.

Например, $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ и $x + 1 = 0$ — равносильные уравнения, потому что оба они имеют единственный корень $x = -1$. А вот уравнения $(x + 1)(x^2 - 4) = 0$ и $x + 1 = 0$ неравносильны, потому что первое уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, а второе — корень $x = -1$.

Замена уравнения равносильным ему уравнением называется равносильным преобразованием уравнения.

Как вам уже известно, **равносильные уравнения можно получить из данного**, если:

- 1) перенести члены уравнения из одной части в другую с противоположным знаком;
- 2) прибавить к обеим частям уравнения одно и то же число;
- 3) умножить обе части уравнения на число, **отличное от нуля**.

Эти основные свойства уравнений вытекают из основных свойств числовых равенств.

Уравнения могут иметь разные виды в зависимости от выражений, которые образуют их. Наиболее простые из известных вам уравнений — это линейные и квадратные. При решении этих уравнений никаких осложнений не возникало: все преобразования были равносильными. Иное дело с решением так называемых дробно-рациональных уравнений. Приведем необходимые определения.

Выражения, составленные из чисел и переменной, над которыми выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем, называются рациональными выражениями.

Уравнения, содержащие только рациональные выражения, называются рациональными.

Например, $\frac{2x-1}{x+3} = x$, $x^2 - 3\sqrt{2}x = 1$, $x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6} = 0$ — рациональные уравнения.

Рациональное выражение, которое не содержит в знаменателе переменную, называется целым рациональным выражением.

Уравнения, которые содержат только целые рациональные выражения, называются целыми рациональными уравнениями.

Так, второе и третье из вышеприведенных уравнений являются целыми рациональными уравнениями. В отличие от них первое уравнение относят к дробно-рациональным уравнениям.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x^2 + x - 2}{(x+1)(x+2)} = 0$.

□ Дробь может равняться нулю только в том случае, когда его числитель равняется нулю, а знаменатель не равняется нулю. Приравняв числитель нулю, получим квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Число $x_2 = 1$ является корнем исходного уравнения, а вот число $x_1 = -2$ не является его корнем, ведь при $x = -2$ его знаменатель равняется нулю. ■

Ответ: $x = 1$.

В рассмотренном примере данное по условию уравнение имеет один корень, а квадратное уравнение имеет два корня, причем один из них совпадает с корнем исходного уравнения. В таких случаях говорят, что квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ является **следствием**, а число -2 «посторонним» корнем уравнения $\frac{x^2 + x - 2}{(x+1)(x+2)} = 0$.

Пусть заданы два уравнения $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$. Если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то уравнение $g(x) = 0$ называют следствием уравнения $f(x) = 0$.

Например, уравнение $x^2 = 1$ является следствием уравнения $x - 1 = 0$, потому что корнями первого уравнения являются числа $x = \pm 1$, а второго — число $x = 1$.

Тот факт, что одно уравнение является следствием второго, обозначают знаком $\Rightarrow$: $x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$.

Если при решении некоторого уравнения выполняются неравносильные преобразования, которые приводят к уравнению-следствию, то необходимо проверить, являются ли полученные числа корнями исходного уравнения. Об-

ратите внимание на то, что корни любого уравнения $f(x) = 0$ находятся лишь среди тех значений переменной x , для которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Множество значений переменной, при которых определены выражения, образующие уравнение, называется областью определения уравнения, или областью допустимых значений уравнения, или сокращенно — ОДЗ.

Например, ОДЗ уравнения $\frac{x^3-1}{x-1}=3$ является множество $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$,

ОДЗ уравнения $x^2 + (\sqrt{x})^2$ — множество $[0;+\infty)$.

В случае дробно-рационального уравнения для выявления посторонних корней достаточно проверить, что полученные при решении числа не обращают в нуль знаменатель какой-то дроби, входящей в уравнение. Число, которое обращает в нуль знаменатель, по крайней мере, одной дроби, является посторонним корнем исходного уравнения.

Чтобы два уравнения были равносильными, необходимо и достаточно, чтобы каждое из них было следствием другого.



При решении дробно-рациональных уравнений полезно использовать следующее утверждение.

Уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые мно-

гочлены, равносильно системе $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$ Уравнение $P(x) = 0$ является его

следствием.

Согласно этому утверждению, уравнение, которое рассматривалось в примере 1, равносильно системе $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ (x+1)(x+2) \neq 0. \end{cases}$

При решении дробно-рациональных уравнений можно получить следствие уравнения, не только отбрасывая знаменатель дроби, но и выполняя другие операции. Так, если в уравнении $\frac{x^3-1}{x-1}=0$ сократить дробь

$\left(\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1 \right)$, то получим уравнение $x^2+x-2=0$,

корнями которого являются числа $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Но только $x_1 = -2$ является корнем исходного уравнения, $x_2 = 1$ — посторонний корень (почему?).

При решении уравнений может возникнуть еще одна опасность — потеря корней. Например, если разделить обе части уравнения $x^2(x+1) = 4(x+1)$ на общий множитель $x+1$, то получим уравнение $x^2 = 4$, корнями которого являются числа $x = \pm 2$. Данное уравнение, кроме этих корней, имеет еще корень $x = -1$ (проверьте это!).

Поэтому важно знать, какие преобразования приводят уравнение к его следствию, а какие — к потере корней.

Сокращение обеих частей уравнения на некоторое выражение может привести к потере корней. Потерять корни значительно более опасно, чем получить «посторонние корни», от которых можно избавиться проверкой.

Как же решить уравнение $x^2(x + 1) = 4(x + 1)$? Перенесем все члены уравнения в левую часть и вынесем общий множитель. Получим уравнение $(x + 1)(x^2 - 4) = 0$. Это произведение равняется нулю тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из сомножителей равняется нулю. Решив уравнения $x + 1 = 0$ и $x^2 - 4 = 0$ и объединив множества их корней, будем иметь все корни данного уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Метод, который мы сейчас использовали при решении уравнения, называют **методом разложения на множители**. Это один из основных методов решения целых рациональных уравнений. Сущность его заключается в следующем.

Левую часть целого рационального уравнения $P(x) = 0$ разлагают на множители, то есть представляют в виде $P_1(x) \cdot P_2(x) = 0$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — некоторые многочлены. Решив уравнения $P_1(x) = 0$ и $P_2(x) = 0$ и объединив множества их корней, получим решения исходного уравнения. В этом случае говорят, что уравнение $P_1(x) \cdot P_2(x) = 0$ равносильно совокупности уравнений $P_1(x) = 0$ и $P_2(x) = 0$.

Решить совокупность нескольких уравнений с одной переменной — это значит найти объединение множеств корней этих уравнений.

Совокупность уравнений записывают или в строку, или их объединяют квадратными скобками:

$$\left[\begin{array}{l} P_1(x) = 0, \\ P_2(x) = 0. \end{array} \right.$$

Решение многих уравнений сводится к решению совокупности уравнений.

Пример 2. Решить уравнение $|x^2 + 5x| = 6$.

□ Модуль выражения $x^2 + 5x$ равняется 6 тогда и только тогда, когда оно принимает значение 6 или -6 . Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 + 5x = 6$, $x^2 + 5x = -6$. Корнями первого квадратного уравнения являются числа 1 и -6 , второго — числа -2 и -3 . ■

Ответ: 1, -6 , -2 , -3 .

Совокупность уравнений следует отличать от системы уравнений. Напомним, что решение системы уравнений с одной переменной — это такое значение переменной, которое является корнем **каждого** уравнения системы. Если бы вместо совокупности уравнений в примере 2 мы бы рассмотрели систему тех же уравнений, то она не имела бы решений.

Контрольные вопросы



1. ° Является ли число $x = 2$ корнем уравнения: а) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4} = 0$;
б) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = 0$?

2. ° Сколько корней имеет уравнение:

а) $2x^2 + 6x - 5 = 0$; б) $2x^2 + 6x + 5 = 0$; в) $\frac{x^2 - x}{x+1} = 0$; г) $\frac{x^2 - x}{x-1} = 0$?

3. ° Дано уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$. Какие среди уравнений 1) $(x+1)(x-3) = 0$;

2) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x-3} = 0$; 3) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x+3} = 0$; 4) $(x+1)(x^2 - 9) = 0$:

а) равносильны данному;

б) являются следствиями данного, но не равносильными ему?

4. Какое из следующих утверждений является верным?

а) $(x-1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$;

б) $(x-1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$;

в) $x(3x+2) = x^2 \Leftrightarrow 3x+2 = x$.

5. Какие из следующих пар уравнений являются равносильными:

а) $x^2 - \frac{4}{x+3} + \frac{4}{x+3} + 3x = 0$, $x^2 + 3x = 0$; б) $\sqrt{(x+2)^2} = 1$, $x+2 = 1$;

в) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x+3} = 0$, $x^2 + 5x + 6 = 0$; г) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x-3} = 0$, $x^2 + 5x + 6 = 0$?

6. ° В скольких точках график функции $y = f(x)$ пересекает ось x , если:

а) $f(x) = x^2 + 3x$; б) $f(x) = x^2 + 3$; в) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$; г) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+3}$?

7. * Существует ли уравнение, являющееся следствием произвольного другого уравнения?

8. * Существует ли уравнение, для которого произвольное другое уравнение будет его следствием?

2. Простейшие уравнения с параметрами



Вы уже встречались с задачами, которые содержали параметры. Так, свойства и графики линейных функций $y = kx + b$ (k, b — параметры), квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — параметры) зависят от значений параметров.

Пусть задано уравнение $F(x, a) = 0$ с двумя переменными. Надо для каждого допустимого значения a решить уравнение относительно x . В таком случае уравнение называют **уравнением с одной переменной x и параметром a** .

Уравнение может содержать и несколько параметров. Например, линейное уравнение $ax = b$ содержит два параметра a и b . Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ содержит три параметра a, b и c .

Уравнение с параметрами — это целое семейство уравнений.

Если уравнение содержит параметр, то его следует решать с учетом значений этого параметра. Так, деление на выражение, содержащее параметр, или извлечение корня чётной степени из таких выражений требуют дополнительных исследований.

Рассмотрим, например, линейное уравнение $ax = b$ (a, b — параметры). На первый взгляд, кажется, что решить его очень просто: нужно обе части уравнения разделить на a и получим корень $x = \frac{b}{a}$. Но это будет верно лишь

для $a \neq 0$. Если $a = 0$, то делить на 0 нельзя. В этом случае имеем уравнение $0 \cdot x = b$ и дальнейшее его решение зависит от b . Если $b = 0$, то корнем этого уравнения будет любое число. Если $b \neq 0$, то очевидно, что уравнение корней не имеет.

Обратите внимание на то, что линейное уравнение может иметь или один корень (при $a \neq 0$), или бесконечное множество корней (при $a = 0, b = 0$), или не иметь корней (при $a = 0, b \neq 0$).

Существенным при решении уравнений с параметрами является правильная запись ответа. В ответе должны быть отображены все этапы исследования уравнения в зависимости от значений параметров. Например, ответ к заданию «решить уравнение $ax = b$ » имеет такой вид: если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$; если

$a = 0, b = 0$, то x — произвольное число; если $a = 0, b \neq 0$, то корней нет.

Пример 1. При каких значениях a уравнение $ax^2 - 3x + 1 = 0$ имеет единственный корень?

□ Прежде всего обратим внимание на то, что это уравнение необязательно является квадратным. Если $a = 0$, то имеем линейное уравнение $-3x + 1 = 0$, корень которого равняется $\frac{1}{3}$. Если $a \neq 0$, то уравнение будет квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант $D = 9 - 4a = 0$, то есть при $a = \frac{9}{4}$. ■

Ответ: $a = 0, a = \frac{9}{4}$.

Пример 2. При каких значениях параметра a графики функций $y = (2a - 5)x^2 + (a + 2)x + 5$ и $y = 3ax + 2$: 1) пересекаются в одной точке; 2) пересекаются в двух точках; 3) не пересекаются?

□ 1) Поскольку в точках пересечения значения функций равны, получим уравнение $(2a - 5)x^2 + (a + 2)x + 5 = 3ax + 2$ или после преобразований $(2a - 5)x^2 - 2x(a - 1) + 3 = 0$. Если $a = \frac{5}{2}$, то имеем линейное уравнение $x - 1 = 0$. Если $a \neq \frac{5}{2}$, то уравнение будет квадратным. Найдем его дискриминант D : $D = (a - 1)^2 - 3(2a - 5) = a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$. Уравнение имеет единственный корень при $a = 4$. Следовательно, при $a = \frac{5}{2}$ и $a = 4$ графики пересекаются в единственной точке.

2) Графики пересекаются в двух точках, если выполнены условия $\begin{cases} 2a-5 \neq 0 \\ D > 0 \end{cases}$, то есть при $a \neq \frac{5}{2}$ и $a \neq 4$.

3) Из результатов решения первых двух заданий вытекает, что графики заданных функций пересекаются при любом значении a . ■

Ответ: 1) $a = \frac{5}{2}$, $a = 4$; 2) $a \neq \frac{5}{2}$; $a \neq 4$; 3) Графики пересекаются при любом значении a .

Пример 3. Решить уравнение: $(k-1)x^2 - 3x - 1 = 0$.

□ Если $k = 1$, то данное уравнение принимает вид $-3x - 1 = 0$, то есть является линейным уравнением, которое имеет единственный корень $x = -\frac{1}{3}$.

Если $k \neq 1$, то имеем квадратное уравнение, решение которого зависит от его дискриминанта. Составим дискриминант: $D = 9 + 4(k-1) = 4k + 5$.

Если $4k + 5 > 0$ и $k \neq 1$, то есть $k > -\frac{5}{4}$, $k \neq 1$, то уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4k+5}}{k-1}$. Если $4k + 5 = 0$, то есть $k = -\frac{5}{4}$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3}{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{4}{3}$. Наконец, если $4k + 5 < 0$, то уравнение корней не имеет. ■

Ответ: Если $k > -\frac{5}{4}$, $k \neq 1$, то $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4k+5}}{k-1}$; если $k = -\frac{5}{4}$, то $x = -\frac{4}{3}$; если $k = 1$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $k < -\frac{5}{4}$, то уравнение корней не имеет.



Рассмотрим дробно-рациональное уравнение с параметром.

Дробно-рациональное уравнение — это уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и

$Q(x)$ — некоторые многочлены. Известно, что это уравнение равносильно системе $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Пример 4. Решить уравнение $\frac{x^2 - x(a+1) + a}{x-2} = 0$.

□ Разложив числитель дроби на множители, получим уравнение $\frac{(x-a)(x-1)}{x-2} = 0$, равносильное системе $\begin{cases} (x-a)(x-1) = 0, \\ x \neq 2 \end{cases}$ или системе $\begin{cases} x = a, x = 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Следовательно, если $a = 2$ или $a = 1$, то корнем уравнения является число $x = 1$. Если $a \neq 2, a \neq 1$, то уравнение имеет два корня $x = 1$ и $x = a$. ■

Ответ: Если $a = 2$ или $a = 1$, то $x = 1$. Если $a \neq 2, a \neq 1$, то $x = 1$ и $x = a$.

Пример 5. При каких значениях k уравнение $\frac{x^2 - kx - 1}{x - 3} = 0$ имеет единственный корень?

□ Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - kx - 1 = 0, \\ x - 3 \neq 0. \end{cases}$ Дискриминант уравнения $x^2 - kx - 1 = 0$ равняется $k^2 + 4$, он положителен при всех значениях k , то есть это уравнение при любом k имеет два корня. Требования задания будут выполняться, если один из корней уравнения $x^2 - kx - 1 = 0$ будет равняться 3, то есть $9 - 3k - 1 = 0$. Отсюда $k = \frac{8}{3}$. ■

Ответ. $k = \frac{8}{3}$.



Чтобы определить знаки корней квадратного уравнения, необязательно его решать. Для этого обычно используют теорему Виета: если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то $x_1 x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$.

Пример 6. При каких значениях параметра m уравнение $x^2 - 6mx + 9m^2 - 4 = 0$ имеет:

- 1) корни разных знаков;
- 2) два отрицательных корня?

□ 1) Найдем дискриминант D уравнения: $\frac{1}{4}D = 9m^2 - 9m^2 + 4 = 4 > 0$, то есть уравнение при любом m имеет два корня x_1 и x_2 . Для того, чтобы x_1 и x_2 имели разные знаки, необходимо и достаточно, чтобы $x_1 x_2 < 0$. Согласно теореме Виета получим: $9m^2 - 4 < 0$. Решением этого неравенства является промежуток $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. При этих значениях m уравнение имеет корни разных знаков.

2) Для того, чтобы уравнение имело два отрицательных корня $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\begin{cases} x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$. Со-

гласно теореме Виета имеем систему неравенств $\begin{cases} 9m^2 - 4 > 0 \\ 6m > 0 \end{cases}$, решением которой является промежуток $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. ■

Ответ. 1) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.



Контрольные вопросы

1. При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:
а) $(a^2 - 1)x = 3$; б) $x^2 + 3ax + 4 = 0$; в) $\frac{x+5}{x-a} = 0$?
2. При каких значениях параметра a линейное уравнение $(a^2 - 1)x = a + 1$ имеет:
а) один корень; б) два корня; в) бесконечное множество корней?
3. При каких значениях k уравнение $\frac{(x-k)(x+2)}{x-1} = 0$ имеет один корень?
4. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2 - (5a - 1)x = 0$ неотрицательны?

3. Рациональные неравенства. Метод интервалов



В этом пункте рассматривается один из важнейших методов решения рациональных неравенств — метод интервалов.

Рациональными неравенствами называются неравенства

вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ $\left(\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0\right)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены. Линейные и квадратные неравенства — частные случаи рациональных неравенств.

В первую очередь, напомним основные понятия, связанные с решением неравенств.

Если два выражения $f(x)$ и $g(x)$ с некоторой переменной x связаны знаком « $>$ », « $<$ » то говорят, что задано неравенство с одним неизвестным.

Решением неравенства с одним неизвестным называется такое число, при подстановке которого в неравенство получаем верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти множество всех его решений или доказать, что решений не существует.

Неравенства называются равносильными, если совпадут множества их решений. Равносильность неравенств $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ обозначается так:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0.$$

Процесс решения неравенства приблизительно такой же, как и процесс решения уравнения: пытаются его преобразовать так, чтобы получить более простое неравенство. Однако, есть и существенные отличия. Уравнение мож-

но сводить или к равносильному, или к следствию. В последнем случае решение заканчивается проверкой, которая позволяет отбросить посторонние корни. Неравенство обычно имеет бесконечное множество решений, которое делает проверку практически невозможной. Поэтому неравенство *всегда пытаются сводить к равносильному* с помощью следующих свойств.

Свойство 1. Если из одной части неравенства в другую перенести некоторое выражение с противоположным знаком, то получим равносильное неравенство.

Свойство 2. Если обе части неравенства умножить на положительное число, будем иметь неравенство, равносильное данному.

Свойство 3. Если обе части неравенства умножить на отрицательное число и при этом изменить знак неравенства на противоположный, получим неравенство, равносильное данному.

При умножении обеих частей неравенства на некоторое число, необходимо, в соответствии со свойствами 2 и 3, учитывать знак этого числа. Поэтому нельзя умножать или делить обе части неравенства на выражение, знак которого не определен. Если, например, обе части неравенства $\frac{1}{x} < 1$ умножить на x , то получим неравенство $1 < x$, не равносильное данному. Действительно, произвольное отрицательное число является решением неравенства $\frac{1}{x} < 1$, но не является решением неравенства $1 < x$.

При решении квадратных неравенств обычно применяют или график квадратичной функции, или разложение квадратного трехчлена на множители. Так, чтобы решить неравенство $x^2 - x - 6 < 0$, вычислим нули квадратного трехчлена $x^2 - x - 6$ ($x_1 = -2$, $x_2 = 3$) и разложим его на множители: $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. В результате получим неравенство $(x + 2)(x - 3) < 0$. Произведение $(x + 2)(x - 3)$ будет отрицательным тогда и только тогда, когда его множители имеют противоположные знаки. Следовательно, данное неравенство равносильно совокупности следующих двух систем: $\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x - 3 < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2 < 0, \\ x - 3 > 0. \end{cases}$

Решив их, найдем: $x \in (-2; 3)$.

Пусть нам теперь нужно решить неравенство $(x + 1)(x^2 + 2x - 3) > 0$. Попробуем решить его тем же методом, что и квадратное неравенство. Разложим левую часть неравенства на линейные множители: $(x + 1)(x - 1)(x + 3) > 0$. Произведение трех сомножителей положительно, если все они положительны, или один сомножитель положителен, а два другие отрицательны. Следовательно, данное неравенство равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 < 0, \\ x - 1 < 0, \\ x + 3 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 < 0, \\ x - 1 > 0, \\ x + 3 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 > 0, \\ x - 1 < 0, \\ x + 3 < 0. \end{cases}$$

Понятно, что такой способ решения нерационален, потому что, например, при четырех сомножителях пришлось бы рассматривать уже 8 систем! Поэтому используем **метод интервалов**.

Вернемся к предложенному выше неравенству $(x + 1)(x - 1)(x + 3) > 0$.

Многочлен $(x + 1)(x - 1)(x + 3)$ имеет три корня $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, которые делят его область определения $(-\infty; +\infty)$ на интервалы $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$. На каждом из этих интервалов многочлен сохраняет свой знак. Действительно, если $x > 1$, то все множители многочлена являются положительными. Следовательно, многочлен принимает положительные значения на интервале $(1; +\infty)$. Если $-1 < x < 1$, то множитель $x - 1$ отрицателен, а все остальные положительны. Следовательно, $(x + 1)(x - 1)(x + 3) < 0$ на интервале $(-1; 1)$. На интервале $(-3; -1)$ множители $x - 1$ и $x + 1$ отрицательны, а множитель $x + 3$ — положителен. Следовательно, на этом интервале $(x + 1)(x - 1)(x + 3) > 0$. На интервале $(-\infty; -3)$ все множители отрицательны и поэтому $(x + 1)(x - 1)(x + 3) < 0$.



Следить за изменением знаков многочлена удобно, если изобразить числовую ось и на ней все нули многочлена (рис.

118). Сначала определим знак многочлена на крайнем правом промежутке, а потом при переходе к следующему интервалу будем изменять знак на противоположный. Заштрихуем те промежутки, на которых выполняется заданное неравенство.

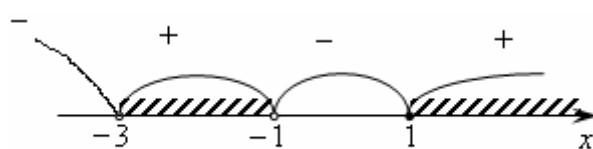


Рис. 118

Подобные рассуждения справедливы для любого многочлена, если в его разложении отсутствуют одинаковые множители.

Метод интервалов используется не только для решения целых рациональных, но и для решения дробно-рациональных неравенств.

Пример 6. Решить неравенство $\frac{1}{x} < 1$.

□ Перенесем число 1 из правой части неравенства в левую с противоположным знаком, представим выражение $\frac{1}{x} - 1$ в виде дроби $\frac{1-x}{x}$ и будем

иметь неравенство $\frac{1-x}{x} < 0$. Отметим на числовой оси нуль числителя $x = 1$ и

нуль знаменателя $x = 0$ (рис. 119). Эти точки делят числовую ось на три промежутка: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. Опре-

делим знаки дроби $\frac{1-x}{x}$ на каждом из

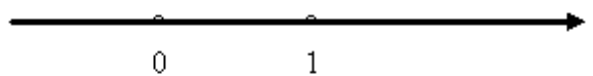


Рис. 119

полученных промежутков. Начнем с крайнего правого промежутка. На промежутке $(1; +\infty)$ числитель принимает отрицательные значения, а знаменатель — положительные. Следовательно,



Рис. 120

дробь $\frac{1-x}{x}$ отрицательна. При переходе через точку $x = 1$ справа налево числитель изменяет знак, а знаменатель не изменяет знака. Поэтому на промежутке $(0; 1)$ дробь $\frac{1-x}{x}$ положительна. При переходе через точку $x = 0$ знак изменяет только знаменатель (рис. 120). Проведенные исследования показывают, что решением данного неравенства является множество $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. ■

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Решим методом интервалов более сложные дробно-рациональные неравенства.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{2x+3}{x^2+x-12} \leq \frac{1}{2}$.

□ Перенесем $\frac{1}{2}$ в левую часть и произведем действия над дробями:

$$\frac{x^2-3x-18}{2(x^2+x-12)} \geq 0.$$

Разложим числитель и знаменатель дроби, которая стоит в

левой части, на множители: $\frac{(x+3)(x-6)}{2(x+4)(x-3)} \geq 0$. Отметим на числовой оси все

нули числителя и знаменателя дроби. Поскольку неравенство является нестрогим, то есть $x = -3$, $x = 6$ являются его корнями, то для удобства нули числителя изображены черными точками, а нули знаменателя — незатемненными кружочками (рис. 121). Определим знак левой части неравенства на крайнем правом промежутке $(6; +\infty)$. На нем все четыре множителя дроби положительны. Поэтому и дробь является положительным числом (черт. 122). Проследим за изменением знака дроби при переходе к каждому следующему промежутку. При переходе справа налево через точку $x = 6$ множитель $x - 6$ становится отрицательным, а все остальные три множителя остаются положительными. Следовательно, на промежутке $(3; 6)$ исследуемая дробь принимает отрицательные значения. Аналогично можно проследить за изменением знаков дроби при переходе через точки $x = -3$ и $x = -4$ (рис. 123). Заштрихуем необходимые промежутки (черт. 124). ■

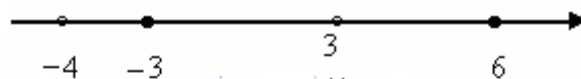


Рис. 121

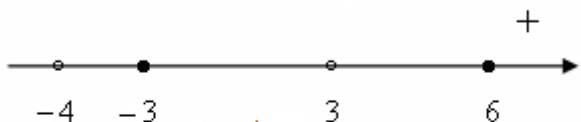


Рис. 122

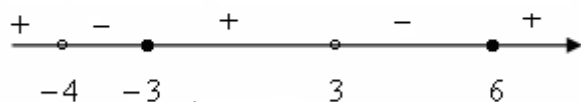


Рис. 123

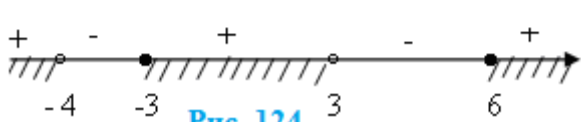


Рис. 124

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-3; 3) \cup [6; +\infty)$.

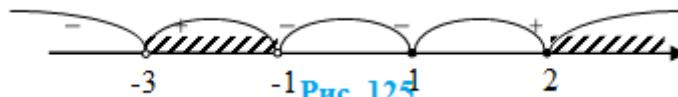
Рассмотрим решение дробно-рациональных неравенств, в которых в разложениях числителя и знаменателя есть одинаковые множители.

Пример 8. Решить неравенство $\frac{(x-2)^3(x-1)^2(x^2+1)}{x^2+4x+3} \geq 0$.

□ В первую очередь, необходимо разложить на простейшие множители числитель и знаменатель дроби, получим неравенство $\frac{(x-2)^3(x-1)^2(x^2+1)}{(x+3)(x+1)} \geq 0$. Нанесем на ось нули числителя и знаменателя.

Определим знак функции $f(x) = \frac{(x-2)^3(x-1)^2(x^2+1)}{(x+3)(x+1)}$ на каждом из получен-

ных интервалов. На промежутке $(2; +\infty)$ все множители положительны, следовательно, положительным является и произведение. При переходе через точку $x = 2$ множитель $(x-2)^3$ стал отрицательным, а остальные множители знака не изменили. Поэтому произведение поменяло знак и стало отрицательным. При переходе через точку $x = 1$ множитель $(x-1)^2$ не изменяет знака, поэтому не изменяет знака и произведение. Аналогично можно проследить за знаком функции



$f(x)$ при переходе через точки $x = -1$, $x = -3$. Результат исследования знаков отображен на рисунке 125. Следовательно, множество решений неравенства имеет вид:

$(-3; -1) \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$. ■

Ответ: $(-3; -1) \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Обратите внимание на то, что при решении неравенства мы фактически не учитывали множитель $(x^2 + 1)$, который принимает только положительные значения, то есть его можно было сразу "отбросить" и перейти к решению не-

равенства $\frac{(x-2)^3(x-1)^2}{(x+3)(x+1)} \geq 0$. Подумайте, почему это так и можно ли было аналогично сделать с неотрицательным множителем $(x-1)^2$?

Неравенство еще можно упростить, если множители с нечётными показателями степени, большими 1, заменить соответствующими множителями

первой степени. Так, неравенство $\frac{(x-2)^3(x-1)^2}{(x+3)(x+1)} \geq 0$ равносильно неравенству

$$\frac{(x-2)(x-1)^2}{(x+3)(x+1)} \geq 0.$$

Иногда при решении дробно-рациональных неравенств приходится сокращать дроби, при этом следует учитывать значения переменной, при которых знаменатель принимает нулевое значение.

Пример 9. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 7x + 10}}$.

□ Область определения данной функции задается неравенством $\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 7x + 10} \geq 0$. Решим его:

$$\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 7x + 10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x+5} \leq 0, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Неравенство $\frac{x-3}{x+5} \leq 0$ решим методом интервалов (рис. 126).

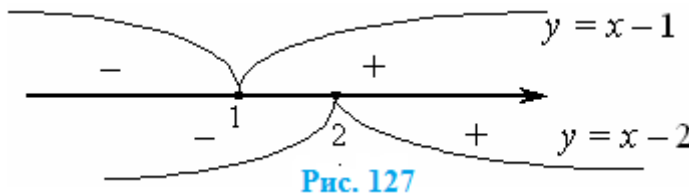
Исключив из найденного множества $(-5; 3]$ значение $x = -2$, получим:
 $x \in (-5; -2) \cup (-2; 3]$. ■

Ответ: $(-5; -2) \cup (-2; 3]$.

Метод интервалов полезно использовать также при решении уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Пример 10. Решить неравенство $|x - 1| + |2 - x| > 3 + x$.

□ Если это неравенство решать, последовательно избавляясь от знаков модуля, то получим громоздкие вычисления. Здесь проще действовать следующим образом. Отметим, что выражения, стоящие под знаком модуля, изменяют знак в своих нулях: выражение $(x - 1)$ изменяет знак в точке $x = 1$, а $(x - 2)$ — в точке $x = 2$. Точки $x = 1$, $x = 2$ разбивают числовую прямую $(-\infty; +\infty)$ на 3 промежутка: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$, на каждом из которых функции $y = x - 1$ и $y = x - 2$ сохраняют свой знак (см. рис. 127).



Поэтому на этих промежутках заданное неравенство можно заменить равносильными ему неравенствами, но уже не содержащими знака модуля. Это значит, что неравенство равносильно совокупности систем, каждая из которых состоит из условия, которое задает данный промежуток, и самого неравенства, но уже записанного без знака модуля. Коротко решение можно записать так:

$$1) \begin{cases} x \leq 1, \\ 1 - x - x + 2 > 3 + x \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ x - 1 - x + 2 > 3 + x \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > 2, \\ x - 1 + x - 2 > 3 + x. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем и объединив их решения, получим все решения данного неравенства: $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$. ■

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

Рассмотрим решение рациональных неравенств с параметрами.

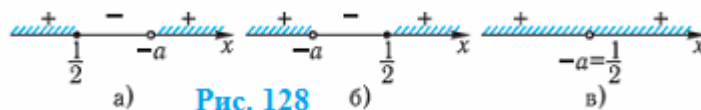
Пример 11. Решить неравенство:

$$1) (a+3)x > -2; \quad 2) \frac{2x-1}{x+a} \geq 0; \quad 3) \frac{(x-2)(x-a)}{x-2} > 0.$$

□ 1) Это линейное неравенство. Чтобы его решить, следует разделить обе части неравенства на $a+3 \neq 0$. Возможны такие случаи:

если $a > -3$, то $x > \frac{2}{3-a}$; если $a < -3$, то $x < \frac{2}{3-a}$; если $a = -3$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > -2$ и выполняется для любого значения x .

2) Нанесем корни числителя и знаменателя левой части неравенства на числовую ось. Возможные следующие случаи (рис. 128, а - в):

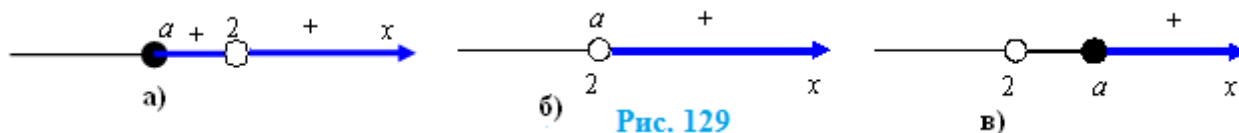


Если $a < -\frac{1}{2}$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (-a; +\infty)$;

если $a > -\frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty; -a) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

если $a = -\frac{1}{2}$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3) Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x-a \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Возможные случаи расположения a относительно числа 2 показаны на рисунке 129 а, б, в.



Следовательно, если $a < 2$, то $x \in [a; 2) \cup (2; +\infty)$; если $a = 2$, то $x \in (2; +\infty)$; если $a > 2$, то $x \in [a; +\infty)$. ■

Пример 12. При каких значениях k решением неравенства $kx^2 - x - 1 < 0$ является: 1) конечный промежуток; 2) вся числовая ось?

□ 1) Если $k = 0$, то имеем линейное неравенство $-x - 1 < 0$, решением которого является бесконечный промежуток $(-1; +\infty)$. Решением квадратного неравенства может быть конечный промежуток лишь в том случае, когда квадратный трехчлен $kx^2 - x - 1$ имеет два корня. Это справедливо при условии $k \neq 0$ и при положительном дискриминанте $D = 1 + 4k > 0$. Если $k > -\frac{1}{4}$ и $k \neq 0$, квадратное неравенство можно представить в виде $k(x - x_1)(x - x_2) < 0$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена. Если $k > 0$, то решением этого неравенства будет конечный промежуток $(x_1; x_2)$. Если $-\frac{1}{4} < k < 0$, то решением неравенства будет множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. Следовательно, при $k > 0$ решением заданного неравенства является конечный промежуток.

2) При $k < -\frac{1}{4}$ квадратный трехчлен не имеет корней и принимает лишь отрицательные значения. Поэтому в данном случае решением заданного неравенства является вся числовая ось. ■



Ответ: 1) $k > 0$; 2) $k < -\frac{1}{4}$.

Контрольные вопросы

1. Какое из следующих утверждений является правильным, если $a < b$:

а) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; в) $\frac{a}{b} < 1$; г) $a^2 < b^2$; д) $b - a > 0$?

2. ° Какому условию должны удовлетворять числа a и b , чтобы из неравенства $a < b$ вытекало неравенство:

а) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; б) $\frac{a}{b} < 1$; в) $a^2 < b^2$?

3. ° Каким из следующих неравенств удовлетворяют все вещественные числа:

а) $(x + 3)^2 > 0$; б) $\frac{x-1}{x-1} > 0$; в) $|x| \geq x$; г) $x^2 + x + 1 > 0$?

4. Для какого из следующих неравенств множеством его решений является промежуток $(1; +\infty)$:

а) $(\sqrt{3} - 2)x < \sqrt{3} - 2$; б) $\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 \geq 0$; в) $\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 > 0$?

5. Укажите наибольшее решение неравенства, если оно существует:

а) $(3 - \pi)x \leq 3 - \pi$; б) $x^2(x + 2) \leq 0$; в) $\frac{x^2(x+1)}{x} \leq 0$.

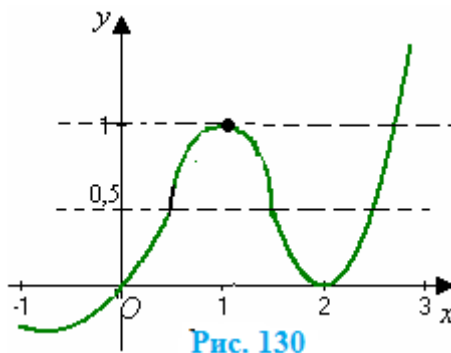
4. Применение графиков и свойств функций к решению уравнений и неравенств



На практике достаточно часто приходится находить приближенные значения корней уравнения. Это, например, имеет место в том случае, когда в уравнении $f(x) = 0$ функция $y = f(x)$ задана графически. Тогда решение уравнения сводится к нахождению точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс.

Корни уравнения $f(x) = a$, где a — некоторое число, также можно найти графически: это абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс.

По графику функции $y = f(x)$ можно установить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях числа a . Так, из рис. 130 видно, что уравнение $f(x) = 1$ имеет два корня: один из них равняется 1, а второй принадлежит промежутку $(2,5; 3)$. Уравнение $f(x) = 0,5$ имеет три корня, а уравнение $f(x) = -0,001$ — один корень.



Иногда приходится графически решать уравнение вида $f(x) = g(x)$. В этом случае корни уравнения находятся как абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Например, чтобы графически решить уравнение $x^3 + 2x - 1 = 0$, можно построить график функции $y = x^3 + 2x - 1$ и найти точки пересечения графика с осью x . Однако, построить график функции $y = x^3 + 2x - 1$ непросто. Можно действовать иначе: представить уравнение в виде $x^3 = 1 - 2x$ и на одном рисунке построить графики функций $y = x^3$ и $y = 1 - 2x$ (рис. 131). Графики пересекаются в одной точке. Следовательно, уравнение имеет один корень, который принадлежит промежутку $[0; 0,5]$.

Пример 13. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = (x+1)(x-2)$?

□ Построим на одном рисунке графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = (x+1)(x-2)$. Из рисунка 132 видно, что уравнение имеет один корень, расположенный на промежутке $[2; 3]$. ■



Графический метод используется также при решении неравенств. Чтобы решить неравенство $f(x) > 0$, строят график функции $y = f(x)$ и выбирают на оси x те промежутки, на которых график функции $y = f(x)$ лежит выше оси x , то есть в верхней полуплоскости. Если необходимо решить неравенство $f(x) < 0$, то выбирают на оси x те промежутки, на которых график функции $y = f(x)$ лежит ниже оси x , то есть в нижней полуплоскости. Так, решением неравенства $f(x) < 0$, где график функции, заданной на $[-1; 3]$, изображен на рис. 130, является промежуток $[-1; 0)$, а решением неравенства $f(x) > 0$ — объединение промежутков $(0; 2) \cup (2; 3]$.

Пример 14. На рис. 133 изображены графики функций $y = |x|$ и $y = 2 - x^2$. Решить графически неравенство $|x| < 2 - x^2$.

□ Решением неравенства являются те значения x , при которых график функции $y = |x|$ расположен ниже графика функции $y = 2 - x^2$. Это все значения x из интервала $(-1; 1)$. ■

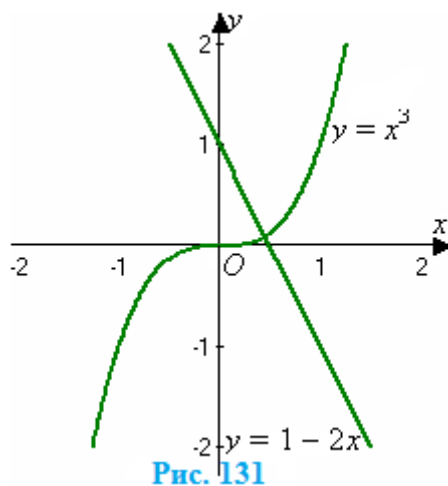


Рис. 131

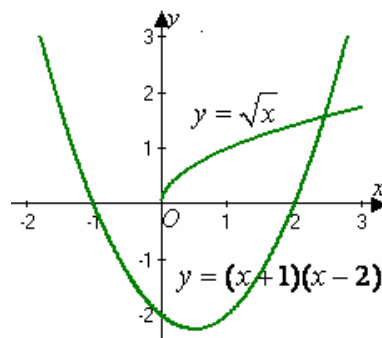


Рис. 132

Ответ: Один.

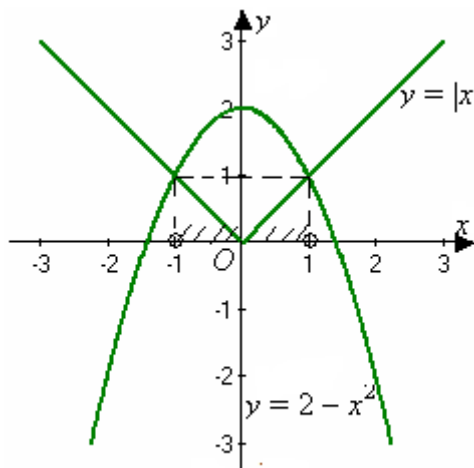


Рис. 133

Ответ: $(-1; 1)$.

При решении уравнений часто используют свойства монотонности функций.

Т е о р е м а 1. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

Действительно, каждое свое значение возрастающая (убывающая) функция принимает в единственной точке. Поэтому прямая $y = a$ или пересекает график функции в единственной точке (рис. 134 а), или не пересекает его (рис. 134 б).

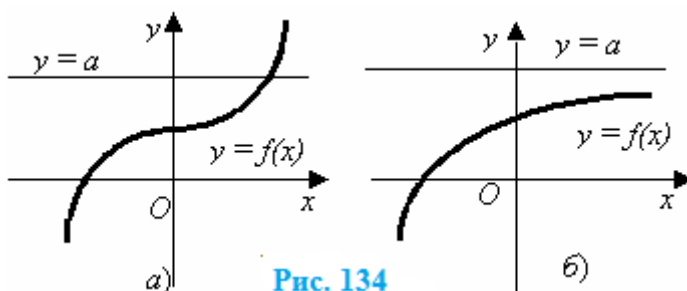


Рис. 134

Например, уравнение $4x^3 + 3x + 7 = 0$ имеет не более одного корня, поскольку функция $y = 4x^3 + 3x + 7$ возрастает на всей числовой оси, как сумма двух возрастающих функций $y = 4x^3$ и $y = 3x + 7$ (см. § 4). Корень уравнения можно найти подбором: $x = -1$.

Свойство монотонности функций используется и при решении уравнений вида $f(x) = g(x)$.

Т е о р е м а 2. Если одна из функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$ возрастает, а вторая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

На рис. 135 – 136 проиллюстрированы оба случая.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt{x-9} = \frac{54}{x}.$$

□ ОДЗ уравнения является промежутком $[9; +\infty)$. Функция

$f(x) = \sqrt{x-9}$ возрастающая, а функция

$g(x) = \frac{54}{x}$ — убывающая на промежутке $[9; +\infty)$. Следовательно, уравнение

имеет не более одного корня. Подбором находим его: $x = 18$. ■

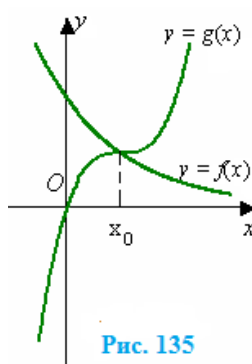


Рис. 135

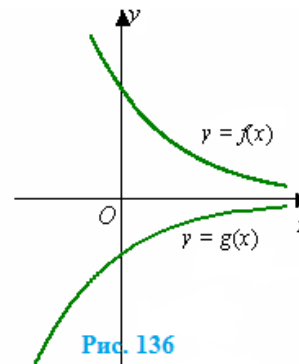


Рис. 136

Ответ: $x = 18$.



Графики функций помогают решать уравнения и неравенства с параметрами. Так, при решении уравнения $f(x, a) = 0$ полезно изучить свойства семейства функций $y = f(x, a)$, построив их графики в зависимости от параметра a .

Пример 16. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $|x|(2-x) = a$ имеет два корня.

□ Построим график функции $y = |x|(2-x)$, учитывая, что $y = \begin{cases} -x(2-x), & \text{если } x < 0, \\ x(2-x), & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

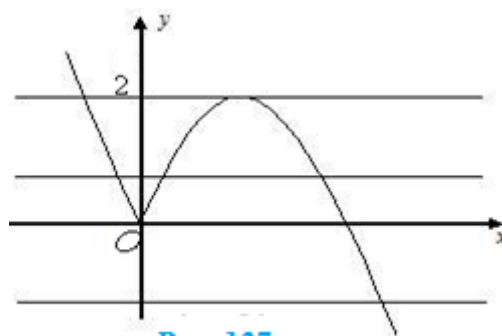


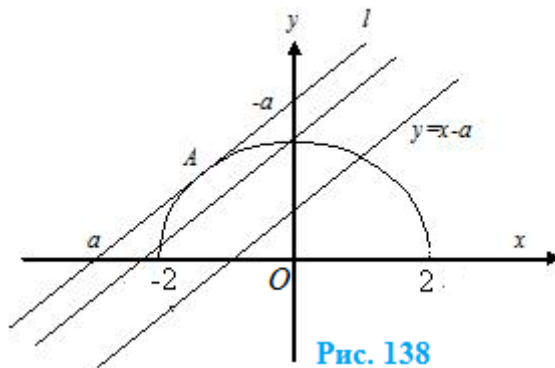
Рис. 137

График функции изображен на рисунке 137. Будем пересекать этот график прямыми $y = a$. Легко заметить, что график функции пересекается в двух точках, если $a = 0$ и $a = 2$. ■

Ответ: $a = 0, a = 2$.

Пример 17. При каких значениях a неравенство $\sqrt{4-x^2} > x-a$ имеет решения?

□ Графиком функции $y = \sqrt{4-x^2}$ является полуокружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 2 (рис. 138). Графиком функции $y = x - a$ при каждом фиксированном значении a является прямая, параллельная прямой $y = x$. Таким образом, мы имеем семейство параллельных прямых. Неравенство имеет решения, если существуют точки полуокружности, расположенные выше прямой $y = x - a$. Такие точки существуют, если прямая $y = x - a$ будет лежать правее касательной l к графику функции $y = \sqrt{4-x^2}$ (см. рис. 138). Точка касания A лежит на биссектрисе второго координатного угла, то есть на прямой $y = -x$ и имеет координаты $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Отсюда $a = -2\sqrt{2}$. Следовательно, при $a > -2\sqrt{2}$ неравенство имеет решения. ■

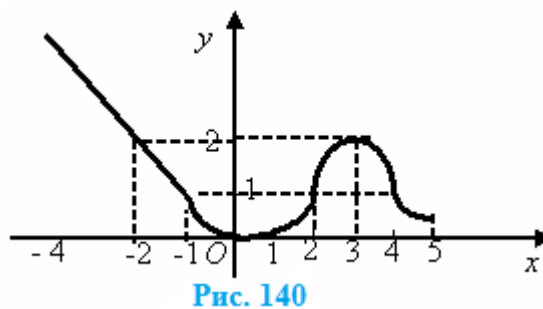
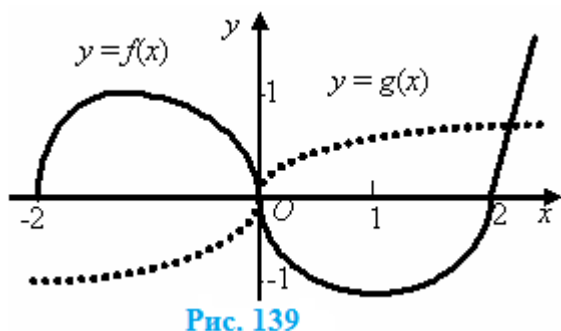


Ответ: $a > -2\sqrt{2}$.



Контрольные вопросы

1. ° На рис. 139 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Сколько корней имеет уравнение: а) $f(x) = 1$; б) $g(x) = -0,5$; в) $f(x) = g(x)$?
2. ° Может ли уравнение $g(x) = a$ иметь более одного корня, если $g(x)$ — функция, график которой изображен на рис. 139?
3. ° Каковы решения неравенства: а) $f(x) < 1$; б) $f(x) \geq 2$, если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 140, причем $D(f) = [-4; 5]$?



4. Известно, что функция $y = f(x)$ — убывающая и промежуток $[-2; 3]$ является ее множеством значений. Сколько корней имеет уравнение: а) $f(x) = -1$; б) $f(x) = -3$; в) $f(x) = 3$?

5. Функция $y = f(x)$ — чётная, возрастает на промежутке $[0; \infty)$, $f(2) = 1$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 1$?

Задачи

104. Решите уравнение:

1) $\circ \frac{x^2}{3} - \frac{7}{6}x + 1 = 0$; 2) $\circ \left(0, 3x - \frac{1}{5}\right)(x - 3) = 2$; 3) $\circ x^3 + 7x^2 - 8x = 0$;

4) $x^2 + 2x + 4\sqrt{2}(x + 2) = 0$; 5) $(4x - 1)(8x + 7) = (4x - 1)^2$;

6) $(x + 4)(x^2 - 5x) + 6(x + 4) = 0$.

105. Решите уравнение:

1) $\circ \frac{5x^2 - 19x + 18}{x^2 - 3x + 2} = 3$; 2) $\circ \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} + 2x = -9$;

3) $x^2 + 2x - 3\frac{x-1}{x-1} = 0$; 4) $\circ \frac{7}{x+1} - \frac{x+4}{2-2x} = \frac{3x^2 - 38}{x^2 - 1}$;

5) $\frac{3}{x^2 - 9} - \frac{1}{9 - 6x + x^2} = \frac{3}{2x^2 + 6x}$; 6) $\frac{x^2 + x + 16}{x^2 - x + 1} - \frac{36 - x}{x^3 + 1} = \frac{x - 6}{x + 1}$;

7) $\frac{2x-3}{x-3} + \frac{5-x}{x-3} - \frac{x+2}{x-3} = 0$; 8) $\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} + 8x + 90 = 0$; 9) $\left| \frac{3x+1}{x+5} \right| = 1$;

10) $x^2 - 2|x - 1| = 2$; 11) $\circ x^2 - 8ax + 16a = 0$; 12) $\frac{x^2 - 5x + 4}{2x - a} = 0$.

106. Найдите точки пересечения графиков функций:

1) $\circ y = x^3 - 4x$ и $y = 0$; 2) $y = (x - 1)^2$ и $y = (x - 1)^3$; 3) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ и $y = x + 3$; 4)

$y = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ и $y = 27$; 5) $\circ y = (x^2 + 6)^2$ и $y = 25x^2$.

107*. При каких значениях b уравнение

$(b - 2)x^2 - 2bx + 2b - 3 = 0$ имеет:

1) один корень; 2) два корня?

108. $\circ$ Решите неравенство:

1) $(x^2 - 4)(x + 1) > 0$; 2) $\frac{x-3}{5x+1} \leq 0$; 3) $\frac{12+x-x^2}{x} \geq 0$; 4) $\frac{x-5}{2-x} > 1$;

5) $\frac{3-2x}{x^2+3} \leq 1$; 6) $x > \frac{15}{x+2}$; 7) $\frac{4}{3x-1} < \frac{3}{x+2}$; 8) $\frac{3x^2-7x+2}{x^2+5x-6} < 0$.

109. Решите неравенство:

$$1) (x^3 - 8)x \leq 0; \quad 2)^\circ \frac{x^3 - 9x}{x - x^2 + 2} > 0; \quad 3)^\circ \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} > \frac{8}{x^2 - 1};$$

$$4) (x-2)(x+3)^2 \geq 0; \quad 5) (x-1)(x-3)^2 > 0; \quad 6) \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{2-x} \geq 0;$$

$$7) * \frac{(x^4 - 3x^2)(x^3 + x^2 - 4x - 4)}{x^2 + 3x + 2} \leq 0;$$

$$8) (x^2 + 3x)(2x + 3) \geq 16 \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}; \quad 9) |x-1| + 2x + |3x+1| > 2; \quad 10) \frac{2x+1}{|x+2|} > 1;$$

$$11) * \frac{x^2 - a}{x} \leq 0; \quad 12) * x > \frac{k^2}{x}; \quad 13) * x^2 - 2x + k > 0.$$

110. Найдите промежутки, на которых график функции

$$1)^\circ y = \frac{4x - x^2}{x-1}; \quad 2)^\circ y = \frac{1}{x^2 - 3}; \quad 3) y = \frac{x^2(x+3)(x^2 + 2x - 1)}{x^2 + 2x - 1}$$

лежит выше оси x .

111. Найдите область определения функции:

$$1)^\circ y = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}; \quad 2)^\circ y = \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}; \quad 3) y = \frac{1}{x^2-1} + \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}; \quad 4) * y = \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}.$$

112. * Найдите все значения параметра a , при которых функция $y = \frac{x^2 - ax}{ax}$ в

точках $x = -1$ и $x = 1$ принимает значения разных знаков.

113. Грузовик отправился из пункта А к пункту В, расстояние между которыми 240 км, со скоростью 40 км/ч. Одновременно из В в А отправился легковой автомобиль, который достиг пункта А позже, чем через полчаса после встречи с грузовиком, и сразу повернул назад. Какова должна быть скорость v легкового автомобиля, чтобы он прибыл в пункт В раньше грузовика?

114. Сколько корней имеет уравнение:

$$1)^\circ \sqrt{x} = -2x + 1; \quad 2)^\circ \sqrt{x+1} = x^2 - 1; \quad 3)^\circ x^2 - 1 = \frac{1}{x}; \quad 4) x^3 - x - 1 = 0;$$

$$5) \sqrt{x} = (x-1)(x-2); \quad 6) \frac{x}{x-1} = x^2 - 2x + 1; \quad 7) x(2 - x^2 - x) = 2; \quad 8) * [x] = x$$

?

115. Докажите, что уравнение

$$1) x^3 + x + 10 = 0; \quad 2) \frac{x^2}{4} + \sqrt{x} - 6 = 0; \quad 3) * \sqrt{x-6} + \sqrt{10x} - \frac{120}{x} = 0$$

имеет один корень. Найдите его.

116. На рис. 141 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, областями определения которых является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

- 1) Сколько корней имеет уравнение $f(x) - g(x) = 0$?
- 2) Решите неравенство $f(x) \geq g(x)$.

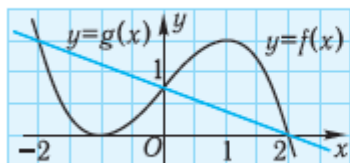


Рис. 141

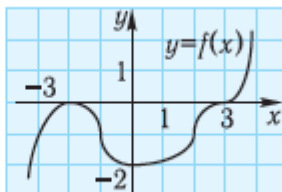


Рис. 142

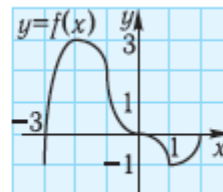


Рис. 143

117. ° На рис. 142 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на всей числовой оси. Решите неравенство:

- 1) $f(x) > 0$; 2) $f(x) \leq 0$; 3) $f(x) \leq -1$.

118. На рис. 143 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-3; 2]$.

- 1) ° Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?
- 2) Чему приближенно равны корни уравнения $f(x) = 2$?
- 3) * Укажите все значения параметра a , при которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень.
- 4) * Укажите все значения параметра a , при которых уравнение $f(x) = a$ имеет ровно один корень.
- 5) * Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 1 - x^2$?



Упражнения для повторения

119. Для целых чисел $a = 12690$ и $b = 141$ подберите такое целое число c , чтобы $a = b \cdot c$.

120. Выполните деление с остатком: а) 12690 на 143; б) 214 652 на 198.

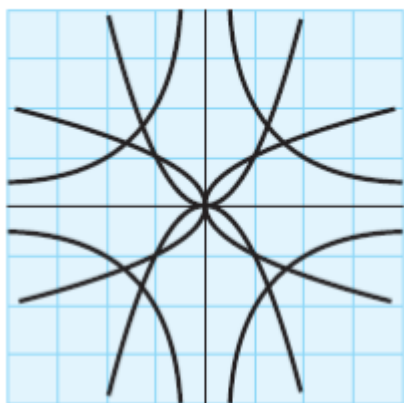
121. Вычислите делимое, если делитель, неполное частное и остаток соответственно равны 11, 8 и 5.

122. Представьте в виде многочлена выражение: $(2x - 1)(x^2 + 5x - 2)$.

123. Представьте многочлен $a^3 - 2a^2 + 2a - 4$ в виде произведения двучлена $a - 2$ и некоторого многочлена.

124. Разложите многочлен $c^3 - 12 + 3c^2 - 4c$ на линейные множители.

125. Делится ли на 5 при любом целом n выражение $(7n + 8)(n - 1) + (3n - 2)(n + 2)$?



§ 9. Многочлены от одной переменной

Важным классом функций с одной переменной являются многочлены, которые зависят от одной переменной. Они служат математическими моделями многих реальных процессов и явлений. Их изучению и посвящен данный параграф.

1. Многочлены и операции над ними



В курсе алгебры вы познакомились с понятиями одночлена и многочлена.

Многочлен — это выражение, которое можно получить из чисел и букв с помощью операций сложения, вычитания и умножения.

Вот несколько примеров: $3 - x$; $2y^2 + y - 5$; $3(z - 2)^2$; $a^4 - b^4 + 3abc$; $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ и т. д.

Многочлены, в которых участвует лишь одна буква, называются **многочленами от одной переменной**. Их обозначают так же, как и функции: $f(x)$, $g(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ и т. д.

Простейший многочлен с одной переменной имеет вид ax^n , где a — некоторое число. Такой многочлен называют одночленом, число n — его степенью, a — его коэффициентом. Любое число, отличное от нуля, можно считать одночленом нулевой степени. Например, $5 = 5 \cdot x^0$, $-3 = (-3) \cdot x^0$ и т. д.

Один и тот же многочлен можно записать разными способами. Например:

$(x - 2)(x - 3)$, $x^2 - 2x - 3x + 6$, $x^2 - 5x + 6$ — это разные формы записи одного и того же многочлена.

Стандартной формой многочлена называется такая его запись, которую получают, если раскрыть скобки, привести подобные члены и разместить одночлены по убыванию их степеней. Так, $x^2 - 5x + 6$ — стандартная форма многочленов $(x - 2)(x - 3)$ и $x^2 - 2x - 3x + 6$.

Степень многочлена — это наибольшая из степеней одночленов, из которых состоит стандартная форма многочлена. Например, $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ — многочлен третьей степени. Многочлены нулевой степени — это просто числа, отличные от нуля, нуль — также многочлен, ему никакая степень не приписывается. Многочлены первой степени, или **линейные многочлены**, имеют вид $ax + b$, где a и b — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Многочлены второй степени имеют вид $ax^2 + bx + c$, где a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Его называют еще **квадратным трехчленом**. Многочлен третьей степени имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a , b , c и d — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Его называют еще **кубическим**.

Аналогично можно записать и многочлен n -й степени:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ называются **коэффициентами многочлена**. Коэффициент a_n называется **свободным членом многочлена**. Одночлен a_0x^n называется **старшим членом многочлена**.

Число $f(a)$, которое получают, если вместо переменной x подставить в многочлен $f(x)$ число a , называется **значением многочлена при $x = a$** . Например, если $f(x) = 4x^3 - 2$, то $f(1) = 4 \cdot 1^3 - 2 = 2$, $f(0) = 4 \cdot 0^3 - 2 = -2$.

Значение любого многочлена при $x = 0$ равняется его свободному члену.

Корнем многочлена $f(x)$ называется такое число a , что $f(a) = 0$. Например, многочлен $2x - 1$ имеет корень 0,5. Многочлен $x^2 - 3x + 2$ имеет два корня 1 и 2. Многочлен $f(x) = x^2 + 4$ корней не имеет, поскольку $f(a) > 0$ для любого a , поэтому $f(a)$ не может равняться нулю.

Известно, что сумма, разность, произведение двух целых чисел являются целыми числами. Такое же утверждение справедливо и для многочленов с одной переменной, то есть сумма, разность, произведение двух многочленов с одной переменной являются многочленами с одной переменной.

Суммой многочленов является многочлен, членами которого являются все члены многочленов, которые складываются.

Разностью двух многочленов является многочлен, членами которого являются все члены уменьшаемого и взятые с противоположными знаками все члены вычитаемого.

Произведением одночлена на многочлен является многочлен, членами которого являются все произведения этого одночлена на члены данного многочлена.

Произведением двух многочленов является многочлен, членами которого являются все произведения каждого члена одного из этих многочленов на каждый член другого многочлена.

Пример 1. Представить в виде многочлена $(2x - 3)(5 - x) - 3x(4 - x)$.

□ Воспользовавшись правилами умножения многочлена на многочлен и одночлена на многочлен, приведя потом подобные члены, получим:

$$(2x - 3)(5 - x) - 3x(4 - x) = 10x - 2x^2 - 15 + 3x - (12x - 3x^2) = 10x - 2x^2 - 15 + 3x - 12x + 3x^2 = x^2 + x - 15.$$

Мы использовали следующее правило раскрытия скобок:

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак $-$ (минус), нужно записать без скобок все члены, стоящие внутри скобок, с противоположными знаками. ■

Ответ. $x^2 + x - 15$.

Пример 2. Доказать, что при всех целых n значения выражения $n(n + 2) - (n - 7)(n - 5)$ делятся на 7.

□ Выполним преобразования:

$$n(n + 2) - (n - 7)(n - 5) = n^2 + 2n - n^2 + 7n + 5n - 35 = 14n - 35 = 7(2n - 5).$$

При любом значении n произведение $7(2n - 5)$ делится на 7, следовательно, делится на 7 и значение данного выражения. ■

Для целых чисел мы знаем, что, в отличие от сложения, вычитания, умножения, операция деления не всегда выполняется, то есть частное от деления одного целого числа на другое не всегда является целым числом. Иначе говоря, не для любых целых чисел a и b существует такое целое число c , что $a = bc$. Например, не существует такого целого числа c , при котором $36 = 7 \cdot c$.

Аналогичная ситуация имеет место и для многочленов.

Говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует такой многочлен $h(x)$, что имеет место равенство $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

Безусловно, подобрать такой многочлен $h(x)$ для двух данных многочленов не просто. Для целых чисел такое число c , что $a = bc$ можно найти делением "уголком". Например, чтобы найти такое число c для чисел 1639 и 11, надо разделить 1639 на 11 "уголком". Для этих чисел $c = 149$.

$$\begin{array}{r} 1639 \quad | \quad 11 \\ \underline{11} \\ 53 \\ \underline{44} \\ 99 \\ \underline{99} \\ 0 \end{array}$$

Так же можно делить многочлены "уголком".

Пример 3. Разделить многочлен $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ на $x - 1$.

□ Сначала подбираем старший член частного так, чтобы его произведение на делитель содержало старший член делимого x^3 . Этот старший член равняется x^2 . Теперь из делимого вычитаем произведение x^2 на делитель. Получим многочлен $-x^2 + 3x - 2$. Этот многочлен делим на $x - 1$ и находим следующий член частного. Следующая разность равняется $2x - 2$. Делим ее на $x - 1$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 3x - 2 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-x^2 + x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$



и получаем свободный член частного 2. Деление закончено. ■

Как мы отмечали ранее, не для каждой пары целых чисел остаток от деления одного из них на другое равняется нулю. В таких случаях говорят, что происходит деление с остатком.

Разделить целое число a на натуральное число b с остатком — это значит, что нужно найти такое целое число c (неполное частное) и неотрицательное число $d < b$ (остаток) такие, что $a = bc + d$.

Аналогично деление с остатком имеет место и для многочленов.

Пример 4. Разделить многочлен $x^4 - 2x^3 + x - 3$ на $x^2 - 3x$.

□ Как только степень разности — в данном случае это $10x - 3$ — стала меньше степени делителя $x^2 - 3x$, деление закончено. Результат можно записать так: $x^4 - 2x^3 + x - 3 = (x^2 - 3x)(x^2 + x + 3) + (10x - 3)$. ■

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + x - 3 \quad | \quad x^2 - 3x \\ \underline{x^4 - 3x^3} \\ x^3 + x - 3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ 3x^2 + x - 3 \\ \underline{3x^2 - 9x} \\ 10x - 3 \end{array}$$

Теперь понятным будет следующее определение.

Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком — это значит найти такие многочлены

$h(x)$, который называется *неполным частным*, и $r(x)$, который называется *остатком* и степень которого меньше степени делителя $g(x)$, что выполняется равенство

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x).$$

Выше мы установили, выполняется ли операция деления многочленов, непосредственным делением "уголком" одного многочлена на другой. Получить ответ на поставленный вопрос иногда можно, используя определение делимости, приведенное выше.

Пример 5. Доказать, что многочлен $x^4 + 1$ не делится на многочлен $x^2 - 1$.

□ Предположим противное, то есть, что многочлен $x^4 + 1$ делится на многочлен $x^2 - 1$. Это означает существование такого многочлена $P(x)$, для которого выполняется равенство: $x^4 + 1 = (x^2 - 1) \cdot P(x)$. Тогда при замене x любым числом должны получить верное числовое равенство. Но при $x = 1$ получим: $1^4 + 1 = (1 - 1) \cdot P(1) = 0$, что неверно. ■

В следующем примере решение задачи на делимость многочленов базируется на определении делимости многочленов с остатком.

Пример 6. Многочлен $f(x)$ при делении на $x - 1$ дает в остатке число 1, а при делении на $x + 1$ — число -1 . Какой остаток дает $f(x)$ при делении на $x^2 - 1$?

□ По условию, имеют место два следующих равенства: $f(x) = (x - 1)P(x) + 1$, $f(x) = (x + 1)Q(x) - 1$. Подставляя вместо x в первое равенство число 1, а во второе -1 , получим: $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$.

Разделив $f(x)$ на $x^2 - 1$ и учтя, что степень остатка меньше степени делителя, будем иметь: $f(x) = (x^2 - 1)R(x) + (ax + b)$. Подставив в последнее равенство сначала 1, а затем -1 , получим: $f(1) = a + b$, $f(-1) = -a + b$ или $a + b = 1$, $-a + b = -1$. Решением этой системы уравнений являются числа $a = 1$, $b = 0$. Следовательно, искомый остаток равняется x . ■



Ответ. x

Частное и остаток от деления одного многочлена на другой мы находили делением "уголком". Существует другой метод деления многочленов с остатком, это так называемый **метод неопределенных коэффициентов**. Рассмотрим его на примере, на котором реализуем соответствующий алгоритм.

Пример 7. Разделить многочлен $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7x + 2$ на $x^2 - x + 2$.

□ 1-й шаг. Запишем многочлен-частное с известным старшим коэффициентом: $x^2 + a_1x + a_2$.

2-й шаг. Запишем остаток: $c_0x + c_1$.

3-й шаг. Запишем равенство, вытекающее из определения делимости с остатком:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7x + 2 = (x^2 - x + 2)(x^2 + a_1x + a_2) + (c_0x + c_1).$$

4-й шаг. Выполним преобразования в правой части последнего равенства:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7x + 2 = x^4 + (a_1 - 1)x^3 + (a_2 - a_1 + 2)x^2 + (2a_1 - a_2 + c_0)x + (2a_2 + c_1).$$

5-й шаг. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$\begin{cases} a_1 - 1 = -4, \\ a_2 - a_1 + 2 = 6, \\ 2a_1 - a_2 + c_0 = -7, \\ 2a_2 + c_1 = 2. \end{cases}$$

6-й шаг. Решим систему:

$$a_1 = -3, a_2 = 1, c_0 = 0, c_1 = 0.$$

7-й шаг. Запишем частное: $x^2 - 3x + 1$.

8-й шаг. Запишем остаток: 0. ■



$$\text{Ответ. } x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7x + 2 = (x^2 - x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 1).$$

Контрольные вопросы

1. ° Является ли число 0,4 корнем многочлена $10x^3 + 6x^2 + x - 2$?
2. ° Чему равняется свободный член многочлена : а) $x^3 - 2x^2 + 3x$; б) $(x - 1)^{20}$?
3. ° Может ли сумма двух многочленов 50-й степени быть многочленом: а) 51-й; б) 50-й; в) 49-й степени?
4. Может ли произведение двух многочленов ненулевой степени равняться 2?
5. Чему равняется степень произведения двух многочленов, степени которых равняются m и n ?
6. ° Какой остаток дает число 1001 при делении на 77?
7. Какую степень может иметь остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - x + 1$?
8. Может ли остаток от деления одного многочлена на другой совпадать с делителем?
9. * Многочлен $f(x)$ при делении на $(x - 1)^2$ дает остаток $3x - 2$. Каков остаток от деления $f(x)$ на $x - 1$?
10. * Может ли остаток от деления одного многочлена на другой совпадать с делимым?

2. Теорема Безу и следствия из нее



Важным частным случаем деления многочлена на многочлен является случай, когда делителем является линейный многочлен

$$x - a.$$

Пусть $f(x)$ — произвольный многочлен. Разделим его на $x - a$. Поскольку степень остатка должна быть меньше степени делителя, а делитель имеет первую степень, то остаток должен быть многочленом нулевой степени, то есть просто числом (в том числе может быть и нулем).

Обозначим частное через $q(x)$, а остаток через r . Тогда имеет место равенство:

$$f(x) = (x - a)q(x) + r.$$

Это равенство выполняется для всех значений x . Подставим в него $x = a$. Множитель $x - a$ будет равняться нулю, получим равенство: $f(a) = r$. Мы доказали, что остаток r равняется значению многочлена $f(x)$ при $x = a$.

Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равняется $f(a)$:

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a).$$

Это утверждение известно под названием теоремы Безу в честь французского математика XVIII века.

Пример 8. Найти остаток от деления многочлена $f(x) = x^{10} + x^5 + 1$ на $x - 1$.

□ Понятно, что задание можно выполнить делением "уголком". Но это потребует много времени и места. Правда, мы бы получили не только остаток, но и частное (многочлен 9-й степени), которое находить нам не нужно. Воспользуемся теоремой Безу. Согласно этой теореме остаток равняется $f(1) = 1^{10} + 1^5 + 1 = 3$. ■

Ответ. 3.

Пример 9. Найти остаток от деления многочлена $x^n + a^n$ на $x + a$.

□ Согласно теореме Безу, искомым остаток равняется значению многочлена $x^n + a^n$ при $x = -a$, которое равняется $(-a)^n + a^n$. Это выражение равняется нулю, если n нечётное, и равняется $2a^n$, если n чётное. Следовательно, $x^n + a^n$ делится нацело на $x + a$ лишь в том случае, когда n нечётное. ■

Ответ. $\begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ — нечётное,} \\ 2a^n, \text{ если } n \text{ — чётное.} \end{cases}$

Из теоремы Безу вытекает важное следствие.

Если многочлен $f(x)$ делится на $x - a$, то a — корень этого многочлена.

Действительно, по условию, $f(x) = (x - a)q(x)$, и поэтому $f(a) = (a - a)q(a) = 0$.

Справедливо и обратное утверждение. Оно также вытекает из теоремы Безу.

Если число a является корнем многочлена $f(x)$, то этот многочлен делится на $x - a$ нацело.

Действительно, по теореме Безу остаток от деления $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$, а по условию $f(a) = 0$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Число a является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $x - a$ нацело.

Пример 10. При каком значении a многочлен $f(x) = x^3 + ax - 10$ делится на $x - 2$ нацело?

□ Воспользуемся доказанной теоремой. Если $x^3 + ax - 10$ делится на $x - 2$, то 2 является корнем этого многочлена. Подставим в выражение для $f(x)$ значение $x = 2$. Получим: $f(2) = 8 + 2a - 10 = 2a - 2$. Из равенства $f(2) = 0$ находим, что $a = 1$. ■

Ответ. 1.



Из доказанной теоремы вытекает, что задача решения уравнения $f(x) = 0$ эквивалентна задаче выделения делителей многочлена $f(x)$, имеющих первую степень (так называемых линейных делителей).

Одним из общих методов решения уравнений, как известно, является метод разложения на множители. Он базируется на следующем утверждении.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два произвольных многочлена. Число a является корнем уравнения $f(x) \cdot g(x) = 0$ тогда и только затем, когда оно является корнем, по крайней мере, одного из уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$.

Из этого утверждения вытекает важное следствие. Пусть $f(x) = 0$ — уравнение n -й степени. Предположим, что нам известен один корень $x = a$ этого уравнения. Тогда по доказанной теореме, многочлен $f(x)$ делится на $x - a$, то есть $f(x) = (x - a)q(x)$. Многочлен $q(x)$ имеет степень $n - 1$. По приведенному утверждению, чтобы найти все корни уравнения $f(x) = 0$, нужно взять корень уравнения $x - a = 0$, то есть число a и присоединить все корни уравнения $q(x) = 0$. Это уравнение проще исходного, поскольку оно имеет степень, на единицу меньшую степени исходного уравнения.

Пример 11. Решить уравнение $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$.

□ Нетрудно убедиться в том, что число 1 является корнем этого уравнения. Например, можно воспользоваться тем, что сумма коэффициентов многочлена, который стоит в левой части уравнения равняется $1 - 4 - 7 + 10 = 0$, а эта сумма совпадает со значением многочлена при $x = 1$ (рекомендуем доказать это). Следовательно, многочлен $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ делится на $x - 1$. Выполнив деление «уголком», получим, что частное равняется $x^2 - 3x - 10$ (выполните это деление самостоятельно). Для окончательного решения данного уравнения осталось решить квадратное уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$. Его корни -2 и 5 .



Ответ. 1; -2 ; 5.



Обобщением теоремы Безу и ее следствий является следующее утверждение.

Если многочлен $f(x)$ имеет попарно различные корни $a_1, a_2, \dots, a_n$, то он делится нацело на произведение $(x - a_1)(x - a_2)$

$\dots (x - a_n)$.

Из этого утверждения вытекает важное следствие.

Многочлен степени n имеет не более n различных корней.

□ Докажем это утверждение методом от противного. Пусть многочлен n -й степени имеет $n + 1$ корень $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. Тогда он делился бы на $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n+1})$. Но это произведение состоит из $n + 1$ сомножителя и потому имеет $(n + 1)$ -ю степень. Однако многочлен n -й степени не может делиться на многочлен $(n + 1)$ -й степени. Следовательно, предположение о том, что многочлен n -й степени имеет $n + 1$ корень, является ошибочным. ■

Заметим, что нулевой многочлен, то есть многочлен, все коэффициенты которого равняются нулю, имеет бесконечное множество корней: произвольное число является его корнем.

Пример 12. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены n -й степени. Доказать, что если их значения совпадают при $n + 1$ различных значениях переменной, то эти многочлены равны.

□ Рассмотрим многочлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Его степень не более n . Поскольку значения многочленов $f(x)$ и $g(x)$ совпадают при $n + 1$ различных значениях переменной, то многочлен $h(x)$ равняется нулю при $n + 1$ различных значениях x , то есть количество его корней больше его степени. Из доказанного следствия вытекает, что он является нулевым многочленом, следовательно, $f(x) = g(x)$. ■

Контрольные вопросы



1. ° Чему равняется остаток от деления многочлена $x^3 + x$ на $x - 1$?
2. Сколько существует различных значений переменной x , при которых значения двух разных многочленов первой степени совпадают?
3. Верно ли, что x^{10} и x^5 при делении на $x + 1$ дают одинаковые остатки?
4. При каком значении a многочлен $x^3 - ax - 1$ делится на $x - 1$?
5. Делится ли многочлен $x^{100} - 3x + 2$ на $x^2 - 1$?

3. Метод математической индукции

Индукцией называют метод рассуждений, который ведет от отдельных примеров к некоторому общему выводу. Рассмотрим, например, сумму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Полагая последовательно $n = 1, 2, 3, \dots$, будем получать суммы первых нескольких слагаемых:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}; \quad S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}; \quad S_5 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{5}{6}.$$

Нетрудно заметить, что во всех приведенных примерах сумма первых нескольких слагаемых рассмотренной суммы равняется дроби, числитель которой равняется количеству слагаемых, а знаменатель на 1 больше числителя. Напрашивается вывод, что это свойство имеет место при любом количестве слагаемых. Наше предположение (гипотезу) можно сформулировать таким способом: «Для всех натуральных n справедливо равенство

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \gg.$$

Таким образом, рассмотренные примеры привели нас к гипотезе, которая, как мы сейчас покажем, является верной.

Действительно, из равенства $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ вытекает, что

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Однако не всегда гипотеза, полученная индукцией, оказывается правильной. В одном из своих исследований знаменитый петербургский математик Л. Эйлер (1707 - 1783) писал: «У меня нет для доказательства никаких других доводов, за исключением длительной индукции, которую я провел так далеко, что никоим образом не могу сомневаться в законе, который руководит образованием этих членов... И кажется невозможным, чтобы закон, который, как было обнаружено, выполняется, например, для 20 членов, нельзя было бы наблюдать и для следующих».

Эта фраза показывает, что математики не только часто употребляли индукцию, но и верили в безгрешность ее выводов. Однако то, что казалось Эйлеру невозможным, нередко оказывалось возможным.

Известный отечественный математик Д. А. Граве (1863 - 1939) на основе многочисленных проверок выразил предположение, что число $2^{p-1} - 1$, не делится на p^2 , если p — простое число. В следующей таблице приведены результаты нескольких таких проверок.

Таблица 15

p	$2^{p-1} - 1$	Не делится на
$p = 2$	$2^1 - 1 = 1$	$p^2 = 4$
$p = 3$	$2^2 - 1 = 3$	$p^2 = 9$
$p = 5$	$2^4 - 1 = 15$	$p^2 = 25$
$p = 7$	$2^6 - 1 = 63$	$p^2 = 49$
$p = 11$	$2^{10} - 1 = 1023$	$p^2 = 121$
$p = 13$	$2^{12} - 1 = 4095$	$p^2 = 169$
$p = 17$	$2^{16} - 1 = 65535$	$p^2 = 289$

Оказалось, что гипотеза остается справедливой, если p меньше 1093, но число $2^{1092} - 1$ делится на 1093^2 .

Подставляя в квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + x + 41$ вместо x натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, найдем:

$$P(1) = 43; P(2) = 47; P(3) = 53; P(4) = 61; P(5) = 71.$$

Все полученные значения данного трехчлена являются простыми числами. Подставляя вместо x числа 0, -1, -2, -3, -4, получим: $P(0) = 41$; $P(-1) = 41$; $P(-2) = 43$; $P(-3) = 47$; $P(-4) = 53$. Значения данного трехчлена при указанных значениях переменной x также являются простыми числами.

Возникает гипотеза о том, что значение трехчлена $P(x)$ является простым числом при любом целом значении x . Однако предложенная гипотеза ошибочна, потому что, например, $P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть высказано утверждение, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых или простое число, или квадрат целого числа. Проверяя это

утверждение для натуральных чисел $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, каждый раз будем убеждаться в его справедливости: $1 = 1^2 + 0^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $3 = 2^2 + 1^2$, $4 = 3^2 + 1^2$, $5 = 3^2 + 2^2$, $6 = 2^2 + 2^2$, $7 = 3^2 + 2^2$ и т. д. Продолжая проверку дальше, можно дойти до 20, 50, 100. И для всех этих натуральных чисел рассмотренное утверждение справедливо. Возможно, не стоит дальше проверять и принять, что оно будет выполняться всегда? Оказывается, нет: число 127 уже не обладает сформулированным свойством.

Таким образом, один и тот же метод рассуждений приводит в некоторых случаях к правильному выводу (в первом примере), а в других — к ошибочному выводу (в остальных примерах). Поскольку при этом методе вывод делается после разбора нескольких примеров, которые не охватывают всех возможных случаев, то этот метод называется **неполной индукцией**.

Метод неполной индукции не приводит к полностью надежным выводам, но он полезен тем, что позволяет сформулировать гипотезу, которую потом можно доказать или опровергнуть.

К середине семнадцатого века в математике накопились достаточное количество ошибочных индуктивных утверждений. Поэтому возникла потребность научиться обосновывать справедливость утверждений, зависящих от переменной n , принимающей значения $1, 2, 3, \dots$. В результате продолжительных поисков был изобретен фундаментальный прием доказательства, который обычно называют **методом математической индукции**. Большая заслуга в изобретении и использовании этого метода принадлежит выдающимся математикам семнадцатого столетия Б. Паскалю (1623 - 1662), Р. Декарту (1596 - 1650), Я. Бернулли (1654 - 1705).

Идею этого метода можно наглядно представить себе, если считать, что утверждение — это ступеньки на бесконечном пути познания. Как гарантировать прохождение этого пути? Во-первых, необходимо подняться на какую-то ступеньку, возможно, на первую. Во-вторых, гарантировать переход из каждой ступеньки на следующую. Здравый смысл свидетельствует, что при таких гарантиях на этом пути не будет преград. Математическое представление этой идеи и составляет **принцип математической индукции**. Применение этого принципа для доказательства утверждений называют **доказательством методом математической индукции**.

Доказательство с помощью метода математической индукции заключается в следующем. Во-первых, проверяется правильность утверждения для $n = 1$ (или некоторого числа $n_0 > 1$). Во-вторых, доказывается теорема: «Если утверждение выполняется для $n = k$, то оно выполняется и для $n = k + 1$ ». Если эта теорема доказана, то можно утверждать, что утверждение справедливо для всех натуральных чисел, начиная с того, которое рассматривалось на первом шаге.

Пример 13. Найти сумму n первых нечетных чисел

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

□ Обозначив эту сумму через $S(n)$, положим $n = 1, 2, 3, 4, 5$; тогда будем иметь:

$$S(1) = 1$$

$$S(2) = 1 + 3 = 4,$$

$$S(3) = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$S(5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Замечаем, что при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ сумма n первых нечетных чисел равняется n^2 . Можно ли отсюда сразу сделать вывод, что это имеет место при любом n ? Нет, подобный вывод «по аналогии» может оказаться ошибочным. Мы это видели на ряде примеров. Следовательно, формулу $S(n) = n^2$ нельзя считать доказанной, для скольких бы первых значений n мы ее ни проверили. Чтобы убедиться в ее справедливости для всех n , надо доказать, что как бы далеко мы не продвинулись вдоль натурального ряда чисел, мы сможем сделать еще один шаг.

Предположим, что рассмотренная формула справедлива для $n = k$, и попробуем доказать, что тогда она справедлива и для следующего числа $n = k + 1$.

Таким образом, мы допускаем, что $S(k) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ и будем доказывать, что $S(k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

На основе сделанного предположения $S(k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = S(k) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Следовательно, допустив, что формула $S(n) = n^2$ справедлива для какого-то натурального числа k , мы смогли доказать ее справедливость и для непосредственно следующего числа $k + 1$. Но раньше мы проверили, что эта формула выполняется для $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно, она будет правильной и для числа $n = 6$, следующего за числом 5, а тогда она верна и для $n = 7$, и для $n = 8$, и для $n = 9$ и т. д. Теперь наша формула может считаться доказанной для любого количества слагаемых. ■

Следовательно, **доказательство методом математической индукции состоит из следующих двух частей:**

1) проверки того, что высказанное утверждение справедливо для некоторого значения n (понятно, этим значениям n не обязательно является единица, так, например, утверждения об общих свойствах n -угольников имеют смысл при $n \geq 3$);

2) доказательство того, что если это утверждение выполняется для натурального числа $n = k$, то оно выполняется и для непосредственно следующего числа $n = k + 1$.

В необходимости второй части доказательства мы уже убедились раньше на ряде примеров. Но и первая часть рассуждений не менее необходима: ведь доказательство того, что если какое-то утверждение выполняется для некоторого числа $n = k$, то оно выполняется и для числа $n = k + 1$, само по себе ничего не дает, потому что может оказаться, что это утверждение не выполняется вообще ни для одного значения n . Проиллюстрируем эту необходимость следующим примером.

Выскажем заведомо неверное утверждение: произведение первых n натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ является числом иррациональным.

Предположим, что это утверждение выполняется при $n = k$, и докажем, что оно имеет место и при $n = k + 1$, то есть что произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1)$ является числом иррациональным. Это вытекает из того, что произведение иррационального числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$ на натуральное число $k + 1$ является числом иррациональным. Вторую часть доказательства методом математической индукции мы провели. Однако мы не установили, что при каком-то натуральном значении n это произведение является иррациональным, и не можем этого установить, потому что это неверно.

Методом математической индукции можно доказать правильность формул n -го члена арифметической и геометрической прогрессий, сумм n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Рекомендуем провести самостоятельно эти доказательства.

В начале данного пункта мы высказали гипотезу о том, что $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Это равенство было доказано другим методом. Докажем его методом математической индукции.

Проверка его правильности при $n = 1$ была выполнена раньше.

Предположим, что $S_k = \frac{k}{k+1}$ и докажем, что $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Пример 14. Доказать равенство $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

□ 1. $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6}$.

2. Предположим, что равенство справедливо при $n = k$, то есть $S_2(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ и докажем, что оно выполняется для $n = k + 1$:

$$S_2(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Применяя предположение, имеем:

$$\begin{aligned} S_2(k+1) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. ■



Метод математической индукции применяется в самых разнообразных областях математики.

Пример 15. Доказать, что при натуральном n выполняется неравенство $2^{n+2} > 2n + 5$.

□ 1. Неравенство верно при $n = 1$, поскольку $2^3 > 2 + 5$.

2. Предположим, что доказываемое неравенство верно при $n = k$, то есть $2^{k+2} > 2k + 5$. Тогда при $n = k + 1$ будем иметь:

$$2^{(k+1)+2} = 2^{k+2} \cdot 2 > (2k + 5) \cdot 2 = 2(k + 1) + 5 + (2k + 3) > 2(k + 1) + 5,$$

то есть $2^{(k+1)+2} > 2(k + 1) + 5$. Следовательно, неравенство $2^{n+2} > 2n + 5$ является правильным при любом натуральном n . ■

Пример 16. Доказать, что выражение $2^{2n} + 15n - 1$ при любом натуральном значении n делится на 9.

□ 1. При $n = 1$ значение данного выражения равняется 18 и делится на 9.

2. Предположим, что значение выражения при $n = k$, то есть $2^{2k} + 15k - 1$, делится на 9 и докажем, что при этом предположении значение данного выражения при $n = k + 1$, то есть $2^{2(k+1)} + 15(k + 1) - 1$, делится на 9. Имеем:

$$2^{2k+2} + 15(k + 1) - 1 = 4 \cdot 2^{2k} + 15k + 15 - 1 = 4 \cdot 2^{2k} + 60k - 4 - 45k + 18 = \\ = 4(2^{2k} + 15k - 1) - 9(5k - 2).$$

Первое слагаемое делится на 9, согласно предположению, второе слагаемое тоже, очевидно, делится на 9. Поэтому и сумма делится на 9. Следовательно, утверждение доказано для всех натуральных n . ■



Метод математической индукции позволяет доказывать разные тождества и неравенства, одна или обе части которых зависят от натурального числа n .

Пример 17. Доказать тождество

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

□ 1. При $n = 1$ левая часть доказываемого тождества принимает вид $1 - \frac{1}{4}$

, а его правая часть — $\frac{3}{4}$. Поэтому тождество является правильным при $n = 1$.

2. Предположим, что тождество является правильным при $n = k$ и докажем, что при этом предположении оно является правильным и при $n = k + 1$.

3. Запишем это тождество при $n = k + 1$ и при $n = k$ и разделим почленно полученные равенства:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{k+3}{2(k+2)},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)},$$

$$1 - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{k+3}{2(k+2)} : \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Последнее равенство является правильным, потому что

$$\frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}.$$

Поскольку делители и частные равны между собой, то равны и делимые, то есть тождество является правильным при $n = k + 1$. Следовательно, тождество верно при всех n . ■

В некоторых случаях полезно вычитать друг из друга соответствующие части рассматриваемых тождеств.



Контрольные вопросы

1. Какой вид принимает тождество

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

при: а) $n = 1$; б) $n = k$; в) $n = k + 1$?

2. ° Справедливо ли неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ для $n = 1$?

3. ° Справедливо ли неравенство $2^n > 2n + 1$ при $n = 1$?

4. Начиная с какого значения n справедливо неравенство $2^n > 2n + 1$?

5. Рассмотрим равенства:

1	= 0 + 1
2 + 3 + 4	= 1 + 8
5 + 6 + 7 + 8 + 9	= 8 + 27
10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16	= 27 + 64

К какому общему закону подводят эти равенства?

6. Можно ли доказать методом математической индукции равенство $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$?

Задачи

126. Пусть $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Найдите $f(x-1)$.

127. Вычислите произведение $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$.

128. Известно, что $x = 1$ является корнем многочлена $(x^4 + 1)(x + 2) - (x + a)(x^2 + 1)$. Найдите a .

129. Докажите, что сумма коэффициентов многочлена $f(x)$ равна $f(1)$.

130. Найдите сумму коэффициентов многочлена $(1 + 3x - 5x^2)^{118}(1 - 4x + 2x^2)^{231}$.

131. Разделите многочлен $2x^3 + 3x^2 - 8$ на $x - 1$ с остатком.

132. Некоторый многочлен при делении на $x - 1$ даёт остаток 3, а при делении на $x - 2$ даёт остаток 4. Чему равняется остаток от деления этого многочлена

на $(x-1)(x-2)$?

133. Некоторый многочлен при делении на $x + 1$, $x - 2$, $x - 3$ даёт в остатке соответственно 3, 1, -1. Чому равняется остаток от деления этого многочлена на $(x+1)(x-2)(x-3)$?

134. При каком значении a многочлен $x^3 + 6x^2 + ax + 12$ делится без остатка на $x + 4$?

135. При каких значениях a и b многочлен $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$ делится без остатка на многочлен $x^2 - 3x + 2$?

136. Найдите остаток от деления многочлена $x^6 - 6x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$ на $x + 3$.

137. Чему равняется коэффициент a , если остаток от деления многочлена $x^4 - ax^3 + 4x^2 - x + 1$ на $x - 2$ равен 7?

138. Докажите, что многочлен $(x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.

139. Делится ли многочлен:

1) $x^{2k} + a^{2k}$ ($a \neq 0$) на $x - a$; 2) $x^{2k} + a^{2k}$ ($a \neq 0$) на $x + a$; 3) $x^{2k+1} + a^{2k+1}$ на $x + a$?

140. Докажите, что если (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q , то $b_n = b_1 q^{n-1}$.

141. Докажите, что для всех натуральных n справедливо равенство:

1) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$;

2) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

3) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

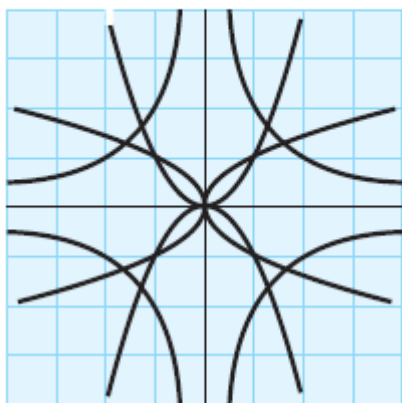
142. Пусть последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ задана следующими равенствами: $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$. Докажите, что $a_n = n(n+1)$.

143. Докажите тождество:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

144. Докажите неравенство для $n \in \mathbf{N}$:

1) $2^n > n$; 2) $2^n > 2n + 1$ при $n \geq 3$; 3) $2^n > n^3$ при $n \geq 10$.



Готовимся к тематическому оцениванию по теме "Функ- ции, их графики и свойства"

Задание для самоконтроля

1. ° Известно, что кривая проходит через точки

$A(1; 0)$ и $B(1; 1)$. Может ли эта кривая быть графиком некоторой функции?

2. В скольких точках график функции может пересекаться прямой: а) $x = b$; б) $y = b$?

3. ° Равны ли функции: а) $y = \sqrt{x^2}$, $y = x$; б)

$$y = \sqrt{x^2}, y = |x|;$$

в) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $y = x - 1$; г) $y = (\sqrt{x})^2$, $y = x$?

4. ° Проходит ли график функции $y = \sqrt{x}$ через точку с координатами $(4; -2)$?

5. ° Укажите точки пересечения графика функции $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$ с осями координат.

6. ° Какова область определения функции: а) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$?

7. ° Какая из следующих функций является чётной (нечётной):

а) $y = x^2 + x$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = x^3 + 1$; г) $y = x^3 + x$?

8. Функция $y = f(x)$ — нечётная и определена в точке $x = 2$. Чему равняется $f(2) + f(-2)$?

9. Может ли чётная функция возрастать на промежутке $[-1; 1]$?

10. * Функция $y = f(x)$ — чётная и при $x \geq 0$ имеет вид $f(x) = (x - 1)(x^2 - 4)$. Сколько нулей имеет эта функция?

11. ° Известно, что $y = f(x)$ — возрастающая функция в своей области определения. Какое из чисел больше: $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ или $f\left(-\frac{1}{3}\right)$?

12. Чётная функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[-5; -1]$. Какое из чисел меньше: $f(4)$ или $f(2)$?

13. На рис. 144 изображен график функции $y = f(x)$.

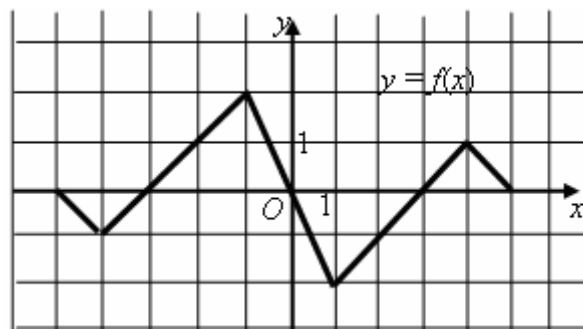


Рис. 144

а) ° Какова область ее определения?

б) ° Является ли функция чётной? Нечётной?

в) ° Сколько нулей имеет функция?

г) ° При каких значениях x функция принимает положительные (отрицательные) значения?

д) ° Чему равняется сумма длин всех промежутков убывания функции?

е) ° Каково множество значений функции?

ж) ° Чему равняется наибольшее (наименьшее) значение функции?

з) ° Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 1$?

и) * При каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет два корня?

к) * Можно ли утверждать, что функция возрастает на множестве $[-4; -1] \cup [1; 4]$?

14. ° Какой угол (острый или тупой) образует прямая

$y = \frac{1-x}{3}$ с положительным направлением оси x ?

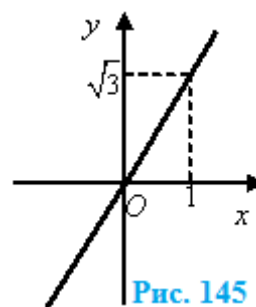
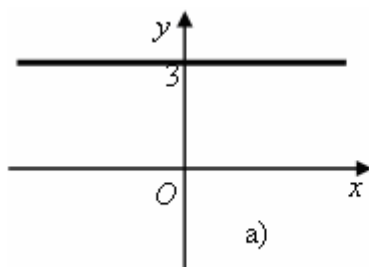


Рис. 145

15. ° Чему равняется угловой коэффициент прямой, изображенной на рис. 145?

16. ° Каково уравнение прямой, изображенной на: а) рис. 146 а); б) рис. 146 б); в) рис. 146 в)?



а)

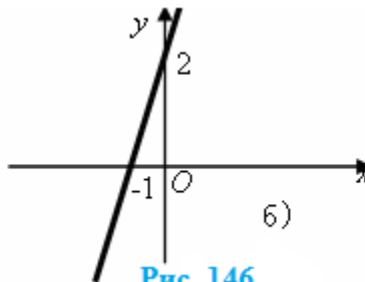
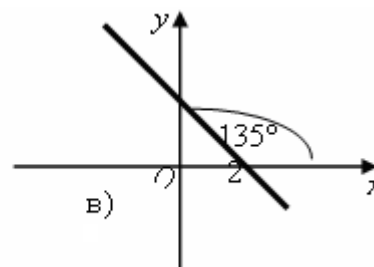


Рис. 146

б)



в)

17. ° Возрастает или убывает линейная функция $y = -2(1 - 3x)$?

18. При каких значениях k функция $y = (k + 1)x - 2$ убывает?

19. ° Какой знак имеет число a , если функция $y = ax^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$?

20. ° Сколько нулей имеет функция: а) $y = 0,5x^2 - x + 1$; б) $y = 0,5x^2 + x - 1$; в) $y = 0,5x^2 - 2x + 2$?

21. ° Каковы координаты вершины параболы: а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = -(x + 2)^2$?

22. При каком условии парабола $y = -x^2 + bx - 1$ полностью лежит в нижней полуплоскости?

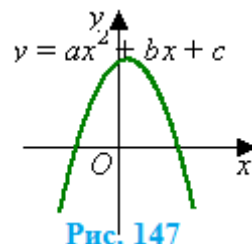
23. ° Каков наибольший промежуток, на котором возрастает функция: а) $y = 2x^2 - 3x + 4$; б) $y = -x^2 + 4x - 1$?

24. ° Каково наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 8x + 1$:
а) в области ее определения; б) на промежутке $[0; 1]$?

25. ° Каково множество значений функции : а) $y = 3x^2 - 6x + 2$;

б) $y = -3x^2 - 6x + 2$?

26. На рис. 147 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Каковы знаки коэффициентов a, b, c ?



27. При каких значениях k график обратной пропорциональности $y = \frac{k-2}{3x}$

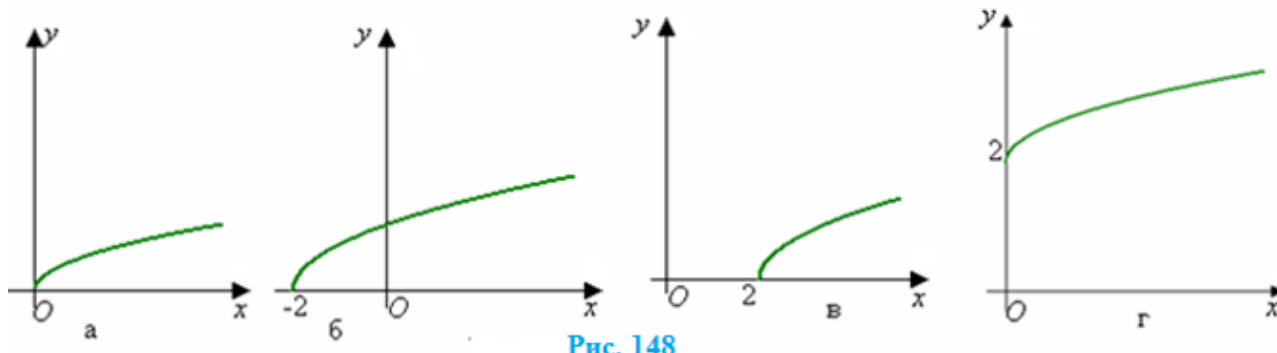
лежит во II и IV четвертях?

28. С помощью каких геометрических преобразований из графика функции $y = g(x)$ можно получить график функции:

а) ° $y = g\left(x + \frac{1}{2}\right)$; б) ° $y = g(x) - \frac{1}{2}$; в) ° $y = \frac{g(x)}{2}$; г) ° $y = g\left(\frac{x}{2}\right)$;

д) $y = g\left(\frac{x}{2} + 1\right)$; е) * $y = |g(x)|$; ж) * $y = g(|x|)$?

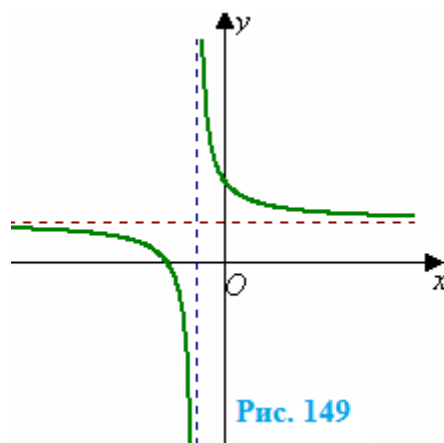
29. ° На каком из рис. 148 изображен график функции $y = \sqrt{x+2}$?



30. На сколько единиц и в каком направлении осей следует перенести параболу $y = (x+1)^2$, чтобы получить параболу $y = (x-1)^2 + 1$?

31. Областью определения функции $y = f(x)$ является промежуток $[-1; 2]$. Какова область определения функции: а) $y = f(x+3)$; б) $y = f(2x)$; в) $y = f(-x)$; г) $y = -f(x)$?

32. На рис. 149 изображен график функции $y = \frac{1}{x+a} + b$. Какие знаки имеют числа a и b ?



33. Множеством значений функции $y = g(x)$ является промежуток $[-3; 1]$. Каково множество значений функции: а) ° $y = g(x) + 3$; б) ° $y = g(x + 3)$; в) ° $y = 3 \cdot g(x)$; г) $y = 3 \cdot g(x) - 3$; д) * $y =$

$|g(x)|$; е) $y = g(|x|)$?

34. График функции $y = x^3$ сжали к оси y вдвое и перенесли в отрицательном направлении оси y на 1 единицу. График какой функции получили в результате?

35. * График функции $y = f(x)$ симметричен относительно точки с координатами

$(-1; 0)$. При каких значениях a функция $y = f(x + a)$ будет нечётной?

36. ° Является ли число 2 корнем уравнения: а) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4} = 0$; б)

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = 0?$$

37. Сколько корней имеет уравнение: а) ° $x(x^2 + 3x - 4) = 0$; б)

$$\frac{x(x^2 + 3x - 4)}{x - 1} = 0?$$

38. ° В скольких точках пересекаются графики функций $y = \frac{x + 2}{x + 1}$ и $y = \frac{1}{x + 1}$?

39. Равносильны ли приведенные уравнения? Если нет, то какое из них является следствием другого?

а) ° $x^2 = 4$ и $x - 2 = 0$; б) ° $x^4 = x^2$ и $x^2 = 1$; в) ° $\frac{x^2 + 2x}{x} = 0$ и $x^2 + 2x =$

0;

г) ° $\frac{x^2 + 2x + 1}{x} = 0$ и $x^2 + 2x + 1 = 0$; д) $x^2(x + 2) = -x$ и $x(x + 2) = -1$;

е) $x^2 + \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{x + 2} + 4$ и $x^2 = 4$.

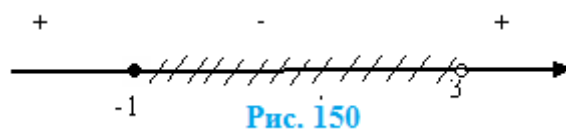
40. Верно ли утверждение: $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow g(x) = f(x)$?

41. ° Какое из следующих неравенств выполняется для любого значения x :

а) $(2x - 1)^2 > 0$; б) $x^2 + 3x + 4 > 0$; в) $|x| > x$?

42. ° Верно ли на рис. 150 изображено

решение неравенства $\frac{x + 1}{3 - x} \leq 0$, получен-



ное методом интервалов?

43. ° При каких значениях x график функции $y = -\frac{3}{x}$ лежит ниже графика функции $y = -\frac{1}{2}$?

44. Какова область определения функции: а) ° $y = \sqrt{\frac{x}{2x + 1}}$; б) $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}}$?

45. ° На рис. 151 изображены графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, заданные на промежутке $[-6; 5]$. При каких значениях x выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$?

46. Множеством значений убывающей функции $y = f(x)$ является промежуток $[-2; 4]$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = c$, если: а) $c = -3$; б) $c = -1$; в) $c = 4$?

47. * Известно, что непрерывная функция $y = g(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$ и убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Какое наибольшее количество корней может иметь уравнение $g(x) = c$, где c — произвольное число?

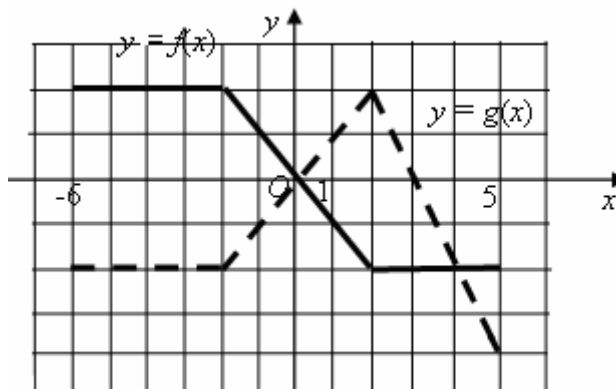


Рис. 151

Ответы к заданиям для самоконтроля

1. Нет. 2. а) Не более чем в одной; б) в любом количестве. 3. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет. 4. Нет. 5. $\left(0; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 0\right)$. 6. а) R ; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. 7.

Ни чётная, ни нечётная; б) чётная; в) ни чётная, ни нечётная; г) нечётная. 8. 0.

9. Нет. 10. 4. 11. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$. 12. $f(4)$. 13. а) $[-5; 5]$; б) нечётной; в) 5; г) $f(x) > 0$ при

$x \in (-3; 0) \cup (3; 5)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-5; -3) \cup (0; 3)$; д) 4; е) $[-2; 2]$; ж) 2 и -2 ; з) 3; и) $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$; к) нет. 14. Тупой. 15. $\sqrt{3}$. 16. а) $y = 3$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = -x + 2$. 17. Возрастает. 18. $k \in (-\infty; -1)$. 19. $a < 0$. 20. а) 0; б) 2; в) 1. 21.

а) $(2; -1)$; б) $(-2; 0)$. 22. $-2 < b < 2$. 23. а) $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; 2]$. 24. а) -7 ; б) -5 . 25.

а) $[-1; +\infty)$; б) $(-\infty; 5]$. 26. $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$. 27. $k < 2$. 28. а) С помощью параллельного переноса графика на $\frac{1}{2}$ в отрицательном направлении оси абсцисс; б)

переносом графика на $\frac{1}{2}$ в отрицательном направлении оси ординат; в) сжати-

ем графика вдвое к оси абсцисс; г) растяжением графика вдвое от оси ординат; д) растяжением графика вдвое от оси ординат и переносом на 2 единицы в отрицательном направлении оси абсцисс; е) симметричным отражением относительно оси абсцисс части графика, расположенной в нижней полуплоскости; ж) построением графика функции $y = g(x)$ для $x \geq 0$ и симметричным отражением его относительно оси ординат в левую полуплоскость. 29. б. 30. На 2 единицы в положительном направлении оси абсцисс и на 1 в положительном

направлении оси ординат. 31. а) $[-4; -1]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; в) $[-2; 1]$; г) $[-1; 2]$. 32.

$a > 0$; $b > 0$. 33. а) $[0; 4]$; б) $[-3; 1]$; в) $[-9; 3]$; г) $[-12; 0]$; д) $[0; 3]$; е) невозмо-

жно определить. **34.** $y = 8x^3 - 1$. **35.** $a = -1$. **36.** а) Да; б) нет. **37.** а) 3; б) 2. **38.** Графики не пересекаются ни в одной точке. **39.** а) Нет; первое уравнение является следствием второго; б) нет; первое уравнение является следствием второго; в) нет; второе уравнение является следствием первого; г) да; д) нет; первое уравнение является следствием второго; е) нет; второе уравнение является следствием первого. **40.** Нет. **41.** б). **42.** Нет. **43.** $x \in (0; 6)$. **44.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [0; +\infty)$; б) $[-1; 0) \cup (0; 1]$; в) $[1; 4) \cup (4; +\infty)$. **45.** $[-6; 0] \cup [4; 5]$. **46.** а) 0; б) 1; в) 0. **47.** 2.

Образец контрольной работы

1. На рис. 152 изображен график функции $y = f(x)$.

Найдите:

- 1) ° область определения функции;
- 2) ° промежутки ее возрастания и убывания;
- 3) ° наибольшее и наименьшее значения функции;
- 4) ° множество ее значений;
- 5) ° количество корней уравнения $f(x) = 0,5$;
- 6) нули функции $y = f(2x)$;
- 7) * значения a , при которых уравнение $\frac{1}{f(x)} = a$ имеет один корень.

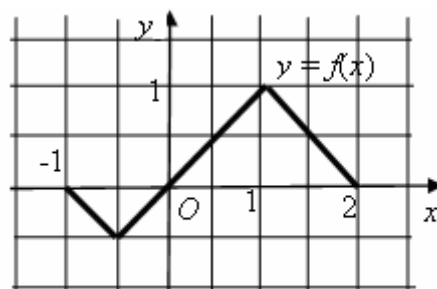


Рис. 152

2. Дана функция $g(x) = \frac{1}{2-x}$.

- 1) ° Найдите область определения функции.
- 2) ° Найдите точки пересечения графика функции $y = g(x)$ с графиком функции $y = \frac{x^2}{4-x^2}$.
- 3) ° Укажите промежутки, на которых график функции $y = g(x)$ лежит ниже прямой $y = -1$.
- 4) Укажите промежутки, на которых график функции $y = g(x)$ лежит выше графика функции $y = x$.
- 5) Постройте график функции: а) ° $y = g(x)$; б) $y = -g(x) + \frac{1}{2}$; в) * $y = |g(x)|$.

Таблицы для систематизации материала раздела

Множество действительных чисел

Таблица 16

Основные понятия

Определение	Геометрическая интерпретация, примеры	Применение
Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая	$0,35355355535555...$, $\sqrt{2} = 1,41421356...$, $\pi = 3,1415926535...$	Иррациональные числа дают возможность измерять длины отрезков, не-

дробь.		соизмеримых с единичным.
Расстояние от начала координат O до точки x называется модулем числа x и обозначается $ x $.		Понятие модуля числа позволяет записывать с помощью выражений взаимное расположение точек на координатной прямой.

Таблица 17

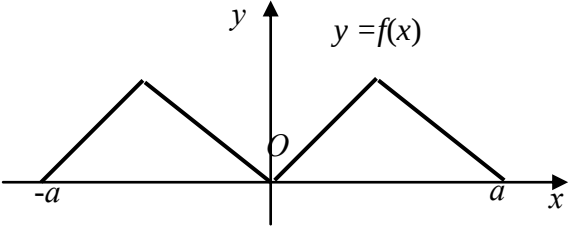
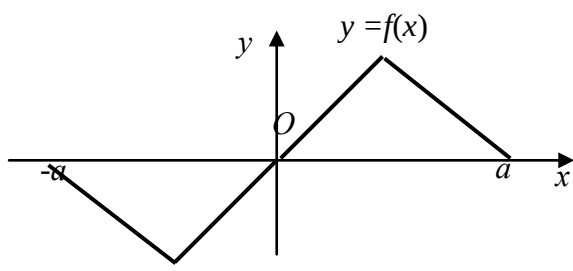
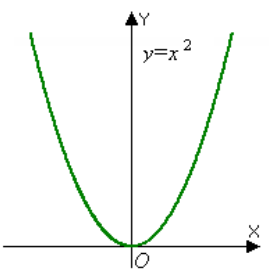
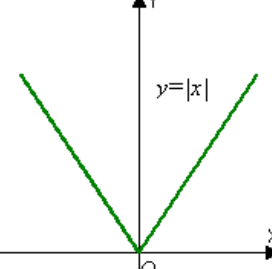
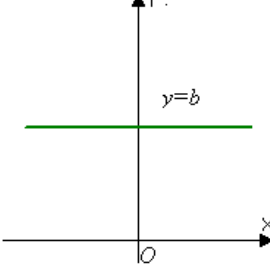
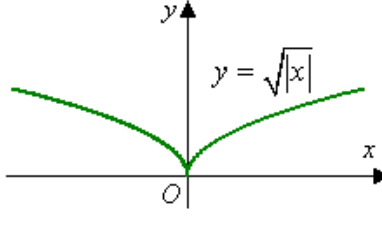
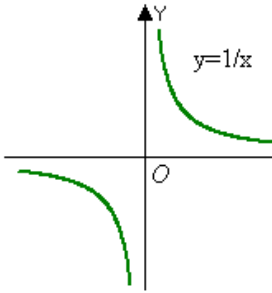
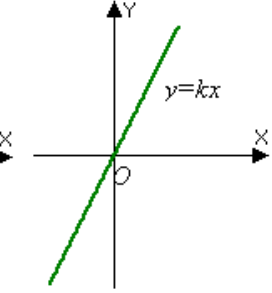
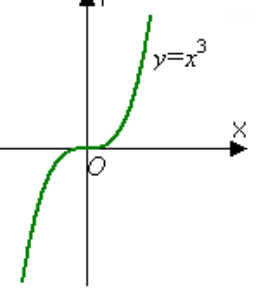
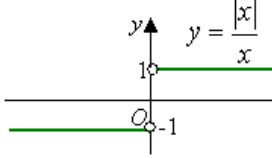
Основные утверждения

Содержание утверждения	Примеры
Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ можно представить в виде десятичной периодической дроби.	$\frac{5}{3} = 1,6666... = 1,(\overline{6})$
Каждая десятичная периодическая дробь изображает определенное рациональное число.	$3,(\overline{7}) = 3\frac{7}{9}$.
Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой, и наоборот, каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу.	
Расстояние между точками координатной прямой равно модулю разности соответствующих им чисел.	

Простейшие свойства функций Чётные и нечётные функции

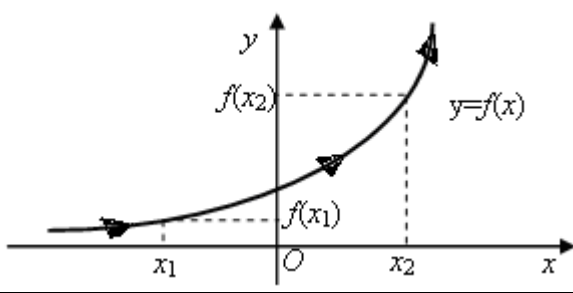
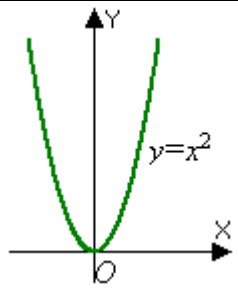
Таблица 18

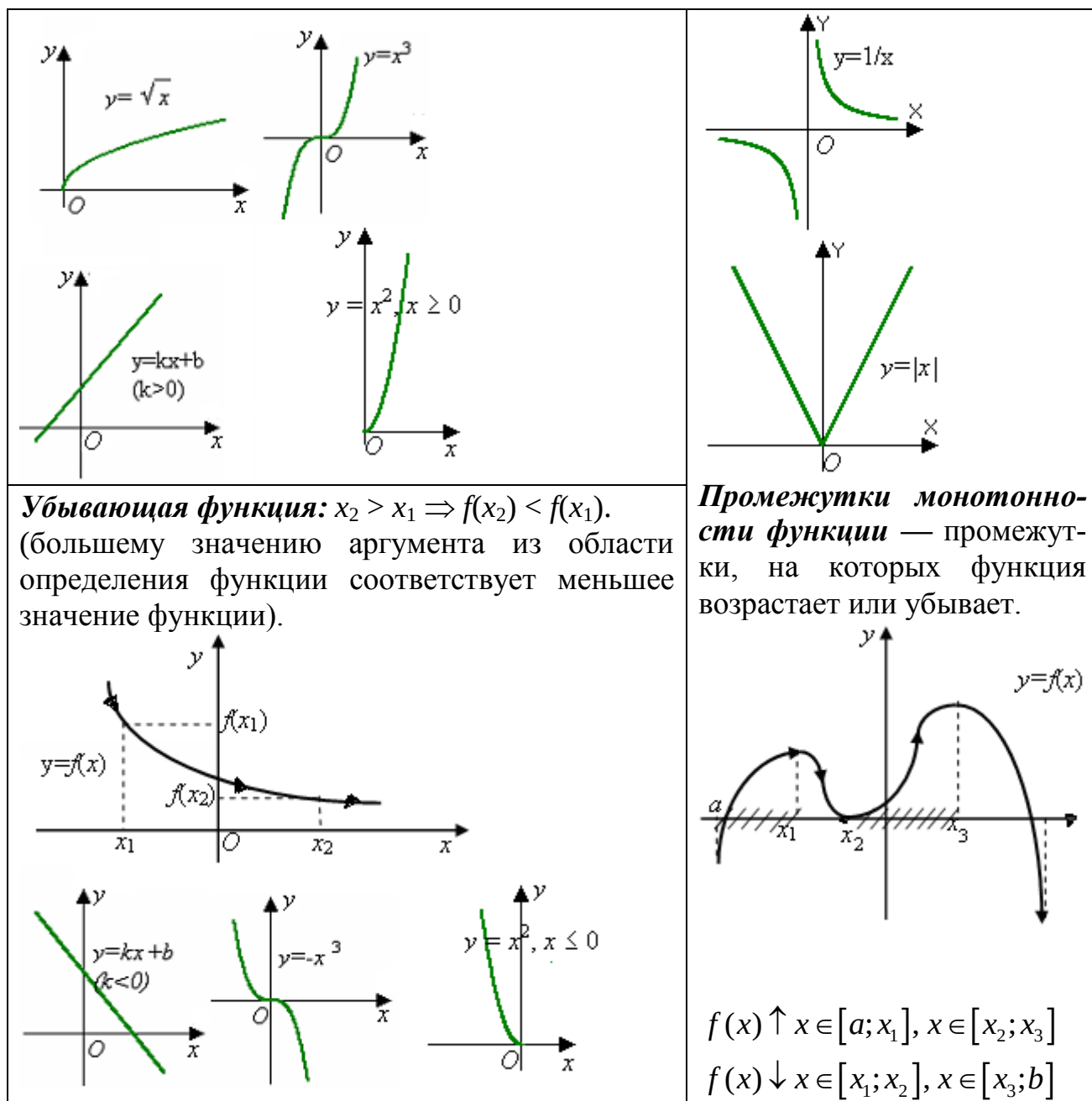
Чётные функции	Нечётные функции
Область определения функции симметрична относительно начала координат	
$f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения функции.	$f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции.

График функции симметричен относительно оси y. 	График функции симметричен относительно начала координат. 
   	   

Монотонность функций

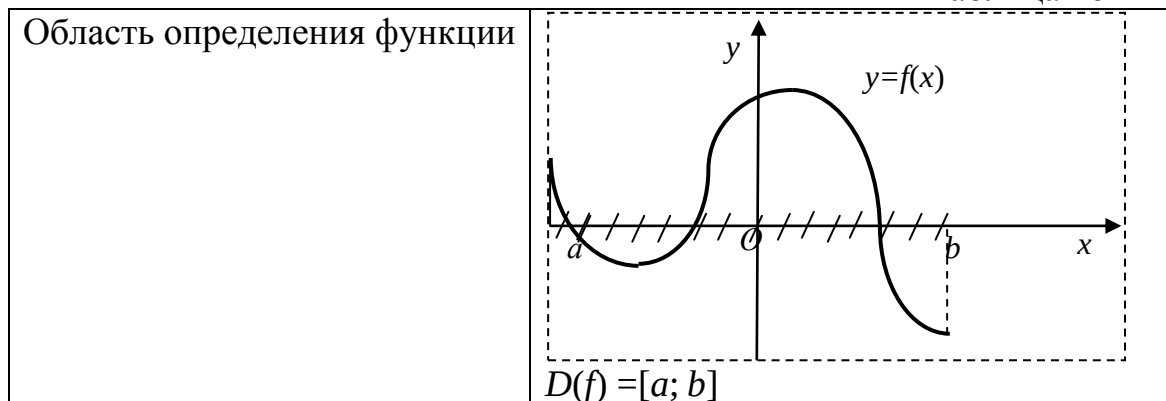
Таблица 19

Монотонные функции	Не монотонные функции
Возрастающая функция: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (большему значению аргумента из области определения функции соответствует большее значение функции). 	



Чтение графика функции

Таблица 20



Нули функции, промежутки знакопостоянства функции	x_1, x_2, x_3 — нули функции $f(x) > 0 \quad x \in [a; x_1) \cup (x_2; x_3)$ $f(x) < 0 \quad x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; b]$
Наибольшее, наименьшее значение, множество значений функции	M — наибольшее значение функции m — наименьшее значение функции $E(f) = [m; M]$
Промежутки монотонности функции	$f(x) \uparrow \quad x \in [x_4; x_5]$ $f(x) \downarrow \quad x \in [a; x_4], x \in [x_5; b]$

Уравнение с одним неизвестным

Равносильные уравнения и уравнения-следствия

Таблица 21

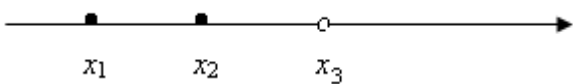
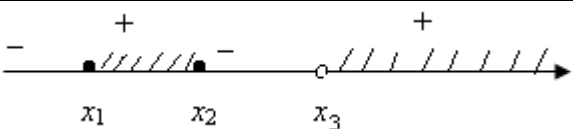
Корень уравнения — это значение неизвестного, которое обращает уравнение в правильное числовое равенство.
Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что корней нет.
Уравнения $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ равносильны , если совпадают множества их корней.

Обозначение: $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.
Уравнение $g(x) = 0$ является следствием уравнения $f(x) = 0$, если каждый корень уравнения $f(x) = 0$ является корнем уравнения $g(x) = 0$.
Обозначение: $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$.

Рациональные неравенства (метод интервалов)

Таблица 22

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

№ этапа	План решения	Реализация плана
1.	Разложить многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ на множители: линейные функции или квадратные трехчлены, не имеющие нулей.	$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x - x_3)(x^2 + px + q)} \geq 0$
2.	Отметить на числовой оси нули числителя и знаменателя.	
3.	Определить знак выражения $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на каждом из полученных промежутков.	
4.	Записать ответ.	$x_1 \leq x \leq x_2, x > x_3.$

Исторический комментарий

Неопровержимым является утверждение, что число — это основное понятие математики, и развитие учения о числе отражает развитие самой математики.

На той стадии развития, когда стали складываться основы общественно-экономической деятельности людей, возникла потребность в подсчете объектов ведения хозяйства, их количественной оценки. А это и привело к понятию натурального числа.

Наибольший вклад в учение о числе внесли древнегреческие математики. Хотя математика Греции была геометрической — и сами числа, и действия над ними, и свойства чисел, и их доказательства имели геометрическое толкование — изучению чисел уделялось много внимания. Знаменитая научная школа Пифагора (VI - V в. до н. э.) на основе натуральных чисел строила первые математические модели Вселенной. В свойствах натуральных чисел ее представители видели отражение гармонии, свойственной явлениям окружающего мира. В то же время открытие иррациональных чисел, к которому привела геометрическая задача об измерении, и доказательство того, что длина диагонали квадрата со стороной, равной единице измерения, не может быть выражена рациональным числом, расценивалось ими как нарушение этой гармонии.

Успехи в природоведении, введение в 17 в. координатного метода, а тем самым установление взаимно однозначного соответствия между вещественными числами и точками числовой оси, способствовали окончательному внедрению в математику вещественных чисел, хотя формальное построение теории вещественных чисел было выполнено в 19 в. в работах немецких математиков Р. Дедекинда (1831 - 1916), Г Кантора и К. Вейерштрасса (1815 - 1897).

Необходимость решать уравнение как первой, так и второй степени еще в древние времена была вызвана потребностями нахождения площадей земельных участков, построением крепостей в военных целях, развитием астрономии и самой математики. Отдельные приемы решения линейных уравнений были известны еще 4000 лет тому назад в древнем Вавилоне. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне. Правила решения этих уравнений, которые изложены в вавилонских трудах, близки к современным, но неизвестно, как вавилоняне дошли до них. Вавилоняне умели решать как неполные квадратные уравнения, так и отдельные полные. Поскольку они еще не знали отрицательных чисел, то в вавилонских текстах, которые дошли до нас, отсутствуют общие методы решения квадратных уравнений.

Дальнейший взнос в проблему решения квадратных и более сложных уравнений внесли индийские ученые (Ариабхатта, V ст., Брахмагупта, VII ст.), среднеазиатские (ал-Хорезми и др.). Европейские математики (Н. Тарталья, Дж. Кардано, Р. Бомбелли) в XVI ст. открыли формулы для решения уравнений 3-й и 4-й степеней. Хотя эти формулы громоздки для практического вычисления корней, принципиальное значение их велико: они позволяют записать корни уравнений 3-й и 4-й степеней как некоторые функции от коэффициентов этих уравнений. Эти функции содержат операции извлечения корней 3-й и 4-й степеней. Долго изучался вопрос о том, существует ли формула, которая выражает корни уравнения 5-го степени через его коэффициенты с помощью арифметических действий и радикалов. Отрицательный ответ на этот вопрос был получен в работах Н. Абеля (1802 - 1829) и Э. Галуа (1811 - 1832) в первой половине XIX ст.

Хотя теоретически проблема «точного» решения уравнений в определенной мере была решенной, с позиций практики на первое место выступили приближенные методы решения уравнений, которые разрабатывали, начиная с 17 ст., англичанин И. Ньютон (1643 - 1728), француз Ж. Лагранж (1736 - 1813), итальянец П. Руффини (1765 - 1822), россиянин Н. Лобачевский и много других математиков прошлого и современности, ведь к алгебраическим уравнениям, их системам сводятся многочисленные задачи техники, экономики, метеорологии, геологии и т. п.

Идею функциональной зависимости начали использовать очень давно. Например, вавилонские ученые установили эмпирические зависимости между геометрическими величинами. Так, они считали, что площадь круга S равняется $3r^2$, где r — радиус круга. Они составили много таблиц значений разных зависимостей: квадратов и кубов чисел, суммы квадратов и кубов чисел и т. п.

Древнегреческие математики также рассматривали много соотношений. Например, они составили таблицы зависимости между длиной хорды круга и величиной дуги, которую она стягивает.

Ученые средневековья строили графики зависимостей путем построения отрезков, перпендикулярных к некоторой прямой и длины которых отображали значение величин. Но отсутствие буквенной алгебры и понятия переменной величины мешало им сформировать понятие функции. И только в XVII веке в связи с географическими и астрономическими открытиями, созданием машин и механизмов возникли условия для создания математики, которая бы изучала зависимости величин, в частности связанных с движением.

Введению понятия функции наука обязана французскому философу и математику Р. Декарту (1596 - 1650) в связи с введением и применением координат на плоскости. Идеи Декарта быстро нашли признание и стали широко применяться математиками. Понадобилось меньше века, чтобы функции и связанные с ними понятия и факты стали одними из важнейших в математике. Это в значительной степени объясняется тем, что исследование функций имело непосредственное приложение к решению многих прикладных задач, в частности тех, которые связаны с движением. И хотя общепризнанного определения функции не существовало почти до середины XIX века, ученые широко пользовались этим понятием, разрабатывали теории исследования отдельных классов функций.

И в современной математике понятие функции остается одним из важнейших. Существует много разделов математики, которые занимаются изучением функций и их приложениями к описанию разнообразных явлений и процессов.

В завершение отметим, что термин «функция» ввел Г. Лейбниц, обозначение функции буквами f , φ и т. д. использовал Л. Эйлер. Современное определение функции дали чех Б. Больцано (1781 - 1848), россиянин М. Лобачевский, немец П. Дирихле (1805 - 1859).



Раздел 2

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В данном разделе обобщаются представления о степенях, степенных функциях с любыми рациональными показателями. Тем самым расширяются возможности моделировать реальные процессы и явления с помощью функций.

Готовимся к изучению темы "Степенные функции"

Начиная изучение темы "Степенные функции", в первую очередь, вспомним, что в 7 - 9 классах в курсе алгебры изучалось о степенях и квадратных корнях.

Степени с целыми показателями

Таблица 23

Степень с натуральным показателем	$n \in N, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}. \quad a_1 = a.$
Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1, a \neq 0.$
Степень с целым отрицательным показателем	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in N.$

Свойства степени с целым показателем

Таблица 24

Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in Z.$
Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in Z.$
Возведение степени в степень	$(a^x)^y = a^{xy}, x, y \in Z.$
Степень произведения	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in Z.$
Степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, x \in Z.$

Арифметический квадратный корень и его свойства

Таблица 25

Определение	$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0, (\sqrt{a})^2 = a$
Арифметический квадратный корень из произведения	$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$
Арифметический квадратный корень из дроби	$a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$
Арифметический квадратный корень из квадрата	$\sqrt{a^2} = a .$

Тест для диагностики готовности к изучению темы

1. Вычислите $(-2)^3 \cdot (-1)^2$.
А. -8. **Б.** -6. **В.** 8. **Г.** 6.
2. Представьте в виде степени произведение $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$.
А. $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5$. **Б.** $\left(\frac{1}{2}\right)^5$. **В.** $-\left(-\frac{1}{2}\right)^5$. **Г.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$.
3. Вычислите $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$.
А. $15\frac{5}{8}$. **Б.** $-8\frac{1}{8}$. **В.** $-15\frac{5}{8}$. **Г.** $8\frac{1}{8}$.
4. Вычислите $2,3 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^4$.
А. 460. **Б.** 6900. **В.** 690. **Г.** 69.
5. Вычислите $(-1)^2 + (-1)^3 - (-1)^4 \cdot (-1)^5 + \frac{(-1)^7}{(-1)^6}$.
А. 0. **Б.** 1. **В.** -1. **Г.** -2.
6. Вычислите значение выражения $\sqrt{1-3x}$ при $x = -5$.
А. ± 4 . **Б.** 16. **В.** 4. **Г.** ± 16 .
7. Вычислите значение выражения $\frac{x-x^3}{2}$ при $x = -\sqrt{5}$.
А. $-3\sqrt{5}$. **Б.** $-2\sqrt{5}$. **В.** $2\sqrt{5}$. **Г.** $3\sqrt{5}$.
8. Укажите, между какими последовательными целыми числами содержится число $\sqrt{43}$.
А. 6 и 7. **Б.** 5 и 6. **В.** 7 и 8. **Г.** 4 и 5.
9. Упростите выражение $(-a)^3 \cdot (3a^3)^2$.
А. $9a^8$. **Б.** $6a^9$. **В.** $-6a^8$. **Г.** $-9a^9$.
10. Упростите выражение $\left(\frac{3a^5}{a^2}\right)^3$.
А. $27a^9$. **Б.** $27a^6$. **В.** $9a^9$. **Г.** $9a^6$.
11. Упростите выражение $\left(\frac{3a^{-1}}{b^2}\right)^{-2} \cdot (a^2b^{-1})^3$.
А. $\frac{a^4}{9b}$. **Б.** $\frac{a^8}{9b}$. **В.** $\frac{9b}{a}$. **Г.** $\frac{a^8b}{9}$.
12. Представьте одночлен $-0,008x^9y^{12}$ в виде степени другого одночлена.
А. $-0,008(x^3y^4)^3$. **Б.** $(-0,2x^3y^4)^3$. **В.** $(-0,2x^6y^9)^3$. **Г.** $(-0,2)^3x^9y^{12}$.

13. Упростите $\sqrt{(3-a)^2} + \sqrt{(a-4)^2}$, если $3 \leq a \leq 4$.

А. -1 . Б. $2a - 7$. В. 1 . Г. $7 - 2a$.

14. Укажите координаты точки, в которой график функции $y = \frac{1}{x-2}$ пересекает ось y .

А. $(2; 0)$. Б. $(-2; 0)$. В. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Г. $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

15. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку $(-3; 4)$.

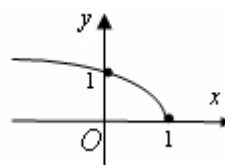
А. $y = -\frac{12}{x}$. Б. $y = \frac{12}{x}$. В. $y = \frac{1}{12x}$. Г. $y = -\frac{1}{12x}$.

16. Укажите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}$.

А. $[-1; +\infty)$. Б. $(-\infty; -1]$. В. $(-\infty; 1]$. Г. $[1; +\infty)$.

17. Определите, график какой из указанных функций изображен на рисунке.

А. $y = \sqrt{x+1}$; Б. $y = \sqrt{x-1}$; В. $y = \sqrt{1-x}$; Г. $y = \sqrt{-1-x}$.



18. Сравните без вычислительных средств числа $a = 3\sqrt{5}$ и $b = 4\sqrt{3}$.

А. $a < b$. Б. $a = b$. В. $a > b$. Г. Сравнить невозможно.

19. Расположите в порядке возрастания числа $a = \sqrt{5,3}$, $b = \sqrt{4,9}$, $c = 1$.

А. $c < a < b$. Б. $c < b < a$. В. $b < c < a$. Г. $b < a < c$.

20. Укажите все значения x , при которых $(x-1)\sqrt{\frac{x^2}{x^2-2x+1}} = x$.

А. $x \in (1; +\infty)$. Б. $x \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$. В. $x \in (0; 1)$. Г. $x \in (-\infty; 0]$.

21. Вычислите $\sqrt{a}$, если $4a - 9 = 0$.

А. $\frac{9}{4}$. Б. $\frac{4}{9}$. В. $1\frac{1}{2}$. Г. $\frac{2}{3}$.

22. Из формулы $h = \frac{v^2}{2g}$, выражающей зависимость высоты подъема h от скорости v и ускорения силы притяжения g , выразите v через остальные переменные.

А. $v = \sqrt{\frac{2g}{h}}$. Б. $v = \sqrt{\frac{h}{2g}}$. В. $v = 2gh$. Г. $v = \sqrt{2gh}$.

23. Высота h , проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, вычисляется по формуле $h = \sqrt{ab}$ (см. рис.). Выразите из этой формулы a через остальные переменные.



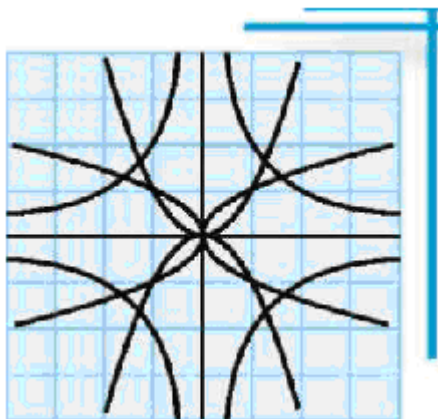
А. $a = \frac{h^2}{b}$. Б. $a = \frac{h}{\sqrt{b}}$. В. $a = bh^2$. Г. $a = \frac{h^2}{\sqrt{b}}$.

24. Решите неравенство $\sqrt{x} \leq 3$.

А. $x \in (-\infty; 9]$. Б. $x \in [0; 3]$. В. $x \in [0; 9]$. Г. $x \in [9; +\infty)$.

25. Укажите все значения параметра c , при которых график функции $y = \sqrt{x+c}$ проходит через точку с абсциссой $x = 2$.

А. $c \in (-\infty; +\infty)$. Б. $c \in (-2; +\infty)$. В. $c \in [-2; +\infty)$. Г. $c \in (-\infty; -2]$



§ 10. Корни n -й степени

В курсе алгебры уже рассматривалось понятие квадратного корня из неотрицательного числа. В данном параграфе обобщим это понятие, определив понятие корня с произвольным натуральным показателем, большим 1.



1. Степенные функции с натуральными показателями

Ранее мы рассматривали функцию $y = x^2$. Её аргументом является основание степени, значения функции при каждом значении аргумента равны второй степени аргумента. Такие функции относят к **степенным**. Показатель степени в данном случае равен 2. Можно рассматривать степенные функции с показателями, отличными от 2.

Степенной функцией с натуральным показателем n называется функцию вида $y = x^n$.

Рассмотрим сначала степенные функции с чётными натуральными показателями, то есть функции вида $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, ... Все функции указанного вида обладают теми же свойствами, что и функция $y = x^2$, график которой изображен на рис. 153. Они определены на множестве действительных чисел. Эти функции являются чётными. Например, для функции x^4 имеем: $y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x)$. Аналогично можно обосновать чётность любой из указанных функций.

Графики этих функций симметричны относительно оси ординат.

Степенные функции с чётными натуральными показателями неотрицательны и имеют лишь один нуль: $x = 0$. Поэтому их графики лежат в верхней полуплоскости и проходят через начало координат. Кроме того, графики всех указанных функций проходят через точку с координатами (1; 1).

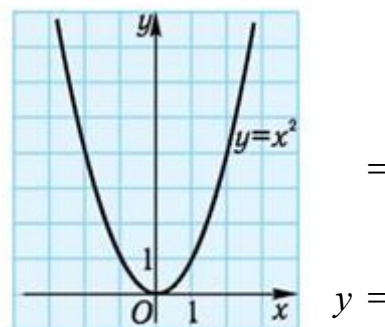


Рис. 153

Функции $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, ... возрастают на промежутке $[0; +\infty)$ и убывают на промежутке $(-\infty; 0]$. Их графики похожи на график, изображенный на рис. 153.

Рассмотрим теперь степенные функции с нечётными натуральными показателями, отличными от 1, то есть функции вида $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, ... Областью определения этих функций является множество действительных чисел. Они нечётны. Например, для функции $y = x^5$ имеем: $y(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -y(x)$. Графики этих функций симметричны относительно начала координат.

Степенные функции с нечётными натуральными показателями возрастают. Они имеют лишь один нуль: $x = 0$. Их графики проходят через точку с координатами $(1; 1)$ и похожи на график, изображенный на рис. 154.

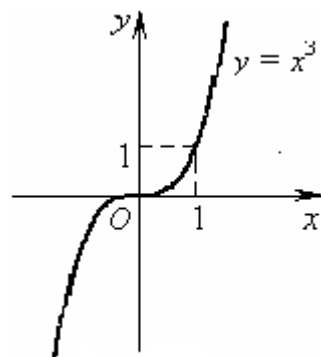


Рис. 154

Пример 1. Дана функция $y = 1 - x^4$.

1°) Построить ее график.

2°) Указать множество ее значений.

3) Сколько корней имеет уравнение $x^4 = 1 - x$?

4) Построить график функции $y = \frac{1 - x^4}{1 + x^2}$.

□ 1) График функции построим по схеме: $y = x^4 \rightarrow y = -x^4 \rightarrow y = 1 - x^4$ (рис. 155), то есть сначала построим график функции $y = x^4$, потом его отобразим симметрично относительно оси абсцисс и, наконец, параллельно перенесем его вдоль оси ординат на одну единицу в положительном направлении этой оси.

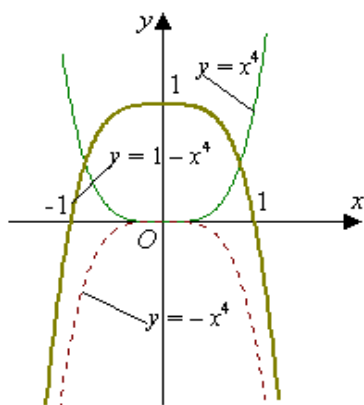


Рис. 155

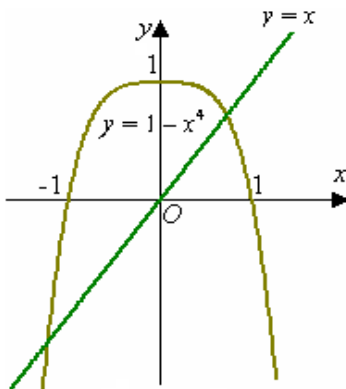


Рис. 156

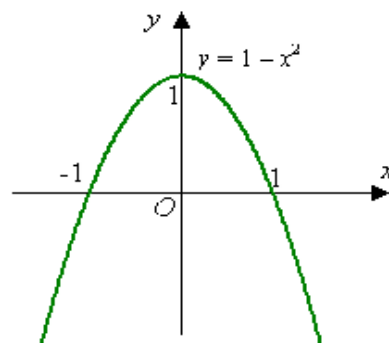


Рис. 157

2) Из свойства функции $y = x^4$ и построения графика данной функции вытекает, что множеством значений этой функции является промежуток $(-\infty; 1]$.

3) Перепишем уравнение в виде $1 - x^4 = x$. Для определения количества его корней построим на одном рисунке графики функций $y = 1 - x^4$ и $y = x$ (рис. 156). Они имеют две общие точки, следовательно, уравнение имеет два корня.

4) Упростим выражение для функции: $y = \frac{1-x^4}{1+x^2} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1+x^2} = 1-x^2$.

Следовательно, построение графика заданной функции сводится к построению графика функции $y = 1 - x^2$ (рис. 157). ■

Ответ: 2) $(-\infty; 1]$; 3) два.

Пример 2. Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 + 3x + 5 = 0$?

□ Запишем данное уравнение в виде: $x^3 = 3x^2 - 3x - 5$. Опять воспользуемся графическим методом. Построим в одной прямоугольной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = 3x^2 - 3x - 5$ (рис. 158). Они пересекаются в одной точке.

В этом можно убедиться и иным способом. Преобразуем левую часть уравнения выделением куба разности:

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 5 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 6 = (x - 1)^3 + 6.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $(x - 1)^3 = -6$. Построим на одном рисунке графики функций $y = (x - 1)^3$ и $y = -6$. График функции $y = (x - 1)^3$ получается из графика функции $y = x^3$ параллельным переносом последнего на одну единицу в положительном направлении оси x . Прямая $y = -6$ пересекает его в единственной точке (черт. 159). Уравнение имеет единственный корень. ■

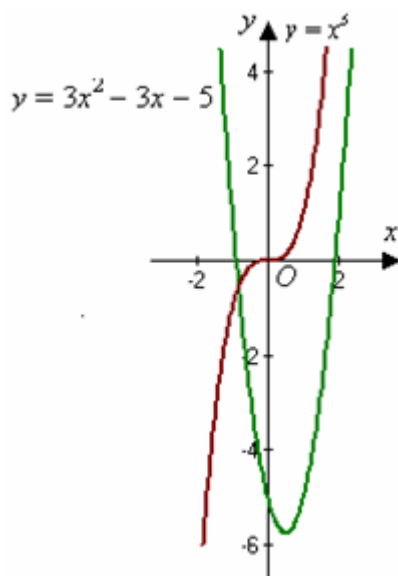


Рис. 158

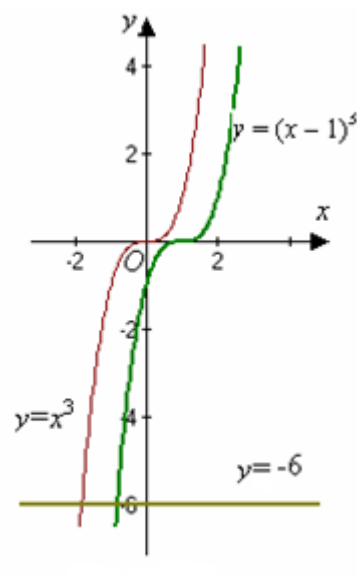


Рис. 159

Ответ: Один.



Основные свойства степенных функций с натуральными показателями представлены в таблице 26.

Таблица 26

	$y = x^{2k}$	$y = x^{2k+1}$
1.	Область определения функции — множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$	
2.	Функция имеет единственный нуль $x = 0$	
3.	Функция является чётной	Функция является нечётной
4.	Функция положительна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	Функция положительна на промежутке $(0; +\infty)$ и отрицательна на промежутке $(-\infty; 0)$

5.	Функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$	Функция возрастает в области определения
6.	Множеством значений функции является промежуток $[0; +\infty)$	Множеством значений функции является множество всех действительных чисел
7.	Функция непрерывна в области определения	

Вышеприведенные свойства степенных функций с натуральными показателями формулировались по аналогии с частными случаями. Первые четыре из них нетрудно обосновать и в общем случае. Покажем, как это можно сделать для функций с чётными показателями, то есть для функций вида $y = x^{2k}$, где k — натуральное число.

Наличие единственного нуля вытекает из того, что уравнение $x^{2k} = 0$ имеет единственное решение $x = 0$.

Докажем чётность этой функции. Во-первых, область определения функции $f(x) = x^{2k}$ содержит все вещественные числа, то есть она симметрична относительно точки 0. Во-вторых, для всех x из области определения выполняется равенство: $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$.

Положительность функции на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ вытекает из определения степени с натуральным показателем.

Докажем свойство 5.

□ Воспользуемся определениями возрастающей и убывающей функций

(см. § 4). Пусть $0 \leq x_1 < x_2$. Тогда $\frac{x_1^{2k}}{x_2^{2k}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2k} < 1$, так как $0 \leq \frac{x_1}{x_2} < 1$. Отсюда

$x_1^{2k} < x_2^{2k}$. Если $x_1 < x_2 < 0$, то $-x_1 > -x_2 > 0$ и, согласно доказанному, $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$, или $x_1^{2k} > x_2^{2k}$. ■

Последний вывод можно было сделать, опираясь на чётность функций $y = x^{2k}$.

Непрерывность функции $y = x^{2k}$ (свойство 7) вытекает из того, что функцию

$y = x^{2k}$ можно рассматривать как произведение $2k$ непрерывных функций $y = x$: $x^{2k} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{2k}$. Поскольку произведение непрерывных функций является не-

прерывной функцией (см. § 4), то функция $y = x^{2k}$ является непрерывной.

Докажем свойство 6.

□ Покажем, что для произвольного числа a из промежутка $[0; +\infty)$ существует такое число x_0 , что $x_0^{2k} = a$. Для $a = 0$ и $a = 1$ это очевидно: $0^{2k} = 0$ и $1^{2k} = 1$. Пусть $0 < a < 1$. Поскольку график функции $y = x^{2k}$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$ и является **неразрывной** линией, то прямая $y = a$, где $0 < a < 1$, пересекает график этой функции в некоторой точке с координатами $(x_0; a)$ (рис. 160 а). Следовательно, $x_0^{2k} = a$.

Пусть теперь $a > 1$. График функции $y = x^{2k}$ проходит через точки $(1; 1)$ и $(a; a^{2k})$ (рис. 160 б). Поскольку $1 < a$, то $a < a^2$, $a^2 < a^3$ и т. д. Отсюда вытекает, что $a < a^{2k}$. Поэтому прямая $y = a$ пересекает неразрывную линию, соединяющую точки $(1; 1)$ и $(a; a^{2k})$ в некоторой точке с абсциссой x_0 , где $1 < x_0 < a$ (рис. 160 б). Следовательно, $x_0^{2k} = a$.

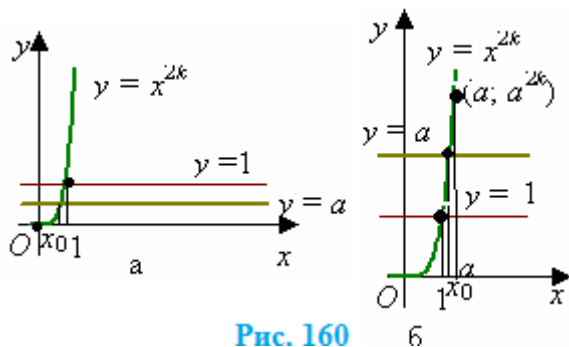


Рис. 160

Таким образом, доказано, что функция $y = x^{2k}$, где k — натуральное число, принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$. ■

Свойства функций $y = x^{2k+1}$ обосновываются аналогично, рекомендуем это сделать самостоятельно. При доказательстве свойства 6 целесообразно воспользоваться нечётностью этой функции.



Отметим еще одну особенность графиков функций степеней $y = x^n$ с натуральным показателем n . Построим на одном рисунке графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ (рис. 161). Все они проходят через точку $(1; 1)$.

Если $0 < x < 1$, то $x^3 < x^2 < x^1$. Действительно, умножив обе части неравенства $x < 1$ на положительное число x , будем иметь $x^2 < x^1$. Умножив обе части этого неравенства на x , получим $x^3 < x^2$. Аналогично, если $x > 1$, то $x^3 > x^2 > x^1$.

Следовательно, на промежутке $(0; 1)$ ниже всех лежит график функции $y = x^3$, выше от него расположен график функции $y = x^2$ и еще выше — график функции $y = x$. На промежутке $(1; +\infty)$ ситуация является иной. Выше всех лежит график функции $y = x^3$, ниже его расположен график функции $y = x^2$ и еще ниже — график функции $y = x$.

Указанные закономерности справедливы и в общем случае.

Свойство 8. Для произвольной точки x_0 промежутка $(0; 1)$ соответствующая точка графика функции $y = x^n$ расположена тем ближе к оси x , чем больше n . Для произвольной точки x_0 промежутка $(1; +\infty)$ соответствующая точка графика расположена тем дальше от оси x , чем больше n .

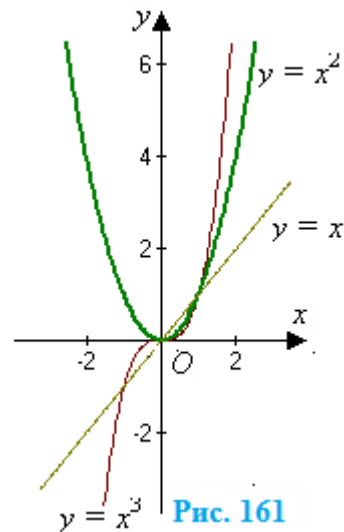


Рис. 161

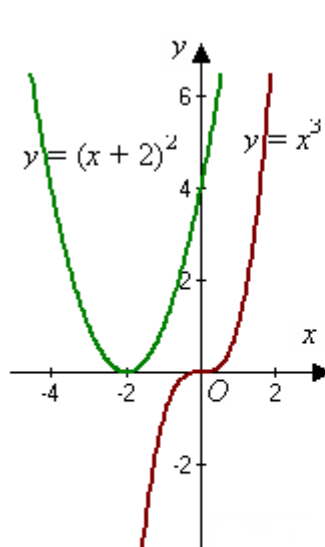


Рис. 162

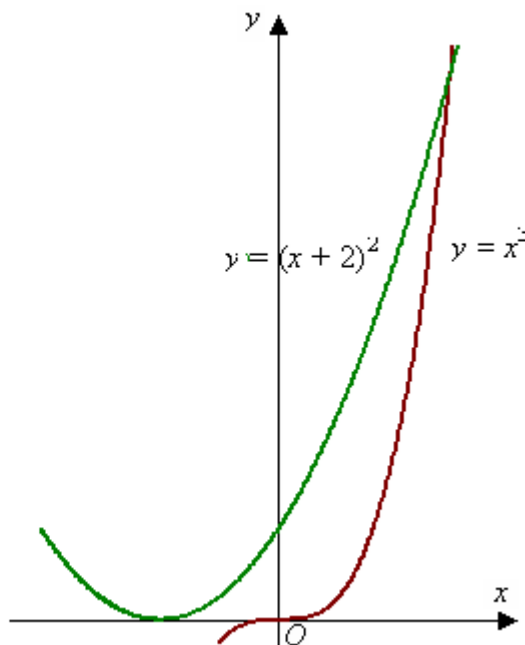


Рис. 163

Другими словами чем больше n , тем быстрее возрастают функции при стремлении аргумента x к $+\infty$.

Степенные функции образуют естественную «шкалу», которая дает возможность сравнивать рост функций. Например, пусть нужно выяснить, сколько корней имеет уравнение $x^3 = (x + 2)^2$. Недостаточно продуманный рисунок может привести к неправильному ответу, который заключается в том, что корней нет (рис. 162). Но, принимая во внимание, что функция $y = x^3$ возрастает быстрее, чем функция $y = (x + 2)^2$ при неограниченном возрастании значений аргумента x , можем прийти к заключению, что графики указанных функций обязательно пересекутся, и уравнение имеет корень (черт. 163).



Контрольные вопросы

1. ° Пересекает ли график функции $y = x^6$ прямая: а) $x = 0$; б) $x = 100$; в) $x = -1000$; г) $y = 1$; д) $y = 10$; е) $y = -1$?
2. ° Пересекает ли график функции $y = x^5$ прямая: а) $x = 0$; б) $x = 100$; в) $x = -1000$; г) $y = 0$; д) $y = 1$; е) $y = 10$; ж) $y = -1$; з) $y = -10$?
3. Какие свойства функций $y = x^4$ и $y = x^5$ являются общими?
4. Сколько корней имеет уравнение:
а) $x^4 = 2$; б) $x^2 = -3$; в) $x^5 = -7$; г) $x^6 = 0$; д) $x^{11} = 11$?
5. Укажите какое-нибудь значение аргумента, при котором значение функции $y = x^6$ больше, чем: а) 2^6 ; б) 10^6 ; в) 10^{12} ; г) 10^{18} ; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$.
6. Даны функции $f(x) = x^5$ и $g(x) = x^{10}$. Сравните с нулём число:
а) $f(-5) \cdot f(-7)$; б) $f(-10) - f(-20)$; в) $g(-10) - g(-20)$; г) $f(25) - g(3)$?
7. Как можно получить график функции $y = kx^3$ из графика функции $y = x^3$ с помощью геометрических преобразований?



2. Понятие корня n -й степени

Как известно, квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равняется a . Аналогично определяется понятие корня n -й степени из числа a , где n – произвольное натуральное число, большее 1. Это понятие необходимо для решения многих задач, сводящихся к нахождению корней уравнения $x^n = a$. Например, нахождение ребра куба x по его объему V сводится к решению уравнения $x^3 = V$.

Корнем n -й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется число, n -ая степень которого равна a .

Так, корнем четвертой степени из числа 256 является число 4, а также – 4, так как $4^4 = (-4)^4 = 256$; корень пятой степени из числа 243 равен числу 3, поскольку $3^5 = 243$. Число 5 является корнем третьей степени из числа 125, ибо $5^3 = 125$, и корнем четвертой степени из числа 625, так как $5^4 = 625$. Корень третьей степени называют еще **кубическим корнем**. По-видимому, это связано с тем, что объем V куба по его стороне x вычисляется по формуле $V = x^3$. Длина стороны куба является кубическим корнем из его объема.

Операцию нахождения корня n -й степени из числа a называют **извлечением корня n -й степени из числа a** . Корень n -й степени определен лишь для натуральных $n \geq 2$.



Понятно, что корня чётной степени из отрицательного числа не существует, так как чётная степень любого действительного числа является положительным числом.

Рассмотрим функцию $y = x^3$. Произвольная прямая $y = a$ пересекает график этой функции в единственной точке (рис. 164). А это означает, что для любого числа a существует единственное значение x , третья степень которого равна a . Иначе говоря, для любого действительного числа a существует единственное значение корня третьей степени из этого числа.

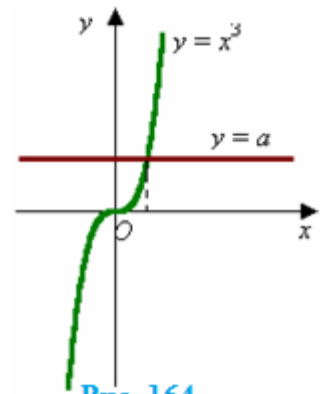


Рис. 164

Аналогично можно придти к общему выводу. Для произвольного действительного числа a и любого нечетного числа n существует единственное значение x , n -я степень которого равна a . Это значение является корнем n -го степени из числа a . При нечётном n его обозначают через $\sqrt[n]{a}$ (читают: **корень n -й степени из числа a**).

Например, запись $\sqrt[3]{-27}$ означает кубический корень из числа -27 . Из определения корня вытекает, что $\sqrt[3]{-27} = -3$, так как $(-3)^3 = -27$. Запись $\sqrt[5]{0,03125}$ означает корень пятой степени из числа 0,03125. Его значение равно 0,5, поскольку $(0,5)^5 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,03125$.

По определению, для произвольного числа a имеет место равенство:

$$\left(\sqrt[2k+1]{a} \right)^{2k+1} = a.$$

Рассмотрим теперь функцию $y = x^4$. Произвольная прямая $y = a$ при $a > 0$ пересекает график этой функции в двух точках (рис. 165), то есть для любого положительного числа a существуют два значения x , четвертая степень которых равняется a . Иначе говоря, для любого положительного числа a существуют два значения корня четвертой степени из этого числа.

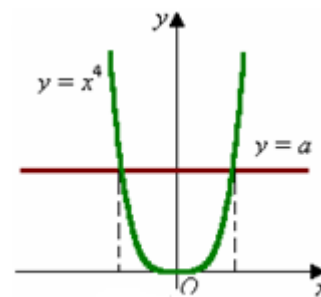


Рис. 165

Аналогично можно прийти к общему выводу. Для произвольного $a > 0$ и чётного числа n существуют два противоположных числа, n -я степень которых равна a . При $a = 0$ такое число единственное, $x = 0$. При $a < 0$ таких чисел не существует. При чётном n знаком $\sqrt[n]{a}$ обозначают неотрицательный корень n -й степени из числа a . Отрицательный корень n -й степени из положительного числа a записывается так: $-\sqrt[n]{a}$.

По определению, для произвольного неотрицательного числа a имеет место равенство:

$$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a.$$

Например, запись $\sqrt[6]{729}$ означает неотрицательный корень шестой степени из 729. Имеем: $\sqrt[6]{729} = 3$, ибо число 3 является неотрицательным и $3^6 = 729$.

Пример 3. Производительность труда повышается ежегодно на одно и то же количество процентов по сравнению с предыдущим годом. За три года она выросла на 33,1 %. На сколько процентов она росла ежегодно?

□ Обозначим через a начальную производительность труда, через p — процент ее ежегодного роста. Через год производительность труда будет равняться $a + \frac{p}{100}a = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Через два года она будет составлять

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \frac{p}{100}a\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \text{ через три года — } a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

С другой стороны, через три года производительность труда равнялась $a + 0,331a = 1,331a$. Следовательно, имеем уравнение $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 1,331a$, или

$$\text{после сокращения на } a: \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 1,331. \text{ По определению кубического корня}$$

число $1 + \frac{p}{100}$ является корнем кубическим из числа 1,331. нетрудно прове-

рить, что $1 + \frac{p}{100} = 1,1$, потому что $(1,1)^3 = 1,331$. Следовательно, $p = 10\%$, то

есть ежегодно производительность труда повышалась на 10 %. ■

Ответ: На 10%.

Обращаем внимание на то, что во время решения примера мы получили частный случай формулы сложных процентов, которая изучалась в 9-ом классе.



Существование корня n -й степени из любого положительного числа в общем случае вытекает из того, что функция $y = x^n, x \geq 0$ принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$ (свойство 6, таблица 26). А именно для произвольного $a \geq 0$ существует такое число $x_0 \geq 0$, что $x_0^n = a$. То есть x_0 является одним из корней n -й степени из числа a .

Оказывается, что положительный корень является единственным. Докажем это методом от противного.

□ Предположим, что x и y — два различных положительных корня n -й степени из положительного числа a . Тогда $x^n = y^n = a$. Поскольку числа x и y являются различными, то одно из них больше другого. Пусть, например, $x > y > 0$. Из свойств числовых неравенств вытекает, что $x^n > y^n$, но это противоречит соотношению $x^n = y^n = a$. Полученное противоречие доказывает, что положительный корень n -й степени из положительного числа a является единственным. ■

Следовательно, справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 1. Любое положительное число a имеет ровно один положительный корень степени n .

Как следствие из этой теоремы имеем для произвольного числа a : $\sqrt[n]{a^{2k}} = |a|$. Например, $\sqrt[6]{(-2)^6} = 2$.

Существуют ли отрицательные корни n -й степени из положительного числа? Очевидно, что отрицательных корней нечётной степени из положительного числа не существует: ни одно отрицательное число в нечётной степени не может равняться положительному числу.

Т е о р е м а 2. Если $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, то существует и притом лишь один отрицательный корень степени $2k$ из положительного числа.

□ Действительно, пусть x — положительный корень степени $2k$ из положительного числа a , то есть $x^{2k} = a$. Но тогда $(-x)^{2k} = a$. А это значит, что отрицательное число $-x$ является корнем степени $2k$ из числа a . Существование отрицательного корня доказано. То, что этот корень является единственным, вытекает из того, что единственным является положительный корень. ■

Существуют ли корни n -й степени из отрицательного числа? Как уже отмечалось, корня чётной степени из отрицательного числа не существует.

Т е о р е м а 3. Существует и притом единственный корень нечётной степени из отрицательного числа, который является отрицательным числом.

□ Рассмотрим отрицательное число $-a, a > 0$. Поскольку число a является положительным, то оно имеет положительный корень степени $2k + 1$. Обозначим его через x . Тогда $x^{2k+1} = a$. Отсюда вытекает, что $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -a$. Это и означает, что отрицательное число $-x$ является корнем степени $2k + 1$

из отрицательного числа $-a$. То, что этот корень единственный, можно доказать от противного. Рекомендуем это сделать самостоятельно. ■

Из теорем 1 и 3 вытекает равенство $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, которое справедливо для произвольного числа a . Например, $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$.

Если подкоренное выражение не является n -ой степенью рационального числа, то приближенное значение корня n -й степени из этого числа вычисляется приближенно с помощью калькулятора.



Заслуживает внимания и нахождение корней n -й степени из числа a для конкретных значений n и a . Например, чему равняется кубический корень из числа 5? В десятичной записи мы можем указать только его приближенное значение. Поскольку $1^3 = 1$ меньше 5, а $2^3 = 8$ больше 5, то можно считать, что приближенными значениями кубического корня из числа 5 с точностью до 1 являются 1 (с недостатком) и 2 (с избытком). Так же подбором можно указать его приближенное значение с точностью до 0,1. Поскольку $1,7^3 = 4,913 < 5$, а $1,8^3 = 5,832 > 5$, то приближенными значениями кубического корня из числа 5 с точностью до 0,1 являются 1,7 (с недостатком) и 1,8 (с избытком). Если этот процесс нахождения последовательных десятичных знаков корня продолжать, то будем получать его значение все с большей и большей точностью. Точно так же можно находить значение корня произвольной степени из произвольного положительного числа.

Известно, что n -ая ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) степень натурального числа является натуральным числом. Но не любое натуральное число является n -ной ($n \geq 2$) степенью некоторого натурального числа. Анализируя рассмотренные ранее примеры, можно прийти к заключению, что среди натуральных чисел редко встречаются n -ые степени натуральных чисел. Например, среди натуральных чисел первой сотни лишь 4 (1, 8, 27, 64) являются кубами натуральных чисел, лишь 3 (1, 16, 81) являются четвертыми степенями натуральных чисел. Среди натуральных чисел, не превышающих 1000, только 10 являются кубами натуральных чисел (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000) и только 5 являются четвертыми степенями натуральных чисел (1, 16, 81, 256, 625).

Если натуральное число не является n -ой степенью натурального числа, то оно не может быть n -ой степенью рационального числа, то есть оно является n -ой степенью иррационального числа. Тогда корни $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[5]{23}$ являются числами иррациональными. Проиллюстрируем идею доказательства на примере доказательства иррациональности числа $\sqrt[3]{5}$.

□ Предположим, что $\sqrt[3]{5}$ является рациональным числом, то есть $\sqrt[3]{5} = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа. Согласно определению корня n -й степени имеем: $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 5$, $m^3 = 5n^3$. Поскольку числа m и n

не имеют общих делителей, отличных от 1, то таким же свойством обладают и числа m^3 и n^3 . Потому m^3 , а следовательно, и m делится на 5, то есть $m = 5k$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $125k^3 = 5n^3$, $25k^3 = n^3$. Потому число n делится на 5. Получили противоречие: по условию, m и n — взаимно простые натуральные числа. Оно и завершает доказательство. ■

Приведенные рассуждения добавляют к известным уже иррациональным числам бесконечное множество новых примеров.



Контрольные вопросы

1. ° Верно ли, что число -3 является корнем четвертой степени из числа 81?
2. ° Верно ли, что корень четвертой степени из числа 81 равняется -3 ?
3. ° Сколько существует корней пятой степени из числа -1024 ?
4. ° Сколько существует корней четвертой степени из числа 625?
5. Известно, что объем V шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара. Кубическим корнем из какого выражения является радиус шара?
6. Какие из данных выражений не имеют смысла:
 $\sqrt{-16}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[6]{(-2)^2}$; $\sqrt[6]{(-2)^3}$; $\sqrt[5]{(-2)^3 \cdot (-3)^2}$; $\sqrt[4]{(-2)^3 \cdot (-3)^2}$?
7. Чему равняется: а) $\sqrt[4]{7^4}$; б) $\sqrt[6]{(-7)^6}$?
8. * Между какими двумя последовательными целыми числами находится число $\sqrt[3]{15}$?
9. * Какие значения принимает выражение $\frac{\sqrt[n]{a^n}}{a}$, если: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$?
10. * Может ли быть рациональным числом корень n -й степени ($n \geq 2$) из простого числа?



3. Свойства арифметического корня n -й степени

Раньше отмечалось, если n — нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом значении a ; если n — четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$ и принимает только неотрицательное значение.

Выражение $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ имеет смысл как при четном n , так и при нечетном n , и значение этого выражения является неотрицательным числом. Его называют **арифметическим корнем n -й степени** из числа a . Число a называется **подкоренным выражением**, n — **показателем корня**.

Арифметическим корнем n -й степени из неотрицательного числа a называют неотрицательное число, n -ая степень которого равняется a .

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень. Например, $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, поскольку

$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}, -\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$. Вообще, при произвольном положительном a и при нечётном n справедливо равенство $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Пример 4. Вычислить: 1) $(\sqrt[5]{7})^5$; 2) $\sqrt[6]{(-5)^6}$; 3) $\sqrt[5]{(-3)^5}$.

□ Применяя определение арифметического корня и равенство $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, a > 0$, последовательно будем иметь:

$$1) (\sqrt[5]{7})^5 = 7; \quad 2) \sqrt[6]{(-5)^6} = \sqrt[6]{5^6} = 5; \quad 3) \sqrt[5]{(-3)^5} = \sqrt[5]{-3^5} = -\sqrt[5]{3^5} = -3. \blacksquare$$

Ответ: 1) 7; 2) 5; 3) -3.

Заметим, что $\sqrt[5]{(-3)^5}$ не является арифметическим корнем 5-й степени по определению, так как подкоренное выражение является отрицательным числом, да и значение арифметического корня должно быть неотрицательным числом.

Нам уже известны свойства арифметического квадратного корня. Аналогичные свойства имеет арифметический корень n -й степени и при $n > 2$.

Свойство 1. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Арифметический корень n -й степени из произведения двух неотрицательных чисел равняется произведению арифметических корней n -й степени из этих чисел.

Свойство 2. Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Арифметический корень n -й степени из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равняется арифметическому корню n -й степени из числителя, разделенному на арифметический корень n -й степени из знаменателя.

Пример 5. Найти: 1) значение выражения $\sqrt[6]{64 \cdot 729}$; 2) произведение корней $\sqrt[5]{8}$ и $\sqrt[5]{4}$.

□ 1) Согласно свойству 1, $\sqrt[6]{64 \cdot 729} = \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{729} = 2 \cdot 3 = 6$.

2) Применяя свойство 1 справа налево, будем иметь: $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$. **Ответ:** 1) 6; 2) 2.

Пример 6. Найти значение выражения: 1) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$.

□ 1) Применяя свойство 2, получим $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}} = \sqrt[4]{\frac{256}{81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

$$2) \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = 3. \blacksquare$$

Ответ: 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 3.

Пример 7. Сравнить значения выражений $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}$ и $\sqrt[6]{729}$.

□ Применяя определение корня, последовательно будем иметь:
 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{9} = 3$, $\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

Мы видим, что значения этих выражений равны друг другу, то есть $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729}$. ■

Ответ: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729}$.

Анализируя последний пример, можно предположить справедливость следующих утверждений.

Свойство 3. Если $a \geq 0$, то для натуральных n и k , больших 1, справедливо равенство $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Свойство 4. Если $a \geq 0$, то для натуральных n, m и k , $n > 1$, справедливо равенство $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Свойство 4 иногда называют *основным свойством корня*. Его можно сформулировать так:

если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения с положительным основанием умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.

Например, $\sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$; $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$.

Свойства 1 – 2 доказываются аналогично свойствам арифметического квадратного корня. Эти же идеи можно использовать для доказательства свойств 3 – 4.

Свойства 1 — 4 позволяют вносить множитель под знак арифметического корня и выносить множитель из-под знака корня.

Пример 8. Упростить выражение: 1) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\sqrt[4]{48}$.

□ 1) Внесём множитель 3 под знак арифметического корня третьей степени: $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}}$. Согласно свойству 3, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[12]{3^4}$. Применяя основное свойство корня, получим: $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$. Следовательно, $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}$.

2) Разложив на множители подкоренное выражение, применяя свойство 1, будем иметь: $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$. ■

Ответ: 1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $2\sqrt[4]{3}$.

Целесообразность введения понятия арифметического корня связана с тем, что свойства 1 - 4, вообще говоря, не выполняются для произвольных корней n -й степени. Например, $-1 = \sqrt[3]{-1} \neq \sqrt[3]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$.

Свойства 1 - 4 дают возможность упрощать числовые и буквенные выражения, которые содержат корни из положительных чисел.

Если необходимо перемножить корни из положительных чисел с одинаковыми показателями, то, согласно свойству 1, достаточно перемножить достаточно перемножить их подкоренные выражения и записать произведение под

знаком корня с тем же показателем. Пример 5, условие 2) является иллюстрацией этого алгоритма. Здесь и дальше идет речь об арифметических корнях, потому что лишь для них можно использовать свойства 1 - 4. Для сокращения слово «арифметический» будем выпускать.

Если же показатели корней, которые перемножаются, различны, то необходимо их привести к общему показателю. Это делается на основании основного свойства корня, то есть каждый показатель корня умножается на подобранный дополнительный множитель одновременно с возведением подкоренного выражения в ту же степень. За общий показатель следует взять наименьшее общее кратное показателей корней, которые перемножаются.

Пример 9. Представить выражение в виде корня из некоторого числа:

$$1) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5}; \quad 2) \sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}}.$$

□ 1) Поскольку множители являются корнями различных степеней, то приведем их к общему показателю. Наименьшее общее кратное показателей 3 и 4 равно 12. Показатели корней следует умножить на дополнительные множители: $12 : 3 = 4$, $12 : 4 = 3$. Согласно основному свойству корня, имеем:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^4} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{5^3}.$$

Используя свойство 1, перемножим полученные корни с одинаковыми показателями: $\sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 5^3} = \sqrt[12]{2000}.$

$$2) \sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}} = \sqrt[10]{3^5} \cdot \sqrt[10]{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt[10]{3^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt[10]{\frac{27}{4}}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ. } 1) \sqrt[12]{2000}; \quad 2) \sqrt[10]{\frac{27}{4}}.$$

Таким же образом следует действовать при делении корней. Если корни имеют одинаковые показатели, то следует подкоренное выражение делимого разделить на подкоренное выражение делителя и полученное частное записать под знаком корня с тем же показателем (согласно свойству 2). Этот алгоритм проиллюстрирован при решении примера 5 2). Если же показатели корней являются разными, то их следует сначала привести к общему показателю.

Приклад 10. Представить выражение в виде корня из некоторого числа:

$$1) \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}; \quad 2) \frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{2}}.$$

□ 1) Учитывая, что наименьшее общее кратное показателей корней, то есть чисел 3 и 6, равно 6, то, согласно основному свойству корня, будем иметь:

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt[6]{9^2}}{\sqrt[6]{3}} = \sqrt[6]{\frac{9^2}{3}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}.$$

2) Аналогично с заданием 1) имеем: $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[12]{4^3}}{\sqrt[12]{2^2}} = \sqrt[12]{\frac{4^3}{2^2}} = \sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}$. ■

Ответ: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{2}$.



Свойства арифметического корня n -й степени были записаны по аналогии со свойствами арифметического квадратного корня или подсказаны примерами. Теперь приведем для примера доказательство одного из них.

Доказательство свойства 1.

□ Пусть $a \geq 0$, $b \geq 0$. Тогда выражения $\sqrt[n]{ab}$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ имеют смысл. Необходимо доказать, что $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ и $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$. Произведение $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ является неотрицательным числом, потому что, согласно определению арифметического корня, $\sqrt[n]{a} \geq 0$, $\sqrt[n]{b} \geq 0$. Используя свойство степени произведения, получим: $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$.

Следовательно, по определению арифметического корня n -й степени имеем равенство: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. ■

Доказанное свойство распространяется на случай произвольного конечного количества сомножителей.

Если $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, то $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_r}$.

Свойства 2, 3, 4 доказываются точно так же, как и предыдущее. Они вытекают из определения арифметического корня n -й степени. Предлагаем доказать их самостоятельно.

Подобно квадратным корням, над корнями n -й степени выполняют такие преобразования, как вынесение множителя из-под знака корня, внесение множителя под знак корня, перенесение иррациональности из знаменателя в числитель или наоборот.

Пример 11. Вынести множитель из-под знака арифметического корня :

1) $\sqrt[6]{2048}$; 2) $\sqrt[4]{6a^{13}b^6}$ ($a > 0, b > 0$).

□ 1) Поскольку $2048 = 2^{11}$, то $\sqrt[6]{2048} = \sqrt[6]{2^{11}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2^5} = 2\sqrt[6]{2^5} = 2\sqrt[6]{32}$.

2) $\sqrt[4]{6a^{13}b^6} = \sqrt[4]{6a^{12} \cdot a \cdot b^4 \cdot b^2} = a^3b\sqrt[4]{6ab^2}$. ■

Ответ: 1) $2\sqrt[6]{32}$; 2) $a^3b\sqrt[4]{6ab^2}$.

Пример 12. В выражении $b\sqrt[4]{a}$ внести множитель под знак корня, если $b < 0$.

□ Поскольку $b < 0$ и $|b| = \sqrt[4]{b^4}$, то $-b = \sqrt[4]{b^4}$. Таким образом, $b\sqrt[4]{a} = -\sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{a} = -\sqrt[4]{b^4a}$ согласно свойству 2. ■

Ответ. $-\sqrt[4]{b^4a}$.

Если подкоренное выражение корня n -й степени не является n -ой степенью рационального числа, то выражение, которое содержит такой корень, называют **иррациональным**. При преобразовании дробных выражений, кото-

рые содержат в числителе или в знаменателе иррациональные выражения, иногда целесообразно переносить иррациональность из знаменателя в числитель или наоборот.

Пример 13. Перенести иррациональность из знаменателя в числитель дроби: 1) $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt[3]{18}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$.

□ 1) Число 9, стоящее под знаком кубического корня, запишем в виде $9 = 3^2$. До полного куба не хватает множителя 3. Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt[3]{3}$, получим

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9 \cdot 3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9 \cdot 3}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{3}.$$

2) Число 18, стоящее под знаком кубического корня, разлагается на множители: $18 = 2 \cdot 3^2$. До полного куба не хватает множителя $2^2 \cdot 3 = 12$. Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt[3]{12}$, получим:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{18}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{18 \cdot 12}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{12}}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{12}.$$

Это задание можно решить и иначе:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{18}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{18^2}}{\sqrt[3]{18 \cdot 18^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{18^2}}{\sqrt[3]{18 \cdot 18^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{(3^2 \cdot 2)^2}}{18} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 4}}{9} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{12}.$$

3) Знаменатель является разностью двух чисел $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[3]{2}$. Если умножить числитель и знаменатель данной дроби на неполный квадрат суммы этих чисел, то есть на число $(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2$, то в знаменателе получим разность кубов этих чисел:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{3(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}. \blacksquare$$

Ответ: 1) $\frac{2}{3} \sqrt[3]{3}$; 2) $\frac{2}{3} \sqrt[3]{12}$; 3) $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$.



Сумма и разность двух различных корней, вообще говоря, не могут быть приведены к более простому виду. Например, никакими преобразованиями нельзя упростить выражение $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5}$.

Но в частном случае преобразования, упрощающие выражение, возможны. А именно, если слагаемые являются подобными корнями.

Подобными называют такие корни, которые имеют одинаковую степень и могут быть преобразованы к произведениям того же корня на рациональные числа или рациональные выражения.

Например, корни $\sqrt[3]{16}$ и $\sqrt[3]{54}$ подобны, ибо $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$. Точно так же подобны корни $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\sqrt{\frac{b}{a}}$ ($a > 0$, $b > 0$ — рациональные числа), так как $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{ab}$.

Т е о р е м а. Два корня n -й степени подобны тогда и только тогда, когда отношение их подкоренных выражений является n -ой степенью рационального числа или рационального выражения.

□ Пусть корни $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ подобны. Тогда их можно представить в виде: $\sqrt[n]{a} = k\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{b} = l\sqrt[n]{c}$, где k и l — рациональные числа или рациональные выражения. Поскольку $a = k^n c$, $b = l^n c$, а отношение рациональных чисел (рациональных выражений) является рациональным числом (рациональным выражением), то отношение подкоренных выражений $\frac{a}{b} = \left(\frac{k}{l}\right)^n$ является n -ой степенью рационального числа или рационального выражения.

Пусть отношение подкоренных выражений корней $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ является n -ой степенью рационального числа или рационального выражения, то есть $\frac{a}{b} = \left(\frac{k}{l}\right)^n = \frac{k^n}{l^n}$. Следовательно, подкоренные выражения пропорциональны n -ым степеням рациональных чисел, или рациональных выражений. Обозначив коэффициент пропорциональности через c , будем иметь: $a = k^n c$, $b = l^n c$, или $\sqrt[n]{a} = k\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{b} = l\sqrt[n]{c}$, то есть корни $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ подобны. ■

В первом из приведенных примеров отношение $\frac{16}{54} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ является третьей степенью рационального числа $\frac{2}{3}$. Во втором — отношение

$\frac{a}{b} : \frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ является квадратом рационального выражения $\frac{a}{b}$.

Для того, чтобы сложить или вычесть подобные корни, следует сначала так преобразовать их, чтобы подкоренные выражения стали равными, после этого вынести за скобки этот корень.

Пример 14. Упростить $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24}$.

□ $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} + \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}(3 + 2) = 5\sqrt[3]{3}$. ■

Ответ: $5\sqrt[3]{3}$.



Контрольные вопросы

1. ° Какие из следующих чисел являются арифметическими корнями соответствующей степени:

а) $\sqrt[3]{-25}$; б) $\sqrt[5]{25}$; в) $\sqrt[4]{23}$; г) $\sqrt[4]{(-7)^2}$; д) $\sqrt[11]{-2}$?

2. ° Как записать корень n -й степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени?

а) $\sqrt[3]{-15}$; б) $\sqrt[5]{-37}$; в) $\sqrt[7]{-23}$; г) $\sqrt[9]{-7}$; д) $\sqrt[11]{-5}$?

3. ° Чему равняется значение выражения:

а) $(\sqrt[3]{-15})^3$; б) $\sqrt[5]{(-37)^5}$; в) $\sqrt[6]{3^6}$; г) $\sqrt[9]{(-7)^9}$; д) $\sqrt[10]{(-5)^{10}}$?

4. ° Чему равняется значение выражения:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125}$; б) $\sqrt[3]{1000 \cdot \frac{1}{27} \cdot 64}$; в) $\sqrt[3]{343 \cdot 0,216 \cdot \frac{1}{8}}$; г) $\sqrt[4]{16 \cdot 81 \cdot 10000}$?

5. ° Чему равняется значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1000}{216}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{0,0256}}$?

6. При каких значениях букв, входящих в выражения, справедливо равенство:

а) $\sqrt[4]{a^4} = a$; б) $\sqrt[4]{a^4} = -a$; в) $\sqrt[3]{a^3} = a$; г) $\sqrt{a^2 - 2a + 1} = 1 - a$;
 д) $\sqrt[4]{b^2} = \sqrt{b}$; е) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$; ж) $\sqrt[4]{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{a - b}$?

7. Где допущена ошибка: $1 = \sqrt[10]{1} = \sqrt[10]{(-1)^2} = \sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -1$?

8. ° К какому общему показателю следует привести при умножении или делении корни:

а) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[6]{3}$; г) $\sqrt[10]{2}$ и $\sqrt[15]{3}$?

9. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{a^3 b} = a \sqrt{ab}$; б) $\sqrt[3]{a^4 b} = a \sqrt[3]{ab}$; в) $\sqrt{a^3 b^2} = ab \sqrt{a}$; г) $\sqrt[4]{x^6 y^5} = xy \sqrt[4]{x^2 y}$;
 д) $-2\sqrt{3} = \sqrt{12}$; е) $m^2 n \sqrt[4]{mn} = \sqrt{m^9 n^5}$; ж) $pq \sqrt[3]{p} = \sqrt[3]{p^4 q^3}$; з) $-c \sqrt[4]{c^2 d} = \sqrt{c^5 d}$?

10. Верно ли утверждение о том, что любой множитель перед знаком корня можно внести под знак корня, возводя этот множитель в степень с показателем, равным показателю корня?

11. Как привести к рациональному виду знаменатель выражения (a и b — рациональные числа):

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$; г)

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}$?

12. * Справедливо ли равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ при нечётном n для отрицательных чисел a и b ?

13. * Верно ли следующее утверждение: для произвольных чисел a и b , таких, что

$0 \leq a < b$, справедливо неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$?

14. * Верно ли следующее утверждение: для произвольного натурального n , целого k и произвольного неотрицательного числа a справедливо равенство $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$?

15. Подобны ли корни: а) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{256}$ и $\sqrt[3]{108}$; в) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$ и $\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$?



4. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и её свойства

Функция $y = \sqrt{x}$, как мы установили это ранее, является обратной для функции $y = x^2$, $x \geq 0$. Аналогично, пользуясь понятием обратной функции, введем функции $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

В пункте 1 данного параграфа изучались функции $y = x^n$, где n — натуральное число, причем отдельно для чётных и нечётных n . Теперь построим для этих функций обратные, если они существуют.

Сначала рассмотрим функцию $y = x^3$. Она возрастает, поэтому имеет обратную. Ее областью определения и множеством значений служит множество всех вещественных чисел. Выразим x через y из этого уравнения. По определению корня третьей степени имеем: $x = \sqrt[3]{y}$. Поменяв ролями переменные, получим: $y = \sqrt[3]{x}$. Эта функция является обратной для функции $y = x^3$. Из свойств взаимно обратных функций вытекает, что ее областью определения и множеством значений также служит множество всех вещественных чисел. Как известно (см. § 7), их графики симметричны друг к другу относительно прямой $y = x$. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ построим в такой последовательности: сначала построим уже известный нам график функции $y = x^3$ (рис. 166), потом отобразим его симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 166). При этом

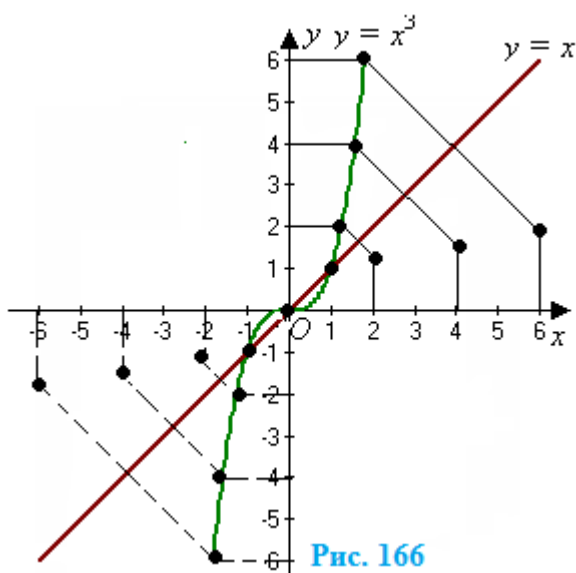


Рис. 166

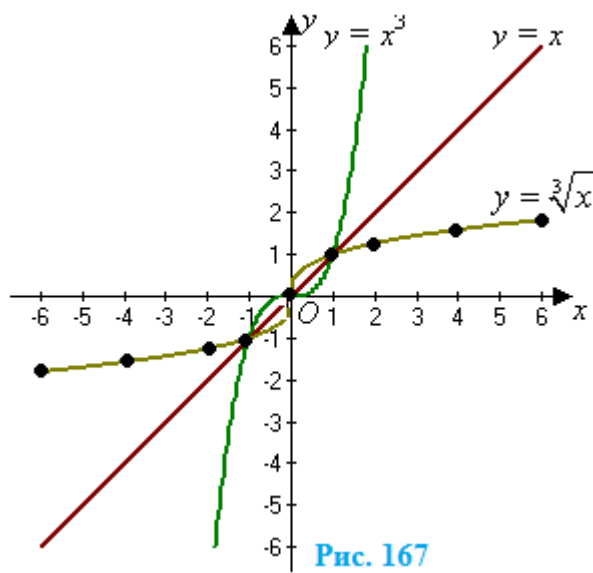


Рис. 167

три точки с координатами $(0; 0)$, $(-1; -1)$, $(1; 1)$, лежащие на прямой $y = x$, являются общими для обоих графиков. Соединив эти точки и точки, полученные

в результате отражения, плавной кривой, получим искомый график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 167).

Таким образом, функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена на множестве вещественных чисел, она является нечётной, возрастающей, непрерывной, имеет один нуль, принимает положительные значения при положительных значениях аргумента и отрицательные — при отрицательных значениях аргумента, множеством ее значений является множество всех вещественных чисел.

Теперь рассмотрим функцию $y = x^4$. Подобно функции $y = x^2$ она не имеет обратной. Но обратную имеет функция $y = x^4, x \geq 0$. Ее областью определения и множеством значений служит множество всех неотрицательных вещественных чисел. Выразим x через y из этого уравнения. По определению корня четвертой степени имеем: $x = \sqrt[4]{y}$. Поменяв ролями переменные, получим: $y = \sqrt[4]{x}$. Эта функция является обратной для функции $y = x^4, x \geq 0$. Из свойств взаимно обратных функций вытекает, что ее областью определения и множеством значений также служит множество всех неотрицательных вещественных чисел. График функции $y = \sqrt[4]{x}$ симметричен графику функции $y = x^4, x \geq 0$ относительно прямой $y = x$. Построим его по графику функции $y = x^4, x \geq 0$ (рис. 168, 169).

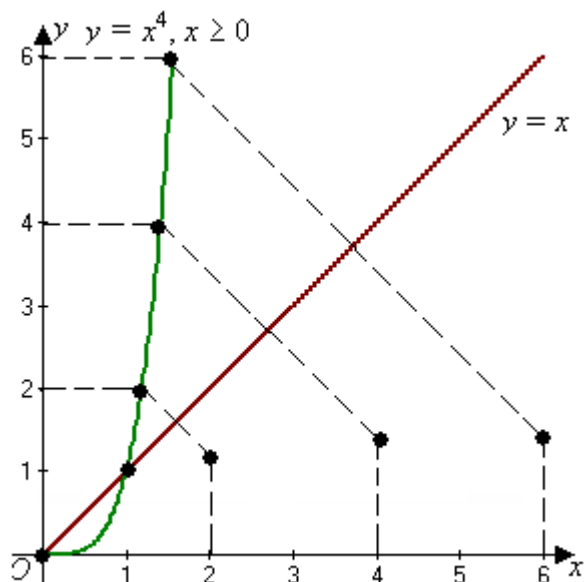


Рис. 168

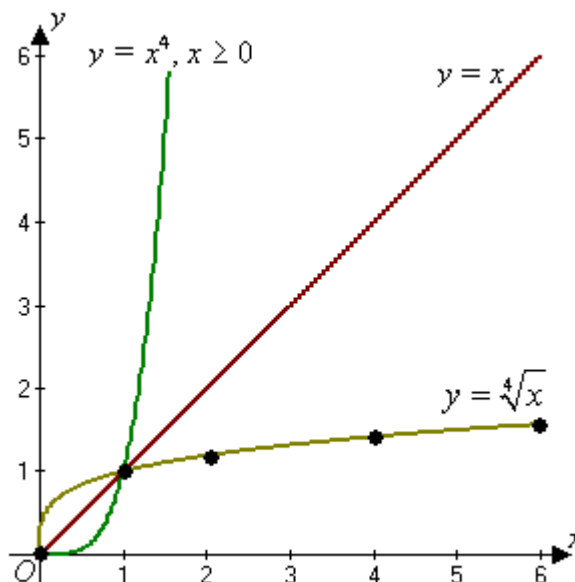


Рис. 169

Таким образом, функция $y = \sqrt[4]{x}$ определена на множестве неотрицательных вещественных чисел, она не является ни чётной, ни нечётной, возрастает, непрерывна, имеет один нуль, принимает неотрицательные значения в области определения, множеством ее значений является множество всех неотрицательных вещественных чисел.

Пример 15. Дана функция $y = 1 + \sqrt[4]{x}$.

1°) Построить ее график.

2°) Указать множество ее значений.

3) Определить количество корней уравнения $\sqrt[4]{x} = \frac{1}{x} - 1$.

4) Построить график функции $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}$.

□ 1) График функции $y = 1 + \sqrt[4]{x}$ построим по схеме: $y = \sqrt[4]{x} \rightarrow y = \sqrt[4]{x} + 1$ (рис. 170), то есть сначала строим график функции $y = \sqrt[4]{x}$, потом перенесем его вдоль оси ординат на одну единицу в положительном направлении этой оси.

2) Множеством значений этой функции является промежуток $[1; +\infty)$.

3) Перепишем уравнение в виде $1 + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{x}$. Для определения количества

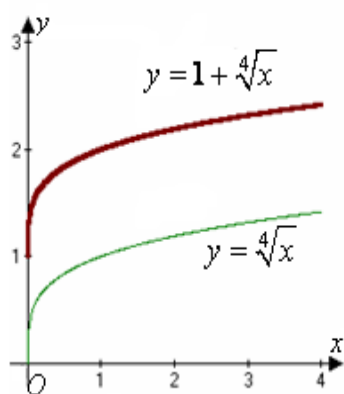


Рис. 170

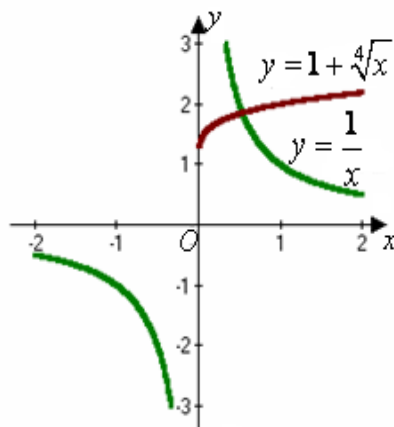


Рис. 171

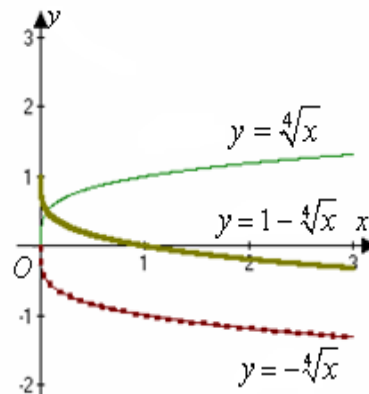


Рис. 172

его корней построим на одном рисунке графики функций $y = 1 + \sqrt[4]{x}$ и $y = \frac{1}{x}$ (рис. 171). Они имеют одну общую точку, следовательно, уравнение имеет один корень.

4) Преобразуем выражение для функции:

$$y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} = \frac{(1 + \sqrt[4]{x})(1 - \sqrt[4]{x})}{1 + \sqrt[4]{x}} = 1 - \sqrt[4]{x}.$$
 Следовательно, построение графика заданной функции можно осуществить по схеме $y = \sqrt[4]{x} \rightarrow y = -\sqrt[4]{x} \rightarrow y = 1 - \sqrt[4]{x}$ (рис. 172). ■



Обобщим полученные результаты на следующие пары взаимно обратных функций:

$$y = x^{2k+1} \text{ и } y = \sqrt[2k+1]{x}; \quad y = x^{2k}, \text{ где } x \geq 0 \text{ и } y = \sqrt[2k]{x}.$$

Графики функций $y = x^{2k+1}$ и $y = x^{2k}$ рассматривались в предыдущем параграфе. Теперь построим графики функций $y = \sqrt[2k+1]{x}$ и $y = \sqrt[2k]{x}$, пользуясь тем, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Выше рассматривались функции $y = x^n$, где n — натуральное число. Если n — **нечетное число**, то функция $y = x^n$ определена и возрастает на всей координатной прямой, а следовательно, имеет обратную. Чтобы найти обратную для $y = x^n$ функцию, нужно решить уравнение $y = x^n$ относительно x и поменять местами x и y . Следовательно, получим функцию $y = \sqrt[n]{x}$, которая также определена и возрастает на всей координатной прямой. Пользуясь тем, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, построим график функции $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётном n (рис. 173).

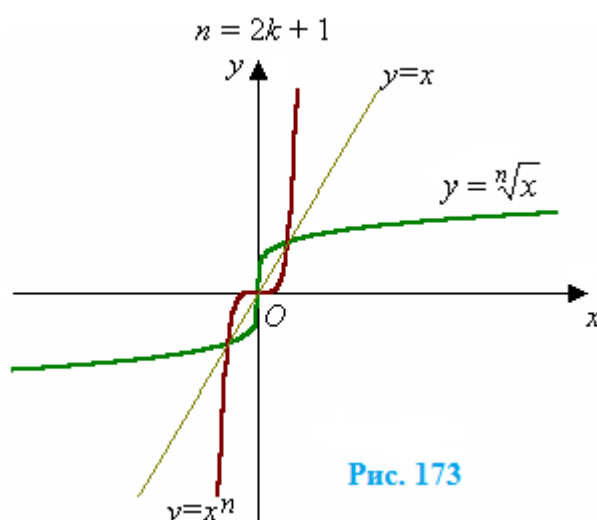


Рис. 173

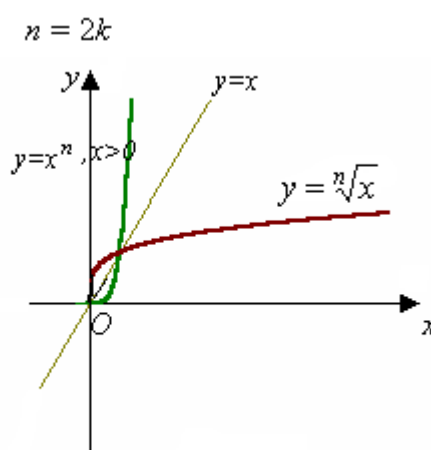


Рис. 174

Пусть теперь n — **чётное число**. Тогда функция $y = x^n$ не имеет обратной. Однако, обратную имеет функция $y = x^n, x \geq 0$. Обратная для неё функция $y = \sqrt[n]{x}$ определена и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Ее график построим, тоже исходя из того, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 174).

Свойства функций $y = \sqrt[2k]{x}$ и $y = \sqrt[2k+1]{x}$, где k — произвольное натуральное число, приведены в следующей таблице.

Таблица 27

№	$y = \sqrt[2k]{x}$	$y = \sqrt[2k+1]{x}$
1.	Область определения — промежуток $[0; +\infty)$	Область определения — промежуток $(-\infty; +\infty)$
2.	Функция имеет единственный нуль $x = 0$	
3	Функция не является ни чётной, ни нечётной	Функция нечётная.
4.	Функция принимает положительные значения на промежутке $(0;$	Функция принимает положительные значения на промежутке $(0;$

	$+\infty)$	$+\infty)$ и отрицательные — на промежутке $(-\infty; 0)$
5.	Функция возрастает в области определения.	
6.	Множество значений — промежуток $[0; +\infty)$	Множество значений — промежуток $(-\infty; +\infty)$
7.	Функция непрерывна в области определения	

Обоснование этих свойств базируется на свойствах степенных функций с натуральными показателями $y = x^{2k}$ и $y = x^{2k+1}$ и на общих свойствах взаимно обратных функций.

Свойствами функций $y = \sqrt[n]{x}$ часто пользуются для оценки выражений, сравнения чисел.

Пример 16. Сравнить числа $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{4}$, не пользуясь вычислительными средствами.

□ Приведем корни к общему показателю: $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$, $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$. Поскольку функция $y = \sqrt[12]{x}$ возрастающая, то $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$. ■

Пример 17. Оценить значение выражения $\sqrt[4]{a}$, если известно, что $81 \leq a \leq 150,0625$.

□ Поскольку функция $y = \sqrt[4]{x}$ возрастает, то выполняется соотношение: $\sqrt[4]{81} \leq \sqrt[4]{a} \leq \sqrt[4]{150,0625}$ или $3 \leq \sqrt[4]{a} \leq 3,5$. ■

Пример 18. Не используя вычислительных средств, определить первую цифру в десятичной записи числа $\sqrt[3]{200}$.

□ Поскольку $5^3 = 125$, а $6^3 = 216$, то $5 < \sqrt[3]{200} < 6$, и первая цифра в десятичном записи данного числа равняется 5. ■

Ответ: 5.

Пример 19. Указать два последовательных целых числа, между которыми находится число $\sqrt[3]{-5,746}$.

□ Поскольку $(-1)^3 = -1 > -5,746$, а $(-2)^3 = -8 < -5,746$, то, учитывая монотонность функции $y = \sqrt[3]{x}$, получим, что $-2 < \sqrt[3]{-5,746} < -1$. Следовательно, данное число находится между целыми числами -2 и -1 . ■

Ответ: -2 и -1 .



Рассмотрим еще некоторые свойства функций $y = \sqrt[n]{x}$. Сначала исследуем взаимное расположение графиков функций $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётных различных n и m . Докажем, что при $n < m$, $0 < x < 1$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x}$, а при $x > 1$ — неравенство $\sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x}$.

□ Действительно, пусть $n < m$, $0 < x < 1$. Предположим противное, то есть $\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[m]{x}$. Возведем обе части последнего неравенства в степень mn . Посколь-

ку степенная функция $y = x^{mn}$ возрастает, то отсюда получим, что $(\sqrt[n]{x})^{mn} \geq (\sqrt[m]{x})^{mn}$, то есть $x^m \geq x^n$. Поскольку $0 < x < 1$, то из свойств числовых неравенств (см. таблицу 5 в разделе 1) вытекает, что для $n < m$ выполняется неравенство $x^m < x^n$. Полученное противоречие и доказывает неравенство $\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x}$. Точно так же рассматривается случай, когда $x > 1$. Рекомендуем провести доказательство самостоятельно. ■

То же свойство имеет функция $y = \sqrt[n]{x}$ при чётном n .

Принимая во внимание нечётность функции $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётном n , из доказанного можно получить следующий вывод:

При нечётных n и m , таких, что $n < m$, $-1 < x < 0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x}$, а при $x < -1$ — неравенство $\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x}$.

Таким образом, доказано

Свойство 8. При $n < m$, $0 < x < 1$ график функции $y = \sqrt[n]{x}$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt[m]{x}$, а при $x > 1$ — выше этого графика.

При нечётных n и m , таких, что $n < m$, $-1 < x < 0$ график функции $y = \sqrt[n]{x}$ расположен выше графика функции $y = \sqrt[m]{x}$, а при $x < -1$ — ниже этого графика.

Графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ для $n = 3, 5$ изображены на рис. 175 (график функции $y = \sqrt[5]{x}$ изображён пунктирной линией). Графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ при $n = 2, 4$ представлены на рис. 176 (график функции $y = \sqrt[4]{x}$ изображён пунктиром). Графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ при $n = 4, 5$ представлены на рис. 177 (график функции $y = \sqrt[5]{x}$ изображён пунктиром).

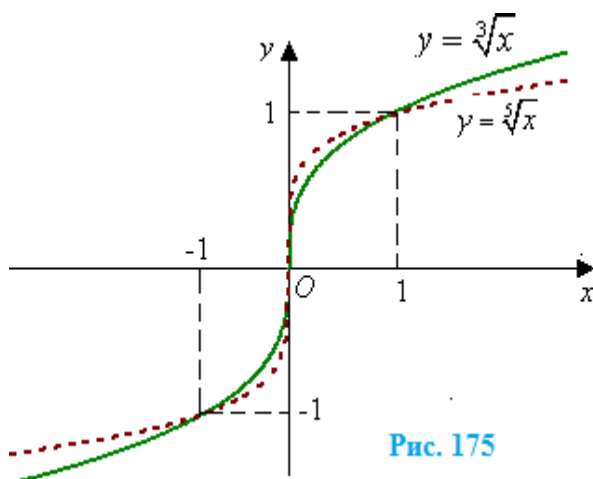


Рис. 175

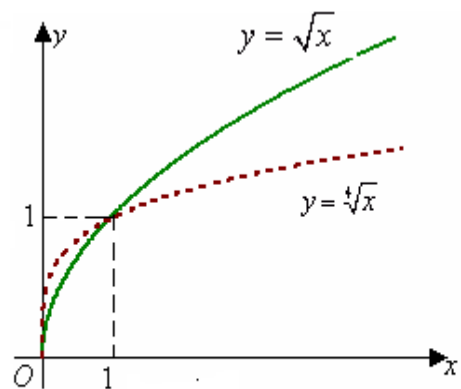


Рис. 176

Введенные функции находят применение при моделировании физических процессов. Например, поскольку плотность I потока электромагнитного излучения пропорциональна четвертой степени его частоты ω , то зависимость частоты ω от плотности потока I описывается с помощью функции $\omega = \sqrt[4]{kI}$, где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

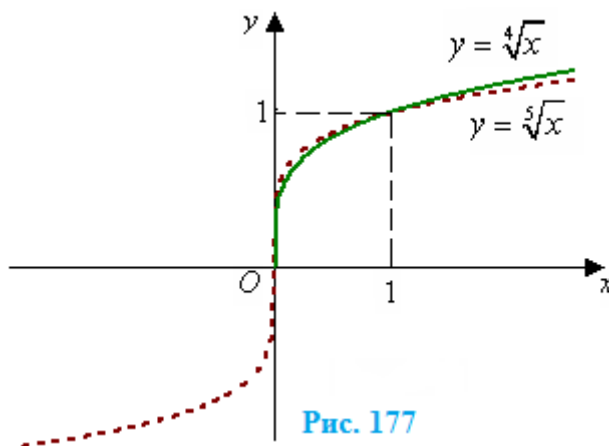


Рис. 177



Контрольные вопросы

1. ° Пересекает ли график функции $y = \sqrt[4]{x}$ прямая: а) $x = 0$; б) $x = 10$; в) $x = -1$; г) $y = 0$; д) $y = 1$; е) $y = 10$; ж) $y = -1$?
2. ° Пересекает ли график функции $y = \sqrt[3]{x}$ прямая: а) $x = 0$; б) $x = 10$; в) $x = -1$; г) $y = 0$; д) $y = 1$; е) $y = 10$; ж) $y = -1$?
3. ° Проходит ли график функции $y = \sqrt[3]{x}$ через точку:
а) $A(8; 2)$; б) $B(-8; -2)$; в) $C(8; -2)$?
4. ° Какое из чисел больше: 1) $\sqrt[1]{-3}$ или $\sqrt[1]{-5}$; 2) $\sqrt[4]{1,8}$ или 1; 3) $\sqrt[4]{\frac{3}{7}}$ или $\sqrt[4]{0,43}$?
5. Какие из следующих функций являются чётными, какие нечётными:
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt[7]{x}$; в) $y = \sqrt[4]{x^4}$; г) $y = (\sqrt[4]{x})^4$; д) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$?
6. Какие из следующих функций являются возрастающими?
а) $y = -\sqrt[3]{x}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y = \sqrt[5]{x-1}$; г) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$.
7. Какие из следующих пар функций равны между собой?
а) $y = (\sqrt{x})^2, y = x$; б) $y = \sqrt{x^2}, y = x$; в) $y = \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}, y = 1$;
г) $y = \sqrt[5]{x} + 1 - \sqrt[5]{x}, y = 1$; д) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, y = \sqrt{x} + 1$; е) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}, y = \sqrt{x} - 1$.
8. Какое из чисел больше: а) $\sqrt[5]{0,19}$ или $\sqrt[4]{0,19}$; б) $\sqrt[5]{19}$ или $\sqrt[4]{19}$; в) $\sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{2}$ или 2?
9. * При каких значениях x график функции $y = \sqrt[4]{x}$ расположен: а) над графиком функции $y = \sqrt{x}$; б) над графиком функции $y = \sqrt[6]{x}$?

10. * При каких значениях x график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен: а) над графиком функции $y = \sqrt{x}$; б) над графиком функции $y = \sqrt[4]{x}$?

Задачи

145.° Укажите промежутки, на которых возрастает и на которых убывает функция:

1) $y = x^3$; 2) $y = x^4$; 3) $y = -x^3$; 4) $y = -x^4$; 5) $y = (1-x)^6$; 6) $y = (x+2)^5$.

146. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций из задания 145 на промежутке: 1) $[-2; -1]$; 2) $[1; 2]$; 3) $[-2; 2]$.

147.° Исследуйте на чётность и нечётность функцию:

1) $y = x^4 + 2$; 2) $y = -x^5 + 2x^3 - x$; 3) $y = 4x^5 - 2$; 4) $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

148. Постройте график функции:

1) ° $y = (x-2)^3$; 2) ° $y = x^3 - 2$; 3) ° $y = (x-3)^4 + 2$; 4) ° $y = -x^4 + 5$;

5) $y = (2x-1)^3$; 6) $y = \frac{x^4 + x}{x}$; 7) $y = \begin{cases} x^5, & \text{если } x \leq 1, \\ 2 - x^4, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

149. Сколько решений имеет уравнение:

1) ° $x^3 = x^2 - 5$; 2) ° $x^2 - 1 = x^4$; 3) ° $x^2 = (x-1)^3$;

4) $x^3 - (x+1)^2 + 1 = 0$; 5) $x^4 - x^2 - 2x - 2 = 0$; 6) $x^2(x^5 - 1) = 1$?

150*. Докажите, что график функции $y = f(x)$ лежит не ниже графика функции $y = g(x)$, если:

1) $f(x) = x^4 + 1, g(x) = x^3 + x$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^3, g(x) = 8x - 16$.

151.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; 3) $\sqrt[3]{-1 \frac{91}{125}}$; 4) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 4^9}$; 5) $\sqrt[5]{\frac{7^{10}}{3^5}}$;

6) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 3^6}$; 7) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$; 8) $\sqrt[5]{162 \cdot 48}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{54}{0,25}}$; 10)

$\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$.

152.° Представьте выражение в виде дроби:

1) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{64}{15}}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{5}{81}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{625}{256}}$; 5) $\sqrt[5]{\frac{6}{a^5}}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{a^{10}}{7}}$.

153.° Вычислите:

$$1) \sqrt[3]{243} : \sqrt[3]{9}; \quad 2) \sqrt[3]{256} : \sqrt[3]{4}; \quad 3) \sqrt[3]{250} : \sqrt[3]{2}; \quad 4) \sqrt[3]{48} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \quad 5) \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{\frac{27}{25}};$$

$$6) \sqrt[4]{1024} : \sqrt[4]{4}; \quad 7) \sqrt[5]{256} : \sqrt[5]{8}; \quad 8) \sqrt[7]{32} : \sqrt[7]{\frac{1}{4}}; \quad 9) \sqrt[6]{81} : \sqrt[6]{\frac{1}{9}}; \quad 10) \sqrt[6]{2187} : \sqrt[6]{3}.$$

154°. Представьте выражение в виде корня из некоторого числа:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}; \quad 2) \sqrt[4]{\sqrt[3]{10}}; \quad 3) \sqrt[3]{\sqrt{4}}; \quad 4) \sqrt[4]{\sqrt[5]{12}}; \quad 5) \sqrt[6]{\sqrt[3]{15}};$$

$$6) \sqrt[3]{2\sqrt{5}}; \quad 7) \sqrt[5]{4\sqrt[3]{3}}; \quad 8) \sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}}; \quad 9) \sqrt[4]{3\sqrt[4]{2}}; \quad 10) \sqrt[3]{2\sqrt[6]{5}}.$$

155. Решите уравнение:

$$1^\circ) x^3 = 64; \quad 2^\circ) x^3 = -64; \quad 3^\circ) x^4 = 625; \quad 4^\circ) x^4 = -625; \quad 5^\circ) x^5 + 243 = 0; \quad 6^\circ) x^3 - 125 = 0;$$

$$7) (1-x)^5 = 32; \quad 8) (x^2 - 4x + 4)^2 = 81; \quad 9) (\sqrt[4]{x})^4 = 5; \quad 10) \sqrt[4]{x^4} = 5.$$

156°. Решите уравнение:

$$1) \sqrt[4]{x} - 0,2 = 0; \quad 2) \sqrt[8]{x} + 3 = 0; \quad 3) \sqrt[3]{x} - 2 = 0; \quad 4) \sqrt[3]{x} + 3 = 0.$$

157. Упростите выражение:

$$1) \circ \sqrt[3]{\frac{1}{8}b^3}; \quad 2) \circ \sqrt[5]{243d^{15}}; \quad 3) \sqrt[4]{16a^4}, a > 0; \quad 4) \sqrt[4]{\frac{16}{81}c^4}, c < 0.$$

158. Вынесите множитель за знак корня:

$$1^\circ) \sqrt[3]{54a^7}; \quad 2) \sqrt[4]{32b^6}; \quad 3) \sqrt[4]{5a^6}, a < 0; \quad 4^\circ) \sqrt[3]{m^8n^2}; \quad 5) \sqrt[4]{16a^3b^{11}}.$$

159. Внесите множитель под знак корня:

$$1) -5\sqrt[5]{5}; \quad 2) b\sqrt[6]{2}, b \leq 0; \quad 3) ab\sqrt[4]{2}, a \geq 0, b \leq 0; \quad 4) b\sqrt[4]{-b}.$$

160. Сократите дробь:

$$1) \circ \frac{a-1}{\sqrt{a+1}}; \quad 2) \frac{8a-1}{4\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{a+1}}; \quad 3) \frac{b^2-ab}{\sqrt{ab^2} - \sqrt{a^2b}}; \quad 4) \frac{\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}; \quad 5) \frac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a+1}}.$$

161. Перенесите иррациональность из знаменателя в числитель:

$$1^\circ) \frac{2}{\sqrt[3]{5}}; \quad 2^\circ) \frac{1}{\sqrt[4]{49}}; \quad 3^\circ) \frac{1}{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}; \quad 4) \frac{x}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}; \quad 5) \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}};$$

$$6) \frac{4}{2-3\sqrt[3]{2}}; \quad 7) \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}; \quad 8) \frac{1}{x\sqrt[3]{y+1}}.$$

162. Упростите выражение:

$$1) (7+\sqrt{7}) : (\sqrt{7}+1); \quad 2) \sqrt{\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{9}}{\sqrt{27}}}; \quad 3) 4\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{384} - \sqrt[3]{40};$$

$$4) (\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}; \quad 5) \sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1+\sqrt{3}}; \quad 6) (x\sqrt{-x}) : \sqrt{x^2};$$

$$7) \frac{\sqrt[6]{(xy)^3}}{x} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}; \quad 8) \sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}}; \quad 9) \sqrt{\frac{4c^3}{9a^5b}} \cdot \frac{ab}{c} \cdot \sqrt{\frac{c^3}{ab^5}}$$

163. Сравните числа:

$$1) \sqrt[8]{10} \text{ и } \sqrt[4]{3}; \quad 2) -3\sqrt[3]{3} \text{ и } \sqrt[3]{-82}; \quad 3) \sqrt[3]{5} \text{ и } \sqrt{3};$$

$$4) \sqrt[6]{5} \text{ и } \sqrt[3]{2}; \quad 5) \sqrt[4]{7} \text{ и } \sqrt[3]{4}.$$

164. Определите знак числа:

$$1) 40\sqrt{2} - 57; \quad 2) \sqrt[3]{5} - \sqrt{2\sqrt[3]{3}}; \quad 3) \sqrt[n]{3} - \sqrt[2n]{3}; \quad 4) \sqrt[n]{\frac{2}{3}} - \sqrt[2n]{\frac{2}{3}}.$$

165. Поток жидкости через поперечное сечение трубы вычисляется по формуле $Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}$, где Q — поток, R — радиус трубы, l — длина трубы, $p_1 - p_2$ — разность давлений на концах трубы, η — вязкость жидкости. Выразите радиус трубы R через остальные переменные.

166. Первый член геометрической прогрессии равняется 2. Чему равняется ее знаменатель, если: 1) седьмой ее член равняется 1458; 2) произведение ее шести первых членов равняется 728; 3) произведение ее первых n членов равняется P_n ?

167. Вкладчик внес на свой счет в банк 1000 зедов (зед — условная денежная единица). Через три года оказалось, что на этом счете находится 1728 зедов. Какой процент насчитывает банк своим вкладчикам ежегодно?

168*. Между сколькими детьми можно распределить пять различных карандашей 243 способами?

169. Найдите область определения функции :

$$1) \circ y = \sqrt[3]{\frac{2-x}{3x-1}}; \quad 2) \circ y = \sqrt[4]{\frac{2-x}{3x-1}}; \quad 3) \circ y = \frac{\sqrt{x}}{x^4+16};$$

$$4) y = \frac{\sqrt{x}}{x^4-16}; \quad 5) y = \sqrt{x^6-1}; \quad 6) y = \frac{\sqrt{(x-1)(x+0,5)}}{x^5+2}.$$

170. Постройте график функции:

$$1) \circ y = \sqrt[5]{x+2}; \quad 2) \circ y = \sqrt[5]{x}+2; \quad 3) \circ y = -\sqrt[5]{x}; \quad 4) y = \sqrt[4]{-x}; \quad 5) y = \sqrt[8]{(x-4)^8}.$$

171*. Сколько корней имеет уравнение:

$$1) \sqrt{x} = \sqrt[4]{x}; \quad 2) \sqrt[3]{x} + 3x^2 = 0; \quad 3) x\sqrt[6]{x+1} = -1?$$

172. Решите неравенство, пользуясь свойствами функции $y = \sqrt[n]{x}$:

$$1) \sqrt[3]{x} > 4; \quad 2) \sqrt[3]{x} < 4; \quad 3) \sqrt[4]{x} > 2; \quad 4) \sqrt[4]{x} < 2.$$

173. Какие значения принимает функция $y = \sqrt[3]{-x}$, если:

1) $0 < x \leq \frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{27} \leq x \leq 1$; 3) $x > 0,125$; 4) $|x| \leq 0,001$; 5)

$|x| > 3\frac{3}{8}$?

174. Оцените значение выражения $\sqrt[4]{a}$, если:

1) $10^{-8} < a < 0,1296$; 2) $625 < a < 915,0625$.

175. Не используя вычислительных средств, определите первую цифру в десятичной записи числа: 1) $\sqrt[3]{100}$; 2) $\sqrt[4]{300}$; 3) $\sqrt[5]{300}$.

176. Укажите два последовательных целых числа, между которыми находится число: 1) $\sqrt[3]{47}$; 2) $\sqrt[4]{112}$; 3) $\sqrt[5]{-671}$; 4) $\sqrt[6]{2543}$.



Упражнения для повторения

177. Равносильны ли уравнения? Если нет, укажите, какое из них является следствием другого.

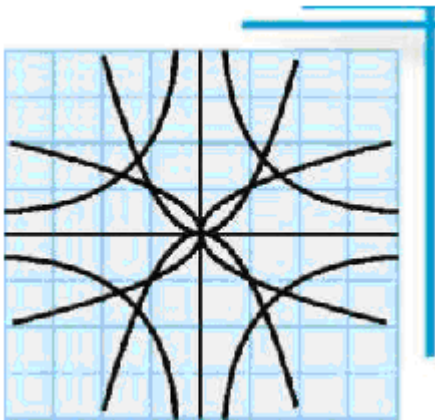
1) $\sqrt{x^2} = 1$ и $x = 1$; 2) $\sqrt{x^2} = 1$ и $|x| = 1$; 3) $\sqrt{x^2} = 1$ и $\sqrt{x}\sqrt{x} = 1$.

4) $\sqrt{1-x^2} = x$ и $1-x^2 = x^2$; 5) $\sqrt{1-x^2} = 1$ и $1-x^2 = 1$.

178. Докажите, что уравнения $\sqrt{x} = -x$ и $(\sqrt{x})^2 = (-x)^2$ не равносильны.

179. Решите неравенство: 1) $\frac{1}{-3+2x} < 0$;

2) $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$; 3) $\frac{x}{x+1} \leq 3$; 4) $|1+2x| > 1$.



§ 11. Иррациональные уравнения и неравенства

В данном параграфе рассматривается класс уравнений и неравенств, в которых неизвестная стоит под знаком арифметического корня.



1. Иррациональные уравнения

Решения многих задач как математики, так и ее приложений, приводят к решению уравнений, в которых неизвестная величина содержится под знаком корня. Например, чтобы найти длину маятника l , период колебаний которого равняется T_0 с, необходимо решить уравнение $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T_0$, где g — ускорение свободного падения. Неизвестная l стоит под знаком квадратного корня.

Уравнения, в которых неизвестная находится под знаком корня, называются иррациональными уравнениями.

Уравнение $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T_0$, которое рассматривалось выше, является иррациональным.

Один из главных методов решения иррациональных уравнений заключается в сведении их к рациональным уравнениям. Этого можно достичь возведением обеих частей в одну и ту же степень. Рассмотрим сначала решение простейших иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение: 1) $\sqrt[4]{x} = 2$; 2) $\sqrt[6]{x} = -2$; 3) $\sqrt[3]{x-1} = -3$.

□ 1) Согласно определению корня 4-й степени имеем: $2^4 = x$, то есть $x = 16$. Тот же результат можно получить, возведя обе части уравнения в 4-ю степень.

2) Уравнение корней не имеет, так как $\sqrt[6]{x}$ принимает лишь неотрицательные значения, а в правой части уравнения стоит число -2 .

3) Возведем обе части уравнения в 3-ю степень. Получим $x - 1 = (-3)^3$. Отсюда $x = -26$. Это число и является корнем исходного уравнения (проверьте!). ■

Ответ: 1) 16; 2) нет решений; 3) -26 .

Уравнение, приведенное в начале параграфа, решается следующим образом:

$$\sqrt{l} = \frac{T_0 \cdot \sqrt{g}}{2\pi}, l = \frac{T_0^2 \cdot g}{4\pi^2}.$$

Рассмотрим решение более сложных иррациональных уравнений.

Пример 2. Решить уравнение: $x + 1 = \sqrt{1 - x}$.

□ Понятно, что когда какое-то значение x_0 является корнем уравнения $f(x) = 0$, то есть $f(x_0) = 0$, то оно является корнем уравнения $(f(x))^2 = 0$, полученного из данного возведением обеих частей в квадрат, потому что $(f(x_0))^2 = 0$. Возведем обе части данного уравнения в квадрат. Получим

$$x^2 + 2x + 1 = 1 - x.$$

Отсюда $x^2 + 3x = 0$. Корни этого уравнения $x = 0$, $x = -3$.

Обращаем внимание на то, что возведение обеих частей уравнения в квадрат является неравносильным преобразованием. В результате этого преобразования можно получить посторонние корни. Причина появления посторонних корней заключается в следующем. Если $a = b$, то обязательно $a^2 = b^2$. Но если $a^2 = b^2$, то необязательно, что $a = b$ (a может равняться и $-b$). Например, $2 \neq -2$, но $2^2 = (-2)^2$. Посторонние корни могут появиться при возведении обеих частей в любую чётную степень. Поэтому после выполнения этого преобразования необходимо выполнять проверку.

Проверим, действительно ли $x = 0$ и $x = -3$ являются корнями данного уравнения. Подставляя $x = 0$ в обе части данного уравнения, получим правильное равенство $1 = 1$. Зато число $x = -3$ не является корнем данного уравнения, поскольку после подстановки этого значения в данное уравнение получим: $-2 \neq 2$. Следовательно, $x = -3$ является посторонним корнем. Следовательно, корнем данного уравнения является лишь число $x = 0$. ■

Ответ: 0.

В случае возведения обеих частей уравнения в нечётную степень такие неприятности не возникают: если $a = b$, то $a^3 = b^3$ и наоборот (подумайте, почему?).

Пример 3. Решить уравнение: $\sqrt[3]{7x+1} = x+1$.

□ Возводя обе части уравнения в третью степень, будем иметь: $7x + 1 = (x + 1)^3$, или $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$. Отсюда $x = 0$, $x = -4$, $x = 1$. Проверка показывает, что все найденные числа являются корнями исходного уравнения. Заметим, что в этом случае проверка не является обязательной составляющей решения, потому что возведение обеих частей уравнения в нечётную степень является равносильным преобразованием. ■

Ответ: 0, -4, 1.

Пример 4. Найти точки пересечения графиков функций $y = \sqrt{x-1}$ и $y = \sqrt{x^2-3}$.

□ Чтобы найти абсциссы точек пересечения графиков двух данных функций нужно решить уравнение $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-3}$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим: $x - 1 = x^2 - 3$, или $x^2 - x - 2 = 0$. Отсюда $x = -1$, $x = 2$. Проверка показывает, что данное уравнение имеет лишь один корень $x = 2$. Найдем теперь ординату точки пересечения данных графиков: $y(2) = \sqrt{2-1} = 1$. Следовательно, графики пересекаются в одной точке (2; 1). ■

Ответ: (2; 1).



В примерах 2 и 4 были рассмотрены два типа иррациональных уравнений: $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Чаще всего правая часть уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ может принимать как отрицательные, так и неотрицательные значения. Если она принимает только отрицательные значения, то уравнение решений не имеет, потому что левая часть — арифметический квадратный корень — является неотрицательной. Если правая часть неотрицательная, то данное уравнение равносильно при $f(x) \geq 0$ уравнению, которое получаем из данного возведением обеих частей в квадрат.

Точнее, уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Обращаем внимание на то, что условие $f(x) \geq 0$ является в конечном итоге лишним, поскольку оно автоматически вытекает из равенства $f(x) = g^2(x)$. Поэтому окончательно получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

С помощью таких же рассуждений можно прийти к заключению, что уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$
 Поскольку $f(x) =$

$g(x)$, то не нужно учитывать оба условия $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, достаточно проверять одно из них. Поэтому имеем следующий результат.

Т е о р е м а 2. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно каждой из систем
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Выбираем первую или вторую из этих систем в зависимости от того, какая функция $y = f(x)$ или $y = g(x)$ проще. Заметим, что неравенства $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ при решении уравнений $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ не обязательно решать, достаточно проверить, выполняются ли они для найденных решений уравнения $f(x) = g^2(x)$ или уравнения $f(x) = g(x)$ соответственно.

Следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Уравнение $\sqrt{f(x)} = a$, где a — некоторое положительное число, равносильно уравнению $f(x) = a^2$. Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет.

Следовательно, уравнения указанных типов можно решать или сведением к равносильной системе, или возведением обеих частей в квадрат, при этом обязательно выполняя проверку.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{2 - \sqrt{x^2 - 3}} = 1$.

□ Имеем уравнение вида $\sqrt{f(x)} = a$. Оно равносильно уравнению $2 - \sqrt{x^2 - 3} = 1$ или уравнению $\sqrt{x^2 - 3} = 1$. Опять получили уравнение того же типа. Корнями последнего, а, следовательно, и данного уравнения являются числа $x = -2$ и $x = 2$. ■

Ответ: $-2; 2$.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 5x - 2} = \sqrt{3 - 2x}$.

□ Это уравнение является уравнением вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. Поэтому оно равносильно системе $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 2 = 3 - 2x, \\ 3 - 2x \geq 0. \end{cases}$ Первое уравнение этой системы имеет корни $x = -1$ и $x = 2,5$. Корень $x = -1$ удовлетворяет неравенству $3 - 2x \geq 0$, а корень $x = 2,5$ не удовлетворяет ему. Поэтому данное уравнение имеет единственный корень $x = -1$. ■

Ответ: -1 .

Все то, что мы изложили относительно иррациональных уравнений, содержащих неизвестную под знаком квадратного корня, остается справедливым для иррациональных уравнений, которые содержат неизвестную под знаком корня любой чётной степени.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[4]{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{1 - x}$.

□ Воспользовавшись утверждением, аналогичным теореме 1 для уравнений, содержащих неизвестную под знаком корня чётной степени, получим систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = (1 - x)^2, \\ 1 - x \geq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет корни $x = 1$ и $x = 2$. Корень $x = 1$ удовлетворяет неравенству $1 - x \geq 0$, а корень $x = 2$ не удовлетворяет ему. Следовательно, система, а потому и данное уравнение, имеет единственный корень $x = 1$. ■

Ответ: 1 .

Рассмотрим уравнение вида $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. В разделе 1 рассматривалось уравнение $P_1(x) \cdot P_2(x) = 0$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — некоторые многочлены. Оно было равносильно совокупности двух уравнений $P_1(x) = 0$ и $P_2(x) = 0$. Внешне кажется, что мы имеем уравнение того же вида. Но это не так. Может случиться так, что сомножитель $g(x)$ в некоторой точке x_0 будет равняться нулю, а выражение $\sqrt{f(x)}$ в этой точке не опре-

делено. В этом случае число x_0 является корнем совокупности $\begin{cases} \sqrt{f(x)} = 0, \\ g(x) = 0, \end{cases}$ но не может быть корнем данного уравнения, поскольку не принадлежит его области определения.

Например, рассмотрим уравнение $\sqrt{x-1}(x^2 - 2x - 3) = 0$. Заменяем его совокупностью уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0. \end{cases}$ Решив каждое из этих уравнений, по-

лучим решение совокупности: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$. Легко заметить, что число $x_3 = -1$ не является корнем первого уравнения, потому что не входит в его область определения ($x \geq 1$). Таким образом, **переход от уравнения**

$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$ **к совокупности уравнений** $\begin{cases} \sqrt{f(x)} = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases}$ **может привести к**

появлению посторонних корней. Поэтому после решения совокупности уравнений необходима проверка.



При решении уравнений довольно часто используются преобразования выражений с помощью следующих соотношений:

$$1) \left(\sqrt[2n+1]{f(x)} \right)^{2n+1} = f(x);$$

$$2) \left(\sqrt[2n]{f(x)} \right)^{2n} = f(x), \text{ если } f(x) \geq 0;$$

$$3) \sqrt[2n]{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt[2n]{f(x)} \cdot \sqrt[2n]{g(x)}, \text{ если } f(x) \geq 0, g(x) \geq 0;$$

$$4) \sqrt[2n]{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\sqrt[2n]{g(x)}}, \text{ если } f(x) \geq 0, g(x) > 0.$$

Использование этих формул при преобразовании уравнений, без учета условий их применимости, может привести как к появлению постороннего корня, так и к потере корня. Формула 1) всегда приводит к равносильным уравнениям, формула 2), примененная слева направо, может привести к уравнениям-следствиям, формулы 3), 4), примененные справа налево, могут привести к уравнениям-следствиям, поскольку области определения выражений

$\sqrt[2n]{f(x) \cdot g(x)}$ и $\sqrt[2n]{\frac{f(x)}{g(x)}}$ или совпадают, или расширяют области определения

соответственно выражений $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot \sqrt[2n]{g(x)}$ и $\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\sqrt[2n]{g(x)}}$ (подумайте, почему?).

Поэтому в этих случаях могут появиться посторонние корни.

Например, при переходе от уравнения $x^2 + (\sqrt{x})^2 = 0$ к уравнению $x^2 + x = 0$ в связи с расширением ОДЗ уравнения появляется посторонний корень -1 .

Очень опасно применять формулы 3), 4) слева направо: сужение ОДЗ уравнений может привести к потере их корней.

Так, при переходе от уравнения $\sqrt{x(x-1)} = 0$ к уравнению $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 0$ теряется корень $x = 0$ (Проверьте!). Потеря корня происходит в результате сужения ОДЗ уравнения. ОДЗ первого уравнения — это множество $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, а ОДЗ второго уравнения — $[1; +\infty)$. Таким образом, при замене первого уравнения вторым теряется корень из промежутка $(-\infty; 0]$.

Пример 8. Решить уравнение $\frac{\sqrt[4]{2x+1}}{\sqrt[4]{x}} + 2\sqrt[4]{\frac{x}{2x+1}} = 3$.

□ Следующее уравнение $\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x}} + 2\sqrt[4]{\frac{x}{2x+1}} = 3$ является следствием данного, потому что его ОДЗ шире ОДЗ данного. Замечая, что корни левой части последнего уравнения являются взаимно обратными выражениями, сделаем замену: $\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x}} = y$. Тогда уравнение принимает вид: $y + \frac{2}{y} = 3$. Оно равносильно системе: $\begin{cases} y^2 - 3y + 2 = 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$ Её решениями являются числа 1 и 2. Имеем два уравнения: $\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x}} = 1$ и $\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x}} = 2$. Их корнями являются соответственно числа -1 и $\frac{1}{14}$. Проверка показывает, что данному уравнению удовлетворяет лишь число $\frac{1}{14}$. ■

Ответ: $\frac{1}{14}$.

Один из главных методов решения систем иррациональных уравнений заключается в сведении ее к системе рациональных уравнений. Этого можно достичь разными методами: возведением обеих частей уравнения в одну и ту же степень, исключением неизвестной, линейным преобразованием уравнений, заменой переменных, разложением на множители и т. п.

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-3}{y+2}} = 1, \\ xy = 6. \end{cases}$

□ Возведем обе части первого уравнения в квадрат. Получим равносильную систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x-3}{y+2} = 1, \\ xy = 6. \end{cases}$ Выразив из первого уравнения y через

x , подставив найденное значение во второе уравнение, будем иметь:

$$\begin{cases} y = x - 5, \\ x(x - 5) = 6. \end{cases} \quad \text{Отсюда: } x_1 = 6, y_1 = 1; x_2 = -1, y_2 = -6. \blacksquare$$

Ответ: (6; 1) (-1; -6).

Пример 10. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35. \end{cases}$$

□ Сделаем замену переменных: $z = \sqrt[3]{x}, t = \sqrt[3]{y}$. Получим систему

$$\begin{cases} z + t = 5, \\ z^3 + t^3 = 35. \end{cases} \quad \text{Разложим левую часть второго уравнения на множители: } z^3 + t^3 =$$

$(z + t) \cdot (z^2 - zt + t^2)$ и подставим в него из первого уравнения $z + t = 5$. Получим

систему, равносильную предыдущей:
$$\begin{cases} z + t = 5, \\ z^2 - zt + t^2 = 7. \end{cases} \quad \text{Из первого уравнения}$$

имеем: $t = 5 - z$. Подставим значение t во второе уравнение. Получим уравнение $z^2 - z(5 - z) + (5 - z)^2 = 7$, или $z^2 - 5z + 6 = 0$. Его корни $z_1 = 2, z_2 = 3$, а поэтому $t_1 = 3, t_2 = 2$. Перейдем к старым переменным: $z = \sqrt[3]{x}, t = \sqrt[3]{y}$. Получим:

$$x_1 = z_1^3 = 8, y_1 = t_1^3 = 27; x_2 = z_2^3 = 27, y_2 = t_2^3 = 8. \blacksquare$$

Ответ: (8; 27); (27; 8).

Решение некоторых иррациональных уравнений сводится к решению систем уравнений.

Пример 11. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{35 - x} = 5$.

□ Обозначим $\sqrt[3]{x}$ через z , а $\sqrt[3]{35 - x}$ через t . Тогда уравнение принимает вид: $z + t = 5$. Кроме того, $z^3 + t^3 = (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{35 - x})^3 = x + 35 - x = 35$. Мы получили систему
$$\begin{cases} z + t = 5, \\ z^3 + t^3 = 35, \end{cases}$$
 которая рассматривалась в предыдущем примере. Пользуясь результатом ее решения, будем иметь: $x_1 = 8, x_2 = 27$. $\blacksquare$

Ответ: 8; 27.



Контрольные вопросы

1. ° Какие из следующих уравнений являются иррациональными:

а) $\sqrt{5x} - 1 = 0$; б) $x\sqrt{x} - \sqrt{x} = 1$; в) $\frac{\sqrt[3]{3}}{x} + \frac{x}{\sqrt[3]{3}} = 2$?

2. ° Какие из следующих уравнений не имеют решений:

а) $\sqrt[4]{x} = -1$; б) $\sqrt[3]{x} = -1$; в) $\sqrt[6]{x} = 0$; г) $\sqrt[5]{x} = 0$?

3. ° Является ли число -5 решением уравнения $\sqrt{21+x} - \sqrt{20-x} = 1$?

4. Почему следующие уравнения не имеют решений:

а) $\sqrt[4]{x} = -4$; б) $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = -2$; в) $\sqrt[3]{-x^2} = 1$; г) $\sqrt{-x^2-1} = 7$; д) $\sqrt{x-x^2-1} = 3$?

5. Равносильны ли уравнения: а) $\sqrt{2x+1} = 3$ и $2x+1 = 9$; б) $\sqrt[3]{x} = x$ и $x = x^3$;

в) $x^2 + (\sqrt{x})^2 = 0$ и $x^2 + x = 0$; г) $\sqrt[4]{x} = -x$ и $x = x^4$; д) $\sqrt[4]{x} = x$ и $x = x^4$; е) * $\sqrt{x(x+2)} = 0$ и $\sqrt{x}\sqrt{x+2} = 0$?

6. Обязательно ли делать проверку при решении иррациональных уравнений возведением обеих частей в квадрат?

7. Для каких значений n применение формулы $(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x)$ при решении иррациональных уравнений может привести к расширению области определения уравнения?

2. Иррациональные неравенства



Решения многих задач как математики, так и ее приложений, приводят к решению неравенств, в которых неизвестная величина находится под знаком корня.

Например, чтобы найти длину маятника l , период колебаний которого не меньше T_0 с, необходимо решить неравенство $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \geq T_0$, где g — ускорение свободного падения. Неизвестная l стоит под знаком квадратного корня.

Неравенство, в котором неизвестная содержится под знаком корня, называется иррациональным неравенством.

Неравенства $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} > T_0$, $\sqrt{x^2 + 2500} - x \leq 2$, $\sqrt[4]{x^2 - x + 1} > x$ являются иррациональными.

Основной метод решения иррациональных неравенств заключается в сведении их к рациональным путем возведения обеих частей неравенства в соответствующую степень. Аналогично мы решали иррациональные уравнения. В результате мы получали или равносильное уравнение, или уравнение, которое было следствием данного. Посторонние корни отсеивали с помощью проверки.

С неравенствами работать значительно сложнее. Во-первых, при решении неравенств необходимо выполнять лишь равносильные преобразования, потому что проверка невозможна в связи с наличием бесконечного множества решений неравенства. Во-вторых, после возведения обеих частей неравенства в чётную степень можно не только приобрести посторонние решения, но и потерять решения. Так, если возвести в квадрат обе части неравенства $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$, то получим неравенство $x^2 + x - 2 > x^2$ или $x > 2$. Однако, можно проверить, что число $x = -3$ также является решением исходного неравенства, которое мы потеряли.

Выясним, когда возведение в степень обеих частей неравенства приводит к равносильному неравенству. Для этого применим основные свойства числовых неравенств. Как известно, возведение обеих частей числового неравенства может привести к неверному неравенству. Например, если правильное

неравенство $-1 > -2$ возвести в квадрат, то получим неверное неравенство $(-1)^2 > (-2)^2$. Однако, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то из неравенства $a > b$ вытекает неравенство $a^2 > b^2$ и наоборот, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то из неравенства $a^2 > b^2$ вытекает неравенство $a > b$. Следовательно, неравенство $a > b$ при условии $a \geq 0$ и $b \geq 0$ равносильно неравенству $a^2 > b^2$. Это утверждение справедливо для произвольной чётной степени.

А вот при возведении неравенства $a > b$ в нечётную степень, например, в третью, никаких ограничений на a и b накладывать не надо, потому что неравенство $a > b$ равносильно неравенству $a^3 > b^3$ для произвольных a и b .

Из приведенных рассуждений вытекают следующие выводы:

Если обе части неравенства неотрицательны, то возведение их в чётную степень приводит к равносильному неравенству с учетом ОДЗ.

Возведение обеих частей неравенства в нечётную степень всегда приводит к равносильному неравенству.

Пример 12. Решить неравенство:

$$1) \sqrt{x} > 2; 2) \sqrt[4]{x} < \frac{1}{2}; 3) \sqrt[4]{x} < -1; 4) \sqrt[6]{x} \geq -1; 5) \sqrt[3]{x} < -2; 6) \sqrt{2x-3} < 3.$$

□ 1) Неравенство $\sqrt{x} > 2$ определено при $x \geq 0$, потому что только при этих значениях переменной выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл. Обе части неравенства неотрицательны. Поэтому, возводя их в квадрат, получим неравенство $x > 4$, равносильное данному при условии $x \geq 0$. Поскольку неравенство $x \geq 0$ выполняется, если $x > 4$, то решением исходного неравенства является промежуток $(4; +\infty)$.

2) Неравенство $\sqrt[4]{x} < \frac{1}{2}$ определено при $x \geq 0$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то возводя их в четвертую степень, получим неравенство $x < \frac{1}{16}$, равносильное исходному при условии $x \geq 0$. Следовательно, решением данного неравенства является промежуток $\left[0; \frac{1}{16}\right)$.

3) Левая часть неравенства $\sqrt[4]{x} < -1$ принимает лишь неотрицательные значения, поэтому не существует ни одного значения x , при которых оно выполняется. Следовательно, неравенство не имеет решений.

4) Возводить обе части неравенства $\sqrt[6]{x} > -1$ в шестую степень не стоит, поскольку обе части ее имеют разные знаки. Левая часть неравенства задана при $x \geq 0$ и принимает только неотрицательные значения. Поэтому неравенство выполняется при всех допустимых значениях x , то есть при $x \geq 0$. Следовательно, решением неравенства является промежуток $[0; +\infty)$.

5) Обратите внимание на то, что неравенство $\sqrt[3]{x} < -2$ определено при всех значениях x . Возводя обе части неравенства в 3-ю степень, получим рав-

носившее неравенство $x < -8$. Это и является решением исходного неравенства.

6) Неравенство $\sqrt{2x-3} < 3$ определено при $x \geq \frac{3}{2}$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то возведя их в квадрат, получим неравенство $2x-3 < 9$, или $x < 6$, равносильные данному при условии $x \geq \frac{3}{2}$. Следовательно, решением исходного неравенства является промежуток $\left[\frac{3}{2}; 6\right)$. ■

Ответ: 1) $(4; +\infty)$; 2) $\left[0; \frac{1}{16}\right)$; 3) $\emptyset$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $(-\infty; -8)$; 6) $\left[\frac{3}{2}; 6\right)$.

Используя рассмотренный метод решения простейших иррациональных неравенств, можно получить решения неравенства $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} > T_0$: $l > \frac{T_0^2 \cdot g}{4\pi^2}$.

В примерах 12 1), 2), 6) мы рассматривали иррациональные неравенства, обе части которых имели постоянный знак при всех допустимых значениях неизвестной. Теперь избавимся от этого ограничения. На решения иррациональных неравенств, которые содержат корни нечётных степеней, это существенно не влияет.



Пример 13. Решить неравенство $\sqrt[3]{7x+1} < x+1$.

□ Это неравенство равносильно неравенству $7x+1 < (x+1)^3$ (обе части возведены в нечётную степень) или неравенству $x^3 + 3x^2 - 4x > 0$, или неравенству $x(x+4)(x-1) > 0$. Решением последнего неравенства, а следовательно и данного, является множество $(-4; 0) \cup (1; +\infty)$. ■

Ответ: $(-4; 0) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим теперь иррациональные неравенства, которые содержат корни чётных степеней.

Пример 14. Решить неравенство $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

□ Левая часть этого неравенства принимает лишь неотрицательные значения (корень арифметический), а правая часть может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Неравенство определено на множестве, где $x^2+x-2 \geq 0$, то есть при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. Это множество и является ОДЗ исходного неравенства.

Возводить обе части в квадрат можно только в той части ОДЗ, в которой ее правая часть является неотрицательной, то есть на множестве, которое определяется системой $\begin{cases} x^2+x-2 \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$ Рассмотрим теперь ту часть ОДЗ, в которой правая часть неравенства является отрицательной, то есть множество,

которое определяется системой $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x < 0. \end{cases}$ Легко заметить, что для всех

таких значений x исходное неравенство явно выполняется, потому что левая неотрицательная часть будет больше отрицательной правой. Следовательно,

все значения x , которые удовлетворяют систему $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x < 0, \end{cases}$ являются ре-

шениями исходного неравенства. Приведенные рассуждения показывают, что неравенство $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$ равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 > x^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x < 0. \end{cases}$ Заметим, что первая система равносильна

следующей: $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 > x^2 \end{cases}$ (подумайте, почему?). Решая системы, получим

ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$. ■

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.



Проводя рассуждения, подобные тем, которые проводились при решении примера 14, в общем случае, то есть для неравенств вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$, получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. Неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Рассмотрим частный случай этого неравенства $\sqrt{f(x)} > a$, где a — некоторое число.

Если $a \geq 0$, то неравенство равносильно неравенству $f(x) > a^2$.

Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству $f(x) \geq 0$.

Пример 15. Решить неравенство $\sqrt{\frac{x+5}{2x-1}} > 2$.

□ Это частный случай неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$, когда функция $g(x)$ — постоянная. Согласно приведенному утверждению, данное неравенство равносильно неравенству $\frac{x+5}{2x-1} > 4$. (Почему?) Решим

последнее неравенство методом интервалов:

$$\frac{x+5}{2x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{9-7x}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{7x-9}{2x-1} < 0 \text{ (рис. 178). } \blacksquare$$



Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{7}\right)$.

Рассмотрим теперь неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Очевидно, что в той части ОДЗ, где $g(x) < 0$, то есть на множестве, которое определяется системой $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ неравенство решений не имеет (неотрицательное число не может быть меньше отрицательного). Рассмотрим теперь ту часть ОДЗ, где $g(x) \geq 0$, то есть множество, которое определяется системой $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$ На этом множестве обе части неравенства можно возводить в квадрат. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. Неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$

Рассмотрим частный случай этого неравенства $\sqrt{f(x)} < a$, где a — некоторое число.

Если $a > 0$, то неравенство равносильно неравенству $0 \leq f(x) < a^2$.

Если $a \leq 0$, то неравенство не имеет решений.

Пример 16. Решить неравенство $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} - 1 \leq 3$.

□ Согласно последнему утверждению, данное неравенство равносильно двойному неравенству $0 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 \leq 9$. Проводя очевидные равносильные пре-

образования, последовательно будем иметь: $1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq 10$, $\frac{1}{10} \leq \sqrt[3]{x} \leq 1$. Возводя обе части последнего неравенства в третью степень, получим: $0,001 \leq x \leq 1$. ■

Ответ: $[0,001; 1]$.

При решении дробно-рационального неравенства в разделе 1 применялся метод интервалов. Воспользуемся этим методом для решения и иррациональных неравенств.

Пример 17. Решить неравенство $x+1 > \sqrt{1-x}$.

□ Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1-x} - x - 1$. Она определена и непрерывна на промежутке $(-\infty; 1]$. Найдем множество, на котором $f(x) < 0$. Это множество и будет решением данного неравенства. Решив уравнение $\sqrt{1-x} - x - 1 = 0$, найдем нули функции. Как показано при решении примера 2, этому уравнению удовлетворяет единственное число $x = 0$. Следовательно, $x = 0$ является единственным нулем функции $y = f(x)$. Как вытекает из свойства непрерывных функций (см. § 4), функция $y = f(x)$ сохраняет свой знак на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; 1]$. Если бы она не сохраняла свой знак на ка-

ком-то из этих промежутков, то, согласно теореме Больцано-Коши, она имела бы на этом промежутке нуль, что противоречит полученному результату. Чтобы установить этот знак, достаточно найти его в любой точке каждого из промежутков. Поскольку $f(-3) = \sqrt{1+3} + 3 - 1 = 4 > 0$, $f(1) = \sqrt{1-1} - 1 - 1 = -2 < 0$, то $f(x) < 0$ на промежутке $(0; 1]$. Таким образом, промежуток $(0; 1]$ является решением данного иррационального неравенства. ■

Ответ: $(0; 1]$.



Контрольные вопросы

1. Какие из следующих неравенств не имеют решений:

а) $\sqrt[4]{x} \leq -1$; б) $\sqrt[3]{x} \leq -1$; в) $\sqrt[6]{x} \leq 0$; г) $\sqrt[5]{x} \leq 0$; д) $\sqrt[4]{x} < 0$; е) $\sqrt[3]{x} \geq -1$; ж) $\sqrt[4]{x} \geq -1$?

2. Каким из следующих неравенств удовлетворяют все неотрицательные числа:

а) $\sqrt[4]{x} \geq -1$; б) $\sqrt[3]{x} \geq -1$; в) $\sqrt[6]{x} \leq 0$; г) $\sqrt[5]{x} \leq 0$; д) $\sqrt[4]{x} < 0$?

3. Каковы решения неравенства:

а) $\sqrt{3x-2} > 1$; б) $\sqrt{2x+1} < 3$; в) $\sqrt[3]{2x-1} < -1$; г) $\sqrt[3]{2x-1} \geq 1$?

4. Равносильны ли неравенства: а) $\sqrt[3]{x} < x$ и $x < x^3$; б) $\sqrt[4]{x} > -x$ и $x > x^4$; в) $\sqrt[4]{x} < x$ и $x < x^4$?

5. *При каких значениях a все действительные числа удовлетворяют неравенству:

а) $\sqrt[4]{|x|+1} < a$; б) $\sqrt[4]{|x|-1} < a$; в) $\sqrt[4]{|x|-1} \leq a$; г) $\sqrt[4]{|x|+1} \leq a$?

Задачи

180. Решите уравнение:

1)° $\sqrt[3]{x-2} = 2$; 2)°

$\sqrt[3]{x-2} = x-2$; 3) $\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 16x - 5} = x-2$; 4) $\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{x+2} = 0$.

181. Решите уравнение:

1) $\sqrt{1-3x} = 3+x$; 2) $21 + \sqrt{2x-7} = x$; 3) $\sqrt{7-\sqrt{x-3}} = 2$;
4) $\sqrt{x^2-16} = \sqrt{5x+8}$; 5) $\sqrt{x^2+2x+10} = 2x-1$; 6) $\sqrt{x^2+9} = x^2-11$.

182. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$; 2) $\sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{x-7}$; 3) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6x-11}$.

183*. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+3} = a-1$; 2) $\sqrt{2-x} = a+2$; 3) $\sqrt{2x-a} = \sqrt{x}$; 4) $\sqrt{3+2x} = \sqrt{a-x}$.

184*. Найдите точки пересечения графиков функций:

1) $y = \sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}$ и $y = 2,5 - \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}$; 2) $y = 3\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 2,5$ и $y = 3\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

185. Решите неравенство:

1°) $\sqrt{2x-3} > 1$; 2°) $\sqrt{4x-3} \leq 2$; 3) $\sqrt{4x^2-12x+9} \geq 2$; 4) $\sqrt{4x^2-4x+1} < 1$.

186. Решите неравенство:

1) $\sqrt{6+x-x^2} > -1$; 2) $\sqrt{2x^2-3x+1} \leq 0$; 3) $\sqrt{3x^2+x-2} \geq 0$; 4) $\sqrt{2x^2-5x+2} \leq -1$.

187. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-2x}$; 2) $\sqrt{2-5x} \geq \sqrt{3x-4}$; 3) $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{3x-3}$; 4) $\sqrt{x^2-x} < \sqrt{3x+5}$.

188. Найдите все значения x , при которых график функции $y = f(x)$ лежит ниже графика функции $y = g(x)$, если:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 27\sqrt{x}$; 2) $f(x) = 64\sqrt{-x}$, $g(x) = x^2$; 3) $f(x) = \sqrt{5-x}$, $g(x) = x-3$.

189. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y-2}{x+3}} = 1, \\ xy = 36; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2, \\ x + y = 26; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6}, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$



Упражнения для повторения

190. Вычислите: 1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$; 2) $(-8)^2 - (-5)^3 - 4^5$;

3) $3^{-1} + (-2)^{-2}$; 4)

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} - 3^{-2}$; 5) $(0,2)^{-2} + (0,5)^{-3}$; 6) $(-0,1)^{-3} - (-0,2)^{-3}$.

191. Вычислите:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)$; 2) $(0,4)^6 \cdot (0,4)^{-9}$; 3) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^6 \cdot (0,8)^{-2}$;

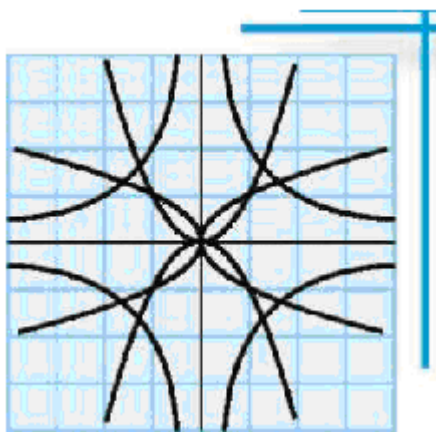
4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-6} : (0,6)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$; 5) $(7^2)^6 : (7^3)^4$; 6) $\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^{-6}\right)^8 : \left(\left(-\frac{5}{3}\right)^7\right)^7$.

192. Запишите результат в стандартном виде:

1) 17000^2 ; 2) $300\,000^3$; 3) $0,0002^4$; 4) $0,005^4$; 5) 3000^{-3} ; 6) $0,003^{-4}$.

193. Выполните действия:

1) $\left(\frac{x^6}{y^{10}}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{a^{-3}}{b^{-4}}\right)^{-11}$; 3) $\left(\frac{3c^5}{2d^{-3}}\right)^4$; 4) $\left(\frac{-3m^{-12}n}{p^3}\right)^4$; 5) $\left(\frac{-1,5x^{-1}}{y^3z^{-4}}\right)^{-3}$; 6) $\left(-\frac{a^6}{0,1b^{-3}c}\right)^{-4}$.



§ 12. Степень с рациональным показателем

В данном параграфе с помощью операции извлечения корня n -й степени определяются степени с дробным показателем, рассматриваются их свойства и применение.



Из определения арифметического корня вытекает, что если m — целое число, n — натуральное и m делится на n , то при $a > 0$ справедливо равенство:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Например, $\sqrt[5]{3^{35}} = 3^7$, так как $(3^7)^5 = 3^{35}$. С другой стороны, $3^7 = 3^{\frac{35}{5}}$. Итак, $\sqrt[5]{3^{35}} = 3^{\frac{35}{5}}$.

Вполне естественным является желание формулу $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ принять в качестве определения степени с рациональным показателем, то есть для произвольных целых m и натуральных $n > 1$.

Степенью положительного числа a с рациональным показателем $\frac{m}{n}$,

где m — целое число, n — натуральное, большее 1, называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Обозначение степени положительного числа a с рациональным показателем — обычное: $a^{\frac{m}{n}}$. По определению, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Так,

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2; \quad 27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{1}{9}.$$



Условие $a > 0$ вызвано тем, что степени с рациональными показателями определены с помощью операции извлечения корня, которая не всегда выполняется для отрицательных чисел.

Степень с основанием, равным нулю, определяется лишь для положительного дробного показателя. По определению, $0^{\frac{m}{n}} = 0$, где $m, n \in \mathbb{N}$: $0^{\frac{2}{3}} = 0^{0,5} = 0$.

Степени с рациональными показателями обладают теми же свойствами, что и степени с целыми показателями.

Если p и q — рациональные числа и a — положительное число, то справедливы соотношения:

Свойство 1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Свойство 2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.

Свойство 3. $(a^p)^q = a^{pq}$.

Если p — рациональное число, a и b — положительные числа, то справедливы соотношения:

Свойство 4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$.

Свойство 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Из свойства 1 вытекает, что для $a > 0$ и $p \in \mathbf{Q}$ выполняется равенство:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Действительно, $a^p \cdot a^{-p} = a^{p+(-p)} = a^0 = 1$.

Из свойства 3 вытекает, что для $a > 0$, $p \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ выполняется равенство:

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}.$$

С помощью указанных свойств преобразовывают выражения, содержащие степени с рациональными показателями, и вычисляют их значения.

Например, $81^{\frac{3}{4}} : 81^{\frac{4}{5}} = 81^{\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = 81^{-\frac{1}{20}} = (3^4)^{-\frac{1}{20}} = 3^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$.

Пример 1. Вычислить: $\sqrt[4]{250} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{3}{4}}$.

□ Воспользуемся определением степени с дробным показателем и свойствами (1) и (2):

$$\sqrt[4]{250} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2 \cdot 5^3} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{3}{4}} = \frac{2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{1}{4} - (-\frac{3}{4})} \cdot 5^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10. \blacksquare$$

Пример 2. Выполнить действия $\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$.

□ Согласно свойствам 4 и 5 степени с дробным показателем имеем:

$$\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{12 \cdot 6}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2. \blacksquare$$

Действия над степенями с целыми показателями используются при вычислениях с приближенными данными, записанными в стандартной форме. Значение a^p удобно вычислять с помощью калькуляторов.

Мы научились производить действия над степенями с дробными показателями. Иногда, если придется производить действия над корнями, проще записать корни в виде степеней с дробными показателями и воспользоваться их свойствами.

Пример 3. Выполнить действия: 1) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$; 2) $\sqrt{x} : \sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$.

□ Если бы мы выполняли действия непосредственно над корнями, нам пришлось бы в первых двух заданиях приводить корни к общему показателю:

$$1) \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^4} \cdot \sqrt[12]{x^3} = \sqrt[12]{x^4 \cdot x^3} = \sqrt[12]{x^7}; \quad 2) \sqrt{x} : \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^3} : \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{x^3 : x^2} = \sqrt[6]{x};$$

$$3) \sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}.$$

Использование степеней с дробными показателями иногда упрощает преобразования. Учитывая, что в первых двух примерах $x \geq 0$, будем иметь:

1)

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{x^7}; \quad 2) \sqrt{x} : \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}.$$

$$3) \text{ Если } x \geq 0, \text{ то } \sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}. \text{ Если же } x < 0, \text{ то}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \left((-x)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = (-x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-x)}. \text{ Таким образом, } \sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{|x|}. \text{ Как}$$

видим, следует быть осторожным при переходе к степеням с дробными показателями. ■

Ответ: 1) $\sqrt[12]{x^7}$; 2) $\sqrt[6]{x}$; 3) $\sqrt[3]{|x|}$.

Рассмотрим теперь пример, в котором применяются преобразования выражений, содержащих степени с дробными показателями.

Пример 4. Упростить выражение $\frac{m^{0,9} + n^{2,4}}{m^{0,6} - m^{0,3}n^{0,8} + n^{1,6}}$.

□ Воспользовавшись свойством 3 степени с дробным показателем, бу-

дем иметь:
$$\frac{m^{0,9} + n^{2,4}}{m^{0,6} - m^{0,3}n^{0,8} + n^{1,6}} = \frac{(m^{0,3})^3 + (n^{0,8})^3}{(m^{0,3})^2 - m^{0,3}n^{0,8} + (n^{0,8})^2} = m^{0,3} + n^{0,8}.$$
 Обращаем



внимание на то, что полученное равенство

$$\frac{m^{0,9} + n^{2,4}}{m^{0,6} - m^{0,3}n^{0,8} + n^{1,6}} = m^{0,3} + n^{0,8}$$

выполняется на множестве положительных значений m и n , то есть в области определения как данной дроби, так и полученного выражения. ■

Ответ: $m^{0,3} + n^{0,8}$.

Свойства 1 - 5 для степеней с произвольными рациональными показателями записаны по аналогии со свойствами степеней с целыми показателями. Но они требуют доказательства, поскольку мы имеем дело с новыми объектами. Докажем, например, свойство 1.

□ Поскольку $p \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{Q}$, то p и q можно представить в виде:

$$p = \frac{m}{k}, q = \frac{n}{k}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — целые числа, } k \text{ — натуральное число, } k \neq 1.$$

Применяя определение степени с дробным показателем, свойства арифметического корня и свойства степени с целым показателем, получим:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{k}} \cdot a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^m} \cdot \sqrt[k]{a^n} = \sqrt[k]{a^m \cdot a^n} = \sqrt[k]{a^{m+n}} = a^{\frac{m+n}{k}} = a^{\frac{m}{k} + \frac{n}{k}} = a^{p+q}.$$

Следовательно, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$. ■

Аналогично доказываются свойства 2 - 5.

$$\square 2. \quad a^p : a^q = a^p \cdot \frac{1}{a^q} = a^p \cdot a^{-q} = a^{p+(-q)} = a^{p-q}.$$

$$3. \quad (a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[nl]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nl}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l}} = a^{pq}.$$

$$4. \quad (ab)^p = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^p \cdot b^p.$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = (ab^{-1})^p = a^p \cdot (b^{-1})^p = a^p \cdot b^{-p} = a^p \cdot \frac{1}{b^p} = \frac{a^p}{b^p}. \quad \blacksquare$$

Если $a > 0$, $b > 0$, n — натуральное число, то из свойств числовых неравенств (см. таблицу 5 в разделе 1) вытекает, что неравенство $a^n > b^n$ выполняется тогда и только тогда, когда $a > b$. Аналогичное свойство имеет степень с положительным рациональным показателем.

Свойство 6. Если r - рациональное число и $a > b > 0$, то неравенство $a^r > b^r$ выполняется при $r > 0$, а неравенство $a^r < b^r$ — при $r < 0$.

□ Если $r > 0$, то r можно записать в виде $r = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Из неравенства $a > b > 0$ и свойств функций степеней с натуральным показателем (см. §11) вытекает, что $a^m > b^m$. Поскольку функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастающая, то отсюда вытекает: $\sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{b^m}$, то есть $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$ или $a^r > b^r$.

Для $r < 0$ доказательство проводится аналогично. Рекомендуем сделать это самостоятельно. ■

Доказанное свойство дает один из способов решения уравнений и неравенств, в которых неизвестная находится в основании степени.

Из свойства 6 методом от противного можно доказать, что если r — рациональное число и $a > b > 0$, то неравенство $a^r > b^r$ выполняется тогда и только тогда, когда $r > 0$.

Свойство 7. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ вытекает, что $a^r > a^s$ при $a > 1$, $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

□ Сначала приведем рациональные числа r и s к общему знаменателю: $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{n}$, где n — натуральное число, а m и p — целые. Из неравенства $r > s$

вытекает, что $m > p$. Если $a > 1$, то $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$ и по свойству степени с целым

показателем $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$, $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{n}}$, $a^r > a^s$. Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично. Рекомендуем сделать это самостоятельно. ■

Пример 5. Решить уравнение:

1) $x^{\frac{4}{3}} = 16$; 2) $x^{\frac{1}{5}} = -2$; 3) $x^{\frac{-2}{3}} = 4$; 4) $x^{\frac{-1}{2}} = 0$; 5) $x^{\frac{3}{4}} = 0$.

□ 1) Решением уравнения $x^{\frac{4}{3}} = 16$ является число $x = 16^{\frac{3}{4}} = 8$. Действительно, возведя обе части равенства $8 = 16^{\frac{3}{4}}$ в степень, равную $\frac{4}{3}$, получим:

$$(8)^{\frac{4}{3}} = 16^{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} = 16^1 = 16. \text{ Других корней уравнение не имеет. Если допустить, что}$$

уравнение имеет корень x_0 , отличный от $16^{\frac{3}{4}}$, то он может быть или меньше $16^{\frac{3}{4}}$, или больше этого числа. Если $x_0 < 16^{\frac{3}{4}}$, то, согласно свойству 6,

$$x_0^{\frac{4}{3}} < \left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = 16. \text{ Получили противоречие. Так же получим противоречие в}$$

случае, когда $x_0 > 16^{\frac{3}{4}}$. Следовательно, уравнение имеет единственный корень $x = 8$.

2) Уравнение $x^{\frac{1}{5}} = -2$ решений не имеет, потому что $x^{\frac{1}{5}} \geq 0$ при любом x .

3) Аналогично решению задания 1) получим: $x = 4^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{8}$.

4) Уравнение $x^{\frac{-1}{2}} = 0$ решений не имеет, поскольку не имеет решений уравнение $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$.

5) Уравнению $x^{\frac{3}{4}} = 0$ удовлетворяет единственное число 0. ■

Ответ: 1) 8; 2) нет решений; 3) $\frac{1}{8}$; 4) нет решений; 5) 0.

Обратите внимание на то, что корни уравнений 1) и 3) получены возведением обеих частей уравнения в степень с показателем, обратным показателю степени при неизвестной величине x .

Пример 6. Решить неравенство:

1) $x^{\frac{4}{3}} > 16$; 2) $x^{\frac{3}{2}} < 8$; 3) $x^{\frac{1}{6}} > -1$; 4) $x^{\frac{3}{4}} < -1$; 5) $x^{\frac{2}{3}} > 4$.

□ 1) Областью определения неравенства является множество неотрицательных вещественных чисел. Обе части неравенства неотрицательные. По-

этому, возводя их в степень $\frac{3}{4}$, получим неравенство

$x > 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$, которое, согласно свойству 6, равносильно данному при условии $x \geq 0$. Поскольку неравенство $x \geq 0$ вытекает из неравенства $x > 8$, то решением данного неравенства является промежуток $(8; +\infty)$.

2) Областью определения неравенства $x^{\frac{3}{2}} < 8$ является множество неотрицательных чисел. Поскольку обе части неравенства неотрицательные, то возводя их в степень $\frac{2}{3}$, получим неравенство $x < 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$, которое равносильно данному при $x \geq 0$. Следовательно, решением исходного неравенства является промежуток $[0; 4)$.

3) Возводить обе части неравенства $x^{\frac{1}{6}} > -1$ в шестую степень нельзя, поскольку обе части его имеют разные знаки. Левая часть неравенства задана при $x \geq 0$ и принимает только неотрицательные значения. Поэтому неравенство выполняется при $x \geq 0$. Следовательно, решением неравенства является промежуток $[0; +\infty)$.

4) Левая часть неравенства $x^{\frac{3}{4}} < -1$ принимает лишь неотрицательные значения, поэтому не существует ни одного значения x , при которых оно выполняется. Следовательно, неравенство не имеет решений.

5) Областью определения неравенства $x^{\frac{2}{3}} > 4$ является множество положительных вещественных чисел. Обе части неравенства положительны. Поэтому, возводя их в степень $-\frac{3}{2}$, получим неравенство $x < 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{8}$, которое, согласно свойству 6, равносильно исходному при условии $x > 0$. Следовательно, решением исходного неравенства является промежуток $\left(0; \frac{1}{8}\right)$. ■

Ответ: $(8; +\infty)$; 2) $[0; 4)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $\emptyset$; 5) $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Другой способ решения рассмотренных уравнений и неравенств заключается в переходе от степени с дробным показателем к корню, то есть в переходе к иррациональному уравнению или неравенству.

Пример 7. Сравнить числа $3^{\frac{2}{3}}$ и $6^{\frac{2}{3}}$.

□ Поскольку $3 < 6$, то, по свойству 6, $3^{\frac{2}{3}} < 6^{\frac{2}{3}}$, и поэтому $\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} > \frac{1}{6^{\frac{2}{3}}}$, то есть

$$3^{-\frac{2}{3}} > 6^{-\frac{2}{3}}. \blacksquare$$

Ответ: $3^{-\frac{2}{3}} > 6^{-\frac{2}{3}}$.

Пример 8. Сравнить числа $\sqrt[5]{27}$ и $3^{\frac{2}{3}}$.

□ Поскольку $\sqrt[5]{27} = 3^{\frac{3}{5}}$ и $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, то, по свойству 7, $3^{\frac{3}{5}} < 3^{\frac{2}{3}}$, то есть

$$\sqrt[5]{27} < 3^{\frac{2}{3}}. \blacksquare$$

Ответ: $\sqrt[5]{27} < 3^{\frac{2}{3}}$.

Иногда при преобразовании выражений, содержащих степени с дробными показателями, области определения левой и правой частей полученных равенств не совпадают. В этих случаях будем считать, что равенство выполняется на пересечении областей определения обеих частей равенства.

Пример 9. Упростить выражение $\frac{n}{m-n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}$.

□ Разложим знаменатель первой дроби на множители:

$$m - n = \left(m^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\right).$$

Общим знаменателем обеих дробей является $m - n$, потому что это выражение делится на знаменатель второй дроби. Запишем данное выражение в виде суммы дробей с одинаковыми знаменателями, для чего числители умножим на дополнительные множители:

$$\frac{n}{m-n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} = \frac{n}{m-n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}\left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)}{m-n}.$$

Выполним сложение дробей с одинаковыми знаменателями, раскроем скобки и приведем подобные члены в числителе, воспользовавшись свойствами 4 и 1 степени с рациональными показателями. В окончательном результате заменим степень с дробным показателем на корень:

$$\frac{n}{m-n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} = \frac{n}{m-n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}\left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)}{m-n} = \frac{n + n^{\frac{1}{2}}\left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)}{m-n} =$$

$$= \frac{n + (nm)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}{m - n} = \frac{n + (nm)^{\frac{1}{2}} - n}{m - n} = \frac{(nm)^{\frac{1}{2}}}{m - n} = \frac{\sqrt{mn}}{m - n}.$$

Заметим, что данное выражение определено при положительных значениях m и n , не равных друг другу, а полученная дробь $\frac{\sqrt{mn}}{m - n}$ — при значениях m и n одного знака, не равных друг другу. Следовательно, равенство $\frac{n}{m - n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{mn}}{m - n}$ выполняется при положительных значениях m и n , не равных друг другу, то есть в области определения данного выражения. ■

Ответ: $\frac{\sqrt{mn}}{m - n}$.



Контрольные вопросы

1. ° Верно ли равенство:

а) $8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{2}{6}}$; б) $8^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{2}{6}}$; в) $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$, $a > 0, k \in \mathbb{N}$?

2. ° Имеет ли смысл выражение: а) $(-3)^{\frac{1}{4}}$; б) $(-3)^{\frac{1}{3}}$; в) 0^0 ; г) $(-3)^0$; д) $3^{-\frac{1}{3}}$?

3. ° Какой знак имеет a^r при $a > 0$ и произвольном рациональном r ?

4. При каком значении n степень a^n не зависит от основания a ?

5. Что можно сказать об основании a , если $a^p = a^q$, $p \neq q$?

6. Каково решение уравнения: а) $x^{\frac{1}{4}} = 3$; б) $x^{\frac{2}{5}} = 2$; в) $(x+1)^{\frac{3}{4}} = 8$; г)

$(1-2x)^{\frac{3}{5}} = -2$?

7. Какие из следующих неравенств не имеют решений:

а) $x^{\frac{1}{4}} \leq 0$; б) $x^{-\frac{1}{4}} \leq 0$; в) $x^{\frac{1}{3}} \leq 0$; г) $x^{-\frac{1}{3}} \geq -1$; д) $x^{-\frac{4}{3}} \geq -1$?

8. Верно ли неравенство:

а) $5^{1,5} > 2^{1,5}$; б) $5^{-1,5} > 2^{-1,5}$; в) $5^{-0,5} > 2^{-0,5}$; г) $5^{0,5} > 2^{0,5}$?

9. Каким из следующих неравенств удовлетворяют все неотрицательные числа:

а) $x^{\frac{1}{4}} \geq 0$; б) $x^{-\frac{1}{4}} \geq 0$; в) $x^{\frac{1}{3}} \geq 0$; г) $x^{-\frac{1}{3}} \leq -1$; д) $x^{-\frac{4}{3}} \leq -1$?

10. Равносильны ли неравенства:

а) $\sqrt[4]{x} < 1$ и $x^{\frac{1}{4}} < 1$; б) $\sqrt[4]{x} < 1$ и $x^{-\frac{1}{4}} > 1$; в) $\sqrt[3]{x} < 1$ и $x^{\frac{1}{3}} < 1$; г) $x^{\frac{1}{3}} < 1$ и $x^{-\frac{1}{3}} > 1$?

11. * При каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

а) $(x-1)^{\frac{1}{2}} = a$; б) $(x-a)^{\frac{1}{2}} = 3$; в) $(x-1)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{a}$?

12. При каких значениях b справедливо равенство: а) $b\sqrt{b} = b^{\frac{3}{2}}$; б) $b\sqrt[3]{b} = b^{\frac{4}{3}}$?

13. Как вычислить значение $157^{\frac{1}{4}}$ на калькуляторе, который выполняет только четыре арифметических действия и извлечение квадратного корня?

14. При каких значениях c справедливо равенство: а) $\left(c^{\frac{1}{6}}\right)^6 = c$; б) $(c^6)^{\frac{1}{6}} = c$;

в) $\left(c^{\frac{1}{8}}\right)^8 = -c$; г) $(c^6)^{\frac{1}{6}} = |c|$; д) $(c^{0,3})^{\frac{1}{3}} = -c$; е) $(c^{-6})^{\frac{1}{6}} = |c|$?

15. Какова область определения выражения $a^{\frac{2}{5}} - (abc)^{-\frac{1}{5}}$?

Задачи

194°. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1) $5^{\frac{3}{4}}$; $7^{\frac{3}{2}}$; $4^{\frac{2}{3}}$; $3^{0,5}$; $10^{-0,2}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}$; $b^{\frac{5}{2}}$; $c^{0,8}$; $d^{-1,4}$; $m^{\frac{2}{5}}$;

3) $(2x)^{\frac{1}{4}}$; $2x^{\frac{1}{4}}$; $xy^{\frac{5}{6}}$; $mn^{\frac{7}{3}}$; $-p^{-2,5}$;

4) $(a-b)^{\frac{3}{4}}$; $a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}$; $2(m+n)^{\frac{1}{6}}$; $3p^{\frac{3}{4}} - aq^{\frac{3}{4}}$.

195°. Запишите в виде степени с рациональным показателем выражение:

1) $\sqrt[4]{7^3}$; 2) $\sqrt[6]{3^2}$; 3) $\sqrt[3]{0,1}$; 4) $\sqrt[7]{a^3}$, $a \geq 0$; 5) $\sqrt[4]{a^{-3}}$.

196°. Запишите выражение в виде арифметического корня из числа:

1) $3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$; 2) $2^{1,2} : 2^{0,7}$; 3) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}} : b^{\frac{5}{6}}$; 5) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$.

197°. Вычислите без использования вычислительных средств:

1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $32^{\frac{3}{5}}$; 3) $16^{0,25} \cdot 0,125^{-3}$.

198. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{4}{3}}$, $\left(\frac{9}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 3)

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$, $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{15}}$, $\left(\frac{9}{25}\right)^{-4}$.

199. Представьте в виде степени:

1) $\left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{9}} \cdot b^{\frac{7}{12}}$; 2) $a^{\frac{5}{6}} : \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{8}}$.

200. Упростите выражение:

$$1) \circ \frac{4a-b}{2a^2-b^2}; \quad 2) \circ \frac{a-b}{a^3-b^3}; \quad 3) \left(c^{-\frac{3}{7}} y^{-0.4} \right)^3 \cdot c^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0.2}; \quad 4) \left(x^{-\frac{2}{3}} y^{0.6} \right)^2 : \left(x^{-\frac{1}{2}} y^{-0.2} \right)^4.$$

201. Упростите выражение:

$$1) \frac{c-d}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}} - \frac{c+(cd)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}}}; \quad 2) \frac{p-q}{p^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}} - \frac{p-q}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}}; \quad 3) \frac{1-a^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1};$$

$$4) \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} - \frac{xy^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x^2-4xy}{x-y}; \quad 5) \frac{3mn-n^2}{m-n} - \frac{n^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}} - \frac{m^{\frac{1}{2}}n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}.$$

202. Упростите выражение:

$$1) \frac{x-y}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}} - \frac{x+y}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}; \quad 2) \frac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} - \frac{m-n}{m^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}; \quad 3) \frac{p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}}{p-q} - \frac{1}{p^{\frac{1}{3}}-q^{\frac{1}{3}}};$$

$$4) \frac{c^{\frac{1}{3}}-d^{\frac{1}{3}}}{c+d} + \frac{1}{c^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{2}{3}}}; \quad 5) \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} + \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}};$$

$$6) \frac{(x-y)^2}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2-y^2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)}; \quad 7) \frac{1-u^{\frac{2}{5}}v^{\frac{2}{5}}}{u^{-\frac{1}{5}}-u^{\frac{2}{5}}v^{\frac{1}{5}}} + \frac{u^{\frac{3}{5}}-v^{\frac{3}{5}}}{u^{\frac{2}{5}}+u^{\frac{1}{5}}v^{\frac{1}{5}}+v^{\frac{2}{5}}}.$$

203. Вычислите:

$$1) 3^{0,082}; \quad 2) 2,19^{\frac{3}{7}}; \quad 3) 0,67^{1,83}; \quad 4) 15,7^{\frac{1}{5}}; \quad 5) \sqrt[3]{8,345}; \quad 6) \sqrt[5]{(2,36)^3}.$$

204. Сравните без использования вычислительных средств:

$$1) 3^{\frac{2}{3}} \text{ и } 4^{\frac{2}{3}}; \quad 2) 7^{\frac{1}{3}} \text{ и } 7^{\frac{1}{4}}; \quad 3) 0,2^{\frac{3}{4}} \text{ и } 0,4^{\frac{3}{4}}; \quad 4) 5^{\frac{1}{5}} \text{ и } 5^{\frac{2}{10}}.$$

205. Объем куба равняется V . Воспользовавшись степенью с дробным показателем, выразите через объем V :

- 1) длину ребра куба;
- 2) площадь S грани куба;
- 3) площадь поверхности P куба.



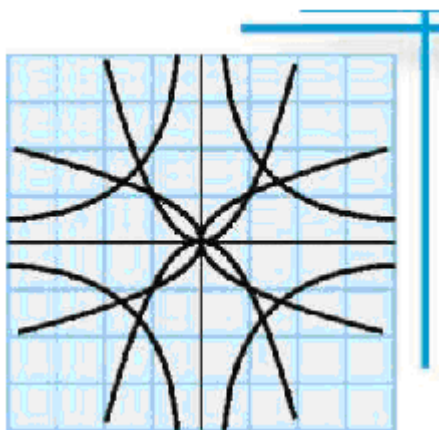
Упражнения для повторения

206. Постройте график функции: 1) $y = \frac{3}{x+2}$; 2) $y = \frac{x}{x+2}$;
3) $y = 3\sqrt{x-2}$; 4) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; 5) $y = \sqrt[4]{x-1}$; 6) $y = x^5 + 2$.

207. Найдите множества значений функций, перечисленных в задаче 206.

208. В каких точках графики функций, перечисленных в задаче 206, пересекаются:

- 1) оси координат;
- 2) биссектрисы координатных углов?



§ 13. Степенные функции с рациональными показателями

Понятие степени с рациональным показателем дает возможность рассмотреть степенные функции, имеющие вид $y = x^p$, где p — произвольное рациональное число. Такие функции описывают немало реальных процессов и явлений, в частности, многие экспериментально найденные зависимости имеют вид степенной функции с дробным показателем.



В предыдущем разделе рассматривалась функция $y = \sqrt{x}$. Ее областью определения является промежуток $[0; +\infty)$. По

определению степени с дробным показателем $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, причем, степень $x^{\frac{1}{2}}$ определена для всех неотрицательных значений x . Следовательно, мы имеем две равные функции

$y = \sqrt{x}$ и $y = x^{\frac{1}{2}}$: у них совпадают области определения и при каждом значении x из области определения они принимают одни и те же значения. Таким образом, функция $y = x^{\frac{1}{2}}$ обладает теми же свойствами и имеет тот же график, что и функция $y = \sqrt{x}$ (рис. 178).

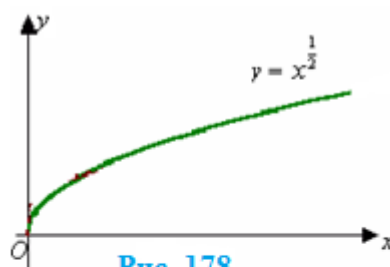


Рис. 178

Функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ равняется функции $y = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$. Следовательно, они имеют одни и те же свойства и графики (черт. 179).

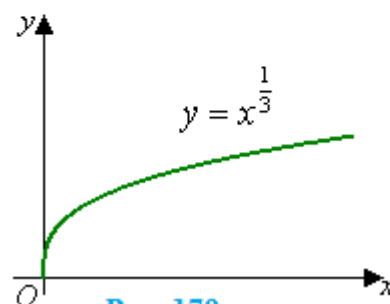


Рис. 179

Вообще, график произвольной степенной функции $y = x^p$ с рациональным показателем $0 < p < 1$ похож на график

функции $y = x^{\frac{1}{2}}$. Поэтому она обладает теми же свойствами, что и эта функция: она определена на промежутке $[0; +\infty)$, возрастающая, непрерывная. Ее график проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

Учитывая графики функций $y = x^2, x \geq 0$; $y = x^3, x \geq 0$, (они изображены на рис. 180, 181) можно предположить, что одинаковый вид имеют графики произвольных степенных функций $y = x^p$ с рациональными показателями $p > 1$. Они обладают такими свойствами: определены при $x \geq 0$, возрастающие, неотрицательные, непрерывные в области определения, имеют один нуль $x = 0$, их графики проходят через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

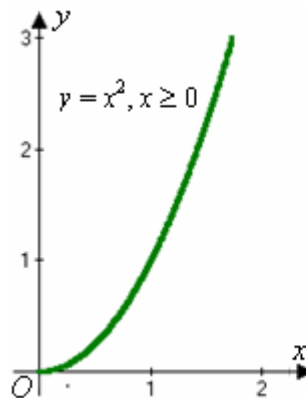


Рис. 180

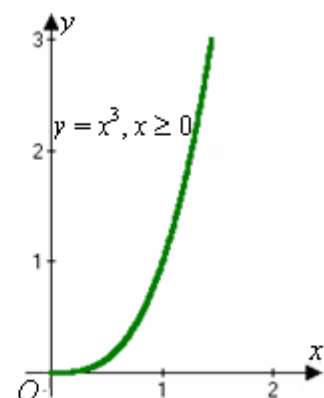


Рис. 181

Рассмотрим теперь примеры степенных функций с отрицательными показателями.

Мы уже неоднократно обращались к функции $y = \frac{1}{x}$. Ограничим теперь ее область определения положительными значениями аргумента, то есть рассмотрим функцию

$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, x > 0$. Ее график изображен на рис. 182.

Аналогичный вид имеют графики функции $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, x > 0$ (рис. 183)

и любой степенной функции $y = x^p$ с отрицательным показателем степени.

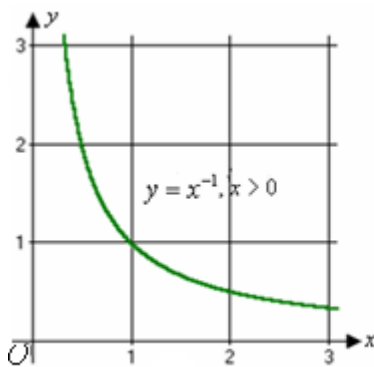


Рис. 182

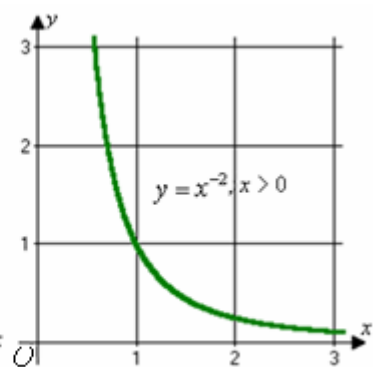


Рис. 183

Основные свойства этих функций: они определены при $x > 0$, убывающие, положительные, непрерывные в области определения, не имеют нулей, их графики проходят через точку $(1; 1)$.

Пример 1. Дана функция $y = (x - 2)^{1,4}$.

- 1) Указать ее область определения.
- 2) Построить ее график.
- 3) Определить количество корней уравнения $(x - 2)^{1,4} = (x - 3)^{-0,4}$.
- 4) * Построить график функции $y = (2 - x)^{0,25}$.

□ 1) Область определения функции находится из неравенства $x - 2 \geq 0$, то есть $D(y) = [2; +\infty)$.

2) График данной функции строится по схеме $y = x^{1,4} \rightarrow y = (x - 2)^{1,4}$. Он изображен на рис. 184.

3) Построим на одном рисунке графики функций $(x - 2)^{1,4}$ и $y = (x - 3)^{-0,4}$ (черт. 185). Графики имеют одну общую точку, уравнение имеет один корень.

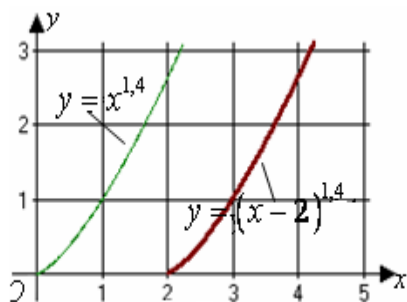


Рис. 184

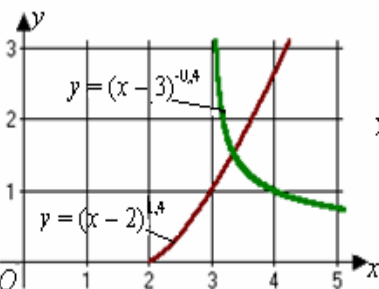


Рис. 185

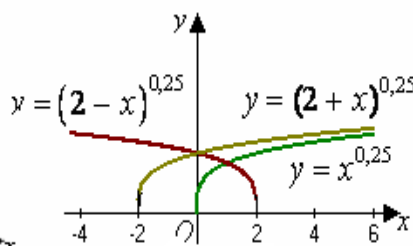


Рис. 186

4) График функции $y = (2 - x)^{0,25}$ будем строить по схеме $y = x^{0,25} \rightarrow y = (2 + x)^{0,25} \rightarrow y = (2 - x)^{0,25}$ (рис. 186). ■



В пользу вывода о том, что одинаковый вид имеют графики произвольных степенных функций $y = x^p$ с рациональными показателями $p > 1$, которые определены при $x \geq 0$, свидетель-

ствует график функции $y = x^{\frac{3}{2}}$, который построим на основании исследования.

Область определения этой функции — промежуток $[0; +\infty)$. Она возрастающая. Действительно, возьмем произвольные точки x_1 и x_2 из этого промежутка, такие что $x_1 < x_2$. Согласно свойству 6 степеней с дробными показателями (см. § 11), $y(x_2) > y(x_1)$. График функции $y = x^{\frac{3}{2}}$ проходит через начало координат и точку с координатами $(1; 1)$. Функция принимает только неотрицательные значения. Для уточнения графика нетрудно установить, что он проходит через точки с координатами $(2; 2\sqrt{2})$, $(4; 8)$. По этим данным схематически строим график (рис. 187).

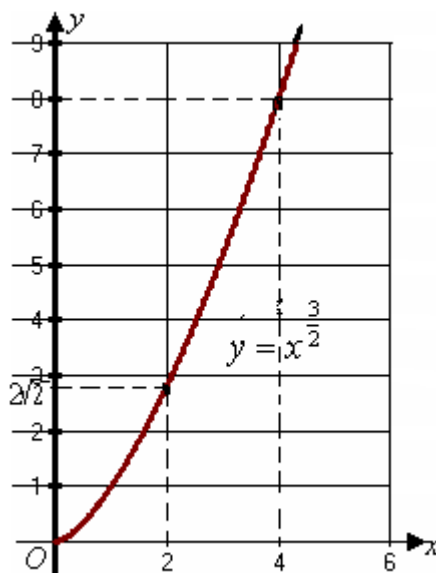


Рис. 187

Обобщая рассмотренный материал, можно представить свойства степенных функций с рациональными показателями в таблице 28.

Таблица 28.

	$y = x^p, p > 0$	$y = x^p, p < 0$
1.	Область определения — промежуток $[0; +\infty)$	Область определения — промежуток $(0; +\infty)$
2.	Функция имеет один нуль $x = 0$	Функция не имеет нулей

3.	Функция не является ни чётной, ни нечётной	
4.	Функция является положительной при $x > 0$	
5.	Функция возрастает в области определения	Функция убывает в области определения
6.	Множество значений — промежуток $[0; +\infty)$	Множество значений — промежуток $(0; +\infty)$
7.	Функция является непрерывной в области определения	

На рис. 188 – 190 изображены графики этих функций при различных значениях p .

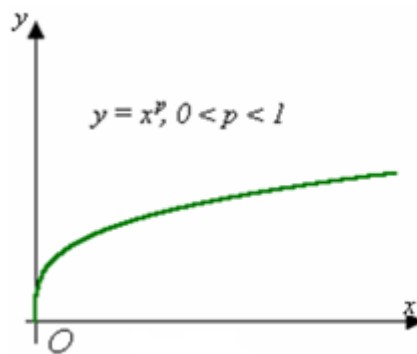


Рис. 188

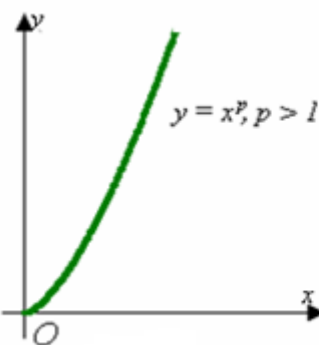


Рис. 189



Рис. 190

Выше мы сформулировали свойства степенных функций с рациональным показателем, основываясь на свойствах степенных функций с натуральными показателями, и функции $y = \frac{1}{x}$ с соответствующими областями определения. Эти свойства хорошо иллюстрируются приведенными графиками. Рекомендуем самостоятельно провести необходимые рассуждения.

Докажем аналитически свойства 4 и 5 о положительности и монотонности степенной функции $y = x^p$, $x > 0$.

□ Если $p = n$ является натуральным числом, то $x^n > 0$, как произведение положительных чисел. В случае $p = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа,

то $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} > 0$, как арифметический корень n -й степени. Если $p = -n$, где n — натуральное число, то $x^p = x^{-n} = \frac{1}{x^n} > 0$, как отношение двух положительных чисел. В случае $p = 0$ имеем: $x^p = x^0 = 1 > 0$.

Свойство 5, или монотонность степенной функции вытекает из свойства 6 степеней с рациональными показателями. Если $0 < x_1 < x_2$, $p > 0$, то $x_1^p < x_2^p$, то есть функция $y = x^p$ возрастает. Аналогично, при $p < 0$ выполняется неравенство $x_1^p > x_2^p$, и поэтому функция $y = x^p$ убывает. ■

Пример 2. Зависимость максимальной интенсивности осадков от их длительности в некоторой местности описывается формулой:

$$I = 13,1 \cdot t^{-0,56},$$

где I — максимальная интенсивность осадков, мм/ч; t — длительность осадков, ч. Найти:

1) максимальную интенсивность осадков при их длительности: 0,5 ч; 1 ч; 2 ч;

2) при какой длительности осадков максимальная интенсивность будет равняться 3,6 мм/ч;

3) при какой длительности осадков выше максимальная интенсивность: при $t_1 = \frac{2}{3}$ ч или при $t_2 = \frac{3}{4}$ ч.

□

$$1) I(0,5) = 13,1 \cdot 0,5^{-0,56} \approx 19,3; \quad I(1) = 13,1 \cdot 1^{-0,56} = 13,1; \quad I(2) = 13,1 \cdot 2^{-0,56} \approx 8,89.$$

2) Запишем уравнение, которое необходимо решить для ответа на вопрос: $13,1t^{-0,56} = 3,6$. Найдем значение выражения, стоящего в левой части и содержащего неизвестную величину: $\frac{13,1}{t^{0,56}} = 3,6$; $t^{0,56} = \frac{13,1}{3,6} \approx 3,64$; $t^{\frac{14}{25}} \approx 3,64$.

Поскольку $\left(t^{\frac{14}{25}}\right)^{\frac{25}{14}} = t^{\frac{14}{25} \cdot \frac{25}{14}} = t$, обе части последнего

равенства возведём в степень $\frac{25}{14}$: $t \approx (3,64)^{\frac{25}{14}} \approx 10,0$. Следовательно, длительность осадков составляет примерно 10 час.

3) Так как функция $y = x^p$ убывающая при $p < 0$ и $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, то $I\left(\frac{2}{3}\right) > I\left(\frac{3}{4}\right)$.

■

Ответ. 1) $\approx 19,3$; $13,1$; $\approx 8,89$; 2) ≈ 10 год.; 3) при $t = \frac{2}{3}$ интенсивность выше.

В рассмотренном примере степенная функция с дробным показателем получена в результате обработки экспериментальных данных. Она моделирует осадки в определенной местности. Подобные примеры применения степенных функций приведены далее в задачах. Степенные функции с дробными показателями являются математическими моделями и других процессов и явлений. Например, если воздух расширяется или сжимается без теплообмена с окружающей средой, то его давление P и объем V связаны формулой $V \cdot P^{-1,4} = C$, где C — некоторая постоянная.

Пример 3. Найти зависимость между x и y , если $x = t^{-\frac{1}{2}}$, $y = t^{\frac{2}{3}}$.

□ Выразим из данных равенств переменную t через x и y , то есть решим данные уравнения относительно t . Для этого возведем обе их части соответственно в степени -2 и $\frac{3}{2}$. Получим: $t = x^{-2}$, $t = y^{\frac{3}{2}}$. Приравняв правые

части последних равенств, будем иметь: $x^{-2} = y^{\frac{3}{2}}$. Осталось решить полученное уравнение относительно x : $x = \left(y^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = y^{-\frac{3}{4}}$. ■

Ответ: $x = y^{-\frac{3}{4}}$.



Исследование степенных функций с рациональными показателями можно продолжить. Выясним, как ведут себя степенные функции $y = x^r$ с рациональными показателями с различными значениями r при неограниченном приближении аргумента к нулю и при неограниченном росте аргумента.

Если число r является положительным, то при неограниченном приближении x к 0, соответствующие значения функции $y = x^r$ неограниченно приближаются к 0; при неограниченном росте x соответствующие значения функции $y = x^r$ неограниченно растут.

В отличие от функций $y = x^r$ с положительными r функции $y = x^r$ с отрицательными r не определены в точке $x = 0$. Поскольку значения аргумента x положительны, то, когда они приближаются к нулю, значения функции становятся как угодно большими. График функции неограниченно поднимается вверх, приближаясь к оси y . Таким образом, прямая $x = 0$ является **вертикальной асимптотой графика**. Если значения аргумента неограниченно растут, то значения функции $y = x^r$ при $r < 0$ уменьшаются, приближаясь к нулю. График функции как угодно близко приближается к оси x . Прямая $y = 0$ является **горизонтальной асимптотой**. Таким образом, график функции $y = x^r$ при $r < 0$ имеет две асимптоты.

Эти свойства степенных функций легко понять, рассматривая их графики, представленные на рис. 181 - 183.

Из свойства 7 степеней с рациональными показателями вытекает, что для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ вытекает, что $x^r > x^s$ при $x > 1$, $x^r < x^s$ при $0 < x < 1$. Потому для любых рациональных чисел r и s график функции $y = x^r$ лежит выше графика функции $y = x^s$ при $x > 1$ и ниже графика этой функции при $0 < x < 1$ (рис. 191 - 192).

Как мы отмечали выше, областью определения степенных функций с рациональными показателями является множество положительных чисел (или множество неотрицательных чисел для положительных значений показателя степени). Иногда можно естественно расширить область определения функции степени, добавив к ней и отрицательные значения аргумента. При этом будем получать другие функции, в некоторых случаях уже знакомые нам.

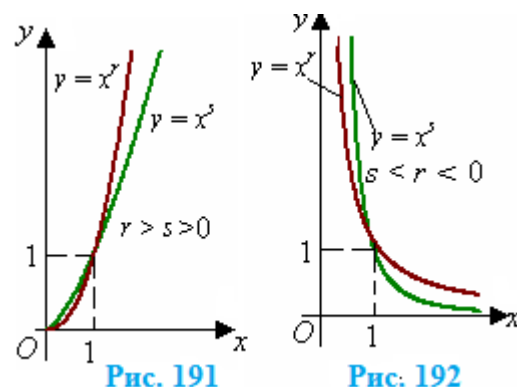


Рис. 191

Рис. 192

Пример 4. Построить нечётную функцию, которая совпадает с функцией $y = x^{\frac{1}{3}}$ при неотрицательных значениях аргумента. Построить ее график.

□ Областью определения искомой функции является вся координатная прямая. В связи с нечётностью искомой функции при противоположных значениях аргумента она принимает противоположные значения. Следовательно, принимая во внимание то, что степенные функции с дробными показателями определены для положительных значений аргумента, искомая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}, & \text{если } x \geq 0, \\ -(-x)^{\frac{1}{3}}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись определением степени с дробным показателем, эту функцию можно записать в таком виде: $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ее график изображен на рис. 193. ■

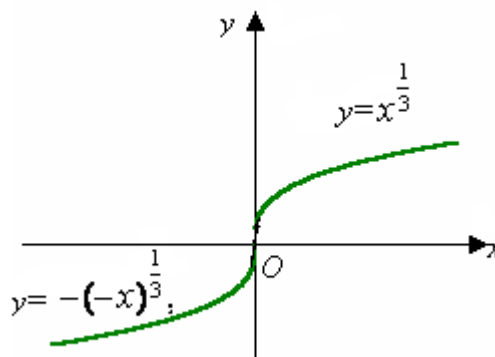


Рис. 193

Пример 5. Построить чётную функцию, которая совпадает с функцией $y = x^{\frac{2}{3}}$ при неотрицательных значениях аргумента. Построить ее график.

□ Областью определения искомой функции является вся координатная прямая. В связи с её чётностью при противоположных значениях аргумента она принимает равные значения. Следовательно, принимая во внимание то, что степенные функции с дробными показателями определены для положительных значений аргумента, искомая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & \text{яко } x \geq 0, \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & \text{яко } x < 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись понятием арифметического корня третьей степени, эту функцию можно записать в таком виде: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Ее график изображен на рис. 194. ■

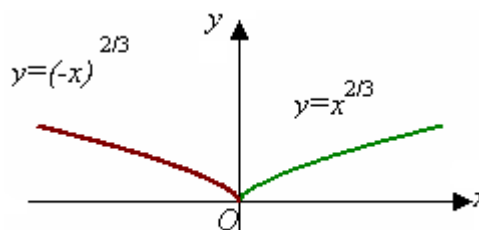


Рис. 194



Контрольные вопросы

1. ° Пересекает ли график функции $y = x^{\frac{3}{4}}$ прямая:
 - а) $y = 0$; б) $y = 1$; в) $y = -1$; г) $x = 0$; д) $x = 1$; е) $x = -1$?
2. ° Пересекает ли график функции $y = x^{\frac{3}{2}}$ прямая:
 - а) $y = 0$; б) $y = 1$; в) $y = -1$; г) $x = 0$; д) $x = 1$; е) $x = -1$?

3. ° Какие из следующих значений может принимать функция $y = x^{\frac{3}{5}}$: 0; 100; -2?

4. ° Какое из чисел больше:

а) $\left(\frac{7}{8}\right)^{2,5}$ или $\left(\frac{7}{9}\right)^{2,5}$; б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2,5}$ или $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2,5}$; в) $(0,292)^{-0,5}$ или $(0,293)^{-0,5}$?

5. Какое из чисел больше:

а) $(3\sqrt{2})^{\frac{3}{4}}$ или $(2\sqrt{5})^{\frac{3}{4}}$; б) $(\sqrt{28})^{\frac{3}{4}}$ или $(2\sqrt{7})^{\frac{3}{4}}$; в) $(5\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}$ или $(4\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}$?

6. Является ли функция $y = x^p$ возрастающей или убывающей, если:

а) $p = 1,6$; б) $p = 0,9$; в) $p = -0,7$?

7. Какие из чисел больше 1 и какие меньше 1:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1,7}$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1,7}$; в) $\left(\frac{5}{11}\right)^{\frac{3}{5}}$; г) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{7}}$; д) $\left(\frac{13}{7}\right)^{-0,7}$; е) $\left(\frac{11}{9}\right)^{2,3}$?

8. Сколько решений имеет уравнение: а) $x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{3}{4}}$; б) $x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{7}{5}}$?

9. Каково множество значений функции:

а) $y = x^{\frac{5}{3}}$; б) $y = x^{\frac{3}{4}}$; в) $y = x^{\frac{2}{3}}$; г) $y = x^{\frac{7}{5}}$?

10. Верно ли, что функция $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ обладает следующими свойствами:

а) в области определения можно найти отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков; б) является чётной; в) существует точка, в которой функция принимает наименьшее значение?

11. * Как ведет себя при неограниченном приближении аргумента к нулю функция:

а) $y = x^{\frac{5}{3}}$; б) $y = x^{\frac{3}{4}}$; в) $y = x^{\frac{2}{3}}$; г) $y = x^{\frac{7}{5}}$?

12. * Как ведет себя при неограниченном возрастании аргумента функция:

а) $y = x^{\frac{5}{3}}$; б) $y = x^{\frac{3}{4}}$; в) $y = x^{\frac{2}{3}}$; г) $y = x^{\frac{7}{5}}$?

13. * Имеет ли горизонтальную или вертикальную асимптоту график функции:

а) $y = x^{\frac{5}{3}}$; б) $y = x^{\frac{3}{4}}$; в) $y = x^{\frac{2}{3}}$; г) $y = x^{\frac{7}{5}}$?

Задачи

209°. Проходит ли график функции $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ через точку с координатами:

1) (8; 4); 2) (4; 8); 3) $(2\sqrt{2}; 2)$; 4) $(2; 2\sqrt{2})$?

210°. Найдите точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат, если:

1) $f(x) = (x-1)^{\frac{4}{3}}$; 2) $f(x) = (x+2)^{\frac{4}{3}}$; 3) $f(x) = (x+1)^{\frac{4}{3}}$; 4) $f(x) = (x-2)^{\frac{4}{3}}$.

211°. Найдите область определения функции:

1) $y = (x+3)^{\frac{1}{5}}$; 2) $y = (x+3)^{\frac{1}{5}}$; 3) $y = (3-x)^{\frac{1}{4}}$; 4) $y = (5-x)^{\frac{7}{5}}$.

212°. Укажите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном промежутке, если:

1) $f(x) = x^{\frac{5}{4}}, [1; 16]$; 2) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}}, [1; 16]$; 3) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}, [8; 27]$; 4) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}, [8; 27]$.

213. Укажите множество значений функции:

1) $y = (x+3)^{\frac{1}{5}}$; 2) $y = (x+3)^{\frac{1}{5}}$; 3) $y = (3-x)^{\frac{1}{4}}$; 4) $y = (5-x)^{\frac{7}{5}}$.

214°. Постройте схематично график функции:

1)

$y = (x+1)^{\frac{5}{3}}$; 2) $y = x^{\frac{3}{4}} - 2$; 3) $y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = x^{\frac{7}{5}} + 1$; 5) $y = (x+2)^{\frac{6}{5}} - 1$.

215. Постройте схематично график функции:

1) $y = -x^{\frac{5}{3}}$; 2) $y = (-x)^{\frac{3}{4}}$; 3) $y = (-x)^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = -(-x)^{\frac{7}{5}}$; 5) $y = |x|^{\frac{5}{3}}$.

216*. Постройте схематично график функции:

1) $y = (|x|+1)^{\frac{2}{3}}$; 2) $y = (1-|x|)^{\frac{4}{3}}$; 3) $y = -(2-|x|)^{\frac{3}{4}}$; 4) $y = (1-|x+1|)^{\frac{5}{6}}$.

217. Известно, что $81 < x < 256$. В каких границах изменяются значения выражения:

1) $x^{0,25}$; 2) $x^{0,5}$; 3) $x^{0,75}$; 4) $x^{-0,25}$; 5) $x^{-0,5}$; 6) $x^{1,25}$; 7) $3x^{0,25} + 5x^{0,75}$.

218. Определите знак числа:

1) $\left(3^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{3}}\right)\left(0,5^{\frac{5}{6}} - 1\right)$; 2) $\frac{3^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{3}}}{1 - 0,5^{\frac{5}{6}}}$; 3) $\frac{(1,2011)^{0,6} - 1}{1 - (1,2011)^{-0,6}}$; 4) $2 - 0,2011^{-0,3} - 1,2011^{0,4}$.

219. Скорость резания и прочность резца связаны зависимостью: $v = \frac{350}{T^{0,2}}$, где v — скорость резания, м/мин; T — прочность резца (время между двумя переточками), мин.

1) Найдите скорость резания при $T = 40$ мин.

2) Какой будет прочность резца при скорости резания 400 м/мин?

3) Найдите зависимость прочности резца от скорости резания.

4) Существует ли оптимальная скорость резания, то есть скорость, для которой прочность резца наибольшая?

220. Найти зависимость между x и y , если:

1) $x = t^{-\frac{1}{3}}, y = t^{\frac{1}{3}}$; 2) $x = t^{\frac{3}{4}}, y = t^{\frac{1}{4}}$; 3) $x = t^{\frac{3}{4}}, y = t^{\frac{2}{3}}$.

221*. Постройте график нечётной функции f , зная, что её значения при $x \geq 0$ могут быть вычислены по формуле:

1) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$; 2) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$; 4) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$.

222*. Постройте график чётной функции f , зная, что её значения при $x \geq 0$ могут быть вычислены по формуле:

1) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$; 2) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$; 4) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$.

Готовимся к тематическому оцениванию по теме "Степенные функции"

Задание для самоконтроля

1. Можно ли утверждать, что промежуток $(-\infty; +\infty)$ является естественной областью определения функции:

а) $y = x^4$; б) $y = x^{-3}$; в) $y = x^n, n \in \mathbf{N}$; г) $y = x^n, n \in \mathbf{Z}$?

2. При каких целых значениях n функция $y = x^n$:

а) возрастает;

б) убывает;

в) возрастает только при положительных значениях x ;

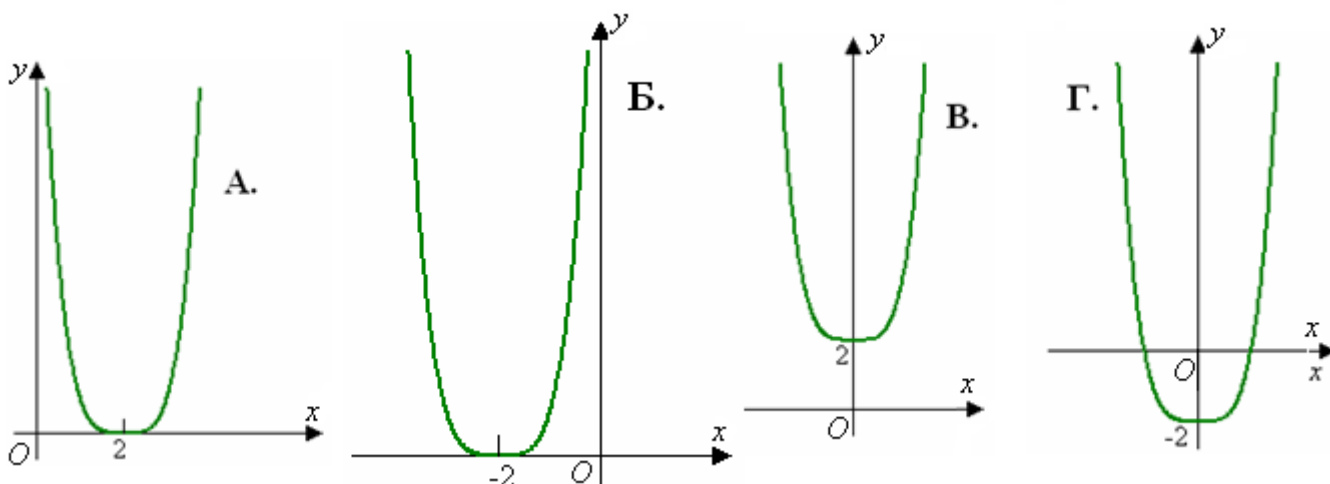
г) убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

д) возрастает при отрицательных значениях x ?

3. Можно ли утверждать, что промежуток $(-\infty; +\infty)$ является множеством значений функции:

а) $y = x^4$; б) $y = x^3$; в) $y = x^{-3}$; г) $y = x^n, n \in \mathbf{N}$; д) $y = x^n, n \in \mathbf{Z}$?

4. На каком рисунке изображен график функции $y = (x + 2)^4$?



5. При каких значениях x график функции $y = x^4$ расположен выше графика функции: а) $y = x^2$; б) $y = x^6$?
6. При каких значениях x график функции $y = x^3$ расположен выше графика функции: а) $y = x$; б) $y = x^5$?
7. Сколько решений имеет уравнение:
а) $x^{2k} = a, a > 0, k \in \mathbb{N}$; б) $x^{2k} = a, a < 0, k \in \mathbb{N}$;
в) $x^{2k+1} = a, a > 0, k \in \mathbb{N}$; г) $x^{2k+1} = a, a < 0, k \in \mathbb{N}$?
8. Возрастающей или убывающей является последовательность:
а) $1^{-2}; 2^{-2}; 3^{-2}; \dots$; б) $1^{\frac{2}{5}}; 2^{\frac{2}{5}}; 3^{\frac{2}{5}}; \dots$; в) $1^3; \left(\frac{1}{2}\right)^3; \left(\frac{1}{3}\right)^3; \dots$?
9. * Сколько решений имеет уравнение: а) $x^3 = (x-1)^4$; б) $x^4 = (x-1)^3$?
10. Существуют ли такие целые значения p , при которых соответствующая функция $y = x^p$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения?
11. Верно ли, что: а) $\sqrt[4]{a^4} = a$; б) $\sqrt[3]{a^3} = a$?
12. Какие из следующих чисел являются иррациональными: а) $\sqrt[3]{16}$; б) $\sqrt[3]{9}$; в) $\sqrt[3]{64}$; г) $\sqrt[4]{16}$; д) $\sqrt[4]{125}$; е) $\sqrt[4]{27}$; ж) $\sqrt[5]{32}$?
13. Что можно сказать о числах n и a , если известно, что существуют два различных значения корня n -й степени из числа a ?
14. Что можно сказать о числах n и a , если известно, что ни одно положительное число не может быть значением корня n -й степени из числа a ?
15. Укажите два последовательных целых числа, между которыми расположено число: а) $\sqrt[3]{4,5}$; б) $\sqrt[3]{15}$; в) $\sqrt[3]{-30}$; г) $\sqrt[4]{20}$; д) $\sqrt[5]{45}$.
16. Укажите значение выражения:
а) $\sqrt[4]{(-4)^4}$; б) $\sqrt[5]{(-2)^5}$; в) $(\sqrt[3]{-3})^3$; г) $-\sqrt[6]{16^3}$; д) $-\sqrt[4]{(-5)^4}$?
17. Сравните числа:
а) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{4^2}$ и $\sqrt[4]{4^3}$; в) $\sqrt[5]{4}$ и $\sqrt[4]{3}$; г) $\sqrt[3]{8}$ и $\sqrt[6]{65}$.
18. Какие из следующих равенств верны:
а) $a^4\sqrt{a^2} = \sqrt[4]{a^6}$; б) $a^4\sqrt{-a} = \sqrt[4]{-a^5}$; в) $a^4\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^5}$?
19. Во сколько раз число:
а) $\sqrt[3]{24}$ больше числа $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{3}{250}}$ меньше числа $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$?
20. Чему равняется значение выражения: а) $(\sqrt[3]{-2})^3$; б) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; в) $\sqrt[4]{3^4}$; г) $\sqrt[4]{(-3)^4}$;
д) $(\sqrt[4]{3})^4$?
21. Верно ли неравенство:
а) $(0,5)^{2,5} > (0,2)^{2,5}$; б) $(0,5)^{-2,5} > (0,2)^{-2,5}$; в) $(0,5)^{0,4} > (0,2)^{0,4}$; г) $(0,5)^{-0,4} > (0,2)^{-0,4}$?

22. Известно, что $10^{0,3010} \approx 2$ и $10^{0,6990} \approx 5$. Как представить приближённо в виде степени числа 10 число: а) 8; б) 25; в) 0,4?
23. Существует ли такое значение x , для которого: а) $x^{100} = 1$; б) $x^{0,01} = 100$?
24. Можно ли утверждать, что промежуток $(-\infty; +\infty)$ является областью определения функции: а) $y = x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = x^{\frac{1}{2}}$; в) $y = x^{-\frac{1}{3}}$; г) $y = x^{-\frac{1}{2}}$?
- 25*. При каких значениях x график функции $y = x^{\frac{7}{3}}$ расположен выше графика функции: а) $y = x^2$; б) $y = x^3$?
26. Верно ли, что функция $y = x^{\frac{1}{3}}$:
а) не может принимать отрицательные значения; б) нечётна; в) возрастающая?
27. Имеет ли уравнение $x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{x^2}$ решение, отличное от 1?
28. Каковы все решения неравенства $x^{\frac{1}{4}} \leq 1$?

Ответы к заданиям для самоконтроля

1. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. 2. а) При нечётных натуральных; б) ни при каких; в) при чётных натуральных; г) при нечётных отрицательных; д) при чётных отрицательных. 3. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да. 4. Б. 5. а) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. 6. а) $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$. 7. а) 2; б) 0; в) 1; г) 1. 8. а) Убывающей; б) возрастающей; в) убывающей. 9. а) 1; б) 0. 10. Наименьшее значение достигает при чётных натуральных значениях p , наибольшее значение не достигает ни при каких значениях p . 11. а) Нет; б) да. 12. а), б), д), е). 13. $a > 0$, n — чётное. 14. n — нечётное, a — отрицательное. 15. а) 1 и 2; б) 2 и 3; в) -4 и -3 ; г) 2 и 3; д) 2 и 3. 16. а) 4; б) -2 ; в) -3 ; г) -4 ; д) -5 . 17. а) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{4^2} < \sqrt[4]{4^3}$; в) $\sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$; г) $\sqrt[3]{8} < \sqrt[6]{65}$. 18. в). 19. а) вдвое; б) в 5 раз. 20. а) -2 ; б) -2 ; в) 3; г) 3; д) 3. 21. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. 22. а) $8 \approx 10^{0,9030}$; б) $25 \approx 10^{1,398}$; в) $0,4 \approx 10^{-0,3980}$. 23. а) Да; б) да. 24. а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет. 25. а) $x \in (1; +\infty)$; б) $x \in (0; 1)$. 26. а) Да; б) нет; в) да. 27. Нет. 28. $[0; 1]$.

Образец контрольной работы

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$.

1) ° Найдите её область определения.

2) ° Вычислите её значение при $x = -\frac{65}{81}$.

3) ° Найдите точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат и с прямой $y = 4$.

4) ° Постройте её график.

5) ° Найдите наименьшее и наибольшее значения функции, если они существуют.

6) Вычислите $f\left(\frac{7^{\frac{1}{2}}}{4}\right) \cdot f\left(-\frac{7^{\frac{1}{2}}}{4}\right)$.

7) Решите уравнение $f(x) = \sqrt{x-5}$.

8) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 2 - x^2$?

9) * Решите неравенство $f(x) < 3$.

10) * Сколько корней имеет уравнение: а) $f(x) = a$; б) $f(|x|) = a$?

Таблицы для систематизации материала раздела

Определение степени

Таблица 29

Степень с натуральным показателем	$n \in \mathbf{N}, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}. \quad a^1 = a.$
Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1, a > 0.$
Степень с целым отрицательным показателем	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbf{N}.$
Степень с дробным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n > 1.$

Свойства степени с рациональным показателем

Таблица 30

Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in \mathbf{Q}, a > 0.$
Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in \mathbf{Q}, a > 0.$
Возведение степени в степень	$(a^x)^y = a^{xy}, x, y \in \mathbf{Q}, a > 0$
Степень произведения	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in \mathbf{Q}, a, b > 0$
Степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, x \in \mathbf{Q}, a, b > 0$
Сравнение степеней с одинаковыми показателями	$a > b > 0, x > 0 \Rightarrow a^x < b^x$ $a > b > 0, x < 0 \Rightarrow a^x > b^x$
Сравнение степеней с одинаковыми основаниями	$0 < a < 1, x, y \in \mathbf{Q}, x > y \Rightarrow a^x < a^y$ $a > 1, x, y \in \mathbf{Q}, x > y \Rightarrow a^x > a^y$

Арифметический корень n -й степени и его свойства

Таблица 31

Определение	$a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \geq 0, (\sqrt[n]{a})^n = a$
Арифметический корень из произведения	$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$
Арифметический корень из дроби	$a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$
Арифметический корень из арифметического корня	$a \geq 0, n, k \in \mathbb{N}, n, k > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$
Основное свойство арифметического корня	$a \geq 0, n, m, k \in \mathbb{N}, n, m, k > 1 \Rightarrow \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}.$

Свойства степенной функции $y = x^p$ с рациональным показателем

Таблица 32

	$p > 0$	$p < 0$
Область определения	$x \geq 0$	$x > 0$
Знакопостоянство	$x^p \geq 0$	$x^p > 0$
Монотонность	Возрастает	Убывает
График	Рис. 188 и 189	Рис. 190

Иррациональные уравнения

Таблица 33

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = a, a > 0 \Leftrightarrow f(x) = a^2.$ Если $a < 0$, то решений нет.
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

Иррациональные неравенства

Таблица 34

$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} > a, a \geq 0 \Leftrightarrow f(x) > a^2$	$\sqrt{f(x)} < a, a > 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < a^2$.
$\sqrt{f(x)} > a, a < 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.	$\sqrt{f(x)} < a, a \leq 0 \Leftrightarrow$ неравенство не имеет решений.

Исторический комментарий

В современной математике и многочисленных ее приложениях степенная функция и функции, которые строятся на базе степенных, относятся чуть ли не к важнейшим. Объясняется это в первую очередь тем, что с помощью таких функций моделируются многочисленные реальные процессы и явления. С другой стороны — эти функции относятся к довольно простым, а поэтому с их помощью часто строят приближение более сложных функций, или же тех функций, которые задаются таблично и для исследования которых необходимо иметь приближённое аналитическое выражение. Степенная функция определяется на основе понятия натуральной степени вещественного числа и его обобщений. Само понятие степени с произвольным натуральным показателем начали широко использовать в 15 - 16 в., хотя в математических текстах древнего Вавилону (около 2 тыс. лет до н. э.) еще не в привычном для нас виде фигурируют вторые, третьи степени, квадратные корни, обратные числа (даже составленные для них таблицы значений). В той или иной форме обращения к степеням с небольшим натуральным показателем имеем в математических трудах греческих, индийских, арабских математиков. Но, в конечном итоге, дело ограничивалось специальной терминологией и обозначениями.

В эпоху европейского Возрождения, когда интерес к науке и искусству существенно вырос, в математике были получены новые результаты, вводились новые понятия, начала внедряться близкая к современной символика, значительные сдвиги имеем во взглядах на степень. Идеи дробного положительного показателя степени встречаем в произведениях французского математика Н. Орема (1323 - 1382), который словесно сформулировал основные свойства степеней. Позже отрицательные показатели ввел немецкий математик М. Штифель (1486 - 1567) и при этом вполне естественным стало введение французским математиком Н. Шюке (1445 - 1500) нулевого показателя. Обстоятельно изучал обобщение понятия степени на все вещественные числа английский математик Дж. Валлис (1616 - 1703) в произведении «Арифметика бесконечных». А когда усилиями И. Ньютона (1643 - 1727) и его современников и предшественников были созданы дифференциальное и интегральное исчисления, и понятие функции стало центральным в математике, класс степенных функций занял среди других классов почетное место. Оказалось, в частности, что важные виды функций можно представить в виде суммы (как правило, бесконечной) степенных, что раскрыло новые возможности для дальнейшего развития математики и ее приложений.

В заключение коротко отметим, что и система обозначений относительно степени и степенных функций тоже имеет свою историю. Обозначения изменялись, совершенствовались, приобретая постепенно привычный для нас и удоб-

ный вид. Так, Н. Шюке обозначал 112^1 , 12^2 , ... вместо $112x^1$, $12x^2$, ..., а нидерландский математик С. Стевин (1548 - 1620) то же самое записал бы как $12(1)$, $12(2)$, ... Современное обозначение степени ввел Декарт (1596 - 1650). Н. Орем в своем труде «Алгоритм пропорций» вместо привычного сейчас $2^{\frac{1}{2}}$ писал $\frac{1}{2}2'$, а знак корня $\sqrt{\quad}$, который точно совпадает с современным, встречается в книге «Трактат по алгебре» французского математика М. Ролля (1652 - 1719).



Раздел 3.

Тригонометрические функции

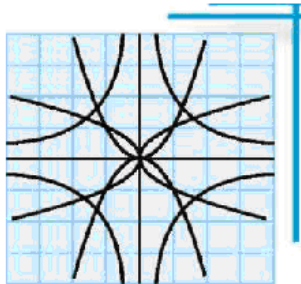
С тригонометрическими функциями вы уже имели дело на уроках геометрии. До сих пор их приложения, в основном, ограничивались решением треугольников, то есть речь шла о нахождении одних элементов треугольника по другим.

Слово «тригонометрия» происходит от греческих $\tau\rho\iota\omega\nu\nu\nu$ (trigonon) — треугольник и $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omega$ (metreo)) — меряю, измеряю. Буквально оно означает измерение треугольников.

В этой главе систематизируется материал, уже известный вам из курса геометрии, продолжается изучение тригонометрических функций и их приложений для характеристики периодических процессов, в частности, вращательного движения, колебательных процессов и т. п.

Большинство применений тригонометрии касаются именно периодических процессов, то есть процессов, повторяющихся через равные промежутки времени. Восход и закат Солнца, изменения времен года, вращения колеса — это простейшие примеры таких процессов. Механические и электромагнитные колебания являются также важными примерами периодических процессов. Поэтому исследование периодических процессов — важное задание. И роль математики в его решении является определяющей.

Готовимся к изучению темы "Тригонометрические функции"



Изучение темы "Тригонометрические функции" целесообразно начать с повторения определений и свойств тригонометрических функций углов треугольника и их применений для решения как прямоугольных, так и произвольных треугольников.

Синус, косинус, тангенс, котангенс углов прямоугольного треугольника

Таблица 35

Синусом острого угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Косинусом острого угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенсом острого угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Котангенсом острого угла называют отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

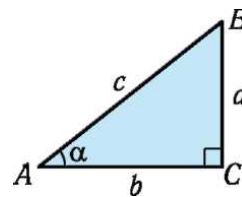
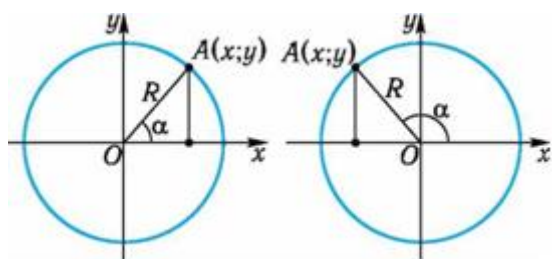


Таблица 36

Синус, косинус, тангенс, котангенс углов от 0° до 180°



$$\sin \alpha = \frac{y}{R}; \cos \alpha = \frac{x}{R}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

$(x; y)$ — координаты точки A , расположенной на верхней полуокружности, α — угол, образованный радиусом OA окружности с осью x .

Таблица 37

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса некоторых углов

Угол t Функция	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

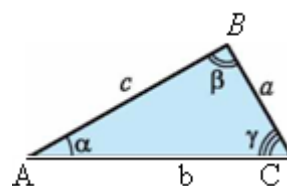
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	0
$\operatorname{ctg} t$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не существует

Таблица 38

Решение произвольных треугольников**Теорема синусов**

Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

**Теорема косинусов**

Квадрат произвольной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Таблица 39

Основные тригонометрические тождества

$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ, \alpha \neq 90^\circ$	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
$0^\circ < \alpha < 180^\circ, \alpha \neq 90^\circ$	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ, \alpha \neq 90^\circ$	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Тест для диагностики готовности к изучению темы

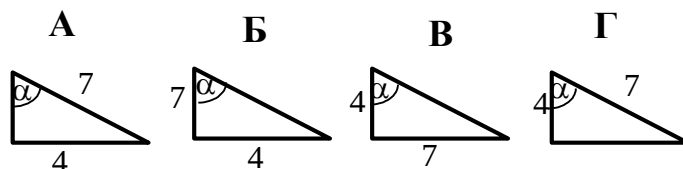
"Тригонометрические функции"

1. Дан треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AB = 2$. Чему равняется $\angle A$?
 А. 30° . Б. 45° . В. 60° .

Г. Невозможно вычислить без вычислительных средств.

2. Дан треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $\angle B = 60^\circ$. Чему равняется AC ?
 А. $3\sqrt{3}$. Б. 1,5. В. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Г. $\sqrt{3}$.

3. На каком рисунке $\cos \alpha = \frac{4}{7}$?



4. По данным сторонам прямоугольного треугольника найдите синус наименьшего его угла: $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$.

А. 0,8. Б. 0,75. В. 0,6. Г. 1,25.

5. По данным сторонам прямоугольного треугольника найдите косинус наименьшего его угла: $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$.

А. $\frac{5}{13}$. Б. $\frac{5}{12}$. В. $\frac{12}{13}$. Г. 2,4.

6. Какое из следующих значений не может принимать синус острого угла?

А. $\frac{8}{7}$. Б. $\frac{7}{8}$. В. $\left(\frac{7}{8}\right)^2$. Г. $\sqrt{\frac{7}{8}}$.

7. Какое из следующих значений не может принимать тангенс острого угла?

А. 1000. Б. $-0,001$. В. 0,001. Г. 1.

8. Какое из следующих значений не может принимать косинус угла треугольника?

А. 1. Б. 0,5. В. $-0,5$. Г. 0.

9. Сравните сумму косинусов острых углов произвольного прямоугольного треугольника (обозначим ее через A) с единицей.

А. $A < 1$. Б. $A = 1$. В. $A > 1$. Г. Сравнить невозможно.

10. Чему равняется сумма квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника?

А. 1. Б. 1,5. В. 2. Г. 2,5.

11. Чему равняется произведение тангенсов острых углов прямоугольного треугольника?

А. 1. Б. 1,5. В. 2. Г. Невозможно вычислить.

12. Расположите по возрастанию числа: $a = \sin 60^\circ$, $b = \cos 60^\circ$, $c = \operatorname{tg} 60^\circ$.

А. $a < b < c$. Б. $a < c < b$. В. $c < a < b$. Г. $b < a < c$.

13. Сравните без вычислительных средств острые углы α и β , если $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$.

А. $\alpha < \beta$. Б. $\alpha = \beta$. В. $\alpha > \beta$. Г. Сравнить невозможно.

14. Сравните без вычислительных средств острые углы α и β , если $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$.

А. $\alpha < \beta$. Б. $\alpha = \beta$. В. $\alpha > \beta$. Г. Сравнить невозможно.

15. Сравните $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если α — острый угол прямоугольного треугольника.

А. $\sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha$. Б. $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$. В. $\sin \alpha > \operatorname{tg} \alpha$. Г. Сравнить невозможно.

16. Для каких острых углов синус меньше косинуса?

А. Для всех. Б. Для меньших 45° . В. Для больших 45° . Г. Ни для каких.

17. Чему равняется $\sin \alpha$, если α — острый угол прямоугольного треугольника и $\cos \alpha = \frac{5}{13}$?

А. $\frac{5}{13}$. Б. $\frac{5}{12}$. В. $\frac{12}{13}$. Г. $\frac{8}{13}$.

18. Чему равняется $\cos \alpha$, если α — острый угол прямоугольного треугольника и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$?

А. $\frac{5}{4}$. Б. $\frac{4}{7}$. В. $\frac{3}{5}$. Г. $\frac{4}{5}$.

19. Чему равняется $\cos 120^\circ$?

А. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Б. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В. $\frac{1}{2}$. Г. $-\frac{1}{2}$.

20. Башню высотой 60 м видно из некоторой точки местности под углом 30° . Каково примерно расстояние от этой точки до основания башни? Выберите самый точный результат.

А. 30 м. Б. 35 м. В. 102 м. Г. 51 м.

21. Каким является треугольник, стороны которого равняются 7, 8, 9?

А. Остроугольным.

Б. Прямоугольным.

В. Тупоугольным.

Г. Невозможно определить.

22. Чему равняется значение выражения $\sqrt{1-x^2}$ при $x = -0,6$?

А. 0,6. Б. -0,8. В. 0,8. Г. $\approx 1,17$.

23. Из формулы $a^2 + b^2 = 4$ выразите $a < 0$ через b .

А. $a = \sqrt{4-b^2}$. Б. $a = \sqrt{b^2-4}$. В. $a = -\sqrt{b^2-4}$. Г. $a = -\sqrt{4-b^2}$.

24. Точка A расположена во II четверти на расстоянии 2 от оси x и на расстоянии $\sqrt{5}$ от начала координат. Какие координаты имеет точка, симметричная данной относительно оси y ?

А. (2; 1). Б. (1; 2). В. (-1; -2). Г. (-2; -1).

25. Какая из следующих точек лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$?

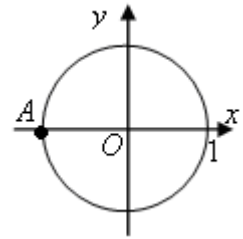
А. (0; 0). Б. (0,5; 0,5). В. (1; 1). Г. (0,6; 0,8).

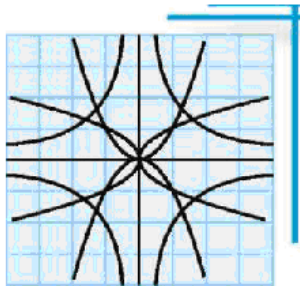
26. Синус и косинус одного и того же угла треугольника не могут равняться ...

А. 0,6 и $-0,8$; Б. $\frac{12}{13}$ и $-\frac{5}{13}$; В. 0,5 и 0,5; Г. $\frac{3}{4}$ и $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

27. Укажите координаты точки А, которая лежит на окружности радиуса 1 (см. рис.).

А. $(-1; 0)$. Б. $(1; 0)$. В. $(0; -1)$. Г. $(0; 1)$.





§ 14. Измерение углов

Часто функции, описывающие движение объектов, например, небесных тел, своим аргументом имеют меру угла. Поэтому этот параграф посвящен обобщению сведений об измерении углов, в частности углов вращения.



В планиметрии углы рассматриваются как фигуры, образованные с помощью двух лучей, имеющих общее начало. Обычно углы в геометрии измеряют в градусах: 1 градус (1°) — это $\frac{1}{180}$ часть меры развернутого угла.

Градусная мера углов в геометрии изменяется от 0° до 180° .

В тригонометрии любой угол рассматривается как **фигура, образованная вращением подвижного луча вокруг его начала**. Пусть зафиксированы вершина угла и один из лучей, образующих этот угол. Второй луч будем вращать вокруг вершины угла. Полученные при этом углы между неподвижным и подвижным лучами называют **углами вращения**.

На рис. 195 изображен угол, образованный вращением подвижного луча OA_1 вокруг точки O , с неподвижным лучом OA . Траекторией движения точки A_1 луча OA_1 является линия AA_1 . Она является дугой окружности с центром в точке O и с радиусом OA_1 (или OA).

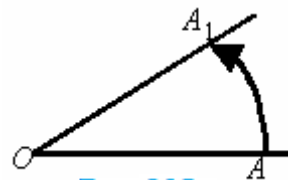


Рис. 195

Мерой угла вращения является мера угла поворота подвижного луча. Углы вращения можно измерять в градусах. Удобнее является **радианная мера углов**.

Радианной мерой угла вращения называется отношение пути, пройденного от начального положения фиксированной точкой подвижного луча, к расстоянию от этой точки до начала луча.

Для углов вращения от 0° до 360° их радианная мера равняется отношению длины дуги окружности с центром в вершине угла, которая содержится между сторонами угла, к радиусу этой окружности.

Численно радианная мера угла равняется пути, который пройдет точка подвижного луча, находящаяся на единичном расстоянии от вершины. Угол, радианная мера которого равняется числу 1, называется **радианом** (рис. 196). Длина соответствующей дуги окружности равняется длине радиуса окружности.

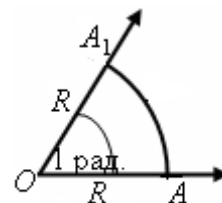


Рис. 196

Угол вращения, образованный подвижным лучом с неподвижным (начальным положением подвижного луча), зависит от направления вращения — против часовой стрелки или по ней. Будем считать, что угол

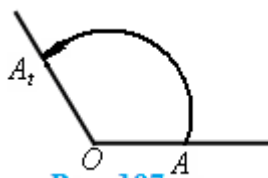


Рис. 197

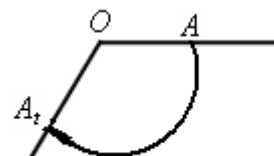


Рис. 198

вращения является положительным, если поворот осуществляется против часовой стрелки (рис. 197), и отрицательным, если — по ней (рис. 198).

Например, угол в 90° получим, если луч OA_1 осуществит четверть полного оборота вокруг точки O против часовой стрелки (черт. 199, а); результатом полуоборота луча OA_1 против часовой стрелки является угол 180° (рис. 199, б).

Угол (-150°) — это $\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$ полного оборота луча OA_1 вокруг точки O по часовой стрелке (рис. 199, в).

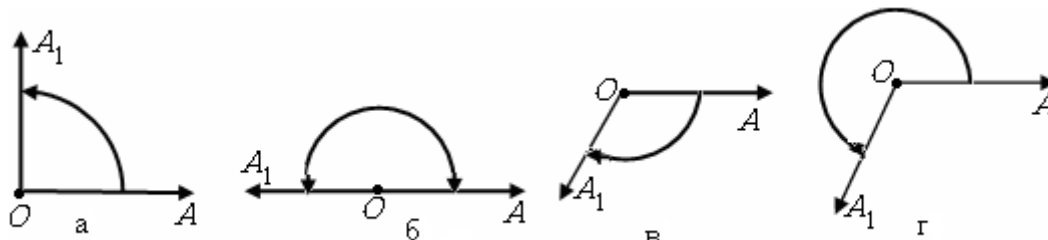


Рис. 199

Углы вращения имеют важную особенность: для их характеристики целесообразно ввести угловую меру, которая превышает 180° . Подвижный луч с началом в фиксированной точке может находиться в любом положении на плоскости (рис. 199 г), более того, подвижный луч может делать не один полный оборот.

Если угловая мера угла составляет α радиан, $\alpha > 0$, то это означает, что длина соответствующей дуги окружности l радиуса R равняется αR , то есть $l = \alpha R$.

Отсюда вытекает, что **длина дуги единичной окружности численно совпадает с её радианной мерой**. Собственно, именно это обстоятельство и делает радианную меру угла удобной.

Окружность радиуса R имеет длину $2\pi R$. Рассмотрим дугу, длина которой равняется радиусу R . Ее длина в 2π раз меньше длины окружности. Поэтому угол, равный 1 радиану (1 рад), составляет $\frac{1}{2\pi}$ части полного оборота:

$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Поскольку радианная мера угла 360° составляет 2π рад, то 1° соответствует $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0,017$ рад.

Этим самым установлена связь между радианной и градусной мерами угла, которая, кстати, свидетельствует о независимости радианной меры угла от радиуса окружности.

Пример 1. Выразить углы: 1) 30° , 45° , 60° , -120° в радианной мере; 2) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$ в градусной мере.

$$\square \text{ 1) Поскольку } 1^\circ = \frac{\pi}{180}, \text{ то } 30^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}; \quad 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4};$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}; -120^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot (-120) = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$2) \text{ Поскольку } 1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}, \text{ то } \frac{2\pi}{3} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ; \frac{3\pi}{4} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135^\circ;$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ; -\frac{7\pi}{6} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -210^\circ. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \text{ б) } 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, -210^\circ.$$



Радиианной мерой дуги окружности обычно называют радианную меру соответствующего центрального угла. Так, радианные меры дуг AA_1 , изображенных на рис. 199 а, б, соответственно равны $\frac{\pi}{2}, \pi$.

Радиианная мера единичной окружности равняется её длине, то есть числу 2π , радианная мера единичной полуокружности равняется числу π ; радианная мера четверти единичной окружности составляет $\frac{\pi}{2}$.

Слово «радиан» часто опускают и говорят «угол π ». Так, записи $\alpha = 1,12$; $\alpha = 0,39$; $\alpha = 15,7$ означают, что угол α измерен в радианах. В то же время обозначения градусов не принято опускать в записях.

Введение радианной меры угла вращения дает возможность установить простую связь между угловой и линейной скоростями точки, находящейся в равномерном вращательном движении. Угловая скорость при равномерном вращении — это угол, на который поворачивается точка за единицу времени. Она обычно измеряется в радианах за секунду (рад/с). Линейная скорость точки при равномерном движении — это расстояние, на которое перемещается точка по траектории движения за единицу времени.

Пример 2. Точка равномерно движется по окружности, радиус которой $R = 40$ см, с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Найти линейную скорость точки.

□ За одну секунду точка выполняет поворот на угол, равный 2 рад. Надо найти длину дуги, которую проходит точка за 1 с. Из определения радиана вытекает, что углу в 1 рад соответствует дуга, длина которой равняется длине радиуса. Таким образом, углу в 2 рад соответствует дуга длиной $2R$, или $40 \cdot 2 = 80$ см. Следовательно, линейная скорость точки равняется 80 см/с. ■

Ответ: 80 см/с.



В географии, астрономии, где применяется градусная система измерения углов, пользуются также меньшими единицами измерения: $\frac{1^\circ}{60} = 1'$ (угловая минута), $\frac{1'}{60} = 1''$ (угловая секунда).

Градусной мерой угла пользуются в оптических приборах. В технике за единицу измерения углов принимают *полный оборот*, то есть 360° , в военном деле

— «тысячную», то есть $\frac{1}{3000}$ часть развернутого угла, *или большое деление угломера*, которое равняется 100 «тысячным». В мореходстве единицей измерения *является* румб, который равняется $\frac{1}{32}$ части полного оборота.

Пусть угол α измерен в радианах, и он малый. Тогда длины катета AB , дуги AA_α , высоты AC прямоугольного треугольника OAB (рис. 200) мало отличаются друг от друга, и поэтому выполняются приближенные равенства:

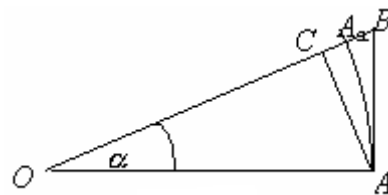


Рис. 200

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} \approx \frac{AA_\alpha}{OA} = \alpha \approx \frac{AC}{OA} = \sin \alpha,$$

то есть для малых углов α , выраженных в радианах, имеем приближенные формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha, \quad \sin \alpha \approx \alpha.$$



Контрольные вопросы

1. ° Можно ли осуществить поворот часовой стрелки на: а) 270° ; б) 360° ; в) 480° ; г) -30° ; д) -190° ; е) -1024° ?
2. ° Чему равняется величина угла правильного треугольника в радианах?
3. ° Чему равняются величины углов прямоугольного равнобедренного треугольника в радианах?
4. ° Чему равняется радианная мера угла AOB , изображенного на рис. 201, если длина дуги MN равняется $0,5ON$?
5. Лопасть винта сделала $7\frac{1}{4}$ полных оборота. На какой угол (в градусах) она отклонилась от начального положения?
6. Какая из радианных мер углов больше: $\frac{2}{\pi}$ или $\frac{\pi}{5}$?
7. Чему равняется в градусной мере угол оборота маховика, который сделал по часовой стрелке:

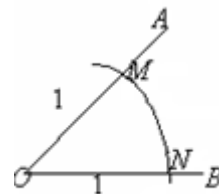


Рис. 201

- 1) 2 оборота; 2) 1,5 оборота; 3) $\frac{3}{8}$ оборота?

8. Какие углы описывают минутная и часовая стрелки за: 1) 10 мин; 2) 10 ч?
9. Укажите, чему равняются приближенно градусные и радианные меры углов вращения, обозначенных стрелками на рис. 202.

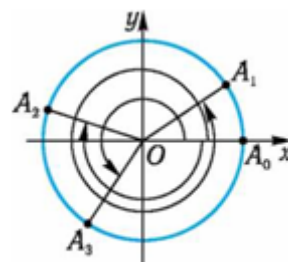


Рис. 202

10. * Верно ли утверждение, что радианная мера угла пропорциональна градусной мере этого угла?

Задачи

223°. Запишите в радианной мере значения углов:

1) 150° ; 2) 72° ; 3) 240° ; 4) 105° ; 5) -300° ; 6) 37° ; 7) $127^\circ 12'$.

224°. Запишите в градусной мере значения углов:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) 2; 4) -7; 5) 0,349; 6) -3,14; 7) 6,34.

225°. Изобразите на единичной окружности углы вращения, радианные меры которых равны: 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) 2; 4) -3; 5) 0,5; 6) -6.

226. Зубчатое колесо имеет 40 зубцов. Выразите в градусах угол, на который повернётся колесо при повороте на 1 зубец, 15 зубцов, 80 зубцов, 150 зубцов.

227. Среди мер углов вращения -290° , -200° , -70° , 790° , 880° , 1150° , 1600° укажите такие, в которых положение подвижного луча совпадает с положением подвижного луча угла, градусная мера которого равняется: 1) 70° ; 2) 160° .

228. Среди мер углов вращения $-\frac{16\pi}{5}$, $-\frac{9\pi}{5}$, $-\frac{6\pi}{5}$, $-\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{9\pi}{5}$, $\frac{11\pi}{5}$, $\frac{14\pi}{5}$, $\frac{21\pi}{5}$ укажите такие, в которых положение подвижного луча совпадает с положением подвижного луча угла, радианная мера которого равняется: 1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $\frac{4\pi}{5}$.

229. Найдите длину дуги, если известны её радианная мера α и радиус R окружности, содержащей её:

1) $\alpha = 3$, $R = 1$ см; 2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $R = 3$ см; 3) $\alpha = 0,2$, $R = 2$ м; 4) $\alpha = \frac{4\pi}{5}$, $R = 5$ м.

230. Колесо за 10 с повернулось на 5π рад. С какой угловой скоростью оно вращается?

231. Шкив скоростного электродвигателя делает 90 000 оборотов за минуту. Найдите угловую скорость этого шкива: 1) в град/с; 2) в рад/с.

232. Точка движется равномерно по окружности радиуса $R = 60$ см с угловой скоростью $\omega = 4\pi$ рад/с. Найдите ее линейную скорость.

233. Точка движется равномерно по окружности радиуса $R = 30$ см с линейной скоростью 75 см/с. Найдите ее угловую скорость.

234. Какую линейную скорость имеет точка вращающегося диска, когда она удалена на 18 см от оси вращения, а угловая скорость диска равняется $\frac{\pi}{3}$ рад/с?

Какой длины дугу опишет эта точка за 45 с?



Упражнения для повторения

235. Какие координаты на координатной прямой имеют решения уравнения: 1) $|x - 2| = 2$; 2) $|x + 2| = 2$?

236. Какие из следующих точек $(0; -3)$; $(4,5; 4,5)$; $(2\sqrt{2}; 1)$; $(-2; \sqrt{5})$; $(-1; \sqrt{10})$ лежат на окружности $x^2 + y^2 = 9$?

237. Часовая стрелка имеет длину 1 см.

1) На какой угол она повернётся за 1 ч; 2 ч; половину суток; сутки?

2) Какой путь проходит ее конец за 1 ч; 2 ч; половину суток; сутки?

238. Какие координаты имеет точка C , которая делит дугу AB окружности радиуса 1 (рис. 203):

1) пополам; 2) в отношении 1:2, считая от точки A ; 3) в отношении 2:1, считая от точки A ?

Какими будут координаты этой точки, если радиус окружности равняется 2?

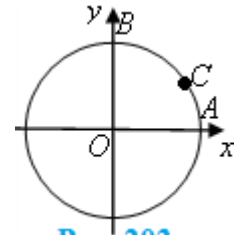
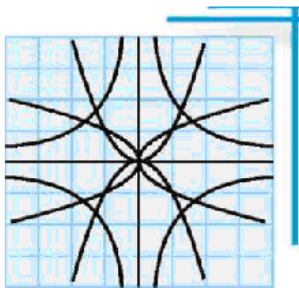


Рис. 203



§ 15. Тригонометрическая окружность

В данном параграфе устанавливается соответствие между вещественными числами и точками окружности радиуса 1. Это даст возможность определить тригонометрические функции для произвольного значения аргумента.



Как известно, между вещественными числами и точками координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие. Представим себе, что точка движется по координатной прямой от начала координат. Если она движется в положительном направлении и пройдет расстояние, равное трем единицам измерения длины, то она попадет в точку A (рис. 204). Если же она движется в направлении, противоположном направлению координатной прямой и пройдет то же самое расстояние, то она попадет в точку B (рис. 204).

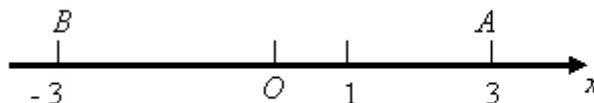


Рис. 204

Обратите внимание на то, что в обоих случаях расстояние, пройденное точкой, равняется модулю координаты точки, в которую она попадает.

Вообще, пусть имеем произвольное число t . Будем считать, что точка движется вдоль прямой, причем в положительном направлении, если $t > 0$, и в отрицательном направлении, если $t < 0$. Когда пройденное расстояние будет равняться $|t|$, точка попадет в положение, соответствующее числу t . Таким образом, каждому вещественному числу соответствует одна и только одна точка P_t

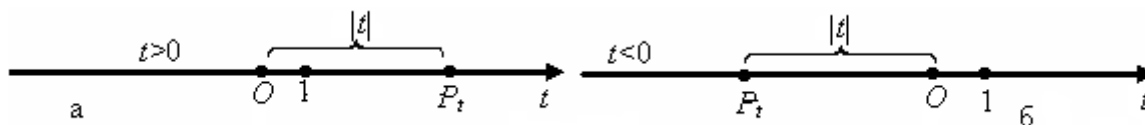


Рис. 205

координатной прямой (рис. 205 а, б).

Аналогично можно построить соответствие между вещественными числами и точками единичной окружности, пользуясь измерением расстояния вдоль окружности. Для этого на координатной плоскости рассмотрим единичную окружность (то есть окружность радиуса 1) с центром в начале координат (рис.

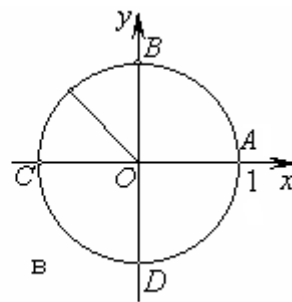
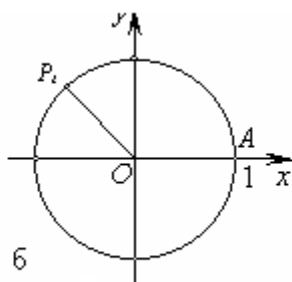
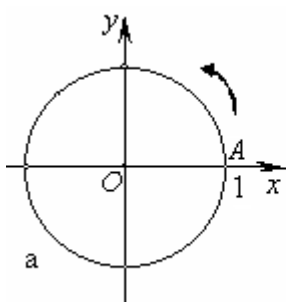


Рис. 206

206 а), её называют **тригонометрической окружностью**. Точку A с координатами $(1; 0)$ называют **началом отсчета** (на окружности!). Направление движения против часовой стрелки, как уже отмечалось, считают положительным.

Пусть задано число t . Представим себе, что некоторая точка движется по тригонометрической окружности. Свое движение она начинает из положения A . Будем считать, что она движется против часовой стрелки, то есть в положительном направлении, если $t > 0$, и по часовой стрелке, то есть в отрицательном направлении, если $t < 0$. Если $t = 0$, то точка находится в положении A . Когда пройденное расстояние будет равняться $|t|$, точка попадет в положение, соответствующее числу t . Обозначим точку, в которую она попадает, через P_t (рис. 206, б). Понятно, что точка P_0 совпадает с точкой A .

Таким образом, каждому действительному числу t на тригонометрической окружности соответствует точка P_t . По построению, точку P_t получают из точки A поворотом ее вокруг начала координат на t радиан, поскольку на единичной окружности длина пройденного пути равна модулю радианной меры угла поворота.

Пользуясь приведенным построением, нетрудно указать точки тригонометрической окружности, соответствующие числам $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi, -\pi, \frac{3\pi}{2},$

$-\frac{3\pi}{2}, 2\pi, -2\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi$ и т. п. Действительно, путь длиной $\frac{\pi}{2}$ вдоль окружности равен $\frac{1}{4}$ длины окружности, ведь длина единичной окружности равна 2π .

Точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ совпадает с точкой B (рис. 206, в). В точку P_{π} можно попасть, если

пройти в положительном направлении расстояние π , то есть длину единичной полуокружности. Точка P_{π} совпадает с точкой C . В точку $P_{\frac{\pi}{2}}$ можно попасть,

преодолев в отрицательном направлении четвертую часть единичной окружности. Точка $P_{-\frac{\pi}{2}}$ совпадает с точкой D . Аналогично, точки $P_{\frac{3\pi}{2}}, P_{-\pi}$ будут совпа-

дать соответственно с точками D, C .

! Продолжая эти построения, придем к выводу, что различным числам может соответствовать одна и та же точка тригонометрической окружности.

Эта неоднозначность напоминает такую реальную ситуацию: *велотрек имеет длину 350 м, велосипедист находится на расстоянии 150 м от финиша. Какой путь он проехал?*

Если он только начал соревнование, то он проехал $350 - 150 = 200$ м, если уже проехал один круг, то — $(200 + 350 \cdot 1)$ м = 550 м, два круга — $(200 + 350 \cdot 2)$ м = 900 м; если проехал n кругов, то путь будет равняться $(200 + 350 \cdot n)$ м. Поэтому однозначного ответа на поставленный вопрос дать невозможно.

Пример 1. Изобразить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$.

□ Разделим дугу AB , длина которой равна $\frac{\pi}{2}$, пополам точкой K , на три равные части — точками L и M (рис. 207). Тогда длины дуг AL , AK , AM соответственно равны $\frac{\pi}{2}:3 = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}:2 = \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}:3 \cdot 2 = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, числу $\frac{\pi}{6}$

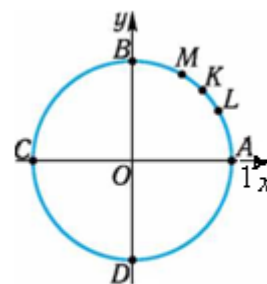


Рис. 207

соответствует точка L , числу $\frac{\pi}{4}$ — точка K , числу $\frac{\pi}{3}$ — точка M . Эти точки можно соответственно обозначить через $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{\pi}{3}}$. ■

Для точек, построенных в примере 1, нетрудно указать прямоугольные координаты, пользуясь соотношениями между сторонами и углами прямоугольных треугольников.

Пример 2. Найти прямоугольные координаты точек $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{\pi}{3}}$.

□ Для точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ решение сводится к нахождению катетов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 1, а один из острых углов составляет $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ (рис. 208). Катет, лежащий против угла 30° равен $\frac{1}{2}$, а

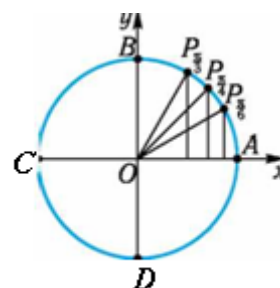


Рис. 208

прилежащий к этому углу катет равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, координаты точки

$$P_{\frac{\pi}{6}} — \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Аналогично находятся координаты $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ точки $P_{\frac{\pi}{3}}$. Нахождение координат точки $P_{\frac{\pi}{4}}$ сводится к нахождению катетов прямоугольного равнобе-

ренного треугольника, гипотенуза которого равна 1. Его катеты равны $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $P_{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. ■

Ответ. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$



Пользуясь результатом решения примера 1, можно находить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам, выраженным в долях числа π .

Пример 3. Изобразить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам $\frac{3\pi}{4}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{25\pi}{6}$.

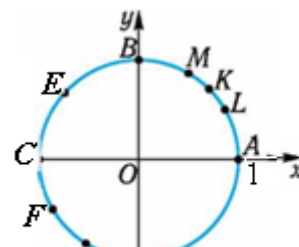


Рис. 209

□ Построение будем выполнять, пользуясь рис. 207. Отложим трижды от точки A дугу AK (точки K, L, M определены в примере 1) в положительном направлении (ее длина равна $\frac{\pi}{4}$). Получим точку E — середину дуги BC (рис. 209). Она и будет соответствовать числу $3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Отложив дугу AL (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A в отрицательном направлении 5 раз, получим точку F , которая отделяет третью часть дуги CD . Эта точка и соответствует числу $5 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$.

Далее, отложив дугу AM (ее длина равна $\frac{\pi}{3}$) от точки A в положительном направлении 4 раза, получим точку N , отделяющую две трети дуги CD . Эта точка и соответствует числу $\frac{4\pi}{3}$. Наконец, принимая во внимание, что

$\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi + \pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$, придем к выводу, что числу $\frac{25\pi}{6}$ соответствует точка L . Если бы мы отложили от точки A в положительном направлении 25 раз дугу AL , то получили бы тот же результат. ■

Координаты точек, построенных в примере 2, позволяют находить координаты точек тригонометрической окружности, соответствующих числам, выраженным в долях числа π .

Пример 4. Найти прямоугольные координаты точек $P_{\frac{5\pi}{6}}, P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{4\pi}{3}}$.

□ Построим данные точки (рис. 210). Их координаты по модулю совпадают с координатами соответственно точек $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{\pi}{3}}$, найденные в примере 2. Следует лишь опреде-

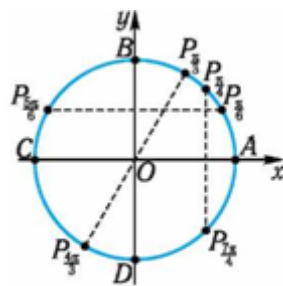


Рис. 210

лить их знаки. Точка $P_{\frac{5\pi}{6}}$ находится во второй координатной четверти, поэтому ее абсцисса отрицательна, а ордината положительна. Следовательно,

$$P_{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Аналогично получаем: $P_{\frac{7\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_{\frac{4\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ■

$$\text{Ответ. } P_{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right); P_{\frac{7\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); P_{\frac{4\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приближенно можно изображать точки тригонометрической окружности, соответствующие произвольным числам.

Пример 5. Изобразить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам 1, -2, 3, -5.

□ Числу 1 соответствует точка P_1 , расположенная на дуге AB ближе к точке B , так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ или приближённо 1,5. Чтобы уточнить ее положение, отложим от точки A в положительном направлении угол в 1 радиан, приближенно равный $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$ (рис. 211). Его можно построить с помощью транспортира.

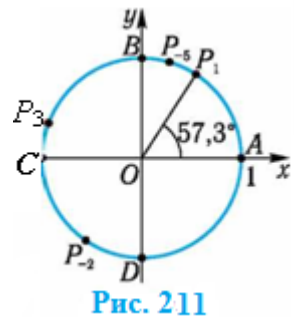


Рис. 211

Для построения точки P_{-2} , соответствующей числу -2, отложим от точки A в отрицательном направлении дугу в 2 рад. Соответствующий угол приближенно равен $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 2 \approx 115^\circ$ (см. рис. 211). Эта точка находится на дуге CD ближе к точке D .

Аналогично строится точка P_3 , соответствующая числу 3. Она находится на дуге BC ближе к точке C (напомним, что точка C соответствует числу $\pi \approx 3,14$). Числу -5 соответствует та же точка, что и числу $-5 + 2\pi \approx 1,28$. Чтобы ее построить, отложим от точки A в положительном направлении дугу в 1,28 рад.

Соответствующий угол приближенно равен $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1,28 \approx 73^\circ$ (см. рис. 211). Точка P_{-5} находится на дуге AB ближе к точке B (напомним, что точка B соответствует числу $\pi/2 \approx 1,57$). ■

Соответствие между действительными числами и точками тригонометрической окружности, как отмечалось выше, не является взаимно однозначным.

Например, если рассмотреть числа $t_0 = \frac{\pi}{2}, t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi, t_2 = \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots$,

$t_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \dots$, то положение точек P_{t_n} для $n = 0, 1, 2, \dots$, одно и то же — точка

$P_{\frac{\pi}{2}}$, то есть точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ соответствует бесконечному множеству чисел

$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots$. То же самое положение имеют и точки, соответствующие

числам $\frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \dots$. Таким образом, точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ соответствует числам

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Укажите числа, которые соответствуют на тригонометрической окружности точкам A, B, C, D на рис. 211.

□ Поскольку длина всей окружности равняется 2π , то длина его четвертой части AB равняется $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, точка B соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а

поэтому — всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Точно так же устанавливается, что точка C соответствует числам $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, точка D — числам $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, точка A — числам $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ: $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

По прямоугольным координатам точки на тригонометрической окружности можно иногда записать соответствующие им числа.

Пример 7. Найти на тригонометрической окружности точки и записать, каким числам они соответствуют, если они имеют: 1) ординату $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) абсциссу $-\frac{1}{2}$.

динату $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) абсциссу $-\frac{1}{2}$.

□ 1) Прямая $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках P и Q (рис. 212). Точка P соответствует числу $\frac{\pi}{4}$ (см. пример 1), а следовательно всем

числам $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Точка Q соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$, а

следовательно всем числам $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) Прямая $x = -\frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках E и F (рис. 213). Точка E соответству-

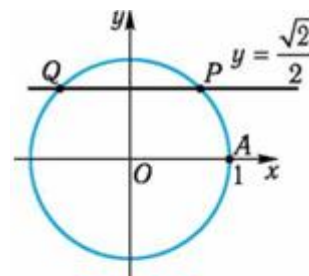


Рис. 212

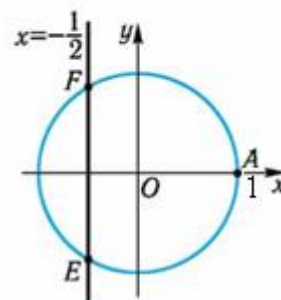


Рис. 213

ет числу $\frac{4\pi}{3}$ (см. пример 3), а следовательно всем числам $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. Точка F соответствует числу $\frac{2\pi}{3}$, а следовательно всем числам $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

Ответ. 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.



Тригонометрическая окружность фактически является своеобразной системой координат: каждому вещественному числу соответствует единственная точка на тригонометрической окружности. Поэтому тригонометрическую окружность иногда называют координатной окружностью. Но в отличие от прямоугольной системы координат каждая точка на тригонометрической окружности соответствует не единственному, а бесконечному множеству вещественных чисел. Эта система координат связана с прямоугольной системой координат: центр окружности находится в начале координат, единица масштаба на осях абсцисс и ординат равняется длине радиуса окружности, оси абсцисс и ординат направлены от центра окружности O в направлении точек A и B соответственно (см., например, рис. 214). Начало отсчета на тригонометрической окружности находится в точке с прямоугольными координатами $(1; 0)$. Связь между двумя системами координат дает возможность находить декартовы координаты точек тригонометрической окружности.

Обозначение дуг тригонометрической окружности можно записывать в виде двойных неравенств подобно тому, как это делалось в разделе I для промежутков координатной прямой.

Пример 8. Записать обозначения для открытых (то есть не содержащих концов) дуг FBE и ECF , где дуга AF составляет треть дуги AB , а точка E является серединой дуги BC (рис. 214).

□ Решение состоит из трех этапов. На первом устанавливаем наименьшие положительные числа, которые соответствуют отмеченным точкам. На втором — с помощью этих чисел записываем двойное неравенство, описывающее дугу. На последнем этапе составляем общую запись.

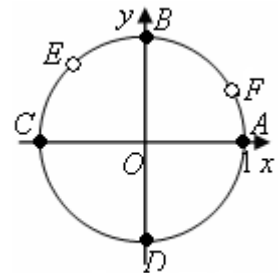


Рис. 214

Точка F соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (трети числа $\frac{\pi}{2}$), точка E — числу $\frac{3\pi}{4}$ ($\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$).

Для дуги FBE от точки F до точки E движемся в положительном направлении, поэтому для этой дуги имеем запись: $\frac{\pi}{6} < t < \frac{3\pi}{4}$. Общая запись имеет вид

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Для дуги ECF от точки E к точке F движемся в положительном направлении. Точка E соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$. Далее проходим через точки C (число

π), D (число $\frac{3\pi}{2}$), A (число 2π) и попадаем в точку F (число $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$). Следовательно,

$\frac{3\pi}{4} < t < \frac{13\pi}{6}$. Общая запись имеет вид:

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

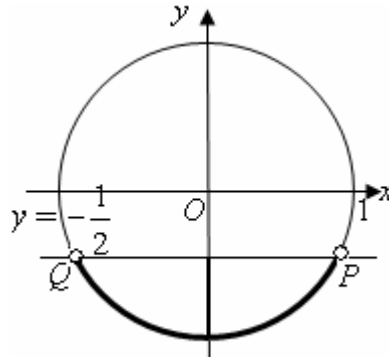


Рис. 215

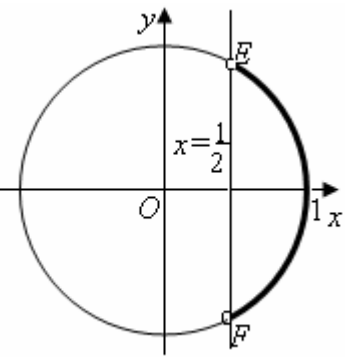


Рис. 216

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 9. Найти на тригонометрической окружности точки: 1) ординаты которых меньше $-\frac{1}{2}$; 2) абсциссы которых больше $\frac{1}{2}$. Записать, каким числам соответствуют найденные точки.

□ 1) Прямая $y = -\frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках P и Q (рис. 215). Точки тригонометрической окружности, ординаты которых меньше $-\frac{1}{2}$, образуют дугу QP (на рис. она выделена жирной линией). Концы этой дуги не удовлетворяют условию, потому они изображены «выколотыми» точками. Точка P соответствует числу $-\frac{\pi}{6}$ (она симметрична точке F из примера 8 относительно оси абсцисс), а следовательно всем числам $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Точка Q соответствует числу $-\frac{5\pi}{6}$, а следовательно всем числам $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, условию удовлетворяют числа t такие, что $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) Прямая $x = \frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках E и F (рис. 216). Условию удовлетворяют все точки дуги EF , кроме концов. Точка E

соответствует числу $\frac{\pi}{3}$ (см. пример 2), а следовательно всем числам $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Точка F , симметричная точке E относительно оси x , соответствует числу $-\frac{\pi}{3}$, а следовательно, всем числам $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, условию удовлетворяют числа t такие, что $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ: 1) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



Контрольные вопросы

1. ° Каким числам соответствуют на рис. 217:

а) середины дуг CD и DA ;

б) точки P, Q, R, S , делящие дугу BC на пять равных частей?

2. ° На какой из дуг AB, BC, CD, DA тригонометрической окружности (рис. 217) находится точка, соответствующая числу $\frac{7\pi}{6}; \frac{9\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}$?

3. ° Чему равняется длина дуги: а) ACD на рис. 217; б) EBF на рис. 218?

4. ° В какой четверти тригонометрической окружности содержится точка P_t , если:

а) $t = \frac{5\pi}{4}$; б) $t = -\frac{5\pi}{6}$; в) $t = 5,3\pi$; г) $t = -2,9\pi$?

5. Сколько различных точек среди точек $P_{\frac{3\pi}{2}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{7\pi}{2}}, P_{\frac{9\pi}{4}}$?

6. На какой из дуг AB, BC, CD, DA тригонометрической окружности (рис. 217) находится точка тригонометрической окружности, соответствующая числу $1,5; 4; -3; 7$?

7. Найдите числа из промежутка $[0; 2\pi]$, которым на тригонометрической окружности соответствует точка с: а) ординатой 1; б) ординатой 0; в) ординатой -1 ; г) абсциссой 0; д) абсциссой 1; е) абсциссой -1 .

8. Какие координаты имеют точки тригонометрической окружности, соответствующие числам: а) 3π ; б) $\frac{19\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) 2π ?

9. Как связаны между собой числа t и t' , если $P_t = P_{t'}$?

10. Могут ли совпадать какие-то точки, которые соответствуют числам: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ?

11. ° Каким числам соответствуют на тригонометрической окружности (рис. 218) точки:

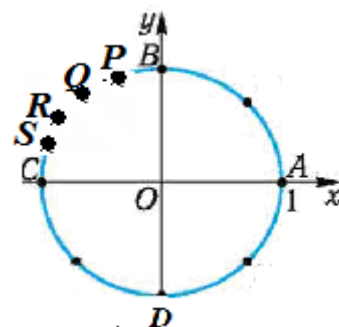


Рис. 217

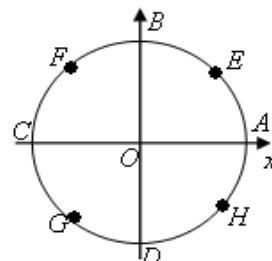


Рис. 218

- а) E, F, G, H , делящие соответственно дуги AB, BC, CD, DA пополам;
 б) делящие дуги AB, BC, CD, DA на три равные части?

Задачи

239. Изобразите на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам:

1) $^\circ -\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6};$ 2) $1,5; 2,3; 4,5; -2; -6;$ 3) $5\pi;$
 $-\frac{27\pi}{4}; \frac{7\pi}{3}; -\frac{15\pi}{2}.$

240. Найдите прямоугольные координаты точек:

1) $^\circ P_{\frac{7\pi}{6}}, P_{\frac{3\pi}{4}}, P_{\frac{5\pi}{3}};$ 2) $^\circ$
 $P_{\frac{5\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{2\pi}{3}};$ 3) $P_{\frac{11\pi}{6}}, P_{\frac{5\pi}{4}}, P_{\frac{4\pi}{3}};$ 4) $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{2\pi}{3}}.$

241. Найдите координаты точки тригонометрической окружности, полученную при повороте точки $(1; 0)$ на угол:

1) $^\circ 3\pi$, 2) $^\circ -2\pi$, 3) $^\circ 4,5\pi$, 4) $^\circ -5, 5\pi$, 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 8)

225° ; 9) -60° .

242. Найдите углы, на которые следует повернуть точку $(1; 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку с координатами:

1) $^\circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$ 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$ 3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$ 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$
 5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right);$ 6) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right);$ 7) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$ 8) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

243. Изобразите на тригонометрической окружности и запишите, каким числам соответствуют точки с: 1) ординатой $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) абсциссой $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) ординатой $\frac{1}{2}$.

244. Для каждого из приведенных значений $t \left(t = \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi; \pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{11}{6}\pi \right)$

укажите такое значение t' , чтобы точки P_t и $P_{t'}$ стали симметричными относительно: 1) начала координат; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат; 4)* прямой $y = x$; 5) * прямой $y = -x$.

245*. Числа заданы формулой: 1) $t = \frac{\pi}{2} \cdot k$, 2) $t = \pi \cdot k$, 3) $t = \frac{\pi}{4} \cdot k$, 4)

$t = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1)$, де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Изобразите на координатной прямой и на тригонометрической окружности точки, соответствующие этим числам. Сколь-

ко таких точек будет на координатной прямой и сколько на тригонометрической окружности?

246*. Найдите координаты концов дуг тригонометрической окружности, заданных формулой: 1) $t = \frac{k\pi}{3}$; 2) $t = \frac{\pi}{6}(2k+1)$; 3) $t = \frac{\pi}{4}(2k+1)$; 4) $t = \frac{\pi}{2} \cdot k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$).

247*. Найдите на тригонометрической окружности и запишите, каким числом соответствуют точки: 1) ординаты которых больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) абсциссы которых меньше $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

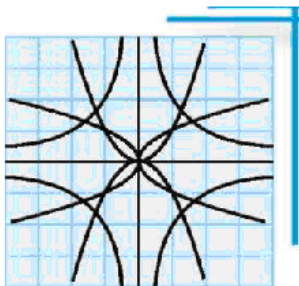


Упражнения для повторения

248. Найдите углы равнобедренного треугольника, если отношение его высоты, проведенной из вершины: к основанию равняется $1:2\sqrt{3}$; 2) к боковой стороне равняется $1:\sqrt{2}$.

249. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равняется 1 см, а один из острых углов равняется α . Найдите катеты треугольника, если: 1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$; 3) $\alpha = 60^\circ$.

250. Постройте на координатной прямой точки: $A(3)$; $B(-2)$; $C(0)$; $D(-0,5)$. Чему равняются длины отрезков AC , BC , AD , BD ?



§ 16. Тригонометрические функции числового аргумента

В данном параграфе обобщаются понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.

Пусть задано произвольное число t , которое определяет точку P_t на тригонометрической окружности. Обозначим через $(x; y)$ координаты точки P_t (рис. 219).

Синусом числа t называется ордината точки P_t .

Косинусом числа t называется абсцисса точки P_t .

Тангенсом числа t называется отношение синуса числа t к его косинусу.

Котангенсом числа t называется отношение косинуса числа t к его синусу.

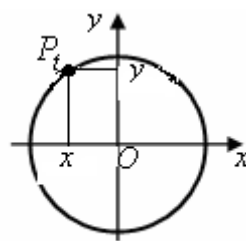


Рис. 219

$$\sin t = y$$

$$\cos t = x$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{x}{y}$$

Каждому числу t отвечает единственная точка P_t тригонометрической окружности, а, следовательно, и единственные абсцисса и ордината этой точки. Собственно, именно поэтому $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ являются функциями переменной t , которая принимает произвольные значения из множества вещественных чисел. Их называют **тригонометрическими функциями**.

Для углов, рассматриваемых в геометрии, приведенные определения совпадают с определениями соответствующих величин в геометрии.

Пример 1. Найти значения тригонометрических функций чисел $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

□ Для решения задачи необходимо найти прямоугольные координаты точек тригонометрической окружности, соответствующих указанным числам, то есть точек $A = P_0 = P_{2\pi}$, $B = P_{\frac{\pi}{2}}$, $C = P_{\pi}$, $D = P_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 220). Учитывая, что радиус тригонометрической окружности равен 1, имеем: $P_0(1; 0)$, $P_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$, $P_{\pi}(-1; 0)$, $P_{\frac{3\pi}{2}}(0; -1)$. Следовательно,

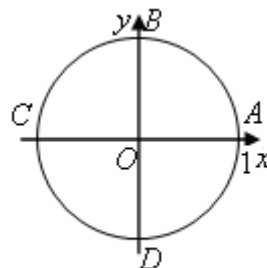


Рис. 220

$$\sin 0 = \sin 2\pi = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin \pi = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$\cos 0 = \cos 2\pi = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \pi = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 = \operatorname{tg} \pi = \operatorname{tg} 2\pi, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} \text{ не существуют.}$$

Аналогично $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0 = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{ctg} 0$, $\operatorname{ctg} \pi$ не существуют, ибо на нуль

делить нельзя. ■

Пример 2. Найти значения тригонометрических функций числа $\frac{5\pi}{6}$.

□ Необходимо сначала найти прямоугольные координаты точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$. По модулю они совпадают с координатами точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 221). Применяя соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, получим, что $P_{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $P_{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (см. пример 4 § 15).

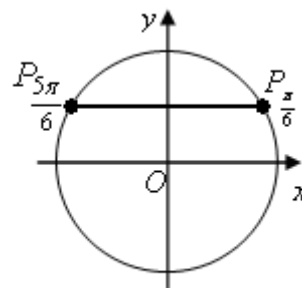


Рис. 221

Поэтому, учитывая определения синуса и косинуса произвольного числа, полу-

$$\text{чим: } \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}; \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\cos \frac{5\pi}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\sin \frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{3}.$$

Знаки значений тригонометрических функций числа t определяются положением точки P_t на тригонометрической окружности.

Пример 3. Определить знаки чисел: $\sin 20^\circ$; $\cos 130^\circ$; $\operatorname{tg} 214^\circ$; $\operatorname{ctg} 356^\circ$.

□ Построим на тригонометрической окружности точки, соответствующие углам вращения на 20° ; 130° ; 214° ; 356° (рис. 222). Далее, воспользовавшись определениями тригонометрических функций, будем иметь: $\sin 20^\circ > 0$, $\cos 130^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 214^\circ = \frac{\sin 214^\circ}{\cos 214^\circ} > 0$, $\operatorname{ctg} 356^\circ = \frac{\cos 356^\circ}{\sin 356^\circ} < 0$. ■

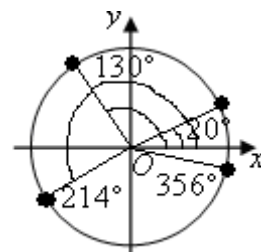


Рис. 222

При вычислении значений тригонометрических функций числа (или, что то же самое, угла вращения, заданного в радианной мере), с помощью калькулятора переключатель устанавливают в положение P (радиан). То же самое делают при нахождении значения аргумента по заданному значению тригонометрической функции.

Синус и косинус произвольного числа мы определили геометрически, но тангенс и котангенс ввели как некоторые отношения синуса и косинуса. Однако их также можно охарактеризовать геометрически.

Прямая, проходящая через точку $A(1; 0)$ перпендикулярно оси абсцисс, называется линией тангенса (рис. 223).

Линия тангенсов имеет уравнение $x = 1$, ее можно считать координатной прямой с направлением и масштабом оси y и с началом в точке A .

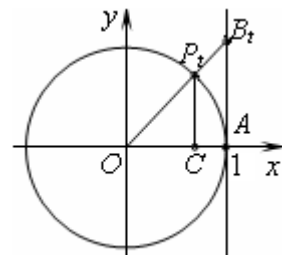


Рис. 223

Каждому числу $t \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, можно поставить в соответствие точку B_t на линии тангенса, которая является точкой пересечения прямой OP_t с линией тангенса. Докажем, что ордината точки B_t равняется $\operatorname{tg} t$, если точка P_t находится в I четверти.

Из подобия треугольников OP_tC и OB_tA имеем: $\frac{P_tC}{OC} = \frac{AB_t}{OA}$, или $\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{AB_t}{1}$, $\operatorname{tg} t = AB_t$.

Этот вывод остаётся справедливым и тогда, когда точка P_t содержится не в первой четверти тригонометрической окружности. Предлагаем убедиться в

этом самостоятельно.



Прямая, проходящая через точку $P_{\frac{\pi}{2}}$ перпендикулярно оси ординат, называется линией котангенса (рис. 224).

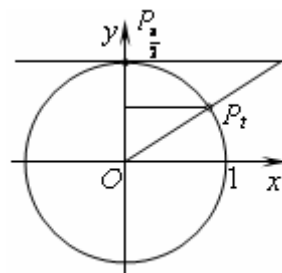


Рис. 224

Линия котангенсов имеет уравнение $y = 1$, ее также можно считать координатной прямой с направлением и масштабом оси x и с началом в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$.

Докажите самостоятельно, что абсцисса точки пересечения прямой OP_t с линией котангенса равняется $\operatorname{ctg} t$.

Пример 4. Изобразить на тригонометрической окружности точки P_t , если: 1) $\operatorname{tg} t = 2$; 2) $\operatorname{tg} t = -0,5$; 3) $\operatorname{ctg} t = 1,5$.

□ 1) Отложим на линии тангенсов в положительном направлении отрезок, равный 2 (напомним, что радиус окружности равняется 1). Через полученную точку и центр тригонометрической окружности проведем прямую. Точки F и F_1 пересечения этой прямой с окружностью и будут искомыми (рис. 225 а).

2) В отрицательном направлении линии тангенса отложим отрезок длиной 0,5. Далее задача решается аналогично предыдущей. Точки G и G_1 являются искомыми (рис. 225 а).

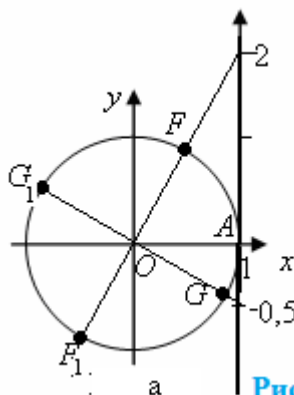
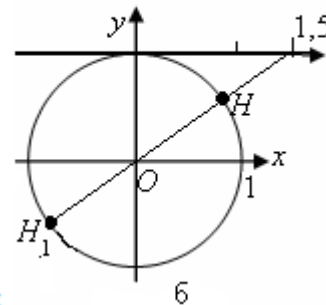


Рис. 225

3) Отрезок длиной 1,5 откладываем в положительном направлении линии котангенса. Далее задача решается аналогично заданию 1). Точки H и H_1 являются искомыми (рис. 225 б). ■



Определения тригонометрических функций дают возможность решать разнообразные задачи, в частности, сравнивать значения тригонометрических функций, находить все числа по известным значениям синуса, косинуса, тангенса.

Пример 5. Расположить по возрастанию числа:

1) $\cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{5\pi}{7}, \cos \frac{10\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{3}$; 2) $\sin 2, \sin 3, \sin 4, \sin 5$.

□ 1) Изобразим на тригонометрической окружности точки $P_{\frac{\pi}{8}}, P_{\frac{5\pi}{7}}, P_{\frac{10\pi}{9}}, P_{\frac{5\pi}{3}}$ (рис. 226). При этом следует

иметь в виду, что $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7} < \pi, \pi < \frac{10\pi}{9} < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi, 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$. Учитывая, что косинус числа t — это абсцисса точки P_t , бу-

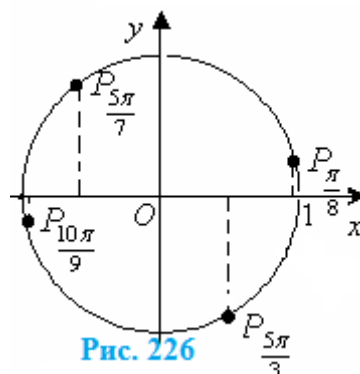


Рис. 226

дем иметь: $\cos \frac{10\pi}{9} < \cos \frac{5\pi}{7} < \cos \frac{5\pi}{3} < \cos \frac{\pi}{8}$.

2) Изобразим на тригонометрической окружности точки P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 227). Видим, что ординаты точек P_4 и P_5 отрицательны, но ордината точки P_5 больше по модулю, поэтому она является наименьшей среди ординат четырех точек. Ординаты точек P_2 и P_3 положительны, причем, ордината точки P_2 больше, поэтому она является наибольшей среди ординат четырех точек. Следовательно, $\sin 5 < \sin 4 < \sin 3 < \sin 2$. ■

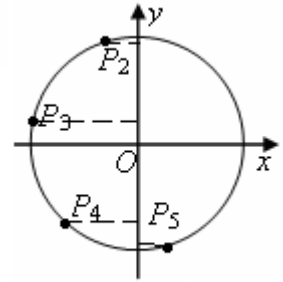


Рис. 227

Ответ: 1) $\cos \frac{10\pi}{9} < \cos \frac{5\pi}{7} < \cos \frac{5\pi}{3} < \cos \frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 5 < \sin 4 < \sin 3 < \sin 2$.

Пример 6. Найти все значения t , удовлетворяющие условию: 1) $\sin t = -1$;

2) $\cos t = \frac{1}{2}$.

□ 1) По определению, $\sin t$ равняется ординате точки P_t тригонометрической окружности. Ординату -1 имеет единственная точка D тригонометрической окружности на рис. 228. Этой точке соответствуют числа $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и только они.

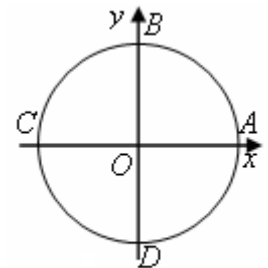


Рис. 228

2) Речь идет, в первую очередь, об отыскании точек с абсциссой $\frac{1}{2}$. Прямая $x = \frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках E и F (рис. 229). Длины дуг AE и AF составляют две трети длин дуг AB и DA , а поэтому эти точки соответствуют числам $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$. Следовательно, $E = P_{\frac{\pi}{3}}, F = P_{-\frac{\pi}{3}}$. Таким образом, равенству $\cos t = \frac{1}{2}$ удовлетворяют серии чисел:

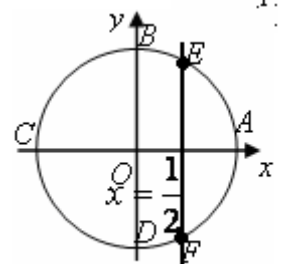


Рис. 229

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ: 1) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

В приведенном примере рассмотрены простейшие тригонометрические уравнения, то есть уравнения, содержащие неизвестную под знаком тригонометрической функции. В дальнейшем они будут рассматриваться подробнее.



Как уже отмечалось, каждая точка на тригонометрической окружности соответствует бесконечному множеству вещественных чисел. Если два числа отличаются друг от друга на число, кратное 2π (длина единичной окружности), то им соответствует

одна и та же точка на тригонометрической окружности.

Пример 7. Найти все числа t , удовлетворяющие условию $\cos t = 0$ и принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$.

□ Сначала необходимо найти на тригонометрической окружности точки, абсциссы которых равны нулю. Таких точек две: $P_{\frac{\pi}{2}}$ и $P_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 230). Числа

$t_1 = \frac{\pi}{2}$ и $t_2 = \frac{3\pi}{2}$ удовлетворяют условию $\cos t = 0$ и принадлежат промежутку $[0; 2\pi]$.

Каждая из точек $P_{\frac{\pi}{2}}$ и $P_{\frac{3\pi}{2}}$ соответствует бесконечному множеству чисел, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π . Таким образом, серии чисел

$$t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad t_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяют условию $\cos t = 0$ и принадлежат промежутку $(-\infty; \infty)$. Поскольку $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$, то $t_2 = \frac{\pi}{2} + \pi(2k+1)$. Полученные две серии чисел можно записать так: $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. При $n = 2k$ имеем первую серию, при $n = 2k+1$ — вторую.

Из найденных выше чисел нужно выбрать те, которые содержатся в промежутке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$. Для этого решаем относительно n неравенство:

$$-\frac{7\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{11\pi}{4}.$$

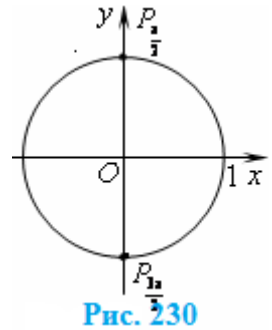
Имеем: $-\frac{9}{4} \leq n \leq \frac{9}{4}$, то есть n принимает целые значения $-2; -1; 0; 1; 2$.

Следовательно, подставив эти значения n в формулу $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, найдем искомые значения t : $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$. ■

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

Пример 8. Найти все числа, удовлетворяющие условию: 1) $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin t \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



□ 1) Решение задания сводится к нахождению на тригонометрической окружности всех точек, имеющих ординату, большую $\frac{\sqrt{2}}{2}$, и записи всех чисел t , которым соответствуют эти точки. Для этого проведем прямую $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Она пересекает тригонометрическую окружность

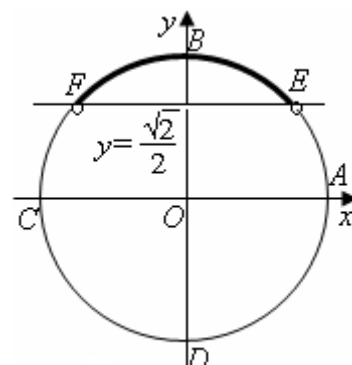


Рис. 231

в точках E и F (рис. 231). Условию удовлетворяют числа, соответствующие тем точкам тригонометрической окружности, которые лежат выше этой прямой (эти точки изображены жирной линией). Речь идет о точках дуги, началом которой является точка E , а концом — точка F . Конечные точки не удовлетворяют условию, поэтому на рисунке они изображены "выколотыми". Точка E соответствует числу $\frac{\pi}{4}$, а точка F —

числу $\frac{3\pi}{4}$ (напомним, что точка E делит дугу AB пополам, а точка F — дугу BC

пополам). Имеем: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. Эта запись означает объедине-

ние промежутков: $\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi; \frac{3\pi}{4} - 2\pi\right), \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi; \frac{3\pi}{4} + 2\pi\right), \dots$, то есть

промежутков $\left(-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right), \dots$

2) Для решения задания проведем прямую $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Она пересекает тригонометрическую окруж-

ность в точках M и N (рис. 232). Точка M является серединой дуги CD , а точка N — серединой дуги DA . По-

этому они соответствуют числам $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$. Заданному

условию удовлетворяет объединение промежутков $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

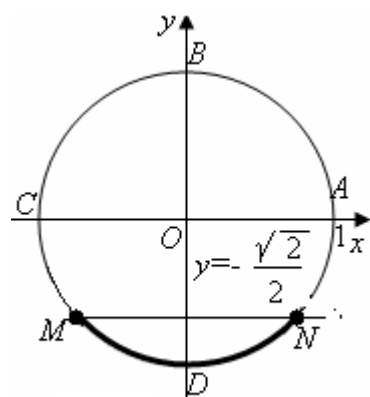


Рис. 232

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

В приведенном примере рассмотрены простейшие тригонометрические неравенства, то есть неравенства, содержащие неизвестную под знаком тригонометрической функции. В дальнейшем они будут рассматриваться подробнее.

Контрольные вопросы



1. ° Может ли синус некоторого числа равняться $\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}$?

2. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать: а) $^{\circ} \sin t$; б) $^{\circ} \cos t$; в) $\operatorname{tg} t$?
3. $^{\circ}$ Возможно ли равенство $1 + \cos t = 3$?
4. Сколько чисел t , удовлетворяющих условию $\cos t = 1$, содержатся в промежутке $[0; 200]$?
5. Всегда ли существует на промежутке $[0; \pi]$ число, удовлетворяющее условию $\operatorname{tg} t = a$, где a — произвольное вещественное число?
6. Сколько чисел t , удовлетворяющих условию $|\sin t| = 0,4$, содержатся в промежутке $[0; 2\pi]$?
7. Верно ли, что числам $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$ соответствует одна и та же точка на линии тангенсов?
8. Имеется ли точка на линии котангенсов, которая соответствует числу 5π ?
9. Существуют ли на промежутке $[0; \pi]$ числа, удовлетворяющие условию $\sin t = -0,1$?
10. Каким числам нельзя поставить в соответствие точку на линии котангенса?
11. Верно ли, что $\sin(-3) > \sin 4$?
12. Какие числа удовлетворяют условию: 1) $\sin t \geq 1$; 2) $\sin t \leq 1$; 3) $\cos t \leq -1$; 4) $\cos t \geq -1$?
13. Какой знак имеет сумма $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, якщо α, β, γ — углы треугольника?

Задачи

251 $^{\circ}$. Даны координаты точки P_t на тригонометрической окружности. Вычислите

$$\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t, \operatorname{ctg} t: 1) \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right); 2) \left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right); 3) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right); 4) \left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

252 $^{\circ}$. Вычислите значения тригонометрических функций чисел:

$$1) \frac{3\pi}{4}; \quad 2) \frac{2\pi}{3}; \quad 3) \frac{5\pi}{4}; \quad 4) \frac{7\pi}{6}; \quad 5) \frac{4\pi}{3}; \quad 6) \frac{5\pi}{3}.$$

253 $^{\circ}$. Определите знаки тригонометрических функций $\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t, \operatorname{ctg} t$ для t , равных:

$$1) \frac{7\pi}{6}; \quad 2) -\frac{5\pi}{3}; \quad 3) \frac{12\pi}{7}; 4) -\frac{7\pi}{6}; 5) -\frac{4\pi}{3}; \quad 6) \frac{7\pi}{9}; 7) \frac{13\pi}{6}.$$

254 $^{\circ}$. Вычислите:

$$\begin{aligned} 1) & \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi - 2\operatorname{tg} 2\pi + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}; \quad 2) \sin \frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi - 2\operatorname{tg} \pi + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}; \\ 3) & \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos \frac{3\pi}{2} - 2\operatorname{tg} 0 + \operatorname{ctg} \left(-\frac{3\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

$$4) \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\operatorname{tg}3\pi + \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right).$$

255. Изобразите на тригонометрической окружности точки P_t , если: 1) $\operatorname{ctg} t = 1$; 2) $\operatorname{ctg} t = 2$; 3) $\operatorname{ctg} t = -0,5$; 4) $\operatorname{tgt} t = 1,5$; 5) $\operatorname{tgt} t = -1$.

256. Найдите все числа из промежутка $[0; 2\pi]$, удовлетворяющие условию:

- 1) $\sin t = 0$; 2) $\cos t = 1$; 3) $\operatorname{tg} t = 0$;
4) $\cos t = -1$; 5) $\operatorname{ctg} t = 0$; 6) $\sin t = -1$.

257. Найдите все числа, удовлетворяющие условию: 1) $\cos t = \frac{1}{2}$; 2) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

258*. Найдите все числа, принадлежащие интервалу $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{10\pi}{3}\right)$ и удовлетворяющие условию: 1) $\sin t = -1$; 2) $\sin t = 0$; 3) $\sin t = 1$; 4) $\cos t = 0$; 5) $\cos t = 1$; 6) $\cos t = -1$.

259*. Найдите все числа, удовлетворяющие условию: 1) $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin t \geq -\frac{1}{2}$.

260*. Выразите с помощью одной формулы серии углов ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$):

- 1) $t = \pi k + \frac{2\pi}{3}$, $t = \pi k + \frac{\pi}{6}$; 2) $t = \pi k$, $t = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$;
3) $t = \pi(2k + 1)$, $t = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 4) $t = \frac{\pi k}{4}$, $t = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.

261*. Удалите из следующих формул ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) повторяющиеся углы:

- 1) $t = \frac{\pi k}{2}$, $t = \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{6}$; 2) $t = \frac{\pi k}{2}$, $t = \frac{\pi k}{5}$; 3) $t = \frac{\pi k}{4}$, $t = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.

Упражнения для повторения



262. Известно, $\sin \alpha = a$. Найдите $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если α :

- 1) острый угол прямоугольного треугольника;
2) тупой угол треугольника.

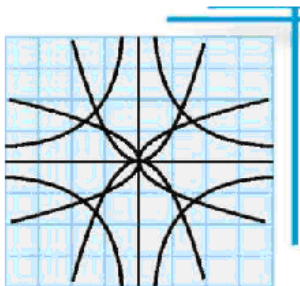
263. Отношение катетов прямоугольного треугольника равняется 4: 3.

Найдите синусы и косинусы острых углов треугольника.

264. Докажите, что точка с координатами $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ лежит на окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

265. Из заданного равенства выразите x через y и y через x :

- 1) $x^2 + y^2 = 4$, если $x > 0$, $y > 0$; 2) $x^2 - y^2 = 4$, если $x > 0$, $y < 0$;
3) $1 + x^2 = \frac{1}{y^2}$, если $x < 0$, $y > 0$; 4) $1 - \frac{1}{x^2} = y^2$, если $x < 0$, $y < 0$,



§ 17. Основные соотношения между тригонометрическими функциями

В данном параграфе устанавливаются соотношения между тригонометрическими функциями, позволяющие по значению одной из них при определенных условиях находить значения всех остальных.



1. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него

Найдем связь между синусом и косинусом одного и того же аргумента. Пусть $P_t(x(t); y(t))$ — точка тригонометрической окружности, соответствующая числу t (рис. 233). Тогда, по определению синуса и косинуса, имеют место следующие равенства:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

Так как точка P_t лежит на тригонометрической окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$. Поэтому для произвольного t выполняется равенство:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Это равенство называется **основным тригонометрическим тождеством**.

К основным соотношениям между тригонометрическими функциями одного аргумента относят также равенства:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Из приведенных выше равенств вытекают другие зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Первое из этих соотношений является простым следствием определений тангенса и котангенса. Докажем второе. Имеем:

$1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$. Третье соотношение выводится аналогично. Рекомендуем сделать это самостоятельно.



Приведенные соотношения позволяют по значению одной из тригонометрических функций числа t вычислять квадраты значений других.

Например, если $\cos t = \frac{1}{3}$, то $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Для

нахождения самих значений нужна дополнительная информация, которая бы позволяла устанавливать их знаки.

В предыдущем параграфе рассматривались примеры, где приходилось определять знаки значений тригонометрических функций, пользуясь их определениями. Обобщим эти рассуждения, установив, при каких значениях аргумента тригонометрические функции принимают положительные значения, а при каких — отрицательные.

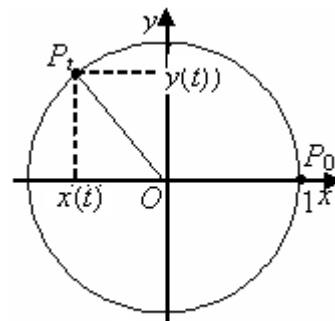


Рис. 233

Синус числа t — это ордината точки P_t (см. рис. 233). Положительными являются ординаты тех точек, которые расположены над осью абсцисс, то есть находятся в первой или во второй четверти. Если точка P_t расположена под осью абсцисс, то есть в третьей или в четвертой четверти, то ее ордината отрицательна (рис. 234).



Рис. 234

Свойство 1. Синус числа t принимает положительные значения, если точка P_t находится в первой и второй четвертях, а отрицательные — если в третьей и четвертой.

Далее рассуждаем аналогично. Косинус числа t — это абсцисса точки P_t . Положительными являются абсциссы тех точек, которые расположены правее оси ординат, то есть находятся в первой или в четвертой четверти. Если точка P_t расположена левее оси ординат, то есть во второй или в третьей четверти, то ее абсцисса отрицательна (рис. 235).

Знаки косинуса

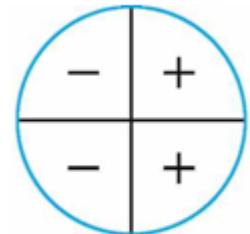


Рис. 235

Свойство 2. Косинус числа t принимает положительные значения, если точка P_t находится в первой и четвертой четвертях, а отрицательные — если во второй и третьей.

Согласно определению, $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, поэтому $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ принимают положительные значения, если $\sin t$ и $\cos t$ имеют одинаковые знаки. Соответственно, $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ принимают отрицательные значения, если $\sin t$ и $\cos t$ имеют различные знаки (рис. 236).

Знаки тангенса и котангенса

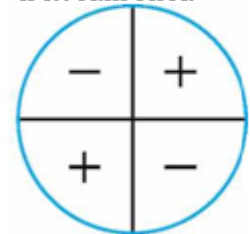


Рис. 236

Свойство 3. Тангенс и котангенс числа t принимают положительные значения, если точка P_t находится в первой и третьей четвертях, а отрицательные — если во второй и четвертой.

Пример 1. Определить знаки чисел: 1) $\sin \frac{5\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$.

□ 1) Определим сначала, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, которая соответствует числу $\frac{5\pi}{7}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7} < \pi$, то числу $\frac{5\pi}{7}$ соответствует точка, находящаяся во второй четверти. Поэтому $\sin \frac{5\pi}{7} > 0$.

2) Поскольку $\frac{3\pi}{2} < \frac{7\pi}{4} < 2\pi$, то точка $P_{\frac{7\pi}{4}}$ расположена в четвертой четверти и $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} < 0$. ■

Ответ: 1) $\sin \frac{5\pi}{7} > 0$; 2) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} < 0$.

Пример 2. Определить знаки чисел: $\sin 2$; $\cos 3$; $\operatorname{tg} 4$; $\operatorname{ctg} 5$.

□

Пользуясь

соотношениями

$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi, \frac{\pi}{2} < 3 < \pi, \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$, отметим на тригонометрической окружности точки P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 237). Учитывая, что $\sin 2$ — это ордината точки P_2 , то приходим к выводу, что $\sin 2 > 0$. Поскольку $\cos 3$ — это абсцисса точки P_3 , то $\cos 3 < 0$. Знаки $\operatorname{tg} 4$ и $\operatorname{ctg} 5$ определим, пользуясь определениями тангенса и котангенса: $\operatorname{tg} 4 = \frac{\sin 4}{\cos 4} > 0$, так как $\sin 4 < 0, \cos 4 < 0$,

$$\operatorname{ctg} 5 = \frac{\cos 5}{\sin 5} < 0, \text{ ибо } \sin 5 < 0, \cos 5 > 0. \blacksquare$$

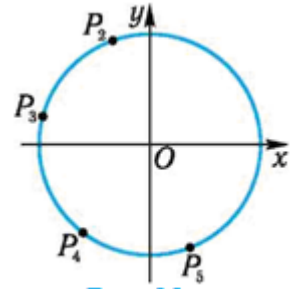


Рис. 237

Ответ: $\sin 2 > 0; \cos 3 < 0; \operatorname{tg} 4 > 0; \operatorname{ctg} 5 < 0$.

Пример 3. Известно, что $\sin t = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти $\cos t, \operatorname{tg} t, \operatorname{ctg} t$.

□ Из тождества $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ находим: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - (0,8)^2 = 0,36$.

Поскольку $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то точка P_t расположена во второй четверти и $\cos t < 0$.

Поэтому $\cos t = -0,6; \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{4}{3}; \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{3}{4}. \blacksquare$

Ответ: $-0,6; -\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}$.

Пример 4. Упростить выражение $\sin^2 \alpha - (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \cos^2 \alpha$.

□ Применяя последовательно равенство $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ и основное тригонометрическое тождество, будем иметь:

$$\sin^2 \alpha - (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha. \blacksquare$$

Ответ: $-\cos^2 \alpha$.

Пример 5. Доказать тождество: $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$.

□ Преобразуем левую часть тождества. Приведя дроби к общему знаменателю, применяя основное тригонометрическое тождество, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\blacksquare$



Рассмотрим более сложные примеры на вычисление значений тригонометрических величин и упрощение тригонометрических выражений.

Пример 6. Вычислить значение выражения $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \cos \alpha}$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$.

□ Сначала определим, в какой четверти находится угол α . Поскольку синус этого угла отрицателен, а котангенс — положителен, то угол α содержится в третьей четверти. С помощью основного тригонометрического тождества найдем значение $\cos^2 \alpha$:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

Поскольку в третьей четверти косинус принимает отрицательные значения, то $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. По определению тангенса найдём значение $\operatorname{tg} \alpha$:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Подставим найденные значения в данное выражение:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \left(1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot (3 + \sqrt{5})} = \frac{6 \cdot \sqrt{5} \cdot (3 - \sqrt{5})}{5 \cdot (9 - 5)} = \frac{3(3\sqrt{5} - 5)}{10}. \blacksquare$$

Ответ: $\frac{3(3\sqrt{5} - 5)}{10}$.

Пример 7. Доказать тождество:

$$\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

□ Заменим в левой части $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ выражениями из их определений и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) &= \sin^3 \alpha \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) + \cos^3 \alpha \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = \\ &= \sin^3 \alpha \left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) + \cos^3 \alpha \left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = \sin^2 \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) + \\ &+ \cos^2 \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) (\sin \alpha + \cos \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha. \blacksquare \end{aligned}$$



Контрольные вопросы

1. ° Какому равенству удовлетворяют координаты точек тригонометрической окружности?
2. ° Дана точка $P_t\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ на тригонометрической окружности. Чему равняется:
а) $\sin t$; б) $\cos t$; в) $\operatorname{tg} t$; г) $\operatorname{ctg} t$?

3. Могут ли синус и косинус одного и того же аргумента равняться соответственно: а) $^{\circ} 0$ и 0 ; б) $^{\circ} 1$ и 0 ; в) $^{\circ} 1$ и -1 ; г) $0,6$ и $0,8$; д) $0,5$ и $0,5$; е) $-0,4$ и $0,7$; ж) $\frac{12}{13}$ и $\frac{5}{13}$; з) $*$ a и $\frac{1}{a}$?
4. Верно ли, что $\cos t = 0,6$, если $\sin t = 0,8$?
5. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же аргумента равняться соответственно: а) 1 и 0 ; б) 1 и 1 ; в) 1 и -1 ; г) $\sqrt{3}$ и $\frac{1}{3}$; д) $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$; е) $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$?
6. Верно ли, что $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}-1$, если $\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$?
7. Для каких точек P_t тригонометрической окружности имеют одинаковые знаки: а) $\sin t$ и $\cos t$; б) $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$?
8. Где расположена точка P_t на тригонометрической окружности, если:
- а) $^{\circ} \sin t < 0$; б) $^{\circ} \operatorname{tg} t > 0$; в) $\cos 2t > 0$; г) $\sin t \cos t > 0$; д) $\frac{\operatorname{tg} t}{\cos t} < 0$; е) $|\sin t| = \sin t$; ж) $|\cos t| = -\cos t$?
9. Значения каких тригонометрических функций углов треугольника могут быть отрицательными?
10. Известно, что $\cos \alpha = 0,5$. Чему равняется $\sin \alpha$, если α — угол треугольника?
11. * Чему равняется $\cos t$, если $\sin t = -\sqrt{1-a^2}$?
12. * Какой знак имеет $\operatorname{tg}(\sin t)$ при $-1 \leq t \leq 1$?

Задачи

266. Определите знаки выражений:

- 1) $^{\circ} \sin 55^{\circ}$; 2) $^{\circ} \cos 173^{\circ}$; 3) $^{\circ} \operatorname{tg} 127^{\circ} \sin 239^{\circ}$; 4) $^{\circ} \sin \frac{3\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$;
 5) $\sin 2 \cdot \cos 1 \cdot \operatorname{tg}(-3)$; 6) $*$ $\cos \frac{4\pi}{5} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{9} \sin t$.

267. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определите знак числа:

- 1) $^{\circ} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $^{\circ} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\sin(2\alpha - \pi)$; 4) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$;
 5) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$; 7) $\cos(\pi - \alpha)$; 8) $\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$.

268. Вычислите значение каждой из тригонометрических функций, если:

- 1) $^{\circ} \cos t = 0,8$; $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$; 2) $^{\circ} \sin t = -\frac{12}{13}$; $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$;
 3) $\operatorname{tg} t = -2,4$; $\frac{\pi}{2} < t < \pi$; 4) $\operatorname{ctg} t = 3$; $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

$$5) \circ \sin t = -0,6; \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}; \quad 6) \circ \cos t = \frac{5}{13}; \pi < t < 2\pi;$$

$$7) \operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}; 0 < t < \pi; \quad 8) \operatorname{ctg} t = 2; \frac{3\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{2}.$$

269. Найдите координаты точки P_t на тригонометрической окружности, если:

$$1) \operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}; \quad 2) \operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} t = 2 + \sqrt{3}; \quad 4) \operatorname{ctg} t = 1 + \sqrt{2}.$$

270. Вычислите:

$$1) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \cos \alpha}, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{2}{3} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha > 0; \quad 2) \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ если } \cos \alpha = -\frac{3}{4} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha < 0.$$

271. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите значение выражения:

$$1) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}; \quad 2) \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad 3) \frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha};$$

$$4) \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}; \quad 5) \frac{\cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}; \quad 6) \frac{2 - \sin^2 \alpha}{3 + \cos^2 \alpha}.$$

272. Упростите выражение:

$$1) \circ \frac{\sin^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}; \quad 2) \circ \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha; \quad 3) \circ \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha;$$

$$4) \circ \cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha; \quad 5) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 6) \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$7) \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha; \quad 8) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha);$$

$$9) * \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad 10) * \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad 11) * \sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha}}.$$

273. Докажите тождество:

$$1) \circ \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}; \quad 2) \circ \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$3) \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha; \quad 4) \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$5) \sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha;$$

$$6) \frac{1}{\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha;$$

$$7) * \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

274. Дано $\cos \alpha + \sin \alpha = 1,3$. Найдите:

$$1) \cos \alpha \sin \alpha; \quad 2) \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha; \quad 3) * \cos \alpha - \sin \alpha; \quad 4) * \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha.$$

275. Сумма тангенса и котангенса некоторого числа равна 3. Найдите:

- 1) сумму их квадратов;
- 2) сумму их кубов;
- 3) сумму их четвёртых степеней;
- 4) * их разность.

276. Вычислите:

- 1) $\frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$, если $\sin t \cdot \cos t = 0,48$;
- 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

277. Докажите неравенство: 1) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \geq 2$.

При каких значениях α в каждом из этих неравенств имеет место равенство?



Упражнения для повторения

278. Найдите координаты точек тригонометрической окружности, полученных поворотом точки $(1; 0)$ на угол:

- 1) 3π ; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) $2,5\pi$; 4) $-7,5\pi$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$; 7) 120° ; 8) -60° .

279. На тригонометрической окружности постройте точку, полученную поворотом точки $(1; 0)$ на угол:

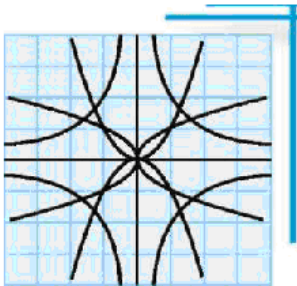
- 1) $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

280. Найдите все углы, на которые следует повернуть точку $(1; 0)$ тригонометрической окружности, чтобы построенная точка имела координаты:

- 1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 0)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; -1)$.

281. Даны углы: 30° ; 64° ; 10° ; α ; $45^\circ + \alpha$; $\frac{\pi}{8}$. Найдите углы: 1) которые дополняют их до прямых; 2) смежных с ними.

282.* Докажите, что при повороте фигуры расстояния между её точками сохраняются.



18. Формулы приведения

В данном параграфе расширяется класс соотношений между тригонометрическими функциями.



Существуют формулы, которые сводят вычисление значений тригонометрических функций для произвольного аргумента к вычислению их значений на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Эти формулы

называют **формулами приведения**.

Формулы приведения базируются на определениях тригонометрических функций и свойствах геометрических преобразований — поворотов. Рассмотрим на тригонометрической окружности точку P_t (рис. 238). Точку $P_{t+\pi}$ можно получить из точки P_t поворотом на угол π . Поэтому точки P_t и $P_{t+\pi}$ симметричны относительно начала координат. Их координаты — противоположные числа. Следовательно, имеют место следующие формулы:

$$\cos(\pi + t) = -\cos t; \quad \sin(\pi + t) = -\sin t.$$

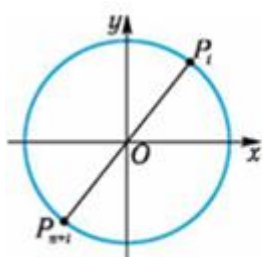


Рис. 238

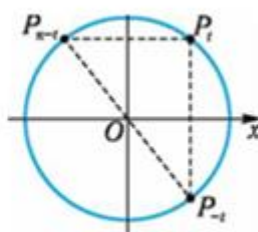


Рис. 239

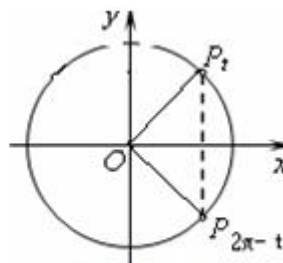


Рис. 240

Точки P_t и $P_{\pi-t}$ симметричны относительно оси ординат (рис. 239). Они имеют одинаковые ординаты и противоположные абсциссы. Это вытекает из того, что точки P_t и P_{-t} симметричны относительно оси абсцисс, а точки P_{-t} и $P_{\pi-t}$ симметричны относительно начала координат. Поэтому справедливы следующие формулы:

$$\cos(\pi - t) = -\cos t; \quad \sin(\pi - t) = \sin t.$$

Точки P_{-t} и $P_{2\pi-t}$ совпадают (2π — полный оборот!) (рис. 240), поэтому точки P_t и $P_{2\pi-t}$ симметричны относительно оси абсцисс, у них одинаковые абсциссы и противоположные ординаты. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\cos(2\pi - t) = \cos t; \quad \sin(2\pi - t) = -\sin t.$$

Так как точки P_t и $P_{2\pi+t}$ совпадают, то имеют место следующие формулы:

$$\cos(2\pi + t) = \cos t; \quad \sin(2\pi + t) = \sin t.$$



Основной особенностью приведенной группы формул является то, что в них участвует лишь одна тригонометрическая функция. Существует еще одна группа формул приведения для синуса и косинуса. Она отличается тем, что в каждой формуле содержатся обе тригоно-

метрических функции.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t.$$

Обоснование формул, приведенных в первых двух строках, проиллюстрировано на рис. 241 и 242. По свойству поворотов вокруг точки заштрихованные треугольники на рисунках равны друг другу. Остается воспользоваться смыслом координат точек, расположенных на тригонометрической окружности.

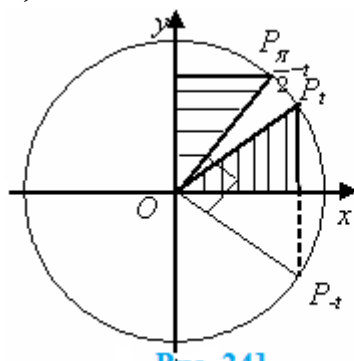


Рис. 241

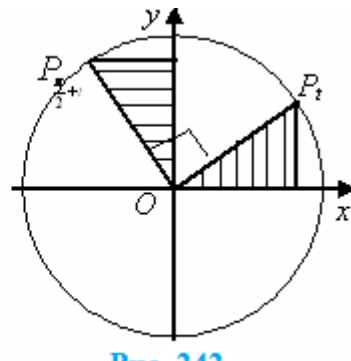


Рис. 242

Формулы, стоящие в последних двух строках, могут быть обоснованы, как и предыдущие, с помощью тригонометрической окружности. Их можно доказать **и** аналитически, пользуясь первой группой формул :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\sin t.$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sin t.$$

Формулы приведения для тангенса и котангенса вытекают из определений этих функций и соответствующих формул для синуса и косинуса. Например,

$$\operatorname{tg}(\pi + t) = \frac{\sin(\pi + t)}{\cos(\pi + t)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \operatorname{tg} t; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.$$

Обобщенно формулы приведения представлены в таблице 40.

Таблица 40

Аргумент \ Функция	$\frac{\pi}{2} - t$	$\frac{\pi}{2} + t$	$\pi - t$	$\pi + t$	$\frac{3\pi}{2} - t$	$\frac{3\pi}{2} + t$	$2\pi - t$	$2\pi + t$
sin	cos t	cos t	sin t	- sin t	- cos t	- cos t	- sin t	sin t
cos	sin t	- sin t	- cos t	- cos t	- sin t	sin t	cos t	cos t
tg	ctg t	- ctg t	- tg t	tg t	ctg t	- ctg t		
ctg	tg t	- tg t	- ctg t	ctg t	tg t	- tg t	- ctg t	ctg t

Анализируя таблицу, можно сформулировать так называемое мнемоническое правило, которое позволяет лучше запомнить формулы приведения.

1) В формуле приведения название функции не меняется, если к аргументу прибавлять $\pm \pi$ или же $\pm 2\pi$, и меняется (синус на косинус, тангенс на котангенс, косинус на синус, котангенс на тангенс), если прибавлять числа $\pm \frac{\pi}{2}$ или $\pm \frac{3\pi}{2}$.

2) Полученная функция в правой части равенства берется со знаком, совпадающим со знаком значения левой части, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Пример 1. Найти $\sin(180^\circ + \alpha)$.

□ В первую очередь, замечаем, что выражение содержит угол 180° или π рад. Поэтому название функции не изменяется, и в правой части равенства должен стоять $\sin \alpha$. Чтобы определить знак перед $\sin \alpha$, допускаем, что угол α острый. Тогда точка $P_{180^\circ + \alpha}$ лежит в третьей четверти тригонометрической окружности. Но синус в третьей четверти отрицателен. Поэтому перед $\sin \alpha$ следует поставить знак «-». Следовательно, $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$. ■

Ответ: $-\sin \alpha$.

Пример 2. Вычислить:

1) $\sin \frac{7\pi}{6}$; 2) $\cos \frac{3\pi}{4}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$; 4) $\sin 840^\circ$; 5) $\cos 1230^\circ$.

□ Для решения первых трех заданий представим число, стоящее под знаком тригонометрической функции, в виде суммы или разности чисел π или 2π и некоторого числа, меньшего $\frac{\pi}{2}$, и применим соответствующую формулу приведения. Необходимые рассуждения приведены при решении примера 1:

$$1) \quad \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}; \quad 2)$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

В двух последних заданиях выделим из приведенных углов вращения полные обороты, меры которых кратны 360° , их можно отбросить. Далее при-

меняем формулы приведения.

$$4) \sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

5)

$$\cos 1230^\circ = \cos(3 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ. } 1) - \frac{1}{2}; 2) - \frac{\sqrt{2}}{2}; 3) - \sqrt{3}; 4) \frac{\sqrt{3}}{2}; 5) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3. Упростить выражение:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \sin(2\pi - \alpha) (\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha))}.$$

□ Последовательно применяя формулы приведения, определения тангенса и котангенса, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \sin(2\pi - \alpha) (\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha))} = \frac{-\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (-\sin \alpha) (-\sin \alpha + \cos \alpha)} = \\ & = \frac{2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) \cos \alpha}{-\sin^2 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cos \alpha}{-\cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin^3 \alpha}. \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin^3 \alpha}.$$



Для тангенса и котангенса количество формул приведения можно уменьшить. Дело в том, что тангенс и котангенс произвольного аргумента можно привести к этим функциям аргумента из промежутка $[0; \pi]$. Действительно, каждой точке на линии тангенсов или линии котангенсов соответствует бесконечное множество чисел $t + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, поэтому тангенс и котангенс для $t + \pi n$ при всех $n \in \mathbf{Z}$ принимают одно и то же значение:

$$\operatorname{tg}(t + \pi n) = \operatorname{tg} t, \operatorname{ctg}(t + \pi n) = \operatorname{ctg} t.$$

Пользуясь этим выводом, для перехода к тангенсу или котангенсу острого угла достаточно знать формулы тангенса и котангенса для $\frac{\pi}{2} \pm t, \pi - t$ ($90^\circ \pm t, 180^\circ - t$).

$$\text{Пример 4. Вычислить: } 1) \operatorname{tg} \frac{15\pi}{4}; \quad 2) \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{3}.$$

□ Выделим из аргумента целое количество значений π .

$$1) \operatorname{tg} \frac{15\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1;$$

$$2) \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(3\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}. \blacksquare$$

Ответ: $-1; -\sqrt{3}$.

Пользуясь рассмотренными формулами приведения, можно значения тригонометрических функций углов вращения $k\frac{\pi}{2} \pm t, k\pi \pm t, k\frac{3\pi}{2} \pm t, 2\pi k - t, k \in \mathbf{Z}$ выразить через тригонометрические функции угла t . Например,

$$\sin \left(5 \cdot \frac{\pi}{2} + t \right) = \sin \left(2\pi + \left(\frac{\pi}{2} + t \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + t \right) = \cos t.$$

С подобным приёмом мы уже имели дело в предыдущих примерах.



Контрольные вопросы

1. Как расположены на тригонометрической окружности друг относительно друга точки: а) $^{\circ} P_{\pi+t}$ и P_t ; б) $^{\circ} P_{\pi-t}$ и P_t ; в) P_t и $P_{\frac{\pi}{2}-t}$; г) P_t и $P_{\frac{3\pi}{2}-t}$?
2. $^{\circ}$ Какая точка симметрична точке P_t тригонометрической окружности относительно: а) начала координат; б) оси ординат; в) оси абсцисс?
3. Что можно утверждать об: а) ординатах точек $P_{\pi-t}$ и $P_{\pi+t}$ тригонометрической окружности; б) абсциссах точек $P_{\frac{\pi}{2}-t}$ и $P_{\frac{\pi}{2}+t}$ тригонометрической окружности?
4. Какие координаты имеет точка тригонометрической окружности, симметричная точке $P\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ относительно: а) $^{\circ}$ начала координат; б) $^{\circ}$ оси ординат; в) $^{\circ}$ оси абсцисс; г) прямой $y = x$; д) прямой $y = -x$?
5. Как можно представить угол 112° , чтобы, воспользовавшись формулами приведения и таблицей синусов острых углов, вычислить $\cos 112^{\circ}$?
6. Чему равняется выражение: а) $\sin(\pi+1) + \sin 1$; б) $\sin(\pi+1) + \sin(\pi-1)$; в) $\operatorname{tg}(\pi-1)\operatorname{ctg}(\pi+1)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+1\right) + \sin 1$; д) $\sin^2 2(\pi+2) + \cos^2 2(\pi-2)$?
7. Верно ли утверждение, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу третьего угла?
8. Чему равняется тангенс тупого угла параллелограмма, если тангенс острого угла равен $\frac{2}{3}$?
9. Тангенс одного из острых углов прямоугольного треугольника равен 2. Чему равняется тангенс другого острого угла этого треугольника?

Задачи

283°. Вычислите тригонометрические функции следующих углов:

- 1) 120° ; 2) 135° ; 3) 150° ; 4) 210° ; 5) 225° ; 6) 240° ; 7) 300° ; 8) 315° ; 9) 330° ; 10)

390°.

284°. Пользуясь формулами приведения, вычислите:

1) $\sin \frac{19\pi}{6}$; 2) $\cos \frac{11\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{31\pi}{6}$;

5) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

285°. Вычислите значение выражения:

1) $\cos 990^\circ - \sin 780^\circ - \operatorname{ctg} 945^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 1080^\circ - \sin 855^\circ + \cos 1305^\circ$;

3) $3\cos 1860^\circ + \sin(-1920^\circ) + \cos(-630^\circ)$; 4) $\cos 2850^\circ - \cos(-765^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ$.

286. Приведите к тригонометрическим функциям положительного аргумента, меньшего π :

1) $\sin \frac{26\pi}{9}$; 2) $\cos \frac{35\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{35\pi}{12}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{5}$.

287. Приведите к значению тригонометрической функции числа из отрезка

$\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:

1) $\sin \frac{4\pi}{3}$; 2) $\cos \frac{7\pi}{4}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$;

5) $\sin \frac{16\pi}{9}$; 6) $\cos\left(-\frac{13\pi}{9}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{18}\right)$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{36}$.

288. Упростите выражение:

1) $\left(\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 + \left(\cos(2\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2$;

2) $\frac{\sin \alpha}{\sin(\pi + \alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)} + \frac{\cos \alpha}{\cos(\pi - \alpha)}$;

3) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$; 4) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$.

289. Докажите тождество:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = 0$;

4) $\cos\left(\frac{2\pi}{9} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{23\pi}{18} + \alpha\right) = 0$.

290. Косинус одного из смежных углов равен $-\frac{3}{5}$. Найдите синус другого смежного угла.

291. Косинус одного из углов параллелограмма равен $-\frac{5}{13}$. Найдите синус другого из его углов.

292. Сумма косинусов острых углов прямоугольного треугольника равна m . Найдите:

1) сумму квадратов синусов этих углов; 2) произведение синусов этих углов.

293. Докажите, что площадь любого четырехугольника равняется половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

294. Найдите все числа из промежутка $[0; 2\pi]$, удовлетворяющие условию:

1) $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$; 2) $\cos(\pi - t) = 1$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 0$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -1$; 5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 0$; 6) $\sin(\pi + t) = -1$.

295*. Найдите все числа t , удовлетворяющие условию:

1) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) > \frac{1}{2}$; 2) $\cos(\pi - t) < \frac{1}{2}$; 3) $\cos(\pi + t) \leq -\frac{1}{2}$; 4)

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

296. Вычислите:

1) $(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ) - (\cos 50^\circ + \cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ)$;

2) $\operatorname{ctg} 31^\circ \cdot \operatorname{ctg} 32^\circ \cdot \operatorname{ctg} 33^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 57^\circ \cdot \operatorname{ctg} 58^\circ \cdot \operatorname{ctg} 59^\circ$.

297. Вычислите сумму:

1) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$;

2) $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \dots + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$;

4) $\operatorname{ctg} 5^\circ + \operatorname{ctg} 10^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ + \dots + \operatorname{ctg} 170^\circ + \operatorname{ctg} 175^\circ$.

298*. Докажите, что

1) при любом натуральном n справедливо равенство

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = 0;$$

2) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$.

Упражнения для повторения

299. Выберите среди углов:



1) $205^\circ; 335^\circ; 385^\circ; 695^\circ; 745^\circ; -25^\circ; -205^\circ; -335^\circ$ такие, синус которых равняется $\sin 25^\circ$;

2) $\frac{\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}; \frac{6\pi}{5}; \frac{11\pi}{5}; \frac{21\pi}{5}; -\frac{4\pi}{5}; -\frac{9\pi}{5}; -\frac{19\pi}{5}$ такие, косинус которых равняется $\cos \frac{\pi}{5}$;

3) $40^\circ; 140^\circ; 220^\circ; 320^\circ; 400^\circ; -40^\circ; -140^\circ; -330^\circ$ такие, тангенс которых равняется $\operatorname{tg} 40^\circ$.

300. На рис. 243 изображен график функции $y = f(x)$, определённой на множестве всех действительных чисел. Каков график функции:

1) $y = f(x - 1)$; 2) $y = f(x + 1)$; 3) $y = f(x - 2)$?

301. Даны графики функций $y = f(x)$, определённых на отрезке

$[-1; 0]$ (рис. 244). Достройте каждый из них (если это возможно) до графика: 1) чётной функции; 2) не чётной функции.

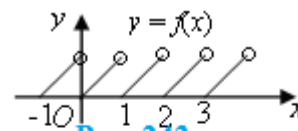


Рис. 243

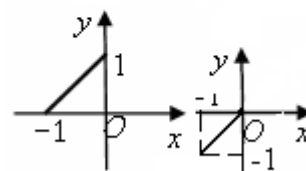
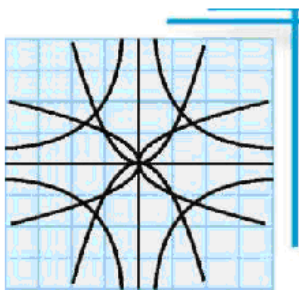


Рис. 244



19. Периодические функции

Данный параграф посвящен рассмотрению одного из важнейших свойств тригонометрических функций — периодичности.



При введении тригонометрических функций аргумент обозначался буквой t , поскольку буквы x и y использовались для обозначения координат точки P_t . Теперь вернемся к привычным обозначениям: x — независимая переменная, y — зависимая переменная, то есть $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

Так как числам x , $x \pm 2\pi$ на тригонометрической окружности соответствует одна и та же точка P_x , то имеют место равенства:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x.$$

Это свойство функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ называют **периодичностью**. Оно заключается в том, что значения функции повторяются через равные промежутки изменения аргумента. Точный смысл понятия периодичности функции содержится в следующем определении.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что область определения функции вместе с каждой точкой x содержит точки $x \pm T$ и при этом выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$. Число T называется периодом функции.



Обращаем внимание на то, что равенство $f(x \pm T) = f(x)$ должно выполняться для всех значений x из области определения функции. Для отдельных функций можно указать числа, прибавление которых к одному значению аргумента не меняет значения функции, в то же время прибавление к другому значению аргумента — меняет. Такие числа не являются периодами функции.

Например, $\sin 0 = \sin (0 + \pi) = 0$, но уже $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$, а $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Следовательно, число π не является периодом функции $y = \sin x$.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются периодическими с периодом 2π . Этот факт использовался в § 14 при вычислении значений синуса и косинуса.

Периодом тангенса и котангенса является число π , что вытекает из формул приведения: $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg}(t - \pi) = \operatorname{tg} t$.

На графике функции ее периодичность с периодом T отображается следующим образом.

Если график периодической функции с периодом T параллельно перенести на T единиц вдоль оси абсцисс в положительном или отрицательном направлениях, то он перейдет сам в себя.

На рис. 245 изображен график периодической функции с периодом l .

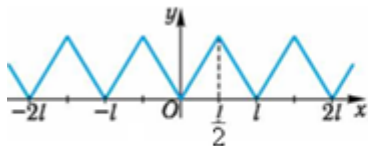


Рис. 245

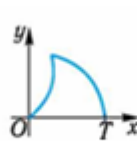


Рис. 246

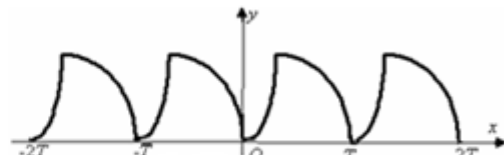


Рис. 247

Для построения графика периодической функции с периодом T достаточно построить его на отрезке длиной T (рис. 246), а затем построенный график параллельно перенести вдоль оси абсцисс в обоих направлениях на расстояние $T, 2T, 3T$ и т. д. (рис. 247).

Постоянная функция, определённая на всей числовой оси, является периодической, ее период — любое число, отличное от нуля.

Периодическими функциями описываются различные физические процессы: малые колебания маятника, вращения планет вокруг Солнца, сила переменного тока и т. п. Самым простым прибором для иллюстрации периодических процессов являются часы. Положения концов стрелок повторяются через равные промежутки времени. Для секундной стрелки этот промежуток составляет 60 с, для минутной — 60 мин, для часовой — 12 час.

Пример 1. Пусть функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 5 и $f(1) = 2$. Чему равняется $f(-9)$?

□ Во-первых, отметим, что функция $y = f(x)$ определена при $x = -9$, так как, по определению периодической функции, область определения данной функции вместе с точкой $x = 1$ содержит точки: $1 - 5 = -4$, $-4 - 5 = -9$. Во-вторых, $f(-9) = f(-9 + 5) = f(-4) = f(-4 + 5) = f(1) = 2$. ■

Ответ: 2.

Пример 2. Доказать, что периодом функции $y = \sin \frac{x}{3}$ является число 6π .

□ Функция $y = \sin \frac{x}{3}$ определена на всей числовой оси. Поэтому ее область определения вместе с каждой точкой x содержит точки $x \pm 6\pi$. Подставим вместо x в выражение для этой функции $x + 6\pi$: $\sin\left(\frac{1}{3}(x + 6\pi)\right) = \sin\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \sin \frac{x}{3}$. Такой же результат получим, если вместо x в выражение для этой функции подставить $x - 6\pi$. Получили то, что требовалось доказать. ■



Из того, что каждой точке на тригонометрической окружности соответствует бесконечное множество чисел, отличающихся друг от друга на $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, вытекает, что тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ для чисел $x + 2\pi k$ при всех $k \in \mathbf{Z}$ принимают одно и то же значение: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, то есть периодами функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются числа $2\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$. Все эти периоды кратны 2π . Естественно возникает вопрос: «Существуют ли другие положительные периоды этих функций, меньшие 2π ?» Ответ на него дает следующее утверждение.

Теорема 1. Наименьший положительный период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равен 2π .

□ Покажем, что других периодов, кроме чисел $2\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$, эти функции не могут иметь. Действительно, если T — период функции $y = \sin x$, то $\sin(x + T) = \sin x$ для любого x , в частности для $x = 0$, то есть $\sin T = \sin 0 = 0$. Но $\sin T$ обращается в нуль при $T = 0$; $T = \pi$; $T = 2\pi$ и, вообще, при $T = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, и только при этих значениях.

Числа $\pi(2k + 1)$ не являются периодами рассматриваемой функции. Действительно, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi(2k + 1)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$, то есть существует значение x из области определения функции, такое, что $\sin(x + \pi(2k + 1)) \neq \sin x$. Следовательно, наименьшим положительным периодом функции $y = \sin x$ является число 2π .

Доказательство того, что 2π — наименьший положительный период косинуса, аналогично. ■

Подобное утверждение справедливо для функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 2. Наименьший положительный период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π .

□ Из формул приведения вытекает, что числа πk , $k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$ являются пе-

риодами функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Поскольку $\operatorname{tg} x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ обращается в нуль при $x = 0$ или при $x = \pi$ и только в этих точках, то не существует положительного числа, меньшего π , которое могло бы быть периодом тангенса. Следовательно, наименьшим положительным периодом функции $y = \operatorname{tg} x$ является число π . Доказательство того, что π — наименьший положительный период котангенса, аналогично. Рекомендуем провести его самостоятельно. ■

Рассмотрим некоторые общие свойства периодических функций.

Свойство 1. Если функция f является периодической с периодом T , то при любом целом $n \neq 0$ число nT также является периодом этой функции.

□ Действительно, поскольку функция f является периодической с периодом T , то, воспользовавшись несколько раз определением периодической функции, получим: во-первых, ее область определения вместе с каждой точкой x содержит точки $x \pm T$, а следовательно и точки $x \pm 2T, x \pm 3T, \dots, x \pm nT$; во-вторых, $f(x + nT) = f(x + (n - 1)T) = f(x + (n - 2)T) = \dots = f(x + T) = f(x)$. Аналогично, $f(x - nT) = f(x - (n - 1)T) = f(x - (n - 2)T) = \dots = f(x - T) = f(x)$. ■

Таким образом, периодическая функция имеет бесконечное множество разных периодов. Во многих случаях среди положительных периодов существует наименьший. Его называют **основным периодом** этой функции. Можно доказать, что все другие ее периоды кратны основному периоду. Самым простым примером периодической функции, которая не имеет основного периода, является постоянная функция, определенная на всей числовой оси.

Свойство 2. График периодической функции с периодом T при параллельном переносе его на расстояние nT вправо и влево вдоль оси абсцисс отображается сам на себя.

□ Действительно, пусть точка $(x_0; y_0)$ является точкой графика периодической функции f . Тогда точка с абсциссой $x_0 + nT$ при любом целом n принадлежит области определения функции f и в результате периодичности функции f выполняется равенство $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y_0$. Следовательно, точка $(x_0 + nT; y_0)$, которую получили из точки $(x_0; y_0)$ при параллельном переносе вдоль оси абсцисс на расстояние nT , также принадлежит графику функции f . ■

Пример 3. Найти основной период функции $y = \sin \omega x$.

□ Областью определения данной функции является числовая ось. Числа $\frac{2\pi n}{\omega}, n \in \mathbf{Z}$, — периоды для функции $\sin \omega x$:

$$\sin \omega \left(x + \frac{2\pi n}{\omega} \right) = \sin(\omega x + 2\pi n) = \sin \omega x.$$

Если T — произвольный положительный период для $\sin \omega x$, то $\sin \omega (x + T) = \sin \omega x$ при каждом x . Беря $x = \frac{\pi}{2\omega}$, будем иметь: $\sin \omega \left(\frac{\pi}{2\omega} + T \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$,

или $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega T\right) = 1$. Однако, синус равняется единице лишь при

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \text{ Поэтому } \frac{\pi}{2} + \omega T = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \omega T = 2\pi n, T = \frac{2\pi n}{\omega}.$$

Среди чисел $\frac{2\pi n}{\omega}$ наименьшим положительным является число $\frac{2\pi}{\omega}$, то есть основной период функции $\sin \omega x$ равняется $\frac{2\pi}{\omega}$. ■

Ответ: $\frac{2\pi}{\omega}$.

Анализ примера 3 подсказывает следующее свойство периодических функций и содержит идею его доказательства.

Свойство 3. Если функция f является периодической с основным периодом T , то функция $y = Af(kx + b) + l$, где $A, k \neq 0, b, l$ — некоторые числа, также является периодической, причем ее основной период равен $\frac{T}{|k|}$.

□ Рассмотрим сначала случай, когда $k > 0$. Нетрудно проверить, что число $\frac{T}{k}$ является периодом функции $y = Af(kx + b) + l$. Действительно, $Af\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right) + l = Af((kx + b) + T) + l = Af(kx + b) + l$, поскольку T — период функции f . Остается доказать, что число $\frac{T}{k}$ — основной период функции $y = Af(kx + b) + l$. Предположим, что периодом этой функции является такое число T_0 , что $T_0 < \frac{T}{k}$. Тогда для любого x из области определения этой функции выполняется равенство

$$Af(k(x + T_0) + b) + l = Af((kx + b) + kT_0) + l = Af(kx + b) + l,$$

поскольку T_0 — период рассматриваемой функции. Но это означает, что kT_0 — период функции f . По предположению $T_0 < \frac{T}{k}$, следовательно, $kT_0 < T$, то есть существует период функции f , меньший T . Полученное противоречие и доказывает свойство. Случай, когда $k < 0$, рассматривается аналогично. ■

Из свойства 3 вытекает, что основные периоды функций $y = \sin 3x$, $y = \cos \frac{x}{2}$,

$$y = \operatorname{tg} 2x \text{ соответственно равны } \frac{2\pi}{3}, 2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi, \frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Найдите основной период функции $y = -\frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

□ Согласно свойству 3, основной период этой функции равен $2\pi : \left|-\frac{\pi}{4}\right| = 8$. ■

Ответ: 8.



На следующих примерах проиллюстрируем общую идею доказательства или опровержения того, что некоторая функция является периодической.

Пример 5. Доказать, что функция $y = \sin^2 x$ является периодической и найти ее основной период.

□ Областью определения данной функции является вся координатная прямая. Предположим, что число T является ее периодом. Тогда для любого x выполняется равенство $\sin^2(x + T) = \sin^2 x$, в частности, для $x = 0$: $\sin^2 T = \sin^2 0 = 0$. Отсюда $\sin T = 0$, $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, если T — период функции $y = \sin^2 x$, то $T = k\pi$, $k \neq 0$. Проверка показывает, что числа $T = k\pi$ являются действительно периодами данной функции. Основным периодом при $k = 1$ равняется π . ■

Для того, чтобы убедиться, что функция $y = f(x)$ не является периодической, необходимо установить: для любого $T > 0$ найдется такое x из области определения $D(f)$ функции $y = f(x)$, что будет выполняться, по крайней мере, одно из следующих утверждений: а) точка $x + T$ не принадлежит $D(f)$; б) точка $x - T$ не принадлежит $D(f)$; в) $f(x + T) \neq f(x)$.

Пример 6. Доказать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не является периодической.

□ Область определения функции содержит все вещественные числа, кроме $x = 0$. Пусть T — произвольное положительное число. Поскольку $-T \neq 0$, то точка $x_0 = -T$ принадлежит области определения функции. В то же время точка $x_0 + T = (-T) + T = 0$ не принадлежит области определения. Следовательно, для любого $T > 0$ нашлось такое $x = x_0$ (из области определения функции), что точка $x_0 + T$ не принадлежит области определения. Следовательно, функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не является периодической. ■

Пример 7. Доказать, что функция $y = x \cos x$ не является периодической.

□ Областью определения данной функции является вся числовая прямая. Предположим, что число $T \neq 0$ является ее периодом. Тогда для любого x выполняется равенство $(x + T) \cos(x + T) = x \cos x$. В частности для $x = 0$ имеем $T \cos T = 0$. Отсюда $\cos T = 0$. Следовательно, если T — период функции $y = x \cos x$, то $T = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Но проверка показывает, что эти числа не являются

периодами данной функции. Например, $\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \neq x \cos x$ при $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\pi \cos \pi \neq \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}$. Следовательно, нашлась такая точка $x = \frac{\pi}{2}$ из области определения функции $f(x) = x \cos x$, для которой $f(x + T) \neq f(x)$ для произвольного $T > 0$. Полученное противоречие показывает, что данная функция не является периодической. ■



Контрольные вопросы

1. ° Верно ли утверждение: если периодическая функция в какой-то точке принимает значение 1, то это значение она принимает в бесконечном множестве точек?
2. ° Можно ли, опираясь на равенство $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$, утверждать, что $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \cos x$?
3. ° Является ли число 3π периодом функции $y = \sin x$?
4. ° Является ли число 5π периодом функции $y = \operatorname{tg} x$?
5. Каков основной период функции: а) $\sin 3x$; б) $\sin \frac{x}{2}$; в) $\sin \pi x$?
6. Чему равняется $f(-5)$, если функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 3 и $f(1) = 0$?
7. Является ли функция $y = \cos \sqrt{x}$ периодической?
8. Может ли функция быть периодической, если она имеет конечное количество нулей?
9. Может ли быть периодической функция, возрастающая на всей области определения?
10. Верно ли утверждение: если T — период некоторой функции, то $-T$ также является ее периодом?
11. Верно ли утверждение: если T_1 и T_2 — периоды некоторой функции, то и $T_1 + T_2$ — период той же функции?
12. * Верно ли утверждение, что при сжатии графика периодической функции в a раз ($a > 1$) к оси ординат основной период функции уменьшается в a раз?

Задачи

302°. Вычислите:

1) $\cos \frac{17\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3360^\circ$; 3) $\sin\left(-\frac{123\pi}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(-1950^\circ)$.

303°. Упростите:

1) $\sin^2(\alpha + 4\pi) + \cos^2(\alpha + 6\pi)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha + 3\pi) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - 5\pi)$;
 3) $1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha - 7\pi)$; 4) $\frac{1}{\cos^2(2\alpha - 8\pi)} - 1$.

304°. Докажите равенство: $\cos(t - \pi) = \cos(t + \pi)$; 2) $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$.

305. На рис. 248 – 249 изображены части графиков функции с периодом T . Постройте графики этих функций на промежутке $[-2T; 2T]$.

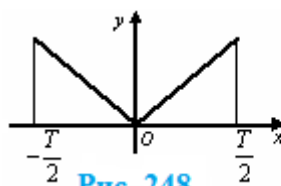


Рис. 248

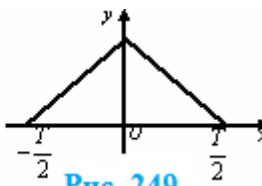


Рис. 249

306. Докажите, что число T является периодом функции f , если:

- 1) $f(x) = \cos \frac{x}{2}, T = 4\pi$; 2) $f(x) = \sin 2x, T = \pi$; 3) $f(x) = \operatorname{tg} 3x, T = \frac{\pi}{3}$;
4) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x, T = 1$.

307. Докажите, что функция f является периодической, если:

- 1) $f(x) = 1 + \cos x$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$; 3) $f(x) = \sin x - \cos x$; 4) $f(x) = \cos^2 x$.

308. Найдите наименьший положительный период, если он существует, для функции:

- 1) $y = 2 \sin \frac{x}{3}$; 2) $y = 3 \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$; 3) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

309. Докажите, что число 5 не является периодом функции:

- 1) $y = x^3 - 2$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = 5x - 5$; 4) $y = [x]$.

310*. Докажите, что функция не является периодической:

- 1) $y = x$; 2) $y = \sin x^2$; 3) $y = \cos x^3$; 4) $y = \sin(x\sqrt{2})$.

311*. Является ли периодической функция: 1) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$; 2) $y = 2 \operatorname{tg} x + 1$; 3) $y =$

$\sin x + \operatorname{tg} x$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$? Если является, то укажите наименьший положительный период.

312*. Известно, что функция $f(x)$ обладает таким свойством: для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x + T) = -f(x)$, $T \neq 0$. Докажите, что функция $f(x)$ периодическая.

313*. Найдите наименьший положительный период функции:

- 1) $y = \sin x + \cos 2x$; 2) $y = \sin 2x + \cos 3x$; 3) $y = \sin 3x + 2 \cos 5x$; 4) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$.



Упражнения для повторения

314. Найдите область определения функции:

- 1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$; 4) $f(x) = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-x}$.

315. Постройте график функции:

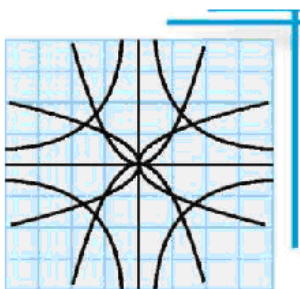
1) $y = x^2 + 2x - 1$; 2) $y = |x| + x - 2$; 3) $y = |x + 1| - |x - 1|$;

316. Найдите промежутки монотонности функции:

1) $y = 1 - 3x$; 2) $y = -x^3$; 3) $y = 3 - 2x - x^2$; 4) $y = \frac{1}{x+1}$; 5) $y = \frac{x}{x+1}$.

317. Выясните, является ли заданная функция чётной или не чётной:

1) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$; 2) $y = x^5 + 2x^3$; 3) $y = x^4 - x^3$; 4) $y = \sqrt{x-1}$.



§ 20. Свойства и графики функций

$$y = \sin x \text{ и } y = \cos x$$

В данном параграфе рассматриваются функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ по схеме исследования функций, использованной ранее.



Рассмотрим простейшие свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, пользуясь определениями синуса и косинуса, и построим их графики.

Свойство 1. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены на всей числовой оси.

□ Действительно, каждому действительному числу x можно поставить в соответствие точку тригонометрической окружности. Абсцисса этой точки равна косинусу числа x , а ордината — синусу числа x . ■

Свойство 2. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — периодические с наименьшим положительным периодом 2π .

Это свойство доказано в предыдущем параграфе.

Свойство 3. Нулями функции $y = \sin x$ являются числа πn , $n \in \mathbb{Z}$, а нулями функции $y = \cos x$ — числа $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

□ Нули функции $y = \sin x$ — это числа, которым на тригонометрической окружности соответствуют точки с ординатой 0, а именно: $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ и вообще числа πn , $n \in \mathbb{Z}$. Аналогично нули функции $y = \cos x$ — это числа, которым на тригонометрической окружности соответствуют точки с абсциссой 0, а именно: $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ и вообще числа $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

Свойство 4. Функция $y = \sin x$ — нечётная, а функция $y = \cos x$ — чётная, то есть для каждого x

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x.$$

□ По построению, точки P_t и P_{-t} симметричны относительно оси абсцисс (рис. 250). Их абсциссы совпадают, а ординаты противоположны. Поэтому при $t = x$:

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x. \blacksquare$$

Свойство 5. Функция $y = \sin x$ положительна на интервале $(0; \pi)$ и отрицательна на интервале $(\pi; 2\pi)$; функция $y = \cos x$ положительна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

и отрицательна на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Это свойство обосновано в § 15.

Свойство 6. Функция $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, а на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ убывает. Функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0; \pi]$ и возрастает на промежутке $[\pi; 2\pi]$.

□ Это свойство вытекает из геометрического смысла синуса и косинуса. Если t возрастает $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки P_t увеличивается от -1 до 1 (рис. 251).

Если же t растет от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_t

уменьшается от 1 до -1 (см. рис. 251). Если t растет от 0 до π , то абсцисса точки P_t уменьшается от 1 до -1 . Если же t растет от π до 2π , то абсцисса точки P_t увеличивается от -1 до 1 (см. рис. 251). ■

Свойство 7. Множеством значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является отрезок $[-1; 1]$.

□ По определению синуса $|\sin x| \leq 1$. Для произвольного числа a из промежутка $[-1; 1]$ существует, по крайней мере, одна точка тригонометрической окружности, ордината которой равна a . Это означает, что функция $y = \sin x$ принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$. Аналогично обосновывается это свойство для функции $y = \cos x$. ■

Свойство 8. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на всей числовой оси.

□ Действительно, при непрерывном изменении значения x точка P_x непрерывно перемещается по тригонометрической окружности, а потому ее координаты $\cos x$ и $\sin x$ меняются непрерывно. ■

Построим график функции $y = \sin x$ с использованием рассмотренных свойств синуса. Так как эта функция периодическая с периодом 2π , то достаточно построить график на отрезке $[0; 2\pi]$, длина которого равна периоду синуса.

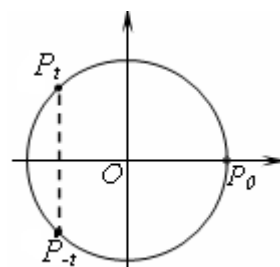


Рис. 250

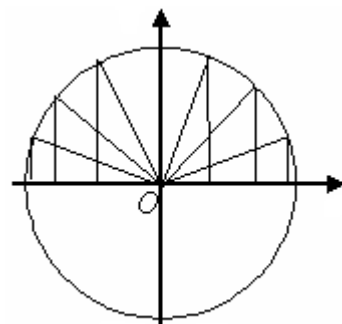


Рис. 251

Сначала построим график на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция $y =$

$\sin x$ возрастает, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Для нахождения нескольких точек графика

разобьем отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, например, на 4 равные части. Возьмем единичную

окружность с центром в произвольной точке оси абсцисс (для удобства сместим окружность влево (рис. 252)). Для построения точки с абсциссой t найдем на окружности точку P_t и через нее проведем прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с прямой $x = t$. Точка пересечения будет принадлежать графику функции $y = \sin x$, так как ее ордината совпадает с ординатой точки P_t и равна $\sin t$.

Построив таким образом все 4 точки графика и соединив их, учитывая возрастание и непрерывность функции, непрерывной кривой, получим эскиз графика функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 252).

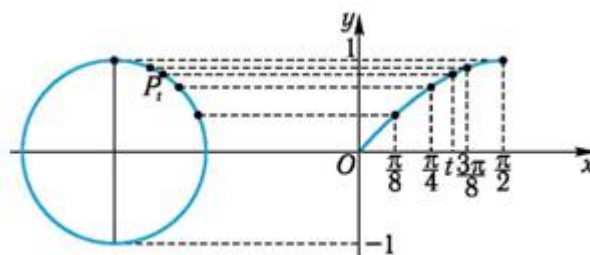


Рис. 252

Так как, по формулам приведения, $\sin(\pi - t) = \sin t$, то есть ординаты точек t и $\pi - t$, симметричных относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, равны между собой, то на

промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ точки графика функции $y = \sin x$ располагаются симметрично точкам графика из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 253).

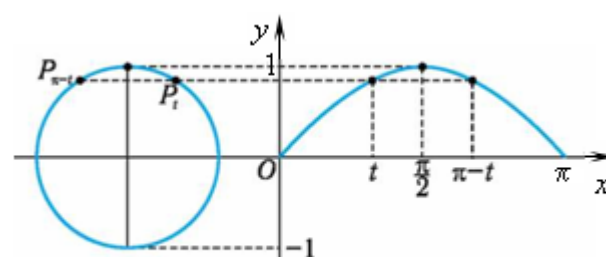


Рис. 253

Так как по формулам приведения $\sin(2\pi - t) = -\sin t$, то есть ординаты точек t и $2\pi - t$ противоположны друг другу, то на промежутке $[\pi; 2\pi]$ точки графика функции $y = \sin x$ располагаются симметрично точкам графика из промежутка $[0; \pi]$ относительно точки $(\pi; 0)$ (рис. 254).

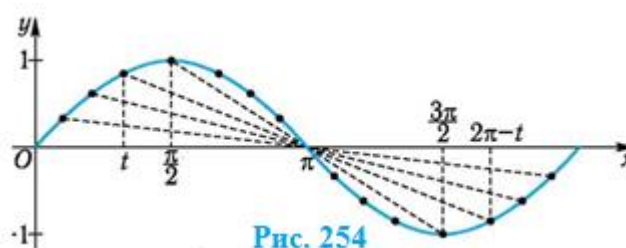


Рис. 254

Пользуясь правилом построения графика периодической функции, с помощью параллельных переносов продолжим график на 2π , 4π ,

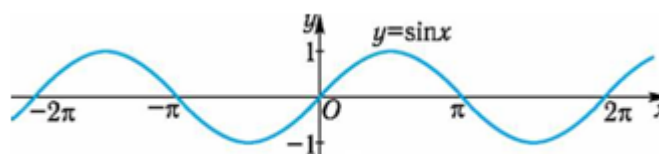


Рис. 255

$6\pi, \dots$ вправо и влево вдоль оси абсцисс (рис. 255). Получим график функции $y = \sin x$. Он называется **синусоидой**.

Так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то график функции $y = \cos x$ можно построить

параллельным переносом графика функции $y = \sin x$ в отрицательном направлении вдоль оси x на расстояние $\frac{\pi}{2}$ (рис. 256).

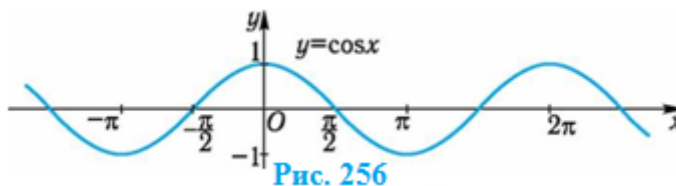


Рис. 256

Свойства и графики синуса и косинуса позволяют решать разнообразные задачи, связанные с этими функциями, а именно: "читать" графики, сравнивать значения этих функций, решать уравнения, неравенства и т. п.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x = x - \pi$.

□ В одной системе координат построим графики функций $y = x - \pi$, $y = \sin x$. Они пересекаются в одной точке (рис. 257), как видно из графиков. Абсцисса π точки пересечения является решением данного уравнения. ■

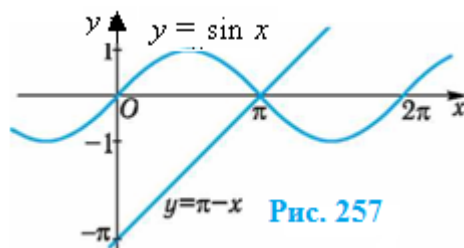


Рис. 257

Ответ. $x = \pi$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

□ Построим график функции $y = \cos x$, отметив на оси абсцисс точки с координатами $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ (рис. 258). Найдем на промежутке наивысшую и самую низкую точки графика. Ординаты

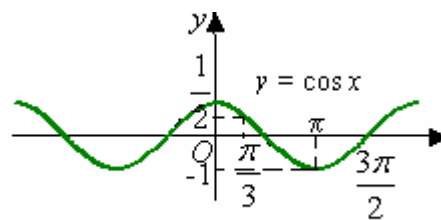


Рис. 258

этих точек $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $y(\pi) = \cos \pi = -1$ являются наибольшим и наименьшим значениями функции на данном промежутке, которые она принимает соответственно в точках $\frac{\pi}{3}$ и π . ■

Ответ: $\frac{1}{2}; -1$.

Применим к тригонометрическим функциям преобразование графиков функций, которые рассматривались раньше, а именно: параллельный перенос графика вдоль координатных осей, сжатие и растяжение графика, симметричное отражение относительно координатных осей.

Пример 3. Построить графики функций: 1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 \sin x$;

3) $y = \sin 3x$.

□ 1) График функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ можно получить из графика $y = \sin x$

параллельным переносом вдоль оси x на $\frac{\pi}{4}$ влево (рис. 259).

2) График функции $y = 2 \sin x$ построим растяжением графика $y = \sin x$ от оси абсцисс в 2 раза (рис. 259).

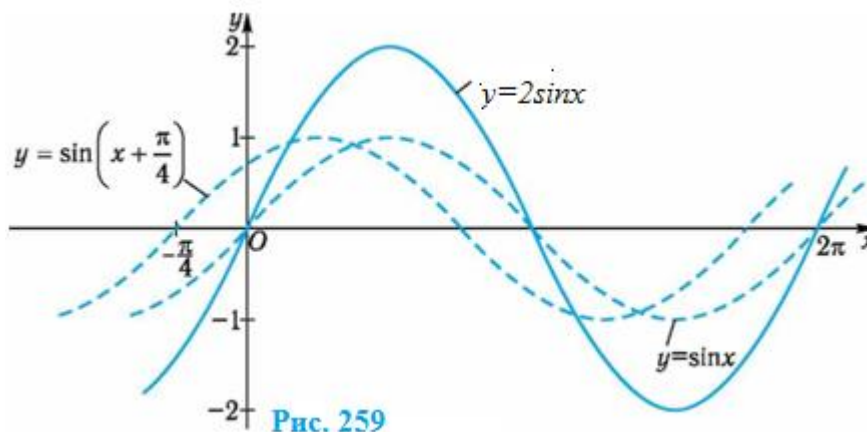


Рис. 259

3) График функции $y = \sin 3x$ является результатом сжатия графика $y = \sin x$ к оси ординат в три раза (рис. 260). ■

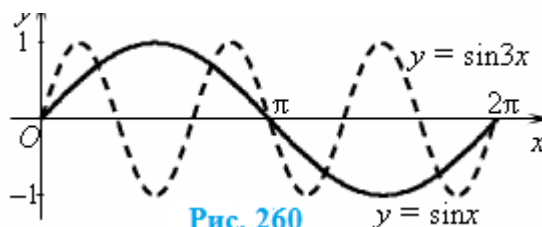


Рис. 260



В таблице 41 приведены обобщенные свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Свойства 5 и 6 выше рассматривались на промежутках, длина которых равнялась основному периоду 2π этих функций. Применяя периодичность синуса и косинуса параллельным переносом этих промежутков на $2\pi k$, где k — целое число, эти свойства можно рассмотреть на всей координатной прямой.

Таблица 41.

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
1.	Область определения функции — множество всех вещественных чисел $\mathbf{R}$	
2.	Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π	
3.	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
4.	Функция является нечётной	Функция является чётной
5.	Функция является положительной на каждом из интервалов $(2\pi k; \pi(2k+1)), k \in \mathbf{Z}$ и отрицательной на каждом из интервалов $(\pi(2k+1); \pi(2k+2)), k \in \mathbf{Z}$	Функция является положительной на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$, и отрицательной на каждом из интервалов

		$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$
6.	Функция возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$, и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$	Функция возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k], k \in \mathbf{Z}$, и убывает на каждом из промежутков $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbf{Z}$
7.	Множеством значений функции является отрезок $[-1; 1]$.	
8.	Функция непрерывна в области определения.	

Приведем доказательство свойства 6.

□ Из геометрического смысла синуса вытекает, что функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку она является нечётной, то она возрастает и на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (см. §4, свойство 1), то есть она возрастает на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку функция является периодической с основным периодом 2π , то она возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$. Аналогично устанавливаются промежутки убывания этой функции. Так же доказывается свойство 6 для функции $y = \cos x$. Советуем провести самостоятельно необходимые рассуждения.

На рис. 261 и 262 отмечены фрагменты графиков синуса и косинуса, где

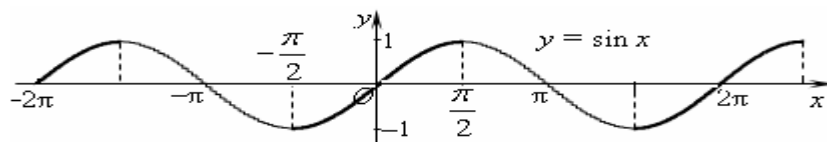


Рис. 261

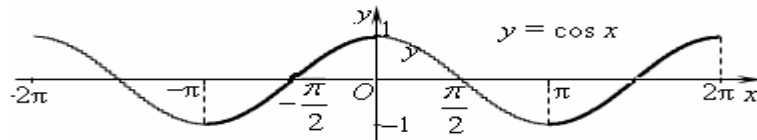


Рис. 262

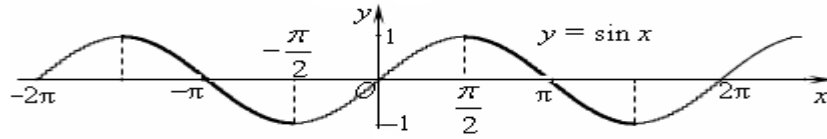


Рис. 263

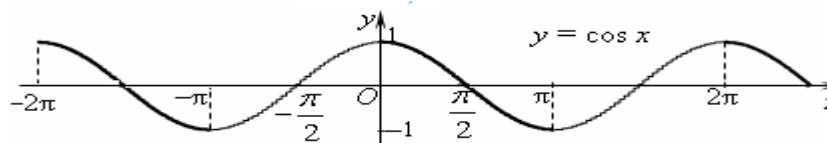


Рис. 264

эти функции возрастают, а на рис. 263 и 264 — убывают.

Пример 4. Сравнить числа: 1) $\sin 2$ и $\sin 3$; 2) $\cos 5$ и $\cos 6$; 3) $\cos \frac{\pi}{7}$ и $\sin \frac{3\pi}{8}$.

□ 1) Так как $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ функция $y = \sin x$ убывает, то $\sin 2 > \sin 3$.

2) Так как $\frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi$, а на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ функция $y = \cos x$ возрастает, то $\cos 5 < \cos 6$.

3) По формуле приведения $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8}$. Числа $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{7}$ принадлежат отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция $y = \cos x$ убывает. Так как $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{7}$, то $\cos \frac{\pi}{8} > \cos \frac{\pi}{7}$, то есть $\sin \frac{3\pi}{8} > \cos \frac{\pi}{7}$. ■

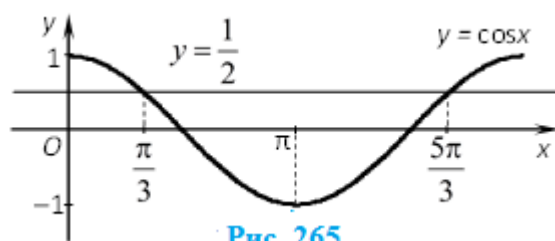
Ответ. 1) $\sin 2 > \sin 3$; 2) $\cos 5 < \cos 6$; 3) $\sin \frac{3\pi}{8} > \cos \frac{\pi}{7}$.

Пример 5. Найти все числа из отрезка $[0; 2\pi]$, для которых выполняется неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$.

□ Построим график функции $y = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$ и прямую $y = \frac{1}{2}$ (рис. 265).

Учитывая, что $\cos x = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{5\pi}{3}$, можем определить ту часть графика косинуса,

для которой $\cos x < \frac{1}{2}$. Она расположена ниже прямой $y = \frac{1}{2}$, а следовательно, неравенству удовлетворяют такие значения x , что $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. ■



Ответ: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

В следующем примере используем несколько преобразований из тех, которые применялись при решении примера 3.

Пример 6. Построить график функции $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

□ График данной функции $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ получим из графика функции $y = \sin x$ последовательным выполнением таких преобразований:

а) сжатием его к оси y вдвое ($y = \sin 2x$);

б) растяжением от оси x втрое ($y = 3\sin 2x$);

в) параллельным переносом в положительном направлении оси x на $\frac{\pi}{6}$

единиц (рис. 266).

График строили по такой схеме:

$$y = \sin x \rightarrow y = \sin 2x \rightarrow y = 3\sin 2x \rightarrow y = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \blacksquare$$



Из правил преобразований графиков функций можно получить также выводы относительно построения графиков функций, которые содержат некоторые выражения под знаком модуля.

График функции $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{при } \sin x \geq 0, \\ -\sin x & \text{при } \sin x < 0 \end{cases}$ является

объединением части графика функции $y = \sin x$, которая лежит выше оси x (для которой $\sin x \geq 0$), с графиком, в который отображается при симметрии относительно оси абсцисс та часть графика функции $y = \sin x$, для которой $\sin x < 0$ (рис. 267).

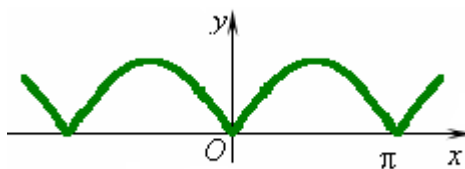


Рис. 267

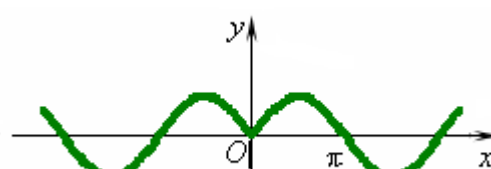


Рис. 268

Чтобы построить график функции

$$y = \sin|x| = \begin{cases} \sin x & \text{при } x \geq 0, \\ \sin(-x) = -\sin x & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

следует объединить часть графика функции $y = \sin x$, для которой $x \geq 0$, с графиком, в который отображается эта часть при симметрии относительно оси ординат (рис. 268).

Пример 7. Построить график функции $y = \sin\left(\pi|x| + \frac{\pi}{4}\right)$.

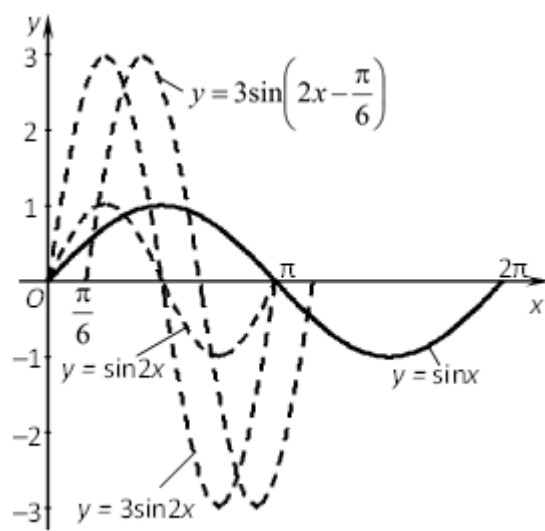


Рис. 266

□ График данной функции $y = \sin\left(\pi|x| + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi\left(|x| + \frac{1}{4}\right)\right)$ получим из графика функции $y = \sin x$ последовательным выполнением таких преобразований :

а) сжатием его к оси y в π раз (черт. 269);

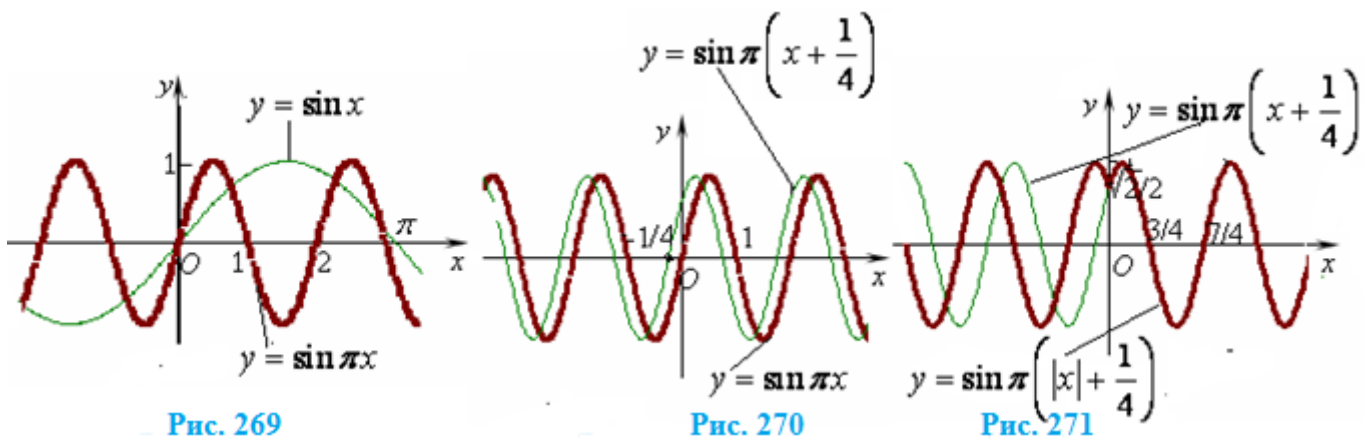
б) параллельным переносом в отрицательном направлении оси x на $\frac{1}{4}$ единицы (рис. 270);

в) устранением той части графика, которая находится в левой полуплоскости;

г) симметричным отражением относительно оси ординат оставшейся части графика (рис. 271).

График функции $y = \sin\left(\pi|x| + \frac{\pi}{4}\right)$ строили по такой схеме:

$$y = \sin x \rightarrow y = \sin \pi x \rightarrow y = \sin \pi\left(x + \frac{1}{4}\right) \rightarrow y = \sin \pi\left(|x| + \frac{1}{4}\right). \blacksquare$$

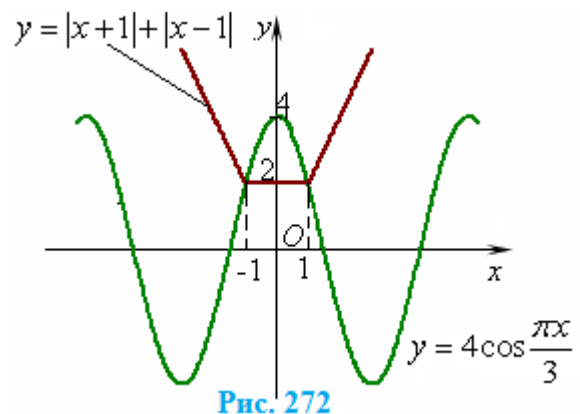


Пример 8. Решить уравнение $4\cos\frac{\pi x}{3} = |x+1| + |x-1|$.

□ В одной системе координат построим графики функций $y = 4\cos\frac{\pi x}{3}$ и $y = |x+1| + |x-1|$ (рис. 272). График функции $y = 4\cos\frac{\pi x}{3}$ строили по схеме:

$$y = \cos x \rightarrow y = \cos\frac{\pi x}{3} \rightarrow y = 4\cos\frac{\pi x}{3}.$$

Функция $y = |x+1| + |x-1|$ имеет такой вид:



$$y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq -1, \\ 2, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Графики этих функций пересекаются в двух точках, а именно в тех точках, где происходят «изломы» графика функции $y = |x+1| + |x-1|$. Это точки с абсциссами $x = -1$ и $x = 1$. Следовательно, уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. ■

Ответ: $\{-1; 1\}$.



Контрольные вопросы

1. ° Имеет ли смысл запись $\sin 2020$?
2. ° Может ли синус числа x равняться: а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{7}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}$?
3. ° Являются ли чётными функции: а) $y = -\cos x$; б) $y = \sin^2 t$; в) $y = \cos^3 t$?
4. ° Какое из чисел $\sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \sin 3^\circ, \dots, \sin 100^\circ$ является наибольшим?
5. ° С помощью каких преобразований из графика функции $y = \cos x$ можно получить график функции: а) $y = \cos(x+2)$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = 2\cos x$; г) $y = \cos x + 2$?
6. ° График какой функции получим, если график функции $y = \sin x$:
 а) параллельно перенести на 2 единицы в положительном направлении оси абсцисс;
 б) параллельно перенести на 2 единицы в отрицательном направлении оси ординат;
 в) сжать к оси абсцисс вдвое;
 г) растянуть от оси абсцисс вдвое;
 д) симметрично отобразить относительно начала координат;
 е) симметрично отобразить относительно оси ординат?
7. Каковы область определения и множество значений функции : а) $y = \cos(x-1)$;
 б) $y = \sin x - 1$; в) $y = \sin 2x$; г) $y = 3\sin x$; д) $y = \sin(-x)$; е) $y = -\cos x$?
8. Монотонна ли функция $y = \sin x$?
9. Являются ли нечётными функции:
 а) $y = -\sin t$, б) $y = \sin(\pi - t)$; в) $y = \sin^3 t$?
10. Что больше: а) $\cos \frac{\pi}{6}$ или $\cos \frac{\pi}{8}$; б) $\sin 40^\circ$ или $\sin 75^\circ$?
11. Возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:
 а) $[\pi; 0]$; б) $[0; \pi]$; в) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; г) $[-3; -2]$?
12. * Чему равняются наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на

промежутке: а) $\left[0; \frac{7\pi}{6}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$?

13. * При каких значениях c будет симметричным относительно прямой $x = c$ график функции: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$?

14. * На каких промежутках совпадают графики функций $y = |\sin x|$ и $y = \sin |x|$?

15. * Как получить график функции:

а) $y = |\cos x|$ из графика функции $y = \cos x$; б) $y = \cos |x|$ из графика функции $y = \cos x$?

Задачи

318. Постройте график функции $y = \sin x$, $x \in [-2\pi; \pi]$ и укажите на нём точки, для которых:

1) $\circ \sin x = -1$; 2) $\circ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\circ \sin x = \frac{1}{4}$;

4) $\sin x > 0$; 5) $\sin x > \frac{1}{2}$; 6) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

319. Постройте график функции $y = \cos x$, $x \in [-\pi; 2\pi]$ и укажите на нём точки, для которых:

1) $\circ \cos x = 1$; 2) $\circ \cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\circ \cos x = \frac{1}{3}$;

4) $\cos x < 0$; 5) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

320. Найдите область определения функции:

1) $\circ y = \frac{3\cos x - 1}{2}$; 2) $y = \sin^2 x$; 3) $\circ y = \frac{1}{2\sin^2 x + 1}$; 4) $y = \frac{1}{\cos x + 1}$;

5) $y = \frac{1}{\sin x}$; 6) * $y = \sqrt{\cos x}$; 7) * $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$; 8) * $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$.

321. Какие из функций являются чётными, какие нечётными, а какие — ни чётными, ни нечётными:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \frac{1 + \cos x}{x^2}$; 3) $y = x + \sin x$;

4) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 5) $y = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin^2 x}$; 6) $y = 1 + \sin x$?

322. Разбейте данный отрезок на два промежутка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ убывала, а на другом — возрастала:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; 2) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

323. Разбейте данный отрезок на два промежутка так, чтобы на одном из них

функция $y = \cos x$ принимала неотрицательные значения, а на другом — неположительные:

$$1) [-\pi; 0]; \quad 2) \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]; \quad 3) \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$$

324. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$$1) y = 2\sin x; \quad 2) y = \cos x + 3; \quad 3) y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right); \quad 4) y = 1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$5) y = 0,5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right); \quad 6) y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

325. Сравните числа:

$$1) \sin 42^\circ \text{ и } \sin 73^\circ; \quad 2) \sin 230^\circ \text{ и } \sin 250^\circ; \quad 3) \sin 190^\circ \text{ и } \sin 250^\circ;$$

$$4) \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right); \quad 5) \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) \text{ и } \sin\frac{4\pi}{7};$$

$$6) \cos(-3) \text{ и } \cos(-2); \quad 7) \cos\frac{\pi}{5} \text{ и } \sin\frac{\pi}{5}; \quad 8) \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) \text{ и } \sin\frac{3\pi}{8}.$$

326*. Докажите, что функция: 1) $y = \cos(\sin x)$ убывает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $y = \sin(\cos x)$ убывает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

327. Найдите множество значений функции:

$$1) y = \sin 2x; \quad 2) y = 2\sin x; \quad 3) y = 2\cos x - 1; \quad 4) y = \cos^2 x; \quad 5) y = \frac{1}{2}\sin^2 x - 1;$$

$$6) y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right); \quad 7) y = 3\cos 2x - \frac{\pi}{6}; \quad 8) y = 3\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right|; \quad 9) y = 3|\cos 2x| - \frac{\pi}{6}.$$

328. Постройте график функции:

$$1) y = 3\cos x; \quad 2) y = \sin 2x; \quad 3) y = \sin\frac{x}{2} - 1; \quad 4) y = 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

329*. Постройте график функции:

$$1) y = 2|\cos x - 1|; \quad 2) y = |2\cos x - 1|; \quad 3) y = 2|\cos x| - 1; \quad 4) y = 2(|\cos x| - 1).$$

$$5) y = \sin|x - 1|; \quad 6) y = \sin(|x| - 1); \quad 7) y = |\sin(x - 1)|; \quad 8) y = |\sin|x - 1||.$$

330. Постройте график функции:

$$1) y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) y = \cos\left(2|x| - \frac{\pi}{4}\right); \quad 3) y = \cos\left|2x - \frac{\pi}{4}\right|; \quad 4) y = \left|\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

331*. Изобразите множество таких точек $A(x; y)$, что:

$$1) y = \sin|x|; \quad 2) y = |\sin x|; \quad 3) |y| = \sin x; \quad 4) |y| = |\sin x|.$$

332*. Над графиком функции $y = \cos x$ выполнили такие преобразования: сжатие к оси y в 4 раза; параллельный перенос вдоль оси x на 0,5 единицы в положительном направлении; сжатие к оси x в 5 раз; параллельный перенос вдоль оси y на 3 единицы в отрицательном направлении. График какой функции получили?

333. Найдите все числа x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, удовлетворяющие условию:

$$1) \sin x = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

334*. Найдите все числа x на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, удовлетворяющие условию:

$$\begin{aligned} 1) \sin x \leq \frac{1}{2}; \quad 2) \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ 5) \cos x > \frac{1}{2}; \quad 6) \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 7) \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 8) \cos x \leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

335*. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

$$1) f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right); \quad 2) f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right).$$

336*. Решите уравнение $4\sin\frac{\pi}{6}(2x+3) = |x+1| + |x-1|$.



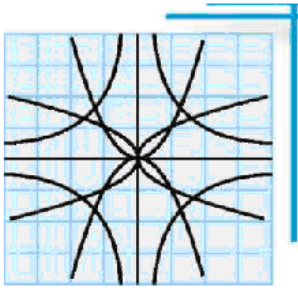
Упражнения для повторения

337. Изобразите на тригонометрической окружности точки P_t , если: 1) $\operatorname{tg} t = 1$; 2) $\operatorname{tg} t = -2$; 3) $\operatorname{ctg} t = 0,5$.

338. Укажите точки разрыва функции, если они существуют:

$$1) y = \frac{1}{3-2x}; \quad 2) y = \frac{1}{2x^2-3x+1}; \quad 3) y = \frac{1}{\sin x}; \quad 4) y = \frac{1}{\cos x}.$$

339. Запишите уравнения асимптот к графику функции $y = \frac{1}{x}$.



21. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

В этом параграфе исследование функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ будет выполняться по той же схеме, по которой исследовались функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в предыдущем параграфе.



Рассмотрим простейшие свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, пользуясь их определениями, и построим их графики.

Свойство 1. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех действительных значениях x , кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена при всех действительных значениях x , кроме $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

□ Действительно, функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех значениях x , кроме тех, при которых знаменатель выражения $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ равняется нулю. А условию $\cos x = 0$ как раз и удовлетворяют значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично доказывается вторая часть свойства. ■

Свойство 2. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — периодические с наименьшим положительным периодом π .

Это свойство обосновано в §19.

Свойство 3. Нулями функции $y = \operatorname{tg} x$ являются числа $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а нулями функции $y = \operatorname{ctg} x$ — числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

□ Действительно, нули функции $y = \operatorname{tg} x$ совпадают с нулями функции $y = \sin x$, а нули функции $y = \operatorname{ctg} x$ — с нулями функции $y = \cos x$ (см. § 20). ■

Свойство 4. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — нечётные.

□ Действительно, $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$. График функции $y =$

$\operatorname{tg} x$ симметричен относительно начала координат. Так же доказывается это свойство для функции $y = \operatorname{ctg} x$. ■

Свойство 5. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ положительны на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и отрицательны на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Это свойство обосновано в § 14.

Свойство 6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$.

□ Это свойство вытекает из геометрического смысла тангенса. Если x

возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$, то есть координата точки B_x , которая является точкой пересечения прямой OP_x с линией тангенса, возрастает от 0 до $+\infty$ (рис. 273). Иначе говоря, если $x = 0$, то $\operatorname{tg} x = 0$, а когда x приближается к $\frac{\pi}{2}$, оставаясь меньшим $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ возрастает и может принимать как угодно большие значения.

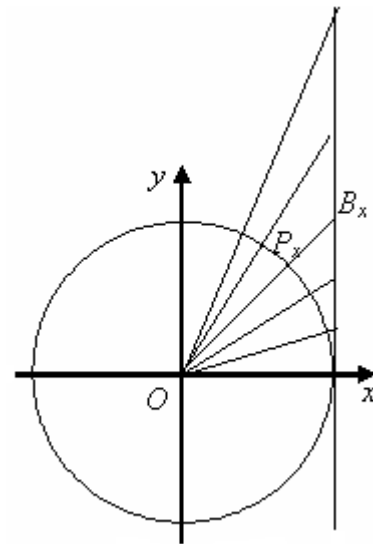


Рис. 273

Аналогично, из геометрического смысла котангенса вытекает, что когда x возрастает от 0 до

$\frac{\pi}{2}$, координата точки C_x на линии котангенса, которая является точкой пересечения прямой OP_x с линией котангенса и равняется $\operatorname{ctg} x$, убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 274). Иначе говоря, если $x = \frac{\pi}{2}$,

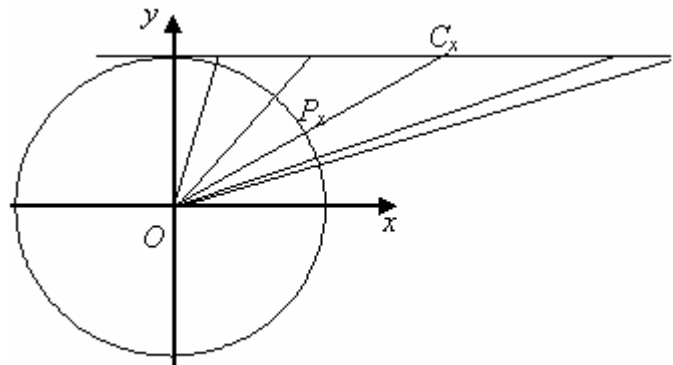


Рис. 274

то $\operatorname{ctg} x = 0$, а когда x приближается

к 0, оставаясь больше 0, значения $\operatorname{ctg} x$ растут и могут принять как угодно большие значения. ■

Свойство 7. Множеством значений функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ является множество всех действительных чисел.

□ Докажем, что произвольное вещественное число a может быть значением тангенса некоторого числа. Рассмотрим тригонометрическую окружность и проведем линию тангенса (рис. 275), обозначим на ней точку $B(1; a)$. Соединим точки O и B и обозначим буквой P точку пересечения прямой OB с окружностью. Точка P соответствует некоторому числу x , принадлежащему промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ее координаты — $(\cos x; \sin x)$.

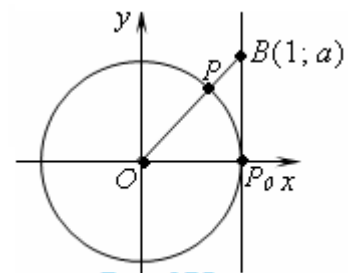


Рис. 275

Поэтому $P_0B = \operatorname{tg} x = a$. Аналогично свойство доказывается для $y = \operatorname{ctg} x$. ■

Свойство 8. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны в своих областях определения. Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ являются точками разрыва функции $y = \operatorname{tg} x$, а точки $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ являются точками разрыва функции $y = \operatorname{ctg} x$.

□ Непрерывность функции $y = \operatorname{tg} x$ вытекает из того, что если две точки на тригонометрической окружности сближаются, то есть, расстояние между ними становится как угодно малым, то соответствующие точки на оси тангенсов (котангенсов) также сближаются (рис. 276). Аналогично обосновывается это свойство для функции $y = \operatorname{ctg} x$. ■

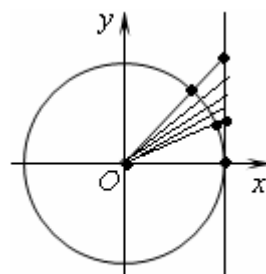


Рис. 276

Рассмотренные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ позволяют построить ее график, как и для функции $y = \sin x$, в три этапа. На первом этапе построим график на

промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Для этого достаточно

найти несколько точек графика и соединить их непрерывной линией. Как и при построении синусоиды, разобьем промежуток

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ на 4 равные части. Воспользовав-

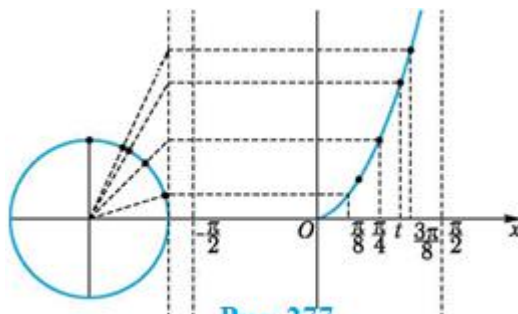


Рис. 277

шись линией тангенсов, построим четыре точки (рис. 277), принадлежащие графику функции $y = \operatorname{tg} x$,

$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Соединив точки (ввиду возрастания и

непрерывности функции), непрерывной кривой, будем иметь эскиз графика функции на промежутке

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

На втором этапе построим график на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ преобразованием симметрии, воспользовавшись нечётностью тангенса (рис. 278).

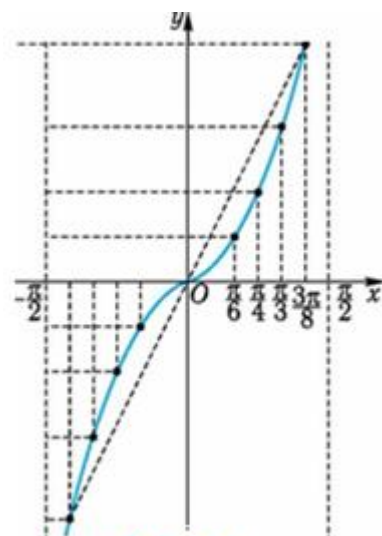


Рис. 278

Тем самым получили график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке, длина которого равна наименьшему положительному периоду тангенса π .

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической, то на третьем этапе ее полный график можно построить с помощью параллельного переноса полученного графика вдоль оси x на $\pm\pi$; $\pm 2\pi$ и т. д. (рис. 279). График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют **тангенсоидой**.

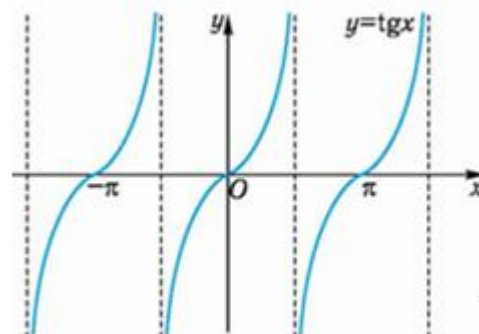


Рис. 279

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Для этого, в соответствии с формулой приведения $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, достаточно график функции $y = \operatorname{tg} x$ параллельно перенести в

отрицательном направлении оси x на $\frac{\pi}{2}$, а затем отобразить полученный график симметрично относительно оси абсцисс. На рис. 280 тангенсоида изображена тонкой линией, сдвинутая тангенсоида — штриховой, график функции $y = \operatorname{ctg} x$ — жирной.

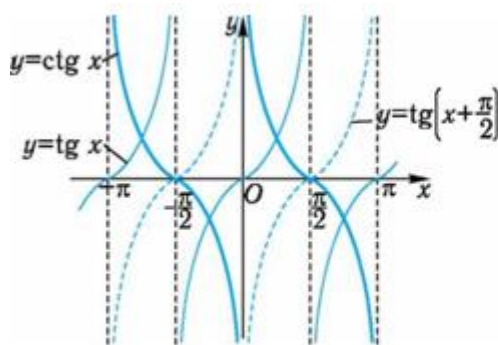


Рис. 280

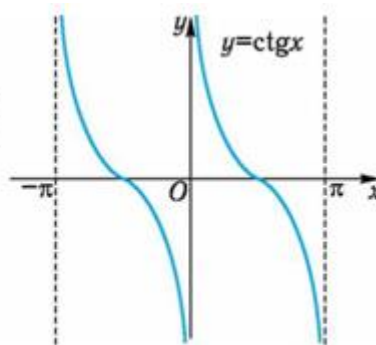


Рис. 281

В окончательном виде график функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображён на рис. 281.

Пример 1. Найти абсциссы точек пересечения графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с прямой $y = \sqrt{3}$.

□ Построив графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sqrt{3}$ (рис. 282), увидим, что та ветвь графика тангенса, которая соответствует промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, пересекает прямую $y = \sqrt{3}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Остальные точки пересечения имеют абсциссы $x_0 + \pi$; $x_0 - \pi$, $x_0 + 2\pi$, $x_0 - 2\pi$ и т. д. Итак, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. ■

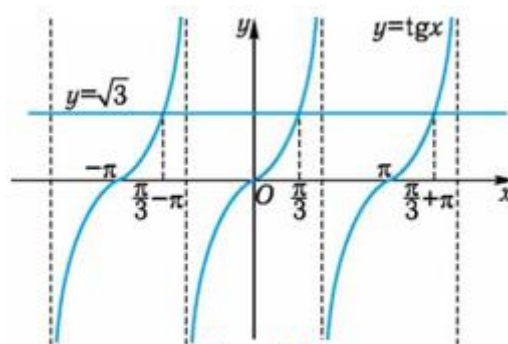


Рис. 282

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

□ Воспользуемся графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ на рис. 282. На данном промежутке функция возрастает. Поэтому наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах промежутка. Наибольшее значение тангенса на отмеченном промежутке равняется $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, наименьшее — $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. ■

Ответ: $\sqrt{3}; -\sqrt{3}$.

Пример 3. Построить графики функции: 1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = 2\operatorname{ctg} x$.

□ 1) График функции $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ параллельным переносом его в отрицательном направлении оси абсцисс на $\frac{\pi}{4}$ (рис. 283).

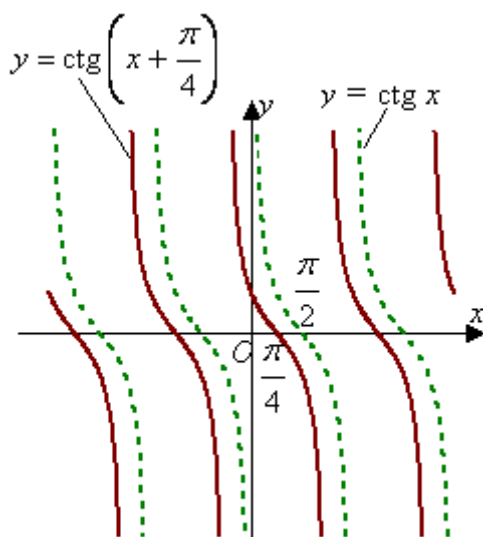


Рис. 283

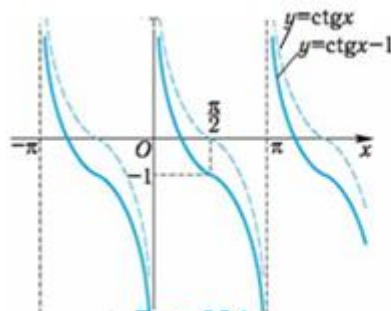


Рис. 284

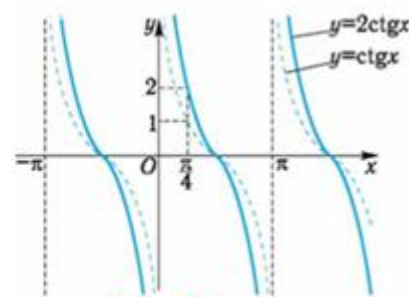


Рис. 285

2) График функции $y = \operatorname{ctg} x - 1$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ параллельным переносом его в отрицательном направлении оси ординат на 1 (рис. 284).

3) График функции $y = 2\operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ растяжением его от оси абсцисс в два раза (рис. 285).

■



В таблице 42 приведены обобщенные свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства 5, 6 и 8 выше рассматривались на промежутках, длина которых равнялась основному периоду π этих функций. Применяя периодичность тангенса и котангенса параллельным переносом этих промежутков на πk , где k — целое число, эти свойства можно продолжить на всю координатную прямую.

Таблица 42

	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
1.	Область определения функции — множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.	Область определения функции — множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, кроме $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$.
2.	Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π	
3.	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$.	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$
4.	Функция нечётна	

5.	Функция положительна на каждом из интервалов $\left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ и отрицательна на каждом из интервалов $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right)$, $k \in \mathbf{Z}$	
6.	Функция возрастает на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$	Функция убывает на каждом из интервалов $(\pi k; \pi(k+1))$, $k \in \mathbf{Z}$.
7.	Множеством значений функции является множество всех действительных чисел	
8.	Функция непрерывна в области определения. Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ являются точками разрыва функции	Функция непрерывна в области определения. Точки $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ являются точками разрыва функции

Приведем доказательство свойства 8 для тангенса.

□ Числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin x}{\cos x}$, как было показано в § 20, являются непрерывными функциями на всей координатной оси. Если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, то знаменатель дроби отличен от нуля и, согласно утверждению, сформулированному в § 4, функция $y = \operatorname{tg} x$ является непрерывной функцией в своей области определения. В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена, эти точки являются точками разрыва функции. ■

Пример 4. Сравнить числа: 1) $\operatorname{tg} 1,6\pi$ и $\operatorname{ctg} 0,7\pi$; 2) $\operatorname{ctg} 0,6\pi$ и $\operatorname{ctg} 0,9\pi$.

□ 1) Применяя формулы приведения, будем иметь: $\operatorname{tg} 1,6\pi = \operatorname{tg} (\pi + 0,6\pi) = \operatorname{tg} 0,6\pi$; $\operatorname{ctg} 0,7\pi = \operatorname{tg}(0,5\pi - 0,7\pi) = -\operatorname{tg} 0,2\pi = -\operatorname{tg}(\pi - 0,8\pi) = \operatorname{tg} 0,8\pi$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < 0,6\pi < 0,8\pi < \pi$ и тангенс возрастает во второй четверти, то $\operatorname{tg} 0,6\pi < \operatorname{tg} 0,8\pi$, или $\operatorname{tg} 1,6\pi < \operatorname{ctg} 0,7\pi$.

2) Поскольку $\frac{\pi}{2} < 0,6\pi < 0,9\pi < \pi$, и котангенс убывает во второй четверти, то $\operatorname{ctg} 0,9\pi < \operatorname{ctg} 0,6\pi$. ■

Ответ: 1) $\operatorname{tg} 1,6\pi < \operatorname{ctg} 0,7\pi$. 2) $\operatorname{ctg} 0,9\pi < \operatorname{ctg} 0,6\pi$.

Пример 5. Найти нули, промежутки знакопостоянства, возрастания и убывания функции $y = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

□ Выясним, при каких значениях x функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значение 0: $\operatorname{tg} x = 0$, если $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Применив этот результат к данной функции,

получим: $3x + \frac{\pi}{6} = \pi k, x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Воспользовавшись свойством 5 функции $y = \operatorname{tg} x$, запишем условие, при котором данная функция принимает положительные значения: $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$,

если $\pi k < 3x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Решив полученное неравенство относительно

x , будем иметь: $-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Воспользовавшись снова свойством 5 функции $y = \operatorname{tg} x$, запишем условие, при котором данная функция принимает отрицательные значения, и решим полученное неравенство относительно x : $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 0$, если

$$\frac{\pi}{2} + \pi k < 3x + \frac{\pi}{6} < \pi + \pi k, \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Промежутки, на которых функция возрастает, найдём, воспользовавшись свойством 6: $-\frac{\pi}{2} + \pi k < 3x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$.

Промежутков, на которых данная функция убывает, не существует, ибо с возрастанием x возрастает аргумент данной функции, а с возрастанием аргумента на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$, возрастает тангенс. ■

Ответ: $-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$ — нули функции; $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$; $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 0$ на $\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$; возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$.



Исследуем поведение графиков функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ вблизи точек их разрыва. Учитывая способ построения графиков этих функций, достаточно рассмотреть для тангенса лишь интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а для котангенса — $(0; \pi)$.

Свойство 9. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ являются положительными и неограниченно растут. Если же $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, и x приближается к $-\frac{\pi}{2}$, то соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ являются отрицательными и неограниченно растут по модулю.

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к 0, то соответствующие значения $\operatorname{ctg} x$ являются положительными и неограниченно растут. Если же $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, и x приближается к π , то соответствующие значения $\operatorname{ctg} x$ являются отрицательными и неограниченно растут по модулю.

□ Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к единице, а $\cos x$ — к нулю, а поэтому $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ будет принимать положительные и как угодно большие значений (рис. 273). В этом случае иногда говорят, что $\operatorname{tg} x$ стремится к плюс бесконечности. При $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и для функции $y = \operatorname{ctg} x$ доказательство аналогичное. ■

Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ являются **вертикальными асимптотами** графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Прямые $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ являются **вертикальными асимптотами** графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

При обосновании некоторых свойств функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ мы опирались на геометрический смысл их значений. Соответствующие доказательства можно было провести аналитически, хотя иногда это сделать достаточно сложно. Для иллюстрации этого замечания рассмотрим аналитическое доказательство возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

□ Пусть $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. По свойствам функции $y = \sin x$ имеем: $0 \leq \sin x_1 < \sin x_2$, а на основании свойств функции $y = \cos x$ можно записать: $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$. Отсюда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$. Перемножив левые и правые части неравенств $\sin x_1$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, по свойствам неравенств получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$ или $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$. Таким образом, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. ■

Пример 6. Найти все числа x из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых выполняется условие: 1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

□ Воспользуемся графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 286).

1) График функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ пересекается с прямой $y = 1$ в точках с абсциссами $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{5\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1$, и больше точек пересечения на этом промежутке не существует.

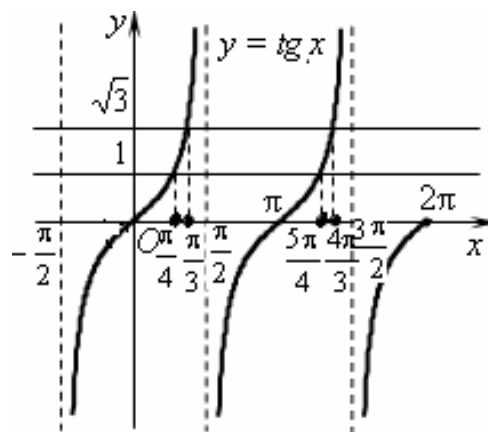


Рис. 286

2) Поскольку $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, то этот график пересекается с прямой $y = \sqrt{3}$ в точках $\frac{\pi}{3}$ и

$\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$. На графике отмечены его части на отрезке $[0; 2\pi]$, которые удовлетворяют условию

$\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$. Им соответствует объединение промежутков: $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$. ■

Ответ: 1) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; 2)

Пример 7. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x(x - \pi), & \text{если } x < \pi, \\ \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} x + |\operatorname{ctg} x|), & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

□ Если $x > \pi$, то данная функция равняется $\operatorname{ctg} x$ для тех значений x , при которых $\operatorname{ctg} x$ принимает положительные значения, и нулю на тех промежутках, где $\operatorname{ctg} x$ отрицательный. Следовательно, необходимо в одной системе координат построить графики трёх функций $y = x(x - \pi)$, $y = 0$ и $y = \operatorname{ctg} x$ и оставить те участки этих графиков, которые соответствуют отмеченным промежуткам (рис. 287). Обращаем внимание на то, что в точках $\pi, 2\pi, 3\pi$ и вообще $\pi k, k \in \mathbb{Z}$, заданная функция не определена. ■

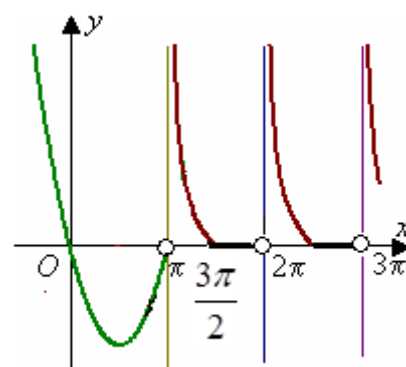


Рис. 287



Контрольные вопросы

1°. Имеет ли смысл запись: а) $\operatorname{tg} 2021$; б) $\operatorname{ctg} 2021\pi$?

2°. Является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:

- а) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$; б) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; в) $[0; \pi]$; г) $(1,6; 3)$?

3.° Является ли функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывающей на промежутке ...

а) $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{6}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $(1,6; 3)$?

4.° Справедливо ли неравенство $\operatorname{tg} x > 0$ во всех точках промежутка:

а) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$; г) $(1; 1,5)$?

5.° Справедливо ли неравенство $\operatorname{ctg} x < 0$ во всех точках промежутка:

а) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$; г) $(2; 2,5)$?

6.° В каких точках функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равны нулю?

7. Какова область определения функции: а) $y = \operatorname{tg} x - 1$; б) $y = \operatorname{tg} (x + 1)$; в) $\operatorname{ctg} (x + 2)$; г) $y = \operatorname{ctg} x - 2$; д) $y = \operatorname{ctg} 2x$?

8. Могут ли функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ принимать значения $0,0000001$; 2020 ; 10^{-20} ; 10^{20} ?

9. Каково множество значений функции: а) $y = \operatorname{tg} x - 1$; б) $y = \operatorname{ctg} x + 1$?

10. Существуют ли на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ такие значения x , при которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает наименьшее значение?

11. Можно ли утверждать, что тангенс возрастает:

а) на всей своей области определения;

б) на каждом интервале, который полностью лежит в его области определения?

12. Чему равняется наименьший положительный период функции: а) $y = \operatorname{tg} 3x$;

б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$?

13.* Сколько точек разрыва имеет функция: а) $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[0; 5\pi]$; б) $y = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $[-\pi; 3\pi]$?

14.* Как найти точки разрыва функции $y = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, зная точки разрыва функции $y = \operatorname{tg} x$?

15.* Как получить график функции $y = \operatorname{ctg} |x|$ из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$?

Задачи

340. Найдите область определения функции:

1) ° $y = \operatorname{tg} 2x$; 2) ° $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x - 1}$.

341. Какие из функций являются чётными, какие нечётными, а какие — ни чётными, ни нечётными:

1) ° $y = \operatorname{tg} 2x \cos 4x$; 2) ° $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 3) ° $y = \operatorname{tg} 3x \sin 2x$;

4) ° $y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x}$; 5) $y = \operatorname{tg} x + \cos x$; 6) $y = \frac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$?

342. Сравните числа:

- 1) $\operatorname{tg}(-80^\circ)$ и $\operatorname{tg}(-50^\circ)$; 2) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1,6$;
4) $\operatorname{tg}(-2)$ и $\operatorname{tg}(-3)$; 5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}$; 6) $\operatorname{ctg} 95^\circ$ и $\operatorname{ctg} 117^\circ$;
7) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$; 8) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{11}$ и $\operatorname{tg} 1,3\pi$; 9) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$; 10) $\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{14}$ и $\operatorname{ctg} \frac{35}{27}\pi$.

343. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

- 1) $^\circ y = \operatorname{ctg} 2x$; 2) $^\circ y = \operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = 2\operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
5) $^* y = \operatorname{tg}^2 x$; 2) $^* y = \operatorname{ctg}^2 x$; 3) $^* y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $^* y = 2 + \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

344. Найдите множество значений функции:

- 1) $^\circ y = \operatorname{tg}(x + 1)$; 2) $^\circ y = \operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = \operatorname{ctg} x, 0 < x < \frac{\pi}{4}$; 4) $y = \operatorname{tg}^2 x$;
5) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; 6) $y = \operatorname{ctg}^3 x$; 7) $^* y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 8) $y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

345. Укажите наибольшее и наименьшее значения функции:

- 1) $^\circ y = \operatorname{tg} x, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; 2) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$; 3) $y = \sin x + \operatorname{tg} x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

346. Постройте график функции:

- 1) $^\circ y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $^\circ y = \operatorname{ctg} x, x \in (-\pi; 0)$; 3) $^\circ y = \operatorname{ctg} x - 1$;
4) $^\circ y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 5) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 6) $y = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{при } x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{ctg} x & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

347*. Постройте график функции:

- 1) $y = |\operatorname{tg} x|$; 2) $y = \operatorname{tg} |x|$; 3) $y = |\operatorname{ctg} x|$; 4) $y = \operatorname{ctg}|x|$;
5) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; 6) $y = \frac{|x|}{x} \operatorname{tg} x$; 7) $y = \frac{x}{|x|} \operatorname{ctg} x$.

348. Найдите все числа x на отрезке $[0; 2\pi]$, удовлетворяющие условию:

- 1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x = 1$; 4) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

349. Найдите на отрезке $[-\pi; \pi]$ все значения x , удовлетворяющие условию:

- 1) $\operatorname{tg} x \geq 1$; 2) $\operatorname{tg} x < -1$; 3) $\operatorname{ctg} x > -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < 1$; 5) $0 \leq \operatorname{ctg} x \leq 1$.

350*. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

$$1) f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right).$$



Упражнения для повторения

351. Укажите наибольшее и наименьшее значения функции, её период:

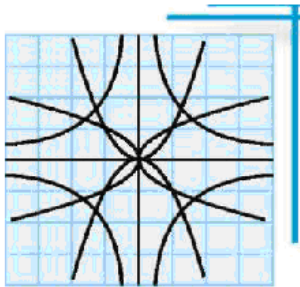
$$1) y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right); \quad 2) y = \frac{1 - \cos 4x}{2}; \quad 3) y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right); \quad 4) y = \cos 2x + 1.$$

352. Как из графика функции $y = \sin x$ построить график функции:

$$1) y = \sin x + \frac{\pi}{3}; \quad 2) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \quad 3) y = \sin \frac{x}{2}; \quad 4) y = \frac{\sin x}{2}?$$

353. Точка движется равномерно по окружности радиуса $R = 20$ см с угловой скоростью $\omega = \pi$ рад/с. Найдите её линейную скорость.

354. Точка движется равномерно по окружности радиуса $R = 50$ см с линейной скоростью 25 см/с. Найдите её угловую скорость.



§ 22. Гармонические колебания

В данном параграфе рассмотрим, как используют тригонометрические функции для описания колебательных процессов.



Пусть по окружности радиуса A движется точка с постоян-

ной угловой скоростью ω , то есть за единицу времени точка поворачивается на угол ω рад. За t единиц времени эта точка повернется на угол ωt рад. В начальный момент времени точка занимает положение M_0 , угол BOM_0 равен α рад (рис. 288). В момент времени t точка займёт положение M , угол M_0OM равен ωt рад, угол BOM равен $(\omega t + \alpha)$ рад.

Обозначим через M_x и M_y проекции точки M на оси x и y соответственно. Во время движения точки M по окружности ее проекция M_x на ось x совершает колебания вдоль горизонтального диаметра BC длиной $2A$, достигая то крайнего правого положения B , то крайнего левого положения C . Точно так же и ее проекция M_y на ось y совершает колебания вдоль вертикального диаметра DF , также достигая то наивысшего положения D , то самого нижнего положения F . Установим законы движения точек M_x и M_y . Построим единичную окружность с центром в точке O и обозначим через T точку пересечения луча OM с этой окружностью. Координаты точки $T = P_{\omega t + \alpha}$ равны $\cos(\omega t + \alpha)$ и $\sin(\omega t + \alpha)$, а поэтому, из соображений подобия, координаты точки M определяются формулами:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), y = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Эти формулы описывают отклонения точек M_x и M_y от точки O — центра окружности. Они задают законы движения точек M_x и M_y , которые называются **гармоническими колебаниями**.

Отметим, что при $A = 1$, $\omega = 1$, $\alpha = 0$ получим соответственно функции $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

Колебательные движения широко распространены в окружающем мире. Представления о них дают и океанские волны, и маятниковые часы, и качели, и нервные импульсы. С ними связано распространение звука и света. Многие из этих явлений можно описать с помощью гармонических колебаний.

Введем некоторые понятия, связанные с гармоническими колебаниями. Точку O — середину отрезков, вдоль которого проходят гармонические колебания, — называют **положением равновесия**, число A — **амплитудой колебания**. Амплитуда характеризует величину наибольшего отклонения от положения равновесия.

Число ω , как известно, является угловой скоростью вращения точки. За 2π единиц времени точка повернется на угол $2\pi\omega$ рад, при этом ее проекции на ось x и на ось y выполнят $\frac{2\pi\omega}{2\pi} = \omega$ полных колебаний. Число ω , то есть количе-

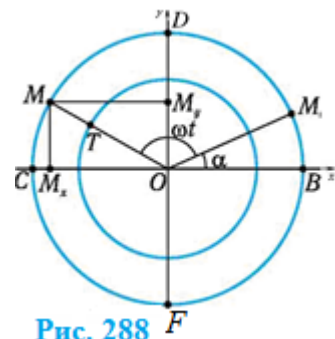


Рис. 288

ство полных колебаний за 2π единиц времени, называется еще **круговой частотой колебаний**.

Число α , характеризующее начальное положение точки на окружности, называется **начальной фазой колебания**, $\omega t + \alpha$ — фазой колебания.

В § 20 (пример 6) было рассмотрено построение графика гармонического колебания $y = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin \omega \left(t + \frac{\alpha}{\omega} \right)$. Функцию $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ можно получить из $y = A \sin(\omega t + \alpha)$, заменив α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Время T , в течение которого точка M совершает полный оборот, называется **периодом гармонического колебания**. За период T проекция M_x точки M на ось x дважды пройдет все свои возможные положения и возвратится в начальное положение. Исключения составляют лишь предельные положения B и C (см. рис. 288), каждое из которых точка пройдет один раз.

Так как за 2π единиц времени координата точки совершает ω полных колебаний, то одно полное колебание она совершает за $\frac{2\pi}{\omega}$ единиц времени, то есть $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Величина, обратная к периоду колебания,

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

называется **частотой колебания**. Она показывает, сколько полных колебаний совершает координата точки за единицу времени.



На практике для построения графика гармонического колебания $y = A \sin(\omega t + \alpha)$ иногда действуют так: находят значения t , при которых $\sin(\omega t + \alpha)$ обращается в нуль, то есть точки пересечения графика с осью абсцисс. Деля пополам полученные отрезки, находят точки, в которых функция $y = A \sin(\omega t + \alpha)$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Эти значения равняются соответственно A или $-A$ в зависимости от знака функции.

Пример. Построить график гармонического колебания $y = 5 \sin \left(2t + \frac{\pi}{3} \right)$.

□ Функция $\sin \left(2t + \frac{\pi}{3} \right)$ обращается в нуль, если $2t + \frac{\pi}{3} = \pi n, n \in \mathbf{Z}$, то есть если $t = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$. При $n = 0, 1, 2$ имеем:

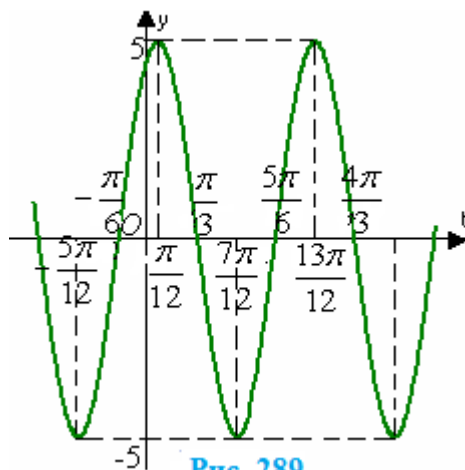


Рис. 289

$t = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$. В точке $\frac{\pi}{12}$ — середине отрезка $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ — эта функция принимает значение 1, в точке $\frac{7\pi}{12}$ — середине отрезка $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ — значение -1 и т.

д. Умножив полученные ординаты на 5, найдём характерные точки графика (рис. 289). ■



Контрольные вопросы

1°. Чему равна амплитуда гармонического колебания точки, равномерно движущейся по окружности диаметра 10 см с центром в начале координат?

2°. Чему равна круговая частота гармонического колебания точки, равномерно движущейся с угловой скоростью 5 рад/с по окружности с центром в начале координат?

3°. Чему равен период гармонического колебания точки, равномерно движущейся с угловой скоростью 5 рад/с по окружности с центром в начале координат?

4°. Чему равна угловая скорость движения точки по окружности, если период соответствующего гармонического колебания координат равен 4?

5. Чему равна линейная скорость движения точки по окружности радиуса 2, если период соответствующего гармонического колебания координат равен 4?

6. Известно, что проекция точки, движущейся по окружности, на вертикальный диаметр совершает гармоническое колебание, определяемое формулой $y = 3 \sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$. По какому закону изменяется проекция этой точки на горизонтальный диаметр?

7°. Чему равна начальная фаза гармонического колебания точки, равномерно движущейся по окружности с центром в начале координат, если в начальный момент времени её положение совпадает с верхним концом вертикального диаметра?

8.* Каким моментам времени соответствуют наибольшее и наименьшее значения функции $x = A \cos(\omega t + \alpha)$, описывающей закон движения проекции точки, вращающейся по окружности, на горизонтальный диаметр?

Задачи

355°. Найдите амплитуду, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой:

$$1) y = 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right); \quad 2) y = \frac{1}{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right); \quad 3) y = 2 \sin\left(\frac{t}{2} + 1\right);$$

$$4) y = 3 \sin 4t; \quad 5) y = \sin(t - 1).$$

356°. Дан закон, по которому изменяется координата (измеряемая в сантиметрах) движущегося тела. Найдите амплитуду, период, круговую частоту колебания. Вычислите координату тела в момент времени t_0 , если:

1) $x(t) = 2,5 \cos 3\pi t$, $t_0 = \frac{1}{9}$ с; 2) $x(t) = 7 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, $t_0 = 2,5$ с;

3) $x(t) = 2 \cos 2\pi t$, $t_0 = 0,25$ с; 4) $x(t) = 1,5 \cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$, $t_0 = 3,5$ с.

357. Дан закон, по которому изменяется со временем сила переменного тока:
 $I(t) = 5 \sin 10\pi t$, I — сила тока, А; t — время, с.

1°) Найдите амплитуду, период, круговую частоту колебаний силы тока.

2°) Чему равна сила тока в момент времени $t = 0,05$ с?

3) В какие моменты времени сила тока принимает наибольшее значение?

358. Дан закон, по которому изменяется со временем напряжение:
 $U(t) = 220 \cos 60\pi t$, U — напряжение, В; t — время, с.

1°) Найдите амплитуду, период, частоту колебаний напряжения.

2°) Чему равняется напряжение в момент времени $t = 0,5$ с?

3) В какие моменты времени напряжение принимает наибольшее значение?

359. Точка выполняет гармоническое колебание по закону:

$$y = 2 \sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right).$$

1) Найдите амплитуду, период и начальную фазу этого колебания.

2) Укажите, какие преобразования следует выполнить над синусоидой $y = \sin t$, чтобы получить график данного колебания.

3) Постройте схематически график гармонического колебания.

360. Ордината точки, вращающейся по окружности, совершает гармоническое колебание по закону: $y = 2 \sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите моменты времени, в которых

точка расположена в крайнем положении:

1) верхнем; 2) левом; 3) нижнем; 4) правом.

361. Напишите уравнение гармонического колебания, если:

1) амплитуда равна 1, период 0,2 с, начальная фаза $\frac{\pi}{6}$;

2) за 1 мин совершается 180 колебаний с амплитудой 7 см, а начальная фаза колебаний равна $\frac{\pi}{2}$.

362. Постройте график гармонического колебания в пределах одного периода:

1) $y = 3 \sin 2t$; 2) $y = 2 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = 4 \sin\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.



Упражнения для повторения

363. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: 1) острый; 2) тупой? Справедливы ли обратные утверждения?

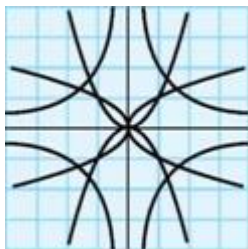
364. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и угол между ними равен: 1) 60° ; 2) 135° ; 3) 90° ; 4) 0° ; 5) 180° .

365. Чему равняется скалярное произведение векторов: 1) $(a; 0)$ и $(b; 0)$; 2) $(a; 0)$ и $(0; b)$; 3) $(a; b)$ и $(a; b)$; 4) $(a; b)$ и $(-a; -b)$?

366. Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-2; 3)$. Вычислите:

1) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a} \cdot (-3\vec{b})$; 3) $\left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)$; 4) $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$;

5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.



§ 23. Тригонометрические тождества

В данном параграфе рассмотрим большую группу формул, связанных с тем, что поворот на угол $\alpha + \beta$ можно реализовать в результате двух последовательных поворотов — на угол α и на угол β — и их приложения.



1. Формулы сложения

Формулы приведения позволяют считать, что углы α и β принадлежат промежутку $[0; \pi]$. Рассмотрим на тригонометрической окружности точки P_α и P_β , имея в виду, что векторы $\vec{OP}_\alpha$ и

$\vec{OP}_\beta$ образуют углы α и β с осью абсцисс. Угол между векторами $\vec{OP}_\alpha$ и $\vec{OP}_\beta$ может равняться $\alpha - \beta$, если $\alpha \geq \beta$ (рис. 290), $\beta - \alpha$, если $\beta > \alpha$ (рис. 291). В любом из этих случаев косинус этого угла равен $\cos(\alpha - \beta)$.

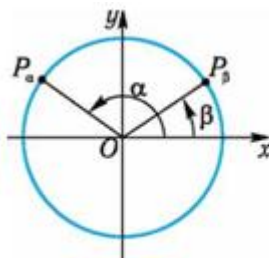


Рис. 290

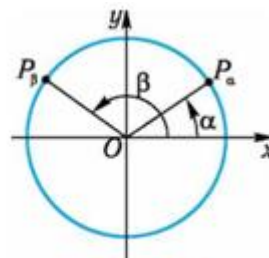


Рис. 291

Точки P_α и P_β имеют соответственно координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ и $(\cos \beta; \sin \beta)$. Такие же координаты имеют и векторы $\vec{OP}_\alpha$ и $\vec{OP}_\beta$. По определению скалярного произведения, $\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{OP}_\beta = |\vec{OP}_\alpha| \cdot |\vec{OP}_\beta| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$, так как $|\vec{OP}_\alpha| = |\vec{OP}_\beta| = 1$.

Поскольку скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ выражается через их координаты по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$, то имеем:

$$\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{OP}_\beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Сравнив полученные результаты, будем иметь:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Косинус разности двух углов равен сумме произведений косинусов и синусов этих углов.

В качестве следствия, получаем формулу косинуса суммы углов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta).$$

С учетом четности косинуса и нечетности синуса, получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Косинус суммы двух углов равен разности произведений косинусов и синусов этих углов.

Выведем теперь формулы синуса суммы двух углов. Воспользовавшись формулами приведения и косинуса разности двух углов, будем иметь:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.\end{aligned}$$

Итак,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

Для синуса разности имеем:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

Используя полученные формулы синуса и косинуса суммы двух аргументов, можно вывести формулы сложения для тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

□ Действительно

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}.$$

Допуская, что $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, и разделив на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ числитель и знаменатель последней дроби, будем иметь:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Итак, справедливо утверждение:

Тангенс суммы двух аргументов равен сумме тангенсов слагаемых, делённой на разность между единицей и произведением этих тангенсов.

Заменяя β на $(-\beta)$ и используя нечётность тангенса, получим формулу для тангенса разности.

Тангенс разности двух аргументов равен разности тангенсов уменьшаемого и вычитаемого, делённой на сумму единицы и произведения этих тангенсов. ■

Пример 1. Не пользуясь вычислительными средствами, найти $\cos 15^\circ$.

□ Представим 15° в виде разности $45^\circ - 30^\circ$. Тогда, пользуясь формулой косинуса разности двух углов, найдём: $\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) =$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1). \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Пример 2. Вычислить $\sin(\alpha - \beta)$, если

$$\cos \alpha = -0,8, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \sin \beta = -\frac{12}{13}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}.$$

□ Из формулы синуса разности двух углов вытекает, что для решения задачи необходимо найти $\sin \alpha$ и $\cos \beta$. Из основного тригонометрического тождества можно найти $\sin^2 \alpha$: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36$. Поскольку

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin \alpha > 0$, поэтому $\sin \alpha = \sqrt{0,36} = 0,6$. Аналогично вычислим $\cos \beta$. Из основного тригонометрического тождества имеем:

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}. \text{ Поскольку } \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}, \text{ то } \cos \beta < 0 \text{ и}$$

$$\cos \beta = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}. \text{ Теперь можно вычислить } \sin(\alpha - \beta) \text{ по формуле синуса}$$

$$\text{разности двух углов: } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta =$$

$$= 0,6 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{12}{13}\right)(-0,8) = -\frac{63}{65}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } -\frac{63}{65}.$$



Аналогично формулам тангенса суммы и разности двух углов можно вывести формулы сложения для котангенса:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}, \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}.$$

□ Действительно,

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}.$$

Предполагая, что $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta \neq 0$, и разделив на $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ числитель и знаменатель последней дроби, будем иметь:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}}{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - 1}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}.$$

Заменяя β на $(-\beta)$ и используя нечётность котангенса, получим формулу для котангенса разности. ■

Пример 3. Вычислить $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12}$.

□ По формуле котангенса суммы двух углов запишем:

$$\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2. \blacksquare$$



Ответ: $\sqrt{3} - 2$.

Контрольные вопросы

1. ° Чему равняется значение выражения $\sin 12^\circ \cos 33^\circ + \cos 12^\circ \sin 33^\circ$?
2. ° Чему равняется значение выражения $\frac{\operatorname{tg} 19^\circ + \operatorname{tg} 41^\circ}{1 - \operatorname{tg} 19^\circ \cdot \operatorname{tg} 41^\circ}$?
3. ° Как с помощью формулы для тангенса суммы двух углов можно вычислить $\operatorname{tg} 75^\circ$?
4. ° Можно ли утверждать что:
 - а) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$;
 - б) $\sin 23^\circ \cos 17^\circ + \cos 23^\circ \sin 17^\circ = \sin 32^\circ \cos 8^\circ + \sin 8^\circ \cos 32^\circ$?
5. Можно ли из формулы для косинуса суммы двух углов ввести формулу для косинуса разности двух углов?
6. Можно ли вычислить:
 - 1) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{3}{5}$;
 - 2) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$;

3) $\sin(\alpha + \beta)$, если известно, что $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{10}$?

7. * Какое выражение для тангенса суммы двух углов получим, если разделим числитель и знаменатель не на $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, а на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$? При каких условиях это можно делать?

8. * При каких условиях не имеет смысла формула тангенса суммы двух углов?

9. * Можно ли с помощью формул сложения вычислить значение $\operatorname{tg} \alpha$, если известно значение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$?

2. Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов



В качестве следствий формул сложения при $\alpha = \beta$ получим формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Следовательно,

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Пример 4. Найти значение $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,8$.

□ По формуле косинуса двойного угла имеем:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot (-0,8)^2 = -0,28. \blacksquare$$

Ответ. $-0,28$.

Пример 5. Упростить выражение: $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha}$.

□ Применяя последовательно формулу синуса двойного угла, основное тригонометрическое тождество, формулу косинуса двойного угла и определение тангенса, получим:

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \blacksquare$$

Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$.

Из формул двойного угла можно вывести формулы для синуса и косинуса половинного угла. Фактически мы это начали реализовывать при решении примеров 4 и 5. Действительно,

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1,$$

или

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

Эти равенства часто записывают в таком виде:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha.$$

Поскольку

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1, \quad \cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

то

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Эти формулы называются **формулами половинного аргумента**, или **формулами понижения степени**. Их можно записать в виде

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Обратим внимание на то, что зная только $\cos \alpha$, невозможно без дополнительных условий однозначно найти $\cos \frac{\alpha}{2}$ или $\sin \frac{\alpha}{2}$.

Из последних двух формул вытекает формула для тангенса половинного угла :

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Пример 7. Вычислить $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{1}{9}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

$$\square \text{ Поскольку } 0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{9}}{2}} = \frac{2}{3}. \blacksquare$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.



Вычислим выражение для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, когда функция не стоит под знаком модуля.

Воспользовавшись определением тангенса, умножив числитель и знаменатель дроби на $2 \cos \frac{\alpha}{2}$ и применив формулы синуса двойного аргумента и понижения степени, будем иметь:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Аналогично:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Пример 8. Не пользуясь вычислительными средствами, найти $\cos 15^\circ$.

□ Один способ решения этого задания, который основывался на применении формулы косинуса разности двух углов, был приведен в п. 1 (пример 1). Здесь рассмотрим другой способ.

Воспользовавшись формулой косинуса половинного аргумента с учётом того, что $\cos 15^\circ > 0$, получим:

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}). \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1).$$

Пример 9. Упростить выражение $\frac{\cos 12^\circ}{1 - \sin 12^\circ}$.

□ Применив сначала формулы приведения, условия чётности косинуса и нечётности синуса, а затем формулу $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, будем иметь:

$$\frac{\cos 12^\circ}{1 - \sin 12^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 102^\circ)}{1 + \sin(90^\circ - 102^\circ)} = \frac{\sin 102^\circ}{1 + \cos 102^\circ} = \operatorname{tg} 51^\circ. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} 51^\circ.$$

Важную роль в тригонометрии и ее приложениях играет тангенс половинного угла. Через него можно выразить все остальные тригонометрические функции:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

(числитель и знаменатель разделили на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$).

Аналогично

$$\cos \alpha = \frac{\cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Полученные формулы называются **формулами универсальной подстановки**. Они позволяют свести доказательство любого тригонометрического тождества или решение уравнения, в обеих частях которых стоят рациональные выражения относительно $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, к доказательству алгебраического тождества или решению алгебраического уравнения с одной переменной. Для этого достаточно выразить $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и обозначить какой-нибудь буквой $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Пример 10. Записать функцию $y = 2 \sin x - \cos x$ в виде функции от $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

□ Применим формулы $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$, $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$. Тогда: $y = 2 \sin$

$$x - \cos x = 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \blacksquare$$

Ответ: $y = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$



В некоторых тригонометрических формулах области определения левой и правой частей являются разными и это надо учитывать при решении задач. Следующая таблица 43 содержит такие формулы.

Таблица 43

№ п/п	Формула	Множество значений аргументов, при которых имеет смысл левая часть	Множество значений аргументов, при которых имеет смысл правая часть
1	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$

2	$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$	$\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z};$ $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z};$ $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
3	$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$	$\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z};$ $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z};$ $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
4	$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbf{Z}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z};$ $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$
5	$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$
6	$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$

В таблице 43 соотношение $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ во второй строке таблицы получено на основании того, что знаменатель дроби $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ должен быть отличным от нуля. Те же самые соображения касаются и соотношения $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ в третьей строке таблицы.



Контрольные вопросы

- Чему равняется: а) $^\circ \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$; б) $^\circ \cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ$; в) $\frac{2\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$?
- Чему равняется: а) $\sin 20^\circ$, если $\sin 10^\circ = a$; б) $\operatorname{tg} 40^\circ$, если $\operatorname{tg} 20^\circ = a$?
- Существует ли такой угол α , что $\sin\alpha \cos\alpha = 0,65$?
- Нужно ли знать, в какой четверти находится точка P_α , чтобы по значению $\cos \alpha$ или $\sin \alpha$ вычислить: а) $\cos 2\alpha$; б) $\sin 2\alpha$?

5. В какой четверти тригонометрической окружности находится точка P_t , если $\sin t > 0$, $\sin 2t < 0$?

6. Каково множество значений функции $y = \sin x \cos x$?

7. Всегда можно ли утверждать, что $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$?

8*. Можно ли утверждать, что знак $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ совпадает со знаком $\sin x$ для всех допустимых значений x ?

9*. При каких значениях α теряет смысл формула $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$?

3. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение



При решении тригонометрических уравнений или неравенств полезно уметь представлять сумму и разность синусов или косинусов в виде произведения тригонометрических функций. Такие формулы широко применяются при различных преобразованиях тригонометрических выражений.

Формулы, на которых базируются преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, можно получить из формул сложения.

Пусть необходимо преобразовать сумму $\sin \alpha + \sin \beta$ в произведение. Запишем α и β в виде

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}. \text{ Тогда}$$
$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) =$$
$$= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} -$$
$$- \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Таким образом,

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Получили **формулу суммы синусов** двух углов.

Сумма синусов двух углов равняется удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Аналогично выводятся **формулы разности синусов, суммы и разности косинусов**. Формула разности синусов:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Разность синусов двух углов равняется удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус их полусуммы.

Пример 11. Вычислить без вычислительных средств:

1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; 2) $\sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}$.

□ 1) Воспользуемся формулой суммы синусов двух аргументов:

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$2) \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Ответ: а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 12. Доказать тождество: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$.

□ Воспользовавшись формулами приведения, заменим $\cos \alpha$ на $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ и применим формулу суммы синусов двух углов:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \alpha &= \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} \cos \frac{\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right). \end{aligned}$$

Последнее преобразование выполнено с помощью формулы приведения: $\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$. ■

Формула суммы косинусов:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Сумма косинусов двух углов равняется удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Формула разности косинусов:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Разность косинусов двух углов равна взятому со знаком “минус” удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности.

Рекомендуем вывести формулы разности синусов, суммы и разности косинусов самостоятельно.

Пример 13. Пусть α , β , γ — углы треугольника. Доказать, что

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

□ □ Поскольку $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, то

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos \alpha + \\ &+ \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right) = \\ &= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 1 + 2 \cos \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \times \\ &\times 2 \sin \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Из формул сложения можно получить формулы для суммы и разности тангенсов двух углов:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \\ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

Сумма тангенсов двух углов равна отношению синуса суммы этих углов к произведению косинусов тех же углов.

Разность тангенсов двух углов равна отношению синуса разности этих углов к произведению косинусов тех же углов.

Докажем, например, первую из приведенных формул.

$$\square \square \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \blacksquare$$

Вторая формула доказывается аналогично. Рекомендуем сделать это самостоятельно.

Пример 14. Найти условие, при котором тангенсы двух углов равны друг другу.

$$\square \text{ Пусть } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y, \text{ причому } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \text{ Тогда } \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0, \text{ или } \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} = 0. \text{ Последнее равенство справедливо тогда и только тог-}$$

да, когда числитель дроби в левой части равен нулю (обращаем внимание на то, что знаменатель не равняется нулю, в противном случае тангенсы не имели бы смысла). Следовательно, $\sin(x - y) = 0$. Отсюда $x - y = k\pi$, или $x = y + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, если тангенсы двух углов равны друг другу, то эти углы отличаются друг от друга на угол, кратный π .

С другой стороны, если углы x и y отличаются друг от друга на угол, кратный π , то есть $x = y + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(y + \pi k) = \operatorname{tg} y$. ■

Ответ: $x = y + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



Из формул сложения можно получить также формулы, преобразующие произведение тригонометрических функций в сумму или в разность:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Произведение синусов двух углов равняется полуразности косинусов разности и суммы этих углов.

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Произведение косинусов двух углов равняется полусумме косинусов суммы и разности этих углов.

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Произведение синуса одного угла на косинус другого равняется полусумме синусов суммы и разности этих углов.

Для их доказательства надо соответственно из формулы косинуса разности двух углов вычесть почленно формулу косинуса суммы двух углов (см. п. 1), сложить почленно эти формулы и, наконец, сложить почленно формулы синуса суммы и синуса разности двух углов. Рекомендуем самостоятельно выполнить эти преобразования.

Пример 15. Вычислить, не пользуясь вычислительными средствами:

1) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$; 2) $\cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$.

□ Применив формулу для произведения синуса и косинуса и для произведения косинусов, будем иметь:

$$1) \quad \sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}(\sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ)) = \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

$$2) \quad \cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4}.$$



Ответ: 1) $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$.

Контрольные вопросы

- ° Чему равняется значение выражения:
а) $\sin 124^\circ + \sin 236^\circ$; б) $\cos 137^\circ + \cos 43^\circ$?
- ° Как можно вывести формулу суммы косинусов, используя формулу суммы синусов и формулы приведения?
- ° Как можно вывести формулу разности косинусов, используя формулу разности синусов и формулы приведения?

4. ° Иногда формулу разности косинусов представляют в виде

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Как можно её получить из формулы $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$?

5. Как сравнить $\cos 3$ и $\cos 3,2$, пользуясь формулой разности косинусов двух аргументов?

6. Что больше: $\operatorname{tg} 3$ или $\operatorname{tg} 4,8$?

7. Как преобразовать сумму синуса и косинуса двух аргументов в произведение?

8. * При каких условиях не имеет смысла формула суммы тангенсов двух углов?

9. * Как можно получить формулы суммы и разности синусов, суммы и разности косинусов из формул преобразования произведений в сумму?

Задачи

367°. Воспользовавшись формулами сложения, докажите такие формулы приведения:

1) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; 2) $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$;

3) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$.

368. Воспользовавшись формулами сложения, вычислите:

1) $\cos 75^\circ$; 2) $\cos 105^\circ$; 3) $\sin 15^\circ$; 4) $\sin 75^\circ$; 5) $\cos 165^\circ$.

369°. Найдите:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$; $\cos \beta = \frac{24}{25}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$; $\cos \beta = \frac{1}{3}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

3) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}$.

4) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$, если $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

370°. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$; 4) $\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$.

5) $\sin 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cos 15^\circ$; 6) $\sin \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha \cos \alpha$.

371. Вычислите:

1) ° $\sin 68^\circ \cos 8^\circ - \sin 8^\circ \cos 68^\circ$; 2) ° $\cos 10^\circ \cos 35^\circ - \sin 10^\circ \sin 35^\circ$;

3) $\sin 54^\circ \sin 24^\circ - \sin 66^\circ \cos 126^\circ$; 4) $\cos 21^\circ \cos 24^\circ - \cos 69^\circ \cos 66^\circ$.

372. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta;$ 2) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\beta \cdot \cos\alpha;$

3) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta;$ 4) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta;$

5) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha};$ 6) $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha}.$

373*. Докажите, что:

1) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta = -2$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

374. Докажите неравенство:

1) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ > 1;$ 2) $\cos 15^\circ - \cos 45^\circ < 0,3;$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos 25^\circ - \cos 85^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2}.$

375. Докажите:

1) если α и β — углы остроугольного треугольника, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta > 1;$

2) если α и β — острые углы тупоугольного треугольника, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta < 1.$

376. Синусы двух острых углов треугольника равняются, соответственно,

$\frac{20}{29}$ и $\frac{3}{5}$. Найдите косинус внешнего угла треугольника, который не является смежным с двумя данными углами.

377. Тангенсы трех острых углов равняются, соответственно, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{19}$. Докажите,

что сумма первых двух углов на 45° превышает третий угол.

378. В квадрат вписан другой квадрат. Один из острых углов между сторонами квадратов равняется α . При каком значении угла α площадь вписанного квадрата составляет $\frac{2}{3}$ площади другого квадрата?

379. Найдите наименьший положительный период и постройте график функции:

1) $y = \sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x;$ 2) $y = \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x;$

3) $y = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}};$ 4) $y = 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x\right).$

380. Дана функция:

1) $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + (\sin x - \cos x)^2;$ 2) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x.$

Найдите её наименьшее и наибольшее значения, наименьший положительный период, постройте её график.

381°. Найдите:

- 1) $\sin 2\alpha; \cos 2\alpha; \operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\sin 50^\circ$, если $\sin 25^\circ = a$;
 3) $\cos \frac{\pi}{9}$, если $\cos \frac{\pi}{18} = a$; 4) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$, если $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} = a$.

382. Выразите:

- 1) $\sin 3\alpha$ через $\sin \alpha$; 2) $\cos 3\alpha$ через $\cos \alpha$.

383. Найдите: $\sin \frac{\alpha}{2}; \cos \frac{\alpha}{2}; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если:

- 1) $\cos \alpha = 0,6$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin \alpha = 0,6$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

384. Упростите выражение:

- 1) $^\circ \sin 10^\circ \cos 10^\circ$; 2) $^\circ \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$; 3) $^\circ \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$;
 4) $^\circ \frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha)}$; 5) $^\circ 2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$;
 6) $^\circ \cos^4(45^\circ - \alpha) - \sin^4(45^\circ - \alpha)$; 7) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
 8) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; 9) $\frac{1 - \cos 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma}$; 10) $\frac{1 - \sin 2\gamma}{1 + \sin 2\gamma}$.

385. Упростите выражение:

- 1) $2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin 2\alpha$; 2) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$;
 3) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$; 4) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$; 5) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}$;
 6) $\sin \alpha (1 + 2 \cos 2\alpha)$; 7) $1 - 8 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta$; 8) $0,125 - \cos^2 x + \cos^4 x$;
 9) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$; 10) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$; 11) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$; 12) $\sqrt{2 \sin 2\alpha + 2}$;
 13) $\sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 14) $\sqrt{1 - \sin \alpha} - \sqrt{1 + \sin \alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$$15) \sqrt{2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \operatorname{ctg} \alpha, \quad \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi; \quad 16)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

386. Докажите тождество:

$$1) 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha = 1; \quad 2) 2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1;$$

$$3) \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right); \quad 4) \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right);$$

$$5) \sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha; \quad 6) (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \sin 2\alpha = 2 \cos 2\alpha;$$

$$7) 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 8) 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

387*. Вычислите:

$$1) \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5};$$

$$2) \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

;

$$3) \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7};$$

$$4) \frac{1}{\sin \frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{18}}.$$

388*. 1) Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен 0,8. Найдите синус и косинус угла при вершине этого треугольника.

2) Косинус угла при вершине равнобедренного треугольника равен $\frac{7}{9}$.

. Найдите синус и косинус угла при основании этого треугольника.

3) Найдите наименьшее значение площади прямоугольного треугольника, у которого высота, проведенная к гипотенузе, равняется h .

389. Дана функция:

$$1) y = \sin x \cos x; \quad 2) * y = 2 \sin^2 2x + \cos^2 2x; \quad 3) * y = \sin 2x (\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x).$$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции и ее наименьший положительный период. Постройте ее график.

390°. Вычислите, не пользуясь вычислительными средствами:

$$1) \sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}; \quad 2) \sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}; \quad 3) \cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}; \quad 4)$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12};$$

$$5) \cos 75^\circ \cdot \cos 105^\circ; \quad 6) \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ.$$

391. Упростите выражение:

$$1) \circ \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha}; \quad 2) \circ \frac{2(\cos \alpha + \cos 3\alpha)}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}; \quad 3) 1 + \sin \alpha + \cos \alpha; \quad 4)$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 2\alpha.$$

392. Докажите тождество:

$$1) \quad \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right); 2)$$

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha;$$

$$3) \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad 4) \frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha;$$

$$5) (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$6) (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4 \cos^2 \alpha;$$

$$7) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \operatorname{tg} \alpha; \quad 8) \frac{1 + \operatorname{ctg} 2\alpha}{1 - \operatorname{ctg} 2\alpha} = \frac{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

393. Представьте данное выражение в виде произведения или частного:

$$1) \sqrt{2} + 2 \cos \alpha; \quad 2) \sqrt{3} - 2 \cos \alpha; \quad 3) \sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha; \quad 4) 1 + \operatorname{tg} \alpha.$$

394. Уменьшите степень тригонометрической функции в выражении:

$$1) ^\circ 2 \cos^2 x; \quad 2) 2 \cos^2 x \cos 2x; \quad 3) ^\circ 2 \sin^2 2x; \quad 4) \cos^2 x \sin^2 x; \quad 5) ^\circ \cos^2 4x.$$

395*. Найдите условие, при котором равны друг другу:

1) синусы двух углов α и β ; 2) косинусы двух углов α и β .

396. Докажите тождество:

$$1) \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2};$$

$$3) \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = 2 \cos \frac{x}{2}, \text{ если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$4) \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 2 \sin \frac{x}{2}, \text{ если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$5) \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad 6) \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$7) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2};$$

$$8) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{5\alpha}{2}.$$

397*. Докажите, что:

$$1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1, \text{ если } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2};$$

$$2) \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma, \text{ если } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

398*. Докажите тождество, если α, β, γ — углы треугольника:

- 1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$;
- 4) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

399*. Дано: $\sin \alpha + \sin \beta = b$, $\cos \alpha + \cos \beta = a$. Найдите:

- 1) $\cos(\alpha + \beta)$;
- 2) $\sin(\alpha + \beta)$.

400*. Тангенсы двух углов треугольника равны, соответственно, 1,5 и 5. Найдите третий угол треугольника.

401*. Найдите наибольшее значение суммы катетов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равняется c .

402*. Дана функция:

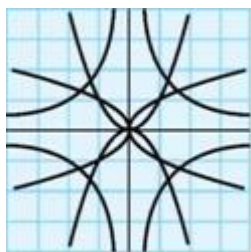
- 1) $y = \sin x + \cos x$;
- 2) $y = \sin x - \cos x$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции и её наименьший положительный период. Постройте её график.

403*. Дана функция:

$$1) y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}; \quad 2) y = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}.$$

Найдите её наибольшее и наименьшее значения (если они существуют), наименьший положительный период. Постройте её график.



Готовимся к тематическому оцениванию по теме "Тригонометрические функции"

Задания для самоконтроля

1. В какой четверти содержится точка P_t , если t равняется: а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{8\pi}{9}$; в) 4; г) $-\frac{17\pi}{9}$; д) $5,7\pi$?
2. Какому из чисел промежутка $[0; 2\pi]$ соответствует на тригонометрической окружности точка, симметричная точке $P_{\frac{2\pi}{3}}$ относительно:
 - а) начала координат; б) оси ординат; в) оси абсцисс; г) прямой $y = x$; д) прямой $y = -x$?
3. Каким числам из промежутка $(0; 3\pi)$ на тригонометрической окружности соответствует точка P_t с:
 - а) ординатой 0; б) ординатой 1; в) ординатой -1 ; г) абсциссой 0; д) абсциссой 1; е) абсциссой -1 ?
4. Чему равняются координаты точки P_t на тригонометрической окружности, если t равняется: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) π ; д) $-\frac{\pi}{2}$?
5. На какой угол повернется точка на ободе колеса машины при равномерном движении машины за 5 с, если за 2 с колесо делает 6 оборотов?
6. Сколько существует точек P_t на тригонометрической окружности, если для соответствующих значений t :
 - а) $\cos t = 1$; б) $\sin t = 0,7$; в) $\sin t = -1$; г) $\cos t = -0,6$?
7. На какой угол следует повернуть минутную стрелку часов, чтобы перевести часы вперед:
 - а) на 10 мин; б) на 20 мин; в) на 1 ч; г) на 2 ч 40 мин?
8. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс числа t , если t равняется:
 - а) 3; б) $\frac{16\pi}{9}$; в) 7?
9. Какие из приведенных далее точек принадлежат тригонометрической окружности:
 - а) $A(0,3; 0,7)$; б) $B(-0,8; -0,6)$; в) $C\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; г) $D\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; д) $E(0; 0)$?
10. Могут ли синус и косинус одного и того же аргумента одновременно равняться:
 - а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$; б) 1 и 0; в) 0,9 и 0,1; г) 0 и 0; д) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\sqrt{\frac{2}{3}}$?
11. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же аргумента равняться:
 - а) $\frac{1}{2}$ и 2; б) 0,6 и 0,8; в) $\sqrt{2} + 1$ и $\sqrt{2} - 1$; г) 5 и $-\frac{1}{5}$?

12. Косинус суммы двух углов треугольника равен 0,3. Есть ли среди углов треугольника тупой угол?

13. Какие из приведенных чисел принадлежат области определения функции $y = \sqrt{\cos x}$:

а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; в) π ; г) $\frac{4\pi}{3}$; д) 0; е) 5?

14. Какие из приведенных чисел принадлежат множеству значений функции $y = \frac{1}{2} \sin^2 x - 1$:

а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) 0; е) -1?

15. Какие из приведенных функций являются чётными; нечётными; не являются ни чётными, ни нечётными:

а) $y = \cos x$; б) $y = x + \cos x$; в) $y = x^2 \cos x$; г) $y = \sin^2 x$; д) $y = \sin x \cos x$;

е) $y = \sin x + \cos x$; ж) $y = x + \cos^2 2x$; з) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$?

16. Возрастающей или убывающей является функция $y = \sin x$ на промежутке:

а) $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; б) $[2; 3]$; в) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; г) $[0; \pi]$; д) $[0; 1]$; е) $[\pi; 2\pi]$?

17. Что больше:

а) $\sin \frac{\pi}{9}$ или $\sin \frac{4\pi}{9}$; б) $\cos \frac{2\pi}{9}$ или $\cos \frac{\pi}{3}$; в) $\sin 1$ или $\sin 2$; г) $\cos 2$ или $\cos 3$?

18. Какие из представленных чисел являются периодами функции $y = \cos x$:

а) π ; б) 2π ; в) 3π ; г) $\frac{\pi}{2}$; д) 4π ; е) 5π ; ж) 6π ?

19. Возможно ли равенство: а) $\sin x = \frac{\pi}{4}$; б) $\sin^{10} x = 1,5$?

20. Совпадают ли области определения функций:

а) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; б) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ и $y = 1$?

21. Чему равняется на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ наибольшее значение функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$?

22. Какое из чисел больше:

а) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$ или $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$; б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}$?

23. Каков наименьший положительный период функции:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos \frac{x}{2}$; в) $y = \sin \pi x$; г) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; д) $y = \operatorname{ctg} 2x$; е)

$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$?

24. Как, зная график функции $y = \sin x$, построить график функции:

а) $y = -2\sin x$; б) $y = \sin x - 2$; в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$?

25. Точка выполняет вращательное движение по окружности. Её проекция на горизонтальный диаметр выполняет при этом гармоническое колебание, определяемое формулой $x = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

а) Сколько полных оборотов делает точка за 2π единиц времени?

б) Чему равняется радиус окружности, по которой движется точка?

в) Чему равняется период колебаний?

г) Какое начальное положение занимает точка?

д) Сколько раз проекция подвижной точки за один период колебаний пройдет через точки: $(2; 0)$; $(-2; 0)$; $(1; 0)$; $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$?

26. Найдите множество значений функции:

а) $y = \frac{1}{2}\cos 2x$; б) $y = 3\sin \frac{x}{2}$; в) $y = \cos x - 2$; г) $y = \cos(1 - x)$.

27. Какое наибольшее и какое наименьшее значения принимает функция:

а) $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$; б) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$?

28. При каких значениях k наименьший положительный период функции $y = \sin kx$ равен: а) π ; б) 5π ; в) $\frac{\pi}{5}$; г) 1 ?

29. Верно ли, что: а) $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}$; б) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$?

30. Известно, что $\sin 25^\circ = a$. Чему равняется $\sin 50^\circ$?

31. Чему равняется $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = a$?

32. По графику, изображённому на рис. 292, определите амплитуду силы тока, период колебания. Запишите закон зависимости силы тока от времени.

33. По графику (рис. 293 – 296) гармонического колебания $y = A\sin(\omega t + \alpha)$:

1) определите его начальную фазу;

2) напишите уравнение каждого колебания, если амплитуда равняется 5 см, а частота колебания – 10 гц.

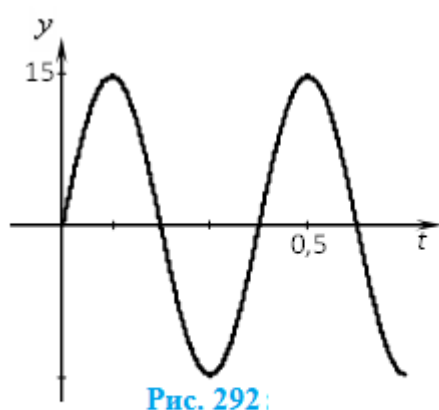


Рис. 292

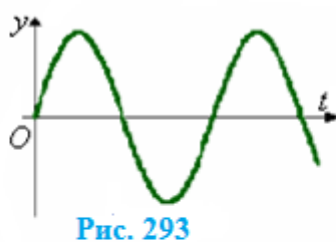


Рис. 293

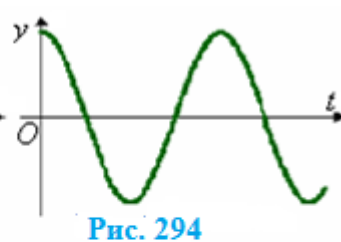


Рис. 294

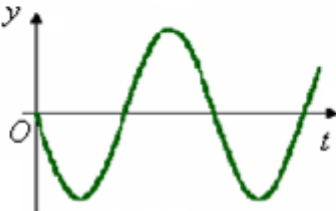


Рис. 295

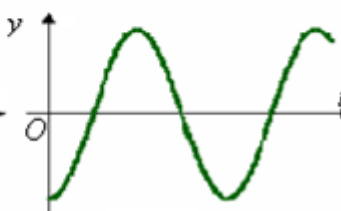


Рис. 296

Ответы к заданиям для самоконтроля

1. а) В первой; б) во второй; в) в третьей; г) в первой; д) в четвёртой. 2. а) $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $\frac{11\pi}{6}$; д) $\frac{5\pi}{6}$. 3. а) π ; 2π ; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; д) 2π ; е) π .
4. а) (1; 0); б) (0; 1); в) (0; -1); г) (-1; 0); д) (0; -1). 5. 5400° . 6. а) 1; б) 2; в) 1; г) 2. 7. а) 60° ; б) 120° ; в) 360° ; г) 960° . 8. а) +, -, -; б) -, +, -; в) +, +, +. 9. B, C, D. 10. а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. 11. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. 12. Да. 13. б), д), е). 14. а), б), **е**). 15. Чётные: а), в), г); нечётная: д); ни чётная, ни нечётная: б), е), ж), з).
16. а) Возрастающая; б) убывающая; в) убывающая; г) не является монотонной; д) возрастающая; е) не является монотонной. 17. а) $\sin \frac{4\pi}{9}$; б) $\cos \frac{2\pi}{9}$; в) $\sin 2$; г) $\cos 2$. 18. б), д), **ж**). 19. а) Да; б) нет. 20. а) Нет; б) нет. 21. а) $\sqrt{3}$; б) 1. 22. а) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$; б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}$. 23. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 4π ; в) 2; г) 3π ; д) $\frac{\pi}{2}$; е) π . 24. а) Растянуть график вдвое от оси абсцисс и симметрично отобразить полученный график относительно оси абсцисс; б) перенести график на 2 единицы в отрицательном направлении оси ординат; в) перенести график на $\frac{\pi}{6}$ в отрицательном направлении оси абсцисс. 25. а) 3; б) 2; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) она находится на окружности в точке с координатами $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; д) 1; 1; 2; 2. 26. а) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; б) $[-3; 3]$; в) $[-3; -1]$; г) $[-1; 1]$. 27. а) 2 и -2; б) 3 и -3. 28. а) 2; б) $\frac{2}{5}$; в) 10; г) 2π . 29. а) Нет; б) да. 30.

$2a\sqrt{1-a^2}$. 31. $a^2 - 2$. 32. 15; 0,5. 33. Рис. 293. 1) 0;
 2) $y = 5\sin 20\pi t$; Рис. 294. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $y = 5\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$; Рис. 295. 1) 0;
 2) $y = -5\sin 20\pi t$; Рис. 294. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $y = -5\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. 2) $y = 5\sin 20\pi t$;

Образец контрольной работы

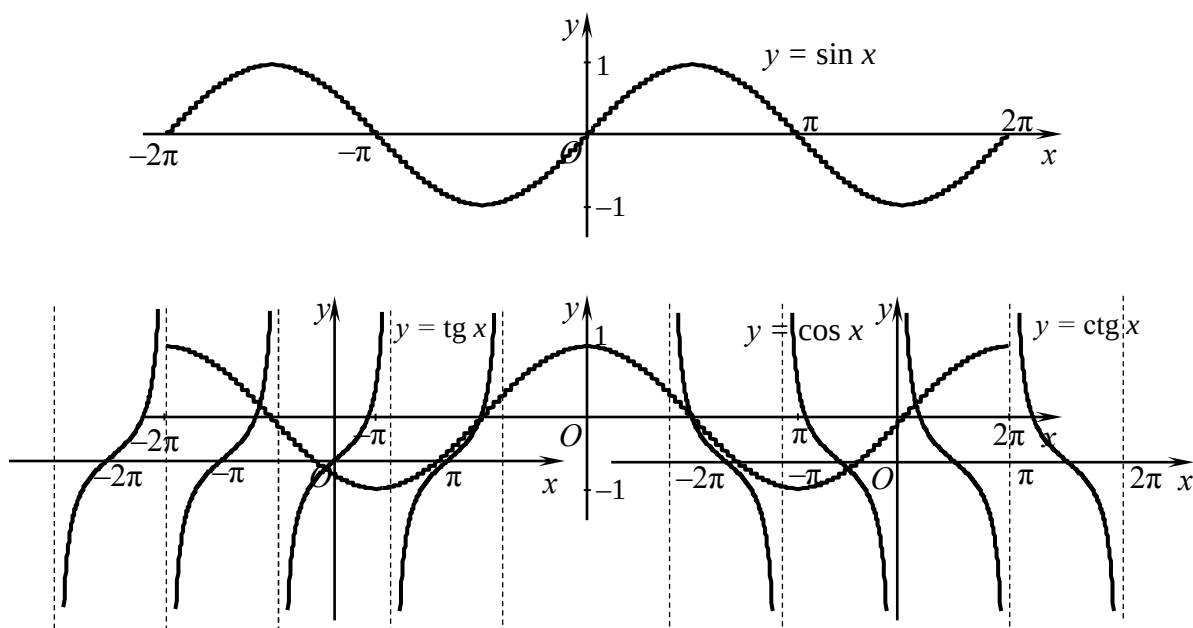
Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$

1. ° Докажите, что $f(x) = -\sin \frac{x}{2}$ двумя способами: а) с помощью формул приведения; б) с помощью формул сложения.
2. ° Выясните, является ли функция $y = f(x)$ чётной или нечётной.
3. Является ли функция $y = f(x)$ периодической? Если является, то найдите её основной период.
4. ° Постройте её график.
5. Найдите множество значений функции $y = f(x)$.
6. ° Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$:
 - а) ° с прямой $x = \frac{5\pi}{3}$;
 - б) ° с прямой $x = -2$ (приближённо, с помощью вычислительных средств);
 - в) с осью абсцисс на промежутке $[-\pi; 3\pi]$;
 - г) с прямой $x = \frac{5\pi}{6}$.
7. Найдите на отрезке $[0; 2\pi]$ промежутки, на которых функция $y = f(x)$ возрастает; убывает.
8. Сравните числа $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ и $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.
9. Найдите амплитуду, частоту, начальную фазу гармонического колебания $y = -2f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - 2$.
10. * Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1}{2}f(x-2) - \frac{1}{2}$.
11. * Найдите область определения функции $y = \sqrt{1+f(x)}$.

Таблицы для систематизации материала раздела

Графики тригонометрических функций

Таблица 44



Свойства тригонометрических функций

Таблица 45

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область определения	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$x \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$
Нули	$\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
Основной период	2π	2π	π	π
Чётность и нечётность	Нечётная	Чётная	Нечётная	Нечётная
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x \in (2\pi k, \pi(2k+1))$ $y < 0$ при $x \in (\pi(2k+1), \pi(2k+2)), k \in \mathbf{Z}$	$y > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ $y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$	$y > 0$ при $x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right), k \in \mathbf{Z}$	$y > 0$ при $x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right), k \in \mathbf{Z}$

		$\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Big), k \in \mathbb{Z}$		
Промежутки монотонности	$\square \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right]$ $\square \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right]$ $k \in \mathbb{Z}$	$\square \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k \right]$ $\square \left[2\pi k, \pi + 2\pi k \right]$ $k \in \mathbb{Z}$	$\square \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$ $k \in \mathbb{Z}$	$\square (\pi k; \pi(k+1))$ $k \in \mathbb{Z}$
Множество значений	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Наибольшее и наименьшее значения	$y_{\text{наиб}} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $y_{\text{наим}} = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$y_{\text{наиб}} = 1$ при $x = 2\pi k$ $y_{\text{наим}} = -1$ при $x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$	Наибольшее и наименьшее значения не существуют	Наибольшее и наименьшее значения не существуют
Непрерыв- ность	Непрерывна	Непрерывна	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ — точки раз- рыва	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — точки раз- рыва

Тригонометрические формулы

Таблица 46

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$	Основные соотношения между тригонометричес- кими функциями
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$	Формулы сложения

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$	Формулы двойного аргумента
$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$ $\left \cos \frac{\alpha}{2} \right = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \left \sin \frac{\alpha}{2} \right = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$	Формулы половинного аргумента
$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$	Формулы понижения степени
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$ $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$	Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение
$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$ $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$ $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$	Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму
$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$	Формулы универсальной подстановки



Исторический комментарий

Задачи, в которых нужно измерять углы, появились одновременно с задачами, которые сводились к измерению расстояний. Эти две измерительные операции всегда существовали безраздельно.

Понятие меры угла в течение веков обобщалось и расширялось под воздействием запросов практики и науки. Градусная мера измерения углов берет свое начало с III - II тысячелетия до н. э., то есть с периода возникновения шестидесятиричной системы исчисления в вавилонской математике. В связи с возникновением и развитием теории пределов и математического анализа с целью представить многие формулы в возможно более простом виде в тригонометрии ввели радианное измерение углов и дуг.

Все древние цивилизации вносили свой вклад в дело накопления тригонометрических знаний. В том же Вавилоне решалась задача, где нужно было вычислить длину хорды окружности по его диаметру и высоте сегмента, отрезанного этой хордой. Древние египтяне (более чем за VI ст. до н. э.) знали метод определения высоты предмета по длине тени, которую он отбрасывает. Этот метод служил основой учения о солнечных часах. Много работ греческих математиков содержали элементы тригонометрии. Это и трактат "Измерение круга" Архимеда (ок. 287 - 212 до н. э.), и "Начала" Евклида (ок. 365 - 300 до н. э.).

С помощью тригонометрии вавилонские ученые выполняли расчеты, которые давали возможность достаточно точно предсказывать солнечные или лунные затмения. Первые тригонометрические таблицы были составлены во II ст. до н.э. греческим астрономом Гиппархом.

Измерительный характер задач тригонометрии приводил к неотложной потребности табулировать значения тригонометрических функций. Составление таблиц в течение длительного времени было центральным заданием тригонометрии. Одно из первых больших достижений в составлении тригонометрических таблиц относится ко II ст. н. э. Речь идет о знаменитом произведении "Математическое собрание в 13 книгах" К. Птолемея (ок. 100 - 178). Это произведение более известно под названием "Альмагест", что в переводе означает "Огромная книга". В этом произведении собраны, систематизированы и обобщены все известные на то время результаты, полученные в астрономии и смежных науках относительно тригонометрии и ее приложений.

Древнегреческие ученые не знали современных тригонометрических функций. Учение о тригонометрических величинах было основано в Индии. Первые индийские работы астрономо-тригонометрического содержания, которые дошли до нас, относятся к IV - V ст. Там уже встречаются синус, косинус. Индийские ученые рассматривали их только для острого угла. Их вычисления сводились к рассмотрению лишь прямоугольных треугольников. Они знали и применяли некоторые зависимости между тригонометрическими величинами, в том числе и $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Наиболее известным произведением индийских математиков астрономо-тригонометрического содержания является "Ариабхатиам", автором которого был Ариабхата (476 - ок. 550).

На Ближнем и Среднем Востоке накопление и совершенствование тригонометрических знаний достигло такого уровня, что фактически началось выделение тригонометрии в самостоятельную часть математики. Здесь тригонометрия нашла дальнейшее развитие в учении о солнечных часах. Были введены понятия тангенса и котангенса. Сирийский математик ал-Баттани (858 - 929) уже рассматривал все шесть тригонометрических величин: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс. Арабские математики успешно преодолевали вычислительные трудности, связанные с составлением таблиц.

В Европе первая работа, в которой тригонометрия рассматривалась как самостоятельная математическая дисциплина, была написана немецким астрономом и математиком Региомontanом (1436 - 1476). Это произведение имело название "Пять книг о треугольниках всех видов".

В конце XVI ст. были установлены первые связи тригонометрии с алгеброй путем взаимосвязей между задачами о делении угла и решением алгебраических уравнений. В вычислительной практике эти связи также проявляются в решении алгебраических уравнений относительно тригонометрических объектов, а также в решении неравенств. Большой вклад в этом направлении принадлежит французскому математику Ф. Виетту (1540 - 1603). Его первые математические исследования относились к тригонометрии, в частности, он знал о периодичности тригонометрических функций. Швейцарский математик И. Бернулли (1642 - 1727) уже применял символы тригонометрических функций. Формулы для $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ впервые геометрически вывел петербургский математик Ю.Герман (1678 - 1733) в 1706 г.

Развитие учения о колебательных движениях, о звуковых, световых, электромагнитных волнах привели к тому, что главным содержанием тригонометрии стало изучение и описание колебательных процессов

В течение XVIII ст. тригонометрические функции были введены в математический анализ как один из классов аналитических функций. Содержание тригонометрии достигло состояния, близкого к современному, приблизительно 250 лет тому назад. Решающую роль в радикальной перестройке тригонометрии на алгебраически-аналитических принципах принадлежит Л. Эйлеру (1707 - 1783). Свою теорию тригонометрических функций он изложил в книге "Введение в анализ бесконечных". Л. Эйлер ввел в тригонометрию символику, которая практически совпадает с привычной для нас. Он получил разложение тригонометрических функций в ряды. Важность результатов Эйлера заключается в том, что его предшественники неизменно связывали понимание тригонометрических функций с образами линий в круге. Теперь тригонометрические функции оказались просто одним из классов аналитических функций. Приблизительно в то же время появился термин "тригонометрические функции". Его ввел немецкий математик Г. Клюгель (1739 - 1812).

В первой половине XIX ст. французский ученый Ж. Фурье (1768 - 1830) доказал, что любое периодическое движение может быть представлено (с любой точностью) в виде суммы простых гармонических колебаний, которые задаются уравнениями вида: $y = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Выдающиеся результаты в области тригонометрии были получены и отечественными математиками. Так, М. В. Остроградский (1801 - 1862) занимался важной задачей исследования сходимости тригонометрических рядов.

В XIX ст. тригонометрия приобрела разные интерпретации, проникла в состав многих частей математики, существенно расширив область своих применений.

Раздел IV

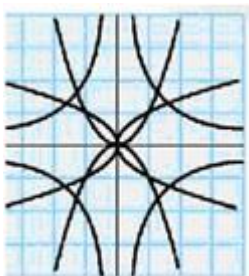
Тригонометрические уравнения и неравенства



В этом разделе будут изучаться уравнения и неравенства, содержащие тригонометрические функции и встречающиеся в задачах, в которых из соотношений между тригонометрическими функциями нужно найти неизвестные углы (в частности, в геометрических задачах) или неизвестное время (например, в задачах, связанных с гармоническими колебаниями).

Решение таких уравнений и неравенств завершается нахождением значений аргумента по определенным значениям тригонометрической функции.

Предметом рассмотрения в данном разделе являются следующие методы решения уравнений и неравенств: разложение на множители, замена переменной, функционально-графические и частные методы, связанные со спецификой тригонометрических функций.



Готовимся к изучению темы "Тригонометрические уравнения и неравенства"

Для успешного усвоения темы, в первую очередь, понадобятся знания и навыки, приобретенные при изучении предыдущей темы "Тригонометрические функции". Повторить главнейшее из этой темы помогут следующие таблицы и диагностический тест.

Таблица 47

Тригонометрическая окружность

Точка P_t на тригонометрической окружности имеет координаты $(\cos t; \sin t)$. Ей соответствует бесконечное множество чисел $t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ (рис.297 а).

Точки, совпадающие с концами диаметров тригонометрической окружности, имеют соответственно координаты $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$, $D(0; -1)$. Наименьшие положительные числа, соответствующие им, равняются $2\pi \approx 6,28$;

$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, $\pi \approx 3,14$, $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$ (рис.297 б).

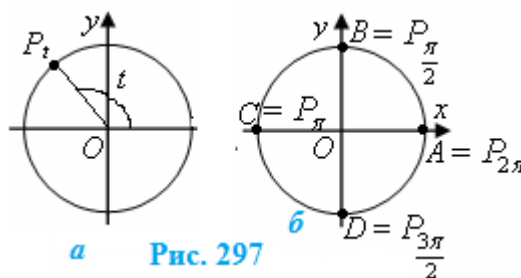


Рис. 297

Точки тригонометрической окружности, соответствующие числам t таким, что $\sin t = a$, являются пересечением окружности и прямой $y = a$ (рис. 298 а).

Точки тригонометрической окружности, соответствующие числам t таким, что $\cos t = a$, является пересечением окружности и прямой $x = a$ (рис. 298 б).

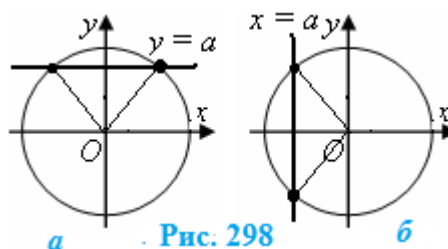


Рис. 298

Таблица 48

Применение графиков тригонометрических функций

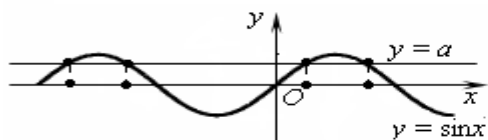


Рис. 299

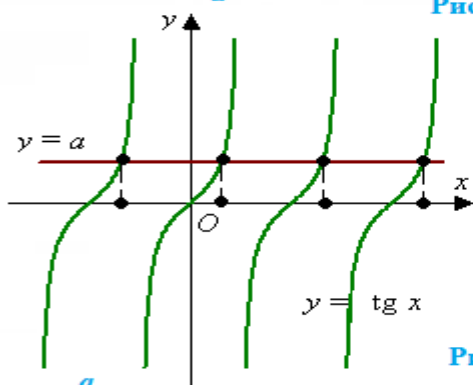
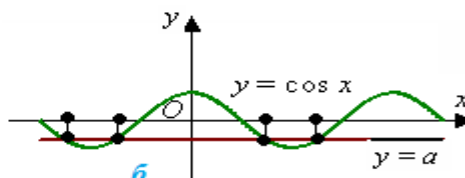
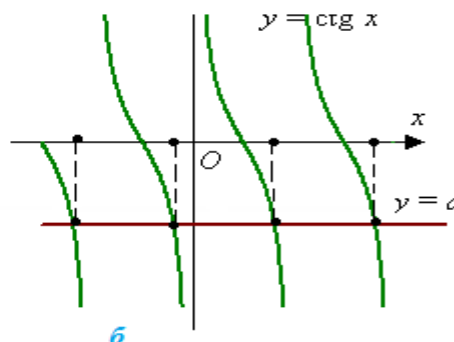


Рис. 300



Корни уравнения $f(x) = a$ — это абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$ (рис. 299, 300).

Таблица 49

Промежутки монотонности тригонометрических функций

Функция	Промежутки возрастания	Промежутки убывания
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$
$y = \cos x$	$[\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k], k \in \mathbf{Z}$	$[2\pi k, \pi + 2\pi k], k \in \mathbf{Z}$
$y = \operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$	—
$y = \operatorname{ctg} x$	—	$(\pi k; \pi(k+1)), k \in \mathbf{Z}$

Тест для диагностики готовности к изучению темы

"Тригонометрические уравнения и неравенства"

1. При каком из приведенных условий числам t на тригонометрической окружности соответствует ровно одна точка?

А. $\sin t = 0$. Б. $\cos t = 0$. В. $\sin t = -1$. Г. $\sin t = \frac{1}{2}$.

2. При каком из приведенных условий числам t на тригонометрической окружности соответствуют ровно две точки?

А. $\sin t = 0$. Б. $\cos t = 1$. В. $\cos t = -1$. Г. $\sin t = 1$.

3. При каком из приведенных условий числам t на тригонометрической окружности не соответствует ни одна точка?

А. $\sin t = 0,000001$. Б. $\sin t = 1,000001$. В. $\operatorname{tg} t = 100000$. Г. $\sin t = -0,000001$.

4. Сколько точек на тригонометрической окружности соответствует числам t , удовлетворяющим условию $\sin t = -0,3$?

А. Бесконечное множество. Б. Ни одна. В. Одна. Г. Две.

5. Сколько точек на тригонометрической окружности соответствует числам t , удовлетворяющим условию $\cos t = 1$?

А. Бесконечное множество. Б. Ни одна. В. Одна. Г. Две.

6. Сколько точек на тригонометрической окружности соответствует числам t , удовлетворяющим условию $\operatorname{tg} t = 2$?

А. Бесконечное множество. Б. Ни одна. В. Одна. Г. Две.

7. При каком из приведенных условий числам t на линии котангенсов не отвечает ни одна точка?

А. $\operatorname{ctgt} = 0$. Б. $\operatorname{ctgt} = -1000$. В. $\operatorname{ctgt} = 0,001$.

Г. При ни одном из приведенных условий.

8. График функции $y = 2\cos x$ проходит через точку...

А. $(0; 2)$. Б. $\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$. В. $(\pi; 2)$. Г. $\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$.

9. Сколько общих точек имеют прямая $y = -1$ и график функции $y = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$?

А. Ни одной. Б. Одну. В. Две. Г. Бесконечное множество.

10. Сколько общих точек имеют прямая $y = 1$ и график функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

А. Ни одной. Б. Одну. В. Две. Г. Бесконечное множество.

11. Сколько чисел на промежутке $[0, 3\pi]$ соответствуют точке тригонометрической окружности с ординатой -1 ?

А. 0. Б. 1. В. 2. Г. 3.

12. Синус числа не может равняться ...

А. $\frac{\pi}{6}$. Б. $-\frac{\pi}{6}$. В. $-\frac{1}{0,765}$. Г. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

13. Не существует ни одного числа x , удовлетворяющего условию ...

А. $\cos 100x = -0,7$. Б. $\operatorname{tg} 5x = -100$. В. $\operatorname{ctg} x = \pi$. Г. $\sin x = -1,3$.

14. Выражение $\cos^2 80^\circ + \cos^2 190^\circ + \cos^2 260^\circ + \cos^2 350^\circ$ равняется ...

А. 1. Б. 2. В. 0. Г. 4.

15. Известно, что $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{2}{3}$. Какому из приведенных чисел может равняться $\sin(\alpha - \beta)$?

А. 1. Б. $-\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$. В. $\frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{9}$. Г. $\frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{9}$.

16. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$. Какому из приведенных чисел может равняться число $\alpha + \beta$?

А. $\frac{3\pi}{4}$. Б. $\frac{5\pi}{4}$. В. $\frac{7\pi}{4}$. Г. $-\frac{\pi}{4}$.

17. Известно, что $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$. Чему равняется $\cos 2\alpha$?

А. $\frac{7}{8}$. Б. $-\frac{7}{8}$. В. $\frac{2\sqrt{15}}{16}$. Г. Нехватает данных для вычисления.

18. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$. Чему может равняться угол 2α ?

А. 135° . Б. 60° . В. 45° . Г. 30° .

19. Чему равняется $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$?

А. $\frac{1}{4}$. Б. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. В. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Г. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. Найдите значение выражения $\sin^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12}$?

А. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Б. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. В. $\frac{1}{2}$. Г. $-\frac{1}{2}$.

21. Чему равняется $\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$?

А. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Б. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. В. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Г. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

22. Найдите значение выражения $\sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$?

А. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Б. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. В. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. Г. Ни один из приведенных ответов неверен.

23. Чему равняется $\cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$?

А. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Б. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. В. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. Г. Ни один из приведенных ответов неверен.

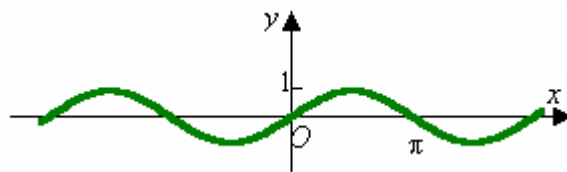
24. Найдите значение выражения $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$?

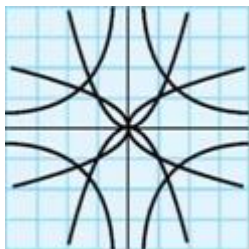
А. Выражение не имеет смысла. Б. $2\sqrt{2}$. В. 2. Г. -2.

25. На рисунке изображен график функции $y = \sin x$. На отрезке $[0; 2\pi]$ функция принимает положительные значения при ...

А. $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Б. $x \in (\pi; 2\pi)$;

В. $x \in (0; \pi)$; Г. $x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.





§ 24. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Некоторые из них решались в предыдущих параграфах. Главной особенностью тригонометрических уравнений является то, что они могут иметь бесконечное множество корней, с чем связаны определенные трудности в нахождении и даже в записи их решений. Научить преодолению этих трудностей является важной задачей данного параграфа.



1. Уравнение $\sin x = a$

Уравнение $\sin x = a$ будем решать, пользуясь или тригонометрической окружностью, или графиком функции $y = \sin x$. Сущность первого способа, связанного с тригонометрической окружностью, заключается в том, что необходимо записать все числа, которым соответствуют точки тригонометрической окружности с ординатой a . Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

□ Найдем сначала на тригонометрической окружности точки с ординатой $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таких точек, очевидно, две: M_1 и M_2 (рис. 301). Они симметричны относительно оси ординат. Найдем числа, которым соответствуют эти точки. Поскольку

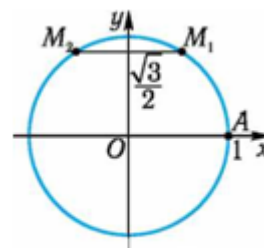


Рис. 301

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то числу $\frac{\pi}{3}$ соответствует точка M_1 , а числу

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ — точка M_2 , ей симметричная относительно оси ординат. Действи-

тельно, $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, все числа, которым соответствует точка M_1 , имеют вид $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, а все числа, которым соответствует точка M_2 , — $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. То есть множество решений данного уравнения состоит из

двух серий чисел: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

Ответ. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Второй способ решения тригонометрического уравнения $\sin x = a$ базируется на применении графика функции $y = \sin x$. Проиллюстрируем его на том же примере.

□ Построим в одной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 302). Они пересека-

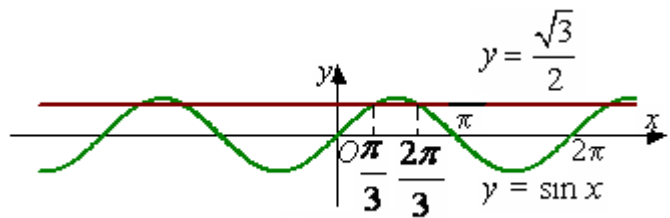


Рис. 302

ются в бесконечном множестве точек. Задание состоит в том, чтобы найти абсциссы этих точек. На промежутке, длина которого равна наименьшему положительному периоду функции $y = \sin x$, то есть числу 2π , функция принимает все свои значения. Значение $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$ она принимает в двух

точках: $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$, так как $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, учитывая, что периоды синуса равняются $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, множество решений данного уравнения можно записать в виде двух серий чисел:

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Приведенные способы решения уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ отличаются лишь геометрической интерпретацией корней этого уравнения.

Запись всех решений уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ стала возможной, поскольку нам удалось указать два корня этого уравнения, которым на тригонометрической окружности (или на графике) соответствуют две различные точки. Если решать уравнение $\sin x = 0,3$, то мы пока еще не можем этого сделать, поскольку не знаем способа записи чисел, синус которых равен 0,3. Таким образом, для решения уравнения $\sin x = a$ ($|a| < 1$) нужно научиться находить, по крайней мере, два числа, синус которых равен a , и которым соответствуют на тригонометрической окружности две различные точки.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию решений уравнения $\sin x = a$. Для этого построим графики функций $y = \sin x$, $y = a$ (рис. 303).

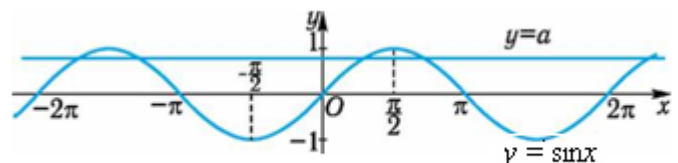


Рис. 303

Если $|a| > 1$, то эти графики не пересекаются, то есть данное уравнение

не имеет решений. Если $|a| \leq 1$, то прямая $y = a$ бесконечно много раз пересекает график функции $y = \sin x$, то есть уравнение $\sin x = a$ имеет бесконечное множество решений. В частности, если $a = 1$, то точки пересечения имеют вид

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; при $a = -1$ графики пересекаются в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пусть $|a| \leq 1$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает и при-

нимает все значения от -1 до 1 . При каждом $a \in [-1, 1]$ прямая $y = a$ пересекает на этом отрезке график функции $y = \sin x$ лишь в одной точке, поэтому уравнение $\sin x = a$ имеет на отрезке один корень. Этот корень называют **арксинусом числа a** и обозначают так: $x = \arcsin a$.

Арксинусом числа a называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

, синус которого равен a .

Таким образом, запись $x = \arcsin a$ означает: 1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и 2) $\sin x = a$.



Обращаем внимание на то, что $\arcsin a$ определен только для $-1 \leq a \leq 1$.

Арксинусы произвольных конкретных чисел из промежутка $[-1; 1]$ можно находить приближенно с помощью математических таблиц или калькуляторов.

Пример 2. Вычислить: 1) $\arcsin \frac{1}{2}$; 2) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\arcsin 0,6$.

□ 1) Так как $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Подчеркнем, что хотя $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, но $\arcsin \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$, ибо $\frac{5\pi}{6}$ содержится вне промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Поскольку $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin \frac{\pi}{4} = \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ и $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.



Обратите внимание на то, что $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Пользуясь калькулятором, найдем: $\arcsin 0,6 \approx 0,644$. ■

Ответ. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\approx 0,644$.

Запишем в общем виде решение уравнения $\sin x = a$, $-1 < a < 1$

1. На тригонометрической окружности содержатся две точки с ординатой a (рис. 304, 305). Одним из чисел, которому соответствует точка M_1 , является

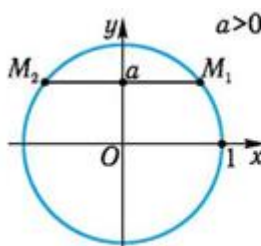


Рис. 304

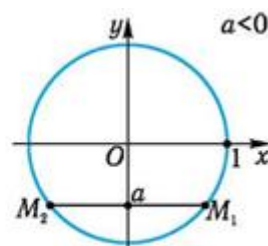


Рис. 305

число $\arcsin a$, а числу $(\pi - \arcsin a)$ соответствует точка M_2 . Таким образом, учитывая, что числа $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, являются периодами функции $y = \sin x$, решения уравнения $\sin x = a$ при $|a| < 1$ имеют следующий вид:

$$x = \arcsin a + 2\pi n, x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Обе эти формулы можно записать в сокращенной форме:

$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Полученная формула дает те же значения x , что и две предыдущие формулы, если рассмотреть случаи $k = 2n$, $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, при $k = 2n$ имеем: $x = (-1)^{2n} \arcsin a + \pi \cdot 2n = \arcsin a + 2\pi n$; при $k = 2n + 1$ имеем:

$$x = (-1)^{2n+1} \arcsin a + \pi \cdot (2n + 1) = (-1)^{2n} \cdot (-1) \cdot \arcsin a + 2\pi n + \pi = \pi - \arcsin a + 2\pi n.$$

Возвратимся к решениям уравнения $\sin x = 0,3$. Их можно записать так:

$$x = \arcsin 0,3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, x = \pi - \arcsin 0,3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или } x = (-1)^k \arcsin 0,3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Решения уравнений $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$ были найдены выше, а именно:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найденная общая формула дает те же результаты, то есть она применима и при $|a| = 1$.

Решения уравнения $\sin x = 0$, по указанной формуле, принимают вид: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение: 1) $\sin x = 0,7$; 2) $\sin x = -0,8$.

□ 1) Решение имеет вид: $x = (-1)^n \arcsin 0,7 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $x = (-1)^n \arcsin (-0,8) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ. 1) $(-1)^n \arcsin 0,7 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \arcsin (-0,8) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Число $\arcsin a$ обладает следующими важными свойствами.

Свойство 1. $\sin(\arcsin a) = a$, $|a| \leq 1$.

Это равенство вытекает непосредственно из определения арксинуса.



Свойство 2. $\arcsin(\sin x) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

□ Действительно, обозначим $\sin x$ через a . Тогда $\arcsin a$ — это число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равняется a . Но по условию, таким числом является x , то есть $\arcsin a = x$, или $\arcsin(\sin x) = x$. ■

Свойство 3. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

□ Для его доказательства, согласно определению арксинуса, следует показать:

$$1) \sin(-\arcsin a) = -a;$$

$$2) -\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin a \leq \frac{\pi}{2}.$$

Первое равенство является следствием нечётности синуса и определения арксинуса. Второе соотношение непосредственно вытекает из определения арксинуса. ■

Теперь решения уравнения $\sin x = -0,8$ из примера 3 можно записать в виде

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin 0,8 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Свойство 2 имеет простую геометрическую интерпретацию (рис. 306). Точки M_1 и M_2 соответствуют числам $\arcsin a$ и $\arcsin(-a)$. Эти числа противоположны, так как соответствующие дуги симметричны относительно оси абсцисс.

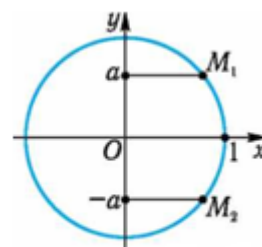


Рис. 306

Практически важным является умение выделять решения тригонометрического уравнения, удовлетворяющие определённому условию.

Пример 4. Дано уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найти:

- 1) все решения уравнения;
- 2) его наибольший отрицательный корень;
- 3) решения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;
- 4) решения, принадлежащие промежутку $(-\pi; 4\pi)$;
- 5) решения, удовлетворяющие условию $\cos x > 0$.

□ 1) Все решения уравнения имеют вид:

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) Все решения уравнения можно также записать в виде двух серий чисел: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

(рис. 307). Наибольший отрицательный корень можно получить при $n = -1$. Соответственно имеем:

$$x = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}, \quad x = \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}.$$

Большим из них является число $-\frac{\pi}{4}$.

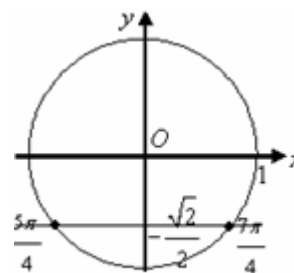


Рис. 307

3) Промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ принадлежит корень $\frac{5\pi}{4}$.

4) Чтобы найти те решения уравнения, которые принадлежат промежутку $(-\pi; 4\pi)$, не обходимо решить относительно n неравенства

$$-\pi < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n < 4\pi, \quad -\pi < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n < 4\pi.$$

$$-\frac{9\pi}{4} < 2\pi n < \frac{11\pi}{4}, \quad -\frac{11\pi}{4} < 2\pi n < \frac{9\pi}{4}, \text{ отсюда}$$

$$-\frac{9}{8} < n < \frac{11}{8}, \quad -\frac{11}{8} < n < \frac{9}{8}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Следовательно, для обеих серий решений n может принимать значения $-1, 0, 1$ и только эти значения. Поэтому искомые решения найдем, если подставим эти значения n в выражения для общих решений уравнения. Будем иметь:

$$-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}.$$

5) Условию $\cos x > 0$ удовлетворяет лишь вторая серия:
 $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, поскольку лишь эти числа соответствуют точкам тригонометрической окружности с положительными абсциссами. ■

Ответ. 1) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{4}$; 4) $-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$;



5) $\frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Контрольные вопросы

1°. Чему равен:

а) $\arcsin 0,5$; б) $\arcsin (-0,5)$; в) $\arcsin 1$?

2°. Имеет ли смысл запись:

а) $\arcsin 0,3$; б) $\arcsin (-0,3)$; в) $\arcsin 1,3$;

г) $\arcsin (-1,5)$; д) $\arcsin \pi$; е) $\arcsin \sqrt{2}$?

3°. Можно ли из равенства $\sin \pi = 0$ сделать вывод, что $\arcsin 0 = \pi$?

4°. Может ли уравнение $\sin x = a$ иметь:

а) только одно решение; б) только два решения?

5°. Может ли $\arcsin a$ принимать значение:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\pi$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\sqrt{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $1,5$?

6. Назовите два промежутка, на каждом из которых имеет только один корень уравнение:

а) $\sin x = 0,4$; б) $\sin x = -0,2$.

7. При каких значениях a справедливо равенство $\sin(\arcsin a) = a$?

8. Можно ли решения уравнения $\sin x = -1$ записать в виде $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbf{Z}$?

9. Сколько решений уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ содержится на отрезке $[0; 8\pi]$?

10. Как из общего решения $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$ уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ найти наименьший положительный корень этого уравнения?

2. Уравнение $\cos x = a$



Уравнение $\cos x = a$, так же как и уравнение $\sin x = a$, будем решать, пользуясь тригонометрической окружностью, или графиком функции $y = \cos x$. Нужно научиться записывать все решения этого уравнения. Необходимые рассуждения аналогичны приведенным при решении уравнения $\sin x = a$, поэтому изложим их кратко.

Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет решений. При $a = 1$ прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \cos x$ в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При $a = -1$ прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \cos x$ в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При $|a| < 1$ уравнение $\cos x = a$ также имеет бесконечно много решений.

На отрезке $[0, \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает и принимает все значения от 1 до -1 (рис. 308). При произвольном $a \in [-1; 1]$ прямая $y = a$ пересекает на этом отрезке график функции $y = \cos x$ в одной и только одной точке, поэтому уравнение

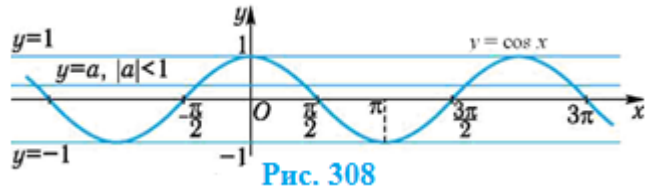


Рис. 308

$\cos x = a$ имеет на отрезке $[0, \pi]$ только один корень. Этот корень называют **арккосинусом числа a** и обозначают так: $x = \arccos a$.

Арккосинусом числа a называется такое число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Таким образом, запись $x = \arccos a$ означает: 1) $0 \leq x \leq \pi$ и 2) $\cos x = a$. Как и $\arcsin a$, $\arccos a$ определен только для $-1 \leq a \leq 1$.

Пример 5. Вычислить: 1) $\arccos \frac{1}{2}$; 2) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos(-0,2)$.

□ 1) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi$.

2) Из соотношений $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ и $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ имеем:

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ то есть } \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \text{ ибо } 0 \leq \frac{5\pi}{6} \leq \pi.$$



Обратите внимание на то, что $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Пользуясь калькулятором, имеем: $\arccos(-0,2) \approx 1,77$. ■

Ответ. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\approx 1,77$

Запишем в общем виде решения уравнения $\cos x = a$, $-1 < a < 1$. На тригонометрической окружности имеются две точки M_1 и M_2 с абсциссой a (рис. 309, 310). Одним из чисел, которым соответствует точка M_1 , является число $\arccos a$,

а одним из чисел, которым соответствует точка M_2 , является число $-\arccos a$. Все числа, которым соответствуют точки

M_1 и M_2 , имеют вид:
 $\arccos a + 2\pi n$ и $-\arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, решения уравнения $\cos x = a$ при $|a| < 1$ можно найти по формуле:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Решения уравнений $\cos x = 1$ и $\cos x = -1$ были найдены выше, а именно:

$$x = 2\pi n, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Общая формула даёт такие же результаты при $|a| = 1$.

Решения уравнения $\cos x = 0$ по указанной формуле принимают вид: $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но их можно записать проще: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; ведь числам, записанным

двумя последними формулами, соответствуют те же две точки $P_{\frac{\pi}{2}}$ и $P_{-\frac{\pi}{2}}$ тригонометрической окружности (рис. 311).

Пример 6. Решить уравнение: 1) $\cos x = 0,8$; 2) $\cos 3x = -0,5$.

□ 1) Решение имеет вид: $x = \pm \arccos 0,8 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Так как $\cos \frac{2\pi}{3} = -0,5$, $0 \leq \frac{2\pi}{3} \leq \pi$, то $\arccos(-0,5) = \frac{2\pi}{3}$, и $3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ. 1) $\arccos 0,8 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Воспользовавшись результатами решения примеров 2, 6 и подобных им, приведём таблицу значений $\arcsin x$ и $\arccos x$ для наиболее употребительных значений x .

Таблица 50

Значения x Выражения	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π



Число $\arccos a$ обладает следующими важными свойствами.

Свойство 1. $\cos(\arccos a) = a$, $|a| \leq 1$.

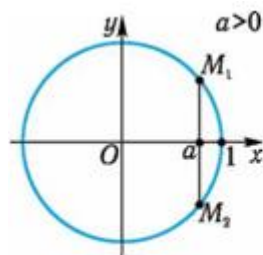


Рис. 309

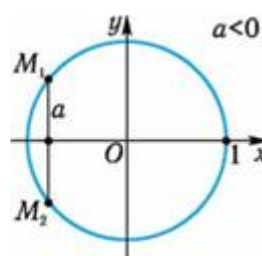


Рис. 310

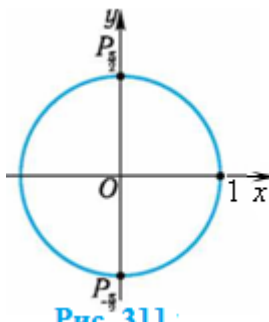


Рис. 311

Это равенство вытекает непосредственно из определения арккосинуса.

Свойство 2. $\arccos(\cos x) = x$, если $x \in [0; \pi]$.

□ Действительно, обозначим $\cos x$ через a . Тогда $\arccos a$ — это число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равняется a . Но, по условию, таким числом является x , то есть $\arccos a = x$, или $\arccos(\cos x) = x$. ■

Свойство 3. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

□ Для его доказательства, согласно определению арккосинуса, следует показать:

1) $\cos(\pi - \arccos a) = -a$; 2) $0 \leq \pi - \arccos a \leq \pi$. Первое равенство является следствием формул приведения и определения арккосинуса:

$\cos(\pi - \arccos a) = -\cos(\arccos a) = -a$. Второе соотношение непосредственно вытекает из определения арккосинуса и свойств неравенств: $0 \leq \arccos a \leq \pi$, $-\pi \leq -\arccos a \leq 0$, $0 \leq \pi - \arccos a \leq \pi$. ■

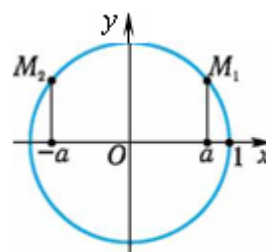


Рис. 312

Свойство 3 имеет простую геометрическую интерпретацию (рис. 312). Точки M_1 и M_2 соответствуют числам $\arccos a$ и $\arccos(-a)$, эти точки симметричны относительно оси ординат, радианные меры соответствующих дуг дополняют друг друга до π , поэтому $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Свойство 4. $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}$; $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$, $|a| \leq 1$.

□ Докажем первое из приведенных равенств. Пусть $x = \arcsin a$, тогда: 1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin x = a$. следовательно, нам известен синус числа x , необходимо найти его косинус. Но $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - a^2$. Чтобы найти $\cos x$, достаточно знать знак $\cos x$. Поскольку $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, а на этом промежутке косинус принимает неотрицательные значения, то есть $\cos x \geq 0$, то $\cos x = \sqrt{1-a^2}$. Таким образом, для произвольного $|a| \leq 1$ $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}$.

Аналогично доказывается второе равенство: $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$, $|a| \leq 1$. Рекомендуем сделать это самостоятельно. ■

Пример 7. Решить уравнение: $\frac{2 \cos x + 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$.

□ Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2 \cos x + 1 = 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$ Решим уравнение

$2 \cos x + 1 = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$. Применяя свойство 2, будем иметь:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$$

$$= \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

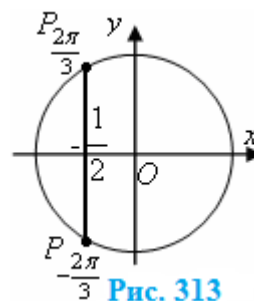


Рис. 313

Теперь из этих решений отберем те, которые удовлетворяют неравенству $\sin x > 0$. Воспользуемся тригонометрической окружностью. Решения уравнения изображаются двумя точками тригонометрической окружности (рис. 313). Но лишь одной из них (той, которая лежит во второй четверти) соответствуют числа x , для которых $\sin x > 0$, а именно $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



Контрольные вопросы

1°. Чему равняется:

а) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\arccos(-1)$; г) $\arccos 0$?

2°. Имеет ли смысл запись:

а) $\arccos 0,3$; б) $\arccos(-0,3)$; в) $\arccos 1,3$;
г) $\arccos(-1,5)$; д) $\arccos \pi$; е) $\arccos \sqrt{2}$?

3°. Можно ли из равенства $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ сделать вывод, что $\arccos 0 = \frac{3\pi}{2}$?

4°. Какой знак имеет число $\arccos(-0,3)$?

5°. Может ли $\arccos a$ принимать значение:

а) $-\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{4\pi}{3}$; д) $\sqrt{3}$; е) -1 ; ж) $3,5$?

6. Назовите два промежутка, на каждом из которых имеет только один корень уравнение: а) $\cos x = 0,4$; б) $\cos x = -0,2$.

7. При каких значениях a справедливо равенство $\cos(\arccos a) = a$?

8. Можно ли решения уравнения $\cos x = -1$ записать в виде $x = 3\pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$?

9. Сколько решений уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ содержится на отрезке $[0; 7\pi]$?

10. Как из общего решения $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получить наибольший отрицательный корень этого уравнения?

Задачи

404°. В какой четверти тригонометрической окружности лежит точка P_t , если:

1) $t = \arcsin 0,6$; 2) $t = \arcsin(-0,8)$; 3) $t = \arccos 0,8$; 4) $t = \arccos(-$

0,6).

405. Вычислите:

$$\begin{aligned} &1) ^\circ \sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right); \quad 2) ^\circ \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right); \quad 3) ^\circ \cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \\ &4) ^\circ \cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \quad 5) \sin(\arccos 0,6); \quad 6) \cos(\arcsin(-0,8)). \end{aligned}$$

406°. Найдите значение:

$$1) \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 2) \cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

407. Найдите значение:

$$1) \arcsin(\sin 25^\circ); \quad 2) \arccos\left(\cos\frac{\pi}{8}\right); \quad 3) \arcsin(\sin 3); \quad 4) \arccos(\cos 5).$$

408°. Решите уравнение:

$$1) \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}; \quad 4)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5) \sin\frac{x}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \quad 6) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 4 - \sqrt{7}; \quad 7) \sqrt{2} \sin\frac{x}{3} = -1; \quad 8) 4\sin^2 x = 3;$$

$$9) 9\sin^2 x = -1; \quad 10) (2\sin x + 1)(1 + \cos x) = 0; \quad 11) (1 - \sqrt{2}\cos x)(3 - 2\sin x) = 0;$$

$$12) \cos 2x = -0,6; \quad 13) \sin\frac{x}{3} = 0,2; \quad 14) \cos(x + 0,5) = 0,9.$$

409. Найдите нули функции:

$$1) y = 2\sin x + 1; \quad 2) y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad 3) y = 2\cos x + \sqrt{2}; \quad 4)$$

$$y = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

410. Решите уравнение:

$$1) \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0; \quad 2) \frac{\sin x}{\sin 3x} = 0; \quad 3) \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = 0; \quad 4)$$

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x} = 0.$$

411. Укажите все нули функции:

1) $y = \sin x \sqrt{\cos x}$; 2) $y = \cos x \cdot \operatorname{tg} x + 1$; 3) $y = \sin \frac{1}{x}$; 4)
 $y = \cos x \sqrt{\sin x}$.

412*. Найдите решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; 2) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; 6\pi]$;
 3) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; 3\pi]$; 4) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

413. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие приведенному условию:

1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x < 0$; 2) $\cos 2x = 0$, $\cos x < 0$; 3) $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x > 0$.

414. Докажите, что не имеет решений уравнение:

1) $\cos(\sin x) = \frac{1}{2}$; 2) $\sin(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{1}{2} \cos 2x = \frac{|\cos x|}{\cos x}$; 4) $\sin x = x^2 + 1,1$.

415. Найдите:

- 1) величину углов ромба, если отношение его периметра к одной из диагоналей равняется 3;
- 2) величину острых углов прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу в отношении 1:3.

416*. Выразите: 1) острые углы прямоугольного треугольника через его гипотенузу c и площадь S ; 2) периметр сектора через его радиус R и радиус r круга, вписанного в него.



Упражнения для повторения

417. Найдите значение выражения $\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$, если α

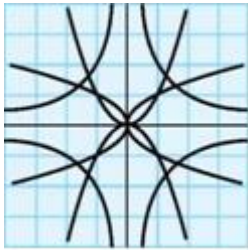
принимает такие значения: $0, \frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$.

418. Найдите основной период функции:

1) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + 2$; 2) $y = 3 \operatorname{ctg} x - 5$; 3) $y = -3 \operatorname{tg} 5x$; 4) $y = 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$.

419. Найдите множество значений функции: 1) $y = 0,1 \operatorname{tg} 10x$; 2) $y = 10 \operatorname{ctg} 0,1x$.

420. Решите неравенство: 1) $x \operatorname{tg} 3 < \operatorname{ctg} 6$; 2) $x \operatorname{tg} 4 > \operatorname{ctg} 5$.



§ 25. Простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$

В данном параграфе продолжим рассматривать решение простейших тригонометрических

уравнений.



Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = a$.

Поскольку множеством значений тангенса является множество всех дей-

ствительных чисел, то это уравнение при каждом a имеет решение. Прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \operatorname{tg} x$ бесконечно много раз (рис. 314).

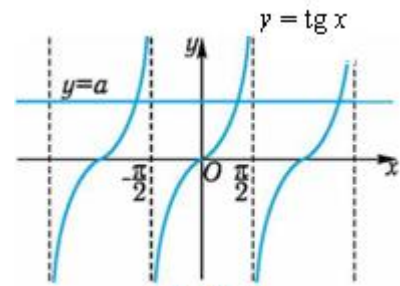


Рис. 314

На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает и принимает каждое своё значение лишь один раз. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет только один корень. Этот корень называют **арктангенсом** числа a и обозначают $x = \operatorname{arctg} a$.

Арктангенсом числа a называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равняется a .

Таким образом, запись $x = \operatorname{arctg} a$ означает: 1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ и 2)

$\operatorname{tg} x = a$.

Обращаем внимание на то, что $\operatorname{arctg} a$ определён для всех действительных a .

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодами πn , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, то все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$ находят по формуле:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Вычислить: 1) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$.

□ 1) Так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$; то $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

2) Так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. ■

Ответ. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$.



Обратите внимание на то, что $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1$.

Пример 2. Решить уравнение: 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2$; 3) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\square 1) x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, \text{ или } x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = 2\operatorname{arctg}(-2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \text{ Если } \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ то } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \text{ и наоборот. Поэтому эти уравнения}$$

равносильны. Отсюда $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ ■

$$\text{Ответ. 1) } \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2)$$

$$2\operatorname{arctg}(-2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ можно свести к решению уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$ при $a \neq 0$, а можно воспользоваться специальной формулой.

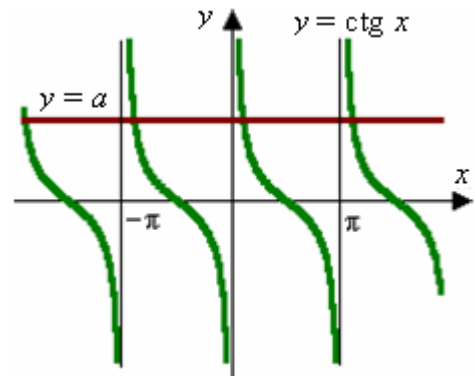


Рис. 315

Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$. Так как множеством значений котангенса является множество всех действительных чисел, то это уравнение при каждом a имеет решение. Прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \operatorname{ctg} x$ бесконечно много раз (рис. 315).

На промежутке $(0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает и принимает каждое своё значение один раз. Поэтому уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ при каждом a на промежутке $(0; \pi)$ имеет лишь один корень. Этот корень называют **арккотангенсом** числа a и обозначают $x = \operatorname{arcctg} a$.

Арккотангенсом числа a называется такое число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

Таким образом, запись $x = \operatorname{arcctg} a$ означает: 1) $0 < x < \pi$ и 2) $\operatorname{ctg} x = a$.

Обращаем внимание на то, что $\operatorname{arcctg} a$ определён для всех действительных a .

Так как функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодами $\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, то все корни уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ находят по формуле:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Решить уравнение: 1) $\operatorname{ctg} x = -1$; 2) $(\operatorname{tg} x + 2)(\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1) = 0$.

$$\square 1) \text{ Так как } \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1 \text{ и } 0 < \frac{3\pi}{4} < \pi, \text{ то } \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}. \text{ Поэтому}$$

$$x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Обращаем внимание на то, что $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1$.

2) Следствием данного уравнения является совокупность уравнений: $\operatorname{tg} x + 2 = 0$ и $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 = 0$. Решим первое уравнение совокупности: $\operatorname{tg} x = -2$: $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. Установим, являются ли найденные числа корнями данного уравнения. Поскольку при этих значениях x выражение во вторых скобках имеет смысл (ведь из равенства $\operatorname{tg} x = -2$ вытекает, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2}$, то найденные значения x являются корнями данного уравнения. Решим второе уравнение совокупности: $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. При этих значениях x выражение в первых скобках имеет смысл, потому найденные значения x являются корнями данного уравнения. ■

Ответ. 1) $\frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\operatorname{arctg}(-2) + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Воспользовавшись результатами решения примеров 1 — 3 и др., составим таблицу значений $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ для наиболее употребительных значений x .

Таблица 50

Значения x Выражение	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Числа $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$ обладают следующими важными свойствами.

Свойство 1. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, a \in \mathbf{R}$.

Эти равенства вытекают непосредственно из определений арктангенса и арккотангенса.

Свойство 2. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, если $x \in (0; \pi)$.

□ Докажем первое из этих равенств. Обозначим $\operatorname{tg} x$ через a . Тогда $\operatorname{arctg} a$ — это число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a . Но, по условию, таким числом является x , то есть $\operatorname{arctg} a = x$, или $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$. Второе равенство доказывается аналогично. ■

Свойство 3. $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$; $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

□ Докажем второе из этих равенств. Для этого, согласно определению арккотангенса, следует показать:

1) $\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} a) = -a$; 2) $0 < \pi - \operatorname{arcctg} a < \pi$.

Первое равенство является следствием формул приведения и определения арккотангенса: $\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arccctg} a) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = -a$. Второе соотношение непосредственно вытекает из определения арккотангенса и свойств неравенств: $0 < \operatorname{arccctg} a < \pi$, $-\pi < -\operatorname{arccctg} a < 0$, $0 < \pi - \operatorname{arccctg} a < \pi$.

Первое равенство доказывается аналогично. ■

Приведенные равенства имеют простую геометрическую интерпретацию. Точки M_1 и M_2 на линии тангенсов (рис. 316) соответствуют числам $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arctg} (-a)$. Эти числа противоположны, так как соответствующие дуги на тригонометрической окружности симметричны относительно оси абсцисс.

Точки M_1 и M_2 на линии котангенсов (рис. 317) соответствуют числам $\operatorname{arccctg} a$ и $\operatorname{arccctg} (-a)$. Эти точки симметричны относительно оси ординат, радианные меры соответствующих дуг на тригонометрической окружности дополняют друг друга до π , поэтому $\operatorname{arccctg} (-a) = \pi - \operatorname{arccctg} a$.

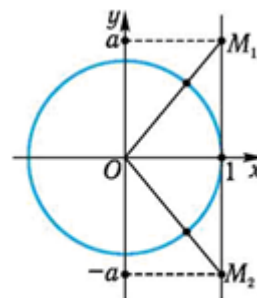


Рис. 316

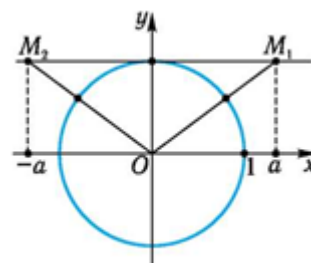


Рис. 317

Свойство 4. $\operatorname{tg}(\operatorname{arccctg} x) = \frac{1}{x}$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

□ Эти равенства вытекают из следующих соотношений:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arccctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} x)} = \frac{1}{x};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

Пример 4. Решить уравнение: $\sqrt{x-1}\operatorname{ctg} x = 0$.

□ Область определения данного уравнения определяется соотношениями:

$x - 1 \geq 0$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Его следствием является совокупность уравнений: $\sqrt{x-1} = 0$, $\operatorname{ctg} x = 0$, решениями которых являются соответственно числа:

$x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Последняя серия решений принадлежит области определения уравнения, то есть удовлетворяет условию $x \geq 1$, только при целых неотрицательных значениях n . ■

Ответ. $x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$



Контрольные вопросы

1°. Чему равняется:

а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg} (-1)$; в) $\operatorname{arccctg} \sqrt{3}$; г) $\operatorname{arccctg} (-\sqrt{3})$; д) $\operatorname{arctg} 0$; е) $\operatorname{arccctg} 0$?

2°. Можно ли из равенства $\operatorname{tg} \pi = 0$ сделать вывод, что $\operatorname{arctg} 0 = \pi$?

3°. Какой знак имеет число: а) $\operatorname{arctg} (-2,3)$; б) $\operatorname{arccctg} (-2,3)$?

4°. Может ли $\operatorname{arctg} a$ принимать значение:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{3}$; д) $\sqrt{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 1,5?

5°. Может ли $\operatorname{arccctg} a$ принимать значение:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) 4; е) -1 ; ж) π ?

6. Укажите два промежутка, на каждом из которых имеет лишь один корень уравнение: а) $\operatorname{ctg} x = a$; б) $\operatorname{tg} x = a$.

7. При каких значениях a справедливо равенство:

а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a) = a$? в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = a$; г) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} a) = a$?

8. Можно ли решения уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ записать в виде $x = \pi + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$?

9. Может ли уравнение $\operatorname{ctg} x = a$:

а) иметь ровно одно решение;

б) иметь ровно два решения;

в) не иметь ни одного решения?

10. Сколько решений уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ содержится на отрезке $[0; 5\pi]$?

11. Чему равняется наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = -2$?

Задачи

420°. В какой четверти тригонометрической окружности лежит точка P_t , если:

1) $t = \operatorname{arctg} 0,4$; 2) $t = \operatorname{arctg} (-0,4)$; 3) $t = \operatorname{arccctg} 1,8$; 4) $t = \operatorname{arccctg} (-1,6)$.

421. Вычислите: 1°) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 2°) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$; 3°) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$;

4°) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}(-1))$; 5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arccctg} 0,4)$; 6) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-0,8))$.

422°. Вычислите: 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arccctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arccctg}\sqrt{3})$.

423. Вычислите: 1°) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 65^\circ)$; 2°) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$; 3°) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)$;

4°) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}(-2))$; 5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$; 6) $\operatorname{arccctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{7}\right)$;

7) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi)$; 8) $\operatorname{arccctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; 9*) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$; 10*) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 4)$;

424°. Решите уравнение: 1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -1$; 3) $\operatorname{tg} 2x = 3$;

$$4) \operatorname{ctg} x = 3 - \sqrt{2}; \quad 5) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1; \quad 6) \quad \operatorname{ctg}^2 x = 3; \quad 7) \quad \operatorname{ctg} 3x = -0,3; \quad 8)$$

$$\sqrt{3} - \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{5} \right) = 0; \quad 9) (\operatorname{ctg} x + 3)(\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0; \quad 10)$$

$$\left(2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right) (2 \operatorname{ctg} x + 1) = 0.$$

425°. Найдите нули функции:

$$1) y = \operatorname{tg} x + 1; \quad 2) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad 3) y = 2 \operatorname{ctg} x + \frac{6}{\sqrt{3}}; \quad 4) y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

426. Решите уравнение:

$$1) \operatorname{tg} \pi x = \sqrt{3}; \quad 2) \sqrt{x-1} \operatorname{ctg} x = 0; \quad 3) \operatorname{tg}|x| = 1; \quad 4) \operatorname{tg}(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

427. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие приведенному условию:

$$1) \operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 0; \quad 2) \operatorname{tg} 2x = 0, \cos x < 0; \quad 3) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}, \sin \frac{x}{3} > 0.$$

428. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

$$1) \operatorname{tg}(3x + 75^\circ) = 1; \quad 2) (\operatorname{ctg} x + 1)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x) = 0; \quad 3) \operatorname{tg}(5x + 2) = 0.$$

429*. Найдите решения уравнения, принадлежащие данному промежутку:

$$1) \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \quad x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]; \quad 2) \operatorname{ctg} 2x = 1, \quad x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2} \right];$$

$$3) \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x \in [0; 6\pi]; \quad 4) \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -1, \quad x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right].$$

430. Найдите величину углов ромба, если отношение длин его диагоналей равняется 2.

431*. Выразите:

- 1) углы равнобедренного треугольника через его основание c и площадь S ;
- 2) углы равнобокой трапеции через её основания a и b ($a > b$) и площадь S .

432*. 1) Высота равнобедренного треугольника делится высотой, проведенной к боковой стороне, в отношении 1:3, считая от основания. Найдите углы треугольника.

2) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, проходит через точку пересечения его высот (ортоцентр треугольника). Найдите углы треугольника.



Упражнения для повторения

433. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определите знак числа:

$$1) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right); \quad 2) \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right);$$

3) $\sin(\alpha - 2\pi)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 6) $\cos(2\pi - \alpha)$.

434. Какие знаки имеют $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если:

1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$.

435. Найдите все числа, принадлежащие интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и удовлетворяющие условию:

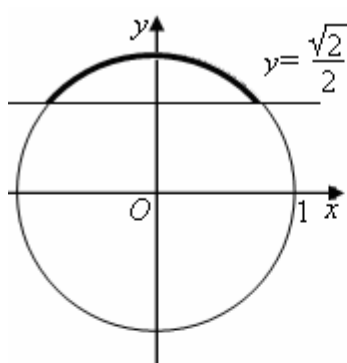


Рис. 318

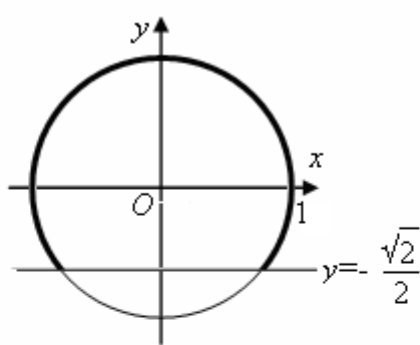


Рис. 319

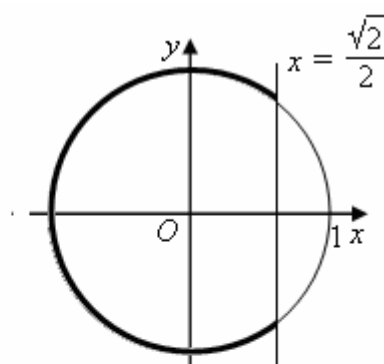


Рис. 320

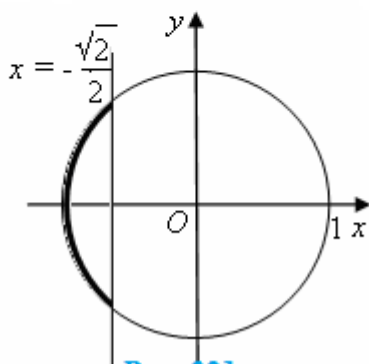


Рис. 321

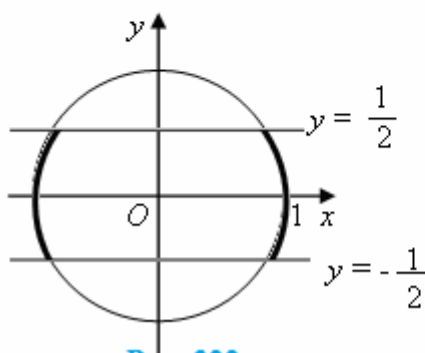
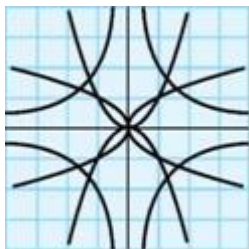


Рис. 322

1) $\sin t > \frac{1}{2}$; 2) $\sin t < \frac{1}{2}$; 3) $\sin t \leq -\frac{1}{2}$.

436. Запишите в виде двойного неравенства множество всех чисел, расположенных на дуге, выделенной жирной линией на рис. 318 – 322.



§ 26. Простейшие тригонометрические неравенства

В данном параграфе рассматриваются простейшие тригонометрические неравенства $\sin x < a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x \geq a$ и др.



Простейшие тригонометрические неравенства, как и простейшие тригонометрические уравнения, можно решать с помощью графиков тригонометрических функций и тригонометрической окружности. Рассмотрим на примерах общие подходы к их решению.

Пример 1. Решить неравенство: $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

□ Поскольку синус — периодическая функция с периодом 2π , то достаточно найти решения неравенства на произвольном интервале длиной 2π , например, на отрезке $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим графики функций $y = \sin x$

и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ (рис. 323). На

этом отрезке уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет два решения:

$x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$, поэтому все решения данного неравенства на отрезке $[0, 2\pi]$

определяются соотношением $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. Учитывая периодичность функции $\sin x$, параллельным переносом вправо и влево на $2\pi, 4\pi, \dots$, получим:

$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Эта запись означает, что множество решений неравенства является объединением промежутков

$\dots, \left[-\frac{15\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}\right], \left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right], \left[\frac{17\pi}{4}; \frac{19\pi}{4}\right], \dots$

Сокращенно это объединение промежутков будем записывать так:

$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$. ■

Решим то же самое неравенство с помощью тригонометрической окружности.

□ Отметим на тригонометрической окружности точки, ординаты которых равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 324). Для этого через

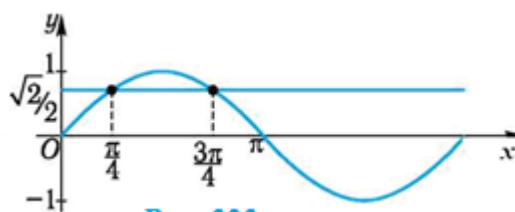


Рис. 323

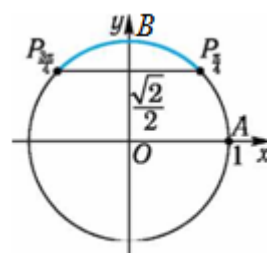


Рис. 324

точку на оси ординат с ординатой $\frac{\sqrt{2}}{2}$ проведем прямую, параллельную оси x , пересекающую тригонометрическую окружность в точках $P_{\frac{\pi}{4}}$ и $P_{\frac{3\pi}{4}}$. Ординаты всех точек дуги $P_{\frac{\pi}{4}}BP_{\frac{3\pi}{4}}$ больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому на отрезке $[0, 2\pi]$ данному неравенству удовлетворяют все значения x , для которых

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}.$$

С учетом периодичности функции $y = \sin x$ имеем тот же результат:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решить неравенство: $\cos x > -\frac{1}{2}$.

□ Через точку на оси абсцисс с абсциссой $-\frac{1}{2}$ (рис. 325) проведём прямую, параллельную оси y . Эта прямая пересекает тригонометрическую окружность в точках $P_{\frac{2\pi}{3}}$ и $P_{\frac{4\pi}{3}}$. Все точки дуги $P_{\frac{2\pi}{3}}AP_{\frac{4\pi}{3}}$, кроме ее концов, имеют абсциссу, большую $-\frac{1}{2}$. Поэтому на отрезке $[-\pi; \pi]$ решения

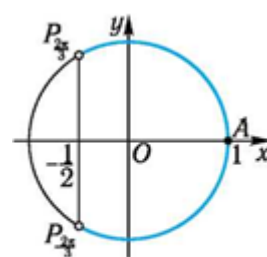


Рис. 325

данного неравенства определяются соотношением

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}.$$

С учетом периодичности функции $y = \cos x$ будем иметь:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Решим это неравенство с помощью графика функции $y = \cos x$.

□ Поскольку косинус — периодическая функция с периодом 2π , то достаточно найти решения неравенства на произвольном промежутке длиной 2π , например, на отрезке $[-\pi; \pi]$. Удобство выбора именно этого отрезка станет понятной в дальнейшем.

Рассмотрим графики функций $y = \cos x$ и

$y = -\frac{1}{2}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 326). На нем

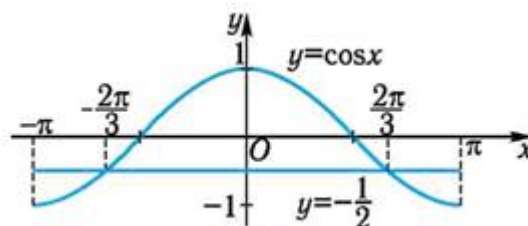


Рис. 326

уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет два решения: $x = -\frac{2\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$. Необходимо найти все те значения x , для которых соответствующие точки графика функции $y = \cos x$ лежат выше прямой $y = -\frac{1}{2}$.

На отрезке $[-\pi; \pi]$ все решения данного неравенства определяются соотношением $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. С учетом периодичности функции $y = \cos x$ множество решений неравенства можно записать так:
 $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Если бы мы выбрали отрезок $[0, 2\pi]$, то решения данного неравенства на этом отрезке не образовывали бы сплошного промежутка, а состояли из двух интервалов: $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right)$. Все решения данного неравенства составляли бы объединение двух совокупностей промежутков: $\left(2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$ Как видим, выбор отрезка $[-\pi; \pi]$ привел к более удобной записи решения. ■

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. Решить неравенство: $\operatorname{tg} x \geq -1$.

□ Поскольку тангенс — периодическая функция с периодами π , $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, то достаточно найти решения неравенства на произвольном промежутке длиной π , например, на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -1$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 327). На этом промежутке уравнение $\operatorname{tg} x = -1$ имеет одно решение $x = -\frac{\pi}{4}$. Для решения неравенства не обходимо найти все те значения x , для которых соответствующие точки графика $y = \operatorname{tg} x$ расположены выше прямой $y = -1$ или же лежат на этой прямой.

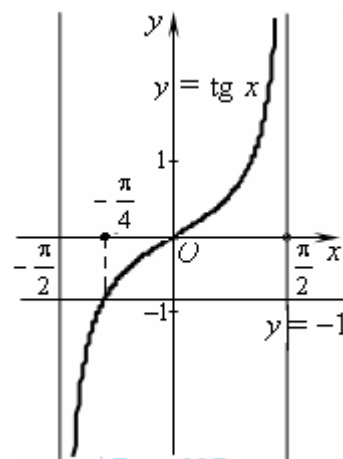


Рис. 327

На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ все решения данного неравенства определяются условием: $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$. Поскольку периодами тангенса являются числа π

, $n \in \mathbf{Z}$,

$n \neq 0$, то множество решений данного неравенства можно записать так:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$



В примерах 1 - 2, рассматривались неравенства вида $\sin x \geq a$, $\cos x > a$. Заслуживают внимания случаи, когда a принимает значения ± 1 , или большие 1 по модулю.

Неравенства $\sin x < -1$, $\cos x < -1$, $\sin x > 1$, $\cos x > 1$ не имеют решений, поскольку синус и косинус не могут принимать значения, большие 1 по модулю. Геометрически это означает, что на графиках функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ отсутствуют точки, лежащие ниже прямой $y = -1$ или выше прямой $y = 1$. Точно так же не имеют решений неравенства $\sin x < a$, $\cos x < a$, где $a \leq -1$, $\sin x > a$, $\cos x > a$, где $a \geq 1$.

В то же время неравенства $\sin x \leq -1$, $\cos x \leq -1$ равносильны уравнениям $\sin x = -1$, $\cos x = -1$, их решениями являются, соответственно, числа $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ и $\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. Именно точки с такими абсциссами являются общими для графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с прямой $y = -1$. Аналогично, неравенства $\sin x \geq 1$, $\cos x \geq 1$ равносильны уравнениям $\sin x = 1$, $\cos x = 1$, их решения — соответственно числа $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ и $2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Неравенствам $\sin x \geq -1$, $\cos x \geq -1$, $\sin x \leq 1$, $\cos x \leq 1$ удовлетворяют все действительные числа, то есть их решениями является множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$.

Неравенствам $\sin x > -1$, $\cos x > -1$, $\sin x < 1$, $\cos x < 1$ удовлетворяют все действительные числа, кроме решений, соответственно, уравнений $\sin x = -1$, $\cos x = -1$, $\sin x = 1$, $\cos x = 1$. Их решения можно записать, соответственно, в виде

$$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad x \neq 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad \text{или в}$$

$$\text{виде} \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad \pi + 2\pi n < x < 3\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Простейшие тригонометрические неравенства, связанные с тангенсом и котангенсом, можно также решать с помощью линий тангенсов и котангенсов на тригонометрической окружности. Покажем их применение к неравенству, рассмотренному в примере 3.

□ Отметим на линии тангенсов точку $B(1; -1)$ (рис. 328). Обратите внимание на то, что абсциссой точки B является абсцисса точки P_0 (все точки на линии тангенсов имеют одну и ту же абсциссу, равную 1), через которую проходит линия тангенсов, а ординатой — число, стоящее в правой части неравенства. Соединим точку B отрезком с центром окружности. Этот отрезок пересекает окружность в точке $P_{-\frac{\pi}{4}}$, соответствующей числу $-\frac{\pi}{4}$, тангенс

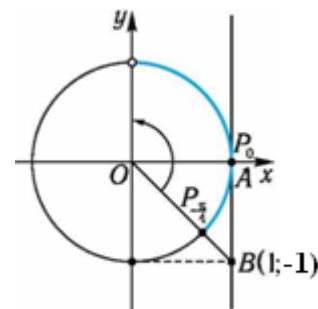


Рис. 328

которого равняется -1 . Для решения неравенства нужно найти все те значения x , для которых соответствующие точки линии тангенсов расположены не ниже точки B . На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ все решения данного неравенства определяются условием: $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$. С учетом периодичности функции $y = \operatorname{tg} x$ получим тот же ответ, что и выше. ■

Пример 4. Решить неравенство: $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$.

□ Отметим на линии котангенсов точку $B(\sqrt{3}; 1)$ (рис. 329). Опять обращаем ваше внимание на то, что ординатой точки B является число 1 — ордината точки $P_{\frac{\pi}{6}}$, через которую проходит линия котангенсов, а абсциссой — число, стоящее в правой части решаемого неравенства. Соединим точку B отрезком с центром окружности. Этот отрезок пересекает окружность в точке $P_{\frac{\pi}{6}}$, соответствующей числу $\frac{\pi}{6}$, котангенс кото-

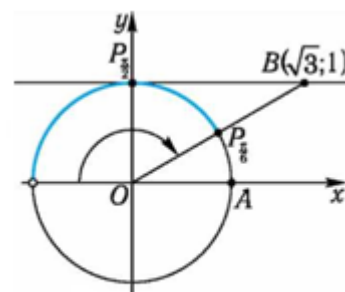


Рис. 329

рого равняется $\sqrt{3}$. Для решения неравенства нужно найти все те значения x , для которых соответствующие точки линии котангенсов расположены левее точки B . На промежутке $(0; \pi)$ все решения данного неравенства определяются условием: $\frac{\pi}{6} < x < \pi$. С учетом периодичности функции $y = \operatorname{ctg} x$ имеем:

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \blacksquare$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \pi + \pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z}.$



Контрольные вопросы

1. ° Можно ли решения неравенства $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ записать в виде

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}?$$

2. ° Можно ли решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$ записать в виде

$$\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{8\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}?$$

3. ° Имеет ли решения неравенство:

а) $\sin x \leq -1$; б) $\cos x > 1$; в) $\cos x \geq 1$?

4. Могут ли отрицательные числа удовлетворять неравенству:

а) $\cos x \geq 0$; б) $\sin x \geq 0$; в) $\operatorname{tg} x \geq 0$?

5. Совпадают ли множества решений неравенств $\operatorname{tg} x \geq -1$ и $\operatorname{ctg} x \leq -1$?

6. Совпадают ли множества решений неравенств $\sin x \geq 0,5$ и $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$?

7. * При каких значениях a все действительные числа удовлетворяют неравенству: а) $\sin x > a$, б) $\sin x \geq a$, в) $\sin x < a$; г) $\sin x \leq a$?

8. * При каких значениях a не имеет решений неравенство:

а) $\cos x > a$, б) $\cos x \geq a$, в) $\cos x < a$; г) $\cos x \leq a$?

9. * Существует ли значение a , при котором все действительные числа удовлетворяют неравенству:

а) $\operatorname{tg} x > a$; б) $\operatorname{tg} x \geq a$; в) $\operatorname{tg} x < a$?

10. * Может ли не иметь решений неравенство:

а) $\operatorname{tg} x < a$; б) $\cos x \geq a$; в) $\operatorname{ctg} x > a$?

Задачи

437°. Запишите с помощью неравенства множество всех чисел x (рис. 330), которым соответствуют точки дуги:

1) BmA_1 ; 2) A_1nB_1 ; 3) BA_1B_1 ; 4) A_1B_1A .

438°. Решите неравенство:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$;

5) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\cos x < \frac{1}{2}$;

8) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$; 9) $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$; 10) $\operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; 11)

$\operatorname{tg} x \leq 1$;

12) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 13) $\operatorname{ctg} x > -1$; 14) $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$; 15) $\sin x < 0$; 16)

$\operatorname{tg} x > 0$; 17) $\cos x \geq 0$; 18) $\operatorname{ctg} x \leq 0$.

439. Решите неравенство:

1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) < -1$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{2x}{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

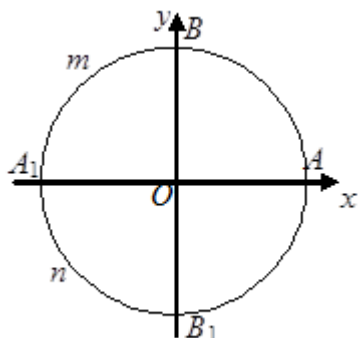


Рис. 330

440. Решите уравнение:

1) $\cos x = |\cos x|$; 2) $|\sin x| = -\sin x$; 3) $\operatorname{tg} x = |\operatorname{tg} x|$; 4) $|\operatorname{ctg} x| = -\operatorname{ctg} x$.

441. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{2\sin x + 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - \sqrt{2}\cos x}$; 3) $y = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}}$; 4) * $y = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \operatorname{ctg} x}{x}}$.

442. Найдите промежутки, на которых график функции $y = f(x)$ находится выше графика функции $y = g(x)$, если:

1) $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = -1$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = -1$;

3) $f(x) = \cos^2 2x$, $g(x) = \sin^2 2x - 0,5$; 4) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

443. Найдите все решения неравенства на заданном промежутке:

1) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$, $(-\pi; \pi)$; 2) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} > 1$, $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

444*. Решите неравенство:

1) $\cos x < -\frac{1}{4}$; 2) $\sin x < \frac{2}{3}$; 3) $\sin x > -\frac{2}{5}$; 4) $\cos x \geq \frac{3}{4}$;

5) $\operatorname{tg} x < 2$; 6) $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x \leq -3$; 8) $\operatorname{ctg} x > 4$.

445*. Найдите все решения неравенства на заданном промежутке:

1) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right)$; 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg} 2x \geq -1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0; 8\pi]$.

446*. Решите неравенство:

1) $\sin x \geq a$, $0 \leq a < 1$; 2) $\sin x < b$, $-1 \leq b < 0$;

3) $\cos x \geq a$, $-1 \leq a < 0$; 4) $\cos x < b$, $0 \leq b < 1$.

447*. Точка осуществляет гармонические колебания вдоль вертикального диаметра по закону $y = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$. В какие промежутки времени она будет удалена от точки равновесия на расстояние, которое не превышает 3?

лена от точки равновесия на расстояние, которое не превышает 3?

448*. В круговой сектор вписан круг. Каким должен быть центральный угол

сектора α , чтобы радиус вписанного круга не превышал треть радиуса сектора?
449*. Каким должен быть больший острый угол α прямоугольного треугольника, чтобы длина гипотенузы больше чем вдвое, превышала длину меньшего из катетов?



Упражнения для повторения

450. Найдите абсциссы точек пересечения с осью x графика функции:

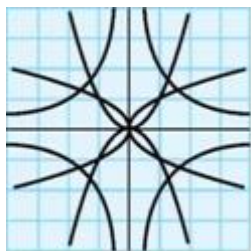
1) $y = 4\cos 3x + 4$; 2) $y = \operatorname{tg}(x + 2)$; 3) $y = 2\sin 3x + 1$; 4) $y = 1 + \operatorname{ctg} 4x$.

451. Найдите нули функции:

1) $y = \sin 2x - \frac{\pi}{2}$; 2) $y = 4\cos^2 \frac{x}{2} - 3$; 3) $y = 3\operatorname{tg}^2 5x - 9$; 4) $y = \frac{1}{\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)} - 2$.

452. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

1) $y = 4\sin^2 3x$ и $y = 1$; 2) $y = \frac{3}{\sin^2 \frac{2x}{3}}$ и $y = 4$; 3) $y = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$ и $y = 3$.



§ 27. Решение тригонометрических уравнений методом замены переменной

В данном параграфе рассматривается на примерах один из общих методов решения тригонометрических уравнений и неравенств, а именно: метод замены переменных.



Если уравнение содержит только одну тригонометрическую функцию, то, обозначив эту функцию какой-то буквой, придем к уравнению относительно введенной переменной.

Пример 1. Решить уравнение

$$3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

□ Это квадратное уравнение относительно $\sin x$. Пользуясь заменой $\sin x = t$, получим уравнение

$$3t^2 - 5t - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения $t = 2$ и $t = -\frac{1}{3}$. Возвращаясь к предыдущей пере-

менной, будем иметь два уравнения: $\sin x = 2$ и $\sin x = -\frac{1}{3}$. Уравнение $\sin x = 2$

решений не имеет. Решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$ имеют такой вид:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad \text{или} \quad x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \blacksquare$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Если в данное уравнение функции $\sin x$ или $\cos x$ входят только в чётных степенях, то, воспользовавшись формулой $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ или, соответственно, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, можно свести тригонометрическое уравнение к такому, которое содержит только функцию $\cos x$ или, соответственно, $\sin x$.

Пример 2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0.$$

□ Это уравнение содержит функцию $\cos x$ только в чётной (второй) степени. Поэтому, заменив $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\sin x$: $2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0$, или $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$.

Обозначим $\sin x = t$. Тогда $2t^2 + t - 3 = 0$, откуда $t = 1$, або $t = -\frac{3}{2}$. Возвращаясь к предыдущей переменной, будем иметь два уравнения: $\sin x = 1$ и $\sin x = -\frac{3}{2}$. Корнями уравнения $\sin x = 1$ являются числа $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{3}{2}$ решений не имеет, поскольку $\left| -\frac{3}{2} \right| > 1$. ■

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$.

□ Обозначим $\operatorname{tg} x$ через y . Тогда $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{y}$, и уравнение примет вид $y + \frac{3}{y} = 2\sqrt{3}$, которое равносильно системе $\begin{cases} y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0, \\ y \neq 0, \end{cases}$ имеющей один корень $y = \sqrt{3}$. Возвращаясь к предыдущей переменной, будем иметь уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Его корнями являются числа $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заменой переменных решаются также так называемые однородные уравнения. В уравнении $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0$ каждое слагаемое имеет суммарную степень синуса и косинуса, равную 2. Такое уравнение называется однородным второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Напомним, что степенью выражения $x^m y^n$ с двумя переменными x и y называется сумма $m + n$ показателей при этих переменных. В уравнении $\sin x + 2\cos x = 0$ каждое слагаемое имеет первую степень. Оно является однородным первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. В то же время уравнение $\sin x + 2\cos x = 1$ не является однородным: свободный член 1 имеет нулевую степень. Вообще, **уравнение, в котором каждое из слагаемых имеет одну и ту же степень, называется однородным.**

Однородные уравнения относительно одной и той же степени $\sin x$ и $\cos x$ решаются делением левой и правой части уравнения на эту степень косинуса (или синуса).

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

□ В данном уравнении оба члена в левой части первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Это уравнение является однородным первой степени. Разделим обе его части на первую степень $\cos x$. Обратите внимание на то, что $\cos x \neq 0$, поскольку в противном случае и $\sin x$ будет равняться нулю, что невозможно согласно основному тригонометрическому тождеству. Получим:

$$\sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0, \text{ или, учитывая, что } \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение последнего простейшего уравнения записывается в виде:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Решить уравнение $\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 0$.

□ Все члены уравнения являются членами второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$, поэтому уравнение является однородным второй степени. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. Делить на $\cos^2 x$ можно, потому что $\cos x \neq 0$. Если $\cos x = 0$, то уравнение принимает вид $\sin x = 0$. Но, согласно основному тригонометрическому тождеству $\sin x$ и $\cos x$ одновременно равняться нулю не могут.

После деления получим уравнение $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 8 \frac{\sin x}{\cos x} + 7 = 0$, или

$\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 7 = 0$. Сделаем замену: $\operatorname{tg} x = t$. Получим уравнение $t^2 - 8t + 7 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = 1$ и $t_2 = 7$. Возвратившись к предыдущей переменной, будем иметь уравнения $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = 7$. Их решениями являются

соответственно числа: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Иногда тригонометрическое уравнение хотя и не является однородным, но легко приводится к нему.

Пример 6. Решить уравнение $4\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 10\cos^2 x = 3$.

□ В таком виде уравнение не является однородным: оно содержит $\sin x$ и $\cos x$ как во второй степени (члены левой части), так и в нулевой степени (в правой части $3 = 3\sin^0 x \cos^0 x$, $0 + 0 = 0$). Но его легко можно привести к однородному с помощью основного тригонометрического тождества: $3 = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Уравнение примет вид

$4\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 10\cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, или после приведения подобных членов, $\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 0$. Получили уравнение, которое решалось в примере 5. ■

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При замене переменной в тригонометрическом уравнении большую роль играет выбор функции, через которую выражаются остальные. Может случиться так, что один выбор приводит к иррациональному уравнению, а другой — к рациональному. Если, например, в уравнении $\cos^2 x + 2\sin x = 3\sin^2 x$ положить $t = \cos x$, то получим совокупность двух иррациональных уравнений: $t + 2\sqrt{1-t^2} = 3t$, $t - 2\sqrt{1-t^2} = 3t$. Если же положить $t = \sin x$, то будем иметь квадратное уравнение $1 - t^2 + 2t = 3t^2$. Очевидно, второй выбор предпочтительней! Обратите внимание на то, функция $\cos x$ входит в уравнение только в чётной (второй) степени. Поэтому удобнее является замена $t = \sin x$.

Умение выбирать рациональную замену приходит с опытом решения уравнений. Чем больше разнообразных уравнений вы решите, тем легче будет справиться с новым.



Если уравнение содержит функцию, зависящую только от $\sin x \pm \cos x$ и от $\sin 2x$, то целесообразно применить замену $\sin x \pm \cos x = t$, поскольку в этом случае $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\sin x \cos x + 1 - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = t^2 - 1$, или $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2 = 1 - t^2$.

Пример 7. Решить уравнение $2\sin 2x = 1 + \sin x - \cos x$.

□ Пусть $\sin x - \cos x = t$ и выразим $\sin 2x$ через t . Возведём обе части последнего равенства в квадрат: $(\sin x - \cos x)^2 = t^2$, $\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = t^2$, $1 - \sin 2x = t^2$, или $\sin 2x = 1 - t^2$. В результате сделанной замены данное уравнение примет вид $2(1 - t^2) = 1 + t$, корнями его являются числа -1 и $\frac{1}{2}$. Возвращаясь к предыдущей переменной, будем иметь совокупность уравнений $\sin x - \cos x = -1$ и $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$. Эти уравнения решим, воспользовавшись формулами приведения и разности синусов двух аргументов. Поскольку

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

то получим совокупность уравнений $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ и $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Корнями этих уравнений являются, соответственно, числа:

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi k, (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Известно, что основные тригонометрические функции можно выразить через тангенс половинного аргумента (см. § 22, п. 1):

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Поэтому при решении тригонометрических уравнений бывает полезным переходить к уравнениям, содержащим только одну функцию $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и делать замену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Такая замена называется **универсальной**. При использовании указанных формул слева направо можно потерять корни $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, потому что при этих значениях $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не имеет смысла.

Пример 8. Решить уравнение $\sin x + \cos x - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1$.

□ Выразим все функции, входящие в уравнение, через тангенс половинного угла и выполним универсальную подстановку: $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1}{t} = -1$.

Приведя уравнение к общему знаменателю $t(t^2 + 1)$ и отбросив этот знаменатель, перейдём к квадратному уравнению $t^2 + 2t - 1 = 0$, которое является следствием предыдущего. Его корнями являются числа $-1 + \sqrt{2}$ и $-1 - \sqrt{2}$, не обращающие знаменатель $t(t^2 + 1)$ в нуль. Следовательно, получено квадратное уравнение, равносильное предыдущему дробно-рациональному. Решение зада-

чи свелось к решению двух простейших тригонометрических уравнений: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} =$

$-1 + \sqrt{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1 - \sqrt{2}$. Их корнями являются, соответственно, числа $x =$

$2\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ и

$x = -2\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}$. Осталось проверить, не потеряны ли корни в

связи с заменой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Для этого подставим числа $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbf{Z}$ в дан-

ное уравнение: $\sin(2k + 1)\pi + \cos(2k + 1)\pi - \operatorname{ctg} \frac{2k + 1}{2}\pi = 0 - 1 - 0 = -1$. Следо-

вательно, числа $x = (2k + 1)\pi$ также являются корнями данного уравнения. ■

Ответ: $2\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; -2\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}; (2k + 1)\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Универсальную подстановку можно применить для решения уравнений

вида: $a \sin x + b \cos x = c$, где a, b, c — некоторые числа.



Контрольные вопросы

1. ° Является ли число π решением уравнения $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$?
2. ° Какой заменой $\sin x = z$ или $\cos x = z$ удобнее решать уравнение:
 - а) $2 \sin^2 x - \cos^2 x + 3 \sin x = 0$; б) $2 \sin^2 x - \cos^2 x + 3 \cos x = 0$?
3. ° Однородны ли относительно какой-то степени $\sin x$ и $\cos x$ такие уравнения:
 - а) $\sin x + 3 \cos x = 0$; б) $\sin^2 x - 2 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = 0$;
 - в) $\sin^2 x + 2 \sin x - \cos^2 x = 0$; г) $\sin^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + \cos^3 x = 0$;
 - д) $4 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x = 3$?
4. В каких случаях при решении уравнений, где функции $\sin x$ или $\cos x$ входят только в чётных степенях, используется формула $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, а в каких $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$?
5. Почему деление обеих частей уравнения $2 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 0$ на $\cos^2 x$ может привести к потере решений?
6. С помощью какой замены переменной целесообразно решать уравнение $\sqrt{3 \cos x + 1} = 4 \cos x + 1$?
7. * Почему необходимо проверять, не являются ли числа $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ решениями уравнения при его решении с помощью универсальной подстановки?
8. * Почему при применении универсальной подстановки может сузиться область определения уравнения?

Задачи

453⁰. Решите уравнение:

- 1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$; 2) $4 \cos^2 x + \sin x = 1$;
- 3) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - 4 = 0$; 4) $\operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x = 6$;
- 5) $\frac{2 \cos^2 x}{7 \cos x - 3} = 1$; 6) $\sin^2 x - \cos x = 0,5$.

454. Решите уравнение:

- 1)⁰ $\sin 3x = \cos 3x$; 2)⁰ $\sin^2 3x = 3 \cos^2 3x$; 3)⁰ $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$;
- 4)⁰ $3 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 1$; 5)⁰ $-4 \sin^2 x \cos^2 x - 9 \cos^4 x = 0$;
- 6) $1 - 3 \cos^2 x = \sin 2x$; 7) $\cos 2x + \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$.
- 8) $4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$;
- 9)* $\sin x \sin 2x + 2 \cos x \cos 2x + 10 \cos^3 x + 4 \sin^3 x = 2 \sin x$.

455. Решите уравнение:

$$\begin{aligned}
 &1) \sqrt{5-2\sin x} = 6\sin x - 1; \quad 2) \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x - \frac{1}{\sin x} + \frac{7}{4}; \\
 &3) \sin x + 1,5\operatorname{ctg} x = 0; \quad 4) \cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x; \\
 &5) 4\sin x + 3\cos x = 2; \quad 6) \sqrt{\cos^2 x - 4\cos x + 4} = \cos x; \\
 &7) \cos x + \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} = 1; \quad 8) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}.
 \end{aligned}$$

456. Укажите все нули функции:

$$1) y = 5(\sin x + \cos x)^2 - 13(\sin x + \cos x) + 8; \quad 3) y = \cos 2x - 2\sin x + \frac{1}{2}.$$

457. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения:

$$1) \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 4 = 3\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x; \quad 2) \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 4 - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x.$$

458. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие приведенному условию:

$$1) 6\sin^2 t - 5\sin t + 1 = 0, \cos t < 0; \quad 2) 2\cos^2 x = 3\cos x + 2, \operatorname{tg} x < 0.$$

459. Найдите точки пересечения с осью абсцисс графика функции:

$$1) y = 3\sin x - 2\cos^2 x; \quad 2) y = \operatorname{tg}^4 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 4.$$

460. Найдите точки пересечения графиков функций:

$$1) y = \sin^4 x \text{ и } y = 1 - 6\cos^2 x; \quad 2) y = \operatorname{tg} x \text{ и } y = 2\operatorname{ctg} x - 1.$$

461. Найдите решения уравнение, принадлежащие указанному промежутку:

$$1) \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 1, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]; \quad 2) \cos^2 x - 1,5\sin 2x = -1, \left[0; \frac{3\pi}{2}\right].$$

462. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равняется разности проекций катетов на гипотенузу. Найдите углы треугольника.

463. На стороне OM угла MON , равного 60° , взяли произвольную точку A , а на стороне ON — точку B так, что $OA = 2OB$. Под каким углом к стороне ON следует провести полупрямую OL внутри данного угла, чтобы она была равноудалена от точек A и B ?

464. Синусы углов прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найдите углы треугольника.

465*. В равнобедренном треугольнике через вершину угла при основании и центр описанной окружности проведена прямая. Отношение отрезка этой прямой, расположенного внутри треугольника, к боковой стороне равняется $1,2$. Найдите углы треугольника.

466. Квадрат вписан в прямоугольный треугольник так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе, а две вершины на катетах. Найдите углы треугольника, если площадь квадрата составляет $0,4$ площади треугольника.

467. Центр описанной около равнобедренного треугольника окружности удален от основания на 5 см, а от боковых сторон — на 2 см. Найдите углы треугольника.

468*. В прямоугольном треугольнике проекция одного из катетов на гипотенузу вдвое больше другого катета. Найдите углы треугольника.

Упражнения для повторения



469. Разложите на множители многочлен:

1) $4x^2 - 1$; 2) $x^2 - x - 30$; 3) $x^3 - 2x^2 - 3x$; 4) $49 - (1 - 3x)^2$;

5) $a^4 - 2a^3 + a^2 - 4$; 6) $x^3 - 2ax^2 + xa^2$; 7) $9x^4 - 4x^2 + 4x - 1$.

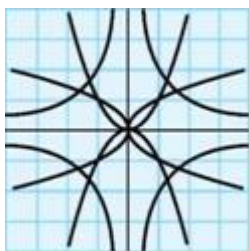
470. Сократите дробь:

1) $\frac{3x^2 + 4x - 4}{6x^2 - 7x + 2}$; 2) $\frac{-5x + 7x^2 - 2}{3 + 8x - 11x^2}$; 3) $\frac{2x - x^2}{20 - 5x^2}$;

4) $\frac{3y^2 - y - 2}{(y+1)^3 - 8}$; 5) $\frac{xy - x + y - y^2}{y^2 - 1}$; 6) $\frac{x^2 + 5x - 6}{|x+6|}$.

471. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}(x^2 - 2x - 3) = 0$; 2) $(x+2)\sqrt{1-x^2} = 0$; 3) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{x-5} = 0$.



§ 28. Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

В данном параграфе рассматривается второй общий метод решения тригонометрических уравнений — метод разложения на множители, являющийся одним из наиболее применимых. Это объясняется тем, что многочисленные формулы тригонометрии дают возможность представить тригонометрические выражения в виде произведения.



Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равняется нулю, решаются разложением их левой части на множители.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin^2 3x = \sqrt{3}\sin 3x$.

□ Перенесём все члены в левую часть и вынесем за скобки общий множитель:

$$2\sin^2 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 0, \quad \sin 3x(2\sin 3x - \sqrt{3}) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin 3x = 0$, $2\sin 3x - \sqrt{3} = 0$. Корнями первого из них являются числа

$x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. Второе равносильно уравнению $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, корнями которого

являются числа $x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ: $\frac{\pi n}{3}, (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $2\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

□ Это однородное уравнение относительно второй степени синуса и ко-

синуса. Однако делить обе его части на $\cos^2 x$ нельзя, поскольку это приведет к потере решений. Разложим левую часть уравнения на множители и приравняем каждый из них нулю:

$$2 \cos x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что второе уравнение $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ — однородное относительно первой степени синуса и косинуса. Разделив обе его части на $\cos x$ (это возможно, поскольку $\cos x \neq 0$), получим уравнение $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$. Его корнями являются числа $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Часто применению метода разложения на множители предшествуют преобразования с помощью различных тригонометрических формул.

Пример 3. Решить уравнение $\sin^2 x - \sin 2x = 1$.

□ Применив формулы $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, получим:
 $-2 \sin x \cos x = \cos^2 x$ или $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$.

Разлагая левую часть на множители вынесением общего множителя за скобки, будем иметь: $\cos x (\cos x + 2 \sin x) = 0$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ и $\cos x + 2 \sin x = 0$. Корнями первого являются числа $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение является однородным относительно первой степени $\sin x$ и $\cos x$. Разделив обе части на $\cos x$ (подумайте, почему можно это делать), получим:

$$1 + 2 \operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n. \quad \blacksquare$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При решении тригонометрических уравнений разложение выражения на множители может выполняться всеми известными способами: вынесением общего множителя, группировкой, применением алгебраических формул.

Пример 4. Решить уравнение $2 \sin x \cos x = \sin x + \cos x - \frac{1}{2}$.

□ Сгруппируем члены уравнения следующим образом:
 $(2 \sin x \cos x - \sin x) - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$. Преобразуем уравнение:
 $2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0, \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(2 \sin x - 1) = 0$. Последнее уравне-

ние равносильно совокупности двух уравнений $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ и $2\sin x - 1 = 0$.

Корнями этих уравнений являются соответственно числа:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Метод разложения на множители базируется на таком утверждении:

Если левая часть уравнения $f(x) = 0$ представляет собой произведение нескольких множителей $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$, то каждое решение данного уравнения является решением хотя бы одного из уравнений $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$.

Совокупность этих уравнений является следствием данного уравнения и может быть не равносильным ему. Поэтому, решив все эти уравнения, мы можем получить посторонние для данного уравнения корни за счет того, что область определения каждого из уравнений совокупности может быть шире области определения данного уравнения. Следовательно, после решения каждого уравнения совокупности необходимо проверить, удовлетворяют ли найденные **их** корни исходному уравнению. Следующий пример иллюстрирует этот факт.

Пример 5. Решить уравнение $\cos x \cdot \sqrt{1-x^2} = 0$.

□ Решив уравнения $\cos x = 0$ и $\sqrt{1-x^2} = 0$, будем иметь $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

и $x = \pm 1$. Но поскольку областью определения данного уравнения является отрезок

$[-1; 1]$, то числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют данному уравнению ни при одном значении k . Поэтому его решениями являются только числа ± 1 . $\blacksquare$

Ответ: 1; -1.

Анализируя решение примера 5, можно сформулировать такие рекомендации для решения уравнения вида: $f_1(x)f_2(x) = 0$:

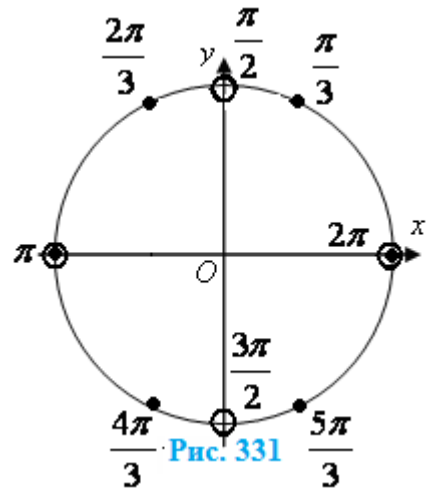
- 1) найти область определения уравнения;
- 2) решить каждое из уравнений $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$;
- 3) из найденных корней этих уравнений отобрать те, которые входят в область определения данного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $\sin^2 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0$.

□ Область определения данного уравнения образуют все вещественные числа, кроме чисел $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$, при которых не существует

$\operatorname{ctg} 2x$. Корнями уравнения $\sin^2 3x = 0$ являются числа $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$, корнями

уравнения $\operatorname{ctg} 2x = 0$ — числа $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Не все корни первого уравнения принадлежат области определения данного уравнения, в то же время все корни второго уравнения принадлежат ей, поэтому они являются корнями данного уравнения. Чтобы выяснить, какие именно корни первого уравнения не принадлежат области определения, обратимся к тригонометрической окружности, учитывая, что наименьший положительный период функции, стоящей в левой части уравнения, равняется 2π (рис. 331).



Точки, которые соответствуют корням первого уравнения, и точки, которые не принадлежат области определения данного уравнения, обозначены на рисунке соответственно знаками $\bullet$ и $\circ$.

Следовательно, решениями данного уравнения не являются серии чисел $2\pi k$ и $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Остаются четыре серии чисел, которые коротко можно записать так: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. ■

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.



В тех случаях, когда приходится находить решения тригонометрического уравнения, удовлетворяющие некоторому условию, приходится из решений x_1 этого уравнения исключать корни x_2 , не удовлетворяющие заданному условию. Пусть из серии решений x_1 , содержащей параметр n , необходимо исключить совокупность тех корней, которые входят в серию решений x_2 , содержащую параметр m . Чтобы выполнить такое исключение, серии решений x_1 и x_2 приравниваются, из полученного равенства n выражается через m . Если существуют целые значения m , при которых полученное выражение принимает целые значения, то из серии x_1 должны быть исключены корни, соответствующие этим значениям n .

Пример 7. Решить уравнение $\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} - 2 \sin x = 0$.

□ Применяя формулу синуса двойного аргумента и приводя к общему знаменателю, будем иметь: $\frac{4 \sin x \cos x - 2 \sin x}{1 - \cos x} = 0$, или $\frac{\sin x(2 \cos x - 1)}{1 - \cos x} = 0$.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x(2 \cos x - 1) = 0, \\ \cos x \neq 1. \end{cases}$ Для её решения из реше-

ний уравнения $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$, то есть из чисел $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, следует исключить решения уравнения $\cos x = 1$, то есть числа $2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Заметим,

что серия решений $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ удовлетворяет условию $\cos x \neq 1$, а следовательно, и данному уравнению. Исследуем серию $\pi n, n \in \mathbf{Z}$. Запишем равенство: $\pi n = 2\pi m$. Отсюда $n = 2m$. Таким образом, чётные значения n должны быть исключены из записи серии решений уравнения $\sin x = 0$. ■

Ответ: $\pi(2n+1), \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x - \cos 2x} = \sqrt{2} \sin x$.

□ Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin 3x - \cos 2x = 2\sin^2 x, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$ При-

менив в уравнении формулу косинуса двойного аргумента, будем иметь уравнение $\sin 3x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$, или после упрощения $\sin 3x = 1$. Отсюда

$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$. Теперь из полученных корней следует отоб-

рвать те, которые удовлетворяют условию $\sin x \geq 0$, то есть определить, при каких значениях k будет справедливым неравенство $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) \geq 0$. Поскольку

наименьший положительный общий период функций, входящих в уравнение, равен 2π , то достаточно решить поставленное задание на промежутке $[0; 2\pi]$. Придавая k значения 0, 1, 2, последовательно будем иметь:

$$\sin \frac{\pi}{6} \geq 0, \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} \geq 0, \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} < 0.$$

Далее значения синуса будут повторяться, ибо значения аргумента будут отличаться от рассмотренных на величину, кратную 2π . Следовательно, корнями данного уравнения являются числа $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.



Контрольные вопросы

1. ° Верно ли решено уравнение:

$$\sin x - \sin^2 x = 0, 1 - \sin x = 0, \sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}?$$

2. ° Может ли нарушиться равносильность уравнения, если обе его части разделить на одну и ту же функцию?

3. Равносильны ли уравнения:

а) $\operatorname{tg} x(1 - 2\cos x)(2 + \sin x) = 0$ и $\operatorname{tg} x(2 + \sin x) = 0$;

б) $(2 - \cos x)(1 - 2\sin x) = 0$ и $1 - 2\sin x = 0$;

в) $(1 + 2 \sin x) \operatorname{tg} x = 0$ и $\frac{1 + 2 \sin x}{\operatorname{ctg} x} = 0$?

4. Верно ли утверждение, что все корни уравнения $\sin x = 0$ являются корнями уравнения $\sin 2x = 0$? А наоборот?

5. Сколько корней имеет уравнение:

а) $(x - 1)\sqrt{\cos x + 2} = 0$; б) $(x - 2)\sqrt{2 \cos x - 3} = 0$?

6. Сколько корней на промежутке $[0; 2\pi]$ имеет уравнение $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = 0$?

7. Сколько корней на промежутке $[0; \pi]$ имеет уравнение $\sqrt{\cos x}(2 \sin x - 1) = 0$?

8. Чему равняется наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{x(x-2)} \operatorname{tg} \pi x = 0$?

9. Чему равняется сумма корней уравнения $\frac{\sqrt{x+1} \cdot (x^2 + 1) \cdot \operatorname{ctg} \pi x}{\sqrt{3-x}} = 0$?

10. Можно ли утверждать, что совокупность решений уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = 0$ совпадает с совокупностью решений уравнений $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$?

Задачи

472. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2} \sin^3 x - \sin^2 x = 0$;

2) $\cos 5x(1 + \cos x) = 0$;

3) $\sin 2x + \sin x = 0$;

4) $\cos x - \sin x = \cos 2x$;

5) $1 - \cos 2x = 4 \sin x$.

6) $\operatorname{ctg} x - \cos x = 1 - \sin x$;

7) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

473. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\sin x - \cos x} \operatorname{tg} 2x = 0$;

2) $\sqrt{\operatorname{tg} x}(\sin x + \cos x) = 0$;

3) $\sqrt{9 - x^2} \operatorname{ctg} 2x = 0$;

4) $\sqrt{\sin x}(x^2 - 7x + 10) = 0$.

474. Найдите точки пересечения с осью абсцисс графика функции:

1) $y = \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x$; 3) $y = 3 \sin x - 2(1 - \cos x)$;

4) $y = \cos x + \sin x - \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$; 5) $y = \frac{\sin x}{1 + \sin \frac{x}{2}} + 2 \cos \frac{x}{2}$.

475. Укажите все нули функции:

1) $y = 4(1 + \cos x) - 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; 2) $y = \operatorname{ctg} x + \cos x + 1 + \sin x$.

476. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие приведенному условию:

1) $\sin 3t \cdot \operatorname{ctg} t = 0, \operatorname{tg} t < 0$; 2) $\sin^2 x = 3 \cos^2 x, \sin x < 0$;

3) $\cos 2x + \cos 6x = |\cos 4x|, \operatorname{tg} x > 0$; 4) *

$\sin 12x - \sin 4x = \sqrt{3} |\cos 8x|, \sin 4x > 0$.

477. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения:

1) $\operatorname{tg} x + \sin(\pi + x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; 2) $(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x$.

478. Найдите точки пересечения графиков функций:

1) $y = 1 + \cos x$ и $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; 2) $y = 1 - \sin^4 x$ и $y = \cos^4 x$.

479. Найдите решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

1) $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$, $[-2\pi; 5\pi]$; 2) $1 + \sin x \cos 3x + \sin x + \cos 3x = 0$, $[-\pi; \pi]$.

480. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит ее в отношении 1:3, считая от вершины. Найдите углы треугольника.

481. Найдите углы равнобедренного треугольника, если вписанная в него окружность проходит через точку пересечения медиан.

482*. Сумма длин двух равных высот равнобедренного треугольника равняется длине третьей высоты. Найдите углы треугольника.

483*. Существует ли прямоугольный треугольник, периметр которого в 10 раз больше радиуса вписанной в него окружности?

Упражнения для повторения



484. Сколько решений имеет уравнение:

1) $\frac{2}{x} = -|x|$; 2) $\frac{1}{x^2} = |x|$; 3) $\sqrt{x} = \frac{2}{x^2}$; 4) $\sqrt[3]{x} = \frac{2}{x}$?

485. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x} = 6 - \frac{1}{4}x$; 2) $\frac{1}{x} = \sqrt{x + \frac{7}{2}}$; 3) $\sqrt{3-x} = x^3 - 7$; 4) $\frac{2}{x^2 + 1} = \sqrt{x}$.

486. На рис. 332 изображён график функции $y = f(x)$.

6) Сколько корней имеет уравнение: $f(x) = 0$?

7) Чему приближённо равняются корни уравнения $f(x) = 1$?

8) Укажите все значения параметра a , при которых уравнение $f(x) = a$ имеет, по крайней мере, два корня.

9) Укажите все значения параметра a , при которых уравнение $f(x) = a$ имеет ровно один корень.

10) Решите неравенство:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \leq 0$; в) $f(x) \geq -1$.

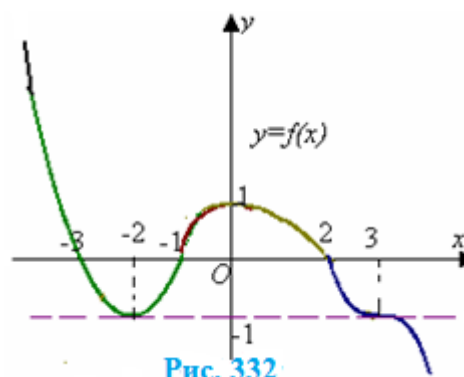
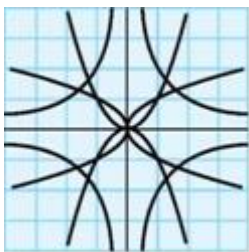


Рис. 332



§ 29. Функционально-графические методы решения тригонометрических уравнений и неравенств

В данном параграфе идет речь еще об одном общем методе исследования и решения уравнений, об использовании свойств и графиков функций. Частично он рассматривался, когда находились точки пересечения графика функции с осью абсцисс или точки пересечения графиков двух функций. С этим методом вы встречались в § 8 при решении алгебраических уравнений.



Графические методы исследования или решения уравнений и неравенств полезно применять тогда, когда функции, входящие в уравнения или неравенства, заданы или можно задать графически. Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ вполне понятна: следует рассмотреть графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, найти точки их пересечения, абсциссы точек пересечения и будут корнями уравнения. В частности, решениями уравнения $f(x) = 0$ являются абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс. Применение графиков дает возможность определить количество корней уравнения, найти их приближенные значения (а иногда и точные), выдвинуть гипотезу об отсутствии решений (потом необходимо ее доказать или опровергнуть).

Пример 1. Найти количество решений уравнения $\cos x = |x|$.

□ Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = |x|$ (рис. 333). Имеем две точки их пересечения, то есть уравнение имеет два корня. ■

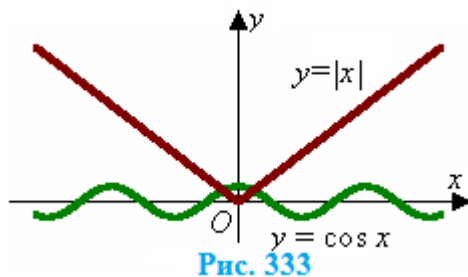


Рис. 333

Ответ: Два.

Графический метод используется также при решении неравенств. Например, чтобы решить неравенство $f(x) > 0$, строят график функции $y = f(x)$ и выбирают на оси x те промежутки, на которых график функции $y = f(x)$ лежит выше оси x , то есть в верхней полуплоскости. Если необходимо решить неравенство $f(x) < 0$, то выбирают на оси x те промежутки, на которых график функции $y = f(x)$ лежит ниже оси x , то есть в нижней полуплоскости.

Пример 2. На рис. 334 изображены графики функций $y = 0,5\sin \pi x$ и $y = |x|$. Решить графически неравенство $|x| \leq 0,5\sin \pi x$.

□ Решением неравенства являются те значения x , при которых график функции $y = |x|$ расположен не выше графика функции $y = 0,5\sin \pi x$. Это все значения x из промежутка $[0; 0,5]$. ■

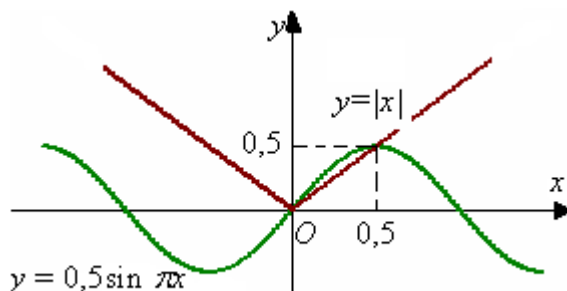


Рис. 334



Кроме графиков функций, которые входят в уравнения или неравенства, при решении и исследовании тригонометрических уравнений и неравенств, как и алгебраических уравнений и неравенств, успешно можно применять информацию об области определения функций, об их свойствах (множество значений, монотонность и т. п.). Рассмотрим это на примерах.

Если мы знаем области определения функций, которые входят в уравнение или неравенство, то иногда эта информация позволяет показать, что уравнение не имеет решений. Если область определения уравнения состоит из нескольких чисел, то такое уравнение решается непосредственной подстановкой этих чисел.

Пример 3. Решить уравнение: $\sqrt{\sin x} = \sqrt{-\sin x} + \operatorname{tg} x$.

□ Область определения этого уравнения состоит из всех x , удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ -\sin x \geq 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \text{то есть область определения состоит из то-}$$

чек x , для которых $\sin x = 0$, а именно из точек $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$. При указанных значениях левая и правая части уравнения равны нулю, а это означает, что все числа $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$, и только они являются его решениями. ■

Ответ: $\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Приведенные соображения можно применить и к тригонометрическим неравенствам. Так, числа $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$ являются решениями неравенства $\sqrt{\sin x} \geq \sqrt{-\sin x} + \operatorname{tg} x$ или неравенства $\sqrt{\sin x} \leq \sqrt{-\sin x} + \operatorname{tg} x$ (см. пример 3). В то же время неравенства $\sqrt{\sin x} < \sqrt{-\sin x} + \operatorname{tg} x$ и $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\sin x} + \operatorname{tg} x$ решений не имеют, так как числа $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$ не удовлетворяют этим неравенствам, а числа, отличные от $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$, не входят в их области определения.

При решении уравнений и неравенств используются свойства возрастания или убывания функций. Их применение основывается на теоремах 1 и 2 из § 8. Напомним их.

Т е о р е м а 1. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то уравнение $f(x) = a$ имеют не более одного корня.

Т е о р е м а 2. Если одна из функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$ возрастает, а вторая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Пример 4. Найти решения уравнения $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} = x$ на промежутке $(0; 4)$.

□ Нетрудно заметить, что $x = 1$ является корнем уравнения. Действительно, $\operatorname{ctg} \frac{\pi \cdot 1}{4} = 1$. Докажем, что других корней это уравнение не имеет. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ убывает, поэтому функция $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}$ убывает на промежутке $(0; 4)$. Функция $y = x$ возрастает на всей координатной прямой. Согласно теореме 2, уравнение $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} = x$ на рассматриваемом промежутке имеет не более одного корня. Следовательно, $x = 1$ — единственное решение данной задачи. ■

Ответ: 1.



При решении уравнений и неравенств целесообразно использовать данные о множестве значений функций, входящих в них, их наибольшее и наименьшее значения. В частности, пусть нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$. Если существует некоторое число A , такое, что для всех x из области определения уравнения выполняются неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, то рассматриваемое уравнение решений не имеет. Если же $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, то данное уравнение равносильно системе двух уравнений с одной переменной $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$ Для ее решения достаточно решить одно из этих уравнений и его решения подставить во второе.

Пример 5. Решить уравнение: $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

□ Для всех действительных значений x справедливы неравенства $\cos 2\pi x \leq 1$, $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$. Поскольку левая часть уравнения при всех значениях x не превышает 1, а правая часть всегда не меньше 1, то данное уравнение может иметь решение лишь в том случае, если каждая часть уравнения равна 1.

Следовательно, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$ Решением второго уравнения является число $x = 1$. Оно удовлетворяет и первому уравнению. ■

Ответ: $x = 1$



Контрольные вопросы

1. ° На рисунке 335 изображены графики функций $y = \sin x$ и $y = 1 - x$. Сколько решений имеет уравнение $\sin x = 1 - x$ на промежутке $(-\infty; 3)$?
2. ° Сколько решений имеет уравнение: а) $\operatorname{tg} x = 2x + 3$; б) $\cos x = -|x|$; в) $\cos x = x^2 + 1$?
3. В скольких точках пересекаются графики

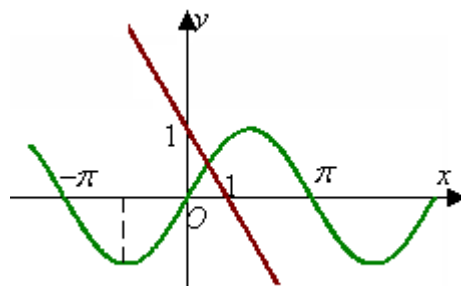


Рис. 335

функций

$$y = \cos x \text{ и } y = \frac{1}{\sin x}?$$

4. Какие решения имеет уравнение $\cos x = 1 + x^8$?

5. Верно ли, что все действительные числа удовлетворяют неравенству $\sqrt[4]{1 - \cos^4 x} + x^2 > 0$?

6. Имеет ли решения уравнение $\sqrt[4]{1 - \cos^4 x} + x^2 = 0$?

7. Имеет ли решения неравенство $\sqrt{1 - x^2} > 2 \cos x$?

8. * Верно ли, что уравнение $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$ не имеет решений?

Задачи

487. Найдите количество решений уравнения:

1) $\circ \cos x = x^2$; 2) $\sin x = -x^2$; 3) $\sin x = |x|$; 4) $\operatorname{tg} x = -x$.

488. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\cos x} = \sqrt{-\cos x} + \operatorname{ctgx}$; 2) $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x} + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sqrt{2 \sin x - 1} + \sqrt{1 - 2 \sin x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; 4)

$$\sqrt{|1 - \sin x|} = \sqrt[4]{-|1 - \sin x|} + \operatorname{ctgx}.$$

489. Найдите решения уравнения:

1) $\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{3} = -x\sqrt{3}$ на промежутке $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$; 2) $\sin x = \frac{\pi}{2x}$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\cos x = -\frac{\pi}{x}$ на промежутке $(0; \pi]$; 4) $\operatorname{ctgx} = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$ на промежутке $(0; \pi)$.

490*. Решите уравнение:

1) $\sin \frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$; 2) $\cos 2\pi x - 1 = \sqrt{x}$; 3) $\frac{1}{|\sin x|} = 1 - x^2$; 4) $\frac{1}{|\cos x|} = 1 - \sqrt[4]{x}$.

5) $\cos \frac{2\pi x}{\sqrt{3}} = x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$; 6) $\sin \frac{\pi x}{2\sqrt{2}} = x^2 - 2\sqrt{2}x + 3$;

7) $2\sin^5 x + 3\cos^7 x = 5$; 8) $3\sin^4 x + 4\cos^6 x = 7$.

491*. Решите уравнение:

1) $\cos x \cos 6x = -1$; 2) $2\cos \frac{x}{2} + 3\cos 3x = 5$;

3) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$; 4) $\sin 5x \sin 7x = 1$.



Упражнения для повторения

492. Найдите амплитуду, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой:

$$1) x = 3 \cos \left(4t + \frac{\pi}{6} \right); \quad 2) x = \frac{2}{3} \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{3} \right); \quad 3) x = 1,5 \cos \left(\frac{t}{2} + 1 \right);$$

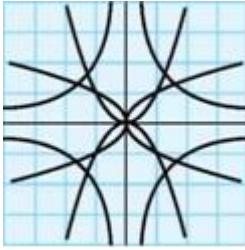
$$4) x = 3 \cos 4t; \quad 5) x = \cos (2t + 1).$$

493. Точка выполняет гармоническое колебание по закону $x = 3 \cos \left(2t - \frac{\pi}{3} \right)$.

- 1) Найдите амплитуду, период и начальную фазу этого колебания.
- 2) Укажите, какие преобразования следует выполнить над косинусоидой $y = \cos t$, чтобы получить график данного колебания.
- 3) Постройте схематично график гармонического колебания.

494. Напишите уравнение гармонического колебания, если амплитуда равна 1,5, период 0,04 с, начальная фаза $-\frac{\pi}{6}$.

§ 30. Частные методы решения тригонометрических уравнений



Кроме общих методов решения, которые рассмотрены в предыдущих параграфах, достаточно часто используются методы, характерные именно для тригонометрических уравнений. Эти частные методы и являются предметом рассмотрения в данном параграфе.



При решении тригонометрических уравнений могут пригодиться три шуточных совета:

- 1) если увидел сумму, то преобразуй её в произведение (речь идет о преобразовании сумм и разностей синусов, косинусов, тангенсов в произведение);
- 2) если увидел произведение, то преобразуй его в сумму (речь идет о формулах преобразования произведения синусов, косинусов, синуса и косинуса двух аргументов в сумму);
- 3) если увидел квадрат (или любую чётную степень), понижай степень (речь идет о формулах $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$).

Часто применению метода разложения на множители предшествует применение формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Пример 1. Решить уравнение: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

□ Поскольку $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cdot \cos x$, то уравнение можно записать в виде $2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0$. Вынося множитель $\cos 2x$ за скобки, имеем:

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = 0.$$

Осталось решить уравнения $\cos 2x = 0$ и $2\cos x + 1 = 0$. Корнями первого из них являются числа $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$, корнями второго — числа $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$. Обратите внимание на то, что оба множителя, в произведение которых разложена левая часть данного уравнения, определены на всей координатной прямой. ■

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение: $\cos 7x \cos 3x = \cos 4x$.

□ Применив формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, будем иметь:

$$\frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 4x) = \cos 4x.$$

Отсюда

$$\cos 10x - \cos 4x = 0,$$

Далее, воспользовавшись формулой разности косинусов, получим:

$$-2\sin 7x \sin 3x = 0; \sin 7x = 0; 7x = \pi n; x = \frac{\pi n}{7}; \sin 3x = 0; 3x = \pi n;$$

$$x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi n}{7}; \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Обратим внимание на **метод понижения степени**.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x.$$

□ С помощью формул двойного аргумента

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

заменим квадраты синуса и косинуса на линейные функции от синуса и косинуса двойного аргумента, а именно: $\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2}$, или

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + 1 = 0$. Используя формулы суммы косинусов и формулу

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \text{имеем:} \quad 2 \cos 3x \cos x + 2 \cos^2 3x = 0,$$

$\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0$, или $2 \cos 3x \cos 2x \cos x = 0$. Отсюда

$$\cos 3x = 0, 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$



Применением **формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение** можно решать уравнения следующих видов:

$$\sin(ax + \alpha) = \sin(bx + \beta), \cos(ax + \alpha) = \cos(bx + \beta), \sin(ax + \alpha) = \cos(bx + \beta).$$

Для решения уравнений отмеченных видов можно воспользоваться условиями равенства синусов или косинусов двух аргументов, которые можно получить так же, как и условие равенства тангенсов двух аргументов в примере 14 § 22.

Пример 4. Найти точки пересечения графика функции $y = \cos 3x + \sin 5x$ с осью абсцисс.

□ Задача сводится к решению уравнения $\cos 3x + \sin 5x = 0$. Имеем:

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Этим самым определены абсциссы точек пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Понятно, что ординаты равны нулю. ■

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k; 0\right), \left(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}; 0\right), k \in \mathbb{Z}.$$

В примерах 1 - 4 применение формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, произведения тригонометрических функций в сумму, формул понижения степени приводило к равносильным уравнениям. Не было потребности следить ни за появлением посторонних корней, ни за возможностью потерять корни. Ситуация меняется, когда уравнение содержит тангенс или котангенс, или является дробно-рациональным. Здесь может расширяться область определения уравнения и придется проверять, все ли найденные числа ему удовлетворяют.

Пример 5. Решить уравнение: $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x$.

□ Преобразовав левую часть по формуле разности тангенсов, получим

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 4 \sin x.$$

Отсюда, применяя формулу синуса двойного аргумента, сокращая дробь на $\cos x$ и приводя к общему знаменателю, будем иметь:

$$\frac{2 \sin x \cos x}{\cos 3x \cos x} - 4 \sin x = 0, \quad \begin{cases} \frac{\sin x - 2 \sin x \cos 3x}{\cos 3x} = 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\sin x(1 - 2 \cos 3x)}{\cos 3x} = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}.$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем:
$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos 3x \neq 0, \text{ и} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 3x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$
 Корнями первых уравнений этих систем являются соответственно

числа:

$$x = \pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Проверим, удовлетворяют ли найденные значения x остальным условиям систем:

$\cos \pi n$ и $\cos 3\pi n$ равны 1 или -1 и не равняются 0;

числа $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$ при разных значениях n могут равняться числам $\pm \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$, или отличаться от них на числа, кратные 2π ; ни при одном из них $\cos x \neq 0$. ■

Ответ: $\pi n, \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим решение тригонометрических уравнений с помощью **введения вспомогательного угла**. Этим методом обычно решаются уравнения вида $a \cos x + b \sin x = c$ ($a, b, c \neq 0$). В основе этого метода лежит следующее преобразование тригонометрического выражения:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right),$$

которое получено делением и умножением левой части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Поскольку $\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1; \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1; \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, то точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ лежит на тригонометрической окружности.

Пусть φ — какое-то из чисел, которому соответствует эта точка. Тогда $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и данное выражение запишется так:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Пример 6. Решить уравнение: $3 \cos x - 4 \sin x = \frac{5}{2}$.

□ Тут $a = 3, b = 4$. Поскольку $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то уравнение можно представить в виде $5 \left(\frac{3}{5} \cos x - \frac{4}{5} \sin x \right) = \frac{5}{2}$, или $\cos(x + \varphi) = \frac{1}{2}$, где φ удовлетворяет

условиям $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{3}{5}, \\ \sin \varphi = \frac{4}{5}. \end{cases}$ Отсюда видно, что φ — угол первой четверти **и**, следова-

тельно, можно считать, что $\varphi = \arccos \frac{3}{5}$. Тогда

$$x + \varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, x = -\arccos \frac{3}{5} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \blacksquare$$

Ответ: $-\arccos \frac{3}{5} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.



Кроме методов введения вспомогательного угла, универсальной подстановки (см. § 22), существуют и другие способы решения уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ ($a, b, c \neq 0$). Например, возведением обеих частей уравнения в квадрат с последующей проверкой.

Рассмотрим еще один метод, который основывается на сведении к однородному уравнению.

Применяя формулы $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, $\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$, приведём уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ ($a, b, c \neq 0$) к виду:

$$(b+c)\sin^2 \frac{x}{2} - 2a\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - (b-c)\cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Получили однородное относительно $\cos \frac{x}{2}$ и $\sin \frac{x}{2}$ тригонометрическое уравнение второй степени. Решим изложенным методом пример 6.

□ Представим уравнение $3\cos x - 4\sin x = \frac{5}{2}$ в виде:

$$3\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) - 8\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2,5\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

После приведения подобных членов будем иметь:

$$5,5\sin^2 \frac{x}{2} + 8\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 0,5\cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Получили однородное относительно $\cos \frac{x}{2}$ и $\sin \frac{x}{2}$ тригонометрическое уравнение второй степени. Разделим обе части на $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$:

$$11\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 16\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Решениями этого уравнения являются числа:

$$x = 2\operatorname{arctg} \frac{-8 \pm 5\sqrt{3}}{11} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \blacksquare$$

Рекомендуем самостоятельно убедиться в том, что оба применённых метода привели к одному и тому же результату.

Довольно часто в физике и технике применяется задача **сложения гармонических колебаний**. В механике, например, при расчетах действия на точку нескольких сил, каждая из которых совершает гармонические колебания; в электротехнике — при присоединении к электрической сети нескольких генераторов переменного тока. Сумма двух гармонических колебаний описывает, вообще говоря, достаточно сложные колебательные движения. Однако при сложении двух гармонических колебаний **одинаковой частоты** получаем опять гармоническое колебание с той же частотой. Для доказательства этого

утверждения понадобится введение вспомогательного угла.

В § 21 отмечалось, что когда некоторая точка движется равномерно по окружности, то ее проекции на координатные оси x и y выполняют колебательные движения вдоль диаметров этой окружности (соответственно горизонтального и вертикального). В частности, если точка движется по единичной окружности с единичной угловой скоростью и начинает свое движение из точки P_0 , то законы движения ее проекций на оси x и y имеют, соответственно, вид

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Гармоническое колебание $y = A \sin(\omega t + \alpha)$ описывает закон движения проекции на ось ординат точки, которая движется с угловой скоростью ω по окружности радиуса $|A|$ и начинает свое движение из точки, которая удалена по окружности от правого конца горизонтального диаметра на расстояние α .

Напомним, что A называется *амплитудой*, ω — *частотой*, α — *начальной фазой колебания*.

Т е о р е м а. При сложении двух гармонических колебаний с одной и той же частотой возникает гармоническое колебание, имеющее такую же частоту.

□ Докажем это, то есть покажем, что суммой двух функций

$$y = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \text{ и } y = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

является функция вида $y = A \sin(\omega t + \alpha)$.

Имеем

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) &= A_1 (\sin \omega t \cos \alpha_1 + \cos \omega t \sin \alpha_1) + \\ &+ A_2 (\sin \omega t \cos \alpha_2 + \cos \omega t \sin \alpha_2) = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + \\ &+ (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Обозначив коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ соответственно через a и b , получим

$$A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

Разделим и умножим правую часть последнего равенства на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega t \right).$$

Обозначим $\sqrt{a^2 + b^2}$ буквой A и введём вспомогательный угол α с помощью соотношений

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда

$$A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = A(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha) = A \sin(\omega t + \alpha),$$

что и требовалось доказать. ■

Фактически доказано, что функцию $y = a \sin x + b \cos x$ можно записать в виде $A \sin(x + \alpha)$, где угол α определяется из условий

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 7. Привести к виду $A \sin(\omega t + \alpha)$ выражение $-5 \sin 4t + 12 \cos 4t$.

□ Здесь $a = -5$, $b = 12$, $\omega = 4$. Имеем:

$$\begin{aligned} -5 \sin 4t + 12 \cos 4t &= \sqrt{5^2 + 12^2} \left(\frac{-5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \sin 4t + \frac{12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \cos 4t \right) = \\ &= 13 \left(\sin 4t \cdot \left(-\frac{5}{13} \right) + \cos 4t \cdot \frac{12}{13} \right) = 13 \sin(4t + \alpha), \text{ где } \alpha \text{ определяется из условий:} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \sin \alpha = \frac{12}{13}. \blacksquare$$

$$\text{Ответ: } 13 \sin(4t + \alpha), \text{ где } \cos \alpha = -\frac{5}{13}, \sin \alpha = \frac{12}{13}.$$

Пример 8. Найти сумму гармонических колебаний $y_1 = 10 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$,

$y_2 = 6 \sin\left(2t - \frac{4\pi}{3}\right)$, определить её амплитуду и начальную фазу.

□ Здесь $A_1 = 10$; $A_2 = 6$; $\omega = 2$; $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$; $\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}$;

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= \left(10 \cos \frac{\pi}{3} + 6 \cos \frac{4\pi}{3} \right) \sin 2t + \left(10 \sin \frac{\pi}{3} + 6 \sin \frac{4\pi}{3} \right) \cos 2t = \\ &= \left(10 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \sin 2t + \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \cos 2t = 2 \sin 2t + 2\sqrt{3} \cos 2t = \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2t \right) = 4 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 4 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right); 4; \frac{\pi}{3}.$$

Если складываются гармонические колебания, имеющие разные частоты, возникают более сложные функции. Рассмотрим частный случай, а именно сложение колебаний $x_1 = A \cos \omega_1 t$ и $x_2 = A \cos \omega_2 t$ с одинаковыми амплитудами и начальными фазами, но с разной частотой.

Применяя формулу суммы косинусов, имеем

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = 2A \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Если частоты ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга, то множитель $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ изменя-

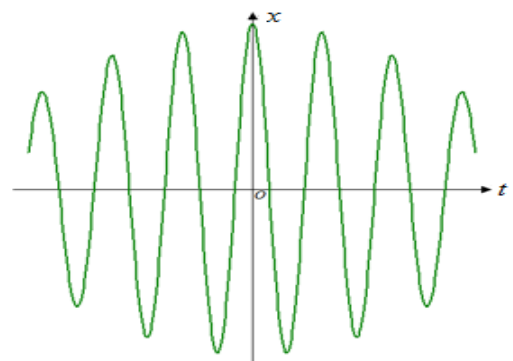


Рис. 336

ется очень медленно, а множитель $\cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ имеет почти ту же частоту, что и складываемые колебания. Полученное колебание называется **биением** (рис. 336). В этом колебании амплитуда периодически меняется. Колебания с амплитудой, которая меняется периодически, часто применяют в радиотехнике.

В XVIII веке швейцарский математик Д. Бернулли (1700 - 1782) предложил произвольное колебание изображать в виде суммы бесконечного множества гармонических колебаний. Математическим языком это означает, что произвольная функция $y = f(x)$ является суммой бесконечной суммы функций вида $C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$.

Из проблемы изображения функций в виде сумм гармонических колебаний возник важный раздел современной математики — **гармонический анализ функций**.



Контрольные вопросы

1. ° Приводят ли формулы понижения степени к равносильному уравнению?
2. ° При каком условии уравнение $a \cos x + b \sin x = c$ ($a, b, c \neq 0$) имеет решения?
3. ° Имеет ли решения уравнение $5 \sin x - 7 \cos x = 9$?
4. При каких значениях a уравнение $a \cos x + 3 \sin x = 4$ имеет решения?
5. Приводит ли введение вспомогательного угла к равносильному уравнению?
6. * Можно ли решения уравнения $a \cos x + b \sin x = c$ ($a, b, c \neq 0$) записать в виде:

$$x = \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2k\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} ?$$

7. Чему равны амплитуда, круговая частота, наименьший положительный период колебания $y = 3 \sin 4t + 4 \cos 4t$?
8. Какое наибольшее значение принимает функция $y = 3 \sin 4t + 4 \cos 4t$?
9. Можно ли введением вспомогательного угла записать функцию $y = 2 \sin x + 3 \cos 2x$ в виде $y = A \sin(x + \alpha)$?
10. Можно ли выразить через амплитуды и начальные фазы двух колебаний с одинаковой частотой: а) амплитуду их суммы; б) начальную фазу их суммы?

Задачи

495. Решите уравнение:

- 1) ° $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$; 2) ° $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$;
- 3) ° $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$; 4) ° $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$;
- 5) $\sin 3x = \cos 2x$; 6) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 7) * $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$;

8) * $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$; 7) * $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} x$; 9) * $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

496°. Решите уравнение:

- 1) $\cos 2x \sin 4x = \cos x \sin 5x$; 2) $\sin 2x \cos 4x = \cos 9x \sin 7x$;
 3) $\cos 7x \cos 10x = \cos 2x \cos 15x$; 4) $\cos 6x \cos 3x - \cos 7x \cos 4x = 0$;
 5) $\sin 5x \sin 3x + \cos 7x \cos x = 0$.

497. Решите уравнение:

- 1) ° $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$; 2) ° $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;
 3) $\cos^4 \frac{3}{2}x - \sin^4 \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$; 4) ° $\sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 6x + \sin^2 7x = 2$.
 6) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$;

498. Решите уравнение:

- 1) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$; 2) $4 \sin x + 3 \cos x = 2$; 3) $\sin 3x + 2 \cos 3x = 1$;
 4) $2 - \sin \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{x}{2}$; 5) $2 \sin x - 9 \cos x = 7$; 6) $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$.

499. Решите уравнение:

- 1) $1 - \sin 2x = \sin(45^\circ - x)$; 2) $(\sin x + \cos x)^2 = \operatorname{tg}(45^\circ + x)$;
 3) $\cos 2x + \operatorname{tg} x = 1$; 4) $\sin x \sin 3x = 0,5$; 5) * $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$.

500. Укажите все нули функции:

- 1) $y = \sin 3x - \cos 5x$; 2) $y = \cos 4x + 2 \cos^2 x - 3$.

501. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие приведенному условию::

- 1) $\sin t - \sin^2 t = \cos^2 t - \cos t$, $\sin \frac{t}{2} < 0$; 2) $\sin x + \cos x = \cos 2x$, $\sin \frac{x}{2} < 0$.

502. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения:

- 1) $\sin x + \cos x = \sin 2x$; 2) $\sin x - \cos x = \cos 2x$.

503. Найдите точки пересечения с осью абсцисс графика функции:

- 1) $y = \sqrt{1 - 4 \sin x} - \sqrt{1 - 4 \cos 2x}$; 2) $y = 1 + \cos x + \cos 2x$.

504. Найдите точки пересечения графиков функций:

- 1) $y = \cos^2 x$ и $y = 2 - 3 \cos^2 \frac{x}{2}$; 2) $y = \sin 2x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

505. Найдите решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

- 1) $\sin \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$, $(-10; 10)$; 2) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$, $[-\pi; \pi]$;
 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

506. Докажите, что не имеет решений уравнение:

$$1) 2\sin x - 8\cos x = \frac{1}{\cos x};$$

$$2) * (\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2.$$

507. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}, \\ x + y = 150^\circ; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = 2, \\ x + y = \frac{2\pi}{3}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \sin(x - y) = \frac{1}{2}, \\ \cos(x + y) = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad 4)$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

508. В квадрат вписан другой квадрат. Один из острых углов между сторонами квадратов равняется α . При каком значении угла α площадь вписанного квадрата составляет $\frac{2}{3}$ площади данного квадрата?

509. Равнобедренный треугольник вписан в прямоугольник так, что они имеют общее основание, а вершина треугольника совпадает с серединой стороны прямоугольника, параллельной основанию. Отношение их периметров равняется 0,8. Найдите угол при основании треугольника.

510*. Найдите углы ромба, если отношение его периметра к сумме диагоналей равняется 1,5.

511*. Найдите углы прямоугольного треугольника, если отношение его периметра к радиусу вписанной окружности равняется 12.

512. Приведите к виду $A\sin(\omega t + \alpha)$ выражение:

$$1) 5\sin 3t - 12\cos 3t; \quad 2) 7\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 24\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3) 11\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 60\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right); \quad 4) 4\sin\left(3t + \frac{\pi}{12}\right) + 3\cos\left(3t + \frac{\pi}{12}\right).$$

513. При каких значениях a имеет решения уравнение:

$$1) 7\cos\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} = a; \quad 2) 3\sin\left(4x - \frac{5\pi}{13}\right) - a\cos\left(\frac{5\pi}{13}\right) = 4?$$

514. Постройте график функции:

$$1) y = \sin x + \sqrt{3}\cos x; \quad 2) y = \sin x - \cos x; \quad 3) y = \sqrt{3}\sin x - \cos x.$$

515. Электрическая сеть питается двумя генераторами переменного тока. Сила тока первого генератора изменяется в зависимости от времени по закону

$I_1 = 3\sin \omega t$, сила тока второго генератора — по закону $I_2 = 5\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$.

Найдите, по какому закону изменяется в зависимости от времени сила тока в сети, а также какова наибольшая сила тока в сети.

516. Через проводник одновременно проходят два переменных тока: $I_1 = A\sin(\omega t + \varphi_1)$ и $I_2 = A\sin(\omega t + \varphi_2)$. Какой должна быть разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ этих токов, чтобы сила тока в этом проводнике равнялась нулю?

517. Электрический генератор производит трехфазный ток:

$$I_1 = I_0 \sin(\omega t + \varphi), I_2 = I_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{2}{3}\pi\right), I_3 = I_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{4}{3}\pi\right).$$

Докажите, что $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ в любой момент времени t .

518. По данным гармоническим колебаниям найдите амплитуду и начальную фазу их суммы:

$$1) y_1 = 5\sin 2t; y_2 = 12\cos 2t; \quad 2) y_1 = 2\sin \frac{t}{2}; y_2 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3) y_1 = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right); y_2 = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right); \quad 4) y_1 = 7\sin 5t; y_2 = 24\cos 5t.$$

519. Даны уравнения двух гармонических колебаний: $y_1 = 1,5\sin t$ и $y_2 = 2\cos t$.

- 1) Постройте на одном рисунке графики этих колебаний.
- 2) Выполняя геометрическое сложение ординат соответствующих точек полученных графиков, постройте график колебания $y = y_1 + y_2$.
- 3) По графику определите амплитуду, период и начальную фазу колебания y и составьте его уравнение.
- 4) Найдите аналитически сумму данных гармонических колебаний и сравните результат с полученным по графику.



Упражнения для повторения

520. Найдите функцию, обратную данной. Укажите ее область определения и множество значений. Постройте на одном рисунке графики этих функций.

$$1) {}^0 y = 2x - 3; \quad 2) {}^0 v = 0,5u - 1; \quad 3) {}^0 z = \sqrt{t+1}; \quad 4) {}^0 y = -\frac{1}{x};$$

$$5) {}^0 y = x^2, x \in [0; \infty); \quad 6) y = x^2, -1 \leq x \leq 0; \quad 7) y = \frac{x+2}{x+1}.$$

521. Найдите функцию, обратную данной:

$$1) y = 0,1x + 4; \quad 2) v = u^3 + 5; \quad 3) z = \sqrt{t}; \quad 4) y = \frac{1}{x};$$

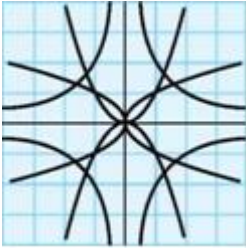
$$5) y = \frac{x}{x-1}; \quad 6) y = \frac{t+1}{3t-2}; \quad 7) u = \sqrt{x+3}.$$

522. Найдите зависимость:

- 1) объема V куба от длины его ребра a ;

2) длины ребра a куба от его объема V .

Постройте графики этих зависимостей на одном рисунке.



§ 31. Обратные тригонометрические функции

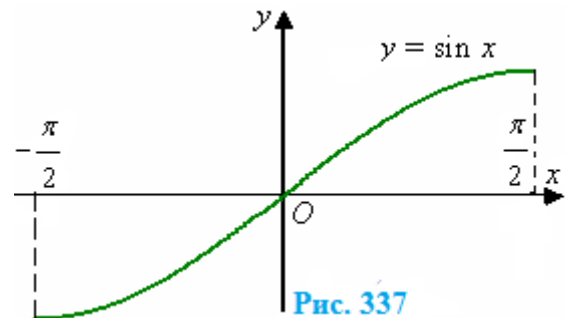
В §§ 25-26 были описаны правила, которые каждому числу a из отрезка $[-1; 1]$ ставили в соответствие числа $\arcsin a$, $\arccos a$, и каждому вещественному числу a — $\arctg a$,

$\operatorname{arctg} a$. Тем самым были определены **обратные тригонометрические функции**. Настоящий параграф посвящен исследованию этих функций.



Выясним, существуют ли обратные функции для тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Поскольку ку любое своё значение они принимают бесконечно много раз, то, понятно, что они не имеют обратных. Сравним этот факт с рассмотренным ранее в §7. Функция $y = x^2$ каждое своё значение $y_0 > 0$ принимает при двух значениях x : $x_1 = \sqrt{y_0}$; $x_2 = -\sqrt{y_0}$, поэтому она не имеет обратной, но функция $y = x^2$, $x \geq 0$ имеет обратную. Как получили последнюю функцию из предыдущей? Ограничили область определения функции $y = x^2$ так, что полученная функция стала монотонной и поэтому такой, для которой существует обратная. Попробуем так же поступить и с функцией $y = \sin x$.

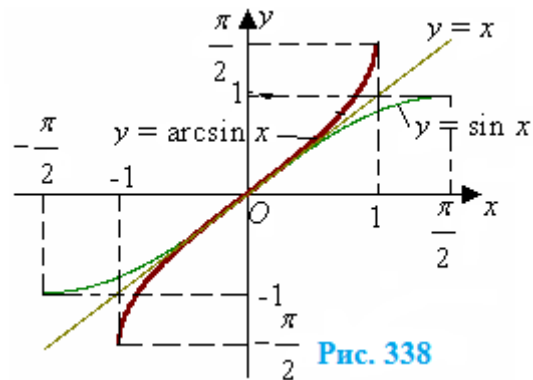
Анализируя её график, нетрудно заметить, что, например, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ она возрастает, поэтому каждое



свое значение принимает лишь в одной точке этого промежутка (рис. 337). Следовательно, функция $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную. Найдем её. Для этого необходимо решить урав-

нение $y = \sin x$ относительно x на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Решением этого уравнения

для $y \in [-1; 1]$ является $x = \arcsin y$: ведь арксинусом числа $y \in [-1; 1]$ мы называли такое число x , что: 1) $\sin x = y$ и 2) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Осталось поменять ролями x и y , тогда функция $y = \arcsin x$ является об-



ратной для функции $y = \sin x$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$, что показано на рис. 338.

Анализируя график функции $y = \arcsin x$, можно установить, что:

- 1) областью определения этой функции является отрезок $[-1; 1]$;
- 2) она имеет один нуль $x = 0$;
- 3) функция $y = \arcsin x$ является нечётной: ее график симметричен относительно начала координат;
- 4) она принимает положительные значения на промежутке $(0; 1]$, а отрицательные на промежутке $[-1; 0)$;
- 5) функция $y = \arcsin x$ возрастает;
- 6) множеством ее значений является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 7) функция $y = \arcsin x$ непрерывна.

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции.

Анализируя график функции $y = \cos x$, нетрудно заметить, что на промежутке $[0; \pi]$ она убывает, поэтому каждое своё значение принимает лишь в одной точке этого промежутка (рис. 339). Следовательно, функция $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ имеет обратную. Найдем ее. Для этого необходимо решить относительно x на промежутке $[0; \pi]$ уравнение $y = \cos x$. Решением этого уравнения для $y \in [-1; 1]$ является $x = \arccos y$: ведь арккосинусом числа $y \in [-1; 1]$ мы называли такое число x , что: 1) $\cos x = y$; 2) $0 \leq x \leq \pi$. Осталось поменять ролями x и y , тогда функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

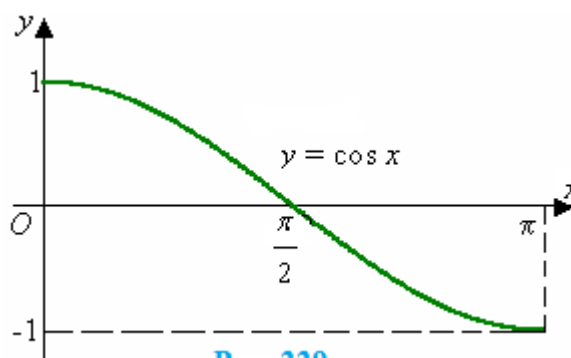


Рис. 339

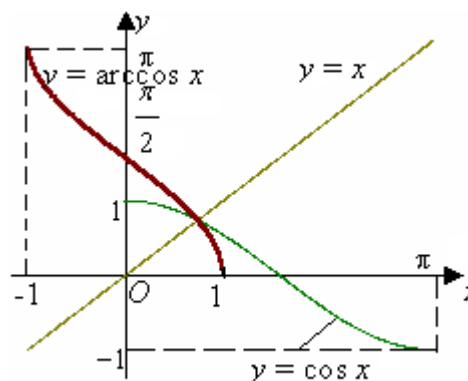


Рис. 340

График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ относительно прямой $y = x$. Они вместе изображены на рис. 340.

Анализируя график функции $y = \arccos x$, можно заметить, что:

- 1) областью определения этой функции является отрезок $[-1; 1]$;
- 2) она имеет один нуль $x = 1$;
- 3) функция $y = \arccos x$ не является ни чётной, ни нечётной;
- 4) она принимает положительные значения на промежутке $[-1; 1)$;

5) функция $y = \arccos x$ убывающая;

6) множеством ее значений является отрезок $[0; \pi]$;

7) функция $y = \arccos x$ непрерывна.

Анализируя график функции $y = \operatorname{tg} x$, нетрудно заметить, что на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ она возрастает, потому

каждое своё значение принимает лишь в одной точке этого промежутка (рис. 341). Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$,

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет обратную. Найдем ее. Для этого необходимо решить относительно x на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

уравнение $y = \operatorname{tg} x$. Решением этого уравнения для $y \in \mathbf{R}$ является

$x = \operatorname{arctg} y$: ведь арктангенсом числа $y \in \mathbf{R}$ мы называли такое число x , что: 1) $\operatorname{tg} x = y$; 2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Осталось поменять

ролями x и y . Следовательно, функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$. Они изображены вместе на рис. 342. Анализируя график функции $y = \operatorname{arctg} x$, можно установить, что:

1) областью определения этой функции является множество всех вещественных чисел;

2) она имеет один нуль $x = 0$;

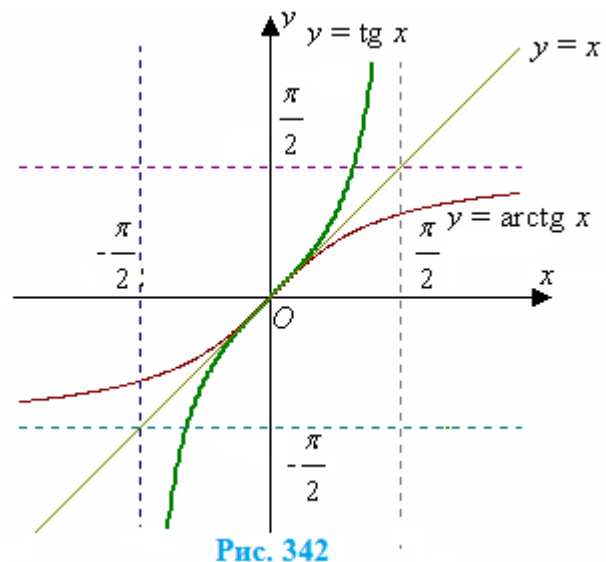
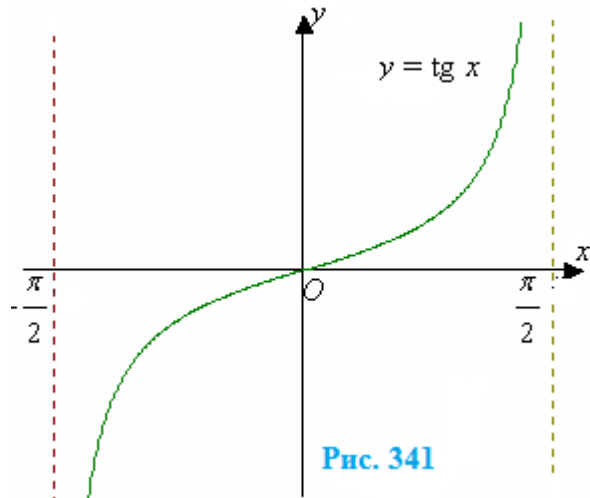
3) функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечётной: ее график симметричен относительно начала координат;

4) она принимает положительные значения на промежутке $(0; +\infty)$, а отрицательные на промежутке $(-\infty; 0)$;

5) функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает;

6) множеством ее значений является промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

7) функция $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывна;



8) прямые $y = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$ являются её горизонтальными асимптотами.

Анализируя график функции $y = \operatorname{ctg} x$, нетрудно заметить, что, например, на промежутке $(0; \pi)$ она убывает, поэтому каждое своё значение принимает лишь в одной точке этого промежутка (рис. 343). Следовательно, функция $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$ имеет обратную. Найдём её. Для этого необходимо решить относительно x на промежутке $(0; \pi)$ уравнение $y = \operatorname{ctg} x$. Решением этого уравнения для $y \in \mathbf{R}$ является $x = \operatorname{arccctg} y$: ведь арккотангенсом числа $y \in \mathbf{R}$ мы назвали такое число x , что: 1) $\operatorname{ctg} x = y$; 2) $0 < x < \pi$. Осталось поменять ролями x и y . Следовательно, функция $y = \operatorname{arccctg} x$ является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$.

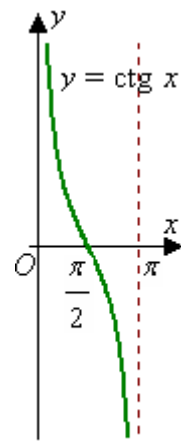


Рис. 343

График функции $y = \operatorname{arccctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$ относительно прямой $y = x$. Они изображены вместе на рис. 344.

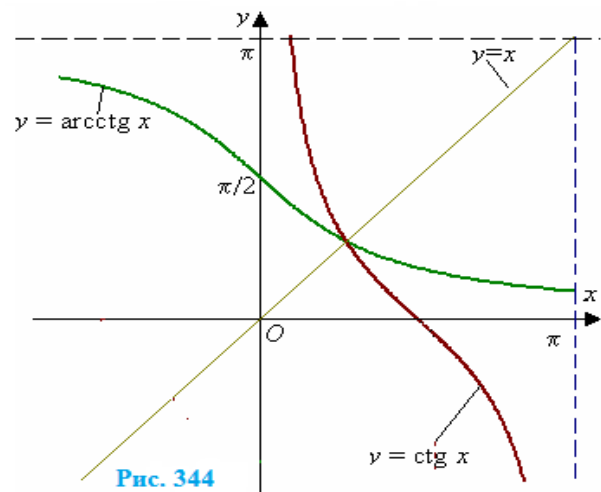


Рис. 344

Анализируя график функции $y = \operatorname{arccctg} x$, можно установить, что:

- 1) областью определения этой функции является множество всех вещественных чисел;
- 2) она не имеет нулей;
- 3) функция $y = \operatorname{arccctg} x$ не является ни чётной, ни нечётной;
- 4) она принимает положительные значения в области определения;
- 5) функция $y = \operatorname{arccctg} x$ убывает;
- 6) множеством ее значений является промежуток $(0; \pi)$;
- 7) функция $y = \operatorname{arccctg} x$ непрерывна;
- 8) прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются её горизонтальными асимптотами.

Пример 1. Построить график функции $y = \operatorname{arctg} (x + 1)$. Найти его точки пересечения с осями координат.

□ График функции $y = \operatorname{arctg} (x + 1)$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ параллельным переносом вдоль оси абсцисс на 1 единицу в отрицательном направлении этой оси (рис. 345). Чтобы найти координаты точки его пересечения с осью ординат, вы-

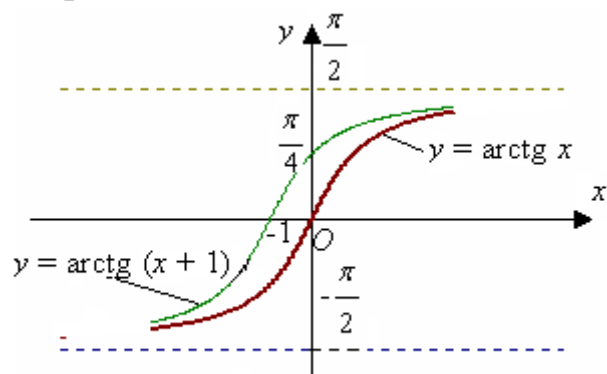


Рис. 345

числим значение функции $y = \operatorname{arctg}(x + 1)$ при $x = 0$: $y(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Для нахождения координат точки его пересечения с осью абсцисс, решим уравнение $\operatorname{arctg}(x + 1) = 0$. Оно имеет корни лишь тогда, когда $x + 1 = 0$, следовательно, $x = -1$. Таким образом, график данной функции пересекает оси координат в точках с координатами $(-1; 0), \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. ■

Ответ: $(-1; 0), \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Пример 2. Решить уравнение $\arcsin x = \frac{1}{2}$.

□ По определению, $\arcsin x$ — это число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x . Поскольку $\frac{1}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то данное уравнение имеет решение, следовательно, $x = \sin \frac{1}{2} \approx 0,479$. ■

Ответ: $\approx 0,479$.



Обоснуем некоторые свойства обратных тригонометрических функций, вытекающие из общих свойств взаимно обратных функций, и которые раньше мы получили, анализируя графики этих функций. Эти обоснования проиллюстрируем на примере функции $y = \arcsin x$.

Непрерывность функции $y = \arcsin x$ вытекает из того, что непрерывной является функция $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: их графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Поскольку возрастающей является функция $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то возрастающей является и обратная ей функция (см. свойство 1 в § 7).

Нечётность функции $y = \arcsin x$ вытекает из симметричности области определения относительно нуля и соотношения $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Рекомендуем самостоятельно обосновать перечисленные свойства для других обратных тригонометрических функций.

Пример 3. Найти функцию, обратную функции $y = \arcsin 2x$.

□ Будем действовать по ранее приведенному алгоритму.

Функция $y = \arcsin 2x$ является возрастающей и поэтому имеет обратную. Решим уравнение $y = \arcsin 2x$ относительно x . Согласно определению аркси-

нуса, $2x = \sin y$, $x = \frac{1}{2} \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поменяв местами x и y , получим:

$$y = \frac{1}{2} \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \blacksquare$$

Ответ: $y = \frac{1}{2} \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 4. Выяснить, имеет ли обратную функция $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$,

и если имеет, то найти её.

□ На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает и поэтому функция $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ имеет обратную.

Найдём её. Для этого необходимо решить относительно x на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ уравнение $y = \sin x$. Решением

этого уравнения для $y \in [-1; 1]$ является число $x = \pi - \arcsin y$

(см. § 23). Поменяв местами x и y , получим функцию $y = \pi - \arcsin x$, обратную функции $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Графики этих взаимно обратных функций изображены на рис. 346. ■

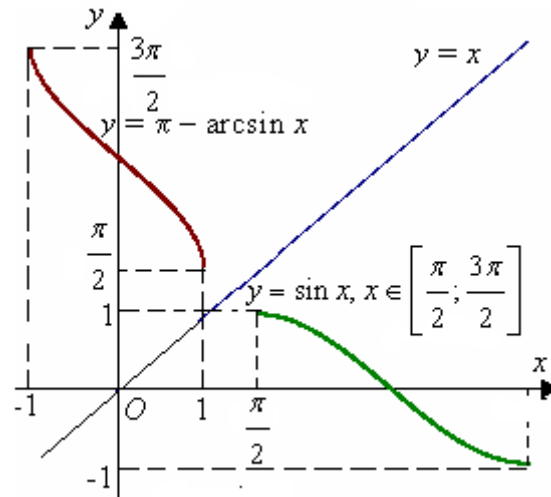


Рис. 346

Ответ: $y = \pi - \arcsin x$.

Приклад 5. Найти значение выражения $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$.

□ Необходимо найти тангенс числа $\arcsin \frac{1}{3} = \alpha$. По определению арксинуса, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Но поскольку синус числа α положителен, то $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому, используя соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, будем иметь:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{косинус в первой четверти положителен}).$$

Отсюда находим: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Таким образом,
 $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. ■

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.



Часто встречаются задачи на вычисления, связанные с арксинусом, арккосинусом и др. Для их решения достаточно владеть приведенными определениями и известными тригонометрическими формулами.

Пример 6. Найти значение выражения $\arcsin(\sin 2)$.

□ Обратите внимание на то, что соотношение $\arcsin(\sin x) = x$ справедливо лишь для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку число 2 не принадлежит указанному отрезку, то ответ 2 ошибочен. Для решения примера следует $\sin 2$ заменить равным ему синусом другого числа x , которое бы принадлежало отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Согласно формулам приведения имеем: $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$, $\pi - 2 \approx 1,14 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому

$$\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2. \quad \blacksquare$$

Ответ: $\pi - 2$.

Пример 7. Доказать, что для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

□ Обозначим $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arccos x$. Тогда справедливы соотношения $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $\sin \alpha = x$, $\cos \beta = x$. Из первого и третьего из этих соотношений вытекает, что $0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = x$, то есть $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x = \beta$. Отсюда $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. ■

При решении уравнения, содержащего обратные тригонометрические функции, как правило, переходят к тригонометрическим уравнениям.

При доказательстве тождеств, содержащих обратные тригонометрические функции, следует доказать, что:

1) значения какой-то тригонометрической функции от обеих частей равенства равняются друг другу;

2) значения выражений, которые стоят в обеих частях равенства, принадлежат одному и тому же промежутку монотонности этой тригонометрической функции.

Обратные тригонометрические функции по сравнению с тригонометрическими функциями имеют несколько меньшие приложения для математического моделирования реальных процессов и явлений. Однако, они используются при интегрировании рациональных и иррациональных функций, в теории вероятностей для описания предельного поведения некоторых случайных процессов и т. п.



Контрольные вопросы

1. ° Имеет ли обратную функция: а) $y = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
 б) $y = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $y = \cos x, x \in [\pi; 2\pi]$; г) $y = \cos x, x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;
 д) $y = \operatorname{tg} x, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; е) $y = \operatorname{tg} x, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; ж) $y = \operatorname{ctg} x, x \in (\pi; 2\pi)$;
 з) $y = \operatorname{ctg} x, x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?
2. ° Принимает ли функция $y = \operatorname{arccotg} x$ значения 0 и π ?
3. ° Какова область определения функции $y = \operatorname{arccotg} (x - 4)$?
4. Верно ли соотношение:
 а) $\arcsin (\sin 1,5) = 1,5$; б) $\arcsin (\sin (-1,2)) = -1,2$; в) $\arccos (\cos (-1)) = -1$;
 г) $\arccos (\cos 3) = 3$; д) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 2) = 2$; е) $\operatorname{arccotg} (\operatorname{ctg} 3,2) = 3,2$?
5. Какие из обратных тригонометрических функций имеют наибольшее и наименьшее значения? Чему они равняются?
6. Являются ли обратные тригонометрические функции периодическими?

Задачи

523. Найдите функцию (при условии её существования), обратную функции:

1) ° $y = \cos x - 1, x \in [0; \pi]$; 2) ° $y = \sin 2x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3)

$y = \cos x, x \in [-\pi; 0]$;

4) $y = \sin x, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $y = \operatorname{ctg} x, x \in (-$

$\pi, 0)$.

524. Вычислите:

1) ° $\arcsin \left(\sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) \right)$; 2) ° $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 1,5)$; 3) $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{5}{13} \right)$; 4) $\sin (\operatorname{arctg} 2)$.

525. Вычислите: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{8}{17} + \arccos\frac{15}{17}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$;
 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}\frac{6}{5} + \operatorname{arcctg}11$.

526⁰. Найдите область определения функции:

1) $y = \arcsin(x - 2)$; 2) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$; 3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2}$.

527. Исследуйте на чётность и нечётность функцию:

1) $y = \arcsin x + 2 \operatorname{arctg} x$; 2) $y = \arccos x + \operatorname{arctg} x$;

3) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$; 4) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - x \arcsin x$.

528. Не пользуясь вычислительными средствами, определите знак разности:

1) $\arccos 0,7 - \arccos 0,5$;

2) $\arccos(-0,6) - \arccos(-0,75)$;

3) $\arcsin(\sqrt{2}-1) - \arcsin(\sqrt{5}-2)$; 4) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) - \arccos\left(\sin\frac{\pi}{13}\right)$.

529. Не выполняя вычислений, найдите знак выражения:

1) $\frac{\arcsin 0,85 - \arcsin 0,8}{\arccos 0,85 - \arccos 0,8}$; 2) $\frac{\pi - 2 \arcsin 0,9}{\pi - 2 \arccos(-0,1)}$; 3) $\frac{\arcsin(-0,4) + \frac{\pi}{6}}{\arccos 0,6 - \frac{\pi}{3}}$.

530. Постройте график функции: 1) $y = \frac{1}{2} \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arctg}(x - 1)$;

3) $y = \arcsin x + 1$; 4) $y = \frac{1}{2} \arccos x - \frac{\pi}{4}$; 5) $y = 2 \operatorname{arctg} 2x$; 6) $y = \arcsin(2x + 4)$.

531*. Докажите равенство:

1) $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$; 2) $\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{9} + \operatorname{arcctg}\frac{4}{5} = \frac{3\pi}{4}$.

532*. Докажите, что для $x > 0$ справедливо тождество:

1) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; 2) $\operatorname{arctg} x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 3) $\operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

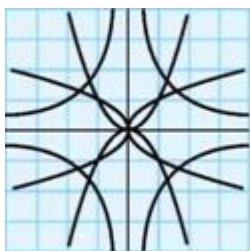
533*. Решите уравнение:

1) $\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arcctg} 3x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin x + \arccos(1-x) = \arcsin(-x)$;

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$; 4) $2 \arcsin x = \arccos 2x$.

534. Представьте x как функцию от y :

1) $y = \arcsin \frac{x}{4}$; 2) $y = 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$; 3) $y = 7 \arccos 2x$; 4) $y - 3 = 5 \arcsin x$.



Готовимся к тематическому оцениванию по теме “Тригонометрические уравнения и неравенства”

Задания для самоконтроля

1. Может ли не иметь решений уравнение: а) $\sin x = a$; б) $\cos x = a$?
2. Какие из чисел $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}$ являются решениями уравнения: а) $\operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{ctg} x = 0$?
3. Сколько решений на промежутке $[0; 7\pi]$ имеет уравнение:
а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?
4. В каких точках пересекается график функции $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ с прямой:
а) $x = 1,5\pi$; б) $y = -1$?
5. Найдите два промежутка, на каждом из которых имеет ровно два корня при $|a| < 1$ уравнение: а) $\sin x = a$; б) $\cos x = a$.
6. Какие из следующих значений $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -1, 0,5, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, 4$ не может принимать $\arccos a$?
7. Какие из следующих значений $-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, 3, 2; 3,5; \frac{5\pi}{6}, \pi$ не может принимать $\operatorname{arctg} a$?
8. Чему равняется: а) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$?
9. Можно ли утверждать, что: а) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$; б) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$;
в) $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$; г) $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \frac{6\pi}{5}$?
10. Существуют ли функция, обратная функции:
а) $y = \operatorname{ctg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$; в) $y = \operatorname{ctg} x, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{7\pi}{6}\right]$?

11. Равносильны ли уравнения: а) $\sin x = 0$ и $\sin 2x = 0$; б) $\sin x = 0$ и $\sqrt{\sin x} = 0$; в) $\sin x = 0$ и $\sin^2 x = 0$; г) $\sin x = \cos x$ и $\cos 2x = 0$; д) $\cos x = 0$ и $\cos x \sqrt{\sin x} = 0$; е) $\sin x = 4$ и $\sqrt{\sin x} = -2$; ж) $\frac{\sin x}{\cos x} = 0$ и $\sin x = 0$?

12. Какие из приведенных ниже уравнений однородны относительно какой-то степени $\sin x$ и $\cos x$: а) $\sin x + 3\cos x = 0$; б) $\sin x + \cos x = 1$;

в) $\sin^2 x + 2\cos x - 3\cos^2 x = 0$; г) $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$; д) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 0$; е) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x = 0$?

13. Имеет ли решения уравнение:

а) $\frac{\sin x}{\sin 2x} = 0$; б) $\frac{\cos x}{\cos 2x} = 0$; в) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; г) $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = 0$?

14. При каких значениях x выполняется равенство:

а) $\operatorname{arctg}(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3} - x) = \frac{5\pi}{6}$?

15. Какие из чисел $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}$ удо-

влетворяют неравенству: а) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x > -0,5$; в) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г)

$\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

16. Имеет ли решения неравенство: а) $\cos x < -1$; б) $\sin x \geq 1$; в) $\sin x > 1$?

17. Найдите все решения неравенства:

а) $\cos x \leq -1$; б) $\cos x \geq 1$; в) $\sin x \leq -1$; г) $\sin x \geq 1$.

18. Найдите все решения неравенства: а) $-1 \leq \sin x \leq 1$; б) $-1 < \cos x < 1$.

19. При каких значениях a все действительные числа удовлетворяют неравенству:

а) $\cos x > a$; б) $\cos x \geq a$; в) $\cos x < a$; г) $\cos x \leq a$?

20. При каких значениях x выполняется равенство:

а) $|\cos x| = \cos x$; б) $|\sin x + 1| = -\sin x - 1$; в) $|\cos x - 1| = \cos x - 1$; г) $|\sin x| = -\sin x$?

21. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{\sin 2x - 1}$?

22. Чему равняется амплитуда колебания $y = \sqrt{3} \sin 2t + \cos 2t$?

23. Чему равняются амплитуда, частота, начальная фаза суммы двух гармонических колебаний $y_1 = 2\sin 2t$; $y_2 = 2\cos 2t$?

24. Сколько полных оборотов за единицу времени выполняет точка, движущаяся по окружности, если закон движения её проекции на ось абсцисс описывается суммой двух гармонических колебаний: $x = 5\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ и

$x = 12\cos\left(6\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$?

25. Чему равняется наименьший положительный период функции:

а) $y = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 7\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 3\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{2\pi}{7}\right)$?

26. Как записать закон движения проекции на ось x точки, движущейся по окружности радиуса 2 с угловой скоростью 3 и начинающей своё движение из точки:

а) $(2; 0)$; б) $(\sqrt{3}; 1)$; в) $(0; 2)$?

Ответы к заданиям для самоконтроля

1. а) Да; б) да. 2. а) 0; π ; 2π ; 3π ; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$. 3. а) 8; б) 6; в) 7; г) 7. 4. а) $(1,5\pi; -1)$ б) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; -1\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; -1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. а) Например, $[0; 2\pi]$; $[2\pi; 4\pi]$; б) например, $[0; 2\pi]$; $[2\pi; 4\pi]$. 6. $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; -1 ; $\frac{7\pi}{6}$, 4. 7. $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; 3, 2; 3, 5; π . 8. а) $-\frac{1}{2}$; б) 0. 9. а) Нет; б) да; в) да; г) нет. 10. а) Нет; б) да; в) нет. 11. а) Нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) да; ж) да. 12. а), г), е). 13. а) Нет; б) да; в) да; г) нет. 14. а) 0,4; б) $2\sqrt{3}$. 15. а) $\frac{\pi}{7}$, $\frac{13\pi}{7}$; б) $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{10\pi}{7}$, $\frac{11\pi}{7}$, $\frac{12\pi}{7}$, $\frac{13\pi}{7}$; в) $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7}$, $\frac{9\pi}{7}$, $\frac{10\pi}{7}$, $\frac{11\pi}{7}$, $\frac{12\pi}{7}$; г) $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7}$. 16. а) Нет; б) да; в) нет. 17. а) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 18. а) $x \in \mathbb{R}$; б) $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n) \cup (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. 19. а) $a < -1$; б) $a \leq -1$; в) $a > 1$; г) $a \geq 1$. 20. а) $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$. 21. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 22. 2. 23. $2\sqrt{2}$; 2; $\frac{\pi}{4}$. 24. 3. 25. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 6π . 26. а) $x = 2\cos 3t$; б) $x = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $x = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Образец контрольной работы

1. Дано уравнение $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$.

а) ° Решите его.

б) ° Найдите его наименьший положительный корень.

- в) ° При каких значениях x функция $y = \sin 2x$ принимает значения, меньшие $\frac{1}{2}$?
- г) Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin 2x + 2\cos^2 x$ и $y = \sin x + \cos x$.
- д) * Решите уравнение $(\sin 2x + 2\cos^2 x)\sqrt{\sin x} = 0$.
2. Дано уравнение $\left(\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4}\right)^2 = 1$.
- а) ° Решите его.
- б) Найдите его решения, принадлежащие промежутку $[0; 4\pi]$.
- в) При каких значениях x график функции $y = \cos^2 \frac{x}{2} - 1$ проходит выше оси абсцисс?
- г) * При каких значениях a уравнение $\left(\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4}\right)^2 - 1 = a - 2$ не имеет решений?
3. Дано уравнение $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.
- а) ° Решите его.
- б) Найдите решения уравнения $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, удовлетворяющие условию $\operatorname{tg} x \leq 0$.
- в) * Решите уравнение $\sqrt{-4\sin^2 x - 4\sin x - 1} + 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Таблицы для систематизации материала раздела

Решение простейших тригонометрических уравнений

Таблица 51

Тип уравнения	Решение
$\sin x = a$	Если $ a > 1$, то уравнение не имеет решений. Если $ a \leq 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.
Частные случаи	
$\sin x = 0$	$x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$	Если $ a > 1$, то уравнение не имеет решений. Если $ a \leq 1$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
Частные случаи	
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

Смысл чисел $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$

Таблица 52

Число	Смысл
$x = \arcsin a$	1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin x = a$.
$x = \arccos a$	1) $0 \leq x \leq \pi$; 2) $\cos x = a$.
$x = \operatorname{arctg} a$	1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x = a$.
$x = \operatorname{arcctg} a$	1) $0 < x < \pi$; 2) $\operatorname{ctg} x = a$.

Методы решения тригонометрических уравнений

Таблица 53

Название метода	Особенности уравнения	Метод решения
Метод замены переменной	$\sin f(x) = 0, \cos f(x) = a, \operatorname{tg} f(x) = a, \operatorname{ctg} f(x) = a$.	Замена: $f(x) = t$
	$f(\sin(kx + b)) = 0, f(\cos(kx + b)) = 0, f(\operatorname{tg}(kx + b)) = 0$.	Замена: $\sin(kx + b) = t, \cos(kx + b) = t, \operatorname{tg}(kx + b) = t$.
	Уравнение, в которое $\sin x$ или $\cos x$ входит только в чётной степени	Воспользовавшись формулой $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ или $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, свести к уравнению, содержащему лишь $\cos x$ или лишь $\sin x$
	Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$	Сводятся к уравнению вида $P(\operatorname{tg} x)$ и решаются заменой $\operatorname{tg} x = t$.
	$F(\sin \alpha x \pm \cos \alpha x, \sin 2\alpha x) = 0$.	Замена: $\sin \alpha x \pm \cos \alpha x = t$
Метод разложения на множители	$f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$	1) Найти область определения уравнения; решить каждое из уравнений $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$; 3) из найденных корней этих уравнений отобрать те, которые входят в область определения данного уравнения.
Функционально-графические ме-	$f(x) = 0$	Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графика

ТОДЫ		ка функции $y = f(x)$ с осью абсцисс.
	$f(x) = g(x)$	Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.
	$f(x) = 0$	Если функция f возрастает или убывает на некотором промежутке, то на этом промежутке уравнение имеет не более одного корня.
	$f(x) = g(x)$	Если f возрастает, а g убывает на некотором промежутке, то на этом промежутке уравнение имеет не более одного корня.

Обратные тригонометрические функции

Таблица 54

Функция	Свойства
$y = \arcsin x$	$D(y) = [-1; 1]; E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$
	непрерывна; возрастающая; нечётная; график см. на рис. 338.
	$\sin(\arcsin x) = x$ для произвольного $x \in [-1; 1];$
	$\arcsin(\sin x) = x$ для произвольного $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$
$y = \arccos x$	$D(y) = [-1; 1]; E(y) = [0; \pi];$
	непрерывна; убывающая; ни чётная ни нечётная; график см. на рис. 340.
	$\cos(\arccos x) = x$ для произвольного $x \in [-1; 1];$
	$\arccos(\cos x) = x$ для произвольного $x \in [0; \pi].$
$y = \operatorname{arctg} x$	$D(y) = \mathbf{R}; E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$
	непрерывна; возрастающая; нечётная; график см. на рис. 342.
	$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ для произвольного $x,$
	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ для произвольного $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$
	График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}.$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$D(y) = \mathbf{R}; E(y) = (0; \pi);$
	непрерывна; убывающая; ни чётная ни нечётная; график см. на рис.

	344.
	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ для произвольного x , $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ для произвольного $x \in (0; \pi)$.
	График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y = 0, y = \pi$.

Исторический комментарий

Как уже отмечалось раньше, на протяжении многих веков тригонометрия раз-вивалась как средство вычислений на местности, в мореходстве, астрономии. Да и в конечном итоге само название тригонометрия, которую ввел немецкий математик Б. Питиск (1561 - 1613), отображает именно эту ее особенность. Но когда в 17 в. в математику стали активно вводиться тригонометрические функции, возникла необходимость обращения к тригонометрическим уравнениям и неравенствам, как средствам исследования функций: отыскание их нулей, промежутков, где функция сохраняет определенные свойства, например, возрастают или убывают и т. п. Решение простейших тригонометрических уравнений приводит к аркфункциям, а сведение произвольных тригонометрических уравнений к простейшим базируется на тождествах, которые в большом количестве были открыты в 17 - 18 в. Знаменитый Ф. Виет нашел разложение $\sin nx$ и $\cos nx$ по степеням $\sin x$ и $\cos x$ при $n \leq 10$ и ряд других тригонометрических соотношений. Обобщение формул для тригонометрических функций кратных углов nx при произвольных n можно найти в работах И. Ньютона, Я. Германа (1678 – 1733), в 1725 – 1730 работавшего в Петербургской Академии наук, и др. математиков. В какой-то мере "обратную" задачу, когда степень тригонометрических функций выражается через тригонометрические функции кратных углов, решил Л. Эйлер. Он разработал также приближенные методы решения уравнений вида $x = \sin x$, которые возникали при исследовании геометрических проблем. На упомянутую в учебнике "универсальную" подстановку для сведения тригонометрических уравнений к алгебраическим, когда через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ выражаются все тригонометрические функции, впервые обратил внимание немецкий математик, физик, философ И. Ламберт (1728 - 1777).

Что касается обратных тригонометрических функций, то представлением их в виде бесконечных сумм степеней, что важно и для вычислений их значений, и для исследования свойств, занимались И. Ньютон, Г. Лейбниц.

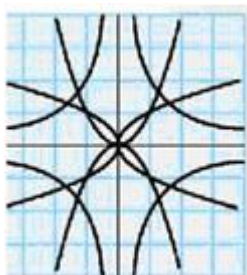
Этот перечень соответствующих фактов, понятий, имен математиков и их математических достижений можно продолжать и продолжать. Начиная с 19 ст. тригонометрические функции заняли видное место и в моделировании реальных процессов, и в теоретических исследованиях математических понятий и объектов. И умение исследовать и решать уравнения и неравенства является неотъемлемой составляющей как процесса овладения тригонометрическим аппаратом, так и залогом его успешного приложения.



Раздел 5. Показательная и логарифмическая функции

Основным предназначением современной математики является моделирование явлений природы, техники, общества, причем понятие функции относится к важнейшим средствам моделирования. Поэтому вполне естественной и актуальной является проблема обогащения классов функций. В этом разделе познакомимся с новыми функциями, которые будут введены с помощью операции возведения в степень и обратной ей. Свойства и графики таких функций будем изучать с помощью методов, которые использовались ранее, при изучении других классов функций.

В естественных науках и технике встречаются процессы, рост или "угасание" которых происходит быстрее, чем у любой степенной функции. Такие процессы описываются **показательными** функциями. Для их изучения необходимо воспользоваться еще одной (кроме извлечения корня) операцией, обратной возведению в степень. Она называется **логарифмированием**. Функции, которые вводятся с помощью этой операции, также широко применяются для описания реальных процессов.



Готовимся к изучению темы "Показательная и логарифмическая функции"

Изучение темы «Показательная и логарифмическая функции» существенно использует материал темы «Функции, их свойства и графики», которая изучалась в первом разделе, и практически весь алгебраический материал из младших классов (вычисления, выражения и преобразования, уравнения и неравенства, последовательности). Для подготовки к изучению темы приведен важнейший материал в виде таблиц.

Определение степени с рациональными показателями

Таблица 55

Степень с натуральным показателем	$n \in \mathbb{N}, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}. \quad a^1 = a.$
Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1, a \neq 0.$
Степень с целым отрицательным показателем	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$

Степень с рациональным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}.$

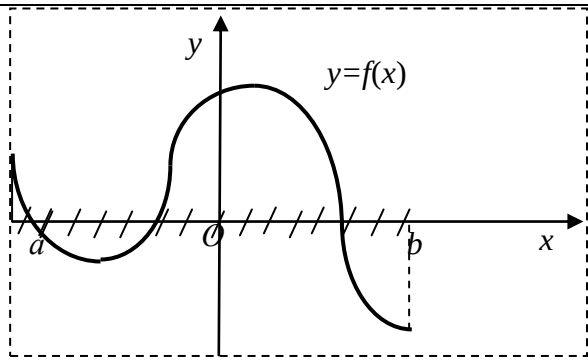
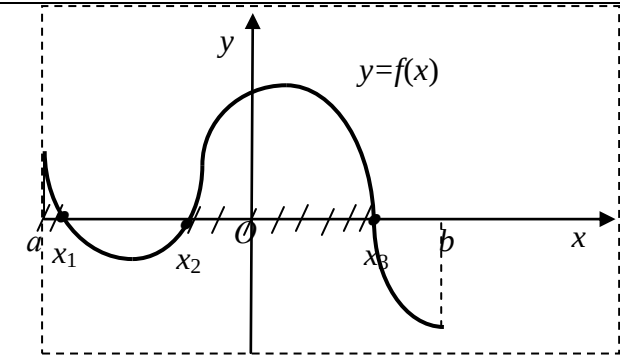
Свойства степени с рациональным показателем

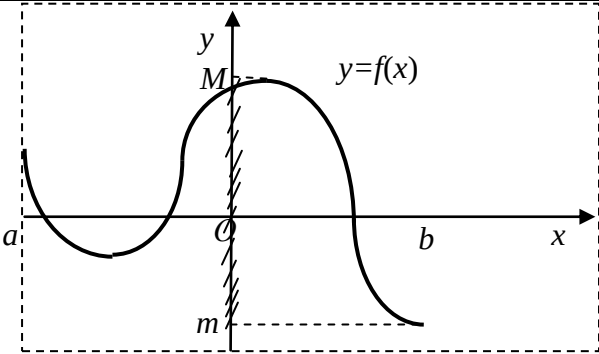
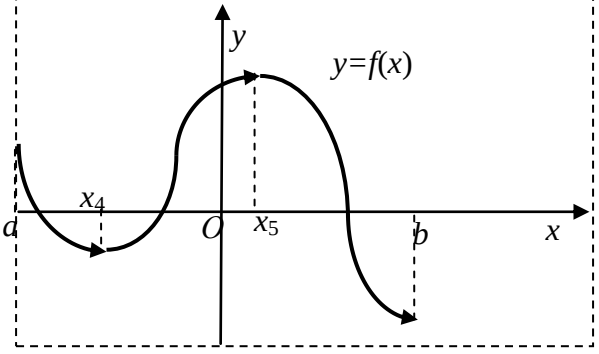
Таблица 56

Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in \mathbb{Q}.$
Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in \mathbb{Q}.$
Возведение степени в степень	$(a^x)^y = a^{xy}, x, y \in \mathbb{Q}.$
Степень произведения	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in \mathbb{Q}.$
Степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, x \in \mathbb{Q}.$

Чтение графика функции

Таблица 57

Область определения функции	 $D(f) = [a; b]$
Нули функции, промежутки знакопостоянства функции	 x_1, x_2, x_3 — нули функции $f(x) > 0 \quad x \in [a; x_1) \cup (x_2; x_3)$ $f(x) < 0 \quad x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; b]$

Наибольшее, наименьшее значения, множество значений функции	 M — наибольшее значение функции m — наименьшее значение функции $E(f) = [m; M]$
Промежутки монотонности функции	 $f(x) \uparrow x \in [x_4, x_5]$ $f(x) \downarrow x \in [a, x_4], x \in [x_5, b]$

Преобразование графиков функций

Таблица 58

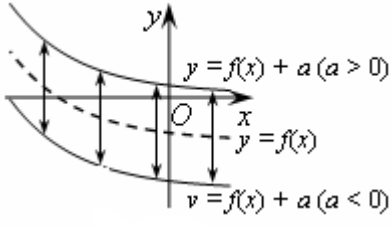
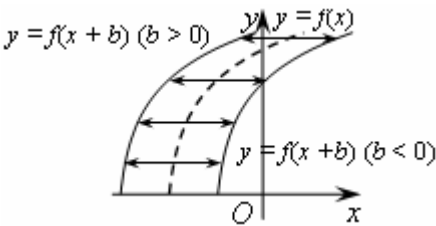
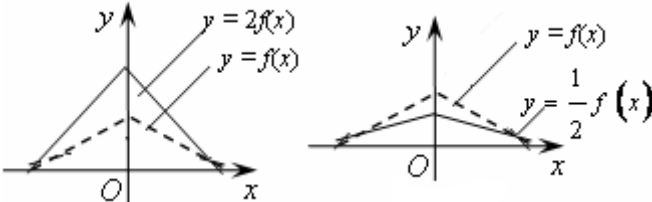
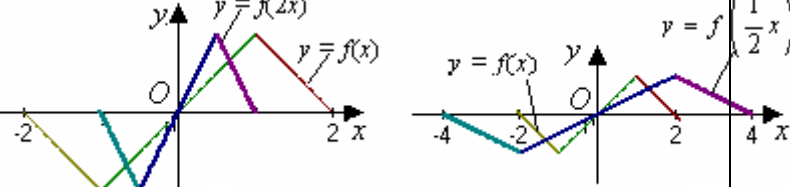
График функции $y = f(x) + a$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси y на a единиц: в направлении оси y, если $a > 0$, и в противоположном направлении оси y, если $a < 0$.	
График функции $y = f(x + b)$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на b единиц: в направлении оси x, если $b < 0$ и в противоположном направлении оси x, если $b > 0$.	

График функции $y = kf(x)$ ($k > 0$) получают из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз от оси x при $k > 1$ и сжатием в $\frac{1}{k}$ раз к оси x при $0 < k < 1$.	
График функции $y = f(\omega x)$ ($\omega > 0$) получают из графика функции $y = f(x)$ сжатием его к оси x в ω раз при $\omega > 1$ и растяжением в $\frac{1}{\omega}$ раз от оси x при $0 < \omega < 1$.	

Тест для диагностики готовности к изучению темы “Показательная и логарифмическая функции”

1. Вычислите: $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

А. $\frac{16}{9}$.

Б. $-\frac{16}{9}$.

В. $\frac{9}{16}$.

Г. $-\frac{9}{16}$.

2. Представьте степень $4^{\frac{2}{3}}$ с дробным показателем в виде корня.

А. $\sqrt[3]{4^{-2}}$.

Б. $\sqrt[2]{4^3}$.

В. $\sqrt{4^{-3}}$.

Г. $\sqrt[3]{4^2}$.

3. Запишите в виде степени с рациональным показателем выражение $\sqrt[4]{7^3}$.

А. $7^{\frac{4}{3}}$.

Б. $7^{\frac{3}{4}}$.

В. $\left(\frac{3}{4}\right)^7$.

Г. $\left(\frac{4}{3}\right)^7$.

4. Какое из выражений не имеет смысла?

А. $7^{\frac{4}{3}}$.

Б. $7^{-\frac{4}{3}}$.

В. $(-7)^{\frac{4}{3}}$.

Г. $(0)^{\frac{4}{3}}$.

5. Вычислите значение выражения $\frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{2}$ при $x = 8$.

А. -7 .

Б. 7 .

В. 8 .

Г. -9 .

6. Представьте в виде степени $\left(x^{-1\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

А. $x^{\frac{1}{3}}$.

Б. $x^{\frac{1}{3}}$.

В. $x^{\frac{19}{12}}$.

Г. $x^{\frac{16}{3}}$.

7. Сравните без вычислительных средств $3^{-0,5}$ и 1.

А. $3^{-0,5} < 1$. Б. $3^{-0,5} > 1$. В. $3^{-0,5} = 1$. Г. Сравнить невозможно.

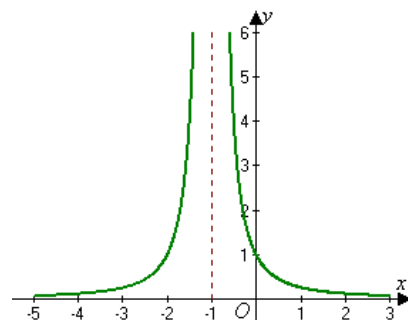
8. На рисунке изображён график функции $y = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Укажите промежуток, на котором функция убывает.

А. $[-1; +\infty)$. Б. $(-\infty; -1]$. В. $(-\infty; +\infty)$. Г. $(0; 1]$.

9. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{2-x}{x^2}}$.

А. $(-\infty; 2]$. Б. $[2; +\infty)$. В. $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$. Г. $(0; 2]$.



10. Через какую из приведенных точек проходит график функции $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$?

А. $(-8; 4)$. Б. $(4; 8)$. В. $(2\sqrt{2}; 2)$. Г. $(2; 2\sqrt{2})$.

11. Найдите множество значений функции $y = 1 - \sqrt{x}$.

А. $[0; +\infty)$. Б. $[1; +\infty)$. В. $(-\infty; 0]$. Г. $(-\infty; 1]$.

12. К чему стремятся значения функции $y = \frac{1}{x}$, когда значения x отрицательны и приближаются к 0?

А. К $-\infty$. Б. К $+\infty$. В. К 0. Г. Определить невозможно.

13. Найдите параметр a , если известно, что график функции $y = \frac{a}{x^2}$ проходит через точку $A(-2; 0,5)$.

А. -2 . Б. 2 . В. $\frac{1}{2}$. Г. $-\frac{1}{2}$.

14. Как расположены относительно друг друга графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$?

А. Симметрично относительно оси y . Б. Симметрично относительно оси x .

В. Симметрично относительно начала координат. Г. Определить невозможно.

15. Бак ёмкостью 1000 л заполнен водой. Из него за сутки вытекает через отверстие 0,1 его содержимого. Сколько воды будет в баке через трое суток?

А. 810 л. Б. 700 л. В. 729 л. Г. Ответ отличен от приведенных.

16. Вкладчик внёс на свой банковский счёт 1000 зедов (зед — условная денежная единица). Ежегодно банк насчитывает своим вкладчикам 10 % по схеме сложных процентов. Какой будет сумма на счету вкладчика через три года?

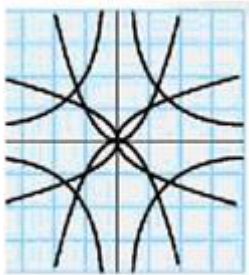
А. 1300 зедов. Б. 1331 зед. В. 1320 зедов. Г. Другой ответ.

17. Сколько корней имеет уравнение $\frac{1}{1+x^2} = -x^4$?

А. 0. Б. 1. В. 2. Г. 4.

18. На какое из приведенных чисел делится значение выражения $3^{100} - 4 \cdot 3^{98}$?

А. На 13. Б. На 11. В. На 7. Г. На 5.



§ 32. Показательная функция

В предыдущих разделах изучались различные классы функций. Линейные функции описывают процессы, которые протекают с постоянной скоростью. Например, путь при равномерном прямолинейном движении линейно зависит от времени, давление газа при постоянном объёме — от температуры, сила, действующая на пружину, — от величины её растяжения и т. д. Широкое применение имеет квадратичная функция. Так, путь при равноускоренном движении квадратично зависит от времени. Энергия падающего тела квадратично зависит от его скорости. Количество теплоты, выделяемое током, текущим по проводнику, квадратично зависит от силы тока и т. п. Степенные функции с показателями больше 2 и с произвольными рациональными показателями также встречаются на практике. Например, масса шара является кубической функцией его радиуса. Период колебания математического маятника пропорционален длине маятника в степени 0,5. Тригонометрические функции описывают вращательное движение, гармонические колебания. Таким образом, функция — это основной математический инструмент для описания связей, зависимостей между различными величинами. Чем большим запасом функций мы располагаем, тем шире и богаче наши возможности математического описания окружающего мира.

В естествознании открыты закономерности (законы размножения живых организмов, законы радиоактивного излучения, законы движения в тормозящей среде и т. п.), для изучения которых нужны функции, скорости изменения которых превышают скорости изменения степенных функций. Такими функциями являются **показательные**. В этом параграфе мы введем показательные функции, будем изучать их свойства и графики, рассматривать некоторые применения этих функций.



1. Степень с произвольным действительным показателем

Ранее рассматривались степени с рациональными показателями. Однако, в математике и в её приложениях целесообразно использовать степени с произвольными действительными показателями. Проиллюстрируем это задачей, которую в XV ст. решал французский математик Н.Шюке (ок. 1445 - ок. 1500).

Резервуар имеет отверстие, через которое за каждую единицу времени вытекает $\frac{1}{10}$ часть того количества воды, которая содержалась в начале отсчета этой единицы времени. За какое время резервуар опустеет наполовину?

Будем рассуждать так. Если начальное количество воды принять за единицу измерения, то через одну единицу времени останется $\frac{9}{10}$ начального ко-

личества воды, через две — $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^2$, через три — $\left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^3$ и т. д. Если вода вытекает непрерывно, то через t единиц времени в резервуаре останется $\left(\frac{9}{10}\right)^t$ воды. Нужно найти такое значение t , при котором $\left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{1}{2}$.

Нетрудно доказать, что ни при каком натуральном, и даже рациональном t , данное равенство выполняться не может. Действительно, если $t = n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{2}$, то $2 \cdot 9^n = 10^n$. Последнее равенство невозможно, поскольку правая его часть делится на 5, а левая не делится. Если t — положительное рациональное число и $t = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{2}$, $2 \cdot 9^m = 10^n$, то есть опять получили то же самое противоречие.

Однако, из непрерывности процедуры вытекания воды следует, что существует такой момент времени, когда это равенство выполняется. С помощью вычислений можно прийти к заключению, что $\left(\frac{9}{10}\right)^6 \approx 0,531 > \frac{1}{2}$, а

$\left(\frac{9}{10}\right)^7 \approx 0,478 < \frac{1}{2}$, то есть где-то в течение седьмой единицы времени после

начала отсчета резервуар опустеет наполовину. Вполне естественно предположить, что количество воды, которое остается в резервуаре, должно равняться

$\left(\frac{9}{10}\right)^t$ не только при натуральных t . То есть выражение $\left(\frac{9}{10}\right)^t$ — математическая модель вытекания воды из резервуара. Для рациональных значений t

смысл этого выражения мы уже знаем: $\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{9}{10}\right)^p}$. Оно должно иметь

смысл для всех действительных значений t . Непрерывность вытекания воды

означает, что непрерывно изменяется величина $\left(\frac{9}{10}\right)^t$, поэтому ее значение для

иррационального t может быть как угодно точно приближено значениями степени с рациональными показателями.

Рассмотренный пример подсказывает идею введения степени положительного числа a с иррациональным показателем α . Попробуем определить, что следует понимать, например, под выражением $(0,9)^{\sqrt{2}}$. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ с недостатком ($r_1 = 1$; $r_2 = 1,4$; $r_3 = 1,41$; $r_4 = 1,414$; ...), а $\{s_n\}$ — последовательность десятичных приближений для $\sqrt{2}$ с избытком ($s_1 = 2$; $s_2 = 1,5$; $s_3 = 1,42$; $s_4 = 1,415$; ...). Понятно, что пер-

вая последовательность возрастающая, вторая — убывающая, причем, для любого $n \in \mathbb{N}$. Разность $s_n - r_n$ меньше любого положительного числа при достаточно большом значении n .

Вычислим с помощью калькулятора первые члены последовательностей $\{(0,9)^{r_n}\}$ и $\{(0,9)^{s_n}\}$. Результаты вычислений представлены в таблице 59.

Таблица 59

r_n	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421
$(0,9)^{r_n}$	0,9	0,8629	0,8619	0,8616	0,8616	0,8616
$ (0,9)^{s_n} - (0,9)^{r_n} $	0,09	0,0091	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000
$(0,9)^{s_n}$	0,81	0,8538	0,8610	0,8615	0,8616	0,8616
s_n	2	1,5	1,42	1,415	1,4143	1,41422

Анализ таблицы дает возможность предположить, что последовательность $\{(0,9)^{r_n}\}$ убывает, а $\{(0,9)^{s_n}\}$ возрастает. В дальнейшем мы сможем это доказать. Модуль разности $(0,9)^{s_n} - (0,9)^{r_n}$ уменьшается при увеличении n и приближается к нулю, то есть эти последовательности приближаются друг к другу. Так, уже при $n = 3$ модуль разности чисел $(0,9)^{r_n}$ и $(0,9)^{s_n}$ меньше 0,001. Естественнo предположить, что существует число, которое меньше всех $(0,9)^{r_n}$ и больше от всех $(0,9)^{s_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Это число и обозначают через $(0,9)^{\sqrt{2}}$.

Конечно, приведенное рассуждение не является строгим математическим доказательством, потому что мы не можем выписать и сравнить произвольные члены упомянутых последовательностей. О существовании числа $(0,9)^{\sqrt{2}}$ может свидетельствовать и физическое толкование выражения $(0,9)^t$. В рассмотренном примере количество воды в резервуаре в момент времени t изменяется непрерывно по закону $(0,9)^t$. Непрерывность изменения этой величины свидетельствует о том, что и выражение $(0,9)^t$ имеет физический смысл для произвольного вещественного числа t .

Рассмотрим еще один подобный пример, который показывает, что следует понимать под выражением $10^{\sqrt{2}}$. Как и раньше, строим две последовательности 10^{r_n} и 10^{s_n} , где $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$ — последовательности десятичных приближений для $\sqrt{2}$ соответственно с недостатком и избытком, причем, для всех n $10^{r_n} < 10^{s_n}$ и модуль разности $10^{r_n} - 10^{s_n}$ при возрастании n стремится к нулю. Поэтому существует и при этом единственное число γ , удовлетворяющее каждому из неравенств $10^{r_n} < \gamma < 10^{s_n}$. Это число γ и принимается за $10^{\sqrt{2}}$. Результаты вычислений представлены в таблице 60.

Таблица 60

r_n	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421
10^{r_n}	10	25,1189	25,7040	25,9418	25,9537	25,9543

$10^{s_n} - 10^{r_n}$	90	6,5039	0,5987	0,0598	0,0060	0,0006
10^{s_n}	100	31,6228	26,3027	26,0016	25,9597	25,9549
s_n	2	1,5	1,42	1,415	1,4143	1,41422

Следовательно, на примерах мы дали представление о степени a^α с иррациональным показателем α . Обращаем внимание на то, что она определена для положительных вещественных чисел a , поскольку для положительных a определена степень с рациональным показателем. Обратите внимание на то, что степень с натуральным показателем определялась с помощью умножения равных чисел; степень с целым отрицательным показателем — через степень с натуральным показателем; степень с рациональным показателем — через степень с целым показателем и, наконец, степень с иррациональным показателем — с помощью степеней с рациональными показателями. Таким образом, теперь степень a^α определена для всех действительных α и положительных a .



Свойства степени с рациональным показателем, которые изучались в разделе 2 (см. таблицу 30), полностью сохраняются и для иррациональных показателей.

Пример 1. Вычислить приближённо: 1) $5^{-\sqrt{3}}$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{3}}$.

$$\square 5^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{5^{\sqrt{3}}} \approx \frac{1}{16,2} \approx 0,062; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{3}} = \left(5^{-1}\right)^{-\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}} \approx 16,2. \blacksquare$$

Для приближённого вычисления степени использовался калькулятор.

Пример 2. Упростить выражение и вычислить его значение (в случае необходимости воспользоваться калькулятором): 1) $\frac{(2\sqrt{3})^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\sqrt{5}} \cdot 2^{3\sqrt{5}}$; 3) $(5^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}}$.

$$\square 1) \frac{(2\sqrt{3})^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{(2\sqrt{3})}{(\sqrt{3})}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \approx 2,67. \quad 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{3\sqrt{5}} \cdot 2^{3\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^{3\sqrt{5}} = 1^{3\sqrt{5}} = 1;$$

$$3) (5^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}} = 5^{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = 5^{1-3} = 5^{-2} = \frac{1}{25}. \blacksquare$$

Возрастание последовательностей $\{(0,9)^{s_n}\}$ и $\{10^{r_n}\}$, а также убывание последовательностей $\{(0,9)^{r_n}\}$ и $\{10^{s_n}\}$ вытекает из следующего свойства степеней с рациональными показателями.

Свойство. Для произвольных рациональных чисел r и s из неравенства

$r > s$ вытекает, что $a^r > a^s$ при $a > 1$, $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

$\square$ Сначала приведём рациональные числа r и s к общему знаменателю:

$r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{n}$, где n — натуральное число, а m и p — целые. Из неравенства $r > s$

вытекает, что $m > p$. Если $a > 1$, то $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$ и по свойству степени с целым показателем (если $x > 1$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, то $x^m > x^n$) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$, $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{n}}$, $a^r > a^s$. Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Рекомендуем сделать это самостоятельно. ■



Обобщим рассмотренные примеры. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ — последовательность десятичных приближений иррационального числа α с недостатком, а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ — последовательность десятичных приближений этого числа с избытком.

Если $a > 1$, то степень a^α числа a с положительным иррациональным показателем α следует понимать как число, большее всех чисел $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \dots, a^{\alpha_n}, \dots$ и меньшее всех чисел $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \dots, a^{\beta_n}, \dots$, $n \in \mathbb{N}$.

Если $0 < a < 1$, то степень a^α числа a с положительным иррациональным показателем α следует понимать как число, большее всех чисел $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \dots, a^{\beta_n}, \dots$ и меньшее всех чисел $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \dots, a^{\alpha_n}, \dots$, $n \in \mathbb{N}$.

1^α по определению равняется 1.

0^α по определению равняется 0.

Если $a > 0$ и α — положительное иррациональное число, то будем считать, что

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

Последнее определение является корректным, поскольку для всех положительных a и α выражение a^α отлично от нуля, точнее $a^\alpha > 0$.

Другой подход к определению степени с иррациональным показателем связан с использованием понятия **предела последовательности**, которое будет применяться в дальнейших разделах курса.

Напомним, что бесконечные последовательности являются функциями, заданными на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Фактически с понятием предела последовательности мы уже встречались раньше. Так, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии определялась как число, к которому стремится сумма ее первых n членов.

Рассматривая в разделе 1 последовательности $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ и $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n, \dots$ десятичных приближений вещественного числа x с недостатком и с избытком, мы пришли к заключению, что модули разностей $|x - x_n|, |x - x'_n|$ могут быть как угодно малыми числами при достаточно большом n . Этот пример подсказывает идею определения предела последовательности.

Сначала объясним эту идею на примерах. Вычислим члены последова-

тельностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, где $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2n+1}{n+1}$ для $n = 1, 2, 3, \dots, 9, 10, 100, 1000$.

Результаты вычислений представим в таблице 61.

Таблица 61

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
a_n	1	0,5	0,333	0,25	0,2	0,167	0,143	0,125	0,111	0,1	0,01	0,001
b_n	1,5	1,67	1,75	1,8	1,83	1,86	1,88	1,89	1,9	1,91	1,99	1,999

Замечаем, что при больших значениях n члены последовательности $\{a_n\}$ близки к 0, а члены $\{b_n\}$ — к 2. Каждому из приближенных равенств $a_n \approx 0$, $b_n \approx 2$ можно обеспечить произвольную заранее заданную точность, если значение n взять достаточно большим. Убедимся в этом. Так, чтобы приближенное равенство $b_n \approx 2$ выполнялась с точностью до 0,01, то есть, чтобы $|b_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < 0,01$, достаточно взять $n > 99$. Аналогичные рассуждения являются правильными и для последовательности $\{a_n\}$.

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n \rightarrow \infty$, если приближенному равенству $a_n \approx a$ можно обеспечить произвольную заранее заданную точность для всех достаточно больших значений n .

Символично это записывают так: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Для рассмотренных приме-

ров: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

Последовательности, которые имеют предел при $n \rightarrow \infty$, называются **сходящимися**.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были выполнены для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, и используя рассуждения, приведенные в разделе 1, убеждаемся, что если $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$ — последовательности десятичных приближений числа x с недостатком и избытком, то $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$, то есть приближенным равенствам $x \approx r_n$, $x \approx s_n$ можно обеспечить произвольную заранее заданную точность.

Возвратимся опять к таблице, где приведены значения 10^{r_n} и 10^{s_n} . Замечаем, что члены последовательности $\{10^{r_n}\}$ возрастают, но они не превосходят, например, числа 30. Точно также члены последовательности $\{10^{s_n}\}$ убывают, но они не меньше, например, числа 25. Члены первой последовательности меньше любого элемента второй. То есть, они с разных сторон приближаются к одному и тому же числу, ведь разность $10^{s_n} - 10^{r_n}$ становится как угодно малой при достаточно больших значениях n . Так, уже при $n = 6$ эта разность становится меньше 0,001. Следовательно, естественно предположить, что существуют пределы последовательностей $\{10^{r_n}\}$ и $\{10^{s_n}\}$, и что они совпадают. Этот предел и обозначают через $10^{\sqrt{2}}$.

Обобщая рассмотренный пример, можно сделать вывод о том, что для произвольного $a > 0$ существуют пределы последовательностей $\{a^{r_n}\}$ и $\{a^{s_n}\}$,

где $\{r_n\}$ и

$\{s_n\}$ — последовательности десятичных приближений иррационального числа α (соответственно с недостатком и с избытком), причем разность $a^{s_n} - a^{r_n}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Теперь естественно дать такое определение.

Если α — иррациональное число, а $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$ — последовательности десятичных приближений числа α (соответственно с недостатком и с избытком), то

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$

Таким образом, степень a^α определена для любого вещественного числа: целого, рационального, иррационального.



Контрольные вопросы

1. ° Какие из следующих выражений имеют смысл:

$$2^{\sqrt{3}}; 2^{-\sqrt{3}}; (-2)^{\sqrt{3}}; \sqrt{2}^{\sqrt{3}}; 0^{\sqrt{3}}; 0^{-\sqrt{3}}; 1^{\sqrt{3}}; 1^{-\sqrt{3}}; 3^\pi; \pi^{\sqrt{3}}; (-\sqrt{3})^\pi ?$$

2. ° Чему равно значение выражения: а) $1^{\sqrt{2}}$; б) 0^π ; в) $1^{-\sqrt{2}}$; г) $0^{-\pi}$?

3. Дано иррациональное число 1,101101110... . Верно ли утверждение о том, что последовательность степеней числа $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,1}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,10}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,101}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,1011}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,10110}; \dots$$

возрастающая,

а

последовательность

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,2}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,11}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,102}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,1012}; \left(\frac{1}{2}\right)^{1,10111}; \dots \text{убывающая?}$$

4. Дано иррациональное число 1,101101110... . Верно ли утверждение о том, что $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,1011} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1,102}$?

5. Какое из чисел больше: а) $3^{1,73}$ или $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ($\sqrt{3}=1,7320508\dots$); б) $2^{3,14}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}$?

6. Какой знак имеет разность $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{3}} - 1$?

7. Верно ли, что $\alpha > \beta$, если:

а) $5^\alpha > 5^\beta$; б) $0,4^\alpha > 0,1^\beta$; в) $0,4^{-\alpha} > 0,1^{-\beta}$; г) $a^\alpha > a^\beta$?

8. Верно ли, что $\alpha = \beta$, если: а) $2^\alpha = 2^\beta$; б) $1^\alpha = 1^\beta$?

9*. Пусть $r_1 = -1$; $r_2 = -1,4$; $r_3 = -1,41$; $r_4 = -1,414$; ... — убывающая последовательность десятичных приближений числа $-\sqrt{2}$ с избытком, а

$s_1 = -2; s_2 = -1,5; s_3 = -1,42; s_4 = -1,415; \dots$ — возрастающая последовательность десятичных приближений числа $-\sqrt{2}$ с недостатком. Число $10^{-\sqrt{2}}$ определим как такое, которое больше все 10^{-s_n} и меньше всех $10^{-r_n}, n \in \mathbb{N}$. Эквивалентно ли это определение введенному ранее, согласно которому $10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}}$?

10*. Имеют ли предел последовательности: а) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$; в) $\{2n+1\}$; г) $\{q^n\}, |q| < 1$?

2. Свойства и график показательной функции



Ранее в данном курсе последовательно изучались степенные функции $y = x^r$ с натуральными, целыми, рациональными показателями. Они служат моделями многих реальных процессов и явлений.

Обратите внимание на то, что для этих функций независимой переменной служит основание степени, а показатель степени является постоянной величиной. Оказывается, что значительно больше приложений имеет функция, у которой независимой переменной является показатель степени, а основание степени — постоянная величина. Такие функции называются **показательными**, они и будут рассматриваться в данном пункте.

В предыдущем пункте выяснено, что надо понимать под выражением a^x для $a > 0$ и произвольного действительного показателя x . Этим самым каждому действительному значению x поставлено в соответствие единственное значение a^x , то есть определена функциональная зависимость $y = a^x$ между переменными x и y . Такие функции часто используют при моделировании реальных процессов и явлений. Например, формула сложных процентов $A_t = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ задает зависимость суммы A_t на счете вкладчика банка, который насчитывает каждую единицу времени $p\%$, от времени t . Эта зависимость является показательной функцией.

Функцию, заданную формулой $y = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ называют показательной.

Отметим, что основание a функции $y = a^x$ — обязательно положительное число. Кроме того будем считать, что $a \neq 1$. Случай $a = 1$ приводит к уже известной функции $y = 1^x = 1$.

Обратите внимание на то, что областью определения показательной функции, по определению, является множество всех вещественных чисел.

Проведем исследование функции $y = a^x$ и рассмотрим применение ее основных свойств при решении задач, в частности физических.

Пусть $a > 1$. Рассмотрим, например, функцию $y = 2^x$. Она задана

на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Рассматривая таблицу значений функции, можно заметить, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Можно предположить, что функция возрастает. Это действительно так, доказательство этого факта будет приведено позже.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

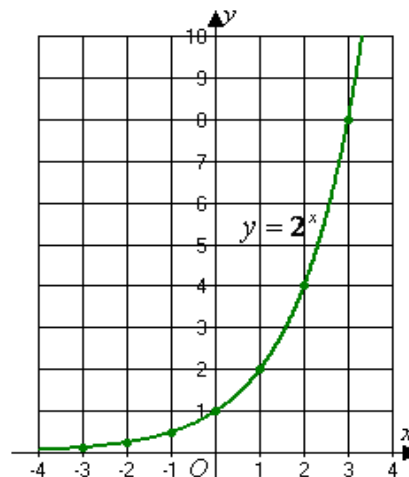


Рис. 347

Анализируя график этой функции на рис. 347, можно прийти к заключению, что функция принимает лишь положительные значения, не имеет нулей, является непрерывной, ее множеством значений является промежуток $(0; +\infty)$, ее график проходит через точку с координатами $(0; 1)$, что функция при $x > 0$ принимает значения, большие 1, а при $x < 0$ — меньшие 1.

Можно предположить, что показательная функция $y = a^x$, $a > 1$ имеет аналогичные свойства и график.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Рассмотрим, например, функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Она тоже задана на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Рассматривая таблицу значений функции, можно заметить, что большему значению аргумента отвечает меньшее значение функции.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Можно предположить, что функция убывает. Доказательство этого факта будет приведено позже.

Анализируя график этой функции на рис. 348, можно прийти к заключению, что функция принимает лишь положительные значения, не имеет нулей, является непрерывной, ее множеством значений является промежуток $(0; +\infty)$, ее график проходит через точку с координатами $(0; 1)$, что функция при $x > 0$ принимает

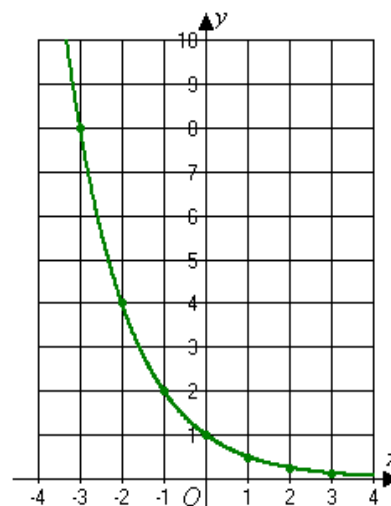


Рис. 348

значения, меньшие 1, а при $x < 0$ — большие 1.

Можно предположить, что показательная функция $y = a^x$, $0 < a < 1$ имеет аналогичные свойства и график.

Пример 3. Дана функция $f(x) = 2^x - 2$.

- 1) Указать ее область определения и множество значений.
- 2) Построить ее график.
- 3) Проходит ли график этой функции через точку $A(3; 2)$?
- 4) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

5) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = -x^2$?

□ 1) Функция $y = 2^x - 2$ определена на всей координатной оси, то есть ее областью определения является множество $(-\infty; +\infty)$. Поскольку множеством значений функции $y = 2^x$ является промежуток $(0; +\infty)$, то есть $0 < 2^x < +\infty$, или $-2 < 2^x - 2 < +\infty$, то множеством значений данной функции является промежуток $(-2; +\infty)$.

2) График функции можно построить из графика функции $y = 2^x$ параллельным переносом последнего на 2 единицы в отрицательном направлении оси ординат (рис. 349).

3) Чтобы проверить, проходит ли график функции через точку $A(3; 2)$ найдем значение функции в точке $x = 3$: $f(3) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$. Следовательно, график функции не проходит через точку A .

4) Чтобы найти точку пересечения графика с осью y , найдем значение функции при $x = 0$:

$f(0) = 2^0 - 2 = 1 - 2 = -1$. Следовательно, график функции пересекает ось y в точке с координатами $(0; -1)$, Чтобы найти точку пересечения графика с осью x , найдем, при каких значениях x функция принимает значение 0: $0 = 2^x - 2$, $2^x = 2$, $x = 1$. Следовательно, график функции пересекает ось x в точке с координатами $(1; 0)$.

5) Для ответа на вопрос нужно установить, в скольких точках пересекаются графики функций $y = 2^x - 2$ и $y = -x^2$. Парабола $y = -x^2$ пересекает график данной функции в двух точках (рис. 350). Следова-

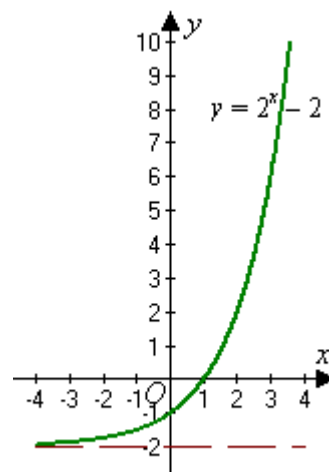


Рис. 349

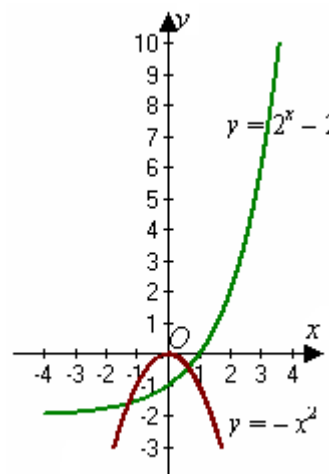


Рис. 350

тельно, уравнение имеет два корня. ■

В таблице 62 приведены обобщенные свойства функций $y = a^x$, $a > 1$ и $y = a^x$, $0 < a < 1$.

Таблица 62

	$y = a^x, a > 1$	$y = a^x, 0 < a < 1$
Область определения	$(-\infty; +\infty)$	
Нули функции	Нет нулей	
Чётность и нечётность	Ни чётная, ни нечётная	
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x \in \mathbf{R}$	
Точки пересечения с осями координат	$(0; 1)$	
Промежутки монотонности	$\uparrow$ при $x \in \mathbf{R}$	$\downarrow$ при $x \in \mathbf{R}$
Наибольшее и наименьшее значения	Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений	
Множество значений	$(0; +\infty)$	
Непрерывность	Непрерывная	
Асимптоты	$y = 0$	



Обоснуем свойства показательной функции, о которых шла речь выше.

Свойство 1. Показательная функция $y = a^x$ принимает лишь положительные значения.

□ Истинность данного свойства вытекает из способа вычисления значений функции $y = a^x$. При рациональном $x = \frac{p}{q} > 0$ значение $a^x = \sqrt[q]{a^p}$ положительно согласно определению арифметического корня q -й степени из положительного числа. При иррациональном $x = \alpha > 0$ выполняется неравенство $a^{\alpha} > a^{r_n} > 0$, где r_n — некоторое рациональное приближение α (с недостатком при $a > 1$ и с избытком при $0 < a < 1$). Если $x = \alpha < 0$, то $a^{\alpha} = \frac{1}{a^{-\alpha}} > 0$. ■

Свойство 2. Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $0 < a^x < 1$ при $x < 0$.

Если $0 < a < 1$, то $a^x > 1$ при $x < 0$, и $0 < a^x < 1$ при $x > 0$.

□ Докажем первое утверждение сначала для натуральных x , потом для положительных рациональных x , для положительных иррациональных x и, наконец, для отрицательных действительных значений x .

Если $x = n \in \mathbf{N}$, то $a^x = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} > 1$, ибо $a > 1$.

Если $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, то $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 1$, так как $a^p > 1$.

Если $x = \alpha$ — положительное иррациональное число, то $a^\alpha > a^{r_n} > 1$, где r_n — некоторое рациональное приближение α з недостатком.

Если $x < 0$, то $a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1$, потому что, по доказанному, $a^{-x} > 1$.

При $0 < a < 1$ свойство доказывается аналогично. ■

Свойство 3. Показательная функция монотонна: при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает в области определения, а при $0 < a < 1$ она убывает.

□ Истинность данного свойства вытекает из свойств степени и из свойства 2 показательной функции: если $a > 1$ и $x_1 < x_2$, то $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2} < 1$, ибо $x_1 - x_2 < 0$, то есть $a^{x_1} < a^{x_2}$; если $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$, то $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2} > 1$, то есть $a^{x_1} > a^{x_2}$. ■

Свойство 4. Показательная функция непрерывна.

□ Рассмотрим значения показательных функций $y = 2^x$ и $y = (0,5)^x$ при достаточно малых по модулю значениях аргумента, приведенные в таблице 63.

Таблица 63

x	1	0,5	0,1	0,01	0,001	-0,1	-0,01	-0,001
2^x	2	1,41	1,07	1,007	1,0007	0,933	0,993	0,9993
$(0,5)^x$	0,5	0,707	0,933	0,993	0,9993	1,07	1,007	1,0007

Анализируя значения, приведенные в этой таблице, можно предположить, что для произвольных $a > 0$ выполняется соотношение $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 = a^0$, то есть в точке $x = 0$ показательная функция непрерывна. Пользуясь этим выводом, докажем, что приближенному равенству $a^x \approx a^{x_0}$ можно обеспечить произвольную заранее заданную точность для всех значений x из некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 , то есть что показательная функция непрерывна в произвольной точке x_0 своей области определения. Оценим разность $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, то приближенному равенству $a^{x-x_0} - 1 \approx 0$ можно обеспечить любую точность, если точку x брать из достаточно малой окрестности точки x_0 . Поскольку a^{x_0} — фиксированное число, то и приближенному равенству $a^x - a^{x_0} \approx 0$ можно обеспечить любую точность, если точку x брать из достаточно малой окрестности точки x_0 . А это значит, что $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, то есть функция $y = a^x$ непрерывна в точке x_0 . ■

Исследуем поведение показательных функций на "бесконечности", то есть когда значения аргумента по модулю становятся как угодно большими.

Рассмотрим таблицу 64 приближенных значений функции $y = 2^x$, вычисленных на калькуляторе:

Таблица 64

x	-100	-50	-10	-5	-1
2^x	$7,89 \cdot 10^{-31}$	$8,88 \cdot 10^{-16}$	$9,77 \cdot 10^{-4}$	$3,13 \cdot 10^{-2}$	0,5
x	1	5	10	50	100
2^x	2	32	1024	$1,13 \cdot 10^{15}$	$1,27 \cdot 10^{30}$

Таблица хорошо отображает описанное выше поведение функции $y = 2^x$. Легко заметить, что функция принимает как угодно большие значения, если x стремится к $+\infty$ и принимает как угодно малые положительные значения, когда x стремится к $-\infty$.

То же самое можно сказать о любой показательной функции с основанием $a > 1$.

Поведение показательной функции с основанием $0 < a < 1$ можно исследовать, если учесть, что $a^x = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$. Поскольку $\frac{1}{a} > 1$, то свойства функции $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ фактически уже исследованы. При этом, если x стремится к $-\infty$, то $-x$ стремится к $+\infty$ и наоборот. Следовательно, имеют место следующие свойства показательной функции.

Свойство 5. Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании x ($x \rightarrow +\infty$) значения функции $y = a^x$ неограниченно возрастают, а при неограниченном убывании x ($x \rightarrow -\infty$) значения функции $y = a^x$ стремятся к нулю.

Если $0 < a < 1$, то при неограниченном убывании x ($x \rightarrow -\infty$) значения функции $y = a^x$ неограниченно возрастают, а при неограниченном возрастании x ($x \rightarrow +\infty$) значения функции $y = a^x$ стремятся к нулю.

Свойство 6. Множеством значений функции $y = a^x$ являются все положительные числа, то есть интервал $(0; +\infty)$.

□ Пусть b — произвольное положительное число. Согласно свойству 5, существуют такие числа x_1, x_2 , что $a^{x_1} = y_1 < b$ и $a^{x_2} = y_2 > b$. Из непрерывности функции $y = a^x$ вытекает, что промежуток $[y_1, y_2]$, а вместе с ним и число b входит во множество ее значений. Геометрически это утверждение является очевидным. График функции состоит из одного куска, он соединяет точки (x_1, a^{x_1}) и (x_2, a^{x_2}) , одна из которых лежит ниже прямой $y = b$, а вторая — выше её. Поэтому график должен где-то пересекать прямую $y = b$ (рис. 351). Поэтому существует, по крайней мере, одно значение c такое, что $x_1 < c < x_2$ и $a^c = b$. ■

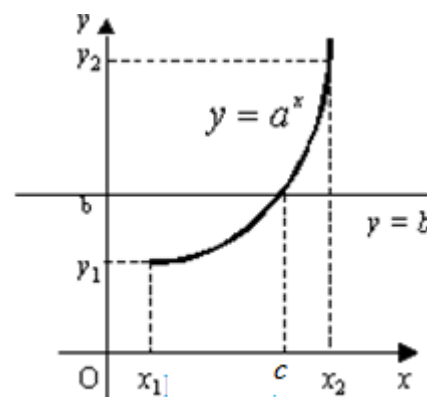


Рис. 351

Приведенные свойства функции $y = a^x$ дают возможность изобразить эскиз ее графика, не пользуясь таблицей ее значений. Для этого нужно изобразить точку $(0; 1)$, принадлежащую графику независимо от значения основания a согласно равенству $a^0 = 1$. Если $a > 1$, то справа от точки $(0; 1)$ график поднимается неограниченно вверх, а слева — опускается вниз, приближаясь к оси x (рис. 352). Для $0 < a < 1$ график строим с помощью аналогичных рассуждений.

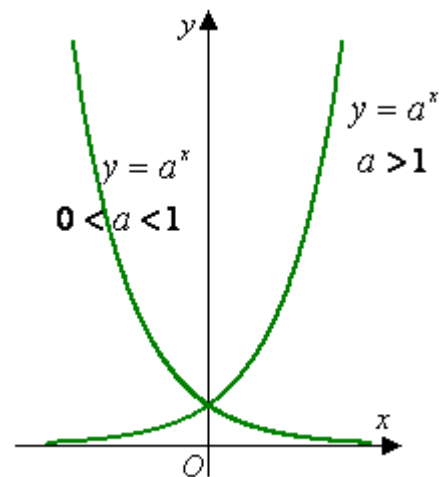


Рис. 352

Симметричность графиков функций $y = 2^x$

и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ относительно оси y (см. рис. 1, 2)

является следствием равенства $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.

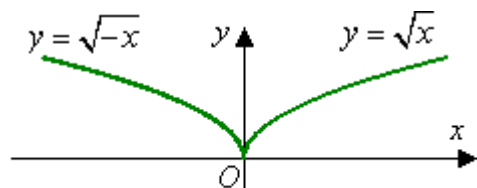


Рис. 353

Вспомните, точно также симметричны относительно оси y графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$ (рис. 353).

В общем случае для показательных функций с основаниями a и $\frac{1}{a}$ имеет место аналогичное свойство. Это да-

ет возможность построить график функции $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ по

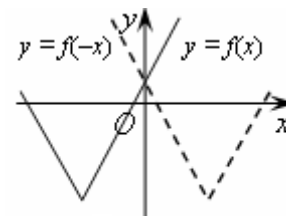


Рис. 354

графику функции $y = a^x$. И вообще, график функции $y = f(-x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси y (рис. 354).

С помощью показательных функций описываются различные процессы и явления. Например, процесс распада радия можно описать с помощью формулы $m = m_0 a^{kt}$, где t — время, с; $m = m(t)$ — масса радия в момент времени t , г; $m_0 = m(0)$, a , k — некоторые вещественные числа. Зависимость температуры тела T от времени при охлаждении его в воздухе с температурой T_0 можно выразить с помощью формулы $T = T_0 - ka^t$, где положительные числа k и a определяются в каждом случае отдельно. С помощью подобных функций описывают развитие биологических систем, затраты предприятия, рост вклада в банке, рост количества публикаций, объема информации и т. п.

Пример 4. Атмосферное давление в зависимости от высоты местности над уровнем моря изменяется по закону

$$p = 1,01 \cdot 10^5 \cdot 0,882^h,$$

где p — давление, Па, h — высота, км.

1) Найти атмосферное давление на всех уровнях — от уровня моря до уровня

наивысшей земной вершины – с интервалом в 1 км.

2) На какой высоте находится вершина горы, если атмосферное давление на ней равняется $5,00 \cdot 10^4$ Па?

□ 1) Поскольку высота наивысшей вершины на Земле не превышает 9 км, то выполнение задания сводится к вычислению значений данной функции при $h = 0; 1; 2; \dots; 9$.

Воспользовавшись калькулятором, составим таблицу 65 её значений.

Таблица 65										
$h, \text{ км}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p \cdot 10^4, \text{ Па}$	10,1	8,91	7,86	6,93	6,11	5,39	4,75	4,19	3,70	3,26

2) Второе задание сводится к решению уравнения

$$1,01 \cdot 10^5 \cdot 0,882^h = 5,00 \cdot 10^4, \text{ или } 0,882^h = 0,495.$$

Поскольку пока что в нашем распоряжении нет методов для решения подобных уравнений, то попробуем решить его численно. Для этого воспользуемся составленной таблицей. Из нее видно, что искомая высота больше 5 км и меньше 6 км. Если нас устраивает точность в 0,5 км, то за ответ можно взять число 5,5. Для увеличения точности результата можно было бы повторить процедуру, найдя значения функции в точках 5,1; 5,2; ...; 5,9. Понятно, что нас не интересует полная таблица значений, а лишь числа h_1 и h_2 из этой последовательности такие, что $0,495$ содержится между $0,882^{h_1}$ и $0,882^{h_2}$.

Понятно, что число $\frac{h_1 + h_2}{2}$ является приближенным решением уравнения с точностью, не меньшей, чем 0,05, и т. д. На этом пути можно добиться необходимой точности результатов. ■

Ответ: 2) $\approx 5,5$ км.



В данном примере мы опять встретились с необходимостью решения уравнения $a^x = b$, $a > 0$.

Существование его решений не вызывает сомнений по "физическим" соображениям. Нетрудно провести его полное исследование в зависимости от параметров a, b . При $b \leq 0$ уравнение не имеет решений. При $b > 0$ существует единственное решение уравнения, которое вытекает из свойств функции $y = a^x$. В частности, если $b = a^c$, то из монотонности функции вытекает, что решением данного уравнения является $x = c$. К уравнениям вида $a^x = a^c$ сводятся и некоторые другие уравнения, где неизвестное содержится в показателе степени.

Пример 5. Решить уравнение:

1) $4 \cdot 2^x = 1$; 2) $5^x = 7^x$; 3) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

□ 1) Данное уравнение можно записать в виде $2^{x+2} = 2^0$. Отсюда $x + 2 = 0$ или $x = -2$.

2) Разделив обе части на выражение $7^x \neq 0$, получим равносильное урав-

нение $\left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$ или $\left(\frac{5}{7}\right)^x = \left(\frac{5}{7}\right)^0$. Отсюда $x = 0$.

3) Вынесем в левой части уравнения общий множитель 3^{x-2} . Имеем:

$$3^{x-2}(3^3 - 2) = 25, \text{ или } 3^{x-2} \cdot 25 = 25.$$

Отсюда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$. ■

Ответ: 1) – 2; 2) 0; 3) 2.

Подобные соображения проводят и при решении неравенств, сводящихся к простейшим:

$$a^x > a^c \text{ или } a^x < a^c.$$

Поскольку показательные функции при $a > 1$ возрастают, а при $0 < a < 1$ — убывают, то неравенство $a^x > a^c$ при $a > 1$ равносильно неравенству $x > c$, а при

$0 < a < 1$ — неравенству $x < c$.

Аналогично неравенство $a^x < a^c$ при $a > 1$ равносильно неравенству $x < c$, а при $0 < a < 1$ — неравенству $x > c$.

Пример 6. Решить неравенство: 1) $2^{3x} < 2^{x^2+2}$; 2) $0,5^x < 0,25$.

□ 1) Поскольку показательная функция $y = 2^t$ возрастает, то имеем равносильное неравенство $3x < x^2 + 2$. Решая квадратичное неравенство $x^2 - 3x + 2 > 0$, получим: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

2) Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{x} > 2$, ибо функция $y = 0,5^t$ убывает и $0,25 = (0,5)^2$. Далее имеем: $\frac{1-2x}{x} > 0$, $(2x-1)x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$. ■

Ответ: 1) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.



Контрольные вопросы

1. ° Какие из приведенных функций являются показательными:

а) $y = \frac{1}{2^x}$; б) $y = x^2$; в) $y = 2x$; г) $y = (\sin 2)^x$; д) $y = (\sqrt{2})^x$; е) $y = \sqrt{x}$;

ж) $y = (1 - \sqrt{3})^x$; з) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$; и) $y = 2 \cdot 2^{-x+2}$; к) $y = 5 \cdot 3^{x+2} - 1$; л) $y = \sqrt[3]{2}$?

2. ° Какие из показательных функций, приведенных в вопросе 1, являются возрастающими; убывающими?

3. ° Может ли функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ принимать значения:

а) $\sqrt{2}$; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) 1; д) 100 000; е) 0,00001?

4. ° Может ли функция $y = a^x$, $a \neq 1$, быть: а) чётной; б) нечётной; в) периодиче-

ской?

5. ° Верно ли, что графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, имеют только одну общую точку?

6. Дано уравнение $5^x = 2$. Из каких свойств функции $y = a^x$ вытекает: а) существование корня; б) единственность корня?

7. Равносильны ли неравенства: а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ и $x < 3$; б) $2^{x^2} < 4^{2x}$ и $x^2 < 4x$?

8. Может ли функция $y = 2^{-x} - 2$ принимать:

а) отрицательные значения; б) значение $y = 5$; в) значение $y = -2$?

9. Какая из функций $y = -2^x$, $y = 2^x - 10$: а) возрастающая; б) убывающая?

10. При каких значениях a функция $y = (2a - 1)^x$ монотонно убывает?

Задачи

535°. Вычислите: 1) $\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{9}}$; 2) $27^{\sqrt[3]{3}} : 3^{3\sqrt[3]{3}}$; 3) $\left(2^{\sqrt[5]{27}}\right)^{\sqrt[5]{9}}$; 4) $5^{1-2\sqrt{5}} \cdot 25^{1+\sqrt{5}}$.

536. Упростите выражение:

1) $x^{\sqrt{3}} \cdot x^{1-\sqrt{3}}$; 2) $x^{\sqrt{5}-1} \cdot x^{\sqrt{5}+1}$; 3) $y^{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot y^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 4) $(y^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} : y^6$; 5) $m^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-1}$;

6) $n^{\sqrt{5}} \cdot n^{1,5} : \sqrt[4]{n^{4\sqrt{5}}}$; 7) $\frac{a^{\sqrt{2}} \cdot b^{\sqrt{2}}}{(ab)^{3+\sqrt{2}}}$; 8) $\frac{c^{\sqrt{5}} \cdot d^{\sqrt{5}+2}}{(cd)^{\sqrt{5}}}$; 9) $\left(\frac{a^{1-\sqrt{2}}}{a^{1+\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} \cdot a^5$; 10) $4^{3-2\sqrt{2}} \cdot 16^{\sqrt{2}}$;

11) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}}$; 12) $4^{1+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}} \cdot 2^{-1-\sqrt{5}}$; 13) $25^{3+\sqrt{5}} \cdot 5^{1-\sqrt{5}} \cdot 5^{-4-\sqrt{5}}$.

537. Упростите выражение:

1) $(x^{2+\sqrt{5}})^{2-\sqrt{5}}$; 2) $(x^{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}})^{\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}}$; 3) $(y^{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}})^{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}}$; 4) $(z^{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1})^{1-\sqrt[3]{2}}$.

538. Воспользовавшись калькулятором, вычислите с точностью до 0,01: $2^{3,14}$ и $2^{3,15}$; $2^{3,141}$ и $2^{3,142}$.

539. Воспользовавшись результатом, полученным при решении задания 538, найдите значение 2^π с точностью до 0,01.

540°. Используя график функции $y = 2^x$ (рис. 347), найдите приближённо:

1) значения функции в точках 1,5 и -1,5;

2) значения аргумента, при которых значение функции равно 0,4;

3) абсциссу точки его пересечения с прямой $y = 1,5$.

541. Пользуясь графиком функции $y = 2^x$, постройте графики функций:

1) $y = 2^{x-2}$; 2) $y = 2^{2-x}$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$; 4) $y = 2^{-x} - 1$; 5) $y = 2^{|x|}$; 6) $y = 2^{\sqrt{x^2}}$.

542. Найдите область определения и множество значений функции:

1) $y = 3^{2x} - 1$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$; 3) $y = 5^{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $y = 5^{\frac{1}{x}}$; 5) $y = 1^x$; 6) $y = \sqrt{2^x - 1}$.

543. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном промежутке, если они существуют:

1) $y = 3^{x-1}$, $[2; 4]$; 2) $y = 2^{-x}$, $[-1; 2]$; 3) $y = 3^{1-2x}$, $[-1; 1]$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$, $[2; -2]$.

544. Дана функция $y = 0,3 \cdot (1,5)^{2x-1} - 0,45$.

1) $\circ$ С помощью калькулятора составьте таблицу ее значений на отрезке $[-3; 3]$ с шагом 0,5.

2) Постройте ее график.

3) Найдите точки, в которых график функции пересекает оси координат.

4) При каких значениях аргумента x значения функции будут отличаться от $-0,45$ не более, чем на 0,2?

545. Вычислите значение данных выражений при $x = 1,5$:

1) $(2^{3x} + 2^{-2x})^2 - (2^{3x} - 2^{-2x})^2$; 2) $\frac{3^{4x} - 4x^2}{3^{2x} + 2x}$.

546 $^\circ$. Скорость погружения тела в жидкость описывается формулой $v = 2,5(1 - 2,7^{-1,5t})$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

1) Найдите скорость тела через 10 и 20 с после начала погружения.

2) На сколько изменится скорость за первые 10 с погружения? За следующие 10 с?

547. При радиоактивном распаде количество вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 суток? 3,5 суток? 100 суток?

548. Решите уравнение:

1) $2^{2x} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 2) $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 9$; 3) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$; 4) $5^x = 8^x$; 5) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

549. Решите неравенство:

1) $(0,5)^x > 1$; 2) $3^x < 9$; 3) $2^{3x} \geq \frac{1}{2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq 3$.

550. Дано выражение $f(x) = (2^x + 2^{-2x})^2 - (2^x - 2^{-2x})^2$.

1) $\circ$ Докажите, что $f(x) = 2^{-x+2}$.

2) $\circ$ Вычислите $f(1,5)$, $f(1)$, $f(-1)$.

3) $\circ$ В каких точках график функции $y = f(x)$ пересекает ось y , прямую $y = 2$?

4) ° Найдите область определения, множество значений функции $y = f(x)$, постройте её график.

5) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на промежутке $[-1; 2]$.

6) При каких значениях x выполняется соотношение: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $f(x) > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$?

7) * При каких значениях a имеет решения уравнение $f(x) = \frac{a-1}{2}$?

8) * Найдите множество значений функции $y = -3f(2x-1)$.

551. Дано выражение $f(x) = (3^x + 3^{-2x})^2 - (3^x - 3^{-2x})^2 - 3^{-x}$.

1) ° Докажите, что $f(x) = 3^{-x+1}$.

2) ° Вычислите $f(0,5)$, $f(2)$, $f(-2)$.

3) ° В каких точках график функции $y = f(x)$ пересекает ось y , прямую $y = \frac{1}{3}$?

4) ° Найдите область определения, множество значений функции $y = f(x)$, постройте её график.

5) ° Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на промежутке $[-2; 1]$.

6) При каких значениях x выполняется соотношение: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; $f(x) > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$?

7) * При каких значениях a имеет решения уравнение $f(x) = \frac{a-1}{3}$?

8) * Найдите множество значений функции $y = -2f(-x+1)+1$.



Упражнения для повторения

557°. Замените степень с целым отрицательным показателем дробью:

1) 5^{-3} ; 2) 8^{-2} ; 3) a^{-1} ; 4) c^{-10} ; 5) $(mn)^{-4}$; 6) $(a-1)^{-5}$; 7) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$; 8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

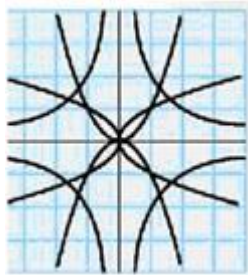
558°. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{5^3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{a^5}$; 4) $\frac{1}{b^4}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) 0,001; 7) 0,1; 8) 0,01.

559. Сравните числа: 1) 3^{-21} и $\left(\frac{1}{3}\right)^{-21}$; 2) 3^{-21} и 4^{-21} ; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{21}$ и 3^{-21} .

560°. Вычислите: 1) $3^{-4} \cdot 3^3$; 2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-5} \cdot (1,25)^4$; 3) $(\sqrt{3})^{-7} \cdot (\sqrt{3})^3$; 4) $11^0 \cdot 11^{-2}$

§ 33. ЛОГАРИФМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ



Задачи, которые рассматривались в предыдущем параграфе, часто сводились к уравнениям вида $a^x = b$, где a и b — некоторые положительные числа, $a \neq 1$. Их мы могли решать лишь в простейших случаях. Аналогичная ситуация возникала в связи с решением уравнения $x^n = b$, где $n \in \mathbb{N}$, $b > 0$. Тогда пришлось ввести операцию извлечения корня n -й степени из числа. В этом параграфе рассмотрим новую операцию, с помощью которой находится решение уравнения $a^x = b$. Это значительно расширит наши возможности в исследовании процессов и явлений, которые описываются показательными функциями.

1. Логарифмы и их свойства



Изучая степени и корни в разделе 2, мы по основанию a и показателю степени x находили значение степени $a^x = b$, или по значениям степени $a^x = b$ и показателя x находили основание a .

Например, $4^{-3} = \frac{1}{64}$, $9^{\frac{3}{2}} = 27$. Если $a^3 = 0,008$, то $a = \sqrt[3]{0,008} = 0,2$; если $a^{-\frac{4}{3}} = 16$, то $a = 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{8}$. Осталось рассмотреть задачу о нахождении пока-

зателя степени x по значениям степени $a^x = b$ и основания a . В простейших случаях её решение несложно. Например, если $5^x = \frac{1}{25}$, то $x = -2$; если $3^x = \sqrt{3}$, то $x = \frac{1}{2}$. В общем случае решение указанной задачи требует введения нового понятия.

Условия, при которых уравнение $a^x = b$ имеет решение, вытекают из свойств показательной функции $y = a^x$, $a > 0$. Множеством её значений при $a \neq 1$ является промежуток $(0; +\infty)$, и каждое своё значение функция принимает по одному разу вследствие монотонности (рис. 355). Поэтому при $b > 0$ решение уравнения существует и оно единственное. Данные соображения приводят к следующему определению.

Логарифмом числа $b > 0$ по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется такое число c , что $a^c = b$.

Другими словами, логарифм числа b с основанием a — это показатель степени c , в которую необходимо возвести a , чтобы получить b .

Если число b имеет по основанию a логарифм, то он единственный.

□ Если различные числа c и d были бы логарифмами числа b по основа-

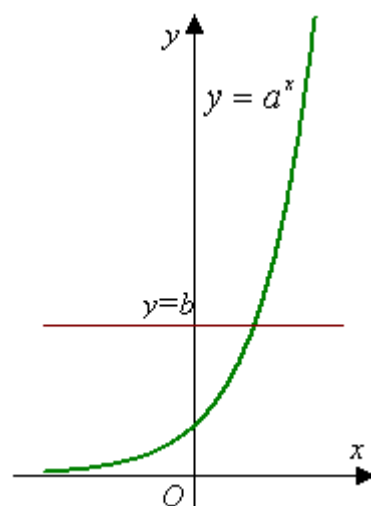


Рис. 355

нию a ($a > 0, a \neq 1$), то, по определению логарифма, выполнялись бы равенства $a^c = b, a^d = b$, откуда $a^c = a^d$. Тогда, по свойству степеней с положительным основанием, отличным от 1, имеем: $c = d$.

Теперь можно ввести обозначение: $c = \log_a b$ (читается: логарифм числа b по основанию a).

Поскольку логарифм числа b по основанию a — решение уравнения $a^x = b$, то имеем равенство

$$a^{\log_a b} = b.$$

Его ещё называют **основным логарифмическим тождеством**.

Заметим, что логарифмы отрицательных чисел не существуют, поскольку при отрицательных значениях b уравнение $a^x = b$ решений не имеет.

Логарифм – от греческих $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ (logos) – слово, учение, ум, отношение и $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$ (arithmos) – число, счёт, номер.

Пример 1. Найти: 1) $\log_2 32$; 2) $\log_3 \frac{1}{9}$; 3) $\log_4 2$; 4) $\log_{10} 1$.

□ 1) Уравнение $2^x = 32$ имеет единственное решение $x = 5$, которое легко найти подбором ($2^5 = 32$). То есть $\log_2 32 = 5$.

2) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; поскольку $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

3) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, поскольку $4^{\frac{1}{2}} = 2$.

4) $\log_{10} 1 = 0$, поскольку $10^0 = 1$. ■

Пример 2. Решить уравнение $\log_3(5x - 1) = 2$.

□ По определению логарифма, данное уравнение равносильно уравнению $5x - 1 = 3^2$, или $5x = 10$. Отсюда $x = 2$. ■

Ответ: 2.

Пример 3. Определить знак числа: 1) $\log_8 3$; 2) $\log_{0,5} 5 - \log_{0,5} 4$.

□ 1) Обозначив $\log_8 3$ через a , будем иметь: $8^a = 3$. Если $a < 0$, то $8^a = \frac{1}{8^{-a}} < 1$: получено противоречие. При $a = 0$ значение 8^a равно 1. Снова противоречие. Поэтому $a > 0$.

2) Обозначив данные числа соответственно через a и b , будем иметь: $0,5^a = 5, 0,5^b = 4$. Поскольку функция $y = (0,5)^x$ убывает и $0,5^a > 0,5^b$, то $a < b, a - b < 0$. ■

Ответ: 1) $\log_8 3 > 0$; 2) $\log_{0,5} 5 - \log_{0,5} 4 < 0$.

Многочисленные применения логарифмов основываются на их свойствах, которые вытекают из свойств степеней с действительными показателями.

Поскольку нулевая степень любого числа, отличного от нуля, равняется 1, то **логарифм 1 по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, равняется 0**.

Поскольку при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а показатели степеней складывают, то **логарифм произведения положительных чисел равняется сумме логарифмов сомножителей.**

Поскольку при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, то **логарифм частного от деления положительных чисел равняется разности логарифмов делимого и делителя.**

Поскольку при возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели степеней перемножают, то **логарифм степени положительного числа равняется произведению показателя степени на логарифм основания.**

Пример 4. Вычислить:

$$1) \log_{12} 2 + \log_{12} 72; \quad 2) \log_5 75 - \log_5 3; \quad 3) \log_{11} \sqrt[3]{121}; \quad 4) \log_3 243;$$

$$5) \log_2 8\sqrt{2}; \quad 6) \log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{3}}; \quad 7) 5^{\log_5 23}; \quad 8) 16^{\log_4 7}.$$

□ 1) По свойству логарифма произведения положительных чисел имеем:
 $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} (2 \cdot 72) = \log_{12} 144 = 2$, ибо $12^2 = 144$.

2) По свойству логарифма частного положительных чисел имеем:
 $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2$.

3) По свойству логарифма степени положительного числа имеем:
 $\log_{11} \sqrt[3]{121} = \log_{11} 11^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_{11} 11 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

4) Аналогично предыдущему: $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \cdot \log_3 3 = 5 \cdot 1 = 5$.

5) По свойству логарифма произведения положительных чисел имеем:
 $\log_2 8\sqrt{2} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

6) По свойству логарифма частного положительных чисел имеем:
 $\log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{3}} = \log_3 27 - \log_3 \sqrt[3]{3} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

По основному логарифмическому тождеству имеем:

$$7) 5^{\log_5 23} = 23;$$

$$8) 16^{\log_4 7} = (4^2)^{\log_4 7} = 4^{2\log_4 7} = (4^{\log_4 7})^2 = 7^2 = 49. \blacksquare$$

Операцию нахождения логарифмов чисел называют **логарифмированием**. Операция логарифмирования является обратной операции возведения в степень при фиксированном основании.

Пример 5. Найти $\log_a A$, если $A = \frac{3^4 \cdot \sqrt{2}}{4^3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}$.

□ Применяя свойства логарифмов, будем иметь:

$$\log_a A = 4\log_a 3 + \frac{1}{2}\log_a 2 - 3\log_a 4 - \frac{2}{3}\log_a 5. \blacksquare$$

Таким образом, операция возведения в степень имеет две обратные операции: операцию нахождения основания при известном натуральном показателе, большем 1, и известному результату возведения в степень (например, если $x^2 = 4$, то $x = 2$ или $x = -2$) и операцию логарифмирования, то есть нахождение показателя при известных основании и результате возведения в степени (например, если $2^x = 5$, то $x = \log_2 5$).

Обоснуем свойства логарифмов, приведенные выше.



Свойство 1. При произвольном $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a a = 1$ и $\log_a 1 = 0$.

□ Эти равенства вытекают из соотношений $a^1 = a$ и $a^0 = 1$.

Свойство 2. Для произвольных положительных a, b, c , $a \neq 1$ справедливо равенства:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

□ Для доказательства данных соотношений следует использовать основное логарифмическое тождество и свойства степени. Например,

$$a^{\log_a bc} = bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Равенство степеней числа a , $a \neq 1$, $a \neq 0$, приводит к равенству показателей. Таким образом, доказано первое соотношение. Аналогично доказывают и второе. ■

Свойство 3. Для произвольных действительных $p, b > 0$ и $a > 0$, $a \neq 1$ выполняется равенство:

$$\log_a b^p = p \log_a b.$$

□ Используем основное логарифмическое тождество и свойство степени:

$$a^{\log_a b^p} = b^p = (a^{\log_a b})^p = a^{p \log_a b}.$$

Отсюда и вытекает требуемое равенство. ■

Свойство 4 (формула перехода к другому основанию).

Для произвольных положительных a, b, c , $a \neq 1$ и $c \neq 1$ выполняется равенство:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

□ Доказательство представим в виде цепочки равенств:

$$\log_a b = \frac{\log_a b \log_c a}{\log_c a} = \frac{\log_c a^{\log_a b}}{\log_c a} = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \blacksquare$$

Следствие. Если $a > 0$, $b > 0$ и $a \neq 1$, $b \neq 1$, то

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Приведенные выше свойства дают возможность упрощать выражения и вы-

числения.

Пример 6. Вычислить $\log_{81} 243$.

□ Поскольку $81 = 3^4$, $243 = 3^5$, то $\log_{81} 243 = \frac{\log_3 243}{\log_3 81} = \frac{5}{4}$. ■

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Иногда приходится восстанавливать число или выражение по его логарифму. Такую операцию называют **потенцированием**, и она базируется на таком очевидном утверждении: если $\log_a x = \log_a y$, то $x = y$ (эквивалентно тому, что из $k = l$ вытекает $a^k = a^l$).

Потенцирование — от немецкого potenzieren — возводить в степень; в его основе лежит латинское potentia — способность, сила.

Пример 7. Найти x , если $\log_a x = \frac{1}{3} \log_a 2 + 2 \log_a 3 - \log_a 5$.

□ Используя свойство 3, будем иметь:

$$\log_a x = \log_a 2^{\frac{1}{3}} + \log_a 3^2 - \log_a 5 = \log_a \sqrt[3]{2} + \log_a 9 - \log_a 5.$$

После применения свойства 2 получим:

$$\log_a x = \log_a (\sqrt[3]{2} \cdot 9) - \log_a 5 = \log_a \frac{9\sqrt[3]{2}}{5}.$$

Отсюда $x = \frac{9\sqrt[3]{2}}{5}$. ■

Ответ. $\frac{9\sqrt[3]{2}}{5}$.

В математике широкое применение получили логарифмы по основаниям 10 и 2.

Логарифмы по основанию 10 называют десятичными и обозначают $\lg b$ (вместо $\log_{10} b$). Их введение связано с широким применением десятичной системы исчисления.

Логарифмы по основанию 2 используют при обработке данных в различных отраслях знаний.

Широко употребляются логарифмы по основанию, находящемуся между числами 2 и 3. Происхождение и значимость этого основания мы объясним при последующем изучении алгебры и начал анализа. Это число является иррациональным, приближённо оно равняется 2,718, его принято обозначать через e .

Логарифмы по основанию e называют натуральными и обозначают $\ln b$ (вместо $\log_e b$). Их распространение связано с широким применением показательной функции по основанию e .

Большинство калькуляторов дают возможность находить значение десятичных и натуральных логарифмов. Если же нужно вычислить логарифм по другому основанию, то следует воспользоваться формулой перехода к новому

основанию (свойство 4) и дальше работать с десятичными, или же с натуральными логарифмами.

Пример 8. Решить приближённо уравнение $(0,9)^x = 0,5$.

□ Согласно определению логарифма, $x = \log_{0,9} 0,5$. Перейдём к десятичным логарифмам:

$$x = \log_{0,9} 0,5 = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,9}.$$

Воспользовавшись калькулятором, получим $x \approx 6,6$. ■

Ответ: $\approx 6,6$.

Приведенное в примере 8 уравнение возникло при решении задачи о вытекании воды (§ 1). Теперь мы можем дать ответ: требуется примерно 6,6 единиц времени для того, чтобы количество воды в резервуаре уменьшилось вдвое.



В некоторых логарифмических формулах области определения левой и правой частей являются разными и это надо учитывать при решении задач. Следующая таблица 66 содержит такие формулы.

Таблица 66

№ п/п	Формула	Множество значений букв, входящих в формулу, при которых имеет смысл левая часть	Множество значений букв, входящих в формулу, при которых имеет смысл правая часть
1.	$a^{\log_a x} = x$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$	$a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$
2.	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ или $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$
3.	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ или $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$
4.	$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$	$a > 0, a \neq 1$; если $\alpha = 2k, k \in \mathbf{Z}$, то $x \neq 0$; если $\alpha \neq 2k, k \in \mathbf{Z}$, то $x > 0$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, \alpha \in \mathbf{R}$
5.	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, b \in \mathbf{R}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, b > 0, b \neq 1$
6.	$\log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a x$	$a > 0, a \neq 1$; если $\alpha = 2k, k \in \mathbf{Z}$, то $x \neq 0, \beta \neq 0$; если $\alpha \neq 2k, k \in \mathbf{Z}$, то $x > 0$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, \beta \neq 0, \alpha \in \mathbf{R}$

Тот факт, что в приведенных формулах левые и правые части имеют смысл при разных значениях входящих букв, может привести к ошибкам в заданиях на преобразование выражений, содержащих логарифмы, к потере корней решаемого уравнения. По этим причинам при решении различных задач, содержащих неизвестные величины, целесообразно пользоваться более общими формулами, представленными в таблице 67.

Таблица 67

Формула	Множество значений букв, входящих в формулу, при которых имеет смысл левая часть	Множество значений букв, входящих в формулу, при которых имеет смысл правая часть
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y $	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ или $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$	$a > 0, a \neq 1, x \neq 0, y \neq 0$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y $	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ или $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$	$a > 0, a \neq 1, x \neq 0, y \neq 0$
$\log_a x^{2k} = 2k \log_a x $	$a > 0, a \neq 1; x \neq 0, k \in \mathbf{Z}$	$a > 0, a \neq 1, x \neq 0, k \in \mathbf{Z}$
$\log_{a^{2k}} x = \frac{1}{2k} \log_{ a } x$	$a \neq 0, a \neq 1; k \in \mathbf{Z}, k \neq 0, x > 0$	$a \neq 0, a \neq 1, k \neq 0, k \in \mathbf{Z}, x > 0,$

В некоторых из приведенных формул также левые и правые части имеют смысл при разных значениях входящих букв. Например, правые части формулы $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$ имеют смысл при любых x и y , отличных от нуля, а левые части — лишь при x и y одинакового знака. Поэтому, например, при решении уравнений замена $\log_a xy$ на $\log_a |x| + \log_a |y|$ может привести к приобретению посторонних решений, но не к потере решений. Поскольку приобретение посторонних решений уравнения предпочтительнее, чем потеря (посторонние решения можно отбросить проверкой, а потерянные уже не найдёшь), то при преобразованиях буквенных выражений следует пользоваться формулами, приведенными в таблице 67.

Пример 9. Упростить выражение $\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 4x^4$ и вычислить затем его значение при $x = -2$.

□ Применение формул из таблицы 66 приводит к ошибке:

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 4x^4 = 2 \log_4 x - \log_4 4 - 2 \log_4 4 - 8 \log_4 x = -3 - 6 \log_4 x.$$

Полученное выражение не имеет смысла при $x = -2$, в то время, когда исходное имеет смысл и равно -6 . Ошибка произошла потому, что формула $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ применима лишь при положительных значениях x . Применим формулу $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$. Получим

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 4x^4 = 2 \log_4 |x| - \log_4 4 - 2 \log_4 4 - 8 \log_4 |x| = -3 - 6 \log_4 |x|.$$

При $x = -2$ последнее выражение равно -6 . ■



Контрольные вопросы

1. ° Имеет ли решения уравнение:

а) $3^x = 0,001$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1000$; в) $10^x = -1$; г) $5^x = 0$; д) $1^x = 2$; е) $(0,0003)^x = 1$?

2. ° Как записать с помощью степени з основанием 10 число: а) 10 000; б) 0,0001;

3. в) 3; г) 0,3; д) e ?

4. ° Чему равняется:

а) $\log_2 16$; б) $\log_2 \frac{1}{8}$; в) $\log_3 \frac{1}{3}$; г) $\log_a 1, a > 0, a \neq 1$;

д) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; е) $\log_5 \frac{1}{125}$; ж) $\log_a \frac{1}{a}, a > 0, a \neq 1$; з) $\log_{\frac{1}{a}} a, a > 0, a \neq 1$?

5. Какой знак имеет число: а) $\log_5 2$; б) $\ln 5$; в) $\ln 0,1$; г) $\log_{0,1} 2$?

6. Чему равняется значение выражения: а) $10^{\lg 2+1}$; б) $100^{-3\lg 2}$; в) $e^{2\ln e}$?

7. Как представить число 5 в виде степени 10; e ; 2?

8. Всегда ли верно равенство:

а) $\ln b^2 = 2 \ln b$; б) $\log_2(bc) = \log_2 b + \log_2 c$; в) $\lg b^4 = 2 \lg b^2$; г) $\ln a^5 = 5 \ln a$?

9. Какое из чисел больше:

а) $\log_2 3$ или $\log_2 6$; б) $\log_3 0,1$ или $\log_3 0,6$;

в) $\log_{0,2} 3$ или $\log_{0,2} 2$; г) $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

10. Заполните пустые клетки таблицы:

$\log_a b$	-4	0			-5	-2
a	2	3	5	$\frac{1}{3}$		
b			0,04	27	$\frac{1}{32}$	81

2. Свойства и график логарифмической функции



Определив понятие логарифма числа по основанию a , мы научились сопоставлять каждому положительному числу x его логарифм $\log_a x$. Другими словами, мы ввели функцию

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

которую называют **логарифмической**.

Обращаем внимание на связь между логарифмической функцией $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, и показательной $y = a^x, x \in R, a > 0, a \neq 1$ с одинаковыми основаниями. У показательной функции аргументом служит показатель степени, в то же время показатель степени является значением логарифмической функции. Значением показательной функции является степень, которая у логарифмической функции играет роль аргумента.

График логарифмической функции $y = \log_a x$ при любом положительном основании a , отличном от 1, проходит через точку с координатами $(1; 0)$, потому что $\log_a 1 = 0$. Эта точка симметрична точке с координатами $(0; 1)$, через которую проходит график произвольной показательной функции $y = a^x$ с основанием $a > 0, a \neq 1$. Указанные точки симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 355). Можно предположить, что графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

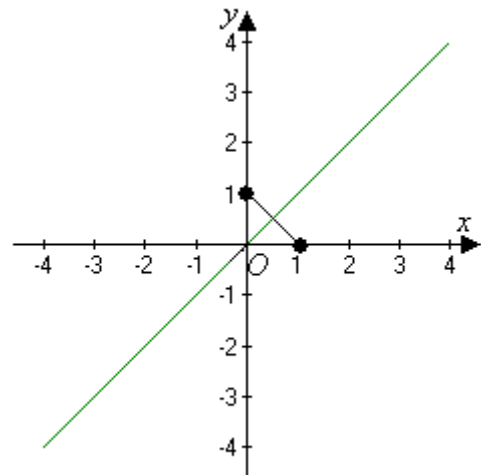


Рис. 355

Действительно, если точка $M(k; l)$ лежит на графике функции $y = a^x$, то $l = a^k$. Но тогда $k = \log_a l$ и точка $N(l; k)$ лежит на графике функции $y = \log_a x$. Поскольку точки $M(k; l)$ и $N(l; k)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 356), то симметричны и графики показательной и логарифмической функций.

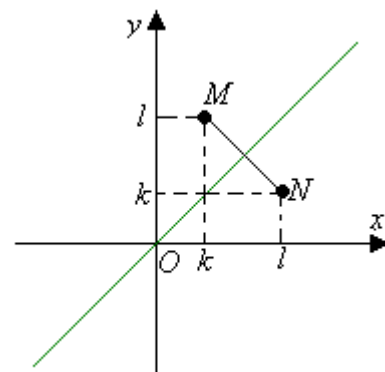


Рис. 356

Основываясь на приведенных рассуждениях, можно построить график логарифмической функции. Например, чтобы построить график функции $y = \log_2 x$, построим сначала график функции $y = 2^x$, а потом отобразим его симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 357). Похожий график имеют логарифмические функции с основаниями, большими 1 (рис. 358).

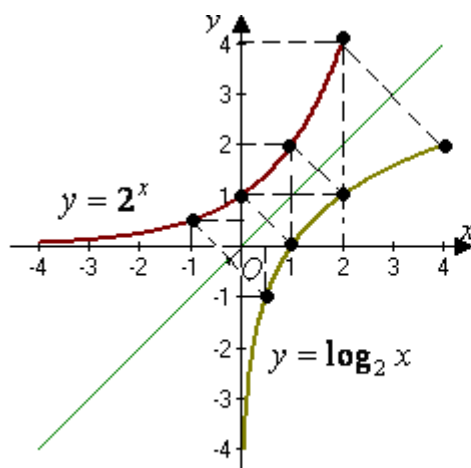


Рис. 357

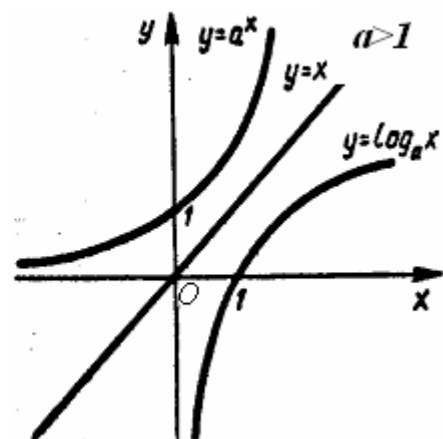


Рис. 358

Аналогично строится график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (рис. 359). Похожие графики имеют логарифмические функции с основаниями $0 < a < 1$ (рис. 360).

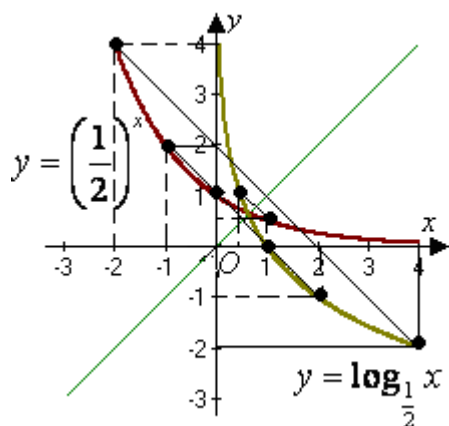


Рис. 359

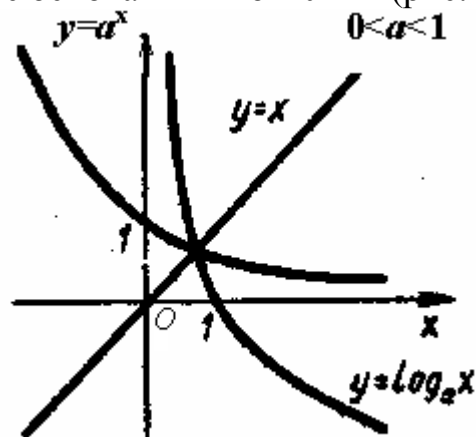


Рис. 360

Анализируя графики логарифмических функций, можно прийти к заключению, что их областью определения является множество положительных вещественных чисел, а множеством значений — множество всех вещественных чисел, что они непрерывны, при $a > 1$ они возрастают, а при $0 < a < 1$ — убывают. На рис. 361 изображены графики логарифмических функций с различными основаниями.

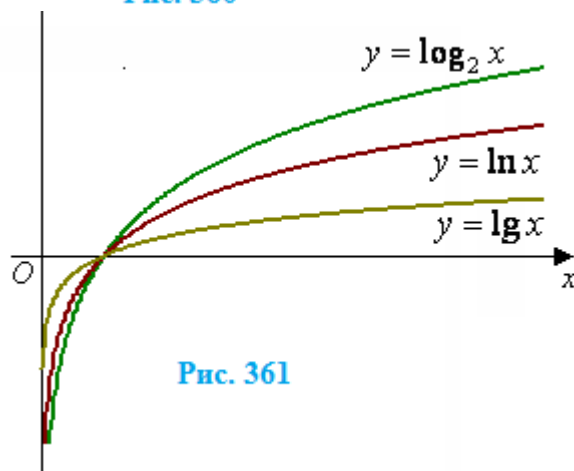


Рис. 361

Пример 10. Дана функция $y = \log_3(x + 3)$.

- 1) Найдите ее область определения и множество значений.
- 2) Найдите точки пересечения с осями координат.
- 3) Постройте ее график.
- 4) Проходит ли график этой функции через точку $A(3; 1)$; $B\left(-\frac{8}{3}; -1\right)$?
- 5) Сколько решений имеет уравнение $\log_3(x + 3) = x^2$?

□ 1) Область определения данной функции определяется неравенством $x + 3 > 0$. Отсюда $x > -3$, то есть $D(y) = (-3; +\infty)$. Множеством значений функции является множество $(-\infty; +\infty)$.

2) Чтобы найти точку пересечения графика с осью y , найдем значение функции при $x = 0$: $y(0) = \log_3(0 + 3) = 1$. Следовательно, график функции пересекает ось y в точке с координатами $(0; 1)$. Чтобы найти точку пересечения графика с осью x , найдем, при каких значениях x функция принимает значение 0: $0 = \log_3(x + 3)$; $x + 3 = 3^0$; $x + 3 = 1$; $x = -2$. Следовательно, график функции пересекает ось x в точке с координатами $(-2; 0)$.

3) График функции можно построить из графика функции $y = \log_3 x$

параллельным переносом последнего на 3 единицы в отрицательном направлении оси абсцисс (рис. 362).

4) Чтобы проверить, проходит ли график функции через точку $A(3; 1)$ найдем значение функции в точке $x = 3$: $y(3) = \log_3(3 + 3) = \log_3 6 \neq 1$. Следовательно, график функции не проходит через точку A . Аналогично,

$$y\left(-\frac{8}{3}\right) = \log_3\left(-\frac{8}{3} + 3\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1. \quad \text{График}$$

функции проходит через точку B .

5) Для ответа на вопрос нужно установить, в скольких точках пересекаются графики функций $y = \log_3(x + 3)$ и $y = x^2$. Парабола $y = x^2$ пересекает график данной функции в двух точках (рис. 363). Следовательно, уравнение имеет два корня. ■

В таблице 68 приведены обобщенные свойства функций $y = \log_a x$, $a > 1$ и $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

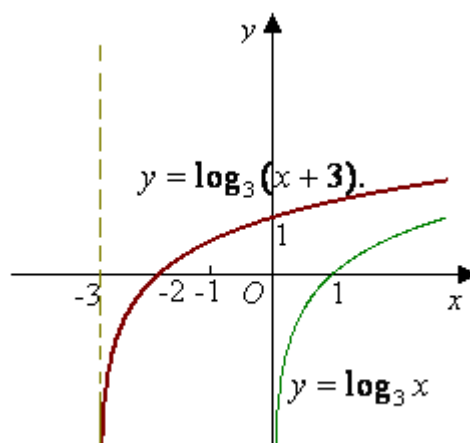


Рис. 362

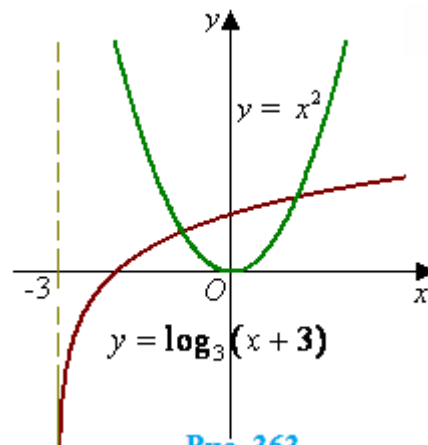


Рис. 363

Таблица 68

	$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$
Область определения	$(0; +\infty)$	
Нули функции	$x = 1$	
Чётность и нечётность	Ни чётная, ни нечётная	
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x > 1$ $y < 0$ при $0 < x < 1$	$y < 0$ при $x > 1$ $y > 0$ при $0 < x < 1$
Точки пересечения с осями координат	$(1; 0)$	
Промежутки монотонности	$\uparrow$ при $x \in (0; +\infty)$	$\downarrow$ при $x \in (0; +\infty)$
Наибольшее и наименьшее значения	Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений	
Множество значений	$(-\infty; +\infty)$	
Непрерывность	Непрерывная	
Асимптоты	$x = 0$	



Обоснуем вышеприведенные свойства логарифмической функции, и рассмотрим еще некоторые ее свойства.

Свойство 1. Логарифмическая функция монотонна: при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ она убывает.

□ Сначала рассмотрим случай $a > 1$. Пусть $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ — два числа такие, что $x_1 < x_2$, и докажем, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Обозначим первое из этих чисел через y_1 , а второе — через y_2 . По определению логарифма имеем: $a^{y_1} = x_1$, $a^{y_2} = x_2$. Нужно доказать, что $y_1 < y_2$. Предположим, что $y_1 \geq y_2$. Тогда согласно монотонности показательной функции $a^{y_1} \geq a^{y_2}$, или $x_1 \geq x_2$. Получили противоречие. Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично. Рекомендуем это сделать самостоятельно. ■

Свойство 2. Множество значений функции совпадает с множеством всех вещественных чисел.

□ Нужно доказать, что любое вещественное число y может быть логарифмом некоторого числа x . Поскольку степень a^y определена при любом y , то, положив $x = a^y$, получим: $\log_a a^y = y$, что и требовалось доказать. ■

Свойство 3. Логарифмическая функция непрерывна.

Свойство 4. Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании значений аргумента значения функции неограниченно возрастают, а при следовании значений аргумента к нулю значения функции неограниченно убывают.

Если $0 < a < 1$, то при неограниченном возрастании значений аргумента значения функции неограниченно убывают, а при следовании значений аргумента к нулю значения функции неограниченно возрастают.

Свойство 5. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$ и отрицательные при $0 < x < 1$.

Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$ и отрицательные при $x > 1$.

Последние три свойства вытекают из соответствующих свойств показательной функции.

Из монотонности логарифмической функции вытекает важное утверждение, которое широко применяется при решении уравнений.

Теорема. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.

□ Предположим, что $x_1 \neq x_2$, тогда либо $x_1 > x_2$, либо $x_1 < x_2$. Если $a > 1$, то из неравенства $x_1 > x_2$ вытекает, что $\log_a x_1 > \log_a x_2$, а из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$. В обоих случаях получили противоречие с условием $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Аналогично рассматривается случай, когда $0 < a < 1$. ■

Заметим, что обратное утверждение очевидно: если $x_1 = x_2$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Пример 11. Решить уравнение $\log_3(5x - 1) = \log_3 7$.

□ Из доказанной теоремы вытекает, что от заданного уравнения можно перейти к уравнению $5x - 1 = 7$. Отсюда $x = 1,6$. ■

Ответ: 1,6.

Говоря о применении логарифмических функций, надо иметь в виду, что потребность в них возникает там, где используют показательные функции. Например, пусть зависимость атмосферного давления от высоты местности над

уровнем моря описана с помощью показательной функции, как в примере 4 § 1, тогда высота над уровнем моря определяется через атмосферное давление с помощью логарифмической функции.

Кроме того, с помощью логарифмической функции моделируются некоторые реальные процессы и явления: зависимость скорости ракеты v от ее массы m задается формулой $v = v_2 \ln \frac{m_0}{m}$, где v_2 — скорость вылетающих газов, m_0 — стартовая масса ракеты; зависимость коэффициента D звукоизоляции стен от давления p звука, прошедшего через стену, задается формулой $D = A \lg \frac{p_0}{p}$, где p_0 — давление звука до поглощения, A — некоторая постоянная.



Введение логарифмов позволяет решить функциональное уравнение, которое использовал Н. И. Лобачевский в неевклидовой геометрии для определения угла параллельности. Функциональными называют такие уравнения, в которых искомыми являются некоторые функции, связанные с элементарными с помощью операций сложения, умножения и композиции, возможно с некоторыми дополнительными условиями.

В данном случае речь будет идти о функциональном уравнении

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y), \quad x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}.$$

Это уравнение будем решать в классе монотонных функций. Оно может использоваться при определении показательной функции, отличным от рассмотренного в предыдущем параграфе.

□ Покажем вначале, что если функция, удовлетворяющая данному уравнению, хотя бы в одной точке x_0 обращается в 0, то она тождественно равна 0. Действительно, $f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0) \cdot f(x_0) = 0$. Таким образом, функция $f(x) \equiv 0$ является решением данного уравнения.

Пусть теперь $f(x) \not\equiv 0$. Предположим, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет данному уравнению. Заменяя последовательно y на $x, 2x, 3x$, получим:

$$f(2x) = f^2(x), \quad f(3x) = f^3(x), \quad f(4x) = f^4(x).$$

Методом математической индукции легко доказать, что

$$f(nx) = f^n(x), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Рекомендуем это сделать самостоятельно.

Положив в последнем равенстве $x = 1$, затем $x = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbf{N}$) получим $f(n)$

$= f^n(1), \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = f^n\left(\frac{m}{n^2}\right)$. Кроме того, $f(m) = f^n(1)$. Отсюда

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f^{\frac{m}{n}}(1).$$

Итак, для положительных рациональных x

$$f(x) = f^x(1).$$

Убедимся, что полученная формула применима для всех рациональных

значений аргумента, а не только для положительных. Так как $f(x)$ является решением данного уравнения, то $f(x+0) = f(x) \cdot f(0)$, $f(0) = 1$, $f(0) = f^0(1)$. По той же причине,

$$1 = f(x-x) = f(x) \cdot f(-x), \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)} = f^{-1}(x).$$

Из полученных равенств вытекает, что $f(-x) = f^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathbf{Q}$. Итак, $f(x) = f^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathbf{Q}$.

Найдём решение данного функционального уравнения в классе монотонных функций. Пусть $f(x)$ не убывает при всех $x \in \mathbf{R}$. Доказано, что $f(x) = f^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathbf{Q}$. Если x — иррациональное число, то для любого натурального q найдётся целое число p такое, что

$$\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}.$$

Так как $f(x)$ — неубывающая функция, то из последнего неравенства имеем

$$f\left(\frac{p}{q}\right) < f(x) < f\left(\frac{p+1}{q}\right),$$

или

$$a^{\frac{p}{q}} \leq f(x) \leq a^{\frac{p+1}{q}}, \quad \text{где } a = f(1).$$

Поскольку $f(0) = 1$, то $f(1) > 1$ вследствие монотонности $f(x)$. Так как $a > 1$, то, прологарифмировав полученное неравенство, например, по основанию e , получим

$$\frac{p}{q} \ln a < \ln f(x) < \frac{p+1}{q} \ln a, \quad \frac{p}{q} < \frac{\ln f(x)}{\ln a} < \frac{p+1}{q}, \quad \frac{p}{q} < \log_a f(x) < \frac{p+1}{q}.$$

Здесь мы воспользовались свойствами логарифмов 3 и 4. Отсюда следует, что $\log_a f(x) = x$ или $f(x) = a^x$. Проверкой легко убедиться, что показательная функция $y = a^x$ является решением данного функционального уравнения.

Аналогично решается данное функциональное уравнение при условии, что $f(x)$ — невозрастающая функция.

Используя полученный результат, можно дать следующее определение показательной функции.

Показательная функция $y = f(x)$ — это монотонная функция, определённая на всей числовой оси и удовлетворяющая функциональному уравнению $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$.



Контрольные вопросы

1. ° Пересекает ли график функции $y = \log_a x$: а) ось x ; б) ось y ?
2. ° Как расположены друг относительно друга графики функций:
а) $y = \log_2 x$ и $y = 2^x$; б) $y = \log_2 x$ и $y = \log_2(-x)$; в) $y = \log_2 x$ и $y = 2^{-x}$?
3. ° Совпадают ли графики функций:

а) $y = \frac{1}{x}$ и $y = 2^{\log_2 \frac{1}{x}}$; б) $y = \lg x^2$ и $y = 2 \lg x$; в) $y = \log_2 2^x$ и $y = x$?

4. ° Проходит ли график функции $y = \log_{0,2} x$ через точку с координатами (5; 1)?

5. При каких значениях a функция $y = \log_{3a+1} x$ монотонно убывает?

6. При каких значениях x график функции $y = \log_{0,5} x$ проходит выше оси абсцисс?

7. График какой функции получим, если график функции $y = \log_{0,5}(2x - 1)$ перенести на две единицы параллельно в положительном направлении оси x и симметрично отобразить относительно оси x ?

8. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x \cdot \ln 0,5}$; б) $\sqrt{1 - \log_2 x}$; в) $\sqrt{\frac{x}{\ln x}}$?

9. Что больше 1 или $\log_{0,5} 0,7$?

10. При каких условиях существует функция $y = \log_{\cos \alpha} x$? Возрастающая она или убывающая?

Задачи

561°. Вычислите логарифм:

$$\begin{aligned} & 1) \log_2 16; \quad 2) \log_2 1; \quad 3) \log_2 \frac{1}{8}; \quad 4) \log_2 \sqrt[3]{4}; \quad 5) \log_{\frac{1}{3}} 9; \quad 6) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}; \\ & 7) \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}}; \quad 8) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{27}; \quad 9) \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}; \quad 10) \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{3}}{9}. \end{aligned}$$

562°. Найдите значение выражения:

$$1) 3^{\log_3 12}; \quad 2) 10^{\lg 3}; \quad 3) e^{\ln 5}; \quad 4) (0,2)^{\log_{\frac{1}{5}} 7}; \quad 5) \left(\frac{1}{4} \right)^{\log_{0,25} 9}.$$

563°. Вычислите:

$$1) 3^{5 \log_3 2}; \quad 2) \left(\frac{1}{2} \right)^{3 \log_{\frac{1}{2}} 5}; \quad 3) 5^{\frac{1}{2} \log_5 7}; \quad 4) \left(\frac{1}{3} \right)^{0,25 \log_{\frac{1}{3}} 16}.$$

564. Вычислите:

$$1) 0,125^{\log_{0,5} 1}; \quad 2) 9^{\log_3 12}; \quad 3) (\sqrt{3})^{\log_3 5}; \quad 4) \left(\frac{1}{16} \right)^{\log_4 3}.$$

565. Найдите x , если:

$$1) \log_x 3 = 2; \quad 2) \log_x 5 = \frac{1}{2}; \quad 3) \log_{\sqrt{x}} 7 = 2; \quad 4) \log_{\sqrt{x}} 6 = 4.$$

566°. Решите уравнение:

$$1) \log_6 x = 3; 2) \log_2 (5 - x) = 3; 3) \log_3 (x + 2) = 3; 4) \log_{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{2} \right) = -2.$$

567. Найдите значение выражения:

$$1) \circ \log_3 2,7 + \log_3 10; 2) \circ \lg 12 - \lg 1,2; 3) \circ \log_a a^5;$$

$$4) \log_{0,5} \left(\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{2} \right); 5) \log_{0,5} \frac{12,5}{100}; 6) \circ \log_a \sqrt[4]{a^3}.$$

568. Вычислите:

$$1) \frac{\lg 25}{\lg 5}; 2) \frac{\log_5 27}{\log_5 3}; 3) \frac{\log_7 \frac{25}{4}}{\log_7 2,5}; 4) (\log_{\sqrt{2}} 5)(\log_5 2); 5) \log_{\sqrt{3}} 2 + \log_3 2,25.$$

569. Вычислите с помощью калькулятора с точностью до 0,001:

$$1) \circ \lg 17; 2) \circ \lg 127; 3) \circ \ln 2,9; 4) \circ \ln 0,72; 5) \log_3 42; 6) \log_{0,25} 6,2.$$

570. Решите уравнение:

$$1) 2^x = 5; 2) 1,2^x = 4; 3) 1 + e^{0,2x} = 5; 4) 2^{3x-1} = 5; 5) 4 \cdot 3^{\frac{2}{x}} = 1,3; 6) 3^{x^2-2} = 2.$$

571. Упростите выражение и вычислите его значение при указанном значении x :

$$1) 2\lg 100x^4 - 3\lg \frac{x}{10}; x = 1,21; 2) \log_3 \sqrt{x} + \log_3 27x^2; x = 1,21;$$

$$3) 0,5\ln x^3 + 2\ln \frac{x}{e} - \ln(e^2 x); x = 1,21; 4) \sqrt{x} \log_5 x^2 + \log_5 \sqrt{x}; x = 1,21;$$

$$5*) \sqrt[8]{\frac{\log_2 x^2}{3} - \frac{\log_2 x^4}{5}}; x = -32.$$

572°. Дано выражение $f(x) = 3\lg 1000x^3 - 2\lg \frac{x}{100}$.

$$1) \text{ Докажите, что } f(x) = 10 + 7\lg x.$$

$$2) \text{ Вычислите значение выражения при } x = 0,01; 1,2.$$

$$3) \text{ При каком значении } x \text{ справедливо равенство } f(x) = 3?$$

573. Скорость погружения тела в жидкость описывается с помощью формулы $v = 2,5(1 - 2,7^{-1,5t})$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

1) Через сколько секунд после начала погружения скорость будет равняться 2,2 м/с?

2) Через сколько секунд скорость тела будет составлять 95% от максимальной?

574. Конструкция вакуум-насоса рассчитана на откачку за один ход поршня из камеры 3% газа от того количества, которое было в камере перед этим ходом поршня. Сколько таких движений надо сделать, чтобы откачать из камеры 99%

газа?

575. Количество особей биологической популяции в течение каждой единицы времени увеличивается на 8 % по отношению к предыдущей. Через сколько единиц времени численность популяции удвоится?

576. Давление воздуха убывает с ростом высоты (при постоянной температуре по закону $p = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$, где p_0 — давление на уровне моря ($h = 0$), p — давление на высоте h , H — некоторая константа, которая зависит от высоты. Найдите формулу для вычисления высоты подъёма в зависимости от давления.

577. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $^\circ f(x) = \log_3(x+3)$; 2) $^\circ f(x) = \lg(x^2+1)$; 3) $^\circ f(x) = \log_{0,3}(1-x^2)$;

4) $^\circ f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; 5) $^\circ f(x) = e^{\sqrt{2-x}}$; 6) $^\circ f(x) = \sqrt{1-2^x}$; 7) $^\circ \lg(2^x-1)$;

8) $^\circ f(x) = \sqrt{\log_{0,5} x}$; 9) $^\circ f(x) = a^{\log_2 x}$; 10) $^\circ f(x) = \lg \lg x$.

578°. Определите знак числа:

1) $\log_5 3$; 2) $\log_3 0,9$; 3) $\log_{0,7} 8$; 4) $\log_{0,3} 0,6$.

579. Сравните числа:

1) $\log_5 \frac{9}{10}$ и $\log_5 \frac{10}{11}$; 2) $\log_3 \sqrt{7}$ и $\log_3 2,6$; 3) $\log_{0,2} 4,21$ и $\log_{0,2} 4,19$;

4) $\log_{0,9} e$ и $\log_{0,9} \pi$.

580. Расположите числа a, b, c в порядке возрастания:

1) $a = 2^{-0,5}$; $b = 2 \cos \frac{\pi}{2}$; $c = \log_{0,1} 2$; 2) $a = \sqrt[10]{1,1}$; $b = \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$; $c = \log_2 5$.

581. Расположите числа a, b, c в порядке убывания:

1) $a = \sqrt{3}$; $b = 3^{-0,1}$; $c = \log_5 5$; 2) $a = \sqrt[3]{9}$; $b = 2 \sin \frac{\pi}{2}$; $c = \log_2 3$.

582. Решите неравенство:

1) $^\circ \log_5 x > \log_5 3$; 2) $^\circ \log_{\frac{1}{5}} x \leq \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$; 3) $^\circ \log_3 x < \log_3 2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 16$;

5) $\log_9 x^2 > 1$; 6) $\log_{\frac{1}{9}} x^2 \geq 1$.

583. Найдите все значения x , при которых совпадают функции:

1) $f(x) = 2^{\log_2 x}$ и $g(x) = x$; 2) $f(x) = 10^{\lg x^2}$ и $g(x) = x^2$; 3) $f(x) = \log_{x^2} 3$ и

$g(x) = 0,5 \log_{|x|} 3$; 4) $f(x) = \frac{\log_x 2}{\log_x 5}$ и $g(x) = \log_5 2$.

584. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на данном промежутке:

1) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $x \in [1; 4]$; 2) $f(x) = \log_3 x$, $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

585. Имея график функции $y = \log_3 x$, постройте график функции:

1) $y = 2\log_3 x$; 2) $y = \log_3 x + 3$; 3) $y = \log_3(x + 3)$;

4) $y = -\frac{1}{2}\log_3(x + 3)$; 5) $y = 1 - \log_3 x$.

586. При каких значениях x график функции $y = \log_2 x$ расположен над прямой $y = 8$?

587. Решите уравнение графически: 1) $\log_2 x = -x + 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$.

588. Дана функция $y = \log_2(x + 1)$.

1) Найдите её область определения и множество значений.

2) Найдите точки пересечения с осями координат.

3) Постройте её график.

4) Проходит ли график этой функции через точку $A(3; 2)$; $B\left(-\frac{3}{4}; 2\right)$?

5) Сколько решений имеет уравнение $\log_2(x + 1) = x - 1$?

589. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \log_2(x + 2)$.

1) $^\circ$ Найдите её область определения, множество значений, постройте её график.

2) $^\circ$ Вычислите $f(x_0)$, если $x_0 = \log_{0,5} \frac{1}{4}$.

3) $^\circ$ При каких значениях x справедливо равенство $f(x) = -2$?

4) При каких значениях x справедливо неравенство $f(x) < -2$?

5) * Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = |f(x)|$ на промежутке $\left[-\frac{7}{4}; 6\right]$.



Упражнения для повторения

590. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

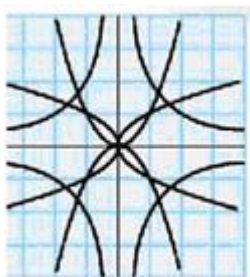
1) $y = x + 2$ и $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = x^2 + 6$ и $y = 7x - 4$; 3) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ и $y = 2$.

591. Решите неравенство:

1) $\frac{1}{-3+2x} < 0$; 2) $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$; 3) $\frac{x}{x+1} \leq 3$; 4) $|1 + 2x| > 1$.

592. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$; 3) $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.



§ 34. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем

В предыдущих параграфах рассматривались простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства. К таким уравнениям и неравенствам приводит исследование реальных процессов, которые описываются показательными или логарифмическими функциями. Решение более сложных показательных и логарифмических уравнений сводится к простейшим с помощью различных формул и преобразований. В этом параграфе рассмотрим некоторые способы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем.

1. Показательные уравнения и неравенства



Показательные уравнения и неравенства — это такие уравнения и неравенства, в которых неизвестная содержится в показателе степени. Простейшее показательное уравнение имеет вид $a^x = b$. Его решение найти нетрудно. Например, уравнению $3^x = 9$ удовлетворяет число $x = 2$, поскольку $3^2 = 9$. Корнем уравнения $3^x = 2$, согласно определению логарифма, является число $x = \log_3 2$. Уравнения $3^x = 0$, $3^x = -3$ решений не имеют, потому что показательная функция $y = 3^x$ принимает лишь положительные значения.

Но при этом возникает вопрос, все ли решения уравнений мы нашли. Ответ на него помогают найти свойства показательной функции. Поскольку функция $y = a^x$ монотонная, то каждое свое значение она принимает лишь в одной точке, то есть прямая $y = b$, $b > 0$, пересекает ее график лишь в одной точке (рис. 364).

Таким образом, уравнение $a^x = b$ при $b > 0$ имеет единственное решение, которое, по определению логарифма, равняется $x = \log_a b$, а при $b \leq 0$ решений не имеет.

Пример 1. Решить уравнение: 1) $3 \cdot 9^x = 1$; 2) $2^{2x} \cdot 5^x = 400$; 3) $7^x = 9^x$.

□ 1) Запишем уравнение в виде: $3 \cdot 3^{2x} = 1$, $3^{1+2x} = 3^0$. Отсюда $1 + 2x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

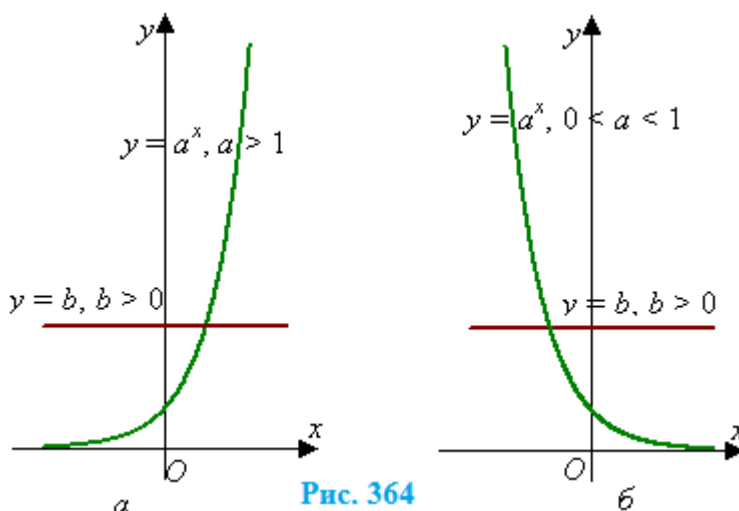


Рис. 364

2) Применяя свойства степеней, будем иметь:
 $2^{2x} \cdot 5^x = (2^2)^x \cdot 5^x = 4^x \cdot 5^x = 20^x$. Поскольку $400 = 20^2$, то уравнение принимает вид $20^x = 20^2$. Отсюда $x = 2$.

3) Поскольку $9^x \neq 0$, то, разделив обе части уравнения на 9^x , получим:
 $\frac{7^x}{9^x} = 1, \left(\frac{7}{9}\right)^x = \left(\frac{7}{9}\right)^0, x = 0$. ■

Ответ: 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) 0.

Общими методами решения показательных уравнений являются:

- переход от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- замена переменной;
- логарифмирование обеих частей уравнения;
- применение свойств функций.

Рассмотрим уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Оно имеет те же решения, что и уравнение $f(x) = g(x)$. Фактически этим утверждением мы пользовались, решая простейшие показательные уравнения. Оно вытекает из монотонности показательной функции.

Пример 2. Решить уравнение $125^x = 0,2^{x^2}$.

□ Учитывая, что $125 = 5^3$, а $0,2 = 5^{-1}$, данное уравнение можно записать в виде

$$5^{3x} = 5^{-x^2}.$$

Так как $5 > 0$ и $5 \neq 1$, то:

$$3x = -x^2 \text{ или } x(x + 3) = 0.$$

Таким образом, $x = 0$, $x = -3$ — решения данного уравнения. ■

Ответ: 0; -3.

Обратите внимание на то, что условие $a > 0$ и $a \neq 1$ является существенным. Равенство $1^x = 1^3$ справедливо при любом x , а не только при $x = 3$, а равенство $(-1)^x = 1^6$ — при любом чётном x .

Пример 3. Решить уравнение $3^{x^2-3x-1} = \frac{1}{27}$.

□ Поскольку $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, то данное уравнение можно записать в виде $3^{x^2-3x-1} = 3^{-3}$. Это уравнение равносильно уравнению $x^2 - 3x - 1 = -3$. Его корни, а значит и корни данного уравнения, такие: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. ■

Ответ: 1; 2.

Уравнение может содержать несколько показательных функций. Тогда их целесообразно выразить через одну. Обычно после этого уравнение преобразуется в алгебраическое.

Пример 4. Решить уравнение $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$.

□ Анализируя данное уравнение, можно увидеть, что левую часть легко преобразовать так, что оно будет содержать лишь одну функцию 3^x :

$2 \cdot 3^3 \cdot 3^x + 7 \cdot 3^{-2} \cdot 3^x = 493$, $54 \cdot 3^x + \frac{7}{9} \cdot 3^x = 493$, $\left(54 + \frac{7}{9}\right) \cdot 3^x = 493$. Полученное уравнение содержит одну функцию 3^x , заменой $3^x = t$ оно сводится к уравнению $\frac{493}{9} \cdot t = 493$. Отсюда $t = 9$, $3^x = 9$, $3^x = 3^2$, $x = 2$.

Данное уравнение можно иначе решить, не выполняя действий с дробными числами. Заметив, что $3^{x+3} = 3^5 \cdot 3^{x-2}$, делаем вывод, что уравнение содержит одну показательную функцию 3^{x-2} . Заменой $3^{x-2} = t$ сводим его к уравнению $2 \cdot 3^5 \cdot t + 7t = 493$. Отсюда $t = 1$. Уравнение $3^{x-2} = 1$ равносильно уравнению $x - 2 = 0$, то есть $x = 2$. ■

Ответ: 2.

Пример 5. Решить уравнение $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$.

□ Поскольку $4^{x+1} = 4^2 \cdot 4^{x-1} = 16 \cdot (2^{x-1})^2$, то заменой $2^{x-1} = t$ данное уравнение приводится к виду $33t - 16t^2 = 2$. Отсюда $t = 2$, или $t = \frac{1}{16}$. Решение задачи свелось к совокупности двух простейших уравнений $2^{x-1} = 2$, $2^{x-1} = \frac{1}{16}$, из которых находим: $x = 2$ или $x = -3$. ■

Ответ: 2; -3.

Пример 6. Решить уравнение $4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

□ Нетрудно заметить, что $4^x = (2^x)^2$, $9^x = (3^x)^2$, $6^x = 2^x \cdot 3^x$. Можно прийти к выводу, что относительно 3^x и 2^x уравнение является однородным второго порядка (вспомните однородные тригонометрические уравнения). Поскольку $9^x \neq 0$ при каждом $x \in \mathbf{R}$, то, разделив обе части уравнения на 9^x , получим равносильное уравнение

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0,$$

или

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

После замены $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ получим квадратное уравнение

$$y^2 + y - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Таким образом, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -2$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$. Первое из этих уравнений решений не имеет, а второе имеет единственный корень $x = \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$. ■

Ответ: 0.

Метод логарифмирования основывается на таком утверждении: **уравнение** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ **равносильно уравнению** $f(x) = g(x)$ **при условии, что** $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Оно обосновывается на основании монотонности логарифмической функции.

Другой способ решения уравнения $125^x = 0,2^{x^2}$ в примере 2 основывается на этом утверждении.

□ Поскольку левая и правая части уравнения положительны при всех значениях x , то данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_5 125^x = \log_5 0,2^{x^2}$$

(ми приравняли логарифмы обеих частей уравнения по основанию 5), или $x \log_5 125 = x^2 \log_5 0,2$, $3x \log_5 5 = -x^2 \log_5 5$. Отсюда получим уже знакомое нам уравнение $3x = -x^2$. ■

Пример 7. Решить уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{x}{2} - \frac{5}{9}$.

□ Ни одним из рассмотренных в предыдущих примерах методов решить это уравнение не удаётся. Попробуем найти какое-нибудь его решение методом подбора. В данном случае это сделать несложно:

$$x = 2, \text{ ибо } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad \frac{2}{2} - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

Покажем, что других корней уравнение не имеет. Функция

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \text{ убывающая, а функция } y = \frac{x}{2} - \frac{5}{9} \text{ — воз-}$$

растающая (рис. 365). Поэтому при $x > 2$ значение первой функции меньше $\frac{4}{9}$, а второй — бо-

льше $\frac{4}{9}$; при $x < 2$, наоборот, значения первой функции больше $\frac{4}{9}$, а второй —

меньше $\frac{4}{9}$. Следовательно, графики этих функций не могут иметь точек пересечения при $x \neq 2$. ■

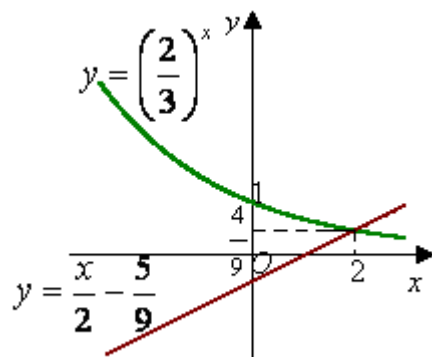


Рис. 365

Ответ: 2.

Решение показательных неравенств основывается на применении свойств монотонности показательных функций. Функции $y = a^x$ при $a > 1$ монотонно возрастают, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывают.

В соответствии с этим **неравенство** $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ **равносильно неравенству** $f(x) < g(x)$ **при** $a > 1$ **и** $f(x) > g(x)$ **при** $0 < a < 1$.

Пример 8. Решить неравенство: $(0,5)^{x-2} < (0,5)^{1-x}$.

□ Поскольку $0 < 0,5 < 1$, то данное неравенство равносильно линейному

неравенству $x - 2 > 1 - x$, или $2x > 1$, $x > \frac{1}{2}$. ■

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



Основными методами решения показательных неравенств, кстати, как и других классов неравенств, является метод разложения на множители, метод замены переменной, функциональные методы и, в первую очередь, метод интервалов.

Пример 9. Решить неравенство $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$.

□ Обозначим $3^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2 - 4t + 3 < 0$. Оно справедливо при $1 < t < 3$. Поскольку $3^x = t$, то $1 < 3^x < 3$, или $3^0 < 3^x < 3^1$, $0 < x < 1$. ■

Ответ: $(0; 1)$.

Пример 10. Решить неравенство: 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{x}{2} - \frac{5}{9}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{x}{2} - \frac{5}{9}$.

□ Из решения примера 7 и рис. 365 вытекает, что неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{x}{2} - \frac{5}{9}$ выполняется при $x > 2$, а неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{x}{2} - \frac{5}{9}$ — при $x < 2$. ■

Ответ: 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$.

При решении показательных уравнений мы пользовались следующими утверждениями.

Теорема 1. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, тогда уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 2. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при условии, что $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Докажем первое из этих утверждений.

□ Пусть x_0 — решение уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то есть $a^{f(x_0)} = a^{g(x_0)}$. Если предположить, что $f(x_0) > g(x_0)$ или $f(x_0) < g(x_0)$, то прийдём к противоречию со свойством монотонности показательной функции. Действительно, если $a > 1$, то из неравенства $f(x_0) > g(x_0)$ вытекает, что $a^{f(x_0)} > a^{g(x_0)}$, а из неравенства $f(x_0) < g(x_0)$ — $a^{f(x_0)} < a^{g(x_0)}$. Следовательно, прийдём к выводу, что $f(x_0) = g(x_0)$, то есть x_0 — решение уравнения $f(x) = g(x)$.

Обратное утверждение является почти очевидным: если x_0 — решение уравнения $f(x) = g(x)$, то есть $f(x_0) = g(x_0)$, то $a^{f(x_0)} = a^{g(x_0)}$, то есть x_0 является также решением уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. ■

Теорема 2 доказывается аналогично. Рекомендуем сделать это самостоятельно.

Приведём примеры решения более сложных, по сравнению с рассмотренными, показательных уравнений и неравенств.

Пример 11. Решить уравнение $2^{x^2-1} = 3^{4x}$.

□ Поскольку $3 = 2^{\log_2 3}$, то данное уравнение можно преобразовать к виду $2^{x^2-1} = (2^{\log_2 3})^{4x}$. Это уравнение равносильно уравнению $x^2 - 1 = 4x \log_2 3$. Его корни, а значит и корни данного уравнения, такие: $2 \log_2 3 \pm \sqrt{4 \log_2^2 3 + 1}$. ■

Ответ: $2 \log_2 3 \pm \sqrt{4 \log_2^2 3 + 1}$.

Пример 12. Решить уравнение $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$.

□ Обращаем внимание на то, что если перепишем уравнение в виде

$$3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 3^1 \cdot 2^1$$

и приравняем показатели при соответствующих основаниях $x = 1$, $\frac{3x}{x+2} = 1$, то

найдем один из корней данного уравнения $x = 1$. Но это решение не является полным, ибо не выяснено, существуют ли другие корни данного уравнения.

Попробуем применить метод логарифмирования к рассматриваемому уравнению. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$$x \lg 3 + \frac{3x}{x+2} \lg 2 = \lg 6,$$

или

$$\lg 3 \cdot x^2 + (3 \lg 2 + 2 \lg 3 - \lg 6) \cdot x - 2 \lg 6 = 0, \text{ где } x \neq -2.$$

Полученное квадратное уравнение можно решить по известной формуле, но можно воспользоваться тем, что $x = 1$ является корнем данного уравнения, а значит и корнем равносильного ему квадратного уравнения. Поэтому второй корень можно найти, воспользовавшись теоремой Виета. Поскольку произведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равно $\frac{c}{a}$, то для данного уравнения имеем:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{2 \lg 6}{\lg 3} = -2 \log_3 6,$$

то есть данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -2 \log_3 6$. ■

Ответ: $1; -2 \log_3 6$.

Пример 13. Решить неравенство: $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$.

□ Данное неравенство можно переписать в таком виде:

$$(4x^2 - 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}) + (3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 6) + (x \cdot 3^{\sqrt{x}} - 2x) < 0.$$

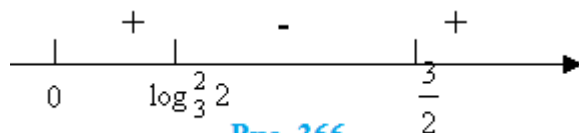
Разложив левую часть на множители, будем иметь:

$$(-2x^2 + x + 3) \cdot (3^{\sqrt{x}} - 2) < 0$$

или

$$(2x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (3^{\sqrt{x}} - 2) > 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов. Область определения функции $y = (2x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (3^{\sqrt{x}} - 2)$ образуют все неотрицательные действительные числа. Нулями этой функции, принадлежащими области определения, являются числа $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \log_3^2 2$. Они разбивают область определения на три промежутка. Определим знаки, которые принимает функция на каждом из этих промежутков. Поскольку $0,25 < \log_3^2 2 < 1$ (рекомендуем проверить это самостоятельно) и $y(0,25) > 0$, $y(1) < 0$, $y(2) > 0$, то имеем распределение знаков, представленное на рис. 366. Следовательно, решения данного неравенства образуют множество: $[0; \log_3^2 2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Заме-



тим, во-первых, что число 0 входит в область определения функции и поэтому оно входит в множество решений неравенства. Во-вторых, $0 < \log_3^2 2 < 1$, поскольку рассматривается логарифм числа, большего 1, по основанию, превышающему это число. ■

$$\text{Ответ. } [0; \log_3^2 2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

При решении систем показательных уравнений применяются те же методы, что и при решении систем алгебраических уравнений.

Пример 14. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

□ Поскольку обе части обоих уравнений являются положительными при всех значениях x и y , то их можно почленно перемножить и разделить. Перемножив почленно уравнения данной системы, получим уравнение $2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 216$, или $6^{x+y} = 6^3$, откуда $x + y = 3$.

Разделив почленно первое уравнение системы на второе, получим уравнение $2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3}$, или $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}$, откуда $x - y = 1$. Далее из системы уравне-

ний $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$ находим $x = 2$, $y = 1$. Мы не проводили детального анализа, рав-

носильна ли полученная система линейных уравнений данной. Но нетрудно проследить, что если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет данной системе, то она удовлетворяет и системе линейных уравнений. В таком случае говорят, что полученная система линейных уравнений является следствием данной системы. Проверка показывает, что пара

(2; 1) действительно является решением данной системы. ■

Ответ: (2; 1).



В некоторых уравнениях встречается так называемая **степенно – показательная** функция $y = (f(x))^{\varphi(x)}$. Что считать её областью определения? Единой, общепринятой договоренности об этом нет. Если вам встретится задача с такой функцией, надо обязательно четко указать, какого определения Вы придерживаетесь.

Рассмотрим уравнение $x = x^{x+2}$. Числа 0 и -1 удовлетворяют ему: $0^{0+2} = 0$, $(-1)^{-1+2} = (-1)^1 = -1$. Но если считать, что функция $y = x^{x+2}$ обладает свойствами показательной функции, то числа 0 и -1 не входят в её область определения и поэтому не являются корнями рассматриваемого уравнения. Таким образом, считать числа 0 и -1 корнями уравнения $x = x^{x+2}$ или нет, зависит от договорённости, при каких значениях x определена функция $y = x^{x+2}$.

Исходя из определения степени, помещённого в разделе 2 данного учебника, будем считать, что естественной областью определения функции $y = f(x)^{g(x)}$ является объединение множеств значений x , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $f(x) > 0$, $g(x)$ имеет смысл;
- 2) $f(x) < 0$, $g(x)$ — целое число;
- 3) $f(x) = 0$, $g(x)$ — целое положительное число.

Исходя из этого соглашения, теперь можно сказать, что числа 0 и -1 являются корнями уравнения $x = x^{x+2}$. Однако число -1 не является корнем уравнения $x^{\frac{x}{2}} = 1$, так как выражение $(-1)^{\frac{1}{2}}$ не определено. Точно также число 0 является корнем уравнения $x^{\frac{x+2}{2}} = x^3$ и не является корнем уравнения $x^{\frac{x+2}{3}} = x^3$, так как символ $0^{\frac{2}{3}}$ не имеет смысла.

Пример 15. Решить уравнение $(3x - 4)^{2x^2+2} = (3x - 4)^{5x}$.

□ При решении данного степенно-показательного уравнения нужно рассмотреть четыре случая.

1) $3x - 4 = 1$. В этом случае уравнение принимает вид $1^{2x^2+2} = 1^{5x}$, т. е. $1 = 1$. Значит, корень уравнения $3x - 4 = 1$, то есть $x = \frac{5}{3}$ является корнем данного уравнения.

2) $3x - 4 = -1$. В этом случае уравнение принимает вид $(-1)^{2x^2+2} = (-1)^{5x}$. Этому уравнению могут удовлетворять только такие значения x , при которых $3x - 4$ и $5x$ — целые числа (поскольку дробная степень отрицательного числа не

определена) одинаковой чётности. Ясно, что корень уравнения $3x - 4 = -1$, то есть $x = 1$, не удовлетворяет уравнению.

3) $3x - 4 = 0$, т. е. $x = \frac{4}{3}$. В этом случае уравнение принимает вид

$0^{2x^2+2} = 0^{5x}$. Этому уравнению могут удовлетворять только такие значения x , при которых $2x^2 + 2$ и $5x$ — положительные числа, так как выражение 0^a имеет смысл лишь при $a > 0$. Число $x = \frac{4}{3}$ — корень данного уравнения.

4) $3x - 4 > 0$, $3x - 4 \neq 1$. Тогда из данного уравнения заключаем, что $2x^2 + 2 = 5x$, откуда находим $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$. Последнее значение не удовлетворяет условию $3x - 4 > 0$, поэтому оно не является корнем данного уравнения. ■

Ответ: $\left\{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right\}$.

Следует заметить, что иногда удобно считать, что функция вида $y = f(x)^{g(x)}$ определена только при тех x , для которых $f(x) > 0$, и $g(x)$ имеет смысл. Например, при изучении математического анализа это нужно для того, чтобы представить эту функцию в виде $e^{g(x)\ln f(x)}$ при вычислении её производной. В этом случае уравнение, рассмотренное в примере 15, где фигурирует функция с указанными ограничениями, своими корнями будет иметь числа $\left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$.

Ввиду неоднозначного подхода к установлению области определения функции $y = f(x)^{g(x)}$, рекомендуем при решении степенно-показательных уравнений чётко указать, что Вы считаете областью определения этой функции.



Контрольные вопросы

1. ° Может ли уравнение $a^x = b$ иметь два решения?
2. ° Какие из следующих уравнений не имеют решений: 1) $5^x = -2$; 2) $5^x = 0$; 3) $5^x = 2$?
3. ° Можно ли число 2 представить в виде степени числа 5?
4. Сколько решений имеет уравнение: 1) $2^x = \frac{1}{x}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{1}{x}$; 3) $2^x = -x$?
5. При каких значениях a уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 - a$ имеет корни?
6. Каково решение неравенства:
1) $2^x > 0$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$; 3) $2^x > 1$; 4) $2^x < 1$; 5) $2^x > -1$?

7. Какие целые числа удовлетворяют неравенство: 1) $\frac{1}{27} < 3^x < 3$; 2)

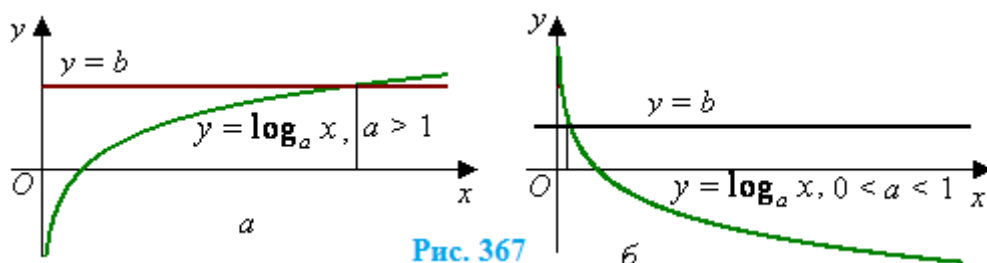
$$\frac{1}{9} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 9?$$

2. Логарифмические уравнения и неравенства



Логарифмические уравнения и неравенства — это такие уравнения и неравенства, в которых неизвестная содержится под знаком логарифма. Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид $\log_a x = b$. Его решения найти нетрудно. Например, уравнению $\log_3 x = 2$ удовлетворяет число $x = 3^2 = 9$, поскольку $\log_3 9 = 2$. Понятно, что уравнение $\log_a x = b$ имеет решение при любом $a > 0$, $a \neq 1$ и любом $b \in \mathbf{R}$.

Но при этом возникает вопрос, все ли решения уравнения мы нашли. Ответ на него помогают найти свойства логарифмической функции. Поскольку функция $y = \log_a x$ монотонна, то каждое своё значение она принимает лишь в одной точке, то есть прямая $y = b$, $b \in \mathbf{R}$, пересекает её график лишь в одной точке (рис. 367).



Таким образом, уравнение $\log_a x = b$ имеет единственное решение, которое, в соответствии с определением логарифма, равно $x = a^b$.

Пример 16. Решить уравнение: 1) $\log_5(2 - x) = 2$; 2) $\log_3(x^2 - 3x + 11) = 2$.

□ 1) По определению логарифма, $5^2 = 2 - x$, откуда $x = -23$.

2) Данному уравнению удовлетворяют те значения x , для которых справедливо равенство $x^2 - 3x + 11 = 3^2$. Полученное квадратное уравнение имеет корнями числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, которые являются решениями данного уравнения.

Ответ: 1) -23 ; 2) 1 и 2 .

При решении логарифмических уравнений применяют:

- переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- свойства логарифмов;
- замену переменной;
- логарифмирование;
- функциональные методы и т. п.

Рассмотрим логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Решение таких уравнений основывается на следующем утверждении, кото-

рое применялось в предыдущем пункте: **уравнение** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ **равносильно уравнению** $f(x) = g(x)$ **при условии, что** $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Объясним на примерах его сущность, идею обоснования и применения.

Пример 17. Решить уравнение: $\log_2(x+1) = \log_2 \frac{8}{x+3}$.

□ Пусть x_0 — корень этого уравнения, тогда имеет место числовое равенство $\log_2(x_0+1) = \log_2 \frac{8}{x_0+3}$, или $x_0+1 = \frac{8}{x_0+3}$ (последнее равенство вытекает

из того, что равны основания двух степеней, отличные от 1, показатели степеней, то есть логарифмы, а значит и степени, то есть выражения, стоящие под знаками логарифмов). Отсюда: $x_0^2 + 4x_0 - 5 = 0$, $x_0 + 3 \neq 0$. Последнее равенство верно, если $x_0 = 1$ или

$x_0 = -5$. Следовательно, предположив, что число x_0 — корень данного уравнения, мы показали, что оно может равняться или 1, или -5 . Проверим, являются ли эти числа корнями исходного уравнения. Подставляя последовательно в его левую и правую части число 1, получим:

$\log_2(x+1) = \log_2(1+1) = \log_2 2 = 1$; $\log_2 \frac{8}{x+3} = \log_2 \frac{8}{1+3} = \log_2 2 = 1$, то есть $x = 1$

— корень данного уравнения. При $x = -5$ значения выражений $x+1$ и $\frac{8}{x+3}$ отрицательны, обе части уравнения не имеют смысла, то есть $x = -5$ не является корнем данного уравнения. ■

Ответ: 1.

Обращаем внимание на то, что число $x = 1$ является корнем как данного уравнения, так и уравнения $x+1 = \frac{8}{x+3}$. В то же время число -5 не является корнем данного уравнения, но является корнем последнего уравнения. Таким образом, при переходе от данного уравнения к уравнению $x+1 = \frac{8}{x+3}$ корень $x = 1$ сохранился, но появился посторонний корень $x = -5$. В этом случае последнее уравнение называют *следствием* данного уравнения.

Если все корни одного уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Как и в примере 17, часто уравнение вообще, логарифмические уравнения в частности, решаются постепенным переходом к более простым уравнениям, которые являются следствиями исходного уравнения. В таких случаях после нахождения корней *необходима их проверка*.

Пример 18. Решить уравнение: $\log_2(x-2) = \log_2(x^2 - x - 17)$.

□ От данного уравнения переходим к квадратному уравнению $x-2 = x^2 - x - 17$, потом к уравнению $x^2 - 2x - 15 = 0$. Каждое из этих уравнений является следствием данного логарифмического уравнения. Поэтому можем решить квадратное уравнение, а потом проверкой выяснить, какие из его

корней удовлетворяют данному логарифмическому уравнению. Уравнение $x^2 - 2x - 15 = 0$ имеет корни $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. При $x = 5$ имеем $\log_2(5 - 2) = \log_2(5^2 - 5 - 17) = \log_2 3$. При $x = -3$ выражение $\log_2(-3 - 2)$ не имеет смысла. ■

Ответ: 5.

Одним из методов решения логарифмических уравнений является применение свойств логарифмов.

Приклад 19. Решить уравнение: $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$.

□ В соответствии со свойством логарифма частного (см. § 2), имеем:

$$\lg \frac{3x^2 + 12x + 19}{3x + 4} = 1. \text{ Заметим, что полученное уравнение является следствием}$$

исходного уравнения: в данном уравнении каждое из выражений, стоящих под знаком логарифма, принимает положительные значения, а числитель и знаменатель в последнем уравнении могут одновременно принимать или положительные, или отрицательные значения. В соответствии с определением

$$\text{логарифма, } \frac{3x^2 + 12x + 19}{3x + 4} = 10, \quad \text{или} \quad 3x^2 - 18x - 21 = 0, \quad \text{или}$$

$x^2 - 6x - 7 = 0$, $3x + 4 \neq 0$. Корнями последнего уравнения являются числа 7 и -1. Проверка показывает, что эти числа являются корнями исходного уравнения:

$$\lg(3 \cdot 7^2 + 12 \cdot 7 + 19) - \lg(3 \cdot 7 + 4) = \lg 250 - \lg 25 = \lg \frac{250}{25} = \lg 10 = 1,$$

$$\lg(3 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) + 19) - \lg(3 \cdot (-1) + 4) = \lg 10 - \lg 1 = 1 - 0 = 1. \quad \blacksquare$$

Ответ: 7; -1.

Обращаем внимание на то, что числа 7 и -1 являются корнями как исходного уравнения, так и уравнений $\lg \frac{3x^2 + 12x + 19}{3x + 4} = 1$ и $\frac{3x^2 + 12x + 19}{3x + 4} = 10$,

причём эти уравнения других корней не имеют. Все эти уравнения имеют одинаковую совокупность корней, такие уравнения называются **равносильными**.

Два уравнения называются равносильными, если они имеют одинаковое множество решений.

В частности, два уравнения, не имеющие корней, являются равносильными. Уравнения первой степени, квадратные уравнения, показательные уравнения, которые рассматривались ранее, решались переходом от данного уравнения к равносильному. В то же время при возведении обеих частей иррационального уравнения $\sqrt{x + 2} = x$ в квадрат получим уравнение $x + 2 = x^2$, являющееся его следствием, но не равносильным ему: -1 является корнем последнего уравнения, но не удовлетворяет первому уравнению. Поэтому решение таких уравнений требует проверки.

Распространенным является способ приведения логарифмических уравнений к более простым (например, алгебраическим) введением новых неиз-

вестных.

Пример 20. Решить уравнение:

1) $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$; 2) $2\log_4 x + 3\log_x 4 = 5$.

□ 1) Обозначив $\log_2 x = y$, получим квадратное уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0$, имеющее корни $y_1 = 3$, $y_2 = -1$. Решение задачи свелось к двум простейшим уравнениям $\log_2 x = 3$ и $\log_2 x = -1$, из которых находим: $x_1 = 2^3 = 8$, $x_2 = 2^{-1} = 0,5$.

2) Преобразуем $\log_x 4$ переходом к основанию 4: $\log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}$. Замена

$\log_4 x = y$ приводит к уравнению $2y + \frac{3}{y} = 5$, или $\frac{2y^2 - 5y + 3}{y} = 0$. Отсюда

$$2y^2 - 5y + 3 = 0, \quad y \neq 0. \text{ Решив квадратное уравнение, получим: } y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{3}{2}.$$

Если $\log_4 x = 1$, то $x = 4$; если $\log_4 x = \frac{3}{2}$, то $x = 4^{\frac{3}{2}} = 8$. ■

Ответ: 1) 8; 0,5; 2) 4; 8.

Если неизвестная под знаком логарифма стоит в показателе степени, то целесообразно прологарифмировать обе части равенства: ведь уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ при условии, что $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Пример 21. Решить уравнение $7^{3\lg x} = 34,3x$.

□ Обе части уравнения принимают положительные значения: левая часть как степень некоторого числа, правая часть — на основании того, что $x > 0$.

Учитывая, что $34,3 = \frac{343}{10} = \frac{7^3}{10}$, прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10: $3\lg x \cdot \lg 7 = 3\lg 7 - \lg 10 + \lg x$. Отсюда: $\lg x(3\lg 7 - 1) = 3\lg 7 - 1$, $\lg x = 1$, $x = 10$. ■

Ответ: 10.

Как и для показательных уравнений, во время решения логарифмических уравнений часто оказывается полезным применение свойств и графиков функций, входящих в уравнение.

Пример 22. Решить уравнение $\log_2(x+2) = 4 - x$.

□ Ни одним из рассмотренных в предыдущих примерах методов решить это уравнение не удаётся. Попробуем найти любое его решение методом подбора. В данном случае это сделать нетрудно: $x = 2$, потому что $\log_2(2+2) = 2$, $4 - 2 = 2$. Покажем, что других

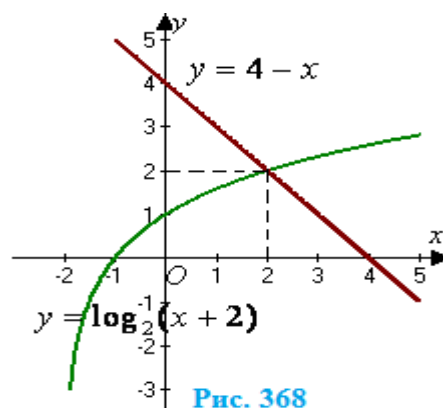


Рис. 368

корней уравнение не имеет. Функция $y = \log_2(x + 2)$ возрастающая, а функция $y = 4 - x$ — убывающая (рис. 368). Поэтому при $x > 2$ значения первой функции больше 2, а второй — меньше 2; при $x < 2$, наоборот, значения первой функции меньше 2, а второй — больше 2. Следовательно, графики этих функций не могут иметь точек пересечения при $x \neq 2$. ■

Ответ: 2.

Решение логарифмических неравенств основывается на использовании свойств монотонности логарифмических функций. Функции $y = \log_a x$ определены при $x > 0$ и при $a > 1$ монотонно возрастают, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывают.

Пример 23. Решить неравенство: 1) $\log_3 x < -1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$.

□ 1) Запишем неравенство в виде $\log_3 x < \log_3 3^{-1}$ или $\log_3 x < \log_3 \frac{1}{3}$. Функция $y = \log_3 x$ определена при $x > 0$ и возрастает (основание логарифма больше 1), поэтому неравенство справедливо при $x > 0$ и $x < \frac{1}{3}$, то есть при $0 < x < \frac{1}{3}$.

2) Неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$ можно записать в виде $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ или $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9$. Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x > 0$ и убывает (поскольку основание логарифма находится между 0 и 1), поэтому неравенство справедливо при $x > 0$ и $x \geq 9$, то есть при $x \geq 9$. ■

Ответ: 1) $0 < x < \frac{1}{3}$; 2) $x \geq 9$.

Рассмотренные примеры показывают, что при решении логарифмических неравенств следует находить область определения неравенства и использовать монотонность логарифмической функции.

Пример 24. Решить неравенство $\lg(3x - 4) < \lg(2x + 1)$

□ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому неравенство имеет смысл при $3x - 4 > 0$ и $2x + 1 > 0$, или при $x > \frac{4}{3}$ и $x > -\frac{1}{2}$. Следовательно, областью определения неравенства является промежуток $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. Поскольку логарифмическая функция с основанием 10 возрастает, то при $x > \frac{4}{3}$ неравенство справедливо, если $3x - 4 < 2x + 1$, то есть при $x < 5$. Значит, $\frac{4}{3} < x < 5$. ■

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; 5\right)$.

При решении показательных уравнений мы пользовались следующим утверждением.

Теорема 2. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при условии, что $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Эту теорему можно сформулировать иначе.

Теорема 2'. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе


$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или системе} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Заметим, что для решения уравнения не обязательно решать приведенные системы. Можно решить уравнение $f(x) = g(x)$, а потом из его решений отобрать те, которые удовлетворяют одному из условий: $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$.

При решении логарифмических, как и других классов уравнений, можно переходить как к равносильным уравнениям, так и к уравнениям-следствиям с обязательной проверкой. Например, уравнение $x^2 = 1$ является следствием уравнения $x = 1$, потому что каждое решение уравнения $x = 1$ является решением уравнения $x^2 = 1$. Но уравнение $x^2 = 1$ не является следствием уравнения $x = 1$, поскольку его решение $x = -1$ не является решением уравнения $x = 1$. Точно так же уравнение $\cos 2\pi x = 1$ является следствием уравнения $x^2 = 1$, потому что каждое решение последнего уравнения (1 и -1) является решением уравнения $\cos 2\pi x = 1$. Обратное утверждение неверно, поскольку, например, число 2 является решением уравнения $\cos 2\pi x = 1$, но не является решением уравнения $x^2 = 1$.

Теперь можно переформулировать определение равносильных уравнений:

Два уравнения (два неравенства, две системы) являются равносильными, если каждое из них является следствием другого.

Пример 25. Решить уравнение $\log_2(x-2) = \log_2(x^2 - x - 17)$.

□ Первый способ. Воспользуемся теоремой 2', согласно которой данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} x-2 = x^2 - x - 17, \\ x-2 > 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$ Обратите внимание на то, что мы выбрали условие $x - 2 > 0$, а не $x^2 - x - 17 > 0$: первое неравенство решить или проверить проще.

Уравнение $x^2 - 2x - 15 = 0$ имеет корни $x_1 = 5$, $x_2 = -3$, причём, только первый из них удовлетворяет неравенству $x - 2 > 0$.

Второй способ. Квадратное уравнение $x^2 - 2x - 15 = 0$ является следствием данного логарифмического уравнения. Поэтому можем решить квадрат-

ное уравнение, а потом проверкой выяснить, какие из его корней удовлетворяют данному логарифмическому уравнению. При $x=5$ имеем $\log_2(5-2) = \log_2(5^2 - 5 - 17)$. При $x=-3$ выражение $\log_2(-3-2)$ не имеет смысла. ■

Ответ: 5.

Рассмотрим теперь логарифмические уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$, в которых неизвестная содержится и в основании степени.

Теорема 3. Уравнение $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1 \end{array} \right. \quad \text{или системе} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{array} \right.$$

Другими словами, корнями данного уравнения являются те и только те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые одновременно удовлетворяют условиям $f(x) > 0, a(x) > 0, a(x) \neq 1$ или одновременно условиям $g(x) > 0, a(x) > 0, a(x) \neq 1$.

Пример 26. Решить уравнение $\log_{2x}(x^2 - 2x) = \log_{2x}(2x - 3)$.

□ В соответствии с теоремой 3, это уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0, \\ 2x > 0, \\ 2x \neq 1. \end{array} \right. \quad \text{Решив уравнение, входящее в эту систему, получим: } x = 3 \text{ или}$$

$x = 1$. Из этих двух чисел всем остальным условиям системы удовлетворяет лишь $x = 3$. Следовательно, $x = 3$ — единственный корень данного уравнения. ■

Ответ: 3.

При преобразовании логарифмических уравнений часто придется пользоваться различными свойствами логарифмов. Следует иметь в виду то, что левая и правая части многих логарифмических тождеств имеют различные области определения. Например, в формуле логарифма произведения $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ левая часть имеет смысл, если x и y принимают оба или положительные значения, или отрицательные, а правая часть — лишь при положительных значениях x и y . Поэтому, если эта формула применяется справа налево, происходит расширение области определения уравнения, которое может привести к появлению посторонних корней. От них можно избавиться проверкой. Но если рассматриваемая формула применяется слева направо, то область определения уравнения сужается, и это может привести к потере корней. Чтобы этого не случилось, можно рассмотреть два случая: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ или $\log_a(xy) = \log_a(-x) + \log_a(-y)$. Такой же анализ

следует провести и для других логарифмических тождеств. Рекомендуем выполнить это самостоятельно

Пример 27. Решить уравнение $\log_{2x} x = \log_{\frac{x}{2}} x$.

□ Если перейти к логарифмам с основанием x с помощью формулы $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, то получим уравнение $\frac{\log_x x}{\log_x 2x} = \frac{\log_x x}{\log_x \frac{x}{2}}$, которое, как нетрудно в

этом убедиться, корней не имеет. Но число $x = 1$ — корень данного уравнения. Переход к новому основанию привёл к потере корня. Потеря корня связана с сужением области определения функций, входящих в уравнение. Так, число $x = 1$ входит в область определения функции $y = \log_{2x} x$, но не входит в область определения функции $y = \frac{\log_x x}{\log_x 2x}$. Чтобы предотвратить потерю корня $x = 1$,

следует иметь в виду, что новое основание должно быть положительным числом, отличным от 1, и нужно рассмотреть отдельно случай $x = 1$.

При этом, потери корня не произошло бы, если бы мы перешли к логарифму с основанием, не содержащим переменной, например, к логарифму с основанием 2. Тогда получим уравнение, равносильное данному:

$$\frac{\log_2 x}{1 + \log_2 x} = \frac{\log_2 x}{1 - \log_2 x}.$$

отсюда: $x = 1$. Следовательно, при решении логарифмических уравнений не желательно переходить к логарифмам по основанию, содержащему переменную.

■

Ответ: 1.

Как мы уже отмечали, решение логарифмических неравенств основывается на использовании свойств монотонности логарифмических функций и учитывании области её определения. Функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$, при $a > 1$ она монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает.

Теорема 4. Неравенство $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ а при $0 < a < 1$ — системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Пример 28. Решить неравенство:

$$1) \log_2(1 - 4x) > \log_2(x^2 + 4); \quad 2) \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) > -3.$$

□ 1) В данном случае основание логарифма больше 1, поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 1 - 4x > x^2 + 4, \\ x^2 + 4 > 0 \end{cases}$ или неравенству

$x^2 + 4x + 3 < 0$, поскольку неравенство $x^2 + 4 > 0$ справедливо при всех значениях x . Решением последнего неравенства является промежуток, находящийся

между корнями -3 и -1 уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$. Следовательно, решением данного неравенства является интервал $(-3; -1)$.

2) Представим -3 как $\log_{\frac{1}{3}} 27$, тогда данное неравенство примет вид:

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Поскольку основание логарифма содержится между 0 и 1, то последнее неравенство равносильно двойному неравенству $0 < x-2 < 27$.

Решая систему двух линейных неравенств

$$\begin{cases} x-2 < 27, \\ x-2 > 0, \end{cases}$$

получим $2 < x < 29$. ■

Ответ: 1) $(-3; -1)$; 2) $2 < x < 29$.

Пример 29. Решить неравенство: $\log_x(2x-1) > \log_x(5-x)$.

□ Обращаем внимание на то, что основание логарифмов, входящих в неравенство, является переменной величиной. К этому неравенству нельзя применить ни одно из утверждений теоремы 3, ибо неизвестно, больше или меньше 1 основание x . Поэтому необходимо рассмотреть два случая: 1) $x > 1$; 2) $0 < x$

< 1 . В первом случае данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x > 1, \\ 5-x > 0, \\ 2x-1 > 5-x, \end{cases}$

во втором — системе $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2x-1 > 0, \\ 2x-1 < 5-x. \end{cases}$ Из первой системы получим $2 < x < 5$, из

второй — $\frac{1}{2} < x < 1$. Следовательно, $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; 5)$ — решение данного неравенства. ■

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; 5)$.

При решении систем логарифмических уравнений применяются те же методы, что и при решении систем алгебраических уравнений.

Пример 30. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3\lg 2. \end{cases}$

□ Поскольку $1 = \lg 10$, $3\lg 2 = \lg 8$, то, используя свойства логарифмов, получим, что первое уравнение равносильно уравнению $x^2 + y^2 = 130$, а второе,

согласно теореме 2 — системе $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 8, \\ x+y > 0. \end{cases}$ Поэтому данная система равносиль-

на системе
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130, \\ \frac{x+y}{x-y} = 8, \\ x+y > 0. \end{cases}$$
 Заметим, что при приведенных условиях неравенств

во $x - y > 0$ будет выполняться автоматически, поскольку дробь $\frac{x+y}{x-y}$ и её числитель принимают положительные значения. Полученная система равносильна

системе
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130, \\ x = \frac{9}{7}y, \\ x+y > 0. \end{cases}$$
 Решая её, получим: $\begin{cases} x = 9, \\ y = 7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -9, \\ y = -7. \end{cases}$ Последнее

решение не удовлетворяет условию $x + y > 0$. Следовательно, единственным решением данной системы является пара чисел (9; 7). ■

Ответ: (9; 7).



Как мы отмечали выше, при решении логарифмических уравнений (а также неравенств) часто оказывается полезным применение свойств и графиков функций, входящих в уравнение (см. пример 22).

Пример 31. Решить уравнение $\log_{\pi} x = 1 + \sin x \cdot \log_{\pi} 2$.

□ Поскольку $\log_{\pi} x - 1 = \log_{\pi} x - \log_{\pi} \pi = \log_{\pi} \frac{x}{\pi}$, а $\frac{\log_{\pi} x}{\log_{\pi} 2} = \log_2 x$, то данное

уравнение приводится к виду: $\sin x = \log_2 \frac{x}{\pi}$. Построим схематически графики

левой и правой части уравнения в области его определения (рис. 369). Известно, что решениями уравнения $f(x) = g(x)$ являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Поскольку $\sin \pi = 0$ и $\log_2 \frac{\pi}{\pi} = 0$, то $x = \pi$ является решением дан-

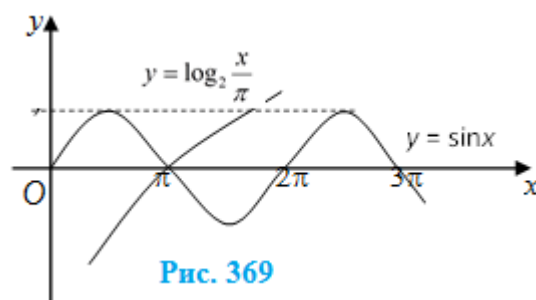


Рис. 369

ного уравнения. Покажем, что других решений нет.

1) Если $0 < x < \pi$, то $\sin x > 0$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} < 0$ — решений нет.

2) Если $\pi < x < 2\pi$, то $\sin x < 0$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} > 0$ — решений нет.

3) Если $x > 2\pi$, то $\sin x \leq 1$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} > 1$ — решений нет.

4) Если $x = 2\pi$, то $\sin x = 0$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} = 1$ — решений нет. ■

Ответ: $\{\pi\}$.

При решении уравнения в примере 31 использовались условия ограниченности функций на отмеченных промежутках.

Пример 32. Решить уравнение $2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi$.

□ Ясно, что $2^{-\cos x} \leq 2$, а $\log_{\pi} x + \log_x \pi \geq 2$ при $x > 1$ на основании соотношения $a + \frac{1}{a} \geq 2$, $a > 0$. Таким образом, при $x > 1$ исходное уравнение равно-

сильно системе двух уравнений с одним неизвестным $\begin{cases} 2^{-\cos x} = 2, \\ \log_{\pi} x + \log_x \pi = 2 \end{cases}$, из которой находим, что $x = \pi$. Если же $0 < x < 1$, то левая часть уравнения положительна, а правая – отрицательна, т.е. на данном промежутке решений уравнение не имеет. ■

Ответ: $\{\pi\}$.

Решая логарифмические и показательные уравнения, мы всегда имели ввиду свойство монотонности логарифмических и показательных функций. Часто монотонность позволяет исследовать и решать уравнения и неравенства в более сложных ситуациях.

Пример 33. Решить уравнение $\log_{0,5} x = \sqrt{x-1}$.

□ Нетрудно заметить, что в левой части уравнения стоит убывающая функция, а в правой — возрастающая в области определения уравнения, т. е. при $x \geq 1$. Известно, что если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на некотором множестве, причём одна из них на этом множестве возрастает, а другая — убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ на этом множестве имеет не более одного решения. Замечаем, что $x = 1$ — корень данного уравнения. Следовательно, он единственный. ■

Ответ: $\{1\}$.

Пример 34. Решить неравенство $\log_2(2-x) + \log_2(4-2x) > 7$.

□ Рассмотрим функцию $f(x) = \log_2(2-x) + \log_2(4-2x) - 7$. Её областью определения является промежуток $(-\infty; 2)$. На этом промежутке функции $y = \log_2(2-x)$ и $y = \log_2(4-2x)$ непрерывные и убывающие, поэтому и функция $y = f(x)$ — непрерывная и убывающая. Единственным нулём этой функции является число $x = -6$. Это число разбивает область определения функции $y = f(x)$ на промежутки $(-\infty; -6)$ и $(-6; 2)$, на каждом из которых она сохраняет знак. Положительна она на первом из этих промежутков. ■

Ответ: $(-\infty; -6)$.



Контрольные вопросы

1. ° Может ли уравнение $\log_a x = b$ не иметь решений?
2. ° Может ли уравнение $\log_a x = b$ иметь отрицательное решение?
3. ° Может ли уравнение $\log_a x = b$ иметь два решения?
4. ° Как представить число -1 в виде логарифма по основанию 5?
5. ° Каково решение уравнения:
1) $\log_2 x = 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$; 3) $\log_8 x < \frac{1}{2}$; 4) $\log_3 x = 2$?
6. Сколько решений имеет уравнение: 1)
 $\log_2 x = \frac{1}{x}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{x}$; 3) $\log_2 x = -x$?
7. Каково решение неравенства:
1) $\log_2 x < 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$; 3) $\log_3 x < 1$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$?
8. Какие целые числа удовлетворяют неравенству: 1) $2 < \log_2 x < 3$; 2) $-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq -1$?
9. Равносильны ли уравнения:
а) $\lg f(x) = \lg g(x)$ и $f(x) = g(x)$; б) $f(x) \log_a x = g(x) \log_a x$ и $f(x) = g(x)$;
в) $2 \log_3 x = -2$ и $\log_3 x^2 = -2$?
10. Имеет ли решения уравнение:
а) $\ln x - \ln(x+2) = 2$; б) $\lg(x-1) + \lg(1-x) = 0$; в) $\frac{\log_3 2x}{\log_3(2x+3)} = 1,5$?
11. Верно ли решено уравнение: $\log_2 x^2 = \log_2 9$, $2 \log_3 x = 2 \log_2 3$, $x = 3$?
12. Равносильны ли неравенства: а) $x^2 \geq 0$ и $2^x > 0$; б) $\log_2 x > 1$ и $x > 2$;
в) $\log_2 x < 1$ и $x < 2$; г) $\log_x(\sqrt{5}-1) > 1$ и $\sqrt{5}-1 > x$?

Задачи

593. Решите уравнение:

$$1) \circ 4^{x^2-3x-4} = 1; \quad 2) \circ 64^x = 4^{x^2+2}; \quad 3) \circ \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3x-3} = \frac{1}{5};$$

$$4) \circ 4^{x^2-x+1} = 8^x; \quad 5) 2^{x+1} \cdot 5^x = 200; \quad 6) \circ 4^{\sqrt{x-2}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

594. Решите уравнение:

$$1) \circ 3^x = 2^x; \quad 2) \circ 5^{-2x} = 4^{-x}; \quad 3) 3^{-x+4} - 25 \cdot 5^{2-x} = 0; \quad 4) 81 \cdot 8^{x-3} - 9^{x-1} = 0.$$

595. Решите уравнение:

$$1) \circ 2^{2x} - 2^x - 12 = 0; \quad 2) \circ 16^x - 4^x - 2 = 0; \quad 3) 3^x + 3^{1-x} = 4; \quad 4)$$

$$3^{2x+1} + 10 \cdot 3^x + 3 = 0;$$

$$5) 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x = 0; \quad 6) 22 \cdot 9^{x-1} - \frac{1}{3} \cdot 3^{x+3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2} = 4;$$

$$7) * 2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$$

596°. Решите уравнение:

$$1) 5^{x+1} - 5^{x-1} = 24; \quad 2) 2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} + 288 = 0; \quad 3) 9^{x+3} + 3^{2x+2} = \frac{82}{9}.$$

597. Найдите наименьший корень уравнения:

$$1) (9^{x^2-1} - 1) \cdot \sqrt{2x-1} = 0; \quad 2) (4^{x+2} - 2^x) \cdot \sqrt{1+x} = 0.$$

598. Найдите точки пересечения с осью абсцисс графика функции:

$$1) y = 3^{x-1} - 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}; \quad 2) y = 4^{\sin x \cdot \cos x} - \sqrt{2};$$

$$3) y = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} - 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2}.$$

599. Найдите точки пересечения графиков функций:

$$1) y = 3^{x-1} \cdot 2^{3x-7} \text{ и } y = 12^{9-x}; \quad 2) y = 9^{x+1} + 9^{2x-1} \text{ и } y = 54 \cdot 27^{x-1};$$

$$3) y = 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x \text{ и } y = 5 \cdot 6^x; \quad 4) y = 4^x \text{ и } y = 24 - 2^{x+1}.$$

600. Решите неравенство:

$$1) \circ 2^{3-6x} > 1; \quad 2) \circ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x-1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}; \quad 3) \sqrt[3]{3} > 9; \quad 4) 3^x > 2; \quad 5) \circ 2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}.$$

601. Решите неравенство:

$$1) 5^{2x+1} > 5^x + 4; \quad 2) \frac{1}{2^x + 3} > \frac{1}{2^{x+3} + 1}; \quad 3) 2^{2x+2} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0;$$

$$4) \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9; \quad 5) 3^{x+1} - 5 \cdot 2^x \leq 2^{x+2} - 3^x.$$

602. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 2^x + 3^y = 7, \\ 2^{2x} + 3^{2y} = 25; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5^x - 36y = 0, \\ 6^x - 25y = 0, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y. \end{cases}$$

603. Дано выражение $f(x) = 5^{x+2} - 5^x$.

1) ° Решите уравнение $f(x) = 24$.

2) Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt{x-2}(f(x)-24) = 0$.

3) * Решите уравнение $f(x) = a$.

604. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$.

1) ° В каких точках график функции $y = f(x)$ пересекается с осями координат?

2) Решите уравнение $f(x) = -\frac{2}{9}$.

3) Решить неравенство $f(x) < -\frac{2}{9}$.

4) Найдите область определения функции $y = \sqrt{f(x)}$.

605. Давление воздуха с высотой убывает (при постоянной температуре) по закону $p = p_0 e^{\frac{h}{H}}$, где p_0 — давление на уровне моря ($h = 0$), p — давление на высоте h , H — некоторая постоянная, зависящая от температуры. Найдите зависимость высоты подъема от давления.

606. Закон радиоактивного распада вещества имеет вид $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — масса вещества в начальный момент $t = 0$, m — масса вещества в момент t , T — некоторая константа, которую называют периодом полураспада. Через время T после начального момента масса радиоактивного вещества уменьшается вдвое. Вычислите период полураспада вещества, если за год ее масса уменьшилась в 10 раз.

607. Решите уравнение:

1) ° $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2 + 3x + 1) = 0$; 2) ° $\log_2(x - 7) = \log_2(4 - x)$;

3) ° $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$; 4) ° $\log_2(x - 2) = \log_2(x^2 - x - 17)$;

5) $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$; 6) $\log_x 7 = 0$; 7) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$.

608°. Решите уравнение:

1) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$;

2) $\lg^2 x = 4 - 3\lg x$;

3) $6\log_x 2 - 6\log_4 x + 7 = 0$;

4) $\frac{1}{3 - \lg x} + \frac{1}{1 + \lg x} = 1$.

609. Решите уравнение:

1) ° $100^{\lg(x+20)} = 1000$; 2) ° $5^{4\lg x} = 62,5x$; 3) $x^{\lg x + 2} = 1000$; 4) $x^{\lg x^2 - 3} = 100$.

610*. Найдите наименьший корень уравнения:

1) $(x^{2\lg x} - 10x) \cdot \sqrt{3x - 2} = 0$; 2) $(\log_2(9 - 2^x) - 3 + x) \cdot \sqrt{2x - 3} = 0$.

611. Найдите точки пересечения с осью абсцисс графика функции:

$$1) y = \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 - \log_{4x} 2; \quad 2) y = \log_{3x} 3 - \log_{3x} x + \log_3^2 x - 1;$$

$$3) y = (\log_x (9x^2)) \cdot \log_3^2 x - 4.$$

612. Найдите точки пересечения графиков функций:

$$1) y = x(1 - \lg 5) \text{ и } y = \lg(4^x - 12); \quad 2) y = \log_2 \sqrt{x^2 + 2x + 1} \text{ и } y = 6 - \log_2(x + 1)^2;$$

$$3) y = \lg(35 - x^3) \text{ и } y = 3\lg(5 - x); \quad 4) y = 4 - \lg x \text{ и } y = 3\sqrt{\lg x}.$$

613. Решите неравенство:

$$1) \circ \log_5(3x - 1) < 1; \quad 2) \circ \log_2(x^2 - 2x) - 3 > 0; \quad 3) (\log_2 x)^2 \leq 4;$$

$$4) \log_3 x \leq -1; \quad 5) \frac{1}{\log_2(x - 2)} \leq \frac{1}{2}.$$

614. Решите неравенство:

$$1) \lg(x^2 - 3) > \lg(x + 3); \quad 2) \lg^2 x - 2\lg x - 8 \leq 0; \quad 3) \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} < 1;$$

$$4) \log_x(x - 2) \leq 0; \quad 5) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 3x + 1)} < 1; \quad 6) \log_x(x - 1) > 1.$$

615. Решите систему уравнений:

$$1) \circ \begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases} \quad 2) \circ \begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ x^{\lg y} = 1000, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = \frac{3}{2}, \\ \log_x 3 + \log_y 9 = 3. \end{cases}$$

616. Дана функ-

ция $y = f(x)$, де

$$f(x) = \log_3^2 x + 3\log_3 x.$$

1) $\circ$ В каких точках график функции $y = f(x)$ перетсекается с осями координат?

2) $\circ$ Решите уравнение $f(x) = -2$.

3) Решите неравенство $f(x) < -2$.

4) * Найдите область определения функции $y = \sqrt{f(x)}$.

617. Скорость v ракеты в зависимости от массы m изменяется по закону $v = v_z \ln \frac{m_0}{m}$ (формула Циолковского), где v_z — скорость вылетающих из ракеты газов, m_0 — стартовая масса ракеты. Найдите зависимость массы ракеты от ее скорости.

618. Коэффициент D звукоизоляции стен вычисляется по формуле $D = A \lg \frac{p_0}{p}$,

где p_0 — давление звука до поглощения, p — давление звука, прошедшего через

стену, A — некоторая постоянная. Выразите давление звука после поглощения через остальные переменные.

Готовимся к тематическому оцениванию по теме «Показательная и логарифмическая функции»

Задания для самоконтроля

1. Имеет ли смысл выражение: а) $2^{\sqrt{2}}$; б) $(-2)^{\sqrt{3}}$; в) 1^{π} ; г) $0^{\sqrt{7}}$?
2. Что больше — единица или: а) $3^{-\sqrt{2}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{5}}$; г) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$?
3. При каких значениях x определена функция $(1-x)^{\sqrt{2}}$?
4. Какое из чисел больше:
а) $5^{\sqrt{3}}$ или $5^{1,7}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$; в) $5^{-\sqrt{3}}$ или $5^{-1,8}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1,8}$?
5. При каких значениях x график функции $y = x^{\sqrt{5}}$ расположен выше графика функции: а) $y = x^2$; б) $y = x^3$?
6. Как называется функция $y = u^v$, если:
а) u — аргумент функции; v — постоянная величина;
б) u — постоянная величина, $u > 0$; v — аргумент функции?
7. Что больше — единица или значение a^x при $x < 0$, если: а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$?
8. Какую числовую последовательность образуют значения показательной функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ при $x = 1, 2, 3, 4, \dots$?
9. Имеет ли показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$):
а) наибольшее или наименьшее значения; б) значение, равное нулю? в) период?
10. Возрастающей или убывающей является функция:
а) $y = (0,41)^x$; б) $y = (2,36)^x$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; г) $y = (5)^{-x}$?
11. В каком промежутке лежат при $x \in [-2; 1]$ значения функции: а) $y = 3^x$; б) $y = 3^{-x}$?
12. Какой знак имеет корень уравнения:
а) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 3$; б) $(0,7)^x = 0,3$; в) $(5)^x = 4$; г) $(3)^x = \frac{1}{7}$?
13. При каком значении a график функции $y = a^x$ проходит через точку:
а) $(1; 2)$; б) $(2; 9)$; в) $\left(2; \frac{4}{9}\right)$; г) $(-2; 4)$; д) $\left(-3; \frac{1}{27}\right)$?
14. Между какими последовательными целыми числами расположены числа:

а) $\log_2 5$; б) $\log_3 8$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

15. Чему равняется разность $\lg(100a) - \lg\left(\frac{a}{100}\right)$?

16. Логарифмы каких чисел являются противоположными числами?

17. Как изменится логарифм числа, если, не меняя основания:

а) возвести число в квадрат; б) извлечь из числа кубический корень?

18. Как изменится разность $\log_2 a - \log_2 b$, если числа a и b заменить соответственно на: а) $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$; б) $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$?

19. Можно ли разделить обе части неравенства $2\lg \frac{1}{2} > 3\lg \frac{1}{2}$ на $\lg \frac{1}{2}$, не меняя знака неравенства?

20. Какой знак имеет число:

а) $\log_{\frac{1}{5}} 7$; б) $\log_{0,8} \frac{3}{4}$; в) $\log_{13} 12$; г) $1 - \log_6 7$; д) $\log_4 5 - 1$; е) $\log_{\frac{8}{3}} 7 - \log_{\frac{1}{3}} 7$?

21. Как представить в виде показательных функций с основанием e функции:

а) $y = 2^x$; б) $y = 10^x$?

22. Какую последовательность образуют логарифмы всех чисел, являющихся целыми степенями основания логарифмов?

23. При каком значении x каждая логарифмическая функция $y = \log_a x$ принимает значение 0?

24. Через какую точку проходит график любой логарифмической функции $y = \log_a x$?

25. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_5 x$; в) $y = \log_{0,1} x$; г) $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$; д) $y = \lg x$; е) $y = \ln x$?

26. Как расположены друг относительно друга графики функций:

а) $y = \log_2 x$ и $y = \lg x$; б) $y = \log_{0,5} x$ и $y = \log_{0,1} x$; в) $y = e^x$ и $y = \ln x$;

г) $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; д) $y = \log_a x$ и $y = \log_{\frac{1}{a}} x$?

27. Совпадают ли функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ и $y = -\log_a x$; б) $y = x$ и $y = a^{\log_a x}$; в) $y = x$ и $y = \lg 10^x$?

28. Какое число больше:

а) $\log_2 5$ или $\log_2 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ или $\log_{\frac{1}{3}} 4$; в) $\log_5 \frac{1}{2}$ или $\log_5 \frac{1}{3}$; г) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{4}{5}$ или $\log_{\frac{1}{7}} \frac{5}{6}$?

29. Чему равны наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют): а) $y = 3^x$; б) $y = \lg x$; в) $y = |\lg x|$; г) $y = \log_2(4 + x^2)$?

30. Чему равны наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном промежутке: а) $f(x) = \lg x$, $[0,1; 10]$; б) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $[1; 3]$;

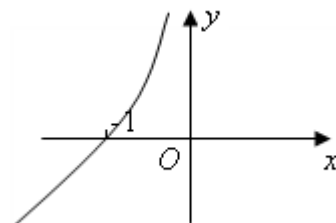
в) $f(x) = \log_{0,1} x$, $\left[\frac{1}{10}; 100\right]$; г) $f(x) = \log_3 x$, $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$?

31. Верно ли, что логарифмическая функция:

а) непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$; б) нечётная; в) периодическая?

32. Из функций $y = \log_3 \frac{1}{x}$, $y = (0,3)^x$, $y = -\log_{0,3} x$,

$y = \log_{0,3}(-x)$ выберите такую, график которой схематично изображён на рисунке.



33. При каких значениях x определена функция:

а) $y = \log_2(-x)$; б) $y = \log_2|x|$; в) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$; г) $y = \lg \lg x$;

д) $y = 2^{\log_2 x}$; е) $y = \log_2 2^x$?

34. Имеет ли решения уравнение: а) $3^x = -3$; б) $3^x = 0$; в) $3^x = 5$?

35. Сколько корней имеет уравнение: а) $3^x = x^2$; б) $3^x = -3x^2$; в) $3^x = \frac{1}{x}$?

36. Имеет ли решения неравенство: а) $3^x > -3$; б) $3^x \leq 0$; в) $3^x > 5$?

37. Сколько корней имеет уравнение: а) $\log_2 x = x$; б) $\log_2 x = \frac{1}{x}$; в)

$\log_2 x = 2^x$?

Ответы к заданиям для самоконтроля

1. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. 2. а) 1; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}}$; в) 1; г) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. 3. $(0; 1)$. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. 4.

а) $(5)^{\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$; в) $(5)^{-\sqrt{3}}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1,8}$. 5. а) $(1; +\infty)$; б) $(0; 1)$. 6. а) Степенная; б)

показательная. 7. а) 1; б) значение a^x . 8. Геометрическую прогрессию. 9. а) Нет; б) нет; в) нет. 10. а) Убывающей; б) возрастающей; в) возрастающей; г) убывающей.

11. а) $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$; б) $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$. 12. а) $-$; б) $+$; в) $+$; $-$. 13. а) $a = 2$; б) $a = 3$; в) $a = \frac{2}{3}$

; г) $a = \frac{1}{2}$; д) $a = 3$. 14. а) 2 и 3; б) 1 и 2; в) -2 и -1 ; г) -4 и -3 . 15. 4. 16. Обратных

положительных. 17. а) Умножится на 2; б) разделится на 3. 18. а) Разделится на 2; не изменится. 19. Нет. 20. а) $-$; б) $+$ в) $+$ г) $-$; д) $+$; е) $+$. 21. а) $2^x = e^{x \ln 2}$; б) $10^x = e^{x \ln 10}$.

22. Арифметическую прогрессию. 23. $x = 1$. 24. $(1; 0)$. 25. а) Возрастающей; б) возрастающей; в) убывающей; г) убывающей; д) возрастающей; е) возрастающей.

26. а) При $0 < x < 1$ график функции $\log_2 x$ лежит ниже графика $\lg x$, при $x > 1$ график $\log_2 x$ — выше графика $\lg x$; б) При $0 < x < 1$ график функции

$\log_{0,5}x$ лежит ниже графика $\log_{0,1}x$, при $x > 1$ график $\log_{0,5}x$ — выше графика $\log_{0,1}x$; в) симметрично относительно прямой $y = x$; г) симметрично относительно оси x ; д) симметрично относительно оси x . **27.** а) Да; б) нет; в) да. **28.** а) Второе; б) первое; в) первое; г) первое. **29.** а) Не существуют; б) не существуют; в) наибольшее не существует, наименьшее — 0; г) наибольшее не существует, наименьшее — 2. **30.** а) 1 и -1 ; б) 0 и -1 ; в) 1 и -2 ; г) 0 и -1 . **31.** а) Да; б) нет; в) нет. **32.** а) $y = \log_{0,3}(-x)$. **33.** а) $x < 0$; б) $x \neq 0$; в) $x > 0$; г) $x > 1$; д) $x > 0$; е) $x \in \mathbf{R}$. **34.** а) Нет; б) нет; в) да. **35.** а) Два; б) ни одного; в) один. **36.** а) Да; б) нет; в) да. **37.** а) Ни одного; б) один; в) ни одного.

Образец контрольной работы

1. Дано выражение $f(x) = (5^{2x} + 5^{-x})^2 - (5^{2x} - 5^{-x})^2 + 5^x$.

а)⁰ Докажите, что $f(x) = 5^{x+1}$.

б)⁰ В каких точках график функции $y = f(x)$ пересекает ось x , ось y , прямые $x = 2$, $y = -1$ и $y = 5$?

в)⁰ Найдите область определения, множество значений функции $y = f(x)$, постройте её график.

г)⁰ Вычислите $f(x_0)$, если $x_0 = -0,5$; $x_0 = \log_5 7$.

д) Найдите значения x , при которых $f(x) = 0,2$; $f(x) < 0,2$.

е) Найдите точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с параболой $y = x^2$.

2. Закон изменения некоторой величины со временем имеет вид $x = \frac{100}{3} \ln(0,06t + 1)$, где t — время; x — числовое значение величины.

а)⁰ Найдите значение величины в начале отсчёта времени ($t = 0$), через 10 единиц времени после начала отсчёта времени.

б)⁰ Через сколько единиц времени после начала отсчёта времени значение величины составит 120?

в) Найдите функцию, обратную функции $x = \frac{100}{3} \ln(0,06t + 1)$.

Таблицы для систематизации материала раздела

Свойства степени с действительным показателем

Таблица 69

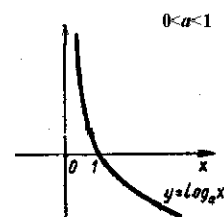
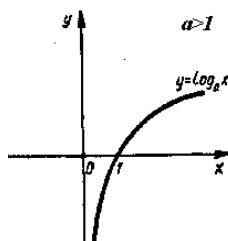
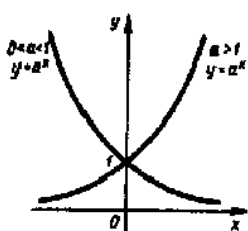
Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in R, a > 0.$
Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in R, a > 0.$
Возведение степени в степень	$(a^x)^y = a^{xy}, x, y \in R, a > 0$
Степень произведения	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in R, a, b > 0$
Степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, x \in R, a, b > 0$
Сравнение степеней с одинаковыми показателями	$a > b > 0, x > 0 (ax > bx)$ $a > b > 0, x < 0 (ax < bx)$
Сравнение степеней с одинаковыми основаниями	$0 < a < 1, x, y \in R, x > y \Rightarrow a^x < a^y$ $a > 1, x, y \in R, x > y \Rightarrow a^x > a^y$

Экспоненты и логарифмы

Таблица 70

$$\begin{aligned}
 a^{\log_a x} &= x, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \\
 a^x &= e^{x \ln a}, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \\
 \log_a x^k &= k \log_a x, \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}, \\
 \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.
 \end{aligned}$$

Графики показательных и логарифмических функций



Свойства показательной и логарифмической функций

Таблица 71

	$y = a^x$		$y = \log_a x$	
	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$\mathbf{R}$		$(0; +\infty)$	
Нули	Нет нулей		$x = 1$	
Четность и нечетность	Ни чётная, ни нечётная		Ни чётная, ни нечётная	
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x \in \mathbf{R}$		$y > 0$ при $x > 1$ $y < 0$ при $0 < x < 1$	$y < 0$ при $x > 1$ $y > 0$ при $0 < x < 1$
Промежутки монотонности	$\square$ при $x \in \mathbf{R}$	$\square$ $x \in \mathbf{R}$	$\square$ $x \in (0;+\infty)$	$\square$ $x \in (0;+\infty)$
Множество значений	$(0; +\infty)$		$\mathbf{R}$	
Наибольшее и наименьшее значения	Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений		Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений	
Непрерывность	Непрерывная			
Асимптоты	$y = 0$		$x = 0$	

Показательные и логарифмические уравнения

Таблица 72

$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$	$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$
$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$

Показательные и логарифмические неравенства

Таблица 73

$a^{f(x)} < a^{g(x)}, a > 1$	$\Leftrightarrow f(x) < g(x)$
$a^{f(x)} < a^{g(x)}, 0 < a < 1.$	$\Leftrightarrow f(x) > g(x)$
$\log_a f(x) < \log_a g(x), a > 1$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$

$\log_a f(x) < \log_a g(x), 0 < a < 1$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Исторический комментарий

К показательной функции $y = a^x$ привело расширение понятия степени. Одними из первых показательные функции изучали и применяли немецкий математик Г. Лейбниц (1646 - 1716), швейцарские математики И. Бернулли (1667 - 1748), Л. Эйлер (1707 - 1783). Последний установил связь между показательной и тригонометрическими функциями. Показательные функции обладают замечательным свойством: скорость их роста пропорциональна значению самих функций. Необходимость их изучения возникла из исследования различных законов естествознания, таких, как законы размножения, биологических популяций, законы радиоактивного распада, законы движения в тормозящей среде и т. п.

В конце XVI ст. нидерландский ученый С. Стевин (1548 - 1620) опубликовал таблицу для вычисления сложных процентов по формуле $A = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, где a — начальный капитал, A — наращенный капитал после t лет при p % годовых. Это был пример применения показательной функции в банковском деле. Необходимость вычисления сложных процентов была вызвана ростом торговых финансовых операций.

Изобретение логарифмов в начале XVII ст. тесно связано с развитием производства и торговли, астрономии и мореплавства, которые требовали совершенствования методов вычислительной математики. Все чаще приходилось производить громоздкие действия над многозначными числами, причем результаты этих действий должны были быть все точнее. Вот тогда и нашла реализацию идея логарифмов, ценность которой состоит в том, что возведение в степень и извлечение корня сводились к умножению и делению, а умножение и деление — к сложению и вычитанию.

Источник этой идеи связан со сравнением двух числовых последовательностей $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ и $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \dots$.

Первая является арифметической прогрессией, вторая — геометрической. Произведение двух любых членов второй последовательности, которое можно получить путем возведения числа a в степень, равную сумме соответствующих членов первой последовательности. Немецкий математик М. Штифель (1487 - 1567) продолжает эти последовательности влево, то есть рассматривает и отрицательные числа и впервые называет члены первой последовательности **экспонентами**, то есть показателями соответствующих членов второй последовательности.

Исторически логарифмы возникли в XVII в. для облегчения вычислений. Этим человечество благодарно шотландскому математику Дж. Неперу (1550 - 1617) и швейцарскому математику Й. Бюрги (1552 - 1632). Сначала усилия ученых были направлены на создание таблиц логарифмов, которые в течение трех столетий были основными средствами сложных расчетов. Особой популярно-

стью пользовалась реализация таблиц логарифмов в виде компактной и удобной логарифмической линейки. В связи с развитием электронно-вычислительной техники необходимость в использовании логарифмических таблиц отпала.

Первые таблицы логарифмов составил швейцарский механик, часовой мастер, астроном и математик Й. Бюрги. В качестве второго ряда он берёт геометрическую прогрессию со знаменателем 1,0001. Он отдал этому громоздкому труду восемь лет жизни, выполнив при этом свыше 200 млн. умножений на 1,0001. Деятельность Бюрги была высоко оценена И. Кеплером (1571 - 1630). Таблицы Бюрги были обнародованы в 1620 г. в Праге, хотя широкого распространения не приобрели. Они были неудобными для пользования. За 6 лет до ее публикации появились более совершенные таблицы логарифмов шотландского математика Д. Непера (1550 - 1617). Таблицы, составленные Непером, во многом отличаются от таблиц Бюрги. Знаменателем геометрической прогрессии в них служило число 0,9999999, которое дало возможность включить в таблицу большое количество чисел, мало отличавшихся друг от друга.

Таблицы Непера сыграли незаурядную роль не только в астрономии, в прикладной математике, но и в математической науке вообще.

В наше время неперовыми иногда называют натуральные логарифмы, то есть логарифмы по основанию e . Таблицы натуральных логарифмов составил и издал в 20-х годах XVII ст. английский математик Д. Спейдель (1600 – 1634). Непер выразил идею создания десятичных логарифмов, которая была осуществлена одним из его друзей английским математиком Г. Бриггсом (1561 - 1631).

Следовательно, возникнув из практических потребностей астрономии и мореплавства, идея логарифма привела в XVIII - XIX ст. к развитию учения о показательной и логарифмической функциях и других математических теорий, которые в свою очередь открыли возможности для новых практических применений.

Ответы и указания к задачам

Раздел 1

1. 1) 1,2222...; 2) $-0,81818181\dots$; 3) 0,350000... . 2. 1) $\frac{9}{410} < \frac{9}{401}$;
2) $-\frac{6}{11} < \frac{5}{11}$; 3) $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$; 4) $0,54 > \frac{7}{15}$; 5) $0,22(23) > 0,2223$. 3. Например,
1) 0,74; 2) 0; 3) 0,23515; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $\frac{r_1 + r_2}{2}$. 4. Например, 1) 2; 3; 5; 0,7; 2) 4; 9; 16;
0,25. 5. $(-5; -3]$; $(-2; -1)$; $[0; 2]$. 8. 1) $2b - a$; 2) $\frac{3b - a}{2}$; 3) $2b - a$; $\frac{2b + a}{3}$.
9. 1) 1,26; 1,93; 2) 3π ; $\frac{\pi}{2}$; 3) 4,28; 0,01. 11. 1) $3 - \sqrt{8}$; 2) $3\sqrt{2} - 4$; 3) $\frac{2}{\sqrt{2} - 1}$;
4) $2, (2519) - 2, 25(19)$. 12. 1) -3 ; 2) $-\frac{13}{8}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) -17 . 13. 1) -2 ; 1; 2) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$;
3) нет решений; 4) $[-2; +\infty)$; 5) ± 3 ; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $[-2; -1]$. 14.
1) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) нет решений. 15. 1) $|a| \geq a$; 2)
 $-|a| \leq a$; 3) $|a^2| = a^2$; 4) $|2a^3 + 1| \geq 2a^3 + 1$; 5) $|2a^2 + 1| = 2a^2 + 1$. 16. 1) $\sqrt{3} =$
 $1,73205\dots$; $1 < \sqrt{3} < 2$; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$; $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$; $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$;
 $1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$; 2) $-\sqrt{3} = -1,73205\dots$; $-2 < -\sqrt{3} < -1$; $-1,8 < -\sqrt{3} < -1,7$;
 $-1,74 < -\sqrt{3} < -1,73$; $-1,733 < -\sqrt{3} < -1,732$; $-1,7321 < -\sqrt{3} < -1,7320$. 17. 1) 2
и 4; 2,5 и 2,7; 2,56 и 2,58; 2,569 и 2,571; 2) 3 и 5; 3,6 и 3,8; 3) 3,64 и 3,66; 3,650 и
3,652; 3) -2 и 0 ; $-0,9$ и $-0,7$;
 $-0,83$ и $-0,81$; $-0,823$ и $-0,821$; 4) 0 и 3 ; $0,6$ и $1,0$; $0,73$ и $0,77$; $0,744$ и $0,748$; 5) 2
и 6 ; $3,0$ и $3,5$; $3,14$ и $3,19$; $3,161$ и $3,166$; 6) -4 и -3 ; $-3,3$ и $-3,2$; $-3,17$ и $-3,15$;
 $-3,164$ и $-3,163$. 18. Указание. Воспользуйтесь методом от противного. 19. 1) $2n$;
2) $2n + 1$; 3) $3n$; 4) $3n - 2$. 21. 1) 1 403 200; 2) 214; 3) $16\frac{2}{35}$; 4) 1720. 22. 1) Пря-
мая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину; 2) окруж-
ность. 23. 1) $\{1; 2\}$; 2) $\emptyset$; 3) C ; 4) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; 5) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; 6) B . 24. 1)
 $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; 2) $\emptyset$; 3) C ; 4) $\{1; 2; 4; 5; 6\}$. 25. 1) $[5; 10]$; 2) $(-2; 0)$; 3) $[0; 2]$; 4)
 $\emptyset$; 5) $[-2; 5]$;
6) $[0; +\infty)$; 7) $(-\infty; 3]$; 8) $[0; 3]$. 26. 1) Множество равнобедренных прямоуголь-
ных треугольников; 2) множество четырёхугольников, имеющих хотя бы одну
пару параллельных сторон; 3) множество четырёхугольников, у которых равны
суммы длин противоположных сторон и суммы величин противоположных
углов; 4) объединение — данный круг радиуса 5 см; пересечение — данный

круг радиуса 3 см. **28.** 1) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на 4 или на 5}\}$; $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на 20}\}$; 2) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на 4 или на 6}\}$; $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на 12}\}$. **29. Z.** **30.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) да. **31. 68. 32.** Такая ситуация невозможна. **33.** 1) 10 %; 2) 30 %; 50 %. **34.** $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. **35.** 1) $\frac{n(n-1)}{2}$; 2) 2^n . **36. Указание.** Докажите, что каждый элемент множества, стоящий в левой части равенства является элементом множества, стоящего в правой части, и наоборот, что каждый элемент множества, стоящий в правой части равенства является элементом множества, стоящего в левой части. **38.** 2) (8; 0); (0; -4); 3) -6; -4; -1; 4) 10; 8; -6. **40.** В II и IV; в I и III. **41.** 1) $f(0) = 3$, $f(-1) = 1,5$, $f(3) = -4,5$; 2) $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = 0$, $f(3) = 2$; 3) $f(0) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(3) = \frac{1}{3}$. **42.** 1) -5; 2) -4; 3) -7; 2; 4) -3; -1. **43.** 1) $D(y) = \mathbb{R}$; 2) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 4) $D(y) = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 5) $D(y) = \left[-1; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 6) $D(y) = [-2; 2]$; 7) $D(y) = \{2\}$; 8) $D(y) = [-1; 0] \cup [1; +\infty)$. **44.** 1) $f(-2) = -3$, $f(-3) = -4$, $f(2) = 2$; 2) $x = 0$; 3) $x = 4,5$; 4) $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$. **45.** Например, 1) $y = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; 3) $y = \sqrt{x-2}$. **46.** (1; 1). **47.** Относительно оси y симметричны точки 3); относительно начала координат симметричны точки 2), 4). **48.** Относительно оси y симметричен график функции 3); относительно начала координат симметричны графики функций 1), 4), 5). **50.** 1) $|x-2|$; 2) $|a+3|$; 3) $|a-b|$; 4) $|a+b|$. **52.** Чётные: 1), 3), 9), 10); 12); нечётные: 6), 7). **53.** 1) $D(f) = [-4; 8]$; 2) $E(f) = [-2; 2]$; 3) -2; 4) $f(x) > 0$, если $x \in [-4; -2] \cup (4; 8)$, $f(x) < 0$, если $x \in (-2; 4)$; функция убывает на каждом из промежутков $[-4; 0]$ и $[6; 8]$, возрастает на $[0; 6]$. **54.** 1) $\frac{1}{R} \square k \in [0; 30]$, $\frac{1}{R} \square k \in [30; 90]$; 2) $\approx 0,40$. **58.** 1) Возрастающая; 2) убывающая; 3) возрастающая. **60.** 1) $D(f) = [-3; 7]$; $E(f) = [-4; 3]$; функция не является ни чётной, ни нечётной; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$ — нули функции; $f(x) > 0$ при $x \in (0; 3) \cup (6; 7]$, $f(x) < 0$ при $x \in [-3; 0) \cup (3; 6)$; функция возрастает на каждом из промежутков $[-3; 2]$ и $[5; 7]$, функция убывает на промежутке $[2; 5]$; $f(7) = f(2) = 3$ — наибольшее значение функции, $f(5) = f(-3) = -4$ — наименьшее значение функции; функция непрерывна; 2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = [-1; 1]$; функция чётная; $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ —

нули функции; $f(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $f(x) < 0$ при $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$, функция убывает на каждом из промежутков $[-1; 0]$, $[1; +\infty)$; $f(-1) = f(1) = 1$ — наибольшее значение функции, $f(0) = -1$ — наименьшее значение функции; функция непрерывна; 3) $D(T) = [0; 5]$; $E(T) = [-2; 2]$; функция не является ни чётной, ни нечётной; $t_1 = 1$, $t_2 = 4$ — нули функции; $T(t) > 0$ при $t \in [0; 1) \cup (4; 5]$, $T < 0$ при $t \in (1; 4)$; функция возрастает на промежутке $[3; 5]$, функция убывает на промежутке $[0; 3]$; $T(0) = 2$ — наибольшее значение функции, $T(3) = -2$ — наименьшее значение функции; функция непрерывна; 4) $D(f) = [-4; 5]$; $E(f) = (-2; 0] \cup (2; 7]$; функция не является ни чётной, ни нечётной; $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ — нули функции; $f(x) > 0$ при $x \in [-4; 0)$, $f(x) < 0$ при $x \in (0; 5)$; функция возрастает на промежутке $(0; 5]$, функция убывает на промежутке $[-4; 0]$; $f(-4) = 7$ — наибольшее значение функции, наименьшего значения функция не принимает; функция имеет одну точку разрыва $x = 0$, $f(0) = 0$; 5) $D(f) = [-2; -1) \cup (-1; 2]$; $E(f) = (-1; 0] \cup [1; 2]$; функция не является ни чётной, ни нечётной; $x_1 = -2$ — нуль функции; $f(x) > 0$ при $x \in [0; 2]$, $f(x) < 0$ при $x \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$; функция возрастает на промежутке $(-1; 1]$, функция убывает на каждом из промежутков $[-2; -1)$ и $[1; 2]$; $f(1) = 2$ — наибольшее значение функции, наименьшего значения функция не принимает; функция имеет две точки разрыва $x = -1$, $x = 0$, $f(0) = 1$, в точке $x = -1$ функция не определена. **61.** Монотонность. **62.** 1) Рис. 57; 2) рис. 56; 3) рис. 55. **63.** а) Линейные: 1), 2), 4); квадратичная: 5); обратная пропорциональность: 3); б) 1) -2 ; 2) $\frac{1}{2}$; 4) 2 ; в) вверх; г) $\pm\sqrt{3}$. **64.** 1) а); 2) г); 3) б); 4) е); 5) д); 6) в). **66.** 2) возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $(0; +\infty)$; 3) функция не является ни чётной, ни нечётной; 4) **указание:** измените значение в точке $x = 0$. **67.** а) $y = \frac{2}{3}x + 2$; б) $y = -2x + 2$; в) $y = -x$. **68.** 1) $V = t + 10$, $t \geq 0$; 2) 13 В. **70.** 12 м. **71.** 1) $y = 2x^2 - 3x + 1$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$; 3) $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4} - \frac{15}{8}$. **72.** а) $y = -2x^2 + 2x + 4$; б) $y = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{9}{4}$; в) $y = -2x^2 - 2x + 4$. **73.** $\frac{\pi}{8}$. **74.** 4 с; 20 м. **75.** 3 м, $\frac{8}{3}$ м, $\frac{5}{3}$ м. **76.** $y = x + 1$, $y = -x + 1$. **77.** 1) $S = 2 - \frac{x^2}{2}$, $0 < x < 2$. **78.** В точку с координатами $(-2; -1)$; в точку с координатами $(-3; -1)$. **81.** 3) $[-4; 0]$; 4) $[-3; -1]$; 5) 0 ; ± 4 ; 6) функция возрастает на каждом из промежутков $[-2; -1]$ и $[1; 2]$; функция убывает на промежутке $[-1; 1]$; 7) 0 . **83.** 1) $y = -3x + 4$ ($y = -3x - 4$);

2) $y = -2x^2 + x - 1$ ($y = 2x^2 + x + 1$); 3) $y = \frac{x+2}{1-2x}$ ($y = \frac{x-2}{2x+1}$); 4) $y = 1$ ($y = -1$). **84.**

1) $y = -x - 5$; 2) $y = -2$; 3) $y = 4x + 3x^2 - 1$; 4) $y = \frac{2x+3}{3x+2}$. **85.** 1) $y = x^2 - |x|$; 2)

$y = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{если } x \leq 0, \\ -x^2 - 3x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$ **86.** Нет; да. **87.** 0, значения 1 функция не принимает.

88. 1) (1; 0), (-4; 0); 2) $\left(\frac{3}{2}; 2\right), \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; 3) $\left(6; \frac{1}{3}\right)$. **89.** 2), 3), 4). **90.** 4 с. **91.** 1) $y =$

$10x - 40$; 2) $V = \frac{u-5}{3}$; 3) $z = t^2, t \geq 0$; 4) $y = \frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$; 6) $y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 9$; 7)

$y = \frac{x}{x-1}$; 8) $y = \frac{2t+1}{3t-1}$; 9) $u = x^2 - 3, x \geq 0$. **92.** 1) $U = 3I$; 2) $I = \frac{U}{3}$. **93.** 1)

$S = \frac{a^2}{2}, a > 0$; 2) $a = \sqrt{2S}$. **94.** Пусть $g(x)$ — функция, обратная функции $y =$

$f(x)$. Тогда для рис. 112: 1) $g(-1) =$

$-1, g(1) = 2, g(2) = 4; D(g) = [-2; 2], E(g) = [-2; 4]$; для рис. 113: 1) $g(-1) \approx 2,5,$

$g(1) =$

$-1, g(2) = -3; D(g) = [-3; 4], E(g) = [-4; 3]$. **95. Указание:** воспользовавшись ал-

горитмом нахождения обратной функции, найдите функцию, обратную одной

из заданных. **96.** $y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < -1, \\ x & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$ **97.** Функция не является монотонной, она

имеет обратную, ибо каждое своё значение принимает в одной точке. **98. Указа-**

ние: докажите, что функция возрастает. **99. Указание:** докажите, что сущест-

вует такое значение функции, которое она принимает в двух точках. **100.**

1) $\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) ± 1 ; 5) 0; 6) 4; 7) $\frac{3}{5}; \frac{1}{5}$; 8) $\emptyset$. **101.** -1 ; 3. **102.**

1) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-3; 0]$; 3) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$; 4) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $\emptyset$;

7) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 8) $\left(-\frac{3}{7}; 1\right)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **103.**

1) $\left(-\infty; -\frac{14}{5}\right]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 3) $[4; 4,5]$. **104.**

1) $\frac{3}{2}$; 2) $-1; \frac{14}{3}$; 3) $-8; 0; 1$; 4) $-4\sqrt{2}; -2$; 5) $-2; \frac{1}{4}$; 6) $-4; 2; 3$. **105.** 1) 3; 2)

решений нет; 3) -3 ; 4) $-2,2$; 6; 5) 9; 6) $-2; \frac{7}{9}$; 7) $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 8) 13;

9) $2; -\frac{3}{2}$; 10) $2; -1 - \sqrt{5}$; 11) $4a \pm 4\sqrt{a(a-1)}$, если $a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; $\emptyset$, если

$a \in (0; 1)$; 12) $x_1 = 1, x_2 = 4$, если $a \neq 2, a \neq 8$; $x = 4$, если $a = 2$; $x = 1$, если $a = 8$. **106.**

1) $A(0; 0)$,

$B(2; 0), C(-2; 0)$; 2) $A(1; 0), B(2; 1)$; 3) $A(2; 5)$; 4) $A(-6; 27)$; 5) $A(2; 100), B(-2; 100), C(3; 225), D(-3; 225)$. **107.** 1) 1; 6; 2; 2) $1 < b < 6$. **108.** 1) $(-2; -1) \cup (2; +\infty)$;

2) $\left(-\frac{1}{5}; 3\right]$; 3) $(-\infty; -3] \cup (0; 4]$; 4) $(2; 3, 5)$; 5) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; 6) $(-5; -2) \cup (3; +\infty)$;

7) $\left(-2; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{11}{5}; +\infty\right)$; 8) $\left(-6; \frac{1}{3}\right) \cup (1; 2)$.

109. 1) $[0; 2]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (2; 3)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$;

4) $[2; +\infty) \cup \{-3\}$; 5) $(1; 3) \cup (3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup (2; 3]$;

7) $(-\infty; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2] \cup \{0\}$; 8) $[-4; -3) \cup \left[-\frac{3}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$;

9) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 10) $(1; +\infty)$; 11) если $a \leq 0$, то $x < 0$; если $a > 0$, то

$x \in (-\infty; -\sqrt{a}] \cup (0; \sqrt{a}]$; 12) если $k = 0$, то $x > 0$; если $k \neq 0$, то $x \in (-|k|; 0) \cup$

$(|k|; +\infty)$; 13) если $k < 1$, то $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1 - k}) \cup (1 + \sqrt{1 - k}; +\infty)$; если $k = 1$, то

$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; если $k > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

110. 1) $(-\infty; 0) \cup (1; 4)$; 2) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$; 3) $(-4; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

111. 1) $(-1; 3)$; 2) $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$.

112. $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **113.** $80 \text{ км/ч} < v < 120 \text{ км/ч}$. **114.** 1) Один; 2) два; 3) один; 4)

один; 5) два; 6) один; 7) один; 8) бесконечное множество. **115.** 1) -2 ; 2) 4; 3) 10;

указание: воспользуйтесь монотонностью левых частей уравнений. **116.** 1) Три;

2) $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$. **117.** 1) $(3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$; 3) $(-\infty; -3] \cup [-1; 2]$. **118.** 1) Три; 2)

$x_1 \approx -2,5; x_2 = -1$; 3) $a \in [-1; 3]$; 4) $a = 3$; 5) два. **119.** 90. **120.** а) Частное равно 88,

остаток — 106; б) частное равно 1084, остаток — 20. **121.** 93. **122.** $2x^3 + 9x^2 - 9x$

$+ 2$. **123.** $(a - 2)(a^2 + 2)$. **124.** $c(c + 3)(c - 4)$. **125.** Нет. **126.** $2x^2 - 7x + 9$. **127.** $1 + x$

$+ x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$. **128.** 2. **129. Указание.** Запишите в общем виде мно-

гочлен $f(x)$, например, n -й степени и найдите $f(1)$. **130.** -1 . **131.** Частное равно

$2x^2 + 5x + 5$, остаток — $x - 1$. **132.** $x + 2$. **133.** $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 3$. **134.** 11. **135.** $a = -30$,

$b = 28$. **136.** 203. **137.** 3. **138. Указание.** Докажите, что многочлен делится на

каждый множитель делителя. **139.** Примените следствие из теоремы Безу. **140 –**

144. Указание. Используйте метод математической индукции.

Раздел 2

145. 1) Возрастает на R ; 2) убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$; 3) убывает на R ; 4) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$; 5) убывает на $(-\infty; 1]$, возрастает на

$[1; +\infty)$; 6) возрастает на R . **146.** $y = x^3$: 1) $-1; -8$; 2) $8; 1$; 3) $8; -8$. $y = x^4$: 1) $16; 1$; 2) $16; 1$; 3) $16; 0$. $y = -x^3$: 1) $8; 1$; 2) $-1; -8$; 3) $8; -8$. $y = -x^4$: 1) $-1; -16$; 2) $-1; -16$; 3) $0; -16$.

$y = (1 - x)^6$: 1) $729; 64$; 2) $1; 0$; 3) $729; 0$. $y = (x + 2)^5$: 1) $1; 0$; 2) $1024; 243$; 3) $1024; 0$. **147.** 1) Чётная; 2) нечётная; 3) ни чётная, ни нечётная; 4) ни чётная, ни нечётная. **149.** 1) Один; 2) ни одного; 3) один; 4) два; 5) два; 6) два. **150.** 1) **Указание:** составьте неравенство, которое нужно доказать, и для его доказательства рассмотрите три случая: $x < 1$, $x = 1$, $x > 1$; 2) составьте неравенство, которое нужно доказать, и для его доказательства рассмотрите три случая: $x < 2$, $x = 2$, $x > 2$.

151. 1) 10 ; 2) 6 ; 3) $-\frac{6}{5}$; 4) 576 ; 5) $\frac{49}{3}$; 6) $2,7$; 7) 6 ; 8) 6 ; 9) 6 ; 10) 3 . **152.**

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{\sqrt[3]{15}}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{5}}{3}$; 4) $\frac{5}{4}$; 5) $\frac{\sqrt[5]{6}}{a}$; 6) $\frac{a^2}{\sqrt[5]{7}}$. **153.** 1) 3 ; 2) 4 ; 3) 5 ; 4) 4 ; 5) $\frac{5}{3}$; 6) 4 ; 7)

2 ; 8) 2 ; 9) 3 ; 10) 3 . **154.** 1) $\sqrt[9]{5}$; 2) $\sqrt[12]{10}$; 3) $\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt[20]{12}$; 5) $\sqrt[18]{15}$; 6) $\sqrt[6]{20}$; 7) $\sqrt[15]{192}$; 8) $\sqrt[12]{24}$; 9) $\sqrt[16]{162}$; 10) $\sqrt[18]{160}$. **155.** 1) 4 ; 2) -4 ; 3) ± 5 ; 4)

нет решений; 5) -3 ; 6) 5 ; 7) -1 ; 8) 5 ; -1 ; 9) 5 ; 10) ± 5 . **156.** 1) $\frac{1}{625}$; 2) решений

нет; 3) 8 ; 4) -27 . **157.** 1) $\frac{1}{2}b$; 2) $3d^3$; 3) $2a$; 4) $-\frac{2}{3}c$. **158.** 1) $3a^2\sqrt[3]{2a}$; 2) $2|b|\sqrt[4]{2b^2}$;

3) $-a\sqrt[4]{5a^2}$; 4) $m^2\sqrt[3]{m^2n^2}$; 5) $2b^2\sqrt[4]{a^3b^3}$. **159.**

1) $\sqrt[5]{-15625}$; 2) $-\sqrt[6]{2b^6}$; 3) $-\sqrt[4]{a^4b^4}$; 4) $-\sqrt{-b^5}$. **160.**

1) $\sqrt{a} - 1$; 2) $2\sqrt[3]{a} - 1$; 3) $\sqrt{\frac{b}{a}}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$; 4) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})$; 5) $\sqrt{a} - 1$. **161.**

1) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{49}}{7}$; 3) $\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{19}$; 4) $\frac{x(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})}{x - 4y}$; 5) $\frac{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}{6}$;

6) $-\frac{2(9\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} + 4)}{23}$; 7) $2(2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; 8) $\frac{\sqrt[3]{(y+1)^2}}{x(y+1)}$. **162.** 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$; 3) $\sqrt[3]{5}$;

4) $2\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{2}$; 6) $-\sqrt{-x}$; 7) $\begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, y > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, y < 0; \end{cases}$ 8) $|a|$; 9) $\frac{2c^2}{3a^2b^2}$. **163.** 1) $\sqrt[8]{10} > \sqrt[4]{3}$;

2) $-3\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{-82}$; 3) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$; 4) $\sqrt[6]{5} > \sqrt[3]{2}$; 5) $\sqrt[4]{7} > \sqrt[3]{4}$. **164.** 1) < 0 ; 2) > 0 ; 3) $>$

0 ; 4) < 0 . **165.** $R = \sqrt[4]{\frac{8\eta l Q}{\pi(p_1 - p_2)}}$. **166.** 1) ± 3 ; 2) $\sqrt[15]{\frac{91}{8}}$; 3) $\frac{n(n+1)}{2} \sqrt{\frac{P_n}{2^n}}$. **167.** 20% . **168.**

Между тремя. **169.** 1) R ; 2) $\left(\frac{1}{3}; 2\right]$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$;
5) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 6) $(-\infty; -\sqrt[5]{2}) \cup (-\sqrt[5]{2}; -0,5] \cup [1; +\infty)$. **171.** 1) 2; 2) 2; 3) 0.
172. 1) $(64; +\infty)$; 2) $(-\infty; 64)$; 3) $(16; +\infty)$; 4) $[0; 16)$. **173.**
1) $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; 0\right]$; 2) $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$; 3) $(-\infty; -0,5)$; 4) $[-0,1; 0,1]$; 5) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
174. 1) $0,01 < \sqrt[4]{a} < 0,6$; 2) $5 < \sqrt[4]{a} < 5,5$; **175.** 1) 4; 2) 4; 3) 3. **176.** 1) 3 и 4; 2) 3 и 4;
3) -4 и -3; 4) 3 и 4. **177.** 1) Нет, первое уравнение является следствием второго;
2) да; 3) нет, первое уравнение является следствием второго; 4) нет, второе уравнение является следствием первого; 5) да. **178. Указание:** убедитесь в том, что второе уравнение имеет корни, не являющиеся корнями первого. **179.** 1)
 $(-\infty; 1,5)$; 2) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; 3) $(-\infty; -1,5] \cup (-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **180.** 1) 10;
2) 1; 2; 3; 3) -1; -3; 4) 5. **181.** 1) -1; 2) 28; 3) 12; 4) 8; 5) 3; 6) ± 4 . **182.** 1) -5; 4; 2)
8; 3) 6. **183.** 1) Если $a < 1$, то решений нет, если $a \geq 1$, то $x = a^2 - 2a - 2$; 2) если
 $a < -2$, то решений нет, если $a \geq -2$, то $x = -a^2 - 4a - 2$; 3) если $a < 0$, то реше-
ний нет, если $a \geq 0$, то $x = a$; 4) если $a < -1,5$, то решений нет, если $a \geq -1,5$, то
 $x = \frac{a-3}{3}$. **184.** 1) $\left(\frac{14}{5}; 2\right), \left(-\frac{11}{10}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{9}{5}; 2\right)$. **185.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $\left[\frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right]$;
3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$; 4) $(0; 1)$. **186.** 1) $[-2; 3]$; 2) $\left\{1; \frac{1}{2}\right\}$; 3) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;
4) нет решений. **187.** 1) $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$; 2) нет решений; 3) $[2; +\infty) \cup \{1\}$; 4) $(-1;$
 $0] \cup [1; 5)$. **188.** 1) $(0; 9)$; 2) $(-\infty; -16)$; 3) $(4; 5]$. **189.** 1) $\{(-9; -4); (4; 9)\}$; 2) $\{(27; -$
 $1); (-1; 27)\}$; 3) $(4; 4)$; 4) $(9; 4)$. **190.** 1) -24; 2) -835; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{61}{27}$; 5) 33; 6) -875.
191. 1) 125; 2) $\frac{125}{8}$; 3) 1; 4) $\frac{5}{3}$; 5) 1; 6) $-\frac{5}{3}$. **192.** 1) $2,89 \cdot 10^8$; 2) $2,7 \cdot 10^{16}$; 3) $1,6 \cdot 10^{17}$;
4) $6,25 \cdot 10^{-10}$; 5)
 $\approx 3,7 \cdot 10^{-11}$; 6) $\approx 1,2 \cdot 10^{-10}$. **193.** 1) $\frac{y^{20}}{x^{12}}$; 2) $\frac{a^{33}}{b^{44}}$; 3) $\frac{81d^{12}c^{20}}{16}$; 4) $\frac{81n^4}{m^{48}p^{12}}$;
5) $-\frac{8x^3y^9}{27z^{12}}$; 6) $\frac{c^4}{10000a^{24}b^{12}}$. **194.** 1) $\sqrt[4]{125}; \sqrt{343}; \sqrt[3]{\frac{1}{16}}; \sqrt{3}; \sqrt[5]{0,1}$; 2) $\sqrt[3]{a^2}; \sqrt{\frac{1}{b^5}}; \sqrt[5]{c^4}$;
 $\sqrt[5]{\frac{1}{d^7}}; \sqrt[5]{m^7}$; 3) $\sqrt[4]{2x}; 2\sqrt[4]{x}; x\sqrt[6]{y^5}; m\sqrt[3]{\frac{1}{n^7}}; -\sqrt{\frac{1}{p^5}}$; 4) $\sqrt[4]{(a-b)^3}; \sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}; 2\sqrt[6]{m+n}$;
 $3\sqrt[4]{\frac{1}{p^3}} - a\sqrt[4]{q^3}$. **195.** 1) $7^{\frac{3}{4}}$; 2) $3^{\frac{1}{3}}$; 3) $10^{-\frac{1}{3}}$; 4) $a^{\frac{3}{7}}$, если $a > 0$; 5) $a^{-\frac{3}{4}}$. **196.**

1) $\sqrt[6]{2187}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$; 4) $\sqrt{b}$; 5) $\sqrt[12]{a^{17}}$. **197.** 1) 27; 2) 1024; 3) 4. **198.**

$$1) \left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}} < \left(\frac{9}{4}\right)^{0,2};$$

$$2) \left(\frac{9}{64}\right)^{-\frac{1}{4}} < \left(\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} < \left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{4}{3}}; 3) \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{15}} < \left(\frac{9}{25}\right)^{-4}. \quad \mathbf{199.} \quad 1) b^{\frac{1}{6}}; 2) a^{\frac{5}{4}}. \quad \mathbf{200.}$$

$$1) 2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}; 2) a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}; 3) (cy)^{-1}; 4) x^{\frac{2}{3}}y^2. \quad \mathbf{201.} \quad 1) d^{\frac{1}{2}}; 2) 2q^{\frac{1}{2}}; 3) \frac{2}{1-a}; 4) 3x;$$

$$5) 2n. \quad \mathbf{202.} \quad 1) 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}; 2) 2n^{\frac{1}{3}}; 3) -\frac{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}{p-q};$$

$$4) \frac{2c^{\frac{1}{3}}}{c+d}; 5) a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}; 6) 2\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right); 7) 2u^{\frac{1}{5}}. \quad \mathbf{203.} \quad 1) \approx 1,09; 2) \approx 1,40; 3) \approx 0,481; 4)$$

$$\approx 1,73; 5) \approx 2,03; 6) \approx 1,67. \quad \mathbf{204.} \quad 1) 3^{\frac{2}{3}} < 4^{\frac{2}{3}}; \quad 2) 7^{\frac{1}{3}} > 7^{\frac{1}{4}}; \quad 3) 0,2^{\frac{3}{4}} < 0,4^{\frac{3}{4}}; \quad 4)$$

$$5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{2}{10}}. \quad \mathbf{205.} \quad 1) V^{\frac{1}{3}}; 2) V^{\frac{2}{3}}; 3) 6V^{\frac{2}{3}}. \quad \mathbf{207.} \quad 1) (-\infty; 0) \cup$$

$$(0; +\infty); 2) (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); 3) (-\infty; 1) \cup (1; +\infty). \quad \mathbf{208.}$$

График функции $y = \frac{3}{x+2}$: 1) ось x не пересекает, ось y пересекает в точке $\left(0; \frac{3}{2}\right)$; 2) прямую $y = x$ пересекает в точках с координатами $(-3; -3)$ и $(1; 1)$, а прямую $y = -x$ не пересекает; график функции $y = -\frac{2}{x-3}$: 1) ось x не пересекает, ось y пересекает в

точке $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; 2) прямую $y = x$ пересекает в точках с координатами $(2; 2)$ и $(1; 1)$,

а прямую $y = -x$ — в точках с координатами $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$ и

$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; -\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)$; график функции $y = \frac{x}{x+2}$: пересекает оси координат в

точке $(0; 0)$, 2) прямую $y = x$ пересекает в точках с координатами $(-1; -1)$ и $(0; 0)$, а прямую $y = -x$ — в точках с координатами $(0; 0)$ и $(-3; 3)$. **209.** 1) Да; 2) нет;

3) да; 4) нет. **210.** 1) $(1; 0)$, ось y не пересекает; 2) $(-2; 0)$, $\left(0; 2^{\frac{4}{3}}\right)$; 3) ось x не пересек

ает, $(0; 1)$; 4) не пересекает осей координат. **211.** 1)

$[-3; +\infty)$; 2) $(-3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$; 4) $(-\infty; 5]$. **212.** 1) 32 и 1; 2) 1 и $\frac{1}{32}$; 3) 81 и 16; 4) $\frac{1}{16}$ и $\frac{1}{81}$. **213.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$. **217.** 1) (3; 4); 2) (9; 16); 3) (27; 64); 4) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; 5) $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{9}\right)$; 6) (243; 1024); 7) (144; 332). **218.** 1) > 0 ; 2) < 0 ; 3) > 0 ; 4) < 0 . **219.** 1) ≈ 167 м/мин.; 2) $\approx 0,51$ м/мин.; 3) $T = \left(\frac{350}{v}\right)^5$; 4) не существует. **220.** 1) $x = y^{-1}$; 2) $x = y^3$; 3) $x = y^{\frac{9}{8}}$.

Раздел 3

223. 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{4\pi}{3}$; 4) $\frac{7\pi}{12}$; 5) $-\frac{5\pi}{3}$; 6) $\frac{37\pi}{180}$; 7) $\approx 2,2$ рад. **224.** 1) 30° ; 2) -120° ; 3) $\approx 114,6^\circ$; 4) $\approx 401^\circ$; 5) $\approx 20^\circ$; 6) $\approx 180^\circ$; 7) $\approx 363^\circ$. **226.** $9^\circ; 135^\circ; 720^\circ; 1350^\circ$. **227.** 1) $-290^\circ; 790^\circ; 1150^\circ$; 2) $-200^\circ; 880^\circ; 1600^\circ$. **228.** 1) $-\frac{9\pi}{5}; \frac{11\pi}{5}; \frac{21\pi}{5}$; 2) $-\frac{16\pi}{5}; -\frac{6\pi}{5}; \frac{14\pi}{5}$. **229.** 1) 3 см; 2) 2π см; 3) 0,4 м; 4) 4π м. **230.** $\frac{\pi}{2} \frac{1}{c}$. **231.** 1) 540 000 °/с; 2) $3\,000\pi$ рад/с. **232.** $240\pi \frac{см}{с}$. **233.** $2,5 \frac{1}{с}$. **234.** 6π см/с; 270π см. **235.** 1) 0 и 4; 2) -4 и 0. **236.** $(0; -3); (2\sqrt{2}; 1); (-2; \sqrt{5})$. **237.** 1) $30^\circ; 60^\circ; 360^\circ; 720^\circ$; 2) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; 2\pi; 4\pi$. **238.** 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **240.** 1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **241.** 1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 0)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; 1)$; 5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 9) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **242.** 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 5) $\frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 6) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 7) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

8)

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

243.

$$1) \frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$3) \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{244.} \quad \text{Например,} \quad 1) \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; 0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6};$$

$$2) \frac{7\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \quad 3) \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; 0; \frac{5\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \quad 4) \frac{\pi}{4}; 0; \frac{5\pi}{3}; \frac{3\pi}{2};$$

$$\frac{7\pi}{6}; \pi; \frac{2\pi}{3}; \quad 5) \frac{5\pi}{4}; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; 0; \frac{5\pi}{3}. \quad \mathbf{245.} \quad 1) \text{ Бесконечное множество и четыре;}$$

2) бесконечное множество и две; 3) бесконечное множество и восемь; 4) бесконечное множество и две.

$$\mathbf{246.} \quad 1) \left\{ \begin{array}{l} (1; 0) \text{ при } k = 6n, \\ \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k = 6n + 1, \\ \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k = 6n + 2, \\ (-1; 0) \text{ при } k = 6n + 3, \\ \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k = 6n + 4, \\ \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k = 6n + 5, n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ при } k = 6n, \\ (0; 1) \text{ при } k = 6n + 1, \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ при } k = 6n + 2, \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ при } k = 6n + 3, \\ (0; -1) \text{ при } k = 6n + 4, \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ при } k = 6n + 5, n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k = 4n, \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k = 4n + 1, \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k = 4n + 2, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k = 4n + 3, n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right. \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} (1; 0) \text{ при } k = 4n, \\ (0; 1) \text{ при } k = 4n + 1, \\ (-1; 0) \text{ при } k = 4n + 2, \\ (0; -1) \text{ при } k = 4n + 3, n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

247.1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 248. 1)

30°; 30°; 120°; 2) 45°; 45°; 90°. 249. 1) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

250. 3; 2; 3,5; 1,5. 251. 1) $-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}$; 2) $\frac{12}{13}; -\frac{5}{13}; -\frac{12}{5}; -\frac{5}{12}$; 3)

$\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{7}}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{7}}{3}; \frac{3}{\sqrt{7}}$. 252.

Число	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	-1	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
ctg	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

253.

Число	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{12\pi}{7}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{6}$
Функция							
sin	-	+	-	-	+	+	+
cos	-	+	+	-	-	-	+
tg	+	+	-	+	-	-	+
ctg	+	+	-	+	-	-	+

254. 1) 0; 2) -2; 3) -1; 4) 1. 256. 1) 0; π ; 2π ; 2) 0; 2π ; 3) 0; π ; 2π ; 4) π ;

5) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; 6) $\frac{3\pi}{2}$.

257.

1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2)

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

258.

1)

$-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$;

2) $-\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$; 5) 0; 2π ; 6) $-\pi; \pi; 3\pi$.

259.

1)

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

3) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

$$5) \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{260.} \quad 1) \quad \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \quad \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z};$$

$$3) \quad \frac{\pi}{3}(2n+1), \quad n \in \mathbf{Z}; \quad 4) \quad \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{261.} \quad 1)$$

$$\frac{\pi n}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \quad \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}; \quad 3) \quad \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{262.} \quad 1) \sqrt{1-a^2}; \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}; \quad 2) -\sqrt{1-a^2}; -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}. \quad \mathbf{263.} \quad \frac{3}{5}, \frac{4}{5}. \quad \mathbf{265.} \quad 1) x = \sqrt{4-y^2},$$

$$y = \sqrt{4-x^2}; \quad 2) 1) x = \sqrt{4+y^2}, y = -\sqrt{x^2-4}; \quad 3) x = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, y = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}};$$

$$4) x = -\sqrt{\frac{1}{1-y^2}}, y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}. \quad \mathbf{266.} \quad 1) +; \quad 2) -; \quad 3) +; \quad 4) -; \quad 5) +; \quad 6) +, \text{ если}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \text{ и } -, \text{ если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad \mathbf{267.} \quad 1) +; \quad 2) -; \quad 3) -; \quad 4) +;$$

$$5) -; \quad 6) -; \quad 7) -; \quad 8) -. \quad \mathbf{268.} \quad 1) \sin t = -0,6; \quad \operatorname{tg} t = -0,75; \quad \operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3};$$

$$2) \cos t = -\frac{5}{13}; \quad \operatorname{tg} t = 2,4; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{5}{12}; \quad 3) \cos t = -\frac{5}{13}; \quad \sin t = \frac{12}{13}; \quad \operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12};$$

$$4) \cos t = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \sin t = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \operatorname{tg} t = \frac{1}{3}; \quad 5) \cos t = -0,8; \quad \operatorname{tg} t = 0,75; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{4}{3};$$

$$6) \sin t = -\frac{12}{13}; \quad \operatorname{tg} t = -2,4; \quad \operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}; \quad 7) \cos t = -\frac{3}{5}; \quad \sin t = \frac{4}{5}; \quad \operatorname{ctg} t = -\frac{3}{4};$$

$$8) \cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \operatorname{tg} t = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{269.} \quad 1) \left(\frac{12}{13}; -\frac{5}{13} \right) \text{ или } \left(-\frac{12}{13}; \frac{5}{13} \right); \quad 2) \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5} \right)$$

$$\text{или } \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right); \quad 3) \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right) \text{ или } \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right); \quad 4)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) \text{ или } \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right). \quad \mathbf{270.} \quad 1)$$

$$\frac{6}{5+3\sqrt{5}}; \quad 2) -\frac{12}{7+4\sqrt{7}}. \quad \mathbf{271.} \quad 1) -\frac{5}{4}; \quad 2) \frac{1}{2}; \quad 3) \frac{9}{4}; \quad 4) \frac{2}{5}; \quad 5) -\frac{7}{2}; \quad 6) \frac{11}{31}. \quad \mathbf{272.}$$

$$1) -\operatorname{ctg}^2 \alpha; \quad 2) 0; \quad 3) \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad 4) 0; \quad 5) \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}; \quad 6) \operatorname{ctg}^2 \alpha; \quad 7) \cos^2 \alpha; \quad 8) \sin \alpha, \text{ если}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad -\sin \alpha, \text{ если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$9) \cos \alpha, \text{ если } 2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad -\cos \alpha, \text{ если}$$

$$\pi + 2\pi n < \alpha < 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 10) \operatorname{tg} \alpha; \quad 11) \operatorname{ctg}^2 \alpha. \quad \mathbf{274.} \quad 1) 0,345; \quad 2) 0,8515; \quad 3)$$

$\sqrt{0,31}$ или $-\sqrt{0,31}$; 4) $\approx 1,05$ или $\approx -1,05$. **275.** 1) 7; 2) 18; 3) 47; 4) $\sqrt{5}$ или $-\sqrt{5}$.
276. 1) 7 или -7 ; 2) 18. **277.** 1) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **278.** 1) $(-1; 0)$; 2) $(0; -1)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; 1)$; 5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **280.** 1) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **281.** 1) $60^\circ; 26^\circ; 80^\circ; 90^\circ - \alpha; 45^\circ - \alpha; \frac{3\pi}{8}$; 2) $150^\circ; 116^\circ; 170^\circ; 180^\circ - \alpha; 135^\circ - \alpha; \frac{7\pi}{8}$. **283.**

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
ctg	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$

284. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1 ; 4) $\sqrt{3}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\sqrt{3}$; 8) 1.

285. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$. **286.** 1) $\sin \frac{8\pi}{9}$; 2) $-\cos \frac{8\pi}{9}$;

3) $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5}$. **287.** 1) $-\cos \frac{\pi}{6}$; 2) $\cos \frac{\pi}{4}$; 3) $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$; 5) $-\sin \frac{2\pi}{9}$;

6) $-\sin \frac{\pi}{18}$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9}$; 8) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{36}$. **288.** 1) 4; 2) -1 ; 3) 1; 4) $-\operatorname{ctg} \alpha$. **290.** $\frac{4}{5}$; **291.** $\frac{12}{13}$.

292. 1) 1; 2) $\frac{m^2 - 1}{2}$. **294.** 1) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) 0; π ; 2π ; 6) $\frac{\pi}{2}$.

295. 1) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

3) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{9\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

- 5) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **296.** 1) 0; 2) 1. **297.** 1) 0; 2) -1; 3) 0; 4) 0. **299.** 1) $385^\circ; 745^\circ; -205^\circ; -335^\circ$; 2) $\frac{\pi}{5}; \frac{11\pi}{5}; \frac{21\pi}{5}; -\frac{9\pi}{5}; -\frac{19\pi}{5}$; 3) $40^\circ; 220^\circ; 400^\circ; -140^\circ$; -320° . **302.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sqrt{3}$. **303.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$; 4) $\operatorname{tg}^2 2\alpha$. **308.** 1) 6π ; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) не существует. **311.** 1) Нет; 2) да, π ; 3) да, 2π ; 4) да, π . **313.** 1) 2π ; 2) 2π ; 3) 2π ; 4) π . **314.** 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$; 2) $[-2; 0] \cup [2; +\infty]$; 3) $[-3; -1] \cup (-1; 3]$; 4) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. **316.** 1) Убывает на всей координатной прямой; 2) убывает на всей координатной прямой; 3) возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$; 4) убывает на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$; 5) возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0]$, убывает на каждом из промежутков $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$; 6) возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$. **317.** 1) Чётная; 2) нечётная; 3) ни чётная, ни нечётная; 4) ни чётная, ни нечётная. **320.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$ 1) $x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 5) $x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 7) $2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 8) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **321.** 1) Чётная; 2) чётная; 3) нечётная; 4) нечётная; 5) чётная; 6) ни чётная, ни нечётная. **322.** 1) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]; \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. **323.1)** $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]; \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; 3) $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]; \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. **324.** 1) Возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$; убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$; 2) возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbf{Z}$; убывает на каждом из промежутков $[2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbf{Z}$; 3) возрастает на каждом из промежутков $\left[\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbf{Z}$; убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbf{Z}$; 4) возрастает на каждом из промежутков

$\left[\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \pi n\right], \quad n \in \mathbf{Z};$ убывает на каждом из промежутков

$\left[-\frac{5\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right], \quad n \in \mathbf{Z};$ 5) возрастает на каждом из промежутков

$\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right], \quad n \in \mathbf{Z};$ убывает на каждом из промежутков

$\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right], \quad n \in \mathbf{Z};$ 6) возрастает на каждом из промежутков

$\left[\frac{2\pi}{3} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n\right], \quad n \in \mathbf{Z};$ убывает на каждом из промежутков

$\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right], \quad n \in \mathbf{Z}.$ **325.** 1) $\sin 42^\circ < \sin 73^\circ;$

2) $\sin 230^\circ > \sin 250^\circ;$ 3) $\sin 190^\circ > \sin 250^\circ;$

4) $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right);$ 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right);$ 6) $\cos(-3) < \cos(-2);$

7) $\cos \frac{\pi}{5} > \sin \frac{\pi}{5};$ 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$ **327.** 1) $[-1; 1];$ 2) $[-2; 2];$ 3) $[-3; 1];$ 4) $[0;$

$1];$

5) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right];$ 6) $[-3; 3];$ 7) $\left[-3 - \frac{\pi}{6}; 3 - \frac{\pi}{6}\right];$ 8) $[0; 3];$ 9) $\left[-\frac{\pi}{6}; 3 - \frac{\pi}{6}\right].$

332. $y = \frac{1}{5} \cos(4x - 2) - 3.$ **333.** 1) $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6};$ 2) $-\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3};$ 3) $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4};$ 4) $\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}.$ **334.**

1) $x \in \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right];$ 2) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right];$ 3) $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right);$ 4) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3}\right]$

$\cup \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right];$ 5) $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right);$ 6) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right];$ 7) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right];$

8) $x \in \left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\right].$ **335.** 1) $f(x) > 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z};$ $f(x) < 0$ при

$x \in \left(\frac{5\pi}{6} + \pi n; \frac{4\pi}{3} + \pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z};$ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}$ — нули функции; 2) $f(x) > 0$ при

$x \in \left(-\frac{5\pi}{2} + 6\pi n; \frac{\pi}{2} + 6\pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z};$ $f(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi n; \frac{7\pi}{2} + 6\pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z};$

$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ — нули функции. **336.** $\pm 1.$ **338.**

1) $x = \frac{3}{2};$ 2) $x = \frac{1}{2}, x = 1;$ 3) $x = \pi n, n \in \mathbf{Z};$ 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$ **339.** $x = 0, y = 0.$ **340.**

1) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \quad n \in \mathbf{Z};$ 2) $x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$ 3) $x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z};$ 4) $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n; \pi$

$n \in \mathbf{Z}$. **341.** 1) Нечётная. 2) нечётная; 3) чётная; 4) чётная; 5) ни чётная, ни нечётная; 6) чётная. **342.** 1) $\operatorname{tg}(-80^\circ) < \operatorname{tg}(-50^\circ)$; 2) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} 1,6$;

4) $\operatorname{tg}(-2) > \operatorname{tg}(-3)$; 5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}$; 6) $\operatorname{ctg} 95^\circ > \operatorname{ctg} 117^\circ$; 7) $\operatorname{ctg} 2 > \operatorname{ctg} 3$; 8) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{11} <$

$< \operatorname{tg} 1,3\pi$; 9) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$; 10) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{14} > \operatorname{ctg} \frac{35\pi}{2}$. **343.** 1) Убывает на каждом из

промежутков $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) убывает на каждом из промежутков

$(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) возрастает на каждом из промежутков

$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 5) убывает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$

, $n \in \mathbf{Z}$; возрастает на каждом из промежутков $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 6) возрастает

на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; убывает на каждом из

промежутков $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 7) возрастает на каждом из промежутков

$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 8) убывает на каждом из промежутков

$\left(-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n; \frac{9\pi}{4} + 3\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **344.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$;

4) $[0; +\infty)$; 5) $\{1\}$; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 8) $(-\infty; 0]$. **345.**

1) $1; -1$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; 0$. **348.** 1) $\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$.

349. 1) $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$;

4) $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$; 5) $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. **350.** 1) $f(x) > 0$ при

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ — нули функции; 2) $f(x) > 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}\right)$,

$n \in \mathbf{Z}$; $f(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ – нули функции. **351.**

1) 3; -3; 2π ; 2) $1; 0; \frac{\pi}{2}; 3) \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 4\pi$; 4) $2; 0; \pi$. **352.** 1) Параллельно перенести вдоль оси y на $\frac{\pi}{3}$ в положительном направлении оси; 2) параллельно перенести вдоль оси x на $\frac{\pi}{3}$ в отрицательном направлении оси; 3) растянуть от оси y

вдвое; 4) сжать к оси x вдвое. **353.** 20π см/с; **354.** $2 \frac{1}{с}$. **355.** 1) $6; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{1}{2}; 2; -\frac{\pi}{4}$; 3) $2,5; 6\pi; 1$; 4) $4; \frac{2\pi}{3}; 0$; 5) $1; 2\pi; 1$. **356.** 1) $2,5; \frac{2}{3}; 3\pi; \frac{5}{4}$ см; 2) $7; 0,5; 4\pi; \frac{7\sqrt{2}}{2}$ см; 3) $2; 1; 2\pi; 0$ см; 4) $1,5; 6; \frac{\pi}{3}; -0,75$ см. **357.** 1) $5; 0,2; 10\pi$; 2) 5 A ; 3)

$t = 0,05 + 0,2n \text{ с}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. **358.** 1) $220; \frac{1}{30}; 60\pi$; 2) 220 В ; 3) $\frac{n}{30} \text{ с}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

359. 1) $2; \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}$; 2) параллельный перенос вдоль оси t на $\frac{\pi}{6}$ единиц в положительном направлении; сжатие к оси y втрое; растяжение от оси t вдвое.

360. 1) $t = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; 2) $t = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$;

3) $t = \frac{2\pi(n+1)}{3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; 4) $t = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. **361.1)**

$$y = 0,5 \sin\left(100\pi + \frac{\pi}{3}\right);$$

2) $y = 7 \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. **363.** 1) +; 2) -; да. **364.** 1) 3; 2) $-3\sqrt{2}$; 3) 0; 4) 6; 5) -6. **365.**

1) ab ; 2) 0; 3) $a^2 + b^2$; 4) $-a^2 - b^2$. **366.** 1) 8; 2) -12; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 17; 5) 26; 6) 10; 7) -

8.

368.

$$1) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}; 2) -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}; 3) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}; 4) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}; 5) -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

369. 1) $-\frac{297}{425}; -\frac{87}{425}$; 2) $\frac{2\sqrt{30}-1}{12}; \frac{-2\sqrt{30}-1}{12}$; 3) $\frac{25}{19}; \frac{5}{31}$; 4) $-\frac{7}{17}$. **370.** 1) $\cos \alpha$;

- 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$; 4) $-\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$; 5) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 6) $\frac{\cos \alpha}{\sin 2\alpha}$. **371.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **376.** $\frac{24}{145}$. **378.** 1) 15° или 75° . **379.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π ; 3) 2π ; 4) π . **380.** 1) 0; 3; π ; 2) -1; 2; π . **381.** 1) $-\frac{336}{625}; \frac{527}{625}; -\frac{336}{527}$; 2) $2a\sqrt{1-a^2}$; 3) $2a^2-1$; 4) $\frac{2a}{1-a^2}$. **382.** 1) $3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$; 2) $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$. **383.** 1) $\approx 0,447$; $\approx 0,894$; 0,5. 2) $\approx 0,949$; $\approx 0,316$; 3. **384.** 1) $\frac{1}{2}\sin 20^\circ$; 2) $\cos 4\alpha$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 5) $\frac{1}{2}\sin 4\alpha$; 6) $\sin 2\alpha$; 7) $\sin 2\alpha$; 8) $\sin 2\alpha$; 9) $\operatorname{tg}^2 \gamma$; 10) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)$. **385.** 1) 1; 2) 1; 3) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 5) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; 6) $\sin 3\alpha$; 7) $\cos 4\beta$; 8) $\frac{1}{8}\cos 4x$; 9) $\sin 2\alpha$; 10) $\cos 2\alpha$; 11) $\cos \alpha - \sin \alpha$; 12) $\sqrt{2}|\sin \alpha + \cos \alpha|$; 13) $-2\cos \alpha$; 14) $-2\sin \frac{\alpha}{2}$; 15) -1; 16) $\operatorname{ctg} 2\alpha$. **387.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 4. **388.** 1) 0,96; -0,28; 2) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; $\frac{1}{3}$; 3) h^2 . **389.** 1) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \pi$; 2) 2; 1; $\frac{\pi}{2}$; 3) 2; 0; π . **390.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; 6) $\frac{1}{4}$. **391.** 1) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\cos \alpha}$; 3) $2\sqrt{2}\cos \frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\cos \alpha \cos 3\alpha$. **393.** 1) $4\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $-4\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos \alpha}$; 4) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos \alpha}$. **394.** 1) $1 + \cos 2x$; 2) $\frac{1}{2} + \cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x$; 3) $1 - \cos 4x$; 4) $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$; 5) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x$. **395.** 1) $\alpha = (-1)^n \beta + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\alpha = \pm \beta + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **399.** 1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$; 2) $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$. **400.** 45° . **Указание.** Воспользуйтесь равенством $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$, доказанным в задании 398. **401.** $\sqrt{2}c$. **402.** 1) $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\pi$; 2) $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\pi$. **403.** 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1; 4π ; 2) 0; наибольшего значения не существует; π .

Раздел 4

404. 1) В первой; 2) в четвертой; 3) в первой; 4) во второй. **405.**

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 0,8; 6) 0,6. **406.** 1) 1; 2) 0. **407.**

1) 25° ; 2) $\frac{\pi}{8}$; 3) $\pi - 3$; 4) $2\pi - 5$.

408. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

4) $\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 5) нет решений; 6) нет решений;

7) $(-1)^{n+1} \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 8) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 9) нет решений;

10) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, \pi + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 11) $\pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$; 12) $\pm \frac{1}{2} \arccos(-0,6) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 13) $3(-1)^n \arcsin 0,2 + 3\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 14) $-0,5 \pm \arccos 0,9 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

409. 1) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

4) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **410.** 1) $2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) нет решений; 3) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$;

$\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **411.** 1) $2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) нет нулей;

3) $\frac{1}{\pi n}, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$; 4) $\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **412.** 1) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$;

2) $\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{15\pi}{8}; \frac{1}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{3}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{2}{8}; \frac{33\pi}{8}; \frac{39\pi}{8}; \frac{41\pi}{8}; \frac{4}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{1}{6}$;

4) $-\frac{41\pi}{36}; -\frac{17\pi}{36}; \frac{7\pi}{36}; -\frac{35\pi}{36}; -\frac{11\pi}{36}$. **413.** 1) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

3) $\frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **415.** 1) $\approx 83,6^\circ; \approx 96,4^\circ$; 2) 60° и 30° . **416.** 1)

$\frac{1}{2} \arcsin \frac{4S}{c^2}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{4S}{c^2}$. **Указание:** к прямоугольному треугольнику приложить равный ему треугольник и воспользоваться теоремой синусов. 2)

$2R \left(1 + \arcsin \frac{r}{R-r} \right)$. **417.** $\frac{3(2\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}-3}; \frac{2\sqrt{3}+3}{3(2\sqrt{3}-1)}; \frac{3(2\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}-3}; \frac{2\sqrt{3}+3}{3(2\sqrt{3}-1)}$. **418.** 1)

π ; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) 4π . **419.** 1) $\left(\frac{\operatorname{ctg} 6}{\operatorname{tg} 3}; +\infty \right)$; 2) $\left(\frac{\operatorname{ctg} 5}{\operatorname{tg} 4}; +\infty \right)$. **420.** 1) В первой; 2) в че-

твертой; 3) в первой; 4) во второй. **421.** 1) $\sqrt{3}$; 2)

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}; 3) -\frac{1}{\sqrt{3}}; 4) -1; 5) 2,5; 6) -1,25. \quad 422. \quad 1) \frac{\sqrt{3}}{3}; 2) 0. \quad 423.$$

$$1) 65^\circ; 2) \frac{\pi}{5}; 3) 3; 4) -2; 5) \frac{\pi}{8}; 6) \frac{5\pi}{7}; 7) 0; 8) \frac{\pi}{2}; 9) 2-\pi; 10) \frac{3\pi}{2}-4. \quad 424.$$

$$1) -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 2) -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 3) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z};$$

$$4) \operatorname{arctg}(3-\sqrt{2}) + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 5) \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 6) \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$7) \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(-0,3) + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; 8) \frac{2\pi}{15} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 9) \operatorname{arctg}(-3) + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 10) 2\pi n;$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \operatorname{arctg}(-0,5) + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 425. \quad 1) -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 2) \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$3) -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 4) \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 426. \quad 1) \frac{1}{3} + n, n \in \mathbf{Z}; 2) 1; \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$3) \frac{\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{4} - \pi n, n = 0, 1, 2, \dots; 4) (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 427.$$

$$1) -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 2) \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 3) \frac{2\pi}{3} + 6\pi n, \frac{8\pi}{3} + 6\pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 428.$$

$$1) 50^\circ; 2) 120^\circ; 3) \frac{\pi-2}{5}. \quad 429. \quad 1) \frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; 2) -\frac{7\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8};$$

$$\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; 3) 0; 2\pi; 4\pi; 6\pi; 4) -\frac{4\pi}{3}; -\pi; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}. \quad 430. \quad \approx 126^\circ; \approx 54^\circ. \quad 431. \quad 1)$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{4S}{c^2}, \quad \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{4S}{c^2}; 2) \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2 - b^2}, \quad \pi - \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2 - b^2}. \quad 432.$$

$$1) \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ 26', \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ 26', \pi - 2 \operatorname{arctg} 2 \approx 53^\circ 8';$$

$$2) 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \approx 48^\circ 11', 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \approx 48^\circ 11', \pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \approx 83^\circ 38'. \quad 433. \quad 1) -; 2) -; 3) +; 4)$$

$$-; 5) -; 6) +. \quad 434. \quad 1) +, -, -, -; 2) -, -, +, +. \quad 435. \quad 1) \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right); 2) \left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right); 3) \text{таких}$$

$$\text{чисел не существует.} \quad 436. \quad 1)$$

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}; 2) \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z};$$

$$3) \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}; 4) \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}; \quad 5)$$

$$\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right); \quad \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}. \quad 437. \quad 1) \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq$$

$$\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2)$$

$$\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 3) \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

4) $\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1), n \in \mathbf{Z}$. **438.** 1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;
2) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;
4) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;
6) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 7) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;
8) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 9) $-\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;
10) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 11) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;
12) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 13) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
14) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;
15) $\pi(2n-1) < x < 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 16) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;
17) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 18) $\frac{\pi}{2} + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
439. 1) $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;
3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$;
440. 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;
3) $\pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **441.** 1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;
4) $\pi n < x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi n, n = 0, 1, 2, \dots$; $\frac{5\pi}{6} + \pi n \leq \pi + \pi n, n = \dots, -3, -2, -1$. **442.** 1)
 $\frac{\pi}{6} + 4\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **443.** 1) $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$;

$$2) \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]; 3) \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right); 4) \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right). \quad 444. \quad 1) -\arccos \frac{1}{4} + (2k+1)\pi$$

$$< x < \arccos \frac{1}{4} + (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}; 2) -\arcsin \frac{2}{3} + (2k+1)\pi < x < \arcsin \frac{2}{3} + (2k+2)\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$3) -\arcsin \frac{2}{5} + 2k\pi < x < \arcsin \frac{2}{5} + (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}; 4) -\arccos \frac{3}{4} + 2k\pi \leq x \leq$$

$$\arccos \frac{3}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}; 5) -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \arctg 2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}; 6) -\arctg \frac{1}{2} + k\pi \leq$$

$$x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}; 7) -\operatorname{arctg} 3 + k\pi \leq x < k\pi, k \in \mathbf{Z}; 8) k\pi < x < \operatorname{arctg} 4 + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$445. 1) -\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{7\pi}{6}; 2) -\frac{5\pi}{24} < x \leq \frac{\pi}{2}; 3) -\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{8}; 4) 0 \leq x < \frac{\pi}{3}; \pi < x < \frac{13\pi}{3};$$

$$5\pi < x \leq 8\pi.$$

$$446. 1) \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$2) -\pi + \arcsin b + 2\pi n < x < \arcsin b + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$3) -\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$4) \arccos b + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 447. \quad 3n \leq t \leq 1+3n, n=0,1,2,\dots$$

$$448. \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}. \quad 449. \quad \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad 450. \quad 1) \frac{\pi}{3}(2n+1), n \in \mathbf{Z};$$

$$2) -2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 3) (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; 4) \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}. \quad 451. 1) \text{ Не существуют;}$$

$$2) \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n; \pm \frac{5\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}; 3) \pm \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}; 4) \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}.$$

452.

$$1) \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{11\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; 2) \frac{\pi}{2} + 3\pi n, \pi + 3\pi n, 2\pi + 3\pi n,$$

$$\frac{5\pi}{2} + 3\pi n, n \in \mathbf{Z}; 3) \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}. \quad 453. \quad 1) \frac{\pi}{2} + 2\pi n; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$2) \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$$

$$3) \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\operatorname{arctg}(-4) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 4) \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$5) \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 6) \pm \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$454. 1) \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; 2) \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; 3) -\frac{\pi}{4} + \pi n; -\operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$4) \frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 2,5 + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 5) \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 6) \operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$7) \frac{\pi}{4} + \pi n; -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 8) \frac{\pi}{2} + \pi n, \arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 9) -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$455. \quad 1) (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4}, n \in \mathbf{Z}; \quad 3) \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$4) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; \quad 5) 2\arctg \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$6) 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 7) 2\pi n, \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in \mathbf{Z}; \quad 8) \frac{\pi}{6}(3n \pm 1), n \in \mathbf{Z}. \quad 456.$$

$$1) 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 457. \quad 1) -\frac{3\pi}{4}; \quad 2) -\arctg(\sqrt{2}-1).$$

$$458. \quad 1) \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad -\arcsin \frac{1}{3} + \pi(2n+1), n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 459.$$

$$1) \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; 0 \right), n \in \mathbf{Z}; \quad 2) (\pm \arctg 2 + \pi n; 0), \left(\pm \frac{\pi}{4} + \pi n; 0 \right), n \in \mathbf{Z}. \quad 460.$$

$$1) \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 1 \right), n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; 1 \right), \quad (-\arctg 2 + \pi n; -2), n \in \mathbf{Z}. \quad 461.$$

$$1) \frac{3\pi}{4}; \arctg 2 + \pi; \quad 2) \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \arctg 2 + \pi. \quad 462. \approx 31,7^\circ; \approx 58,3^\circ. \quad 463. \approx 40,9^\circ. \quad 464. \approx$$

$$38,2^\circ; \approx 51,8^\circ. \quad 465. \approx 48,6^\circ; \approx 82,8^\circ. \quad 466. \approx 24,9^\circ; \approx 65,1^\circ. \quad 467. \approx 37,2^\circ; \approx 71,9^\circ.$$

$$468. \approx 24,5^\circ; \approx 65,5^\circ. \quad 469. \quad 1) (2x-1)(2x+1); \quad 2) (x-6)(x+5);$$

$$3) x(x+1)(x-3); \quad 4) 3(2+x)(8-3x); \quad 5) (a-2)(a+1)(a^2-a+2); \quad 6) x(x-a)^2;$$

$$7) (x+1)(3x-1)(3x^2-2x+1). \quad 470.$$

$$1) \frac{x+2}{2x-1}; \quad 2) -\frac{7x+2}{11x+3}; \quad 3) \frac{x}{5(x+2)}; \quad 4) \frac{3y+2}{y^2+4y+7}; \quad 5) \frac{x-1}{y+1}; \quad 6) \begin{cases} x-1, & \text{если } x > -6, \\ 1-x, & \text{если } x < -6. \end{cases}$$

$$471. \quad 1) 0; \quad 3) 2) \pm 1; \quad 3) 5. \quad 472. \quad 1) \pi n; (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$3) \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 4) \frac{\pi}{4} + \pi n, 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 5) \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$6) \frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; \quad 7) \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad 473. \quad 1)$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 3) \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm 3; \quad 4) 2, \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$474. \quad 1) \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0 \right); \left(\pm \frac{\pi}{4} + \pi n \right), n \in \mathbf{Z}; \quad 2) (\pi n; 0); (\arctg 3 + \pi n), n \in \mathbf{Z}; \quad 3) (2\pi n; 0),$$

$$(2\arctg 1,5 + 2\pi n; 0), n \in \mathbf{Z}; \quad 4) \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; 0 \right), (2\pi n; 0), \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0 \right), n \in \mathbf{Z};$$

$$5) (\pi + 4\pi n; 0), \left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n; 0 \right), n \in \mathbf{Z}. \quad 475. \quad 1) \pi + 2\pi n; \pm 2\arccos \frac{1}{3} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$2) -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{476.} \quad 1) \frac{2\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbf{Z}; \quad 2) -\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbf{Z};$$

$$3) \frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{3\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbf{Z}; \quad 4) (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{477.} \quad 1) -\frac{3\pi}{4}; \quad 2) -\frac{\pi}{4}.$$

$$\mathbf{478.} \quad 1) (\pi + 2\pi n; 0); \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right); n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0 \right);$$

$$(\pi n; 1), n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{479.} \quad 1) -2\pi; 0; \pi; 2\pi; 4\pi; 5\pi; \quad 2) -\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; -\frac{7\pi}{18}; \frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}.$$

480. $\approx 52,25^\circ$; $\approx 75,5^\circ$. **481.** $\approx 78,5^\circ$; $\approx 23,4^\circ$. **482.** $\approx 75,5^\circ$; $\approx 75,5^\circ$; $\approx 29^\circ$. **483.** Не существует. **484.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **485.** 1) 16; 2) 0,5; 3) 2; 4) 1. **486.** 1) 3; 2) $\approx -3,5$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 5) а) $(-\infty; -3) \cup (-1; 2)$; б) $[-3; -1) \cup [2; +\infty)$; в) $(-\infty; 3]$. **487.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4) бес-

конечное

множество.

488.

$$1) \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$2) \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 3) \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 4) \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{489.} \quad 1) 0; \quad 2) \frac{\pi}{2}; \quad 3) \pi; \quad 4) \frac{\pi}{2}.$$

490. 1) 2; 2) 0; 3) нет решений; 4) 0; 5) $\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{2}$; 7) нет решений; 8) нет решений. **491.** 1) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) нет решений; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) нет решений.

$$\mathbf{492.} \quad 1) 3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}; \quad 2) \frac{2}{3}, 2, \frac{\pi}{3}; \quad 3) 1,5; 4\pi, 1; \quad 4) 3, \frac{\pi}{2}, 0; \quad 5) 1, \pi, 1. \quad \mathbf{493.} \quad 1) 3, \pi, -\frac{\pi}{3};$$

2) параллельно перенести вдоль оси t на $\frac{\pi}{6}$ в положительном направлении оси,

сжать вдвое к оси x , растянуть втрое от оси t . **494.** $x = 1,5 \cos \left(50\pi t - \frac{\pi}{6} \right)$. **495.**

$$1) \frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{2\pi n}{5}; \pi + 2\pi n; n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbf{Z}; \quad 3)$$

$$\pi n; \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z};$$

$$4) \frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z};$$

$$5) \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbf{Z}; \quad 6) -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{24} + \pi n; n \in \mathbf{Z};$$

$$7) \frac{\pi n}{8}, n \neq 8m - 4, n, m \in \mathbf{Z}; \quad 8) \pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 9) \frac{\pi n}{4}, n \neq 4m, n, m \in \mathbf{Z}; \quad 10) \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{496.} \quad 1) \pi n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{22} + \frac{\pi n}{11}, n \in \mathbf{Z}; \quad 3) \frac{\pi n}{8}; \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}; \quad 4) \frac{\pi n}{10}, n \in \mathbf{Z};$$

$$5) \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{497.} \quad 1) \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \quad 2) \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; 3) \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; 4) \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; 5) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}.$$

498. 1) $2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$ 2) $(-1)^n \arcsin 0,4 - \arctg 0,75 + \pi n, n \in \mathbf{Z};$

3) $\frac{1}{3}(-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3} \arctg 2 + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z};$ 4) $4\pi n; 4 \arctg \frac{1}{2} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z};$

5) $(-1)^n \arcsin \frac{7}{\sqrt{85}} + \arctg \frac{9}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$ 6) $2\pi n; -2 \arctg 2 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$ **499.**

1) $45^\circ + 180^\circ \cdot n; 15^\circ + 360^\circ \cdot n; 255^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbf{Z};$ 2) $-45^\circ + 180^\circ n; 180^\circ n, n \in \mathbf{Z};$

3) $\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$ 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$ 5) нет решений.

500. 1) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}; \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$ 2) $\pi n, n \in \mathbf{Z}.$ **501.**

1) $\frac{5\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z};$ 2) $-\frac{\pi}{4} + 4\pi n; -\frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}.$ **502.**

1) $-\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4};$ 2) $-\frac{3\pi}{4}.$ **503.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0\right),$

$n \in \mathbf{Z};$ 2) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right); \left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 0\right), n \in \mathbf{Z}.$ **504.**

1) $\left(\pm \arccos \frac{\sqrt{17}-3}{4} + 2\pi n; \frac{13-3\sqrt{17}}{8}\right), n \in \mathbf{Z};$ 2) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right), \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; 1\right),$

$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; -1\right), n \in \mathbf{Z}.$ **505.** 1) $-5; -1; 7;$ 2) $\pm \frac{5\pi}{6}; \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{\pi}{6};$ 3) $\pm \frac{\pi}{4}; \pm \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4};$

4) $\pm \frac{\pi}{8}; \pm \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; -\frac{7\pi}{18}.$ **507.** 1) $(90^\circ + 180^\circ \cdot n; 60^\circ - 180^\circ \cdot n),$

$(60^\circ + 180^\circ \cdot n; 90^\circ - 180^\circ \cdot n), n \in \mathbf{Z};$ 2) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi n\right), n \in \mathbf{Z};$

3) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi(n+m); \frac{\pi}{12} + \pi(m-n)\right), m, n \in \mathbf{Z};$

$\left(-\frac{\pi}{12} + \pi(n+m), -\frac{\pi}{4} + \pi(m-n)\right), m, n \in \mathbf{Z};$

$\left(\frac{7\pi}{12} + \pi(n+m), -\frac{\pi}{4} + \pi(m-n)\right), m, n \in \mathbf{Z};$ $\left(\frac{\pi}{4} + \pi(n+m), -\frac{7\pi}{12} + \pi(m-n)\right),$

$m, n \in \mathbf{Z};$

$$4) \left(\frac{\pi}{3} + \pi(n+m), \frac{\pi}{3} + \pi(n-m) \right), m, n \in \mathbf{Z};$$

$$\left(-\frac{\pi}{3} + \pi(n+m), -\frac{\pi}{3} + \pi(n-m) \right), m, n \in \mathbf{Z}. \quad \mathbf{508.} \quad 15^\circ \text{ или } 75^\circ. \quad \mathbf{509.} \quad \approx 53,1^\circ. \quad \mathbf{510.}$$

$$\approx 51^\circ; \approx 129^\circ. \quad \mathbf{511.} \quad \approx 37^\circ; \approx 53^\circ.$$

512.

$$1) 13\sin(3t + 5,10); \quad 2) 25\sin(3t + 0,55); \quad 3) 61\sin(2t + 2,44); \quad 4) 5\sin(3t + 0,705).$$

$$\mathbf{513.} \quad 1) |a| \leq \sqrt{58}; \quad 2) a \in \left[-\frac{7}{\cos \frac{5\pi}{13}}; -\frac{1}{\cos \frac{5\pi}{13}} \right]. \quad \mathbf{515.} \quad 1) I = \sqrt{19} \sin(\omega t + \varphi);$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{2\sqrt{19}}; \quad I_{\max} = \sqrt{19}. \quad \mathbf{516.} \quad \pi. \quad \mathbf{518.} \quad 1) \quad 13; \quad \approx 1,18; \quad 2) \sqrt{10}; \approx 0,322;$$

$$3) \sqrt{7}; \approx -0,714; \quad 4) 25; \approx 1,29.$$

$$\mathbf{519.} \quad 3) y = 2,5\sin(t + \varphi), \text{ где } \varphi = \arctg \frac{4}{3}. \quad \mathbf{520.} \quad 1) y = \frac{x+3}{2}, D(y) = \mathbf{R}, E(y) = \mathbf{R};$$

$$v = 2u + 2, D(y) = \mathbf{R}, E(y) = \mathbf{R}; \quad 3) z = t^2 - 1, t \geq 0, D(z) = [0; +\infty), E(z) = [-1; +\infty);$$

$$4) y = -\frac{1}{x}, D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); \quad 5) y = \sqrt{x}, D(y) = [0; +\infty),$$

$$E(y) = [0; +\infty); \quad 6) y = -\sqrt{x}, x \in [0; 1], D(y) = [0; 1], E(y) = [0; 1]; \quad 7) y = \frac{2-x}{x-1},$$

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty), E(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty). \quad \mathbf{521.} \quad 1) y = 10x - 40; \quad 2)$$

$$V = \sqrt[3]{u-5}; \quad 3) z = t^2, t \geq 0; \quad 4) y = \frac{1}{x}; \quad 5) y = \frac{x}{x-1}; \quad 6) y = \frac{2t+1}{3t-1}; \quad 7) u = x^2 - 3, x \geq 0.$$

$$\mathbf{522.} \quad 1) V = a^3, a > 0; \quad 2) a = \sqrt[3]{V}, V > 0. \quad \mathbf{523.} \quad 1) y = \arccos(x+1); \quad 2) \text{ не существует};$$

$$3) y = -\arccos x; \quad 4) y = -\arcsin x - \pi; \quad 5) \arctg x - \pi; \quad 6) y = \operatorname{arccotg} x - \pi. \quad \mathbf{524.} \quad 1) -\frac{\pi}{7};$$

$$2) 1,5; \quad 3) \frac{12}{5}; \quad 4) \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad \mathbf{525.} \quad 1) \frac{240}{289}; \quad 2) 1; \quad 3) \frac{\pi}{4}; \quad 4) \frac{\pi}{4}. \quad \mathbf{526.}$$

$$1) [1; 3]; \quad 2) \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right]; \quad 3) [1; 5]. \quad \mathbf{527.} \quad 1) \text{ Нечётная}; \quad 2) \text{ ни чётная, ни нечётная}; \quad 3) \text{ ни чётная, ни нечётная}; \quad 4) \text{ чётная}.$$

$$\mathbf{528.} \quad 1) -; \quad 2) -; \quad 3) +; \quad 4) -. \quad \mathbf{529.} \quad 1) -; \quad 2) -; \quad 3) -. \quad \mathbf{533.} \quad 1) \frac{1+\sqrt{2}}{3}; \quad 2) 0; \quad 3) \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};$$

$$4) \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \quad \mathbf{534.} \quad 1) x = 4\sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \quad 2) x = 3\operatorname{tg} \frac{y}{4}, -2\pi < y < 2\pi;$$

$$3) x = \frac{1}{2} \cos \frac{y}{7}, 0 \leq y \leq 7\pi; \quad 4) x = \sin \frac{y-3}{5}, 3 - \frac{5\pi}{2} \leq y \leq 3 + \frac{5\pi}{2}.$$

Раздел 5

535. 1) $\frac{1}{9}$; 2) 1; 3) 8; 4) 125. 536. 1) x ; 2) $x^{2\sqrt{5}}$; 3) $y^{2\sqrt{7}}$; 4) $\frac{1}{y}$; 5) m ; 6) $n^{1,5}$; 7) $(ab)^{-3}$; 8) $(cd)^2$; 9) a^{-4} ; 10) 64; 11) 3; 12) 4; 13) 125. 537. 1) x^{-1} ; 2) x^{-2} ; 3) 3^7 ; 4) 0,5. 538. 1) 8,82 и 8,88; 8,83 и 8,83. 539. 8,83. 540. 1) 2,8 и 0,7; 2) -1,3; 3) 0,6. 542. 1) $R; (-1; +\infty)$; 2) $[0; +\infty); [1; +\infty)$; 3) $[-1; 1]; R$; 4) $x \neq 0; (0; +\infty)$; 5) $R; \{1\}$; 6) $[0; +\infty); [0; +\infty)$. 543. 1) 27; 3; 2) 2; 0,25; 3) 27; $\frac{1}{3}$; 4) 1; $\frac{1}{16}$. 544. 1)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	-0,432	-0,424	-0,410	-0,391	-0,361	-0,317	-0,25	-0,15	0	0,225	0,563	1,07	1,83

3) (1; 0); (0; 0,25); 4) $x \in (-\infty; 0]$. 546. 1) $\approx 2,50$; $\approx 2,50 \frac{M}{c}$; 2) $\approx 2,50$; $\approx 0,00 \frac{M}{c}$. 547. $\approx 88,4$; $\approx 22,1$; $\approx 1,97 \cdot 10^{-28}$ г. 548. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\{2\}$; 3) $\{-1; 7\}$; 4) 0; 5) $\{-1; 7\}$. 549. 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $[0; +\infty)$. 550. 2) $\sqrt{2}$; 2; 8; 3) (0; 4), ось y не пересекает, (1; 2); 4) R ; (0; $+\infty$); 5) 8; 1; 6) $\frac{7}{3}; \left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$; 7) $a > 1$; 8) $(-\infty; 0)$. 551. 2) $\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}$; 27; 3) (0; 3), ось y не пересекает, $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; 4) R ; (0; $+\infty$); 5) 27; 1; 6) $\frac{5}{4}; \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$; 7) $a > 1$; 8) $(-\infty; 1)$. 557. 1) $\frac{1}{125}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{1}{c^{10}}$; 5) $\frac{1}{(mn)^4}$; 6) $\frac{1}{(a-1)^5}$; 7) $\frac{49}{9}$; 8) $\frac{27}{8}$. 558. 1) 5^{-3} ; 2) 6^{-1} ; 3) a^{-5} ; 4) b^{-4} ; 5) 9^{-1} ; 6) 10^{-3} ; 7) 10^{-1} ; 8) 10^{-2} . 559. 1) $3^{-21} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-21}$; 2) $3^{-21} > 4^{-21}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{21} = 3^{-21}$. 560. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0,8; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{121}$; 5) $\frac{4}{3}$. 561. 1) 4; 2) 0; 3) -3; 4) $\frac{2}{3}$; 5) -2; 6) 3; 7) $\sqrt{2}$; 8) $-\frac{3}{4}$; 9) $-\frac{3}{2}$; 10) 1,5. 562. 1) 12; 2) 3; 3) 5; 4) 7; 5) 9. 563. 1) 32; 2) 125; 3) $\sqrt{7}$; 4) 2. 564. 1) 1; 2) 144; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\frac{1}{9}$. 565. 1) $\sqrt{3}$; 2) 25; 3) 7; 4) $\sqrt{6}$. 566. 1) 216; 2) -3; 3) 25; 4) 16,5. 567. 1) 3; 2) 1; 3) 5; 4) $\frac{8}{3}$; 5) 3; 6) 0,75. 568. 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 2; 5) 2. 569. 1) 1,23; 2) 2,10; 3) 1,06; 4) -0,329; 5) 3,402; 6) -1,316. 570. 1) $\approx 2,322$; 2) $\approx 7,604$; 3) $\approx 6,931$; 4) $\approx 1,107$; 5) $\approx -1,955$; 6) $\pm 1,622$. 571. 1) $7 + 5 \lg x \approx 7,41$; 2) $3 + 2,5 \log_3 x \approx 3,43$;

- 3) $2,5 \ln x - 4 \approx -3,52$; 4) $(\sqrt{x} + 0,5) \log_5 x \approx 0,190$; 5) $|x|^{-0,2} = 0,5$. **572.** 2) -4 ; $10,55$;
3) $0,1$. **573.** 1) Через $1,42$ с; 2) через $2,01$ с. **574.** 152 . **575.** Через 9 . **576.**
 $h = H \ln \frac{p_0}{p}$. **577.** 1) $(-3; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-1; 1)$; 4) $(0; 1]$;
5) $(0; +\infty)$; 6) $(1; +\infty)$. **578.** 1) $+$; 2) $-$; 3) $-$; 4) $+$. **579.** 1) $\log_5 \frac{9}{10} < \log_5 \frac{10}{11}$;
2) $\log_3 \sqrt{7} > \log_3 2,6$; 3) $\log_{0,2} 4,21 < \log_{0,2} 4,19$; 4) $\log_{0,9} e > \log_{0,9} \pi$. **580.** 1) $c < b < a$;
2) $b < a < c$. **581.** 1) $a > c > b$; 2) $a = b > c$. **582.** 1) $(3; +\infty)$;
2) $\left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$; 3) $(0; 2)$; 4) $[4; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$.
583. 1) $(0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) при всех x , кроме 0 и ± 1 ; 4) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.
584. 1) $0; -1$; 2) $0; -1$. **586.** $(256; +\infty)$. **587.** 1) $0; 2$ $0,5$. **588.** 1) $(-1; +\infty)$; $(-\infty; +\infty)$;
2) $(0; 0)$; 4) через точку A проходит, через точку B — нет; 5) 2 . **589.** 1) $(-2; +\infty)$, **R**; 2) 2 ;
3) $-1,75$; 4) $(-2; -1,75)$; 5) $3; 0$. **590.** 1) $-1 \pm \sqrt{2}$; 2) 2 и 5 ; 3) 3 . **591.** 1) $(-\infty; 1,5)$; 2) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$;
3) $(-\infty; -1,5) \cup (-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **592.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$;
3) $[1; 2]$. **593.** 1) -1 ; 4) 2 ; 2) $1; 2$; 3) -1 ; 4) $0,5$; 2) 2 ; 6) 2 . **594.** 1) 0 ; 2) 0 ; 3) 4 ; 4) 3 . **595.** 1) 2 ; 2) $0,5$; 3) 0 ; 1; 4) нет решений; 5) $\log_{1,5} 3$; 6) 1 . 7) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. **596.** 1) 1 ; 2) 2 ; 3) -2 . **597.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -1 . **598.**
1) $(-2; 0)$; 2) $\left((-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; 0\right), n \in \mathbf{Z}$; 3) $(2; 0)$.
599. 1) $(5; 20736)$; 2) $(2; 1458)$; 3) $(0; 5)$ и $(1; 30)$; 4) $(2; 16)$. **600.** 1) $(-\infty; 0,5)$;
2) $(1; 2)$; 3) нет решений; 4) $(\log_3 2; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.
601. 1) $(0; +\infty)$; 2) $\left(\log_2 \frac{2}{7}; +\infty\right)$; 3) $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 2\right)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 2]$.
602. 1) $(2; 1), (\log_2 3; \log_3 4)$; 2) $\left(-2; \frac{1}{900}\right)$; 3) $(3; 2), (2; 3)$; 4) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. **603.** 1) 0 ;
2) 2 ; 3) если $a \leq 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x = \log \frac{a}{24}$. **604.** 1) $(0,5; 0)$;
 $\left(0; \frac{2}{9}\right)$; 2) 1 ; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0,5)$. **605.** $h = H \ln \frac{p_0}{p}$. **606.** $\approx 0,3$ года. **607.**
1) $0; -\frac{3}{2}$; 2) нет решений; 3) 9 ; 4) 81 ; 5) 5 ; 6) -5 . **608.** 1) 0 ; 2) $0,0001$; 10 ; 3) $\sqrt[3]{0,25}$;
8; 4) 10 . **609.** 1) $10(\sqrt{10} - 2)$; 2) 10 ; 3) $10; 0,001$; 4) $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}, 100\right\}$, если обла-

стью определения функции $y = x^{\lg x^2 - 3}$ считать множество положительных действительных чисел. **610.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$. **611.** 1)

$(2^{\sqrt{2}}; 0); (2^{-\sqrt{2}}; 0);$ 2) $(1; 0); \left(\frac{1}{3}; 0\right);$ 3) $\left(\frac{1}{9}; 0\right); (3; 0)$. **612.** 1) $(2; 2\lg 2);$ 2) $(3; 2), (-$

$5; 2);$ 3) $(2; 3\lg 3), (3; 3\lg 2);$ 4) $(10; 3)$. **67.** 1) 1; 2) 0,5. **613.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 2\right);$

2) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty);$ 3) $\left[\frac{1}{4}; 4\right];$ 4) $(2; 3) \cup [6; +\infty)$. **614.** 1) $(-3; -2) \cup (3; +\infty);$

2) $[0, 01; 10000];$ 3) $\left(-3; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right);$

4) $(2; 3);$ 5) $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right);$ 6) $(2; +\infty)$. **615.** 1) $(10^6; 0,1);$ 2) $(1000;$

$10);$ 3) $(10; 1000), (1000; 10);$ 4) $(3; 3), (\sqrt{3}; 9)$. **616.** 1) $(1; 0), \left(\frac{1}{27}; 0\right);$ с осью y не

пересекается; 2) $\frac{1}{9}; \frac{1}{3};$ 3) $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right);$ 4) $\left(0; \frac{1}{27}\right) \cup (1; +\infty)$. **617.** $m = m_0 e^{\frac{v}{v_z}}$. **618.**

$p = p_0 \cdot 10^{-\frac{D}{A}}$.

Предметный указатель

Амплитуда гармонического колебания

Арифметический квадратный корень

" корень n -й степени

Арккосинус

Арктангенс

Арсинус

Арктангенс

Асимптота вертикальная

" горизонтальная

Гармонические колебания

Гипербола

Главное свойство корня

График гармонического колебания

" косинуса

" котангенса

- " синуса
- " тангенса
- " функции
- Графический способ задания функции
- Десятичные приближения вещественных чисел
- Дроби бесконечные десятичные
 - " периодические
- Естественная область определения функции
- Значение функции в точке
- Квадратичная функция
- Квадратный корень
- Координатная прямая
- Корень n -й степени
- Корень уравнения
- Косинус
- Котангенс
- Линия котангенса
 - " тангенса
- Логарифм числа
 - " " десятичный
 - " " натуральный
- Логарифмическая функция
- Логарифмирование
- Математическая модель
- Метод интервалов
- Методы решения логарифмических неравенств
 - " " " уравнений
 - " " показательных неравенств
 - " " " уравнений
- Множество
 - " бесконечное
 - " значений функции
 - " конечное
 - " пустое
 - " универсальное
- Множества равные
- Модуль числа

Наибольшее значение функции
 Наименьшее значение функции
 Начальная фаза гармонического колебания
 Неравенство
 " иррациональное
 " рациональное

 Область определения уравнения
 " " функции
 Обратная пропорциональность
 Обратные тригонометрические функции
 Объединение множеств
 Окрестность точки
 Основное тригонометрическое тождество
 " свойство вещественных чисел
 " логарифмическое тождество
 Парабола
 Пересечение множеств
 Подмножество
 Подобные радикалы
 Показательная функция
 Показатель корня
 Последовательность
 Потенцирование
 Предел последовательности
 Преобразование графиков функций
 Прямая пропорциональность

 Радиан
 Рекуррентный способ задания последовательности
 Равносильные уравнения
 " неравенства
 Решение неравенства
 " уравнения
 Растяжение графика функции

 Свойства логарифмов
 " логарифмической функции
 " показательной функции
 " степени с иррациональным показателем
 Сдвиг графика функции
 Сжатие графика функции
 Синус
 Синусоида

Следствие уравнения
Сложение гармонических колебаний
Совокупность уравнений
Степень с натуральным показателем
" " рациональным показателем
" " целым отрицательным показателем
" " иррациональным показателем
Сходящаяся последовательность

Табличный способ задания функции
Тангенс
Тангенсоида
Теорема Больцано-Коши
" косинусов
" синусов
Точка разрыва функции

Угловая частота гармонического колебания
Угловой коэффициент прямой
Уравнение
" - следствие
Уравнение иррациональное
" однородное тригонометрическое

Формулы двойного угла
" половинного аргумента
" приведения
" сложения

Функциональная зависимость
Функции равные
Функция

" возрастающая
" " на множестве
" квадратичная
" линейная
" монотонная
" невозрастающая
" непрерывная
" нечётная
" неубывающая
" обратная
" периодическая
" убывающая
" " на множестве

" степенная
" чётная

Числа действительные
" иррациональные
" рациональные
Число e