МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. Н. Афанасьева, Я. С. Бродский, А. Л. Павлов, А. К. Слипенко

ГЕОМЕТРИЯ

10 класс

Углубленный уровень

Донецк 2020

УДК 372.8:514

ББК 74.262.21

А94

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 10 от 18 июня 2020 г.)

Афанасьева О. Н. Геометрия. 10 класс. Углубленный уровень. Учебное пособие / О. Н Афанасьева , Я. С Бродский , А. Л. Павлов , А. К Слипенко ..- ДонНУ,2020.- 341с.

Рецензенты:

Горр Г.В., главный научный сотрудник ГУ «Институт прикладной математики и механики», доктор физ-мат наук, профессор

Лиманский Д. В, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», кандидат физ-мат наук

Предлагаемое учебное пособие соответствует программе по геометрии для 10 класса углубленного уровня, разработанной его авторами. Оно направлено на обеспечение готовности обучающихся широко и сознательно применять геометрию при описании объектов окружающего мира. Эту ориентацию обеспечивают содержание курса, характер изложения учебного материала, подбор иллюстраций и примеры применений, система упражнений и контрольных вопросов.

Для обучающихся классов естесвенно-научных профилей и учителей общеобразовательных учреждений.

Содержание

Дорогой юный друг! 5
Введение 8

Раздел I Основные факты и методы планиметрии..... 18

§1. Аксиомы планиметрии..... 18

§ 2. Параллельность и перпендикулярность прямых 21

§ 3. Геометрия треугольника…….. 27

§ 4. Геометрия четырёхугольников..... 41

§ 5. Геометрия окружностей …… 47

§ 6. Площади фигур ……..... 54

§7. Методы решения плпниметрических задач…… 59

Готовимся к тематическому оцениванию по теме " Основные факты и методы планиметрии " …… 71

Раздел II. Параллельность прямых и плоскостей..... 75

§ 8. Основные понятия и аксиомы стереометрии..... 76

§ 9. Взаимное расположение двух прямых в пространстве 95

§ 10. Параллельное проектирование..... 115

§11. Изображение фигур в стереометрии…… ..... … 135

§12. Параллельность прямых и плоскостей..... 152

§13. Параллельность плоскостей……..... 170

Готовимся к тематическому оцениванию по теме "Параллельность прямых и плоскостей " …….. 189

Раздел III Перпендикулярность прямых и плоскостей..... 198

§14. Перпендикулярнсть прямой и плоскости..... 198

§15. Связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей…… 217

§16. Перпендикулярность плоскостей…… 234

§17. Ортогональное проектирование…….. 253

§18. Перпендикуляр и наклонная..... 267

§19. Измерение расстояний в пространстве..... 281

§20. Измерение углов в пространстве ……..... 299

Готовимся к тематическому оцениванию по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»……..... 323

Таблицы для систематизации материала раздела 331

Дорогой юный друг!

Обучение в старших классах связано с решением сверхсложной задачи: выбором профессии, сферы будущей деятельности, подготовкой к обучению по избранному направлению. Овладение математикой старшей школы поможет вам в ее решении. Математика способна помочь, как говорят, и ум в порядок привести, и мир познать.

Общепризнанно, что геометрия является одним из наилучших средств развития умственных способностей, умения логично рассуждать и делать правильные выводы. Кроме того, геометрия также помогает ориентироваться в окружающей среде. Особое значение имеет эта наука для будущих инженеров, техников, ученых, квалифицированных рабочих, потому что, хотя и на уроках геометрии идет речь по большей части о «абстрактных» объектах, полностью реальными и применимыми являются свойства этих объектов для описания (моделирования) предметов и явлений окружающего мира.

Изучая планиметрию, вы, по-видимому, обратили внимание на определенную ограниченность ее моделирующих возможностей. Она помогает, например, вычислить площадь поверхности стен комнаты, но при определении вместимости сосуда помочь уже не сможет. Дело в том, что сосуд лучше моделируется ***пространственной*** геометрической фигурой. Именно свойства пространственных фигур изучаются в курсе ***стереометрии***, одном из разделов геометрии.

Перед вами учебное пособие по стереометрии для 10 класса. Его главное назначение заключается в оказании вам помощи в овладении геометрией пространства, ее приложениями к описанию пространственных форм и отношений между ними, в развитии пространственного и логического мышлений.

Пособие состоит из введения, трех разделов и материалов для подготовки к итоговому оцениванию по курсу геометрии за 10 класс.

Введение дает представление о развитии геометрии, ее роли в познании окружающего мира. Разделы пособия разделены на параграфы. Запись 2.4 означает второй раздел, параграф 4.

Первый раздел посвящен повторению и систематизации понятий, фактов и методов планиметрии, которые вы изучали в 7 - 9 классах. Поэтому изложение учебного материала в нем существенно отличается от следующих разделов.

Изложение учебного материала в каждом параграфе двух следующих разделов разделено на три части. В первой части (она обозначена буквой **Б)** излагаются основные понятия и факты, иногда без формальных обоснований, по аналогии, на основе наблюдений, путем обобщения и т. п. Этот материал является базой для дальнейшего изучения темы, более основательного и полного. Поэтому естественным является и его символическое обозначение — первая ступенька усвоения темы.

Во второй части (она обозначена буквой **О)** обеспечивается переход на вторую ступеньку усвоения темы: завершается обоснование предыдущего материала, его расширение и углубление. Материал, изложенный в первых двух частях, полностью обеспечивает овладение геометрией согласно требованиям программы на профильном уровне обучения. Третья часть параграфа (она обо-

значена буквой **П)** рассчитана на учащихся, ориентированных на углубленное изучение геометрии, склонных к размышлениям и исследованиям.

Изложение теоретического материала сопровождается решением задач и примеров. Как правило, утверждения, содержащиеся в задачах, имеют характер теорем и применяются при решении задач, предлагаемым учащимся для самостоятельной работы. Примеры имеют иллюстративный характер, представляют собой образцы решения типовых задач. Начало и конец доказательств теорем, а также решений примеров и задач обозначено знаками □ и ■.

Определения основных понятий набраны полужирным шрифтом и курсивом, формулировки утверждений — полужирным шрифтом. Важные замечания отмечены специальным знаком, известным Вам из правил дорожного движения.

Каждая из указанных частей учебного материала завершается вопросами для самоконтроля и заданиями определенного характера: упражнениями на рисунках, графическими упражнениями и исследовательскими заданиями. Они должны обеспечить сознательное усвоение понятий и фактов в их взаимосвязи, подготовить к решению задач.

В конце каждого параграфа приведены контрольные вопросы и задачи, имеющие три уровня сложности: первый уровень сложности обозначен символом «°», второй не имеет обозначений, третий обозначен символом «*». Система задач к каждому параграфу разделена с помощью специального знака на группы по разным признакам: характером требований к задачам, видом фигур и т. п.

Большинство задач имеют сюжетный характер, то есть для одной фигуры или геометрической конструкции формулируется ряд заданий разного уровня сложности, часть которых является независимой от других. В совокупности эти задания являются определенным исследованием конструкций. Завершается система задач параграфа упражнениями для повторения, имеющими своей целью обеспечение готовности к овладению следующим материалом.

В конце каждого параграфа сжато изложено его основное содержание в виде информационных схем.

Каждый раздел завершается материалом для подготовки к тематическому оцениванию, состоящим из вопросов для самоконтроля, задач для повторения, теста для диагностики усвоения темы, образца тематической контрольной работы, таблиц для повторения и систематизации учебного материала раздела. Такую же структуру имеет материал для подготовки к итоговому оцениванию по курсу геометрии за 10 класс.

Учебное пособие содержит указания и ответы к задачам, предметный указатель.

Чтение книги не является легкой прогулкой. Некоторые фрагменты доказательств оставлены для самостоятельной проработки. Не пропускайте их!

Искренне желаем успехов! Коллектив авторов.

Условные обозначения

— три ступени усвоения учебного материала;

— обратите внимание;

— контрольные вопросы;

— упражнения на рисунках;

— графические упражнения;

— границы для различных типов задач;

— упражнения для повторения;

— задачи для исследования;

— вопросы для осмысления, задания для размышлений;

Математические обозначения

α, ABC	—	обозначения плоскостей;
A, B, A_i	—	обозначения точек;
a, b, a_i, AB	—	обозначения прямых;
$A\underline{BC}D$	—	обозначения двугранного угла;
$\angle A$	—	обозначение угла с вершиной A;
$M \in a$	—	точка M принадлежит прямой a;
$M \notin a$	—	точка M не принадлежит прямой a;
$l \subset \alpha$	—	прямая l принадлежит плоскости α;
$l \not\subset \alpha$	—	прямая l не принадлежит плоскости α;
$a \cap b = M$	—	прямые a и b пересекаются в точке M;
$\parallel$	—	параллельность (прямых, прямой и плоскости, плоскостей);
$\perp$	—	перпендикулярность (прямых, прямой и плоскости, плоскостей);
$\dot{-}$	—	скрещиваемость прямых;
$\sim$	—	подобие фигур;
$=$	—	равенство фигур, математических выражений $S(D)$ — площадь фигуры D;
$\exists$	—	существует объект;
$\exists!$	—	существует единственный объект;
$\Rightarrow$	—	знак логического следования (если …, то …);
$\Leftrightarrow$	—	равносильность (тогда и только тогда).

Введение

Вы уже знакомы с одним из разделов геометрии — планиметрией. В нем изучаются свойства плоских геометрических фигур и отношений между ними. Но мы живем в пространстве, в котором три измерения в отличие от плоскости. Для его восприятия и исследования, для решения жизненных задач знаний планиметрии недостаточно. Знакомство с геометрией пространства крайне необходимо человеку для его общего развития и профессионального становления.

На самом деле знакомство с геометрией пространства начинается с детства, и в течение жизни человек приобретает определенные знания этой геометрии. Однако эти знания носят эмпирический характер, они несколько хаотичны и применимы лишь для ориентирования в пространстве, при решении простейших практических задач. Систематизировать ваши знания и пространственные представления, расширить и углубить их, предоставить им научное содержание, подготовить к применению геометрии в разных сферах деятельности — вот главные задачи этого учебника и науки, которую он представляет.

Геометрия пространства — это математическая наука о пространственных геометрических фигурах и отношениях между ними, а также об их свойствах. Называют ее стереометрией.

Геометрия *— греческое γεωμετρια (geometria) землеустройство (землеизмерение), от γῆ (ge) или γῆα (gea) — земля и μετρεω (metreo) — меряю, измеряю.*
Планиметрия *— от латинского planum — плоская поверхность, плоскость и греческого μετρεω — меряю, измеряю.*
Стереометрия *— от греческих στερεος (stereos) — пространственный и μετρεω — меряю, измеряю.*

Возникнув из практики, постоянно обращаясь к ней в процессе своего развития, геометрия стала одной из важнейших математических наук для описания окружающего мира. Основные «действующие лица» в геометрии — геометрические фигуры. Они являются абстракциями объектов реального мира, в которых отображается лишь их форма и размеры. Иначе говоря, геометрические фигуры являются математическими моделями объектов окружающей среды. Так, например, точку в пространстве можно рассматривать как математическую идеализацию реальных объектов — звезд на небе, следа иглы на бумаге, кончика карандаша и т. п. Точка в геометрии не имеет привычных размеров (длины, ширины, высоты). Она применяется для моделирования разных физических тел маленьких размеров. Безусловно, маленьких относительно других тел (в некоторых случаях футбольный мяч можно считать точкой, например, на футбольном поле).

Один и тот же предмет может моделироваться разными фигурами в зависимости от цели, которой мы при этом руководствуемся. Например, можно считать, что крышка данного стола имеет форму прямоугольного параллелепи-

педа, если нам необходимо найти ее массу, пользуясь плотностью древесины. Но эту самую крышку можно представлять в форме прямоугольника, если вам необходимо приобрести скатерть для этого стола.

Геометрические фигуры различаются по своим свойствам, они находятся в разных отношениях между собой: принадлежности, равенства, подобия, параллельности и т. п.

Как и любая наука, геометрия состоит из понятий и утверждений, в которых устанавливаются связи между понятиями. Новые математические понятия определяют через уже известные понятия, а утверждения доказывают на основе ранее доказанных. При этом неминуемо возникает вопрос «А с чего же начинается построение математической теории»? Ответ на этот вопрос найден давно. Еще Евклидом, который жил приблизительно в III ст. до н. э. Создан специальный метод решения данной проблемы. Этот метод называют ***аксиоматическим.*** Его сущность заключается в том, что некоторые основные понятия считают неопределяемыми, то есть такими, которым не даются определения. В то же время содержание этих понятий отображают в утверждениях об этих понятиях, которые считают истинными. Эти утверждения называют ***аксиомами.*** По каким причинам признается истинность этих утверждений, в конечном итоге несущественно для построения теории, которую называют ***аксиоматической теорией.*** Как правило, «***доверие» к аксиомам вызвано опытом их использования в практической или научной деятельности.***

> ***Аксиома*** *— от греческого* $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ *(axioma) — буквально достоинство, уважение, авторитет — в переносном смысле означает то, что в результате своего авторитета не подлежит сомнению, неопровержимо.*

Имея исходный набор первоначальных, неопределяемых понятий, можно начинать построение аксиоматической теории. Таким образом, аксиоматическое построение теории осуществляется по такой схеме:

- перечисляются неопределяемые понятия;
- формулируются аксиомы;
- определяются новые понятия с помощью неопределяемых и ранее определённых;
- доказываются утверждения на основе аксиом и ранее доказанных утверждений.

Утверждения, которые доказывают в аксиоматической теории, называют ***теоремами***. На практике для удобства используют для теорем разные названия, отображающие сущность теоремы или ее роль: свойство, признак, формула, лемма, следствие и т. п.

> ***Теорема*** *— от греческого* $\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ *(theorema), от* $\theta\varepsilon\omega\rho\varepsilon\omega$ *(theoreo) — присматриваюсь, наблюдаю — утверждение, истинность которого проверяют с помощью логических рассуждений, опирающиеся на аксиомы, или на ранее доказанные утверждения, или на те и другие.*

Полезно аксиоматическое построение математической теории представлять себе как некоторую интеллектуальную игру, похожую, например, на игру в шахматы. Шахматы, как игра, определяется выбором доски, составом фигур и правилами игры. При этом никакого значения не имеют размеры доски, форма фигур, их название, а тем более из чего они сделаны. Кстати, в шахматы можно играть, фиксируя ходы на бумаге, или в памяти компьютера. Бессмысленно говорить об определении пешки или короля самих по себе. Их сущность оказывается в действиях по отношению к другим фигурам. Примерно так же сущность неопределяемых понятий в аксиоматической теории оказывается в аксиомах. Аксиомы теории, как и правила игры — это условные соглашения. Целесообразность выбора той или другой аксиомы может быть подтверждена использованием аксиоматической теории в решении тех или иных практических задач.

В данном учебнике будет заложен фундамент для построения стереометрии. В нем будут рассматриваться простейшие геометрические фигуры и конструкции. Особое внимание будет уделено прямым и плоскостям, которые естественно возникают при рассмотрении поверхностей геометрических тел. В центре внимания будут отношения параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Отсюда и названия разделов.

Зарождение геометрии

Прежде чем начать усвоение нового и завершающего для средней школы геометрического курса, стоит бросить обобщающий взгляд на изученный раньше материал, увидеть и проанализировать движущие силы, которые способствовали и содействуют развитию геометрических наук, определить место геометрии в современном обществе.

Геометрию считают одной из самых древних, если не самой древней, из наук, созданных человечеством. Ее зарождение связано с необходимостью удовлетворить неотложные потребности наших предков в измерении расстояний, нахождении размеров, определении и сравнении форм окружающих объектов. В папирусах древних египтян, принадлежащих ко второму тысячелетию до н. э., или в глиняных табличках древнего Вавилона ученые находят решения бытовых, экономических, архитектурно-строительных задач, которые требуют очень серьезных геометрических знаний. Ведь не зря выдающийся греческий ученый Геродот (ок. 484 - 425 г. до н. э.) считал, что именно в Египте была основана геометрия, которая потом начала динамически развиваться в Греции.

Не отрицая роль древнего Египта, можно утверждать, что геометрия как наука сформировалась в Греции. Процесс создания геометрии под значительным влиянием соседнего Египта длился несколько веков. Греческие ученые переосмыслили основные понятия и факты геометрии, абстрагировались от конкретики, что дало возможность, с одной стороны, сделать геометрию универсальным средством исследования окружающего мира, а с другой — глубже изучать физические объекты и отношения между ними. А главное — был введен в геометрию ***дедуктивный метод*** ее построения, при котором выделяются базовые понятия и факты, а остальные факты сугубо логично выводятся, исходя из основных.

Геометрия как дедуктивная наука

Самым выдающимся ученым, который способствовал становлению дедуктивной геометрии, наука считает Фалеса Милетского (ок. 640 — 548 г. до н. э.) — основателя и лидера знаменитой философской школы. Ему принадлежит открытие и доказательство многих теорем планиметрии, а также применений геометрии к решению прикладных задач (в частности, он измерял высоту египетских пирамид).

В развитие геометрических исследований существенным является вклад пифагорейской и афинской научных школ (VI — IV ст. до н. э.). Например, Пифагор (около 580 — 500 г. до н. э.) доказал теорему о сумме углов треугольника, открыл тот факт, что между сторонами квадрата и его диагональю не существует общей меры и др. Хотя один из самых выдающихся представителей афинской научной школы Платон (в 427 — 347 г. до н. э.) значительного вклада в геометрию не внёс, но и он сам, и его ученики содействовали ее развитию. На дверях Академии Платона была надпись: "Пусть тот, кто не знает геометрии, не входит сюда". Его учеником был также знаменитый Евклид (III ст. до н. э.).

Имя Евклида является одним из самых уважаемых в мировой науке, а его книгу "Начала" порой называют математической библией. Эта книга пронесла через тысячелетия математические знания наших великих предков, а аксиоматически-дедуктивный метод, реализованный в ней, стал образцом для построения всех математических наук — и не только их.

Евклида считают одним из первых представителей знаменитой научной школы Александрии, которая существовала около 700 лет и к которой принадлежали почти все значительные ученые того периода: и Архимед (ок. 287 — 212 г. до н. э.), который проживал в Сиракузах (Сицилия), и Аполлоний Пергский (ок. 262 — 190 г. до н. э.) из Малой Азии, и Герон Александрийский (вероятно, I ст.), и Папп Александрийский (III ст.), и Менелай (I ст.), который проживал в Риме, и многие др. Их именами названы теоремы, задачи, методы, конструкции.

“Начала" Евклида, их значение для мировой науки

Евклидовы "Начала" состоят из 13 книг. Первая книга содержит определения, аксиомы и постулаты. С помощью определений вводятся математические понятия. Например, по Евклиду, "точка есть то, что не имеет частей", "куб есть пространственная фигура, которая содержится между шестью одинаковыми квадратами" и т. д. Такие определения многократно и безуспешно пытались усовершенствовать. В наше время первоначальные объекты вводятся без формальных определений, а их содержание раскрывается с помощью первоначальных утверждений — аксиом (у Евклида речь идет о постулатах и аксиомах). Аксиом у Евклида девять: "две величины, равные одной и той же величине, являются равными между собой", "целое больше части" и др. Постулатов у Евклида пять. Они обосновывают все геометрические построения и алгоритмические операции. Например, "через две точки можно провести прямую", "из всякого центра произвольным радиусом можно описать окружность" и др.

Еще одной характерной особенностью "Начал" является отсутствие прикладной направленности материала. Понятно, что аксиоматический метод давал возможность доказывать новые и новые теоремы, для которых отсутствовали реальные приложения, так как эти результаты не соответствовали состоянию развития экономики, общества, науки. Книга Евклида работала на будущее. Усвоить ее и оценить могла небольшая группа интеллектуалов, "аристократов духа". Это дало возможность Евклиду, по легенде, с гордостью сказать правителю страны, что в геометрии нет царской дороги.

А еще считалось не достойным от занятий математикой ожидать материальных выгод. Творцы геометрии были настоящими рыцарями науки. Чтобы оценить уровень их исследований, сложность задач, которые они ставили перед собой, достаточно лишь вспомнить три знаменитые задачи на построение:

- задачу о ***трисекции угла*** (произвольный угол разделить на три равные части);
- задачу о ***квадратуре круга*** (имея круг радиуса *r*, построить квадрат, площадь которого равняется площади круга);
- задачу об ***удвоении куба*** (имея куб с ребром *a,* построить куб с вдвое большим объемом).

Инструментарием построения является циркуль и линейка.

О сложности этих задач говорит тот факт, что их полное решение математики отыскали только в XIX ст., а именно, было доказано, что невозможно с помощью циркуля и линейки выполнить такие построения.

Послеевклидов период развития греческой геометрии

Своих вершин древнегреческая геометрия достигла в трудах Архимеда и Аполлония. Применяя методы, которые в XVII ст. привели к созданию математического анализа, Архимед решал задачи на экстремум, вычислял площади и объемы фигур, ограниченных кривыми или поверхностями сложной формы, например, площадь параболического сегмента, объем тела вращения эллипса вокруг оси симметрии и др. Один из творцов математического анализа Г. Лейбниц (1646 — 1716гг.) писал, что изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков.

Не могут не вызывать восхищения результаты Аполлония и его книга "Конические сечения", которой существенно воспользовались математики при создании аналитической геометрии в XVII ст.

А еще следует подчеркнуть, что период поздней античности характеризуется возвращением интереса к практическим применениям геометрии. Речь идет, в частности, о книге Герона "Метрика", которая содержит правила для точного и приближенного определения площадей и объемов, а также описания геодезических инструментов.

Геометрия играла главную роль среди других математических наук. Геометрическим языком излагалось и геометрическими методами доказывалось большинство результатов, которые относят сейчас к теории чисел и алгебры.

Возрождение европейской геометрии

Большая часть достижений греческой математики дошла до нас через арабскую культуру, которая сохранила лучшие произведения античных математиков и даже в некоторых направлениях развила их идеи. Интерес к математике в Европе пробуждается лишь в XII — XVII ст., хотя новых результатов европейские ученые в этот период почти не получали. Общий уровень математических знаний был невысоким.

Новые, можно сказать революционные открытия были сделаны в первой половине XVII ст., когда выдающиеся французские математики Р. Декарт (1596 — 1650гг.) и П. Ферма (1601 — 1665гг.) положили начало ***аналитической геометрии***. Речь идёт о введении в обычную "евклидову" геометрию алгебраических методов исследования путем обращения к системе координат, характеризации точек плоскости с помощью пар чисел, а следом за этим — описание геометрических объектов с помощью уравнений или других алгебраических соотношений (аналитических).

Значение результатов Декарта и Ферма не столько в том, что они открыли эффективный метод решения геометрических задач, они ввели в математику переменные величины и функции — основной объект современной математики и основное средство моделирования реальных процессов и явлений.

XVII век порой называют золотым для математики. Были открыты новые методы, новые математические науки (теория чисел, теория вероятностей, дифференциальное и интегральное исчисление и др.).

Существенные изменения начали происходить и в геометрии. В это время французским математиком и инженером Ж. Дезаргом (1591 — 1661гг.) были заложены основы ***проективной и начертательной геометрии***. Плодотворными оказались применения математического анализа к исследованию кривых и поверхностей, которые привели к созданию ***дифференциальной геометрии***.

Перестройка геометрии в XIX веке

Вместе с углублением и расширением геометрических знаний, которое наблюдается в XVII — XVIII ст., европейские математики стали переосмысливать основы евклидовой геометрии. В частности, привлекал к себе внимание пятый постулат Евклида, содержание которого в том, что в плоскости через точку, лежащей вне данной прямой, проходит только одна прямая, не пересекающая данную (у Евклида этот постулат сформулирован несколько по-иному). Этот постулат, особенно в формулировке Евклида, значительно более сложен других. Поэтому были сделаны многочисленные попытки доказать его как теорему на базе остальных основных утверждений.

В частности, попытки доказать эту теорему методом "от противного" никак не приводили к противоречию. Это вызывало мысль о возможности построения геометрии неевклидовой, полученной из евклидовой путем замены пятого постулата новым: на плоскости через точку, не лежащей на данной прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, не пересекающие данную.

Исторически первым реализовал эту идею русский математик Н. Лобачевский (1792 — 1856гг.), а немного позже и независимо от него венгр Я. Больяи (1802 — 1860гг.).

Из сугубо формальных позиций евклидова геометрия и геометрия Лобачевского (как совокупности следствий соответствующих систем аксиом) полностью равнозначны, хотя, конечно, содержание многих теорем в этих геометриях разное (например, в геометрии Евклида сумма углов треугольника равняется 180°, а в геометрии Лобачевського она меньше 180°). Однако современники воспринимали геометрию Лобачевского, как, может, и интересную, но совсем непригодную теорию, потому что она ни в какой мере не отвечает реальному физическому пространству.

Заслуга М. Лобачевского в том, что он глубже других попробовал осмыслить строение окружающего "физического" пространства, верил, что его геометрия в космических масштабах может моделировать это пространство, и даже попробовал это доказать путем астрономических измерений.

В какой-то степени предвидения М. Лобачевського оправдались, потому что, если и не сама его геометрия, но так называемая геометрия пространств переменной кривизны, возникшая под очевидным влиянием идей Лобачевского, нашла применение в физической теории относительности.

О современном состоянии развития геометрии

В XIX и потом в XX ст. идеи и методы геометрии получили дальнейшее развитие. До XIX ст. геометрия изучала трехмерное евклодово пространство. Точки этого пространства можно отождествить с тройками вещественных чисел (координатами точек). Поэтому вполне естественной (с формальных позиций) является идея построения геометрий упорядоченных четверок, пятерок, ... , n-ных (и даже бесконечных) последовательностей вещественных чисел.

И такие геометрии в XIX — XX ст. были построены и получили широкое приложение. Конечно, они далеки от той наглядности, которую мы имеем для евклидовой геометрии, но их моделирующие возможности и для явлений физического мира, и для математических объектов огромные.

Обратим внимание еще на одну интересную и важную геометрическую науку — ***топологию***, которую еще порой называют геометрией резиновых пленок. Как мы помним, геометрия возникла из задач, связанных с измерением. Собственно говоря, в топологии измерения не играют важной роли, поскольку она изучает свойства математических объектов, не изменяющиеся при непрерывных деформациях (как бы мы не надували спасательный круг, но в шар он не превратится). Иначе говоря, речь идет об изучении топологией не количественных, а качественных свойств объектов.

Если дать общую характеристику современного состояния геометрии, то она является ведущей математической наукой, продолжающей развиваться. Она породила десятки полностью самостоятельных разделов математики, которые созданы на геометрических идеях и продолжают ими руководствоваться. И, конечно, геометрия продолжает успешно выполнять основное свое назначение — помогать человеку познать мир, в котором он живет.

Для чего стоит изучать геометрию

Какие же выводы можно делать из сказанного раньше?

Геометрия зародилась как ***наука для решения практических проблем*** каждого человека и человеческого сообщества в целом. И в дальнейшем именно практические задачи (в широком понимании этого слова) стимулировали наиболее значительные изменения в ее содержании, методах, задачах.

Геометрия первой из наук взяла на вооружение дедуктивный метод построения, когда ее результаты получают как логическое следствие основных, базовых. Поэтому и сейчас изучение геометрии является одним из наилучших способов обучения правильно рассуждать, делать логические выводы, без чего невозможен творческий труд человека в современном обществе.

Хотя в курсе геометрии изучаются абстрактные конструкции и построения, но они правильно и точно характеризуют пространственные формы и отношения реального мира, что помогает более глубокому его восприятию.

И, наконец, вернемся опять к практическим применениям геометрии. Ведь для подавляющего большинства людей геометрия может стать надежным помощником в решении повседневных бытовых и производственных задач. В основе решения таких задач лежит идея математического (геометрического) моделирования.

Применение математики при решении практических задач сводится к их переводу на язык математики, решения полученной математической задачи, толкования решения.

Рассмотрим задачу, которая иллюстрирует применение метода математического моделирования на практике.

По одну сторону от шоссе находятся два населенных пункта. Где целесообразно построить автобусную остановку?

Решение этой задачи начинается с выяснения того, чем определяется выбор места для построения остановки. Если нет никаких ограничений, то естественно шоссе изобразить прямой *l*, населенные пункты - точками *A* и *B* (рис. 1). Осталось установить критерий, по которому выбирается место для остановки, которое будем изображать точкой *C* на прямой *l*. Если не учитывать численности населения в пунктах *A* и *B*, то остановка должна быть расположена так, чтобы сумма расстояний от пунктов *A* и *B* до остановки *C* была наименьшей. Тогда расходы времени на путь к остановке будут наименьшими. Таким образом, математической моделью данного задания будет такая математическая задача.

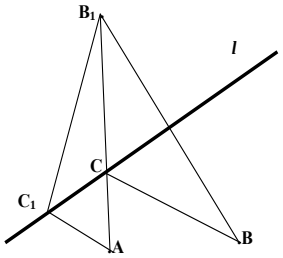


Рис. 1

Пусть даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Найти на прямой l такую точку C, чтобы сумма расстояний от A до C и от B до C была наименьшей.

Эта задача содержится во многих пособиях по геометрии. Считают, что ее автором является известный математик античности Герон Александрийский. Поэтому эту задачу называют задачей Герона. Ее решение основывается на идее симметрии.

Построим точку B_1, симметричную точке B относительно прямой l. Соединим точки B_1 и A. Тогда точка пересечения прямой AB_1 с прямой l будет искомой. Обратите внимание на то, что эта точка существует!

Действительно, для произвольной точки C_1, отличной от C, имеет место неравенство

$$AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1 > AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB.$$

Для его доказательства мы воспользовались свойствами симметрии, из которых вытекают равенства $C_1B = C_1B_1$, $CB = CB_1$, а также неравенством треугольника. Полученное неравенство свидетельствует о том, что точка C является искомой.

Нам осталось выяснить, в какой мере решение математической задачи, являющейся моделью данной задачи, является ее решением. Для этого следует уточнить несколько вопросов. Можно ли реализовать решение практически? Если расстояния незначительны, то с помощью топографических приборов это сделать нетрудно. В том случае, когда это невозможно сделать, следует продолжить исследование математической задачи и научиться характеризовать точку C другими средствами.

Но еще важнее и более сложным являются уточнение решения в связи с тем, что численность населения в пунктах A и B разная. Учет этого фактора значительно усложняет задачу. Еще сложнее становится ситуация, если учитывать и другие естественные условия, например, когда напрямик идти невозможно. Учет всех факторов почти невозможен в общем случае. Но при конкретных условиях математик всегда построит математическую модель для этой задачи и предложит пригодный вариант ее решения.

Чтобы исследовать математические модели, необходимо иметь определенные математические знания и навыки. Потребности в использовании математики для изучения экономических, социальных процессов и других нетрадиционных областей ее применения требуют разработки новых математических идей и методов. В этом проявляется влияние практики на развитие математики в настоящее время.

Решение полученной при моделировании математической задачи не завершает решения данной, для которой была построена математическая модель. Полученные результаты используются для принятия каких-то решений или прогнозирования поведения изучаемого процесса. И должна быть уверенность, что полученными результатами можно воспользоваться для этих целей. Другими словами, необходимо быть уверенным в том, что построенная модель соответствует изучаемому явлению (понятно, что в той мере, насколько этого требует данная задача).

Исследование адекватности математической модели изучаемому явлению, выявление того, насколько близки к реальным результаты, полученные с помощью математической модели, является наиболее сложным и ответственным этапом математического моделирования. На этом этапе в существующую модель могут вноситься изменения, которые делают ее реальнее, совершеннее,

хотя, как правило, и более сложной. Необходимость в уточнении математических моделей определяется требованиями практики.

Подводя итоги, процесс математического моделирования можно изобразить как процесс, состоящий из трех этапов:

1) ***выбор или построение математической модели для описания данной задачи;***
2) ***исследование построенной модели, то есть решение математической задачи;***
3) ***содержательное толкование результатов исследования, установление соответствия полученного результата цели исследований.***

При необходимости уточняется сама математическая модель и результаты, которые из нее вытекают.

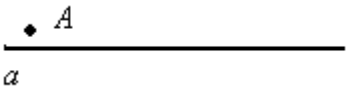
Понятно, что успехи математического моделирования средствами геометрии связаны с наличием в распоряжении разнообразных математических моделирующих средств и знаний об их свойствах. Стереометрия открывает в этом направлении новые и широкие горизонты.

Раздел 1. Основные факты и методы планиметрии

Изучение стереометрии базируется на геометрии плоскости, то есть на планиметрии. Во-первых, часто можно установить аналогию между планиметрическими и стереометрическими понятиями, фактами. Во-вторых, при решении стереометрических задач широко применяется идея сведения задачи к планиметрической. По этим причинам изучение геометрии пространства мы начинаем с повторения и систематизации планиметрического материала.

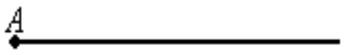
1.1 Аксиомы планиметрии.

Изучая планиметрию, вы могли убедиться, что каждое следующее понятие определяется через ранее определенные. Так, понятие параллелограмма определяется через понятие четырехугольника, а для определения четырехугольника понадобилось понятие отрезка, которое, в свою очередь, требует владения понятием прямой. Понятно, что должны быть первоначальные математические понятия, которые не определяются через другие. Их вводят без определения и называют ***неопределяемыми***. К неопределяемым понятиям на плоскости обычно относят понятия ***точки, прямой, их взаимного расположения.***

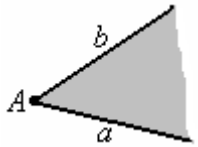


Имея в распоряжении эти понятия, можно ввести понятие:

отрезка, как части прямой, состоящей из двух точек *A* и *B* на прямой (концы отрезка) и всех ее точек, которые лежат между этими точками;



луча, как части прямой, состоящей из точки *A* на прямой (начало луча) и всех ее точек, которые лежат по одну сторону от этой точки;



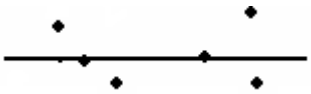
угла, как части плоскости, ограниченной двумя лучами *a* и *b*, выходящих из одной точки *A*.

На их основе можно строить новые понятия, отношения. В частности, две прямые, имеющие одну общую точку, — ***пересекаются***, а если они не имеют общих точек, то — ***параллельны***.

То же самое имеем с доказательством утверждений. Каждое следующее утверждение доказывается с использованием ранее доказанных. А как быть с утверждениями, для которых нет предыдущих? Их принимают без доказательства и называют ***аксиомами***.

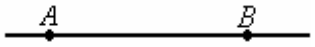
Напомним систему аксиом, которые применялись при изучении планиметрии. Вы могли изучать геометрию по разным учебникам, системы аксиом могли кое в чём отличаться, но, в главном, они совпадают. Их можно распределить на такие группы.

Аксиомы принадлежности точек и прямых.



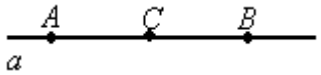
1. Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, ей не принадлежащие.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

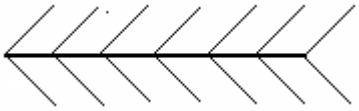


Аксиомы взаимного расположения точек на прямой и плоскости.

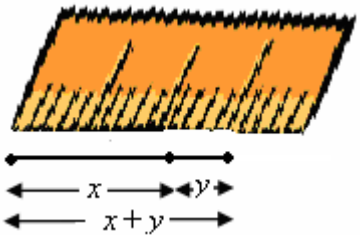
3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.



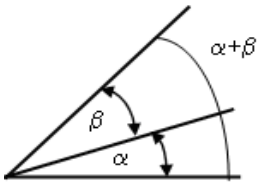
4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.



Аксиомы измерения отрезков и углов.

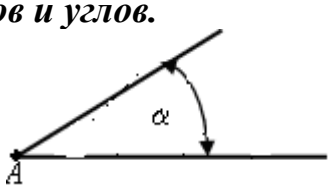


5. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равняется сумме длин частей, на которые он разбивается произвольной его точкой.



6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Градусная мера угла равняется сумме градусных мер углов, на которые он разбивается произвольным лучом, проходящим между его сторонами.

Аксиомы откладывания отрезков и углов.



7. На любом луче от его исходной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

8. От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

Аксиома параллельных прямых.

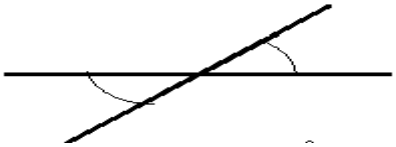
9. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, не имеющей общих точек с данной.

Среди понятий, касающихся углов и их измерения, отметим следующие.

Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам.

Два угла называются смежными, если одна сторона у них смежная, а две другие их стороны являются дополнительными лучами.

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон второго.



Контрольные вопросы:

1. Две точки определяют одну прямую. Сколько прямых могут определять четыре точки?

2. Может ли точка, лежащая между точками A и B, на лежать на прямой AB?

3. При каком условии две точки плоскости M и N расположены относительно прямой b в разных полуплоскостях?

4. Отрезок длиной a разделен на две неравные части. Чему равняется расстояние между серединами этих частей?

5. Угол с градусной мерой $\alpha°$ разделен лучом на два неравных угла. Чему равняется градусная мера угла, образованного биссектрисами этих углов?

6. На луче AB отложен отрезок AC, больший отрезка AB. Какая из трех точек лежит между двумя другими?

7. Дан угол ABC. От луча BA отложен угол ABD, градусная мера которого меньше градусной меры угла ABC. Какой из лучей BA, BC, BD лежит между двумя другими?

8. Существует ли прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся прямых?

Задачи

1. °Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 2{,}7$ м, $AC = 3{,}2$ м. Сколько решений имеет эта задача?

2. °Отрезок длиной a разделено на три произвольных отрезка. Найдите расстояние между серединами крайних отрезков, если длина среднего равна b.

3. °Отрезок длиной a разделен на 4 произвольных отрезка. Расстояние между серединами средних отрезков равняется b ($b < a$). Найдите расстояние между серединами крайних отрезков.

4. Отрезок разделён на три части в отношении 1:2:3. Расстояние между серединами крайних частей равно 8 м. Найдите длину данного отрезка.

5. ° Дана прямая и три точки *A, B, C*, не лежащие на этой прямой. Отрезок *AB* пересекает прямую, а отрезок *AC* не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок *BC*?

6. Угол, градусная мера которого составляет 75°, разделен двумя лучами на три произвольных угла. Градусная мера угла между биссектрисами крайних углов равняется 65°. Найдите градусную меру среднего угла.

7. Чему равняется угол между часовой и минутной стрелками часов: 1) в 12 ч. 00 мин; 2) в 13 ч.; 3) в 15 ч.; 4) в 16 ч. 30 мин?

8. Докажите, что любые две различные прямые имеют не более одной общей точки.

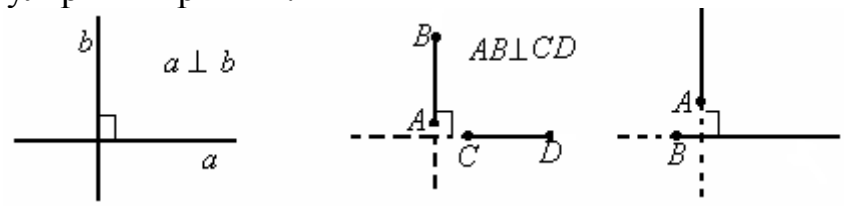
9. Докажите, что отрезок имеет только одну середину.

10. Докажите, что каждый угол имеет только одну биссектрису.

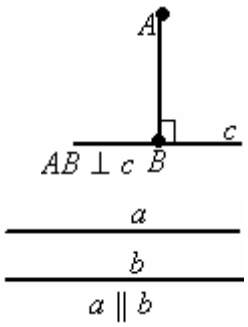
1.2 Параллельность и перпендикулярность прямых

Основные определения

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они пересекаются под прямым углом. Отрезки, лучи перпендикулярны, если они принадлежат перпендикулярным прямым.



Если точка *B* принадлежат прямой *c* и отрезок *AB* перпендикулярен прямой *c*, то его называют ***перпендикуляром***, проведенным из точки *A* к прямой *c*.



Две прямые на плоскости, не имеющие общих точек, называются ***параллельными***. Соответственно и лучи, отрезки называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

При пересечении двух прямых *a* и *b* третьей *c* (секущей) (рис. 1) возникают несколько углов:

1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 — соответственные;

4 и 5, 3 и 6 — внутренние односторонние;

1 и 8, 2 и 7 — внешние односторонние;

4 и 6, 3 и 5 — внутренние разносторонние (накрест лежащие);

1 и 7, 2 и 8 - внешние разносторонние (накрест лежащие).

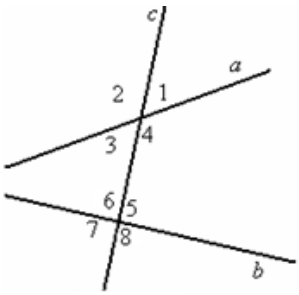
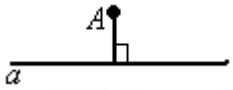


Рис. 1

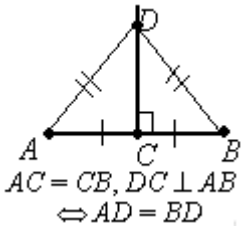
Основные свойства:

Через заданную точку плоскости можно провести только одну прямую, перпендикулярную заданной прямой.

Из точки, не принадлежащей прямой, можно провести только один перпендикуляр к этой прямой.

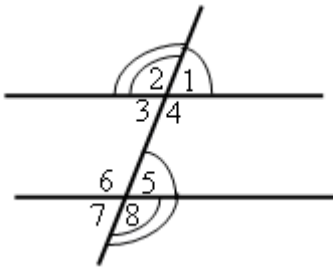


Геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка является срединный перпендикуляр к этому отрезку.



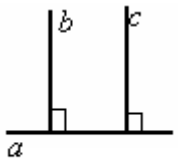
Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда при пересечении их третьей выполняется одно из следующих условий:

1) **внутренние разносторонние** (накрест лежащие)**углы равны;**
2) **соответственные углы равны;**
3) **внешние разносторонние** (накрест лежащие)**углы равны;**
4) **сумма внутренних односторонних углов равняется 180°**;
5) **сумма внешних односторонних углов равняется 180°**.



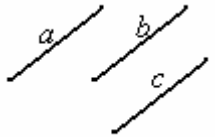
Признаки параллельности прямых:

Каждое из перечисленных свойств 1) – 5) является ***признаком*** параллельности двух прямых, пересекающихся третьей секущей. Кроме того признаками параллельности прямых являются утверждения:



$a \perp b, a \perp c$
$\Rightarrow b \parallel c$

Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.



$a \parallel b, b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

Задача 1. Доказать, что градусные меры двух углов с соответственно параллельными сторонами или равны (если они оба острые или оба тупые) или их сумма составляет 180° (если один из них острый, а второй тупой).

 Пусть $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C1$ (рис. 2). Надо доказать, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle ABC + \angle A_1B_1D_1 = 180°$.

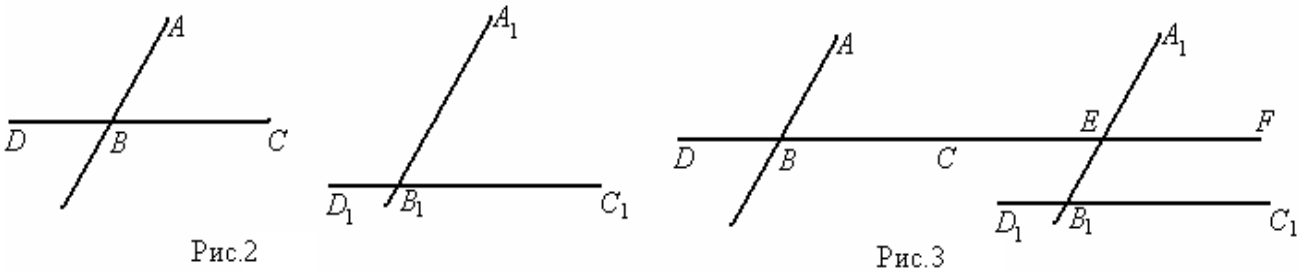


Рис.2 Рис.3

Продолжим сторону BC первого угла до пересечения в точке E со стороной A_1B_1 второго угла (рис. 3). По свойству углов при параллельных прямых и секущей имеем: $\angle ABC = \angle A_1EF$ и $\angle A_1EF = \angle A_1B_1C_1$. Отсюда $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. По свойству смежных углов $\angle A_1B_1C_1 + \angle D_1B_1A_1 = 180°$, но по доказанному $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC + \angle A_1B_1D_1 = 180°$. ■

Задача 2. Доказать, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого, то градусные меры этих углов или равны, или сумма их составляет 180°.

 Для доказательства рассмотрим два случая: 1) углы имеют общую вершину; 2) углы имеют разные вершины.

Пусть даны два угла с общей вершиной, причем $AB \perp AD$, $AC \perp AE$ (рис. 4). Надо доказать, что $\angle BAC =$

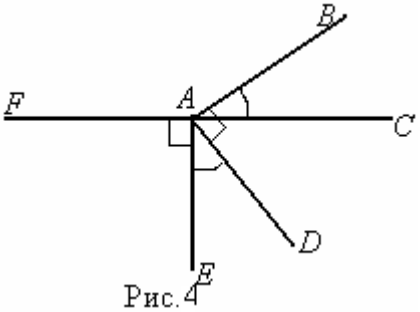
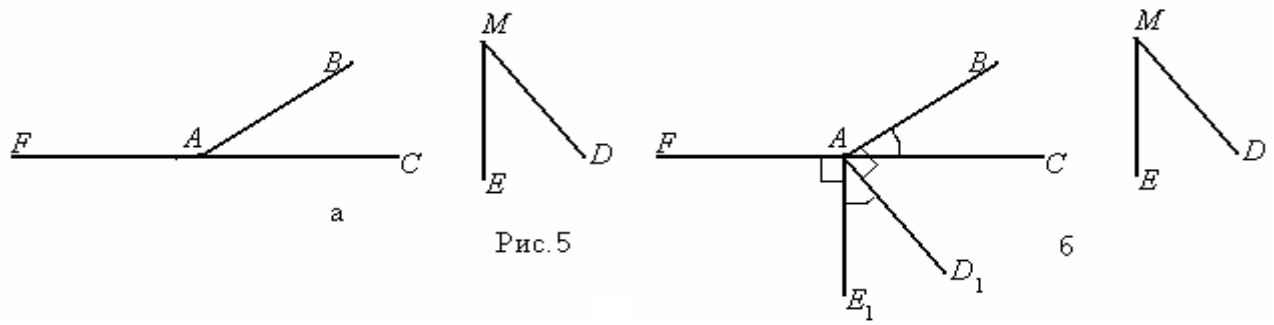


Рис.4

$\angle DAE$ и $\angle BAF + \angle DAE = 180°$. Поскольку углы BAC и DAE дополняют угол DAC до прямых углов, имеющих одинаковую градусную меру 90°, то их градусные меры равны. Сумма градусных мер смежных углов BAF и BAC равняется 180°, а градусные меры углов BAC и DAE, как мы доказали, является равными, поэтому $\angle BAF + \angle DAE = 180°$.

Рассмотрим теперь углы с разными вершинами. Пусть $AB \perp MD$, $AC \perp ME$ (рис. 5 а). Надо доказать, что $\angle BAC = \angle DME$ и $\angle BAF + \angle DME = 180°$. Попробуем свести задачу к первому рассмотренному случаю, то есть к углам с общей вершиной и взаимно перпендикулярными сторонами. Для этого проведем через вершину A прямые AE_1 и AD_1, соответственно перпендикулярные прямым AC и AB: $AB \perp AD_1$, $AC \perp AE_1$ (рис. 5 б). Поскольку две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой, то $AE_1 \parallel ME$, $AD_1 \parallel MD$.

Следовательно, $\angle DME = \angle E_1AD_1$, как углы с параллельными сторонами



(см. задачу 1). Поскольку углы BAC и E_1AD_1 имеют попарно перпендикулярные стороны и общую вершину, то по доказанному $\angle BAC = \angle E_1AD_1$ и $\angle E_1AD_1 + \angle BAF = 180°$. Заменяя $\angle E_1AD_1$ на равный ему $\angle DME$, получим то, что надо было доказать. ■

Пример 1. Через вершину данного угла провести прямую, образующую с его сторонами равные углы.

 На рис. 6 изображен угол ABC. Пусть прямая MN, проходящая через точку B, образует с его сторонами равные углы: $\angle MBA = \angle NBC$. Тогда луч BD, разделяющий $\angle ABC$ пополам, разделяет пополам и развернутый угол MBN, то есть $\angle MBD = \angle DBN = 90°$. Таким образом, прямая MN должна быть перпендикулярной биссектрисе данного угла. Построение может быть осуществлено или с помощью транспортира, или с помощью циркуля и линейки. ■

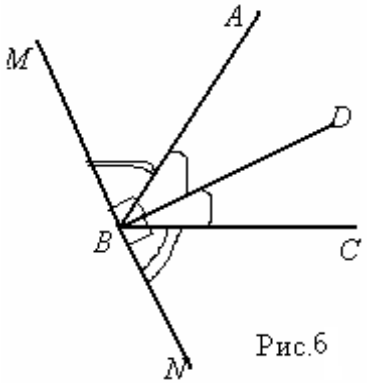


Рис.6

Контрольные вопросы

1. Через вершину прямого угла проведена прямая, делящая данный угол на два угла. Чему равен угол между биссектрисами этих углов?

2. Верно ли, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны?

3. Верно ли, что прямые, на которых лежат биссектрисы двух пар вертикальных углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, перпендикулярны?

4. Верно ли, что прямые, содержащие минутную и часовую стрелки часов, в 15 часов перпендикулярны между собой?

5. Верно ли, что биссектрисы двух внутренних разносторонних (накрест лежащих)углов при параллельных прямых и секущей параллельны?

6. При каком положении секущей при двух параллельных прямых все образованные углы равны?

7. Верно ли, что прямые, перпендикулярные двум прямым, параллельны?

8. Верно ли, что прямые, образующие с секущей неравные соответственные углы, пересекаются?

9. Могут ли быть непараллельными две прямые, при пересечении которых секущей, образовалось ровно 4 угла по 46°?

10. На рис. 7 изображено построение параллельных прямых с помощью рейсшины. Почему прямые *a*, *b*, *c* параллельны?

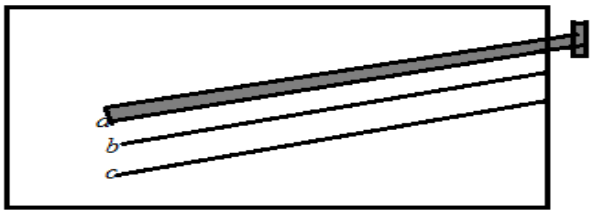


Рис. 7

Задачи

11. ° Докажите, что биссектрисы двух внутренних или внешних разносторонних (накрест лежащих) углов параллельны между собой.

12. ° Докажите, что биссектрисы двух соответственных углов параллельны между собой.

13. ° Докажите, что биссектрисы двух внутренних или внешних односторонних углов перпендикулярны.

14. Докажите, что биссектрисы двух углов с параллельными сторонами параллельны или перпендикулярны, или лежат на одной прямой.

15. Докажите, что биссектрисы двух углов с перпендикулярными сторонами параллельны или перпендикулярны, или лежат на одной прямой.

16. Докажите, что перпендикулярная данной прямой прямая пересекается с каждой прямой, которая не перпендикулярна данной.

17. Докажите, что если две данные прямые пересекаются третьей так, что сумма внутренних односторонних углов меньше 180°, то данные прямые пересекаются.

18. Сумма градусных мер углов *FAC* и *FCA* равняется 90° (рис. 8), *AF* и *CF* — биссектрисы соответственно углов *BAC* и *BCD*. Докажите, что прямые *AB* и *CD* параллельны.

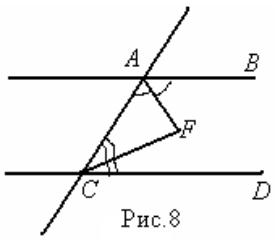


Рис.8

19. На рис. 9 прямые *AB* и *CD* параллельны. Найдите угол *AMC*, если ∠*BAM* = 50°, а угол *MCD* — 20°.

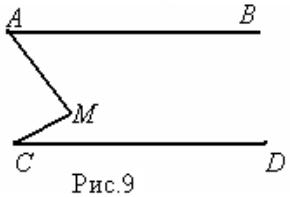


Рис.9

20. Прямые, на которых лежат биссектрисы внешних односторонних углов, образованных при пересечении двух прямых секущей, перпендикулярны. Докажите, что биссектрисы внутренних разносторонних (накрест лежащих) углов, образованных при пересечении этих прямых секущей, параллельны.

21. Дан угол, градусная мера которого равна 26°. Пользуясь только линейкой и карандашом, постройте угол, градусная мера которого равна 154°.

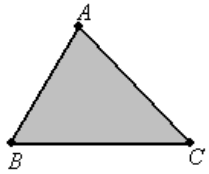
22. Три прямые пересекаются в одной точке. Какое значение мы получим, если сложить градусные меры углов, образованных соседними лучами, считая через один угол?

1.3 Геометрия треугольников

Фигура на плоскости состоит из некоторой совокупности (множества) точек. Фигурами являются, конечно, точки, отрезки, прямые и более сложные геометрические объекты плоскости.

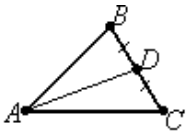
К фундаментальным в геометрии относится понятие треугольника.

Треугольником называется часть плоскости, ограниченная тремя отрезками, которые соединяют три точки плоскости, не лежащие на одной прямой.



Важнейшие отрезки треугольника:

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

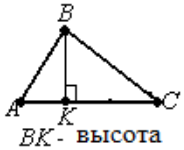


AD - медиана

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла (луча, выходящего из вершины угла и делящего его пополам) треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне треугольника.

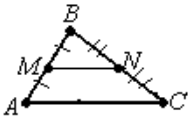
BK - биссектриса

Высота треугольника — перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей его противоположную сторону.



BK - высота

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.



MN - средняя линия

Виды треугольников.

В зависимости от величин углов и соотношений между сторонами треугольники делятся на несколько классов.

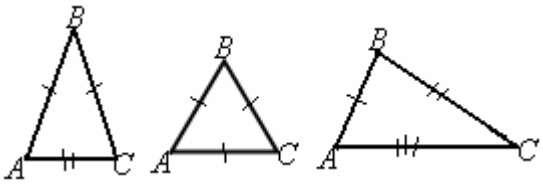
По углам:

остроугольные, тупоугольные, прямоугольные.

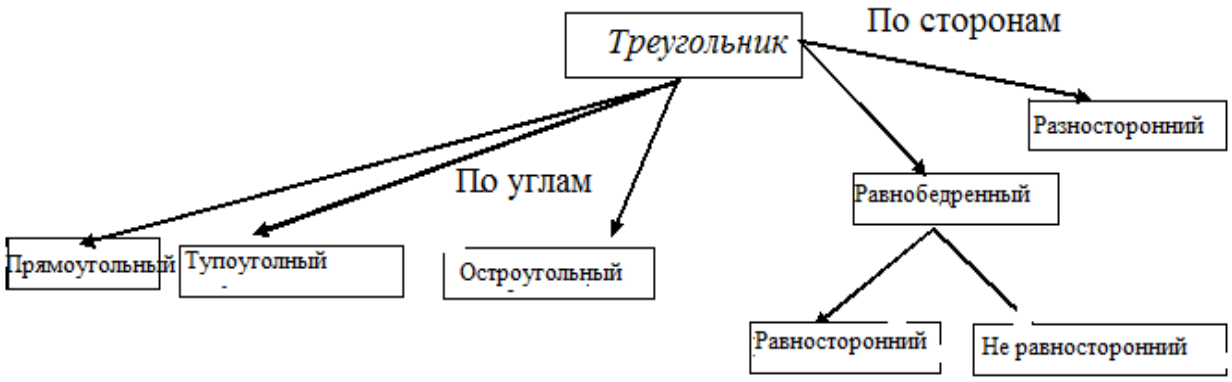
По сторонам:

равнобедренные и ***разносторонние.***

В свою очередь, равнобедренные треугольники делятся на ***равносторонние*** и такие, которые не являются равносторонними.



Классификация треугольников по разным признакам представлена на следующей схеме.



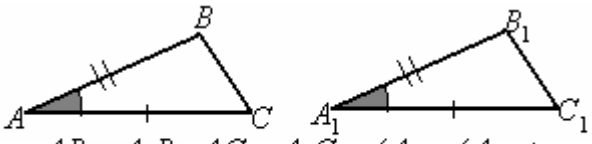
Равенство треугольников.

Треугольники называются ровными между собой, если их можно совместить перемещением (движением).

Обозначается равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ так: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

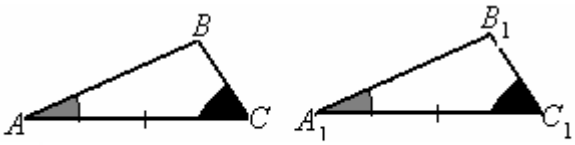
Признаки равенства треугольников:

1. **Если две стороны и угол, лежащий между ними, одного треугольника равняются соответственно двум сторонам и углу, лежащему между ними, второго треугольника, то такие треугольники равны.**



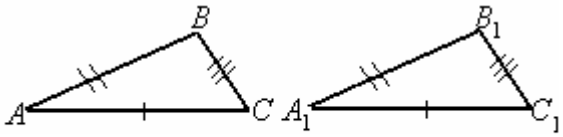
$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1 \Rightarrow$
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

2. **Если сторона и два прилегающих к ней угла одного треугольника соответственно равняются стороне и двум прилегающим к ней углам второго треугольника, то такие треугольники равны.**



$AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1 \Rightarrow$
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

3. **Если три стороны одного треугольника соответственно равняются трем сторонам второго треугольника, то такие треугольники равны.**



$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1 \Rightarrow$
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Пример 1.Доказать, что равносторонние треугольники равны, если они имеют по равной высоте.

На рис. 10 изображено два равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, в которых высоты BD и B_1D_1 равны. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ имеют по равной стороне ($BD = B_1D_1$) и по два прилегающих к ним угла ($\angle ABD = \angle A_1B_1D_1 = 30°$, поскольку высота в равностороннем треугольнике является и биссектрисой, $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1 = 90°$). Поэтому, по второму признаку равенства, эти треугольники равны. Отсюда следует, что $AB = A_1B_1$, то есть стороны данных треугольников, а потому и сами треугольники, равны по любому из признаков равенства треугольников. ■

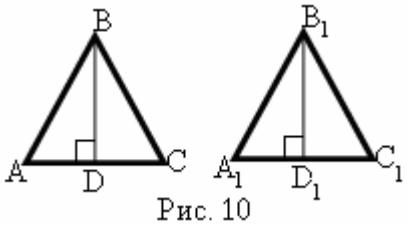


Рис. 10

Пример 2. На сторонах равностороннего треугольника ABC вне его построены равные равнобедренные треугольники ABD, BCE и ACF (рис. 11). Доказать, что треугольник EDF — равносторонний.

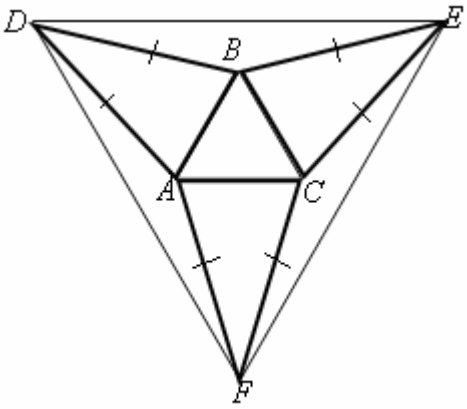


Рис.11

 Для решения задачи надо доказать, что $ED = DF = EF$. Для этого рассмотрим треугольники ADF, EDB, ECF. Они равны по первому признаку равенства треугольников: $AF = AD = BD = BE = EC = CF$, как стороны равных равнобедренных треугольников; $\angle FAD = \angle DBE = \angle FCE$, поскольку они дополняют сумму двух углов при основании равных равнобедренных треугольников с углом равностороннего треугольника до полного угла. Из равенства рассмотренных треугольников следует равенство сторон треугольника EDF. ■

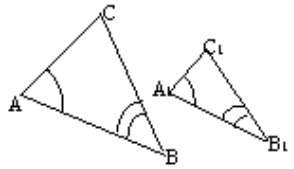
Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если у них соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Обозначается подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

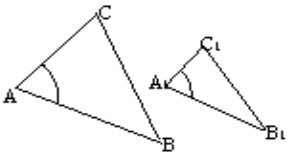
Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



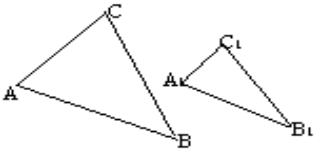
$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1 \Rightarrow$$
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы между ними равны, то такие треугольники подобны.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \quad \angle A = \angle A_1 \Rightarrow$$
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow$$
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Пример 3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $AB \perp CD$, $AO = \frac{1}{3}OB, OD = 3CO$. Найти $\angle OCA$, если $\angle DBO = 25°$.

□ Условиям примера соответствует рис. 12. Рассмотрим треугольники *AOC* и *BOD*. Они имеют по две пропорциональные стороны: $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}=\frac{1}{3}$ и по равному прямому углу *AOC* и *BOD* между этими сторонами. По второму признаку подобия треугольников эти треугольники подобны. Поэтому их углы, лежащие против соответствующих сторон равны. Итак, $\angle OCA = \angle DBO = 25°$. ■

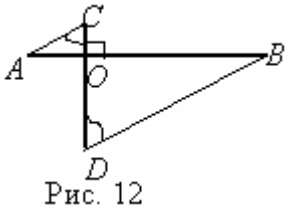


Рис. 12

Ответ: 25°.

Пример 4. В треугольник *ABC* помещены два квадрата, как это показано на рис. 13. Стороны квадратов равняются 5 см и 10 см. Найти сторону *AB* треугольника *ABC* и высоту, проведенную к этой стороне.

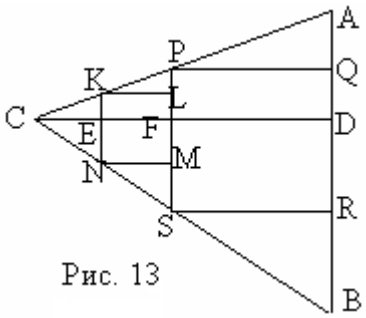


Рис. 13

□ Обозначим квадраты через *KLMN* и *PQRS*. Высота *CD* к стороне *AB* пересекает стороны этих квадратов в точках *E* и *F*. Пусть $CE = x$. Поскольку треугольники *KNC* и *PSC* подобны (по двум углам) и стороны пропорциональны соответствующим высотам, то $\frac{KN}{PS}=\frac{CE}{CF}$ или $\frac{5}{10}=\frac{x}{x+5}$. Отсюда $CE = x = 5$ (см). Поэтому $CD = CE + EF + FD = 20$ (см). Сторону *AB* найдем из подобия треугольников *KCN* и *ACB*: $\frac{KN}{AB}=\frac{CE}{CD}$ или $\frac{5}{AB}=\frac{5}{20}$, $AB = 20$ (см). ■

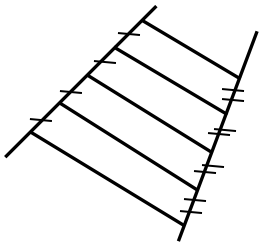
Ответ: 20 см.

Пропорциональные отрезки

Часто при решении геометрических задач используется теорема Фалеса и её обобщение — теорема о пропорциональных отрезках.

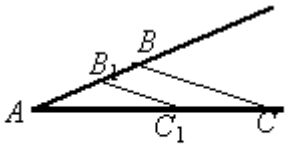
Теорема Фалеса.

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекают на второй прямой равные между собой отрезки.



Теорема о пропорциональных отрезках.

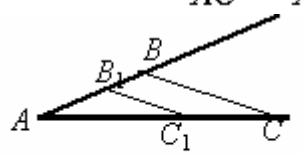
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.



$$BC \parallel B_1C_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{AC}=\frac{AB_1}{AB}$$

Теорема, обратная теореме о пропорциональных отрезках.

Если прямые, пересекающие стороны угла, отрезают от сторон угла пропорциональные отрезки, то эти прямые параллельны.



$$\frac{AC_1}{AC}=\frac{AB_1}{AB} \Rightarrow BC \parallel B_1C_1$$

Следующий пример иллюстрирует идею доказательства этой теоремы.

Пример 5. Из точек B и D отрезка AD проведены в одной полуплоскости, определенной прямой AD, параллельные отрезки BC и DE, причем $CB : ED = AB : AD$ (рис. 14 а). Доказать, что точки A, C и E лежат на одной прямой.

 Допустим, что точки A, C и E не лежат на одной прямой, и что прямая AC пересекается с прямой DE в точке E_1 (рис. 14 б). Поскольку треугольники ABC и ADE_1 подобны (по первому признаку), то $CB : E_1D = AB : AD$. Сравнивая эту пропорцию и соотношение $CB : ED = AB : AD$, получим, что $E_1D = ED$, то есть точки E_1 и E совпадают и точки A, C и E лежат на одной прямой. ■

Пример 6. На сторонах угла ABC взято четыре точки: K, L, M, N (рис. 15), причем $BM = \frac{1}{2}MN, LK = 2BL.$ Доказать, что прямые LM и KN параллельны.

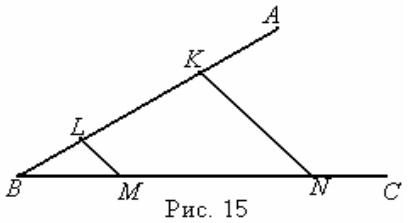


Рис. 15

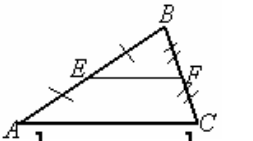
 Отрезки, которые отрезают на сторонах угла ABC прямые LM и KN, пропорциональны: $BM : MN = BL : LK = \frac{1}{2}.$ Согласно теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках, прямые LM и KN параллельны. ■

Свойства элементов треугольника

Сумма углов треугольника равняется 180°.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне, а ее длина равняется половине длины этой стороны.



$AE = \frac{1}{2}AB, CF = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$

$EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC$

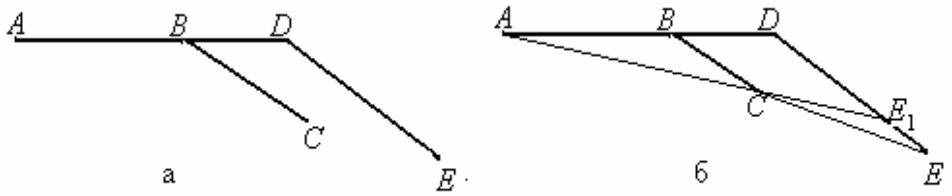
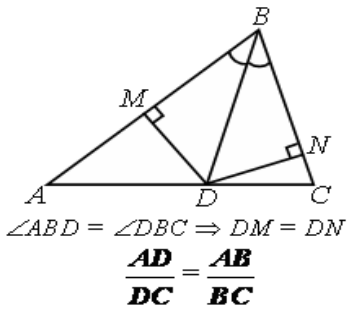


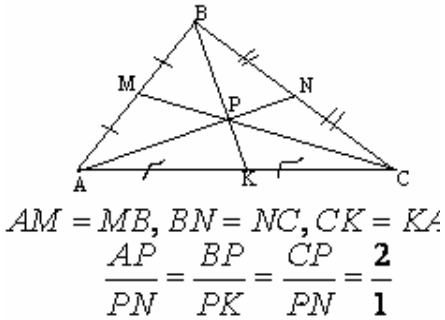
Рис. 14

Биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла:

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам.



Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.



Пример 7. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении делит медиану, выходящую из вершины B, прямая, проходящая через точку C и середину отрезка AM?

 Нужно найти отношение $\frac{BK}{KD}$ (рис. 16). Из свойства медиан вытекает, что $MD = \frac{1}{3}BD$. Поскольку MD и CF — медианы треугольника AMC, K — точка их пересечения, то, согласно тому же свойству медиан, $KD = \frac{1}{3}MD = \frac{1}{9}BD$. Тогда $BK = BD - KD = \frac{8}{9}BD$; $\frac{BK}{KD} = \frac{8}{1}$. ■

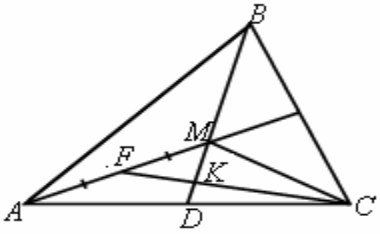


Рис. 16

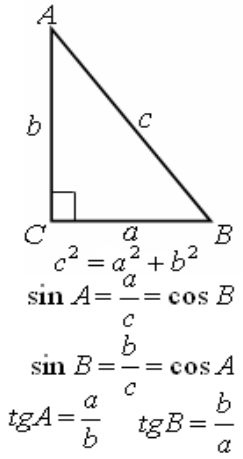
Ответ: 8: 1.

Прямоугольный треугольник

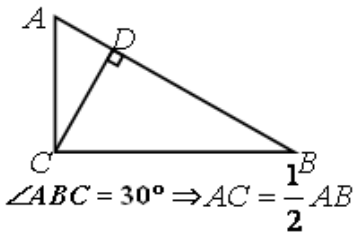
Планиметрические задачи на вычисление и доказательство чаще всего сводятся в конечном итоге к решению треугольников, то есть к вычислению его сторон или углов по некоторым из них. Одним из методов, которые применяются при этом, является выделение прямоугольного треугольника, после чего все сводится к работе с этим треугольником. При этом часто используется теорема Пифагора и соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Катет, лежащий против угла 30°, равняется половине гипотенузы.



Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит этот треугольник на два подобных данному и подобных между собой треугольника.



Медиана, выходящая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равняется половине гипотенузы.

Прямоугольный треугольник естественно возникает в конструкции, где фигурируют перпендикуляр *AB* к прямой *a*, а также наклонная *AC* (рис. 17). Отрезок *BC* называется проекцией наклонной *AC* на прямую *a*.

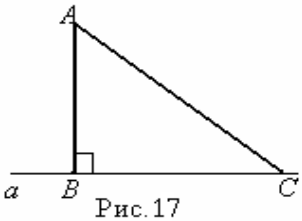


Рис.17

Вышеприведенные соотношения дают возможность вычислять длины перпендикуляров, наклонных, проекций, углов между соответствующими отрезками по другим данным.

Пример 8. В остроугольном треугольнике *ABC* угол *A* равняется α, *BC* = *a*, а высота *BD* равняется *h*. Найти: 1) сторону *AB*; 2) синус угла *C*; 3) сторону *AC*.

На рис. 18 изображен треугольник *ABC* по условию задачи.

1) Из прямоугольного треугольника *ABD* найдем гипотенузу *AB*: $AB = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$.

2) Угол *C* найдем из прямоугольного треугольника *BCD*: $\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{h}{a}$.

3) Сторона *AC* равняется сумме отрезков *AD* и *CD*: *AC* = *AD* + *CD*,

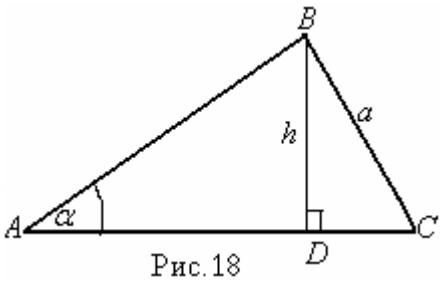


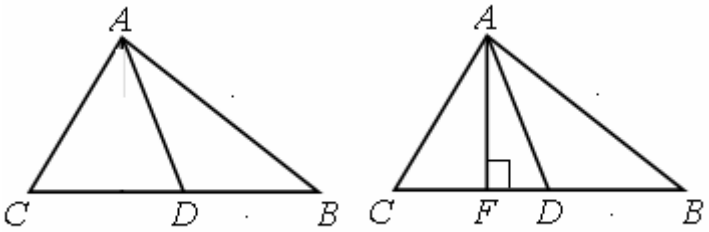
Рис.18

$AD = hctg\alpha, DC = \sqrt{a^2 - h^2}, AC = hctg\alpha + \sqrt{a^2 - h^2}$. ■

Ответ: 1) $AB = \dfrac{h}{\sin\alpha}$; 2) $\sin C = \dfrac{h}{a}$; 3) $AC = hctg\alpha + \sqrt{a^2 - h^2}$.

Пример 9. Дан треугольник *ABC* со сторонами 25, 39, 56 см. Найти медиану, проведенную к наибольшей стороне.

□ Пусть в треугольнике *ABC* стороны *AC*, *AB*, *BC* равняются соответственно 25, 39, 56 см (рис. 19 а). Необходимо найти длину медианы *AD*, проведенной к стороне *BC*. Попробуем выделить прямоугольный треугольник, одной из сторон которого будет отрезок *AD*. Для этого достаточно провести высоту *AF* (рис. 19 б). Поскольку угол *C* лежит не против наибольшей стороны треугольника, то он является острым. Поэтому точка *F* лежит на стороне *BC*, а не на ее продолжении.



а б
Рис. 19

Обозначим *CF* через *x*, тогда *FB* = 56 – *x*. Из прямоугольных треугольников *AFC* и *AFB* соответственно имеем: $AF^2 = 25^2 - x^2$, $AF^2 = 39^2 - (56 - x)^2$, откуда $625 - x^2 = 1321 - (56 - x)^2$.

Решая это уравнение относительно *x*, получим $x = 20$.

Далее $DF = CD - CF = 28 - 20 = 8$; $AF^2 = AC^2 - CF^2 = 25^2 - 20^2 = 225$. Из треугольника *ADF* имеем: $AD^2 = AF^2 + FD^2 = 225 + 64 = 289$; $AD = 17$ (см). ■

Ответ: 17 см.

Пример 10. В равнобедренном треугольнике один из углов 120°, а основание равняется 10 см. Найти высоту, проведенную к боковой стороне.

□ На рис. 20 изображен равнобедренный треугольник *ABC* и ∠*ABC* = 120°, *AD* ⊥ *BC*. Поскольку треугольник тупоугольный, то основание высоты *D* лежит на продолжении стороны *BC* за точку *B*, ∠*A* = ∠*C* = 30°. В прямоугольном треугольнике *ADC* ∠*C* = 30° и *AC* = 10 см, поэтому $AD = \dfrac{1}{2}AC = 5$ см. ■

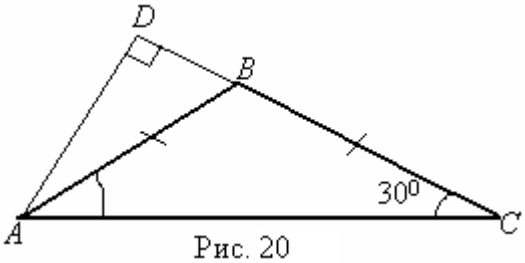


Рис. 20

Ответ: 5 см.

Пример 11. Доказать, что в прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

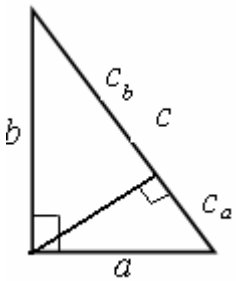


Рис.21

□ Обозначив катеты через *a* и *b*, гипотенузу через *c*, а проекции катетов на гипотенузу через c_a и c_b (рис. 21), из метрических соотношений между элементами прямоугольного

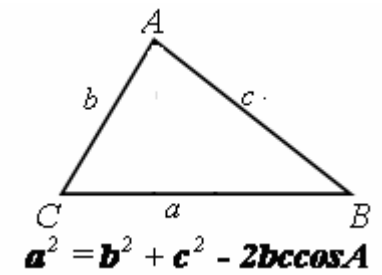
треугольника будем иметь: $a^2 = c \cdot c_a$, $b^2 = c \cdot c_b$. Отсюда $\frac{c_a}{c_b} = \frac{a^2}{b^2}$. ■

Решение треугольников

Обобщением теоремы Пифагора на произвольные треугольники можно считать теорему косинусов.

Теорема косинусов.

Квадрат стороны треугольника равняется сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.



Теорема косинусов дает возможность:

а) по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону;

б) по трем сторонам треугольника находить косинусы его углов;

в) устанавливать вид треугольника.

Пример 12. В треугольнике одна сторона равняется 13 см, противоположный угол — 120°, сумма двух других сторон — 15 см. Найти эти стороны.

□ Пусть в треугольнике ABC (рис. 22) $BC = 13$ см, $\angle A = 120°$, $AB + AC = 15$ см. Обозначим: $AB = x$, тогда $AC = 15 - x$. По теореме косинусов имеем: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$, или $169 = x^2 + (15 - x)^2 - 2x(15 - x)\cos 120°$. Отсюда имеем квадратное уравнение $x^2 - 15x + 56 = 0$, его корни 7 и 8. Следовательно, две неизвестные стороны треугольника равняются 7 см и 8 см. ■

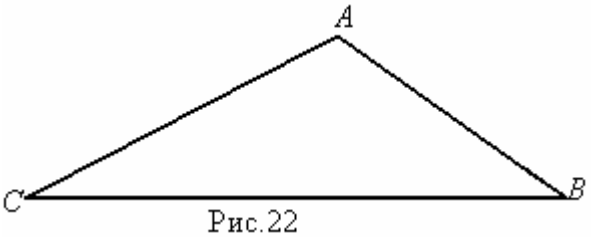


Рис.22

Пример 13. Решить пример 9, воспользовавшись теоремой косинусов.

□ Медиана AD может быть определена из треугольника ACD, в котором $AC = 25$, $CD = \frac{1}{2}BC = 28$ (см) (рис. 23). Неизвестный угол C может быть найден из треугольника ABC по теореме косинусов. Реализуем составленный план решения.

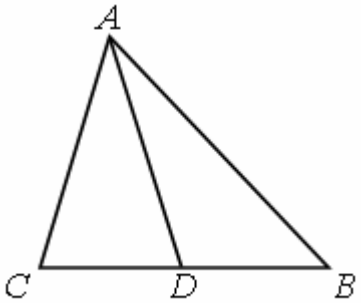


Рис. 23

Из треугольника ABC по теореме косинусов имеем:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$, или

$39^2 = 25^2 + 56^2 - 2 \cdot 25 \cdot 56 \cdot \cos C$.

Отсюда $\cos C = \frac{25^2 + 56^2 - 39^2}{2 \cdot 25 \cdot 56} = 0{,}8$. Теперь из тре-

угольника ADC найдем AD по теореме косинусов:

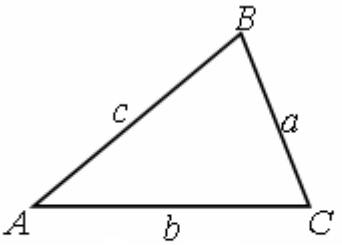
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos C = 25^2 + 28^2 - 2 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 0{,}8 = 289.$$

AD = 17 (см). ■

Среди теорем, которые активно используются при работе с треугольником, есть теорема синусов. В этой теореме фигурирует понятие окружности, описанной около треугольника, то есть окружности, проходящей через его вершины.

Теорема синусов.

Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов, причем коэффициент пропорциональности равняется диаметру окружности, описанной около треугольника.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R — радиус описанной окружности

Теорема синусов дает возможность:

а) по стороне и двум прилегающим углам найти неизвестные стороны треугольника;

б) по двум сторонам треугольника и углу против одной из них найти третью сторону и неизвестные углы;

в) найти радиус окружности, описанной около треугольника, если известна сторона и противоположный ей угол, или три стороны треугольника. Угол при этом найдется по теореме косинусов.

Пример 14. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AB равняется $\sqrt{2}$, угол при основании равняется 30°. Найти биссектрису AD.

□ Длину отрезка AD найдем по теореме синусов из треугольника ABD (рис. 24): $\frac{AD}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$. Поскольку $\angle B = \angle A = 30°$, $\angle ADB = 180° - (30° + 15°) = 135°$, то

$\frac{AD}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 135°}$ или $\frac{AD}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Отсюда $AD = 1$.

■

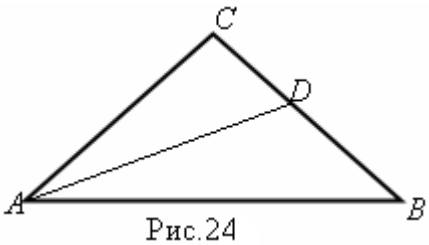


Рис.24

Ответ: 1.

Задача 1. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилегающим сторонам.

 Пусть ABC — данный треугольник, BD — биссектриса (рис. 25). Надо доказать, что $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$. Применим теорему синусов к треугольникам ABD и CBD: $\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha}$, $\frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\alpha}$.

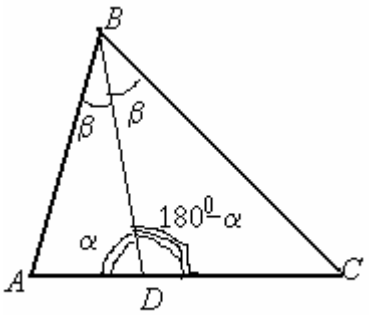


Рис. 25

Разделив первое равенство на второе, получим: $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$. ■

Пример 15. В прямоугольном треугольнике катеты равняются 40 см и 30 см. Найти расстояние от центра масс треугольника до гипотенузы.

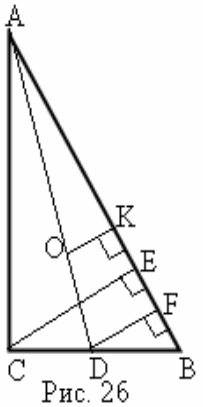


Рис. 26

 Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ = 90°) точка O является центром масс, то есть точкой пересечения его медиан (рис. 26), AD — медиана, проведенная к стороне BC, $OK \perp AB$. Надо найти длину отрезка OK. Проведем $CE \perp AB$ и $DF \perp AB$. Поскольку $CE \parallel DF$, как два перпендикуляра к одной прямой, то отрезок DF, согласно теореме Фалеса, является средней линией треугольника CEB, поэтому $DF = 0{,}5CE$. Треугольники AOK и ADF подобны по двум углам ($\angle A$ - общий, $\angle OKA = \angle DFA$ = 90°). Поэтому $\frac{AO}{AD}=\frac{OK}{DF}$. Но по свойству медиан $\frac{AO}{AD}=\frac{2}{3}$, отсюда $OK=\frac{2}{3}DF=\frac{2}{3}\cdot 0{,}5CE=\frac{1}{3}CE$. Осталось найти высоту CE. Из подобия треугольников ABC и ACE имеем: $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CE}$. Отсюда $CE=\frac{AC\cdot BC}{AB}$. Воспользовавшись теоремой Пифагора, имеем: AB = 50 (см). Тогда $CE=\frac{40\cdot 30}{50}=24, OK=\frac{1}{3}CE=8$ (см). ■

Ответ: 8 см.

Равнобедренныйтреугольник

Треугольник называется ***равнобедренным***, если он имеет две равные стороны. Эти стороны называются боковыми, их общая вершина — вершиной треугольника, третья сторона — основанием треугольника.

Свойства

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой.

2. Медиана, биссектриса, высота, проведенные из вершины равнобедренного треугольника, совпадают.

3. Биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника равны между собой.

4. Медианы, проведенные к равным сторонам равнобедренного треугольника, равны между собой.

5. Высоты, проведенные к равным сторонам равнобедренного треугольника, равны между собой.

Признаки

1. Треугольник, имеющий два равных угла, является равнобедренным.

2. Если в треугольнике какая-нибудь медиана является высотой, то этот треугольник является равнобедренным.

3. Если в треугольнике какая-нибудь высота является биссектрисой, то этот треугольник является равнобедренным.

4. Если в треугольнике какая-нибудь биссектриса является медианой, то этот треугольник является равнобедренным.

Пример 16. В равнобедренном треугольнике *ABC* длина основания *AB* равняется $\sqrt{2}$, угол при основании равняется 30°. Найти биссектрису *AD*.

 Длину отрезка *AD* найдем по теореме синусов из треугольника *ABD* (рис. 27): Поскольку $\angle B = \angle A = 30°$, $\angle ADB = 180° - (30° + 15°) = 135°$, то $\frac{AD}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 135°}$ или $\frac{AD}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Отсюда $AD = 1$. ■

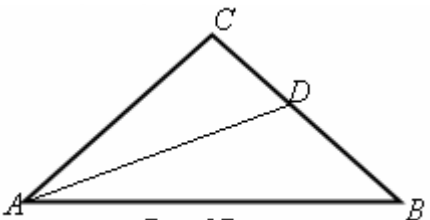


Рис.27

Ответ: 1.

Контрольные вопросы

1. В треугольнике *ABC* угол *A* равняется 38°, угол *B* равняется 74°, *M* — точка пересечения биссектрис (рис.28). Чему равняется угол *AMB*?

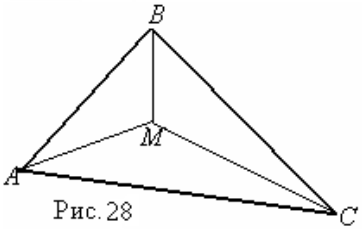


Рис.28

2. Какие из линий треугольника (высоты, медианы, биссектрисы) всегда лежат внутри треугольника?

3. Какие из линий треугольника (высоты, медианы, биссектрисы) могут совпадать с его сторонами?

4. Каким является треугольник, если его углы относятся как 1: 2: 3?

5. Каким является треугольник, если один из его внутренних углов равняется разности двух других?

6. Может ли наибольший угол треугольника быть меньше 60°?

7. Чему равняется сумма внешних углов треугольника, если при каждой вершине брать один внешний угол?

8. Что является геометрическим местом вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание?

9. Сколько существует точек, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой?

10. Сколько осей симметрии имеет равносторонний треугольник?

Задачи

23.° В треугольнике ABC $\angle A = 72°$, $\angle B = 48°$. Через вершины A и C треугольника проведены прямые, параллельные противоположным сторонам. Найдите углы образованного треугольника.

24.° В треугольнике ABC $\angle A = 46°$, $\angle B = 58°$. Прямая MN, проходящая через вершину A вне треугольника, образует со стороной AB угол 24°. Найдите острые углы, образованные прямой MN с прямыми AC и BC.

25. ° От вершины равнобедренного треугольника на его сторонах отложены равные отрезки. Докажите, что каждая точка биссектрисы угла при вершине треугольника одинаково удалена от концов этих отрезков.

26. Докажите, что каждая точка высоты равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, равноудалена от двух точек основания, симметричных относительно этой высоты.

27. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из вершины острого угла, не совпадают.

28. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на два отрезка. Докажите, что больший из этих отрезков прилегает к большей стороне угла.

29. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC серединный перпендикуляр стороны AB пересекает основание AC в точке P. Найдите угол C, если $\angle ABP = 54°$.

30. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB серединный перпендикуляр стороны AC пересекает основание BC в точке M. Найдите угол MAB, если $\angle ACB = 40°$.

31*. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BF пересекаются в точке M, AB = 30 см, AC = 60 см, AM:MD = 3:2. Найдите BC.

32*. В равнобедренном треугольнике ABC известны стороны $AB = BC$ = 13 см, AC = 10 см. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис до вершины A.

33. В треугольнике ABC $\angle A = 55°$, $\angle B = 70°$, BF — биссектриса внешнего угла KBC.

1) ° Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2) ° Докажите, что $BF \parallel AC$.

3) Докажите, что $MC = AB$, если медиану AL продолжить на отрезок ML, равный AL.

4) Верно, ли, что $\angle LAC = \angle LAB$?

34. В треугольнике DEF $\angle E = 40°$, $\angle F = 70°$, EC — луч, принадлежащий внутренней области внешнего угла PEF, причем $EC \parallel DF$.

1) ° Докажите, что треугольник DEF равнобедренный.

2) ° Докажите, что EC — биссектриса угла PEF.

3) Докажите, что высоты треугольника DA и FB равны.

4) Верно ли, что $EA = AF$?

35. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равняется m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите стороны треугольника.

36. Медиана делит треугольник на два треугольника, один из которых является равносторонним. Найдите углы треугольника.

37. Углы остроугольного треугольника ABC равняются: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Высоты треугольника пересекаются в точке M. Чему равняется угол AMB?

38. В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC ($AB = BC$) в точке M пересекаются высоты, AM = 15 см, BB_1 — высота треугольника, MB_1 = 9 см. Найдите периметр треугольника ABC.

39. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC = 70 см, высота AD равняется 56 см, высота BE равняется 60 см. Найдите сторону AB.

40. Докажите, что произведение двух сторон треугольника равняется произведению высоты, проведенной к третьей стороне, на диаметр описанной окружности.

41. Найдите геометрическое место точек:
1) равноудаленных от вершин треугольника;
2) точек, удаленных от прямой на заданное расстояние;
3) точек, равноудаленных от двух параллельных прямых;
4*) равноудалённых от сторон угла.
42. Дан прямоугольный треугольник *ABC* с катетами *AC* = 9 см и *BC* = 12 см.
1) Вычислите проекции катетов на гипотенузу.
2) Найдите биссектрисы углов треугольника.
3*) Найдите расстояние между точкой пересечения биссектрис и точкой пересечения медиан.
43*. Биссектриса угла *C* треугольника *ABC* пересекает сторону *AB* в точке *D*, через точку *D* проведена прямая, параллельная стороне *AC* и пересекающая сторону *BC* в точке *E*. Найдите *DE*, если *BC* = *a*, *AC* = *b*.

1.4 Геометрия четырехугольников

Четырехугольником называют часть плоскости, ограниченной фигурой, состоящей из четырех точек (вершин) и четырех отрезков (сторон), которые последовательно соединяют эти точки. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а отрезки не должны пересекаться.

Аналогично вводится понятие многоугольника (*n-угольника).*

Многоугольник называется ***выпуклым***, если отрезок, соединяющий две произвольные точки многоугольника, полностью принадлежит многоугольнику.

Виды четырехугольников

На рис. 29 изображен выпуклый четырехугольник с вершинами *A, B, C, D*. Стороны *AD* и *BC*, *AB* и *DC* — противоположны. Отрезки *AC* и *BD* — диагонали.

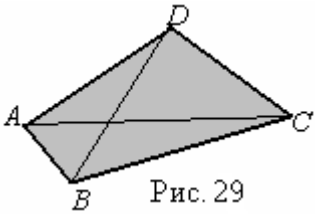
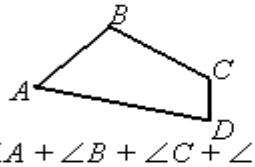


Рис. 29

.

Сумма углов выпуклого четырехугольника равняется 360°.



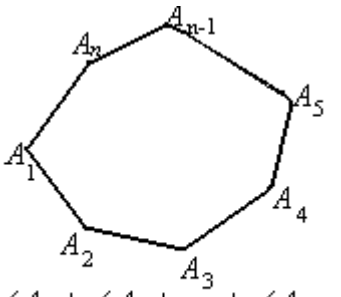
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

На рис. 30 изображен невыпуклый четырехугольник.

Сумма углов выпуклого *n-угольника* равняется 180°(*n* - 2).

Рис.30

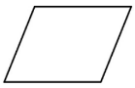
Сумма углов выпуклого *n-угольника* равняется 180°(*n* - 2).



$$\angle A_1 + \angle A_1 + \ldots + \angle A_1 = 180°(n-2)$$

Среди четырехугольников выделяют несколько классов наиболее употребляемых:

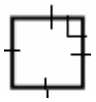
Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны.



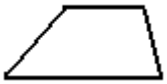
Если в параллелограмме равны смежные стороны, то он называется ***ромбом***.

Параллелограмм с прямыми углами называется ***прямоугольником.***

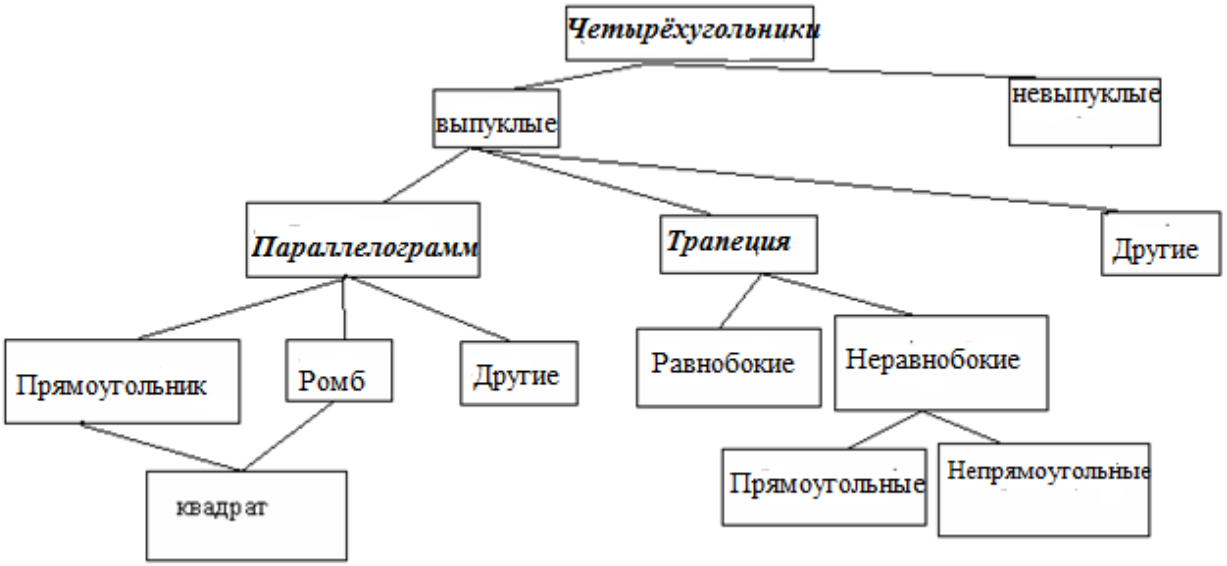
Прямоугольник с равными сторонами называется ***квадратом***.



Трапециями называют четырехугольники, в которых только две стороны (основания) являются параллельными. Другие две стороны называют боковыми. Отрезок, который соединяет середины боковых сторон, называют ***средней линией*** трапеции.

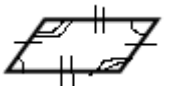


На следующей схеме представлена классификация четырехугольников.



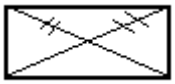
Параллелограмм

Параллелограмм и его отдельные виды обладают рядом свойств.

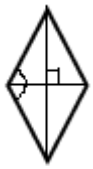


У параллелограмма противоположные стороны равны между собой, равными являются и противоположные углы. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

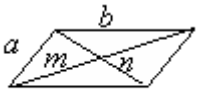
Диагонали прямоугольника равны между собой.



Диагонали ромба перпендикулярны. Они являются биссектрисами углов ромба.



Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба, прямоугольника.



Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равняется сумме квадратов всех его сторон.

$$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Признаки

Четырехугольник, у которого выполняется одно из следующих условий

1) диагонали точкой пересечения делятся пополам;
2) две противоположные стороны равны и параллельны;
3) противоположные стороны попарно равны между собой,
является параллелограммом.

Параллелограмм, у которого диагонали равны, является прямоугольником.

Параллелограмм, у которого выполняется одно из следующих условий

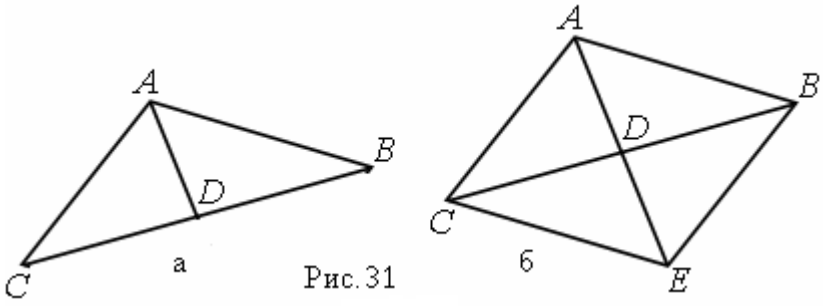
1) диагонали перпендикулярны;

2) диагонали являются биссектрисами углов,

является ромбом.

Пример 1. Дан треугольник *ABC* со сторонами 25, 39, 56 см. Найти медиану *AD*, проведенную к наибольшей стороне (рис. 31 а).

☐ Воспользуемся дополнительным построением: удваиванием медианы. Продолжим медиану *AD* и на ее продолжении отложим отрезок *DE*, равный *AD* (рис. 31 б). Точку *E* соединим с *B* и *C*. В полученном четырехугольнике *ABEC* диагонали *AE* и *BC* точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник *ABEC* — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Воспользовавшись свойством сторон и диагоналей параллелограмма, будем иметь: $AE^2 + BC^2 = 2\left(AC^2 + AB^2\right)$, или $4AD^2 = 2 \cdot 25^2 + 2 \cdot 39^2 - 56^2$, откуда $AD = 17$ (см). ■

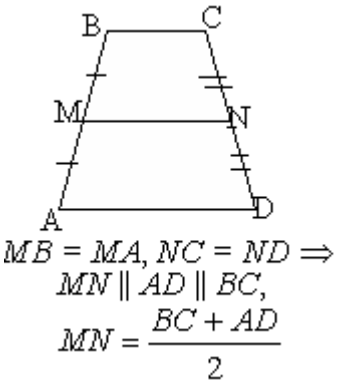


Ответ: 17 см.

Трапеция

В задачах, связанных с трапецией, часто применяется свойство ее средней линии:

Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям, а ее длина равняется полусумме длин оснований.



Пример 2. Доказать, что средняя линия равнобокой трапеции равняется ее высоте тогда и только тогда, когда диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

☐ Для доказательства сформулированного утверждения надо доказать две взаимно обратные теоремы.

1. Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то ее средняя линия равняется высоте (достаточное условие для равенства средней линии и высоты).

2. Если средняя линия равнобокой трапеции равняется ее высоте, то диагонали трапеции взаимно перпендикулярны (необходимое условие для равенства средней линии и высоты).

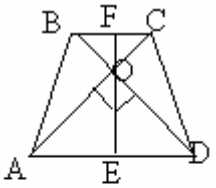


Рис. 32

Докажем первое утверждение. Пусть *ABCD* — равнобокая трапеция, ее диагонали *AC* и *BD* равны (по свойству равнобокой трапеции) и взаимно перпендикулярны (по условию), *FE* — ее высота и ось симметрии, поэтому *AO* = *OD*, *BO* = *OC* (рис. 32). Следовательно, треугольники *BOC* и *AOD* — равнобедренные и прямоугольные, поэтому *BF* = *OF*, *AE* = *OE*. Поскольку $BF = \frac{1}{2}BC,\ AE = \frac{1}{2}AD,$ то $FE = FO + OE = \frac{DC + AD}{2}$, то есть высота равняется средней линии.

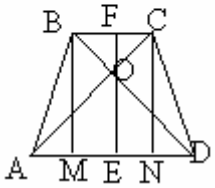


Рис. 33

Пусть теперь высота равнобокой трапеции *ABCD* равняется ее средней линии. Проведем высоты *BM* и *CN* (рис. 33). Нетрудно доказать, что отрезок *AN* равняется средней линии трапеции $\frac{AD + BC}{2}$: $AN = AM + MN = \frac{AD - BC}{2} + BC = \frac{AD + BC}{2}$. По условию, *AN* = *CN*, треугольник *CAN* — равнобедренный и прямоугольный, $\angle OAE = \angle AOE = 45°$. Точно так же можно доказать, что $\angle ODE = \angle DOE = 45°$. Следовательно, $\angle AOD = 90°$, то есть диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. ■

Контрольные вопросы

1. Может ли один из углов выпуклого четырехугольника быть больше суммы трех других его углов?

2. Два неравных отрезка точкой пересечения делятся пополам, их концы последовательно соединены. Какой вид имеет полученный четырехугольник?

3. В параллелограмме *ABCD* биссектрисы углов *B* и *D* пересекают диагональ *AC* в точках *M* и *N*. Каким является четырехугольник *BNDM*?

4. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равняются по 6 дм. Из произвольно взятой точки основания проведены две прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Чему равняется периметр полученного параллелограмма?

5. Может ли диагональ ромба образовывать с одной из его сторон прямой угол?

6. Какой четырехугольник получим, если отрезками соединить последовательно середины сторон равнобокой трапеции?

7. В каком отношении делятся диагонали трапеции точкой их пересечения, если основания трапеции равняются *a* и *b*?

Задачи

44.° Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 2:1, считая от вершины тупого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равняется 60 см.

45.° Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 2:1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равняется 60 см.

46.° Один из углов параллелограмма вдвое больше другого. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону параллелограмма пополам. Найдите меньшую диагональ параллелограмма, если его периметр равняется 24 см.

47. ° Один из углов параллелограмма втрое больше другого. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону на отрезки 2 см и 4 см. Найдите высоту параллелограмма.

48. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC, точка N — середина CD. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

49. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F делят соответственно стороны BC и AB пополам. Точка K является точкой пересечения AE и DF. Найдите отношение $AK : KE$.

50. Найдите отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

51. Постройте треугольник по медиане, проведенной к одной из сторон, и углам, образованным этой медианой с двумя другими сторонами.

52.° Ромб помещён в равносторонний треугольник так, что один угол у них общий, а противоположная ему вершина ромба лежит на противоположной стороне треугольника. Найдите периметр ромба, если периметр треугольника равняется 24 см.

53.° Ромб помещён в равносторонний треугольник так, что один угол у них общий, а три другие вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Периметр ромба равняется 48 см. Найдите отрезки, на которые разделились стороны треугольника вершинами ромба.

54. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n. Найдите диагонали ромба.

55. Внутри квадрата $ABCD$ взято точку K и на отрезке AK построен квадрат $AKLM$, у которого сторона KL пересекает сторону AD. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

56*. $ABCD$ — квадрат, точка M принадлежит стороне CD, AK — биссектриса угла BAM ($K \in BC$). Докажите, что $AM = BK + DM$.

57. Докажите, что в трапеции, диагонали которой служат биссектрисами углов при одном из оснований, три стороны равняются друг другу.

58. Биссектрисы углов при большем основании трапеции перпендикулярны боковым сторонам. Найдите углы трапеции.

59.* Прямая отсекает от равностороннего треугольника трапецию, которая делится диагоналями на 4 равнобедренных треугольника. Найдите угол между диагоналями трапеции.

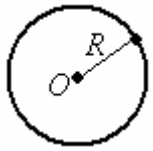
60. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равняется полусумме двух других его сторон, то этот четырехугольник является трапецией.

61. В трапеции *ABCD* сумма углов при основании *AD* равняется 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равняется полуразности оснований.

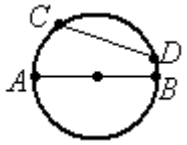
62.* Основания трапеции равняются 100 мм и 166 мм, боковые стороны — 39 мм и 57 мм. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

1.5 Геометрия окружностей

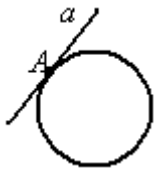
Окружностью с центром *O* и радиусом *R* называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии *R* от данной точки *O*. Эта точка называется ***центром окружности***.



Расстояние *R* от точек окружности до ее центра называется ***радиусом окружности***. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.



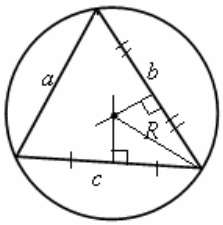
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром***: *CD* — хорда, *AB* — диаметр.



Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется ***касательной к окружности***, а их общая точка называется ***точкой касания*** касательной к окружности: *a* — касательная, *A* — точка касания.

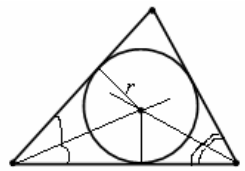
Вписанная и описанная окружности

В планиметрических задачах, связанных с треугольником, часто придется иметь дело с описанными или вписанными окружностями.

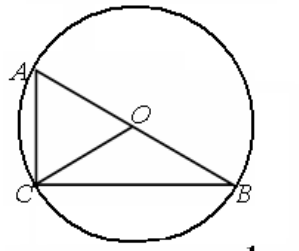


Около любого треугольника можно описать окружность и при этом лишь одну. Центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

В любой треугольник можно вписать окружность и при этом лишь одну. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.



Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы, а его радиус равняется половине гипотенузы.



$R = AO = BO = CO = \frac{1}{2}AB$

Задача 1. Доказать, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равняется сумме длин диаметров описанной и вписанной окружностей.

 Пусть *ABC* — прямоугольный треугольник с прямым углом *C*, *O* — центр, а *EO* = *KO* = *FO* = *r* — радиусы вписанной окружности (рис. 34). Надо доказать, что *AC* + *BC* = *AB* + 2*r*, так как *AB* — диаметр описанной окружности. Поскольку центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника, то *AO* — биссектриса угла *A*, прямоугольные треугольники *AEO* и *AFO* равны по общей гипотенузе *AO* и равным острым углам *EAO* и *FAO*. Поэтому *AE* = *AF*. Точно так же *BK* = *BF*. Четырехугольник *OECK* является квадратом, поскольку *EO* || *CK*, *OK* || *EO*, *OE* ⊥ *EC*, *EO* = *OK*. Поэтому *EC* = *CK* = *r*. Далее имеем: *AC* + *BC* = *AE* + *CE* + *CK* + *KB* = *AF* + *FB* + 2*r* = *AB* + 2*r*. ■

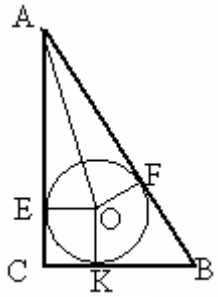


Рис. 34

Пример 1. В окружность с радиусом 10 см вписан равнобедренный треугольник с углом при вершине 120°. Найти стороны этого треугольника.

 В окружность с центром в точке *O* вписан равнобедренный треугольник *ABC* (*AB* = *BC*) с углом при вершине *B*, равным 120° (рис. 35). Треугольник *OAB* является равнобедренным: *OA* = *OB*. Поскольку центр окружности, описанной около треугольника лежит на пересечении серединных перпендикуляров, то *BD* является высотой треугольника и в то же время биссектрисой угла *B*, поэтому ∠*ABO* = ∠*OBC* = 60°. Следовательно, треугольник *OAB* равносторонний, *AB* = *OA* = 10 см, *BC* = *AB* = 10 см. В прямоугольном треугольнике *BDA* имеем:

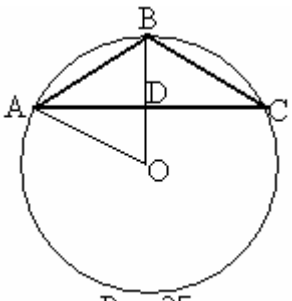


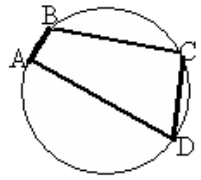
Рис. 35

$AD = AB \cdot \sin 60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ (см), $AC = 2AD = 10\sqrt{3}$ (см). ■

Ответ. 10 см, 10 см, $10\sqrt{3}$ см.

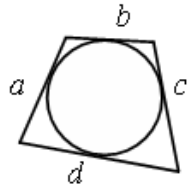
Описанные и вписанные четырехугольники

Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равняется 180°.



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон его равны.



$a + c = b + d$

Пример 2. Найти диагонали и боковые стороны трапеции с основаниями a и b ($a > b$), если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

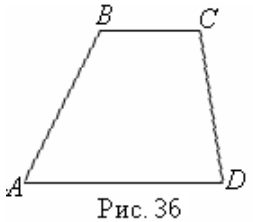


Рис. 36

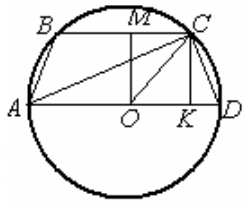


Рис. 37

□ В первую очередь, отметим, что данная трапеция является равнобокой, поскольку в равнобокой трапеции и только в равнобокой сумма противоположных углов равняется 180°. Действительно, для произвольной трапеции $ABCD$ (рис. 36) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$ (по свойству углов при параллельных прямых и секущей). Если трапеция является равнобокой, то $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, поэтому $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$. Обратно, если выполняется последнее равенство, то $\angle A = \angle D$, и трапеция является равнобокой.

Пусть точка O является центром описанной окружности (рис. 37). Диагональ AC и высоту CK найдем из треугольников ACK и KCD. Имеем:

$$AO = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2},\ OK = CM = \frac{1}{2}BC = \frac{b}{2},\ KD = OD - OK = \frac{a-b}{2},\ AK = \frac{AD+BC}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$KC^2 = OC^2 - OK^2 = \frac{a^2-b^2}{4},\ CD = \sqrt{KC^2 + KD^2} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2-ab}{2}},$$

$$AC = \sqrt{KC^2 + AK^2} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+ab}{2}}. \ ■$$

Ответ. $\sqrt{\frac{a^2-ab}{2}},\ \sqrt{\frac{a^2+ab}{2}}.$

Пример 3. Расстояния от центра вписанной в равнобокую трапецию окружности до концов боковой стороны равняются 9 и 12 см. Найти периметр и высоту трапеции.

 На рис. 38 изображена равнобокая трапеция *ABCD*, в которую вписана окружность с центром в точке *O*, который является серединой высоты *EF*, проведенной через середины оснований *BC* и *AD*. По условию, длины отрезков *OB* и *AO* соответственно равняются 9 и 12 см.

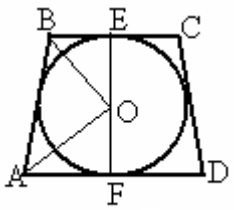


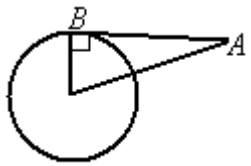
Рис. 38

Периметр трапеции равняется сумме длин всех ее сторон. Поскольку в трапецию можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны: $AD + BC = 2AB$. Отрезки *OB* и *AO* являются биссектрисами углов трапеции, прилегающих к боковой стороне. Поскольку сумма этих углов равняется 180°, то угол между их биссектрисами равняется 90°. Из прямоугольного треугольника *OBA* по теореме Пифагора имеем: $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 15$ (см). Поэтому $AD + BC = 30$ см. Периметр трапеции равняется 60 см. Осталось найти высоту *EF*, которая равняется удвоенному радиусу вписанной окружности. Обозначим отрезок *BE* через *x*, тогда $AF = 15 - x$. Выразим радиус вписанной окружности из прямоугольных треугольников *EOB* и *AOF* и полученные выражения приравняем. Будем иметь: $OE^2 = 81 - x^2, OF^2 = 144 - (15 - x)^2, 81 - x^2 = 144 - (15 - x)^2$. Решая это уравнение, получим: $x = 5{,}4$ (см). Поэтому $OE^2 = 81 - 5{,}4^2 = 51{,}84$, $OE = 7{,}2$ (см), $EF = 2OE = 14{,}4$ (см). ■

Ответ: 60 см; 14,4 см.

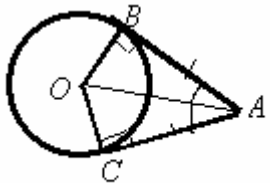
Свойства касательных к окружности

Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.



$OB \perp BA$

Отрезки *AB* и *BC* двух касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.



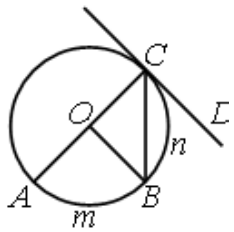
$AB = BC, \angle OAB = \angle OAC$

Измерение углов, связанных с окружностью.

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Угол между касательной и хордой, проведенными через некоторые точки окружности, измеряется половиной дуги, которая содержится между ними.

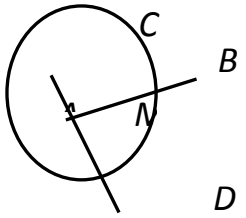


$\angle AOB = \cup AmB$

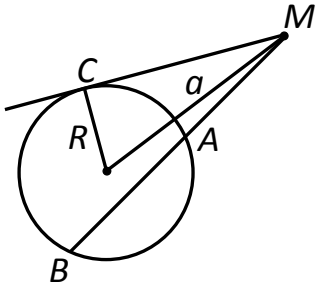
$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB$

$\angle BCD = \frac{1}{2} \cup CnD$

Метрические соотношения в окружности

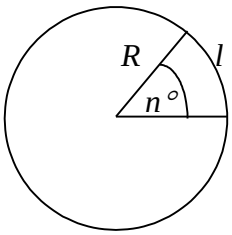


Если хорды *AB* и *CD* пересекаются в точке *M* окружности, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD.$



Если из точки *M*, лежащей вне круга, ограниченного окружностью радиуса *R*, провести к окружности секущую *MAB* и касательную *MC*, то $AM \cdot BM = CM^2 = a^2 - R^2$**.**

Длина окружности и дуги окружности



Длина *C* окружности радиуса *R* вычисляется по формуле

$$C = 2\pi R.$$

Длина *l* дуги окружности радиуса *R* вычисляется по формуле $l = \dfrac{\pi R n}{180}$**,** где n — градусная мера дуги.

Пример 4. Окружность проходит через вершины треугольника *ABC* и касается высоты, проведенной к стороне *BC*. Доказать, что разность углов *B* и *C* по модулю равна 90°.

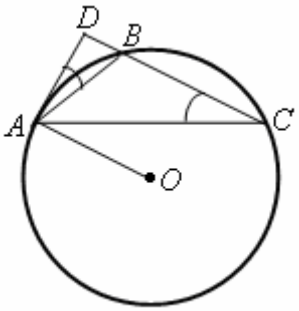


Рис.39

На рис. 39 изображена окружность с центром в точке *O*, описанная около тупоугольного треугольника *ABC* (угол *B* является тупым) и касающаяся высоты *AD*. Радиус *OA*, проведенный в точку касания, перпендикулярен *AD*, поэтому *AO* ∥ *BC*. Угол *DAB*, образованный касательной *AD* и хордой *AB*, измеряется половиной дуги *AB*. Такую же меру имеет угол *BCA*, вписанный в окружность, следовательно, $\angle DAB = \angle BCA$. Поскольку треугольник *DBA* является прямоугольным, то $\angle DBA + \angle DAB = 90°$. Но $\angle DBA = 180° - \angle B$, $\angle DAB = \angle C$, поэтому предыдущее равенство принимает вид: $180° - \angle B + \angle C = 90°$, откуда $\angle B - \angle C = 90°$. Аналогично задача решается, если тупым является угол *C*. ■

Пример 5. Через точку *B*, взятую на окружности с центром в точке *O*, проведена хорда *AB* (дуга *AB* меньше 90°) и касательная к окружности. Продолжение диаметра, перпендикулярного радиусу *OA*, пересекает касательную и продолжение хорды соответственно в точках *C* и *D*. Доказать, что отрезки *BC* и *CD* равны.

 На рис. 40 изображена окружность с центром в точке *O*, *BA* — хорда, *BC* — касательная, диаметр *KL* перпендикулярен радиусу *OA*, его продолжение пересекает касательную в точке *C*, а продолжение хорды *AB* — в точке *D*. Надо доказать, что отрезки *BC* и *CD* равны. Для этого попробуем доказать, что треугольник *BCD* является равнобедренным, то есть, что его углы *CDB* и *DBC* равны.

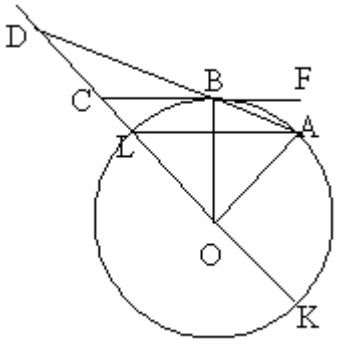


Рис.40

Обозначим угол *BOA* через α. Углы *DBC* и *FBA* равны как вертикальные. Угол *FBA* образован касательной и хордой, проведенными из одной точки. Поэтому его градусная мера равняется половине градусной меры дуги *AB* или половине градусной меры угла *BOA*, который является центральным и измеряется дугой *BA*, на которую опирается: $\angle DBC = \frac{\alpha}{2}$.

Докажем, что градусная мера угла *BDC*, образованного двумя секущими *DA* и *DK*, проведенными из одной точки *D*, лежащей вне круга, ограниченного окружностью радиуса *R*, равняется полуразности градусных мер дуг *LB* и *AK*, содержащихся между секущими. Для этого соединим точки *L* и *A*. Угол *ALK*, как внешний к треугольнику *ALD*, равняется сумме двух внутренних углов *LAD* и *ADL*, не смежных с ним: Угол *ALD* является смежным для угла *ALK*, градусная мера которого равняется половине градусной меры дуги *AK* (угол *ALK* является вписанным в окружность). Градусная мера угла *LAD*, вписанного в окружность, равняется половине градусной меры дуги *BL*, на которую он опирается.

Следовательно, $\angle ADL = \frac{AK - BL}{2} = \frac{90° - (90° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $\angle CDB = \angle DBC$, $BC = CD$. ■

Контрольные вопросы

1. Сколько окружностей можно провести через две данные точки?

2. Могут ли три параллельные хорды окружности быть равными?

3. Как расположена относительно окружности точка, из которой диаметр круга виден под тупым углом?

4. Из точки данной окружности проведены две хорды, каждая из которых равняется радиусу. Чему равняется угол между ними?

5. Как расположены окружности, если их диаметры равняются 10 и 6 см, а расстояние между их центрами равняется 8 см?

6. Наибольшее и наименьшее расстояния от точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равняются 10 см и 4 см соответственно. Чему равняется радиус окружности?

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Угол AOC равняется 110°. Чему равняется угол ABC?

8. Каково геометрическое место точек, из которых данная окружность с центром O и радиуса R видна под прямым углом?

9. Сколько можно провести через данную точку круга хорд, которые данной хордой делятся пополам?

Задачи

63. Две окружности радиусов 13 и 15 см пересекаются. Расстояние между их центрами равняется 14 см. Найдите:

1) длины отрезков, на которые общая хорда этих окружностей делит линию центров;
2) длину их общей касательной.

64. ° Две окружности радиусов 2 см и 6 см касаются внешне; AB и A_1B_1 — общие внешние касательные к этим окружностям, A и A_1 — их точки касания с первой окружностью, B и B_1 — их точки касания со второй окружностью; точка O — точка пересечения касательных. Найдите $\angle AOA_1$.

65. ° Окружность S_2 касается двух взаимно перпендикулярных прямых, которые пересекаются в центре окружности S_1 радиуса R, и самой окружности S_1. Найдите радиус окружности S_2.

66. Докажите, что в равностороннем треугольнике концы любой стороны и середины двух других сторон лежат на одной окружности.

67. Около окружности описана трапеция, средняя линия которой равняется 4 см, острые углы при основании — 30°. Найдите радиус окружности.
68. Около окружности описана равнобокая трапеция, основания которой равняются 8 мм и 4 мм, один угол — 150°. Найдите радиус окружности.

69. Около окружности диаметра 15 см описана равнобокая трапеция с боковой стороной 17 см. Найдите основания трапеции.

70. В четырехугольник с тремя равными сторонами можно вписать окружность. Докажите, что этот четырехугольник является ромбом.

71. Около четырехугольника с тремя равными сторонами можно описать окружность. Докажите, что этот четырехугольник является или трапецией, или квадратом.

1.6 Площади фигур

Напомним основные формулы, связанные с вычислением площадей фигур.

Площадь прямоугольника

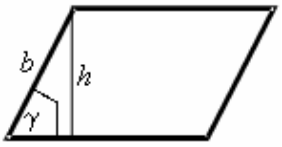
Площадь прямоугольника равняется произведению двух его смежных сторон.

$S = ab$

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равняется произведению основания на высоту.

Площадь параллелограмма равняется произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.



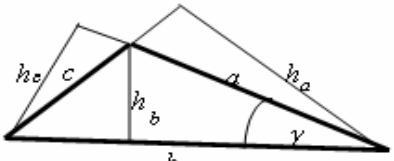
$S = ah$

$S = ab\sin\gamma$

Площадь треугольника

Площадь треугольника равняется половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Площадь треугольника равняется половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

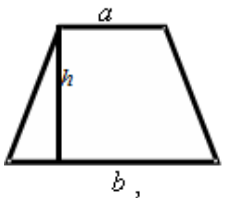
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Формула Герона

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр треугольника, a, b, c — стороны треугольника.

Площадь трапеции

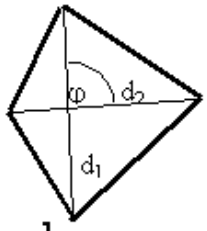
Площадь трапеции равняется произведению полусуммы ее оснований (или ее средней линии) на высоту.



$S = \frac{a+b}{2}h$

Площадь выпуклого четырехугольника

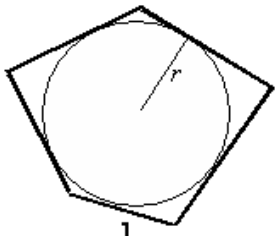
Площадь выпуклого четырехугольника равняется полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними.



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Площадь описанного многоугольника

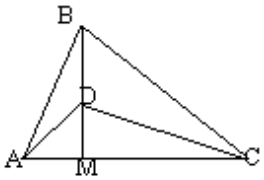
Площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса *r*, равняется половине произведения радиуса окружности на периметр *P* многоугольника.



$$S = \frac{1}{2} Pr$$

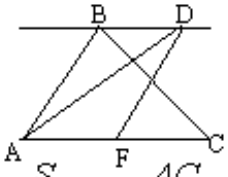
Отношение площадей

Если треугольники имеют равные стороны, то отношение их площадей равняется отношению высот, проведенных к этим сторонам.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{BM}{DM}$$

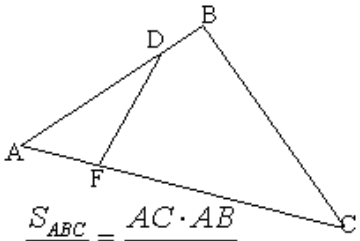
Если треугольники имеют равные высоты, то отношение их площадей равняется отношению сторон, к которым проведены эти высоты.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADF}} = \frac{AC}{AF}$$

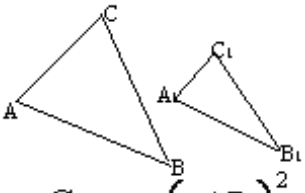
Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, содержащих этот угол.

Отношение площадей подобных треугольников равняется квадрату коэффициента подобия.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADF}} = \frac{AC \cdot AB}{AF \cdot AD}$$

Площади подобных фигур относятся как квадраты соответствующих линейных размеров.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2$$

Площади круга и сектора

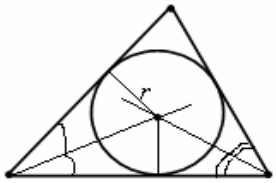
Круг с центром O и радиусом R состоит из всех точек плоскости, расстояние от которых до точки O не превышает R. Речь идет о части плоскости, ограниченной окружностью с центром O и радиусом R.

Площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.

Площадь s сектора вычисляется по формуле $s = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$, где n —

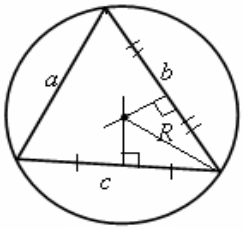
градусная мера центрального угла сектора.

Формулы радиусов окружностей, вписанной в треугольник и описанной около него



$r = \dfrac{S}{p}$

p — полупериметр треугольника



$R = \dfrac{abc}{4S}$

S – площадь треугольника

Пример 1. В трапеции $ABCD$ основаниями являются стороны BC и AD, $AD = 10$ см, $BC = 5$ см, $AC = 9$ см, $BD = 12$ см. Найти площадь трапеции.

□ Площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot EF$, где EF — высота трапеции. Таким образом, нужно найти только высоту EF.

Треугольники BOC и AOD, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, подобны по первому признаку подобия треугольников. Коэффициент подобия равняется $\dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, точка O делит диагонали трапеции в отношении 1:2, считая от вершин B и C (рис. 41). Поэтому

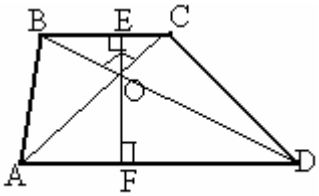


Рис. 41

$BO = 4$ см, $CO = 3$ см, $AO = 6$ см, $OD = 8$ см. Применяя теорему, обратную теореме Пифагора, придем к заключению, что треугольники BOC и AOD является прямоугольными: их стороны соответственно равняются 3, 4, 5 см и 6, 8, 10 см. Высоты этих треугольников EO и OF найдем, вычисляя площади треугольников двумя способами: $S_{BOC} = \dfrac{1}{2} BO \cdot OC = \dfrac{1}{2} BC \cdot OE$. Отсюда $OE = \dfrac{BO \cdot OC}{BC} = 2{,}4$ (см). Аналогично $OF = 4{,}8$ см, следовательно, $EF = 7{,}2$ см. Тогда $S = \dfrac{10+5}{2} \cdot 7{,}2 = 54$ (см^2). ■

Ответ. 54 см^2.

Пример 2. Каждая из боковых сторон и меньшее основание трапеции равняются 5 см, а один из ее углов равняется 60°. Найти радиус окружности, описанной около нее.

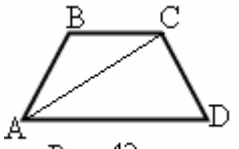


Рис.42

□ Окружность, описанная около трапеции *ABCD* (рис. 42), проходит через точки *A, B, C* и поэтому она совпадает с окружностью, описанной около треугольника *ABC*. Поэтому можно воспользоваться формулой радиуса окружности, описанной около треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$, где *a, b, c* — стороны треугольника, *S* — его площадь. Две стороны треугольника *ABC* известны: $AB = BC = 5$ см. Сторону *AC* найдем по теореме косинусов, воспользовавшись тем, что $\angle ABC = 120°$: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-0{,}5) = 75$, $AC = 5\sqrt{3}$ (см). Площадь треугольника *ABC* вычислим по двум сторонам и углу между ними: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120° = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. Следовательно, $R = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4}} = 5$ (см). ■

Ответ: 5 см.

Пример 3. Треугольник разделен двумя прямыми, параллельными одной стороне, на три равновеликие части. В каком отношении, считая от вершины, противоположной этой стороне, разделились две его другие стороны?

□ На рис. 43 изображен треугольник *ABC*, который прямыми *DF* и *MN*, параллельными стороне *AC*, разделен на три равновеликие части. Пусть площадь каждой части равняется *S*, $BD = x$, $DM = y$, $MA = z$. Поскольку треугольники *BDF* и *BMN* подобны (по двум углам), то отношение их площадей *S* и 2*S* равняется квадрату коэффициента подобия, то есть

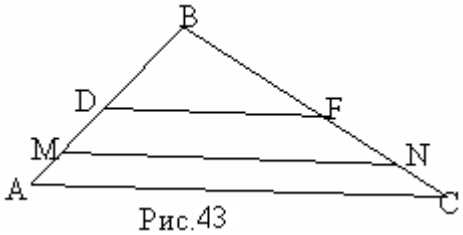


Рис.43

$\frac{S}{2S} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$ или $y^2 + 2xy - x^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение относительно *y*, получим: $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x$. Аналогично из подобия треугольников *BDF* и *BAC*, площади которых равняются *S* и 3*S*, будем иметь: $\frac{S}{3S} = \frac{x^2}{(x+y+z)^2}$, или $\frac{1}{3} = \frac{x^2}{(x + (\sqrt{2} - 1)x + z)^2}$, или $z^2 + 2\sqrt{2}xz - x^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение относительно z, получим: $z = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x$. Таким образом, $x : y : z = 1 : \left(\sqrt{2} - 1\right) : \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$. ■

Ответ. $1 : \left(\sqrt{2} - 1\right) : \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Как относятся площади треугольника и четырехугольника, на которые разделяется данный треугольник своей средней линией?

2. Как относятся площади двух треугольников, на которые делится прямоугольный треугольник высотой, проведенной к гипотенузе?

3. Верно ли, что в прямоугольном треугольнике произведение катетов равняется произведению гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе?

4. Во сколько раз площадь параллелограмма больше площади четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон параллелограмма?

5. Равны ли фигуры, имеющие равные площади?

6. В прямоугольной трапеции основания равняются 10 и 6 см, а большая боковая сторона равняется 5 см. Чему равняется площадь трапеции?

7. Во сколько раз площадь круга радиуса 6 см больше площади круга радиуса 2 см?

8. Дан треугольник ABC, площадь которого S, O — точка пересечения медиан CK и BF. Чему равняется площадь треугольника BOC?

9. Одна из сторон треугольника вдвое больше медианы к ней, а угол между медианой и другой стороной равняется 45°. Чему равняется площадь треугольника?

Задачи

72°. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.

73°. Середины оснований трапеции соединены отрезком прямой. Докажите, что полученные таким образом трапеции равновелики.

74°. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая ее основания, разделяет эту трапецию на две равновеликие части.

75. Докажите, что если точку пересечения медиан треугольника соединить со всеми вершинами, то треугольник разделится на три равновеликие части.

76*. В треугольнике ABC через точку O пересечения его медиан проведены, как это показано на рис. 44, отрезки, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что полученные три трапеции равновелики.

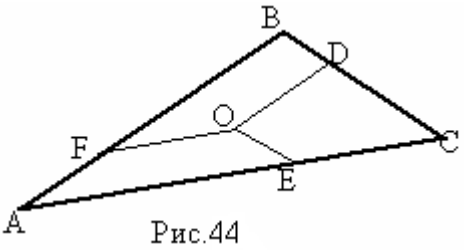


Рис.44

77. Одна сторона треугольника равняется 10 см, медианы двух других сторон равняются 9 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

78. Высоты треугольника равняются 12 см, 15 см и 20 см. Найдите площадь этого треугольника.

79. Медианы треугольника равняются 9 см, 12 см и 15 см. Найдите его площадь.

80. Через середину диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках P и K соответственно.

1) Докажите, что четырехугольник $APCK$ — параллелограмм.
2) Найдите площадь четырехугольника $APCK$, если $AC = 13$ см, $KD = 8$ см, $AK = 4$ см.

81. Диагональ равнобокой трапеции длиной a образует с основанием угол 75°. Найдите площадь трапеции.

82. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равняются соответственно 18 см и 4 см, а боковые стороны AB и CD — 15 см и 13 см. Найдите длины диагоналей AC и BD.

83. Основания трапеции равняются 112 мм и 64 мм, боковые стороны — 68 мм и 100 мм Найдите стороны четырехугольника, вершинами которого являются середины последовательных сторон трапеции.

84. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $BO = OC = a$, $AO = OD = b$.

1) Докажите, что углы ABD и ACD равны.
2) Найдите отношение площадей треугольников ABD и CBD.
3) Докажите, что точка O — середина отрезка MH, если OM и OH — биссектрисы треугольников AOC и BOD соответственно.
4) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AOD, и радиус окружности, описанной около треугольника BOC, если угол AOC равняется α.

85. В полукруг, радиус которого равняется 1 см, вписана трапеция так, что одним из ее оснований является диаметр полукруга. Найдите площадь трапеции, если периметр ее равняется 5 см.

86. Площадь правильного n-угольника равняется S. Найдите площадь кольца, образованного окружностями, вписанной в этот n-угольник и описанной около него, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 6$.

87. Из одной точки окружности радиуса R проведены две хорды. Найдите площадь части круга, содержащейся между этими хордами, если:

1) хорды взаимно перпендикулярны;
2) длина каждой хорды равняется $R\sqrt{3}$.

1.7 Методы решения планиметрических задач

При решении геометрических задач обычно используются такие методы:

геометрический — когда необходимое утверждение достигается с помощью логических рассуждений из ранее доказанных теорем;

алгебраический — когда искомая геометрическая величина вычисляется на основе различных алгебраических зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;

комбинированный — когда на одних этапах решение задачи проводится геометрическим методом, а на других — алгебраическим;

координатный — когда задача переводится на координатный язык, преобразуется полученное аналитическое выражение, результат переводится на язык, в терминах которого сформулирована первоначальная задача;

векторный — когда строятся векторы на соответствующих геометрических объектах, они связываются алгебраическими соотношениями, эти соотношения преобразуются по законам векторной алгебры, полученные векторные результаты интерпретируются с помощью геометрических свойств рассмотренных объектов. Рассмотрим эти методы на примерах.

Например, существуют такие пути геометрического доказательства равенства двух отрезков :

1) рассматривают эти отрезки как стороны двух треугольников и доказывают, что эти треугольники равны;
2) рассматривают эти отрезки как стороны одного треугольника и доказывают, что этот треугольник равнобедренный;
3) заменяют отрезок a равным ему отрезком a', отрезок b равным ему отрезком b' и доказывают, что $a' = b'$, воспользовавшись конструкцией, содержащей эти отрезки.

К геометрическим методам относится использование дополнительных построений. К дополнительным построениям относятся продолжение отрезка на определенную длину, в частности удваивание медианы, чтобы достроить треугольник до параллелограмма; проведение прямой, параллельной или перпендикулярной какой-то прямой, проведение вспомогательной биссектрисы, окружности и др.

Если в задаче фигурирует середина одной или нескольких сторон четырехугольника, то целесообразно соединить их с серединами каких-то других сторон или диагоналей и использовать свойства средних линий соответствующих треугольников.

Если в задаче идет речь об окружностях, которые касаются друг друга, то в таких случаях целесообразно проводить линию центров, то есть прямую, которая проходит через центры этих окружностей, причем, следует иметь в виду, что точка касания окружностей лежит на линии центров. При наличии вписанной окружности стоит провести радиусы в точки касания.

Достаточно часто для решения планиметрической задачи полезно провести вспомогательную окружность, которая дает возможность найти определенные соотношения между элементами геометрических фигур, особенно между углами. Фактически речь идет о доказательстве того, что, по крайней мере, какие-то четыре точки лежат на одной окружности.

При решении примера 9 в п. 1.2 дополнительно проведена высота треугольника; при решении примера 18 в п. 1.5 — проведены радиусы вписанной окружности в точки касания; в примере 19 п. 1.4 медиана удвоена, треугольник достроен до параллелограмма. Вспомогательные построения выполнены и при решении других примеров.

К алгебраическим методам относится, например, такой: один и тот же элемент выражается через известные и неизвестные величины двумя разными способами и полученные выражения приравниваются. Из полученного уравнения находится неизвестная величина.

Пример 1. Длины сторон треугольника равняются a, b, c. Найдите длины отрезков, на которые точки касания вписанной в треугольник окружности делят его стороны.

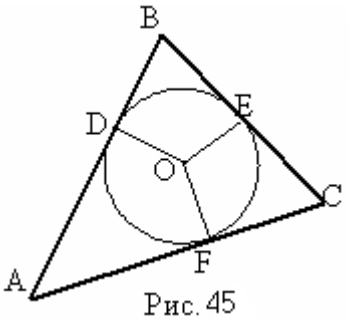


Рис. 45

□ Дан треугольник ABC, в который вписана окружность (рис. 45). По условию $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Согласно приведенным ранее рекомендациями соединим центр окружности O с точками касания D, E, F. Сразу не видно, как выразить искомые отрезки через a, b, c. Попробуем обозначить один из них, например, CF через x. Поскольку по свойству касательных к окружности отрезки двух касательных, проведенных к окружности из одной точки, от этой точки до точки касания равны, то $EC = CF = x$. Тогда $AF = AD = b - x$, $BE = BD = a - x$. Поскольку $BD + DA = c$, то имеем уравнение: $(a - x) + (b - x) = c$, откуда $x = \frac{a+b-c}{2}$. Следовательно, $EC = CF = \frac{a+b-c}{2}$, $AF = AD = b - \frac{a+b-c}{2} = \frac{b+c-a}{2}$, $BE = BD = \frac{a+c-b}{2}$. ■

Задача решена комбинированным методом: использованы ранее доказанные теоремы, дополнительные построения и составлено уравнение первой степени.

Если в задаче нужно найти отношение каких-то величин, целесообразно ввести в рассмотрение некоторую линейную величину, считая ее известной, и выразить через нее те величины, отношение которых нужно найти. Точно так же линейные величины вводятся, если, например, и среди данных, и среди искомых величин фигурируют лишь площади некоторых фигур, или нужно найти некоторый угол.

Линейные величины введены при решении примеров 4, 9, 12 п. 1.2.

При решении некоторых планиметрических задач применимы тождества и неравенства, известные из курса алгебры, например, неравенство, которое связы-

вает среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел, тригонометрические функции углов треугольника. Нахождение наибольшего и наименьшего значений квадратного трехчлена иногда помогает решать геометрические задачи, где необходимо найти наибольшее или наименьшее значение геометрических величин.

Приведем некоторые общие положения, на которые мы опирались, решая геометрические задачи. Этими положениями целесообразно руководствоваться при дальнейшем решении геометрических задач.

1. ***Решение геометрической задачи следует, как правило, начинать с рисунка: правильного, четкого, достаточно большого, удобного для дополнительных построений.***

Рисунок должен быть "лаконичным", то есть целесообразно изображать только те элементы, которые функционируют при решении задачи. Например, если в задаче идет речь о радиусе окружности или о его точках, то не всегда следует изображать саму окружность. Рисунок должен быть правильным, то есть прямые углы нужно изображать прямыми, равнобочную трапецию — равнобочной и т. д. Такой рисунок может помочь решить задачу. Но, с другой стороны, фигуру общего вида не следует изображать так, чтобы ее можно было принять за частный случай: произвольный треугольник не следует изображать прямоугольным или равнобедренным, произвольный четырехугольник — параллелограммом или трапецией. Иногда полезно (как вспомогательное построение) сделать "выносной" рисунок, то есть отдельно рассмотреть фрагменты довольно сложного рисунка.

2. ***На основании условия задачи целесообразно выявить характерные черты и особенности заданной конфигурации.***

3. ***Четко осознать, какие утверждения могут быть использованы в решении.***

При решении задачи необходимо постоянно обращаться к "банку утверждений", который содержит основные теоремы школьного курса планиметрии, а также ряд утверждений, которые формулируются в некоторых базовых задачах. Следует осознать характерные признаки тех понятий, которые использованы в задаче.

4. ***Проанализировать целесообразность проведения дополнительных геометрических построений.***

5. ***Составить план решения задачи.***

Существуют разные стратегии поиска планов решения задачи. Иногда он направлен от данных к искомой величине. То есть величины, заданные в условии задачи, и те, которые нужно найти, связывают цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие. В иных случаях путь решения прослеживается от конца к началу. И, наконец, в более сложных задачах поиск пути решения можно вести в двух направлениях — с начала (что можно найти?) и с конца (что нужно найти?).

6. ***Проанализировать, какие методы могут быть применены для реализации плана.***

Иногда целесообразно попробовать воспользоваться ***методом опорного элемента,*** сущность которого состоит в том, что один и тот же элемент (отре-

зок, угол, площадь и т. п.) выражаются через известные и неизвестные величины двумя разными способами и полученные выражения приравниваются.

Если в задаче нужно найти отношение каких-то величин, или углы (они иногда находятся с помощью тригонометрических величин острого угла, то есть отношений сторон прямоугольного треугольника), то, как правило, задача решается ***методом вспомогательного параметра***. Это значит, что вводится обозначение для какого-то линейного элемента (стороны, высоты, радиуса и т. п.), потом через нее выражаем те величины, отношение которых нужно найти. При этом вспомогательный параметр сокращается. Метод вспомогательного параметра применяется также в задачах на подобие фигур.

7. *Реализовать план решения задачи.*

8. *Провести исследование, анализ решения.*

Закончив решение задачи, стоит подумать о том, не пропущены ли какие-то частные случаи, возможные положения конфигурации и т. п.

9. *По завершению решения задачи необходимо сделать проверку.*

Проверка, кроме проверки правильности проведения рассуждений, вычислений, применения геометрических утверждений, может опираться на нахождения размерности окончательного результата, другие способы ее решения.

10. *Решив задачу, целесообразно попробовать решить ее другим способом.*

Следует сравнить разные способы решения, выбрать оптимальный.

Проиллюстрируем сформулированные рекомендации на примере решения следующей задачи.

Пример 2.

Доказать, что если *ABCD* — трапеция с основаниями *AB* и *DC*, *O* — точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*, то площади треугольников *AOD* и *BOC* равняются друг другу.

 1) Сделаем рисунок к приведенной задаче, схематически запишем ее условие. Дано: *ABCD* — трапеция, $AB \| CD$, *O* — точка пересечения ее диагоналей (рис. 46). Надо доказать: $S_{AOD} = S_{BOC}$.

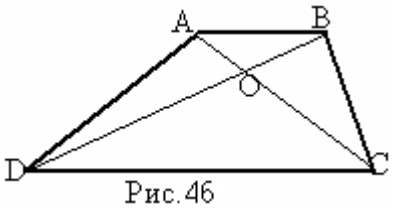


Рис.46

2) Осознаем, какие утверждения необходимые для решения задачи.

Естественным является поиск общих элементов треугольников *AOD* и *BOC*. Они имеют равные углы *AOD* и *BOC*. Углы входят в следующую формулу площади треугольника : $S_{ABC} = 0{,}5 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$. Если применить эту формулу к площадям треугольников, о которых идет речь в задаче, то данная задача сведется к доказательству равенства: $AO \cdot DO = BO \cdot CO$. Подобные равенства появляются при рассмотрении пропорций типа: $AO:CO = BO:DO$. Пропорциональность сторон вытекает из подобия треугольников. Следовательно, надо доказать подобие треугольников *AOB* и *COD*.

3) Составим план решения задачи.

Можно предложить такой алгоритм решения этой задачи:

а) сделать рисунок, записать условие и утверждение, которое надо доказать.

б) сделать попытку выделить общие или равные элементы треугольников.

в) выбрать из известных формул площади треугольника те, в которые входят равные или общие элементы.

г) получить равенство, к доказательству которого сводится решение задачи.

д) доказать это равенство.

4) Реализуем план решения задачи. Треугольники *AOD* и *COB* имеют равные углы *AOD* и *COB* (они вертикальные), поэтому обращаемся к такой формуле площади треугольника:

$S_{AOD} = 0{,}5 \cdot AO \cdot DO \cdot \sin\alpha,\quad S_{BOC} = 0{,}5 \cdot BO \cdot CO \cdot \sin\alpha,$ где $\alpha = \angle AOD$.

Необходимо доказать, что выполняется равенство

$0{,}5 \cdot AO \cdot DO \cdot \sin\alpha = 0{,}5 \cdot BO \cdot CO \cdot \sin\alpha,$ или $AO \cdot DO = BO \cdot CO$.

Доказать это равенство можно, воспользовавшись подобием треугольников *AOB* и *COD*. Они подобны по первому признаку. Из подобия этих треугольников вытекает, что $\frac{BO}{DO} = \frac{AO}{CO}$. Отсюда $AO \cdot DO = BO \cdot CO$, что и требовалось доказать.

5) Проверка решения задачи.

В данном случае проверка сводится к тому, чтобы убедиться в том, что все рассуждения обоснованы, что не допущено ошибок ни в записи формулы для вычисления площади треугольника, ни в записи пропорциональности сторон подобных треугольников, ни на других этапах решения задачи.

6) Поиск различных способов решения задачи.

Еще один способ получим, если каждый из треугольников *AOD* и *COB* дополним треугольником *AOB*. Получим два новых треугольника *ABD* и *ABC*. У этих треугольников *AB* — общая сторона, а высоты, проведенные к ней, равны, поэтому $S_{ABC} = S_{ABD}$. Теперь к треугольникам *ABD* и *ABC* применим свойство: $S_{AOB} + S_{BOC} = S_{AOB} + S_{AOD}$ или $S_{BOC} = S_{AOD}$. ■

Первый способ решения задачи можно отнести к алгебраическим, второй — к геометрическим.

Можно выделить такие основные этапы решения задач ***координатным*** методом:

1) перевод задачи на координатный (аналитический) язык;
2) преобразование аналитического выражения;
3) обратный перевод, то есть перевод ответа с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Главное при решении геометрических задач координатным методом — удачный выбор системы координат, то есть выбор начала координат и направления осей. Обычно за оси координат принимают прямые, о которых идет речь в условии. При применении координатного метода понадобятся следующие утверждения.

Расстояние *d* между точками *A*(x_1; y_1) и *B*(x_2; y_2) вычисляется по формуле: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты (*x; y*) середины отрезка с концами *A*(x_1; y_1) и *B*(x_2; y_2) находят из соотношений $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Пример 3. В треугольнике *ABC* известны его стороны: *AB* = *c*, *AC* = *b*, *BC* = *a*. Найти длину медианы *BD*.

□ Выберем систему координат так, чтобы точка *A* была началом координат, а луч *AC* определял направление оси *x* (рис. 47). Точки *A*, *D*, *C* имеют координаты: *A*(0; 0), $D\left(\dfrac{b}{2};0\right)$, *C*(*b*; 0). Обозначим координаты точки *B* через (*x*; *y*). Теперь задание можно сформулировать так: найдите расстояние между точками *B* и *D*. По формуле расстояния между двумя точками имеем: $c^2 = x^2 + y^2$, $a^2 = (x-b)^2 + y^2 = x^2 - 2bx + b^2 + y^2$, или $a^2 = c^2 - 2bx + b^2$. Из последнего равенства можно найти *x*: $x = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}$. Опять применив формулу расстояния между двумя точками, будем иметь: $BD^2 = \left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - xb + \dfrac{b^2}{4} = c^2 - xb + \dfrac{b^2}{4}$, или после подстановки найденного значения *x*: $BD^2 = c^2 - \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2} + \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$, $BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$. ■

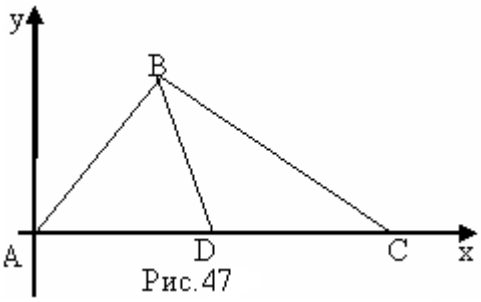


Рис.47

Метод координат целесообразно применять при нахождении геометрических мест точек.

Пример 4. На плоскости даны две точки *A* и *B*. Найти геометрическое место точек *M* плоскости, удаленных от *A* вдвое дальше, чем от *B*.

□ Выберем систему координат так, чтобы точка *A* была началом координат, отрезок *AB* был масштабной единицей, ось *x* была направлена вдоль луча

AB (рис. 48). В этой системе координат точки A, B имеют координаты: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$. Обозначим координаты точки M через $(x;\ y)$. По формуле расстояния между двумя точками имеем: $AM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $BM = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Условие $AM = 2BM$ запишется в координатах так: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Мы получили уравнение искомого геометрического места точек. Чтобы понять, какая фигура описывается этим уравнением, преобразуем его так, чтобы оно приобрело знакомый вид. Возведя обе его части в квадрат, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим равенство $3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0$. Это уравнение можно переписать так: $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

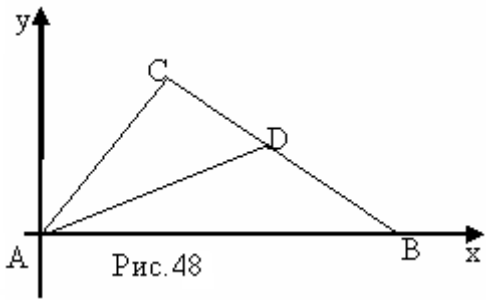


Рис.48

Это уравнение окружности с центром в точке с координатами $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ и с радиусом, равным $\frac{2}{3}$. Следовательно, если расстояние от точки M до точки А вдвое больше расстояния от точки M до точки A вдвое больше расстояния от точки M до точки B, то точка M лежит на указанной окружности.

Чтобы доказать, что все точки окружности принадлежат искомому геометрическому месту точек, достаточно доказать обратное утверждение, то есть, если $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что из каждого следующего вышеприведенного равенства вытекает предыдущее. ■

Применение векторов при решении геометрических задач проиллюстрируем несколькими примерами. Речь идётопять о задачах, где сами векторы в условии задачи, в геометрических конструкциях, как правило, не присутствуют. Для их решения необходимо построить векторы на соответствующих геометрических объектах, связать их алгебраическими соотношениями, перевести геометрические свойства на язык векторов, преобразовать эти соотношения по законам векторной алгебры, интерпретировать полученные векторные результаты с помощью геометрических свойств рассмотренных объектов.

Элементы векторной алгебры, которые понадобятся при решении задач, представлены в следующей таблице.

Таблица 1

N	Величина, свойство	Формула
1	Длина $\lvert\vec{a}\rvert$ вектора $\vec{a}=(x;y)$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ **(1)**
2	Длина $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;y_2)$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ **(2)**
3	Угол φ между векторами $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$	$\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ **(3)**
4	Векторы $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$ перпендикулярны	$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2=0$ **(4)**
5	Векторы $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$ коллинеарны	$x_1=\lambda x_2$, $y_1=\lambda y_2$, или $x_2=\lambda x_1$, $y_2=\lambda y_1$. **(5)**

Пример 5. В равнобедренном треугольнике *ABC* основание *BC* равняется 8 см, а высота *AD* равняется 6 см. Найти: 1) длину медианы *BF*; 2) угол между прямыми *BF* и *AC*; 3) угол между медианами *BF* и *CE*.

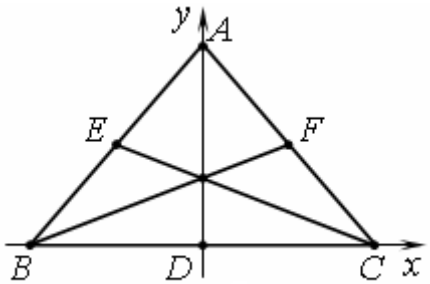


Рис. 49

□ Введем систему координат с началом *D*, осями координат направленными вдоль лучей *DC* и *DA*, с масштабной единицей 1 см (рис. 49). Тогда вершины треугольника и основания медиан имеют координаты: *A*(0; 6), *B*(–4; 0), *C*(4; 0), *F*(2; 3), *E*(–2; 3).

1) Поскольку, $\overrightarrow{BF}=(2-(-4);3-0)=(6;3)$, то $BF=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ (см).

2) Угол φ между векторами $\overrightarrow{BF}$ и $\overrightarrow{AC}=(4-0;0-6)=(4;-6)$ определяется из соотношения: $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{BF}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}=\dfrac{6\cdot4+3\cdot(-6)}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{4^2+(-6)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{52}}=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$.

Отсюда φ ≈ 83°. Этот угол совпадает с углом между прямыми *BF* и *AC*.

3) Вычислим косинус угла между векторами $\overrightarrow{BF}$ і $\overrightarrow{CE}=(-2-4;3-0)=(-6;3)$: $\cos\varphi=\dfrac{6\cdot(-6)+3\cdot3}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{45}}=\dfrac{-3}{5}$. Поскольку косинус отрицателен, то угол между векторами — тупой и дополняет угол между прямыми *BD* и *CE* до 180°, то есть косинус угла между прямыми равняется $\left|\dfrac{-3}{5}\right|=\dfrac{3}{5}$, а сам угол приблизительно равняется 53°. ■

Ответ. 1) $3\sqrt{5}$ см; 2) ≈83°; 3) ≈53°.

Пример 6. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равняется их полусумме.

□ Пусть $ABCD$ — трапеция, MN — ее средняя линия (рис. 50). Представим вектор $\overrightarrow{MN}$ в виде суммы других векторов двумя способами:

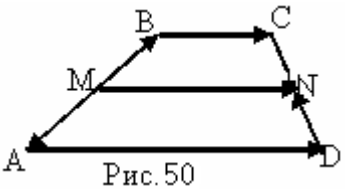


Рис.50

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$. Сложим почленно эти равенства: $2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\right)$. Поскольку суммы противоположных векторов $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}$ равняются нулевому вектору, то из предыдущего равенства вытекает: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$. Это равенство означает, что вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен сумме векторов $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, а следовательно, и каждому из них, то есть средняя линия трапеции параллельна основаниям, а её длина равняется полусумме длин векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$. ■

Контрольные вопросы

1. Рассмотрим задачу.

В треугольнике ABC стороны AB и BC равны между собой, BH — высота. На стороне BC зафиксировали точку D так, что $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{1}{4}$ *. В каком отношении отрезок AD делит высоту BH?*

Какие вспомогательные построения целесообразно выполнить для решения задачи?

2. Рассмотрим задачу.

Известно, что в треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C, сторона BC на 2 см больше стороны AB, и AC = 5 см. Найти AB и BC.

Какие вспомогательные построения целесообразно выполнить для решения задачи?

3. Как найти высоты треугольника, если известны три его стороны?

4. Как найти углы треугольника, если известны три его стороны?

5. Как найти радиус описанной около треугольника окружности, если известны сторона треугольника и противоположный ей угол?

6. Как доказать, что некоторый треугольник является равнобедренным?

7. Какие вспомогательные построения целесообразно выполнить, чтобы по сторонам равнобокой трапеции вычислить ее высоту?

8. Какие вспомогательные построения целесообразно выполнить, чтобы по сторонам произвольной трапеции вычислить ее высоту?

9. Чем служат высоты остроугольного треугольника для треугольника, вершины которого совпадают с основаниями высот первого треугольника?

10. Какое соотношение должно связывать координаты двух точек (a; b) и (c; d), чтобы они были симметричны относительно оси x?

11. Как изменятся координаты точек, если сместить начало координат вдоль оси абсцисс на единицу в положительном направлении?

12. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в точке (–4; –2), пересекающей ось ординат в точке (0; 1)?

13. Как записать с помощью векторов, что точка M лежит на окружности радиуса R и с центром в точке O?

14. Как записать с помощью векторов условие того, что четырехугольник $ABCD$ является: 1) ромбом; б) квадратом; в) прямоугольником?

15. Как записать с помощью векторов, что точка M лежит на окружности с диаметром AB?

16. Как записать с помощью векторов, что точка M является центром окружности, описанной около треугольника ABC?

17. Как записать с помощью векторов, что треугольник ABC является равносторонним?

Задачи

88. Докажите, что в прямоугольном треугольнике квадрат медианы, проведенной к катету, равен разности квадрата гипотенузы и трёх четвёртых квадрата этого катета.

89. ° Докажите, что сумма квадратов медиан прямоугольного треугольника в полтора раза больше квадрата гипотенузы.

90. Две высоты треугольника не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы треугольника.

91. ° Один из острых углов прямоугольного треугольника равняется 40°. Найдите углы, под которыми видно каждую сторону треугольника из центра вписанной окружности.

92. Треугольник с углами 50°, 60°, 70° описан около окружности. Найдите отношение длин дуг, на которые окружность поделилась точками касания.

93. В каком отношении центр O вписанной в треугольник ABC окружности делит его биссектрису AA_1, если стороны треугольника равняются a, b, c?

94. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равняется произведению длин ее оснований.

95. Два противоположных угла трапеции относятся, как 2: 3, а два других — как 3: 5. Найдите углы трапеции.

96. Один из углов четырехугольника $ABCD$ равняется 56°, $AB = BC$, $AD = CD$. Зная, что около четырехугольника можно описать окружность, найдите величину наибольшего угла четырехугольника.

97. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых:

1) $AM^2 + BM^2 = 4$; 2) $2AM^2 - MB^2 = 2AB^2$.

98. Найдите геометрическое место точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B является величиной постоянной.

99. Найдите геометрическое место точек, для каждой из которых отношение расстояний от двух данных точек A и B является величиной постоянной.

100. Докажите с помощью векторов следующие утверждения:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

2) параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником;

3) параллелограмм с перпендикулярными диагоналями является ромбом;

4) ромб с равными диагоналями является квадратом;

5) если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны, то треугольник является равнобедренным.

Готовимся к тематической аттестации по теме "Основные факты и методы планиметрии"

Задания для самоконтроля

1. Треугольник *ABC* перегнули по биссектрисе *BD*. Какие линии совпадут при этом?

2. Каким является треугольник, в котором один угол равняется сумме двух других углов?

3. На пересечении каких линий лежит центр окружности, описанной около треугольника?

4. На пересечении каких линий лежит центр окружности, вписанной в треугольник?

5. Каким является треугольник, если центр окруности, описанной около треугольника, является внутренней точкой треугольника?

6. Из центра окружности к катетам описанного прямоугольного треугольника проведены перпендикуляры. Какой четырехугольник образовался при этом?

7. Точки касания разбивают стороны описанного около окружности прямоугольного неравнобедренного треугольника на 6 отрезков. Сколько среди них есть пар равных?

8. Пусть *N* — точка пересечения биссектрис *AK* и *BM* углов треугольника *ABC*. Чему равняется отношение *BN* : *NM*?

9. Если *N* — точка пересечения медиан *AK* и *BM* треугольника *ABC*, то чему равняется отношение *AN* : *NK*?

10. Пусть *a*, *b* — длины сторон параллелограмма, d_1 и d_2 — длины его диагоналей. Какое соотношение выполняется для этих элементов параллелограмма?

11. На рис. 51 $BD \| AC, BD = \frac{1}{2} AC$. Чему равняется отношение *AO* : *AB*?

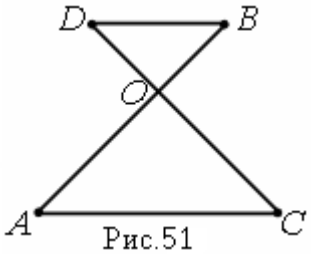


Рис.51

12. Чему равняется радиус *r* окружности, вписанной в треугольник *ABC*?

13. Чему равняется радиус *R* окружности, описанной около треугольника *ABC* со сторонами *a, b, c*?

14. Пусть в треугольнике *ABC* $AB = BC;\ BD \perp AC;\ AC = 12,\ BD = 8$, *AM* — биссектриса угла *A* (рис. 52). Чему равняется отрезок *BM*?

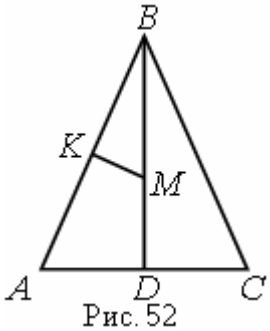


Рис. 52

15. В треугольнике *ABC AB* = *BC*; *BD*⊥*AC*; *AC* = 12, *AK* = *BK*; *KM*⊥*AB*, *BD* = 8 (рис. 52). Чему равняется отрезок *MD*?

16. В треугольнике *ABC AB* < *BC* < *AC*, *O* — центр вписанной окружности. К какой вершине треугольника точка *O* находится ближе всего?

17. Дан четырехугольник, в котором *A, B, C, D* — середины последовательных его сторон, *P, Q* — середины его диагоналей. Сравните ∠*BPC* и ∠*AQD*.

18. В трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) можно вписать окружность. Известно, что $AD = 3BC$, $AB = CD$. Чему равняется угол A?

19. В трапеции боковые стороны равняются меньшему основанию, диагональ образует с основанием угол 30°. Чему равняется углы трапеции?

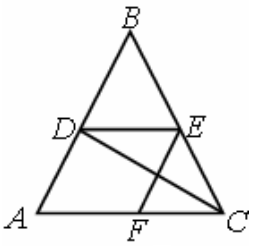


Рис.53

20. Пусть в треугольнике ABC $AB = BC$; CD — биссектриса угла C, $DE \parallel AC$, $EF \parallel AD$ (рис. 53). Сравните AD и DE.

21. В остроугольном треугольнике ABC высоты BD и CF пересекаются в точке K. Какие точки A, F, K, D или F, B, C, D могут не лежать на одной окружности?

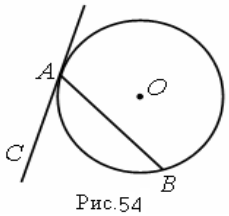


Рис.54

22. Пусть AC — касательная к окружности с центром O (рис. 54), AB — хорда. Дуга BA равняется 80°. Чему равняется угол BAC?

23. На каком расстоянии от центра окружности радиуса 5 см находится хорда длиной 6 см?

24. В окружности проведена хорда, равная радиусу. Под каким углом видно эту хорду из произвольной точки окружности, не совпадающей с концами хорд?

Тест для диагностики готовности к изучению стереометрии

1. Углы треугольника относятся как 1: 2: 3. Этот треугольник ...

А. остроугольный. **Б.** тупоугольный.
В. прямоугольный. **Г.** может быть любым.

2. Длины сторон треугольника выражаются различными целыми числами: одна равняется 5 м, вторая — 4 м. Длина третьей стороны не может равняться ...

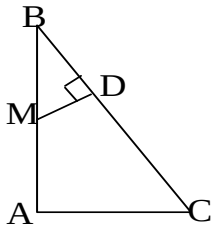
А. 2 м. **Б.** 7 м. **В.** 8 м. **Г.** 9 м.

3. Из одной точки, расположенной вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр длиной 6 см и наклонная длиной 10 см. Длина проекции наклонной на прямую равняется ...

А. 4 см. **Б.** $\sqrt{136}$ см. **В.** 8 см. **Г.** величине, отличной от приведенных.

4. В прямоугольном треугольнике один из углов равняется 60°, а катет, прилегающий к нему, равняется 12 см. Гипотенуза равняется ...

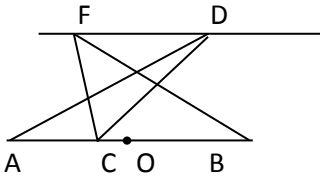
А. $12\sqrt{3}$ см. **Б.** 18 см. **В.** $18\sqrt{3}$ см. **Г.** 24 см.



5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90°$) через середину M катета AB проведен перпендикуляр MD к гипотенузе BC, $AB = 12$ см, $BD = 4$ см. Гипотенуза BC равняется ...

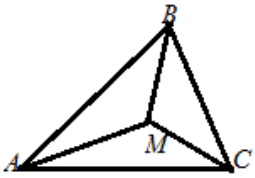
А. 18 см. **Б.** 16 см. **В.** 24 см. **Г.** 36 см.

6. Точка O — середина отрезка AB, $FD \parallel AB$. Сравните площади треугольников ADC и FCB, равные S и S_1 соответственно.



А. $S < S_1$. **Б.** $S = S_1$.
В. $S > S_1$. **Г.** Сравнить невозможно.

7. В треугольнике ABC угол A равняется 40°, угол B равняется 70°, M — точка пересечения биссектрис. Угол AMB равняется...



А. 30°. **Б.** 125°. **В.** 105°. **Г.** 70°.

8. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равняются, соответственно, 12 см и 10 см. Высота, опущенная на его основание, равняется ...

А. 6 см. **Б.** 13 см. **В.** $\sqrt{119}$ см. **Г.** 8 см.

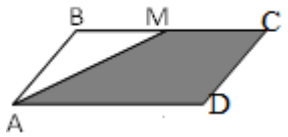
9. Медиана *AD* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* равняется 6 см, а периметр треугольника *ABD* равняется 27 см. Периметр треугольника *ABC* равняется ...

А. 54 см. **Б.** 66 см. **В.** 42 см. **Г.** 30 см.

10. Угол между высотами параллелограмма равняется 25°. Углы параллелограмма соответственно равняются ….

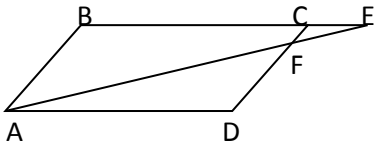
А. 25° и 155°. **Б.** 50° и 130°. **В.** 65° и 115°. **Г.** 40° и 140°.

11. Площадь параллелограмма равняется *S*, *MB* = *MC*. Чему равняется площадь заштрихованной фигуры?



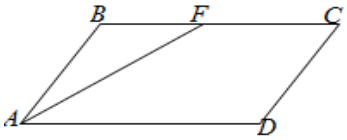
А. $\frac{2}{3}S$. **Б.** $\frac{3}{4}S$. **В.** $\frac{7}{8}S$. **Г.** $\frac{5}{6}S$.

12. На рисунке изображен параллелограмм *ABCD*, *AD* = 12 см, *CE* = 4 см. Отношение площадей треугольников *ABE* и *CFE* равняется ...



А. 4:1. **Б.** 8:1. **В.** 64:1. **Г.** 16:1.

13. Биссектриса *AF* угла *A* в параллелограмме *ABCD* делит сторону *BC* на отрезки 7 см и 14 см (считая от вершины *B)*. Периметр параллелограмма равен ...



А. 56 см. **Б.** 42 см. **В.** 28 см. **Г.** 70 см.

14. Два равных отрезка точкой пересечения делятся пополам. Концы их последовательно соединили. Полученный четырехугольник является ...

А. трапецией. **Б.** квадратом. **В.** ромбом. **Г.** прямоугольником.

15. В прямоугольной трапеции основания равняются 5 см и 17 см, а большая боковая сторона — 13 см. Высота трапеции равняется ...

А. 12 см. **Б.** 11 см. **В.** 5 см. **Г.** 8 см.

16. Через точку данной окружности проведены две хорды, каждая из которых равняется радиусу. Угол между ними равняется ...

А. 150°. **Б.** 120°. **В.** 135°. **Г.** 60°.

17. Из точки, лежащей вне круга, ограниченного данной окружностью, проведены к данной окружности две взаимно перпендикулярные касательные. Радиус окружности равняется 10 см. Длина каждой касательной равняется ...

А. 10 см. **Б.** 5 см. **В.** $\frac{10}{\sqrt{2}}$ см. **Г.** величине, отличной от приведенных.

18. Определите взаимное расположение двух окружностей, радиусы которых равняются, соответственно, 4 см и 6 см, а центры удалены друг от друга на 8 см.

А. Одна находится внутри круга, ограниченного другой окружностью.

Б. Пересекаются в двух точках.

В. Одна находится вне круга, ограниченного другой окружностью.

Г. Касаются друг друга.

19. В окружности провели хорду длиной 8 см, удаленную от центра на 3 см. Диаметр окружности равняется ...

А. 5 см. **Б.** 12 см. **В.** 10 см. **Г.** величине, отличной от приведенных.

20. Наибольшее и наименьшее расстояния от точки, расположенной внутри круга, до точек окружности, ограничивающей этот круг, равняются 10 см и 4 см соответственно. Радиус круга равняется ...

А. 3 см. **Б.** 7 см. **В.** 14 см. **Г.** 6 см.

21. Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон треугольника, является точкой пересечения ...

А. высот треугольника. **Б.** медиан треугольника.

В. биссектрис треугольника. **Г.** серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

22. Сколько окружностей можно провести через три данные точки?

А. Одну. **Б.** Две. **В.** Четыре. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

23. Чему равняется внутренний диаметр трубы, если внешний диаметр ее равняется 100 мм, а толщина стенок — 5 мм?

А. 95 мм. **Б.** 90 мм. **В.** 80 мм. **Г.** 97,5 мм.

24. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединили. Полученный четырехугольник является ...

А. параллелограммом. **Б.** прямоугольником.

В. ромбом. **Г.** трапецией.

25. Длины боковой стороны и основания равнобедренного треугольника могут быть пропорциональными числам ...

А. 1 и 2. **Б.** 1 и 3. **В.** 1 и 4. **Г.** 3 и 5.

Образец контрольной работы:

Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см. Найдите:

а) ° высоты треугольника;

б) медианы треугольника;

в) **°** радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной около него;

г) расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей;

д) * радиус окружности, построенной на основании треугольника, как на хорде, и касающейся боковых сторон треугольника;

е) отношение, в котором центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании;

ж) длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот, проведенных к боковым сторонам;

з) длину отрезка, концы которого совпадают с точками пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника;

и) * сумму периметров трех треугольников, которые отрезаются от данного треугольника тремя касательными, проведенными к окружности, вписанной в данный треугольник.

Раздел 2. Параллельность прямых и плоскостей

Мы начинаем изучение геометрии пространства, или стереометрии (от греческого «стереос» — пространственный, «метрио» — измеряю). Возникнув из потребностей практики, постоянно развиваясь, геометрия является одной из важнейших математических наук для описания окружающего мира.

Знание планиметрии, то есть геометрии плоскости, недостаточно для моделирования реальных объектов. Вместе с тем, при изучении стереометрии мы будем опираться на планиметрию, использовать ее понятия, факты, методы. Да и метод построения стереометрии — аксиоматический — уже использовался в планиметрии.

Как и в планиметрии, основными объектами изучения будут геометрические фигуры — идеализированные образы реальных физических объектов. Некоторые из этих фигур (такие, как точка, прямая, треугольник и т. п.) уже изучались в геометрии, хотя раньше они рассматривались на плоскости. С другими «неплоскими» фигурами, такими как куб, параллелепипед, шар — мы встречались и в математике, и в других науках, и в практической деятельности. Стереометрия изучает свойства пространственных фигур и отношения между ними.

В этом разделе мы рассмотрим варианты взаимного расположения прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Особое внимание будет уделено отношению параллельности между прямыми и плоскостями, имеющему важное теоретическое и прикладное значение.

Будут также рассмотрены основные правила и законы изображения фигур, дающие возможность распознавать пространственную фигуру и устанавливать их свойства по рисунку.

§8.Основные понятия и аксиомы стереометрии

Рассматриваются основные фигуры стереометрии, отношения между ними, их свойства.

Чтобы заложить фундамент для изучения стереометрии, нам следует ввести основные (неопределяемые) фигуры стереометрии. Содержание соответствующих им понятий будут выражать свойства, характеризующие отношения между фигурами. Эти свойства принимаются без доказательства, то есть они являются аксиомами стереометрии. На основе аксиом мы сможем доказать новые утверждения, развивающие и дополняющие базовые свойства фигур.

Основными неопределяемыми фигурами стереометрии являются ***точка, прямая, плоскость.*** Представление о них вы получили, изучая планиметрию, а содержание соответствующих им понятий будет раскрыто в аксиомах.

Прежде всего, договоримся относительно обозначений и изображений основных фигур. Точка и прямая изображаются и обозначаются так же, как и в планиметрии. Плоскость чаще всего изображают с помощью параллелограмма (рис. 55, а), ведь именно так выглядят самые распространенные физические модели плоскостей: лист бумаги, крышка стола, классная доска и др. Чтобы подчеркнуть безграничность плоскости, ее иногда изображают как участок «неправильной» формы (рис. 55, б). Плоскости обозначают малыми греческими буквами: α, β, γ и т. п.

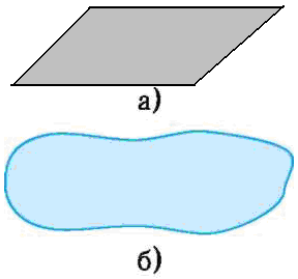


Рис. 55

Наряду с основными неопределяемыми понятиями стереометрии будем считать известным из планиметрии содержание таких понятий, как ***отрезок и его длина, луч, угол и его величина*** и т. п., а также некоторых понятий, характеризующих взаимное расположение точек, прямых и плоскостей: ***точка A принадлежит прямой l и плоскости β, прямая l лежит в плоскости α, плоскость α проходит через точку A*** и др.

Отношения принадлежности точек часто обозначают знаком $\in$: $M \in l$; $M \in \alpha$, а отношение принадлежности прямых — знаком $\subset$: $l \subset \alpha$. Запись $M \notin \alpha$ означает, точка M не принадлежит плоскости α. Аналогичное содержание имеет запись $l \not\subset \alpha$.

Изображения фигур должны учитывать их взаимное расположение. Например, рис. 56 должен показывать наглядно то, что точка M не принадлежит плоскости α, отрезок AB лежит в плоскости α, а прямые a и b не лежат в этой плоскости. Часть прямой b на рис. 56, закрытой изображением плоскости α, обозначена штриховой линией.

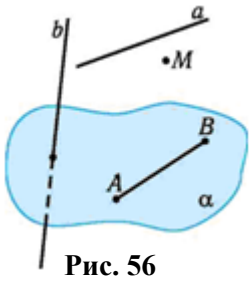


Рис. 56

Вся совокупность точек, которые рассматриваются в сте-

реометрии, образует пространство. Любую часть пространства, то есть некоторую совокупность его точек, называют ***фигурой.***

Фигура — от латинского figura — образ, вид.

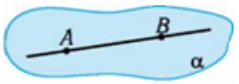
Фигура называется ***плоской,*** если все ее точки расположены в одной плоскости. Со многими плоскими фигурами вы уже ознакомились, изучая планиметрию. Некоторые неплоские фигуры — куб, шар, цилиндр — также известны вам.

Если различные фигуры имеют общие точки, то говорят, что они ***пересекаются.*** Поэтому выражение «плоскости пересекаются» означает, что у этих плоскостей есть общие точки. Пересечение, то есть общую часть фигур, обозначают знаком ∩: $l \cap \alpha, \alpha \cap \beta$.

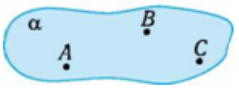
Будем исходить из того, что пространство в стереометрии содержит бесконечное множество плоскостей. То есть вне каждой плоскости существует бесконечное множество плоскостей, а вместе с этим и точек, и прямых.

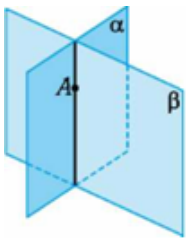
Рассмотрим основные свойства, характеризующие неопределяемое понятие плоскости и его связи с другими основными понятиями.

С1. Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она полностью лежит в этой плоскости.



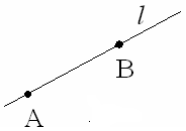
С2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.





С3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечением является прямая, проходящая через эту точку.

С4. Через две произвольные точки пространства можно провести одну и только одну прямую.



Эти свойства, с учетом сделанных выше предположений, и примем за систему аксиом нашего курса стереометрии.

Содержание аксиом хорошо согласуется со свойствами физических объектов и величин, моделируемых с помощью основных геометрических понятий. Действительно, попробуйте прижать к столу концы хорошо натянутой нити и увидите, что она плотно прилегает к поверхности стола, сливается с ней. Именно такое свойство моделирует аксиома $\mathbf{C_1}$.

На трех ножках стол стоит, не качаясь, даже если они имеют разную высоту. Устойчивость такого стола объясняется тем, что концы трех его ножек всегда располагаются в плоскости пола и даже определяют ее (аксиома $\mathbf{C_2}$**).** Зато стол с четырьмя ножками иногда может качаться. Аксиома $\mathbf{C_2}$ указывает на один из способов задання плоскости. Понятно, что плоскость однозначно определяют прямая и точка, лежащая вне этой прямой, две пересекающиеся прямые.

Обоснование этих утверждений будет приведено дальше. Равносильность указанных способов задання плоскостей естественна: имея три точки, не лежа-

щие на одной прямой, можно построить пересекающиеся прямые (даже три пары пересекающихся прямых), две пересекающиеся прямые позволяют выбрать три точки, не лежащие на одной прямой, и т. д.

Нас окружают многочисленные проявления аксиомы **C_3:** по прямой пересекаются много плоских объектов (стены комнаты, детали ящика и т. п.).

Легко найти и физические аналоги аксиомы **C_4.** Ведь, например, две натянутые нити сливаются, если их концы совпадают.

Изучая стереометрию, будем широко использовать соответствие между объектами реального мира, отношениями между ними и их геометрическими образами и отношениями между ними. Это соответствие будет служить не только иллюстрацией геометрических понятий и фактов, а даже и неформальным обоснованием их содержательности. При этом следует иметь в виду, что строгие доказательства утверждений существуют и при определенных усилиях могут быть построены.

Отметим также, что стереометрия имеет много аналогий в планиметрии. В частности, подобно тому, как прямая на плоскости разбивает ее на две полуплоскости,

Пространство разбивается каждой плоскостью на два полупространства, причем точки *A, B* принадлежат одному полупространству тогда и только тогда, когда отрезок *AB* не пересекает данную плоскость. Будем считать также, что на каждой плоскости пространства можно пользоваться известными понятиями и фактами планиметрии.

Понятия точки, прямой, плоскости, отрезка и т. п. относятся к основным в стереометрии, так как с них начинается ее построение. Но главной целью стереометрии является изучение сугубо пространственных фигур. Поэтому, чтобы сделать построение стереометрии содержательнее, мы с самого начала будем использовать некоторые простые пространственные фигуры — куб, параллелепипед, пирамиду, шар и др. (рис. 57), отложив их детальное изучение на будущее. Эти фигуры вы уже неоднократно рассматривали, начиная с младших классов.

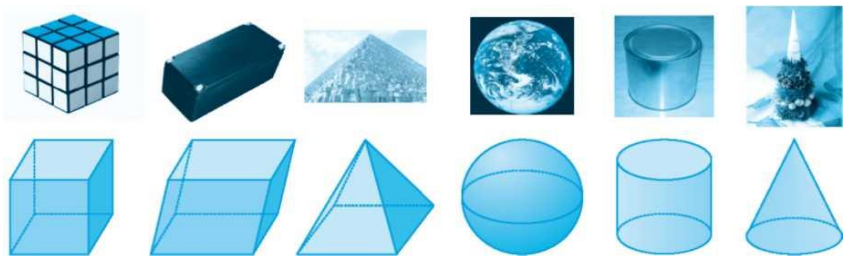


Рис. 57

Вспомним, прежде всего, о некоторых ***многогранниках,*** представляющих собой части пространства, ограниченные многоугольниками. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называют его ***гранями,*** их стороны — ***рёбрами,*** а вершины — ***вершинами*** многогранника.

Куб — это многогранник, имещий 6 граней, и все они являются квадратами. У него 8 вершин и 12 ребер (рис. 58).

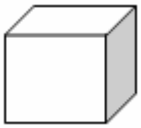


Рис. 58

Параллелепипед — это многогранник, имеющий 6 граней, и все они — параллелограммы, и такое же количество вершин и ребер, как куб (рис. 59, а). Параллелепипед, все грани которого являются прямоугольниками, называется ***прямоугольным*** параллелепипедом (рис. 59, б).

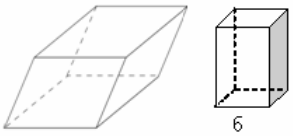


Рис. 59

Куб является частным случаем прямоугольного параллелепипеда. Его грани не только прямоугольники, но даже квадраты.

Куб — от греческого χνβοζ *(kibos) — игральная кость.*

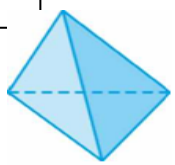


Рис. 60

Тетраэдр — это многогранник, имеющий 4 грани, являющиеся треугольниками (рис. 60). Если все грани тетраэдра – правильные треугольники, то тетраэдр называется ***правильным*** тетраэдром.

Тетраэдр — от греческих τετραζ *(tetras) — четыре, и* εδρα *(hedra) — основание, поверхность, сторона.*

Пирамида — это многогранник, у которого одна грань — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной (рис. 61). Первая грань называется ***основанием,*** а остальные — ***боковыми*** гранями, их общая вершина — ***вершиной*** пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называют ***боковыми.*** Тетраэдр является частным случаем пирамиды. Каждая его грань может служить основанием.

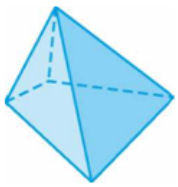


Рис. 61

Пирамида — от греческого πνραμιζ *(pyramis), по-видимому, от египетского peremus — диагональ основания.*

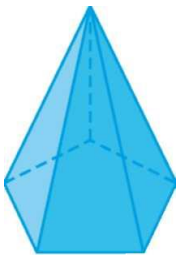


Рис. 62

Если основанием пирамиды служит *n*-угольник, то она называется ***n-угольной.*** Если основанием пирамиды является правильный *n*-угольник, а боковые грани — равные равнобедренные треугольники с вершинами в вершине пирамиды, то пирамида называется ***правильной n-угольной.*** Изображается она при $n = 5$ так, как показано на рис. 62. Правильный тетраэдр является частным случаем правильной треугольной пирамиды.

Шар с центром в точке O радиуса R — это множество точек пространства, находящихся от точки *O* на расстоянии, не превышающим *R* (рис. 63).

Рис. 63

Вопросы для самоконтроля

1. Концы отрезка принадлежат плоскости. Принадлежит ли ей середина отрезка?

2. Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Принадлежит ли ей третья вершина?
3. Всегда ли через три точки можно провести единственную плоскость?
4. В землю вбили три столбика. Всегда ли на них можно положить лист фанеры?
5. Верно ли, что две плоскости или имеют бесконечное количество общих точек, или не имеют ни одной?
6. Верно ли, что прямая является линией пересечения двух различных плоскостей, имеющих общую точку?
7. Существуют ли в пространстве такие две прямые, которые нельзя пересечь одновременно ни одной третьей прямой?
8. На сколько частей разделяют пространство две пересекающиеся плоскости?
9. Сколько плоскостей можно провести через две вершины куба?
10. Сколько плоскостей можно провести через ребро тетраэдра?

Упражнения на рисунках

1. Какими тремя точками, указанными на рис.64, плоскость α определяется однозначно?

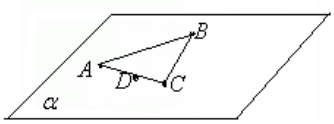


Рис. 64

2. Через какие три точки, указанные на рис.65, можно провести еще одну плоскость, отличную от плоскости α?

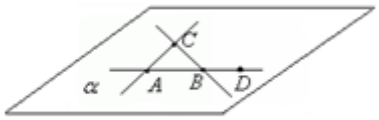


Рис. 65

3. Укажите взаимное расположение прямых *a*, *b* и плоскости α, изображенных на рис 66 а - г.

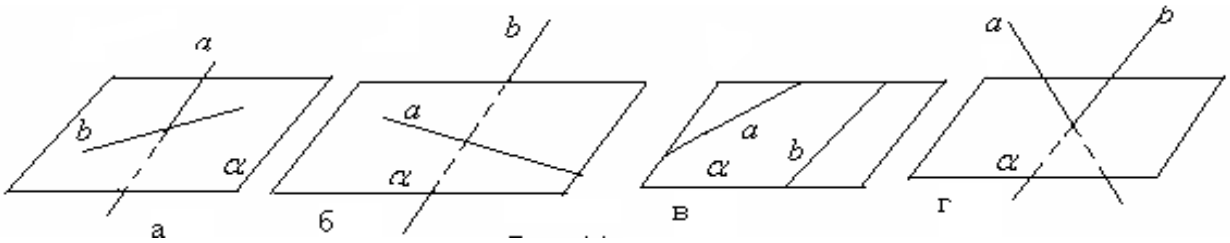


Рис. 66

4. Какая из точек *D, E, F* на рис. 67 может быть точкой пересечения прямой *AB* и плоскости β?
5. Четырехугольник *ABCD* — параллелограмм. Какая из точек *L, M, N* на рис. 68 может быть точкой пересечения прямой *BK* с плоскостью α?

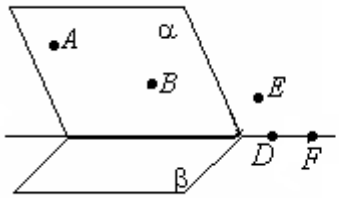


Рис. 67

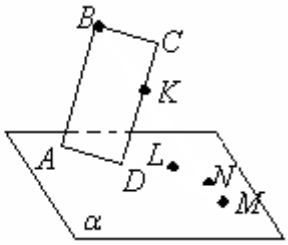


Рис. 68

6. На рис. 69 а - г изображены треугольник *ABC* и точки пересечения прямых, проходящих через его стороны, с плоскостью α. Какой из рисунков содержит ошибку?

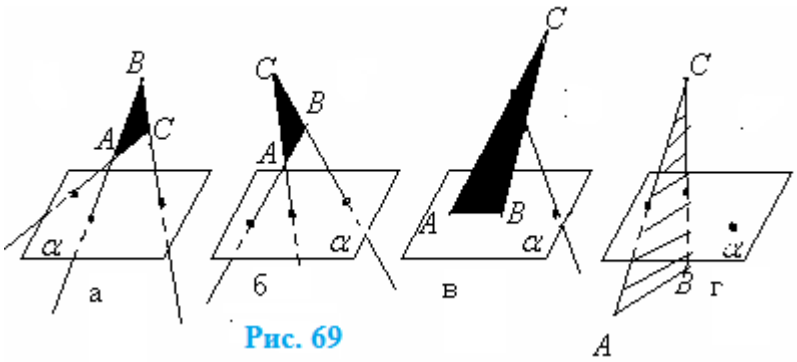


Рис. 69

7. На рис. 70 а - г изображены плоский четырехугольник *ABCD* и точки пересечения прямых, проходящих через его стороны, с плоскостью α. Какой из рисунков содержит ошибку?

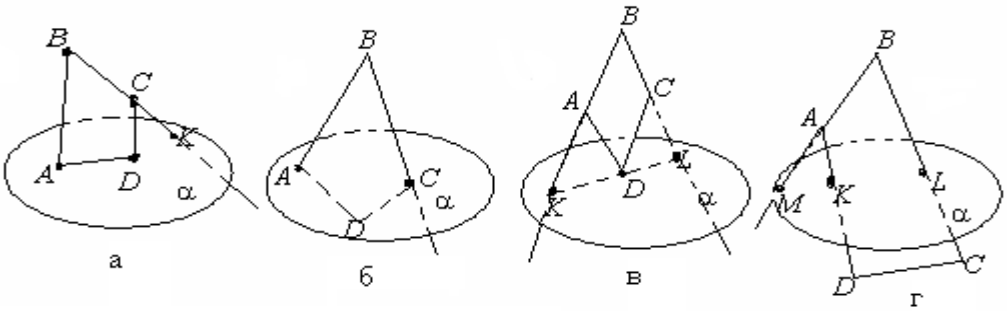


Рис. 70

8. На рис. 71 прямая *AB* не принадлежит плоскости *COD*.

1)Сколько общих точек имеют плоскости *AOB* и *COD*?

2)Какая фигура является пересечением плоскостей *AOC* и *BOD*?

3)Сколько плоскостей можно провести через точки *A, B, C*?

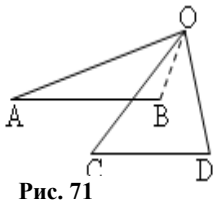


Рис. 71

9. На рис. 72 изображен куб.

1) Сколько плоскостей можно провести через вершины *A*, D_1, *C*?
2) Сколько плоскостей можно провести через вершины *A*, *C* и середину отрезка *BD*?
3) Какая фигура является пересечением плоскостей *ABC* и C_1D_1D?
4) Сколько общих точек имеют плоскости *BCD* и ACB_1?

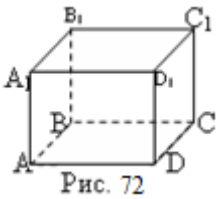


Рис. 72

10. Какие из следующих пар точек *X* и *Y*, *X* и *Z*, *Y* и *T*; *Z* и *T* не лежат на изображении тетраэдра (рис. 73) в одной грани?

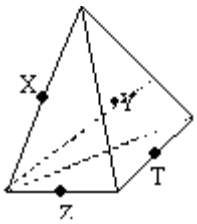


Рис. 73

11. На рис. 74 изображены плоскости *AED* и *AFB*.

1) Какая фигура является их пересечением?
2) Сколько плоскостей можно провести через точки *F*, *C*, *E*?
3) Сколько плоскостей можно провести через точки *A, E, F*?
4) Какая прямая является пересечением плоскостей *BCD* и *EAC*?

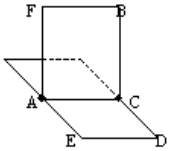


Рис. 74

Итак, имеем ряд основных понятий и аксиом стереометрии. Построение теории начнем с доказательства утверждения, равнозначного по содержанию аксиоме $\boldsymbol{C_2}$. Эта аксиома определяет один из способов задания плоскости в пространстве, что, кстати, позволяет плоскость, определяемую точками *A*, *B*, *C*, называть плоскостью *ABC*. Однако с помощью точек и прямых плоскость можно задать иначе. Опыт подсказывает, что плоскость однозначно определяется прямой и точкой вне её или же двумя пересекающимися прямыми. Согласно правилам построения стереометрии на аксиоматической основе, эти утверждения необходимо доказать, исходя из аксиом.

Теорема 1 *(о плоскости, проходящей через прямую и точку).*

Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит плоскость и к тому же только одна.

 Пусть даны прямая *a* и точка *A*, не лежащая на этой прямой. Возьмем на прямой *a* две точки *B* и C (рис. 75). Согласно аксиоме $\mathbf{C_4}$, прямая *a* — единственная прямая, проходящая через точки *B* и *C*.

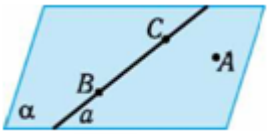


Рис. 75

Поскольку точка *A*, по условию теоремы, не принадлежит прямой *a*, то точки *A*, *B* и *C* не могут лежать на одной прямой.

Согласно аксиоме $\boldsymbol{C_2}$, существует плоскость, содержащая точки *A, B, C,* и, в соответствии с аксиомой $\boldsymbol{C_1}$, эта плоскость содержит прямую *a*. Следовательно, искомая плоскость существует.

Любая другая плоскость β, проходящая через прямую *a* и точку *A*, содержит точки *B* и *C*. Так как через точки *A*, *B*, *C* можно провести лишь одну плоскость (аксиома $\boldsymbol{C_2}$), то плоскость β совпадает з α. А это значит, что искомая плоскость — единственная. ■

Анализируя доказательство теоремы, нетрудно придти к выводу, что через каждую прямую проходит бесконечное множество плоскостей. Расположение каждой из них определяется некоторой точкой, не лежащей на данной прямой. Это можно проиллюстрировать, например, вращая двери относительно неподвижных навесов. Еще один способ задания плоскости сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2 (*о плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые*).

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом лишь одна.

 Пусть прямые *a* и *b* имеют одну общую точку *O*. Возьмём на этих прямых произвольные точки *A* и *B*, отличные от *O* (рис. 76). Точки *A*, *O, B* не лежат на одной прямой, поэтому существует плоскость α, содержащая эти точки (аксиома $\boldsymbol{C_2}$). Плоскость α содержит прямые *a* и *b* (аксиома $\boldsymbol{C_1}$). Следовательно, через данные прямые проходит плоскость.

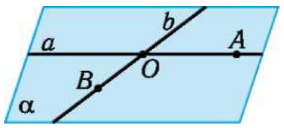


Рис. 76

Каждая иная плоскость β, проходящая через прямые *a* и *b*, содержит точки *A, O, B,* и, согласно аксиоме $\boldsymbol{C_2}$, должна совпадать с плоскостью α, поскольку эти точки не лежат на одной прямой. ■

Следующая задача содержит утверждение, которое будет широко использоваться при последующем изучении стереометрии.

Задача 1. Доказать, что в пространстве существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

 Необходимо доказать существование четырех точек, которые нельзя поместить в одну плоскость, то есть, что не существует плоскости, проходящей через эти четыре точки.

Возьмем произвольную плоскость α и в ней выберем три точки *A, B, C,* не лежащие на одной прямой (рис. 77, а). Поскольку вне плоскости α существуют точки пространства, то выберем из них произвольную точку *O* (рис. 134, б). Не существует плоскости β, которая содержала бы точки *A, B, C, O.* В противном случае плоскости α и β совпадали бы (по аксиоме $\boldsymbol{C_2}$), и точка *O* принадлежала бы плоскости α. ■

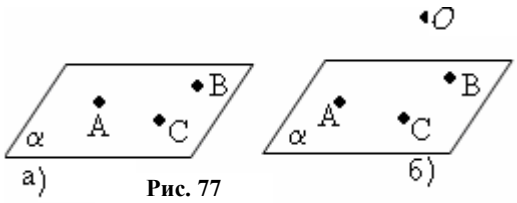


Рис. 77

В приведенных аксиомах и теоремах шла речь о прямых и плоскостях, которые задавались тем или иным способом. Нам и дальше придется строить в пространстве различные фигуры, опираясь на их свойства. Задачи на построение в стереометрии аналогичны задачам на построение в планиметрии. Однако, в стереометрии нет инструментария для построения плоскости. Да и изображение пространственных построений на плоском рисунке не всегда адекватно воспроизводит реальность. Поэтому ***в стереометрии под построением понимают доказательство возможности всех шагов процесса построения***. При этом считается, что плоскость построена, если определены три точки, не лежащие на одной прямой, или прямая и точка вне прямой, или две пересекающиеся прямые, или же другие элементы, определяющие плоскость. Для построения прямой достаточно иметь две ее точки.

Естественно считать, что ***на каждой плоскости возможны все построения, известные из планиметрии.***

Пример 1. Сторона *AB* треугольника *ABC* лежит в плоскости α, а вершина *C* — вне её. Точка *M* делит отрезок *CB* в отношении 3 : 4, а точка *N* делит отрезок *CA* в отношении 1 : 4, считая от *C*. Построить точку пересечения прямой *MN* с плоскостью α.

 Условиям примера соответствует рис. 78, а. Прямая *MN* лежит в плоскости *ABC*. Пересечением этой плоскости с плоскостью α является прямая *AB*. Поэтому искомая точка пересечения расположена на прямой *AB*. Прямые *AB* и *MN* лежат в плоскости *ABC* и, как это вытекает из условия, пересекаются. Найдем их точку пересечения, продлив отрезки *AB* и *NM* до пересечения в точке *K* (рис. 78, б). Она и является искомой точкой пересечения прямой *NM* и плоскости α. ■

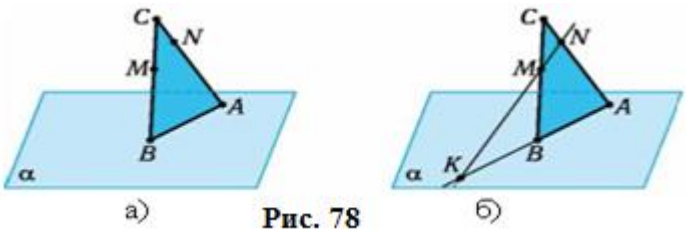


Рис. 78

Построение точки пересечения прямой и плоскости (точки «встречи» прямой и плоскости) является составной частью многих построений в стереометрии. Пример 1 является иллюстрацией такого построения.

Чтобы построить точку пересечения прямой и плоскости необходимо построить точку пересечения данной прямой и прямой, являющейся линией пересечения данной плоскости и плоскости, проходящей через данную прямую.

Пример 2. Построить линию пересечения плоскости, проходящей через вершины A_1, C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и середину K ребра BB_1, с плоскостью грани $ABCD$.

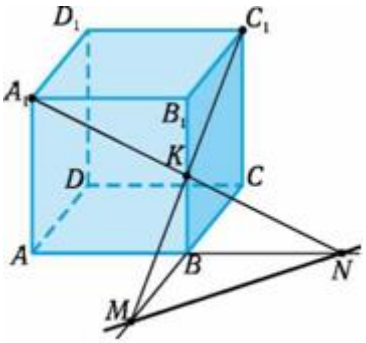


Рис. 79

□ Чтобы построить искомую прямую пересечения, достаточно найти две ее точки. Для нахождения этих точек воспользуемся решением примера 1. Поскольку прямая C_1K лежит в плоскости грани BCC_1B_1, то точка M пересечения прямых C_1K и CB является одной из точек искомой прямой пересечения (рис. 79), а вторая точка N является точкой пересечения прямых AB и A_1K в плоскости грани ABB_1A_1. Прямая MN является искомой. ■

Построение линии пересечения двух плоскостей является ещё одним из базовых построений в стереометрии. Пример 2 иллюстрирует такое построение.

Чтобы построить линию пересечения двух плоскостей необходимо построить точки пересечения двух прямых одной плоскости с другой и через них провести прямую.

Для введения геометрических фигур, как плоских, так и пространственных, можно применять конструктивный подход. Этот подход предусматривает построение фигур из отрезков. Продемонстрируем его на следующих примерах.

Пусть в некоторой плоскости α имеем отрезок BC и точку A, лежащую вне прямой BC (рис. 80, а). Соединим отрезками все точки отрезка BC с точкой A (рис. 80, б). Фигура, состоящая из точек всех построенных отрезков, является треугольником.

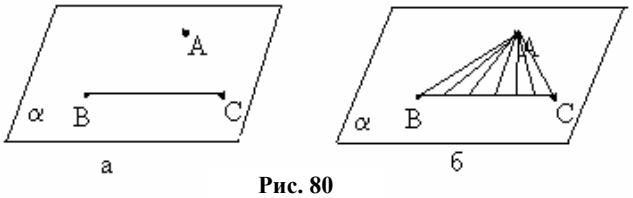


Рис. 80

Если же имеем отрезок BC и по одну сторону от прямой BC отложим равные и параллельные между собой отрезки (рис. 81), то концы этих отрезков образуют отрезок AD (докажите!), а фигура, образованная из всех точек этих отрезков, является параллелограммом.

Теперь понятно, как в пространстве можно конструктивно ввести некоторые фигуры, например, пирамиды, в частности тетраэдры.

Возьмем четырехугольник *ABCD* в плоскости α, а также точку *S* вне плоскости α. Соединим точку *S* со всеми точками четырёхугольника *ABCD* (рис. 82).

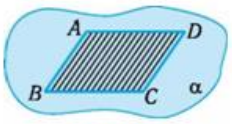


Рис. 81

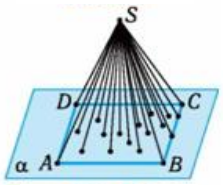


Рис. 82

Совокупность всех точек отрезков, соединяющих точку *S* с точками четырехугольника *ABCD*, образует фигуру, которая является ***четырехугольной пирамидой.*** Точка *S* является вершиной пирамиды, четырехугольник *ABCD* — основанием, а треугольники *SAB*, *SBC*, *SCD*, *SDA* — боковыми гранями пирамиды. Обычно четырехугольную пирамиду изображают, как это сделано на рис. 83.

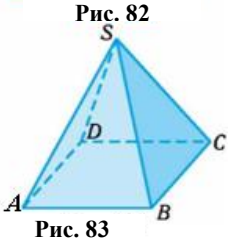


Рис. 83

Аналогично строят пирамиды, основаниями которых служат многоугольники с произвольным числом сторон. Подробнее об этом речь будет идти в последующих разделах.

Для изучения пространственных фигур целесообразно рассматривать пересечения этих фигур с плоскостями. Такие пересечения называются ***сечениями,*** если по обе стороны от плоскости пересечения — ***секущей плоскости*** — есть точки фигуры.

Нетрудно убедиться в том, что сечениями параллелепипеда или пирамиды являются многоугольники. Действительно, из аксиомы C_3 вытекает, что пересечением секущей плоскости и грани фигуры является отрезок.

Таким образом, при пересечении данных фигур с плоскостью получим ограниченные отрезками фигуры на плоскости, то есть многоугольники. Так, сечением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис 84 а) плоскостью, проходящей через вершины A, B_1, D_1, является треугольник AB_1D_1, а сечением пирамиды *SABCD* плоскостью, проходящей через вершину *S* и диагональ основания *AC* является треугольник *ASC* (рис. 84 б).

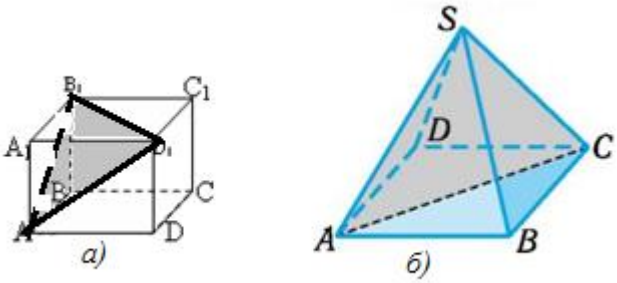


Рис. 84

Следующий пример базируется на идеях построений, рассмотренных в примерах 1 и 2.

Пример 3. Построить сечение пирамиды *SABCD* плоскостью, проходящей через середины *K*, *L* ребер основания *AD* и *AB* и середину *M* бокового ребра *SC*.

□ Понятно, что для построения сечения, являющегося многоугольником, необходимо найти точки пересечения секущей плоскости с ребрами *SB* и *SD* (рис. 85 а). Это позволит найти еще две вершины многоугольника (кроме *K*, *L*, *M*), являющегося сечением пирамиды плоскостью. Секущая плоскость пересекает плоскость основания по прямой *KL*, которая пересекается с прямой *BC* в некоторой точке *P* (рис. 85 б).

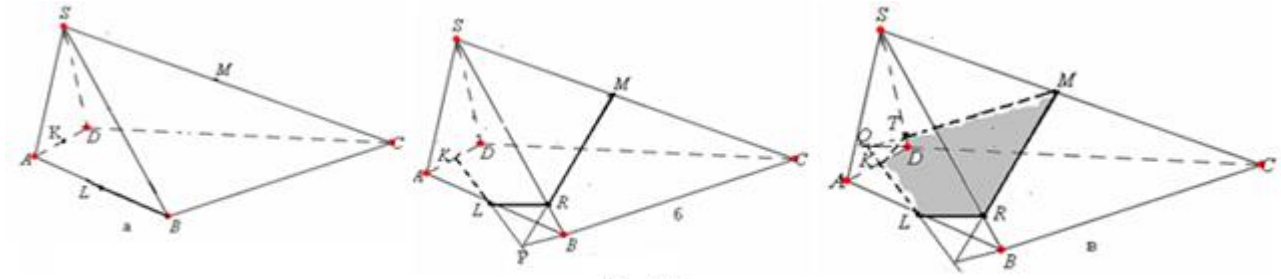


Рис. 85

Точки *P* и *M* принадлежат и секущей плоскости, и плоскости грани *SBC*, то есть прямая *PM* является прямой пересечения секущей плоскости и плоскости грани *SBC*. Следовательно, точка *R* пересечения прямых *SB* и *PM* является точкой пересечения секущей плоскости с ребром *SB*. Точка пересечения *T* секущей плоскости с ребром *SD* находится аналогично: находится точка *Q* пересечения прямых *KL* и *DC*, а *T* — точка пересечения ребра *SD* с прямой *QM*. Пятиугольник *KLRMT* и является сечением пирамиды плоскостью *KLM* (рис. 85 в). ■

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли утверждать, что один из диаметров окружности принадлежит плоскости, если две точки окружности принадлежат этой плоскости?

2. Концы бечевки длиной 2 м прижали к потолку. Прилегает ли к потолку середина бечевки?

3. Через концы одной диагонали параллелограмма и середину второй проведена плоскость. Совпадает ли она с плоскостью параллелограмма?

4. Чтобы придать устойчивость геодезическим инструментам (теодолитам, нивелирам и т. п.), их обычно закрепляют на триногах. Почему?

5. Могут ли три разные плоскости иметь ровно две общие точки?

6. На сколько частей делят пространство три плоскости, если они имеют ровно одну общую точку?

7. Существуют ли в пространстве три такие прямые, которые нельзя одновременно пересечь четвертой прямой?

8. Из четырех данных точек ни через какие три нельзя провести окружность. Могут ли они лежать в одной плоскости?

9. Всегда ли через четыре точки можно провести плоскость?

10. Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Могут ли любые три из них принадлежать одной прямой?

11. Гипотенуза прямоугольного треугольника принадлежит плоскости. Всегда ли ей принадлежит вершина прямого угла, если известно, что этой плоскости принадлежит центр окружности, описанной около треугольника?

Графические упражнения

Постройте рисунок, используя приведенные данные.

1. Прямая *MP* лежит в плоскости α.

2. Прямая *AB* пересекает плоскость α в точке *M*.

3. Плоскость α проходит через прямую *a* и точку *M*, не лежащую на прямой *a*, и пересекает прямую *c* в точке *M*.

4. Прямые *MC* и *MB* пересекают плоскость α в одной точке.

5. Прямые *MC* и *MB* пересекают плоскость α в разных точках.

6. Точка *K* находится вне плоскости треугольника *ABC*, *N* — середина отрезка *KC*.

7. Плоскости α и β пересекаются по прямой *c*. Прямая *AB* лежит в плоскости α и параллельна прямой *c*.

8. Плоскости α и β пересекаются по прямой *l*. Прямая *a* лежит в плоскости α, а прямая *b* — в плоскости β, прямые a и *b* не имеют общих точек.

Первые представления об аксиоматическом методе вы получили при изучении планиметрии. Одной из задач стереометрии является расширение и углубление этих представлений.

Аксиоматический метод является одним из универсальных методов математики. Он используется во всех ее разделах. И это вполне понятно. Важной особенностью математики как науки (возможно, важнейшей!) является дедуктивный характер построения ее теорий, предусматривающий введение новых понятий на основе ранее определённых, доказательство новых утверждений на основе ранее доказанных. Последовательное соблюдение этой идеологии приводит к вопросам: «А что лежит в основе теории»?, «С чего начинается теория?». Ответы на эти вопросы дает аксиоматический метод.

Целесообразность внедрения аксиоматического метода можно обосновать с помощью такой гипотетической ситуации. Пусть два лица искренне стремятся выяснить истинность определенного утверждения, хотя, возможно, относительно этого имеют противоположные взгляды. Тогда они, занимая конструктивную позицию, пытаются данное утверждение толковать как следствие одного или нескольких более простых. А те, в свою очередь, сводят к еще более простым. Эту процедуру они повторяют до тех пор, пока не дойдут до таких утверждений, истинность которых не вызывает сомнений ни у одного лица. Обратная цепочка рассуждений позволяет сделать вывод о правильности данного утверждения.

В связи с этим вполне понятным является стремление древнегреческих математиков выделить утверждения (аксиомы), которые воспринимаются истинными, а остальные правильные утверждения (теоремы) получать с помощью цепочки логических выводов (доказательств) из аксиом. Достаточно удачную реализацию этой идеи предложил около III ст. до н. э. Евклид в знаменитых

«Началах» — книге, которая существенно повлияла на содержание, построение и развитие многих разделов науки, и не только математики.

Аксиоматическая система Евклида тщательным образом изучалась в течение тысячелетий, в определенной мере пересматривалась, дополнялась и совершенствовалась. Совершенный с позиций современной математики перечень аксиом геометрии (их около 20) предложил в конце XIX ст. немецкий математик Д. Гильберт (1862 — 1943). Невзирая на это, геометрию, которую мы изучаем, называют евклидовой геометрией, отдавая дань основателю аксиоматического подхода.

Вместе с усовершенствованием аксиоматического построения геометрии углублялось понимание сущности аксиоматического метода, возможностей его приложения. К системе аксиом сформировались определенные требования. Главные из них такие.

1. **Непротиворечивость**. *Система аксиом является непротиворечивой, если среди утверждений, которые можно получить из аксиом с помощью доказательств, не могут быть такие, которые противоречат друг другу.*

2. **Полнота.** *Система аксиом является полной, если произвольное правильное утверждение теории можно получить из аксиом.*

3. **Независимость.** *Система аксиом является независимой, если ни одна аксиома не является следствием других аксиом.*

Установление отмеченных свойств для конкретной системы аксиом может быть очень сложным заданием. Для системы аксиом геометрии так оно и есть. Стоит заметить, что аксиоматическое построение геометрии, как учебного предмета в средней школе, с соблюдением указанных требований является нереальным делом. Поэтому ограничиваются ее частичной реализацией с широким обращением к практическому опыту, здравому смыслу, интуиции, как это и делается при построении данного курса стереометрии. При этом требования к системе аксиом значительно ослабляются. Это обычно не касается непротиворечивости. Ведь ничего не стоит наука, в которой являются правильными и утверждение, и его отрицание. Неполнота системы аксиом стереометрии компенсируется ссылками на планиметрию, обращением к моделям, опорой на пространственные представления и т п. Например, в предложенной системе аксиом ничего не говорится об измерении расстояний. Возможность такого измерения в каждой плоскости еще не гарантирует, что мы получим одинаковые значения расстояния между точками, помещая их в разные плоскости. Можно было бы добавить аксиому расстояния:

С5. ***Для произвольных двух точек A и B пространства однозначно определено некоторое неотрицательное число AB, которое называется расстоянием между точками, и обладает следующими свойствами:***

1) $AB = BA$;
2) $AB = 0$ ***тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают;***
3) $AC \le AB + BC$, ***причем равенство достигается в том и только в том случае, когда точка B принадлежит отрезку AC.***

Было бы правильным поднять на уровень аксиом и предположение о том, что каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства. Примеры пополнения системы аксиом стереометрии можно было бы продолжить.

Относительно независимости систем аксиом геометрии, то ею часто жертвуют ради упрощения построения теории или других мотивов. Так, из предложенных в данном учебнике аксиом утверждение **С1** о принадлежности прямой плоскости, если они имеют две общие точки, можно доказать как теорему. Действительно, пусть *A и B* — две точки прямой *a,* лежащие в плоскости α. Поскольку в плоскости выполняются утверждения планиметрии, то существует единственная прямая *b* в плоскости α, которая проходит через точки *A* и *B*. Но по аксиоме **С4** через точки пространства *A* и *B* должна проходить единственная прямая, то есть $a = b$, а следовательно, *a* лежит в плоскости α. Рассмотрение утверждения **С1** как аксиомы — это способ обратить внимание на важность этого утверждения в построении стереометрии.

Следует отметить, что существует много геометрий. Наряду с евклидовой геометрией есть аналитическая, алгебраическая, начертательная, проективная, дифференциальная геометрии. И это очень малая часть геометрических теорий. Не вдаваясь в объяснения сущности каждой из указанных геометрий, можно утверждать, что их объединяет цель — исследование свойств фигур и отношений между ними. А различает их перечень рассматриваемых фигур и их свойств, методы исследования.

Много геометрий совместимы с евклидовой. Но существуют и геометрии, которые принципиально отличаются от эвклидовой с самого начала. Их называют ***неевклидовыми***. В них часть аксиом эвклидовой геометрии является ошибочной. Простым примером такой геометрии является геометрия на сфере или сферическая геометрия. Вполне естественно прямыми на сфере называть большие круги, то есть круги на сфере, центр которых находится в центре сферы. Эти круги состоят из дуг, а маленькие такие дуги являются кратчайшими линиями, которые соединяют концы дуги, то есть обладают таким же свойством, как и отрезки. Нетрудно проверить, что в сферической геометрии нет параллельных прямых, то есть двух больших кругов, которые не пересекаются. А существуют геометрии, в которых к данной прямой можно провести не одну параллельную прямую, а много. Открытие таких геометрий стало революцией не только в математике. Поражало осознание того, что неевклидовы геометрии могут быть применены в физике для описания реального мира.

Вопросы для осмысления

1. Правильно ли сформулированы следующие высказывания?

а) Крышка стола является параллелепипедом.

б) Футбольный мяч является шаром.

Указание. Обратите внимание на связь между геометрическими фигурами и объектами, которые они моделируют.

2. Можно ли дать определение понятиям, которые принимаются в геометрии в качестве неопределяемых, например, понятию прямой?

Указание. Вспомните, как задается прямая на координатной прямой. Нельзя ли этот способ задания использовать для определения?

3. Может ли теорема быть ошибочной?
Указание. Обратите внимание на содержание понятия теоремы.
4. Может ли утверждение, которое принимается за аксиому, быть теоремой при другом выборе аксиом?
Указание. Проанализируйте возможность замены аксиомы о задании плоскостей с помощью трех точек другой аксиомой.
5. Сравните стереометрию и игру в шахматы.
Указание. Воспользуйтесь схемами построения стереометрии и игры в шахматы.

Контрольные вопросы

1. Сколько общих точек имеют куб и прямая, если две точки прямой принадлежат кубу?
2. Столяр с помощью линейки проверяет, хорошо ли отшлифована поверхность. Как он это делает?
3. Можно ли три точки разместить так, чтобы через них можно было бы провести две разные плоскости?
4. Могут ли лежать в одной плоскости только три вершины параллелограмма?
5. Почему трехколесный велосипед в неподвижном состоянии устойчив, а двухколесный — неустойчив?
6. Могут ли две плоскости иметь лишь одну общую точку?
7. Всегда ли прямая, пересекающая каждую из двух пересекающихся прямых, лежит с ними в одной плоскости?
8. С помощью двух шнуров плотник определяет, лежат ли концы четырех ножек стола в одной плоскости. Как он это делает?
9. Могут ли три плоскости делить пространство на шесть частей?
10. Можно ли торт разрезать на восемь частей, проведя лишь три разреза?

Задачи

101. Докажите, что через каждую прямую можно провести:
1) ° две разные плоскости;
2) бесконечное множество разных плоскостей.
102. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, расположенную вне прямой,
1) ° содержатся в одной плоскости;
2) образуют плоскость с удалённой прямой, кроме данной точки.
103°. Докажите, что если четыре точки не лежат в одной плоскости, то никакие две прямые, попарно соединяющие эти точки, не пересекаются.
104°. Докажите, что если четыре точки не лежат в одной плоскости, то никакие три из них не лежат на одной прямой.
105°. Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей трапеции лежат в плоскости α. Докажите, что и остальные две вершины трапеции лежат в плоскости α.

106°. Прямые AB и AC пересекаются с некоторой прямой в точках M и N, соответственно. Докажите, что точки M, N, B, C лежат в одной плоскости.

107. Точка D находится вне плоскости треугольника ABC, N — середина отрезка DC. Докажите, что прямые BN и AC не имеют общих точек.

108. Известно, что прямая CD пересекает плоскость треугольника ABC. Докажите, что прямые AB и CD не имеют общих точек.

109*. Докажите, что существуют две прямые пространства, не лежащие в одной плоскости.

110. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M на ребре BB_1, не совпадающая с его концами (рис. 86). На какой прямой лежит точка пересечения прямой:

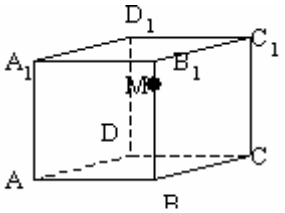


Рис. 86

1) ° MC с плоскостью $A_1B_1D_1$; 2) AM с плоскостью $B_1C_1D_1$;
3)° A_1M с плоскостью ABD; 4) AC с плоскостью BB_1D_1;
5) MD_1 с плоскостью ABC; 6) DM с плоскостью $A_1C_1D_1$.

111. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Отрезок AB лежит в плоскости α и не параллелен прямой c. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью β.

112. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Точки A и C лежат в плоскости α, причем прямая AC не параллельна прямой l, а точка B лежит в плоскости β. Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β.

113. Точки M и P лежат на разных боковых гранях тетраэдра $SABC$. Постройте:

1) точку пересечения прямой MP с плоскостью ABC;
2) линию пересечения плоскости BMP с плоскостью ABC.

114. Точки A, L, K лежат по одну сторону от плоскости α. Прямая AL пересекает плоскость α в точке B, а прямую LK — в точке M. Постройте точку пересечения прямой AK с плоскостью α.

115*. Постройте прямую, которая проходит через точку B, не принадлежащую плоскости α, и не имеет общих точек с α.

116. Две плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая a лежит в плоскости α, прямая b — в плоскости β. Эти прямые пересекаются в точке A. Докажите, что точка A лежит на прямой m.

117. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Докажите, что если прямые a и b пересекаются, то точка их пересечения лежит на линии пересечения плоскостей α и β.

118. Даны две прямые, не лежащие в одной плоскости. Через каждую из них проведена плоскость, пересекающая другую прямую. Докажите, что проведенные плоскости пересекаются по прямой, пересекающей каждую из данных прямых.

119*. Докажите, что если каждые две из данных четырех прямых пересекаются, и все точки их попарных пересечений различны, то данные прямые лежат в одной плоскости. Верно ли данное утверждение для пяти прямых? Как оно изме-

нится, если известно только то, что каждые две из четырех прямых пересекаются?

120*. Фигура состоит не менее чем из двух точек и обладает тем свойством, что прямая, соединяющая две ее произвольные точки, полностью принадлежит этой фигуре. Докажите, что данная фигура может быть лишь прямой, плоскостью или пространством.

121*. Пять точек расположены в пространстве так, что каждые четыре из них лежат в одной плоскости. Докажите, что все пять точек лежат в одной плоскости.

122. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через:

1) ° прямую A_1C_1 и точку B;
2) ° точки B, D, C_1;
3) ° прямые A_1K и BK, где K — середина ребра B_1C_1;
4) точки A_1, D и центр грани DCC_1D_1;
5) точку A и центры граней ABB_1A_1 и ADD_1A_1.

123. Постройте сечение правильного тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через:

1) ° середины ребер AB, BC и SB;
2) ° середины ребер AB, BC и центр грани SBC;
3) середину ребра BC и центры граней SBC, SAB;
4) центры граней SBC, SAB, SAC.
5)

Упражнения для повторения

124. Дан параллелограмм $ABCD$, точки M, N, P, Q — середины соответственно сторон AB, BC, CD, DA.

1) Установите расположение прямых:
а) MN и PQ; б) MP и BC; в) AB и PQ; г) MQ и BD;
2) Установите вид четырехугольника $MNPQ$.
3) Найдите его периметр и площадь, если длины диагоналей параллелограмма $ABCD$ равняются 6 и 8, а угол между ними 60°.

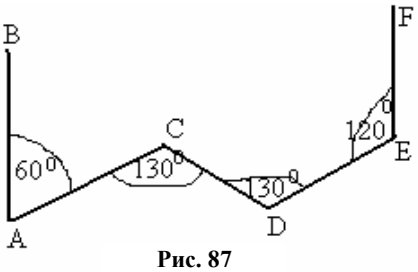


Рис. 87

125. По данным на рис. 87 определите, параллельны ли прямые AB и EF.

126. Через внутреннюю точку треугольника проведите прямую, отсекающую от него треугольник, подобный данному. Сколько решений может иметь задача?

127. Подобны ли два четырехугольника, если:

1) стороны одного четырехугольника пропорциональны сторонам второго;
2) углы одного четырехугольника равняются углам второго?

Итог

Основные неопределяемые фигуры стереометрии:

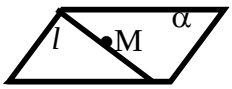
Название фигуры	Физические модели	Изображения физических моделей	Рисунок
Точка	Звезда, острие иглы.		• M
Прямая	Натянутая нить, маршрут самолета.		l
Плоскость	крышка стола, лист бумаги, поверхность земли.		α

Обозначение отношений

$M \in l$ — точка M принадлежит прямой l

$M \in \alpha$ — точка M принадлежит плоскости α

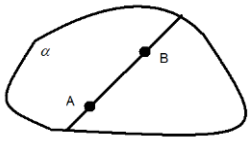
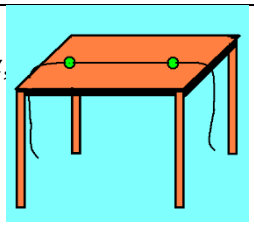
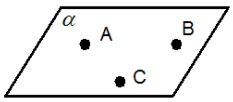
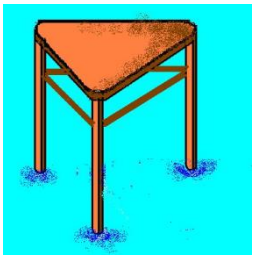
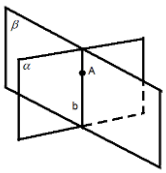
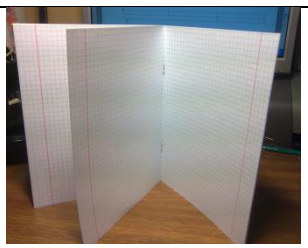
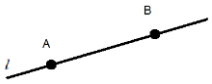
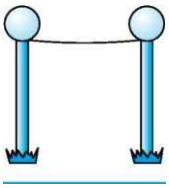
$l \subset \alpha$ — прямая l лежит в плоскости α



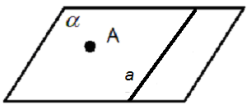
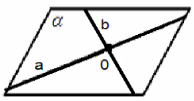
Основные определения

Любую часть пространства, то есть некоторую совокупность его точек, называют *фигурой*. Фигура называется *плоской,* если все ее точки расположены в одной плоскости.

Аксиомы стереометрии

C1. Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она полностью лежит в этой плоскости.	$A \in \alpha$, 	
C2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.	***A, B, C не лежат на одной прямой*** $\Rightarrow \exists!\alpha: A\in\alpha,\ B\in\alpha,\ C\in\alpha$ 	 .
C3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечением является прямая, проходящая через эту точку.	 $A\in\alpha\cap\beta \Rightarrow \alpha\cap\beta=b,\ A\in b$	
C4. Через две произвольные точки пространства можно провести одну и только одну прямую.	 $\exists! l: A\in l,\ B\in l$	

Основные утверждения

Теорема о плоскости, проходящей через прямую и точку	***Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит плоскость и притом лишь одна.***	 $A\notin\alpha \Rightarrow \exists!: a\subset\alpha,\ b\subset\alpha$
Теорема о плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые	***Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.***	 $a\cap b=\{O\} \Rightarrow \exists!\alpha: a\subset\alpha, b\subset\alpha$

§9. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Рассматриваются различные варианты взаимного расположения прямых, устанавливаются признаки, по которым можно различать эти варианты, указаны свойства важного в стереометрии отношения прямых — параллельности.

Как известно из планиметрии, на плоскости две прямые могут совпадать, пересекаться или же быть параллельными. Иллюстрациями этого могут служить траектории движения двух пароходов (рис. 88). Переход от плоскости к пространству увеличивает количество вариантов взаимного расположения двух прямых. Например, попробуйте представить траектории движения двух самолетов, летящих на разных высотах, и один из них движется с севера на юг, а второй — с запада на восток (рис. 89). Как они расположены? Яркой иллюстрацией возможностей взаимного расположения прямых является расположение поперечных рей на корабельных мачтах (рис. 90) и т. п.

Рис. 88

Рис. 89

Рис. 90

Классификация взаимного расположения двух прямых в пространстве и рассмотрение способов установления этого расположения является главной целью данного параграфа.

Рассматривая прямые в пространстве как геометрические образы траекторий прямолинейного движения, мы можем описать возможные варианты взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Прямые могут ***совпадать***. Для этого достаточно, чтобы они имели две общие точки (аксиома **С4**).

Прямые могут ***пересекаться***, то есть иметь только одну общую точку. Такие прямые определяют определенную плоскость, которой они принадлежат (теорема 2 §8). И в каждой плоскости через произвольную точку можно провести бесконечное множество пересекающихся прямых.

Прямые могут не иметь общих точек. Однако назвать их параллельными (как в планиметрии) можно не всегда. Рассмотрение траекторий полета самолетов, как и многих других подобных примеров (расположение тоннелей метро, непараллельных непересекающихся линий электропередач, протянутых одна над другой под углом друг к другу, и т. п.) наводит на мысль, что речь идет о двух принципиально различных способах расположения прямых. Отличие между этими способами заключается в том, что для одних непересекающихся прямых существует плоскость, в которой они лежат (рис. 91, а), а для других — такой плоскости не существует (рис. 91, б).

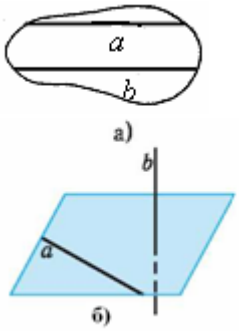


Рис. 91

Прежде всего, дадим определение параллельности прямых.

Две прямые пространства называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Таким образом, параллельность прямых a и b в пространстве сводится к их параллельности в некоторой плоскости. Сохраняется и обозначение параллельности: $a \parallel b$.

Параллельный — от греческого $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\zeta$ *, (pagallelos) — идущий рядом.*

Существование параллельных прямых не вызывает сомнений.

В каждой плоскости можно провести бесконечное множество пар параллельных прямых.

Теперь охарактеризуем другой способ расположения непересекающихся прямых в пространстве.

Две прямые пространства, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися.

Скрещиваемость прямых a и b обозначается так: $a \dot{-} b$.

В дальнейшем, говоря, что *«фигуры не лежат в одной плоскости», мы будем понимать под этим, что не существует такой плоскости, в которой находятся данные фигуры (точки, прямые и др.).*

Понятно, что скрещивающиеся прямые не имеют общих точек. Иначе они совпадают, если общих точек, по крайней мере, две, пересекаются в случае одной общей точки. А это означает, что прямые лежат в одной плоскости.

В первую очередь необходимо доказать, что скрещивающиеся прямые существуют (иллюстрации, которые мы привели выше, не могут заменить математического доказательства). Пусть четыре точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости (рис. 92). Их существование является следствием того, что за пределами каждой плоскости существуют точки пространства. Отсюда вытекает, что прямые AB и CD являются скрещивающимися. Иначе они, как и точки A, B, C, D, принадлежащие им, находятся в одной плоскости.

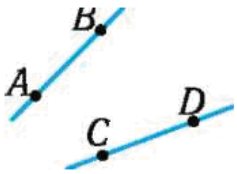


Рис. 92

Проведенные рассуждения можно подытожить следующим образом.

Теорема 1 (*признак скрещивающихся прямых*).

Если две прямые содержат четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то они — скрещивающиеся.

Следовательно, прямые в пространстве могут:

1) ***совпадать***, если они имеют, по крайней мере, две общие точки;

2) ***пересекаться***, если они имеют только одну общую точку;

3) ***быть параллельными,*** если они не имеют общих точек и лежат в одной плоскости;

4) ***быть скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости.

Подобная классификация основывается на установлении количества общих точек у прямых, хотя прямые, не имеющие общих точек, пришлось разделить на два класса по другому признаку — принадлежности одной плоскости.

Понятие параллельности прямых переносится и на отрезки и лучи: ***параллельными считают такие два отрезка, луча, которые лежат на параллельных прямых.*** **Аналогичные договоренности касаются и скрещиваемости отрезков, лучей.**

Пример 1. На рис. 93 параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Установить взаимное расположение прямых, определяемых вершинами этих параллелограммов.

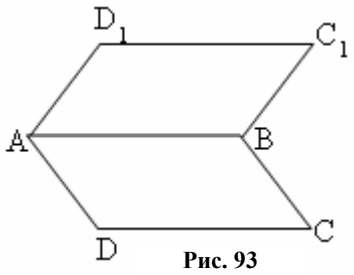


Рис. 93

 Нахождение взаимного расположения двух прямых, определяемых вершинами одного из параллелограммов, не вызывает трудностей. Это чисто планиметрическая задача. На основе приведенного признака скрещиваемости прямых можно утверждать, что скрещивающимися являются, например, прямые D_1C и BD, D_1C и AB, D_1C и AD, C_1D и AC (сколько еще таких пар?).

Есть ли среди указанных прямых параллельные прямые, кроме лежащих в плоскости одного из параллелограммов? Естественно ожидать, что параллельными являются прямые DC и D_1C_1, C_1C и D_1D. Обоснование этого предположения требует, как и в планиметрии, соответствующих признаков. ■

Признаком параллельности прямых в пространстве может служить следующее утверждение, аналог которого хорошо известен из планиметрии.

Теорема 2 (*признак параллельности прямых*).

Если две прямые пространства параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Доказательство приведенного признака параллельности прямых будет приведено позже. Его применение немедленно решает вопрос о параллельности прямых DC и D_1C_1 из примера 1. Ведь $DC \parallel AB$ и $D_1C_1 \parallel AB$. Поэтому, по приведенному признаку, $DC \parallel D_1C_1$. Из параллельности прямых DC и D_1C_1 вытекает, что точки D, C, C_1, D_1 лежат в одной плоскости. А это позволяет завершить рассмотрение всех случаев из примера 1. Например, прямые DD_1 и CC_1 — параллельны, так как четырехугольник DD_1C_1C — параллелограмм ($DC \parallel D_1C_1$, $DC = AB = D_1C_1$). Но тогда прямые CD_1 и DC_1 (они содержат диагонали параллелограмма) пересекаются. На этом завершается рассмотрение взаимного размещения всех пар прямых, которые определяются вершинами параллелограммов, изображенных на рис. 93.

По определению, параллельные прямые лежат в одной плоскости. Единственная ли такая плоскость? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3 (*о единственности плоскости, содержащей параллельные прямые*).

Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

 Существование такой плоскости вытекает из определения параллельности прямых. Если бы существовали две различные плоскости, проходящие через данные параллельные прямые, то это означало бы, что через одну из парал-

лельных прямых и через точку второй прямой проходят две различные плоскости, а это противоречит теореме 1 §8. ■

Понятно, что теоремой 3 можно воспользоваться для задания плоскости с помощью двух параллельных прямых.

Пример 2. На рис. 94 точки *D, E, F, G* — середины соответственно ребер *AS, SC, BC, AB* тетраэдра *ABCS*.

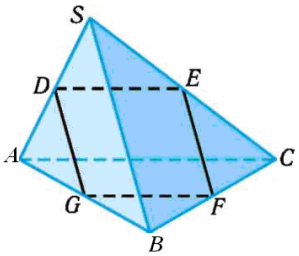


Рис. 94

1) Установить взаимное расположение прямых *AS* и *GE*, *DE* и *GF*, *DG* и *EF*.

2) Найти периметр четырехугольника *DEFG*, если *BS* = 8 см, *AC* = 16 см.

□ 1) Прямые *AS* и *GE* — скрещивающиеся, по признаку скоещивающихся (теорема 1), поскольку точки *A, S, E, G* не лежат в одной плоскости. Если бы это было не так, то и точки *A, B, C, S* должны были лежать в одной плоскости, ведь точка *B* принадлежит прямой *AG*, а точка *C* — прямой *SE*.

Прямые *DE* и *GF* — параллельны, по признаку параллельности прямых (теорема 2). Действительно, отрезки *DE* и *GF* параллельны отрезку *AC*, как средние линии треугольников *ASC* и *ABC*. Аналогично устанавливается параллельность прямых *DG* и *EF*.

2) Из параллельности отрезков *DG* и *EF*, *DE* и *GF* вытекает, что четырехугольник *DEFG* – параллелограмм. Длины его сторон можно найти, пользуясь тем, что его стороны — средние линии соответствующих треугольников. Имеем: $DG = \frac{1}{2}SB = 4$ (см), $DE = \frac{1}{2}AC = 8$ (см). Искомый периметр равен $2DE + 2DG = 8 + 16 = 24$ (см). ■

Ответ. 1) $AS \mathrel{\dot{-}} GE$, $DE \parallel GF$, $DG \parallel EF$; 2) 24 см.

Следующая задача интересна тем, что она позволяет представить конкретную плоскость в виде параллельных прямых, удовлетворяющих определенному условию. Это понадобится при решении многих задач стереометрии.

Задача 1. Прямые *a* и *b* пересекаются. Доказать, что все прямые, параллельные прямой *a* и пересекающие прямую *b*, вместе с прямой *a* образуют плоскость.

□ Пусть прямые *a* и *b* пересекаются в точке *A*. Они однозначно определяют плоскость α, содержащую их (рис. 95, а). Через произвольную точку *B* прямой *b*, отличную от *A*, можно провести прямую *c*, параллельную прямой *a* (рис. 95, б). Понятно, что все эти прямые вместе с прямой *a* образуют плоскость α.

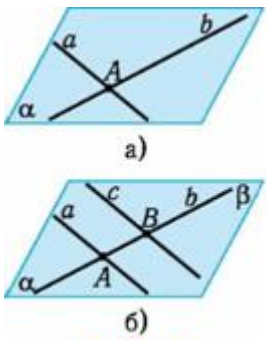


Рис. 95

Каждая прямая *c*, параллельная прямой *a* и пересекающая прямую *b*, принадлежит плоскости α. Действительно, через параллельные прямые *a* и *c* можно провести единственную плоскость β по теореме 3. Тогда плоскости α и β содержат прямую *a* и точку *B*, не лежащую на этой прямой. Поэтому плоскости α и β совпадают. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Могут ли две разные прямые иметь ровно три общие точки?

2. Всегда ли можно провести плоскость через четыре точки?

3. Существуют ли две прямые в пространстве, через которые нельзя провести плоскость?

4. Всегда ли две прямые в пространстве параллельны, если они не имеют общих точек?

5. Могут ли две параллельные прямые пространства не лежать в одной плоскости?

6. Верно ли, что две прямые пространства скрещиваются, если они не имеют общих точек?

7. Пусть прямые *AB* и *CD* параллельны. Как могут быть расположены прямые *AC* и *BD*?

8. Как могут быть расположены прямые *AB* и *CD*, если прямые *AC* и *BD* скрещиваются?

9. Можно ли считать прямолинейные траектории движения двух самолетов параллельными, если известно, что они не пересекаются?

10. Как могут быть расположены прямолинейные траектории двух пуль при двух выстрелах из ружья?

11. Принадлежит ли окружность плоскости, если две хорды окружности принадлежат этой плоскости?

12. На примере вашей классной комнаты покажите, что можно смоделировать с помощью: пересекающихся, параллельных, скрещивающихся прямых?

Упражнения на рисунках

1. На рис. 96 а, б, в, г изображены два параллелограмма, которые лежат в разных плоскостях, и прямые *a, b*. Как расположены прямые *a* и *b* на каждом из рисунков?

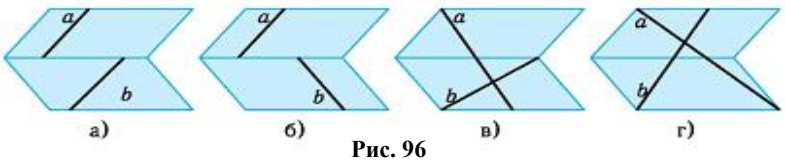


Рис. 96

2. На рис. 97 а, б, в, г изображены точки *A, B, C, D*, не лежащие в одной плоскости, *M, K* — середины соответствующих отрезков, на которых они лежат. Как расположены прямые *AC* и *MK* на каждом из рисунков?

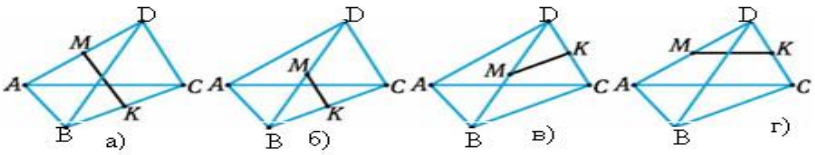


Рис. 97

3. На рис. 98 а, б, в, г изображен тетраэдр $ABCD$ и точки M и N на его ребрах. Укажите прямую, на которой лежит точка пересечения прямой MN с плоскостью ABC на каждом из рисунков.

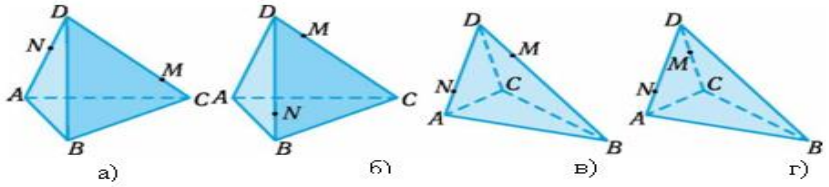


Рис. 98

4. На рис. 99 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M, N, P, K — середины ребер B_1C_1, C_1D_1, CD, AA_1, соответственно, точка O — центр грани $ABCD$. Заполните таблицу, указав расположение прямых a, b (× — пересекаются, ∸ — скрещиваются, || — параллельны) по приведенному образцу.

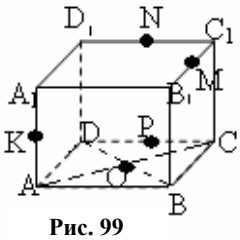


Рис. 99

a и b	NP и AA_1	MN и AA_1	PK и NA_1	C_1O и AA_1	MN и BD	$NO1$ и MB	NO_1 и BC_1
Взаимное расположение							
a × b							
a ∸ b							
$a \parallel b$	+						

5. На рис. 100 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены прямые, которые содержат:

1) ребра A_1B_1 и CD;
2) ребра AB и $DD1$;
3) диагонали противоположных граней AA_1B_1B и CDD_1C_1;
4) диагонали параллелепипеда AC_1 и B_1D?

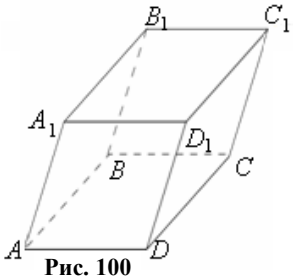


Рис. 100

6. На рис. 101 изображены два прямоугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, не лежащие в одной плоскости. Точки M, N, P, Q — середины соответственно сторон BC, CD, AD_1, BC_1. Установите взаимное расположение прямых :

1) PN и QM; 2) PQ и MN; 3) DQ и MP;
4) PQ и CD; 5) DQ и CP; 6) PN и QM.

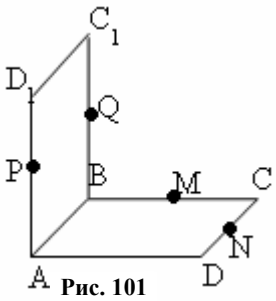


Рис. 101

Приведенный выше признак параллельности прямых (теорема 2) требует обоснования. Это и будет сделано далее. Кроме того, рассмотрим полезные свойства, связанные с параллельностью прямых, наличие которых подказано геометрией плоскости. Но сначала приведем ещё один признак скрещивающихся прямых, более удобный в некоторых случаях.

Теорема 4 (*второй признак скрещивающихся прямых*).

Прямые *a* и *b* скрещивающиеся, если существует плоскость, содержащая прямую *a* и пересекающая прямую *b* в точке, не принадлежащей прямой *a*.

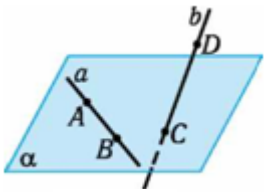


Рис. 102

 Пусть точки *A* и *B* лежат на прямой *a*, и прямая *b* пересекает соответствующую плоскость в точке *C* (рис. 102). Тогда другая точка *D* прямой *b* и точки *A*, *B*, *C* не лежат в одной плоскости, поскольку в таком случае это была бы плоскость *ABC* и прямая *b* принадлежала бы ей, а не пересекала. Поэтому прямые *AB* и *CD*, то есть *a* и *b*, — скрещивающиеся. ■

Теперь перейдем к рассмотрению утверждений, касающихся параллельных прямых.

Теорема 5 (*существование и единственность прямой, параллельной данной*).

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

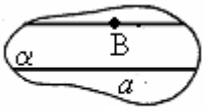


Рис. 103

 Пусть даны прямая *a* и точка *B*, не лежащая на этой прямой. Тогда существует единственная плоскость α, которой принадлежат эти прямая и точка (теорема 1 §8). Из планиметрии известно, что в плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной (рис. 103).

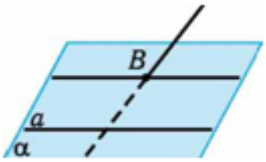


Рис. 104

Любая прямая, проходящая через точку *B* и пересекающая плоскость α, скрещивается с прямой *a* (рис. 104) по теореме 4. Поэтому существует лишь одна прямая, параллельная данной и проходящая через точку, не лежащую на ней. ■

Обратите внимание на то, что планиметрический аналог теоремы 5 является аксиомой о параллельных прямых. Именно ею мы пользовались в доказательстве теоремы. Проведенное там построение относится к так называемым основным построениям. В дальнейшем будем ею пользоваться, не повторяя всех деталей, заменяя их словами «проведем через точку прямую, параллельную данной».

Из планиметрии известно, что если одна из двух параллельных прямых на плоскости пересекает некоторую прямую, то и вторая прямая пересекает эту прямую. В пространстве это не всегда так (приведите примеры!). Аналогом указанного свойства параллельных прямых на плоскости можно считать следующую теорему.

Теорема 6 (*о пересечении плоскости параллельными прямыми*).

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.

 Пусть прямые *a* и *b* параллельны, и точка *A* является точкой пересечения прямой *a* с плоскостью α. Тогда плоскость β, в которой лежат параллель-

ные прямые, пересекает плоскость α по прямой c, проходящей через точку A (рис. 105). Поскольку прямая c лежит в плоскости β и пересекает прямую a в точке A, то и параллельную ей прямую b она пересечет в некоторой точке B. Точка B и является искомой точкой пересечения прямой b с плоскостью α, так как $B \in c$, а $c \subset \alpha$. ■

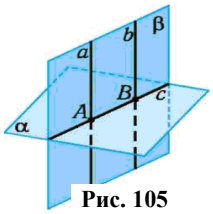


Рис. 105

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы доказать признак параллельности прямых, сформулированный в теореме 2.

Дано: $a_1 \parallel a_3$, $a_2 \parallel a_3$, $a_1 \neq a_2$ Доказать: $a_1 \parallel a_2$.

□ Необходимо доказать, что прямые a_1 и a_2 не имеют общих точек и лежат в одной плоскости. Прямые a_1 и a_2 не имеют общих точек, иначе через одну точку проходили бы две прямые, параллельные прямой a_3, что противоречит теореме о существовании и единственности прямой, параллельной данной (теорема 5).

Проведем через прямую a_1 и произвольную точку M прямой a_2 плоскость α (рис. 106). Прямая a_2 не может пересекать плоскость α, ибо в этом случае, согласно теореме 6, ее пересекали бы параллельная ей прямая a_3 и параллельная прямой a_3 прямая a_1. Однако прямая a_1 лежит в плоскости α. Следовательно, прямая a_2 имеет, кроме точки M, другие общие точки с плоскостью α, а потому, согласно аксиоме $\boldsymbol{C_1}$, она принадлежит плоскости α. Таким образом, прямые a_1 и a_2 лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то есть они параллельны. ■

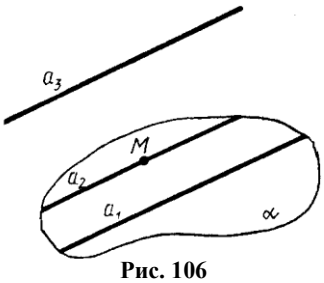


Рис. 106

Рассмотренный признак параллельности прямых одновременно является и свойством отношения параллельности, которое обычно называют ***транзитивностью*** этого отношения.

Транзитивность *— от латинского transeo – перехожу, transitus — переход, прохождение.*

Пример 3. На рис. 107 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки O, O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, K — середина ребра AB. Установить взаимное расположение прямых: 1) AB и D_1C_1; 2) AD_1 и BC_1; 3) AA_1 и OO_1; 4) AD_1 и KC_1; 5) AD и KC_1; 6) AD_1 и KO_1.

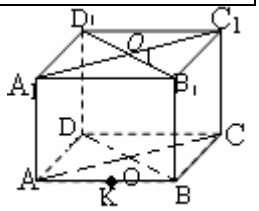


Рис. 107

Установление взаимного расположения прямых будет состоять из формулировки гипотезы об их расположении, на основе анализа рисунка, и ее обоснования с помощью определений, свойств и признаков.

□ 1) Прямые AB и D_1C_1 — параллельны, по признаку параллельности прямых (теорема 2), поскольку $AB \parallel DC$ и $D_1C_1 \parallel DC$ (грани параллелепипеда — прямоугольники!).

2) Прямые AD_1 и BC_1 — параллельны. Это вытекает из того, что четырехугольник AD_1C_1B является параллелограммом. Действительно, по доказанному в 1), $AB \parallel D_1C_1$. Кроме того, $AB = D_1C_1$, так как $AB = DC$, $D_1C_1 = DC$ (противоположные стороны прямоугольника равны!).

3) Прямые AA_1 и OO_1 — параллельны. Применив предыдущие рассуждения, можно доказать, что четырехугольник AA_1C_1C является параллелограммом. Точки O, O_1 — середины противоположных сторон параллелограмма. Поэтому прямая, проходящая через них, параллельна сторонам AA_1 и CC_1.

4) Прямые AD_1 и KC_1 пересекаются. В самом деле, четырёхугольник AD_1C_1K является трапецией с основаниями AK и D_1C_1 (рис. 108), поскольку $AK \parallel D_1C_1$, $AK \neq D_1C_1$. А в трапеции прямые, содержащие боковые стороны AD_1 и KC_1, пересекаются.

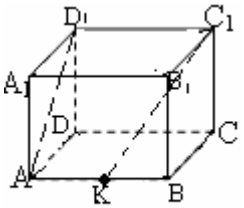


Рис. 108

5) Прямые AD и KC_1 — скрещивающиеся, по признаку скрещиваемости прямых (теорема 1), поскольку точки A, B, C_1, K не лежат в одной плоскости.

6) Прямые AD_1 и KO_1 скрещивающиеся по признаку скрещивающихся прямых (теорема 4). Действительно, прямая AD_1 лежит в плоскости AD_1C_1, которая содержит диагональ BC_1 ($AB \parallel D_1C_1$!). Очевидно, что точка O_1 лежит вне этой плоскости, но тогда прямая KO_1 пересекает плоскость AD_1C_1 в точке K, которая не принадлежит прямой AD_1 (рис. 109). ■

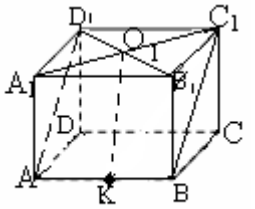


Рис.109

Ответ. 1) $AB \parallel D_1C_1$; 2) $AD_1 \parallel BC_1$; 3) $AA_1 \parallel OO_1$; 4) $AD_1 \times KC_1$; $AD \mathrel{\underline{\cdot}} KC_1$; 6) $AD_1 \mathrel{\underline{\cdot}} KO_1$.

Пример 4. Отрезок AB точкой пересечения O с плоскостью α делится в отношении 5:3, считая от точки A. Точка D плоскости α удалена от точки O на 10 см.

1) Провести через точку B прямую a, параллельную прямой AD, и найти ее точку пересечения C с плоскостью α, если такая точка существует.

2) Найти длину отрезка CD.

□ 1) Условию задачи соответствует рис. 110. Здесь $AO:OB = 5:3$. В первую очередь, необходимо доказать существование точки пересечения искомой прямой a с плоскостью α. Поскольку $a \parallel AD$ и прямая AD пересекает плоскость α, то и прямая a тоже пересекает эту плоскость по свойству параллельных прямых (теорема 6).

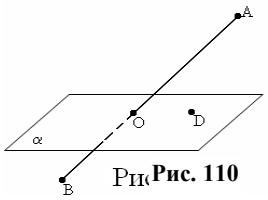


Рис **Рис. 110**

Пусть точка C — точка пересечения прямой a с плоскостью α (рис. 111). По условию, $BC \parallel AD$. Поэтому точки A, B, C, D, O лежат в одной плоскости. И в этой плоскости точка C является точкой сечения прямых a и OD ($a \parallel AD$, OD — секущая). Обоснование положения точки C позволяет ее построить.

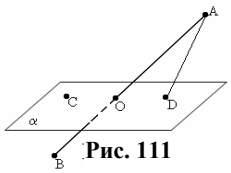


Рис. 111

Построение. В плоскости AOD строим прямую a, проходящую через точку B параллельно AD и находим точку пересечения C ее с прямой OD (рис. 112).

2) Для нахождения длины отрезка CD рассмотрим треугольники COB и AOD (рис. 112). Они подобны по признаку подобия треугольников (углы COB и DOA — вертикальные, а углы BCO и ODA — внутренние разносторонние (накрест лежащие) при параллельных прямых BC и DA и секущей CD). Поэтому $\frac{CO}{OB}=\frac{OD}{AO}$ или $\frac{CO}{OD}=\frac{OB}{AO}$. По условию, $\frac{OB}{AO}=\frac{3}{5}$ или $CO=\frac{3}{5}OD=\frac{3}{5}\cdot 10=6$ (см). Длина отрезка CD равняется 16 см. ■

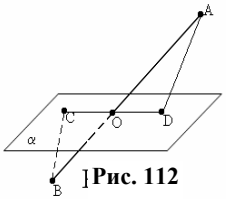


Рис. 112

Ответ: 2) 16 см.

Задачи на построение в курсе планиметрии важны. Это объясняется, в первую очередь, их прикладной направленностью. С помощью рисунков на листе бумаги можно достаточно точно отобразить отношения между геометрическими объектами. Поэтому плоские фигуры иногда просто отождествляют с их изображениями, как и построение на рисунках с построениями на абстрактных фигурах геометрии.

Не менее важную роль рисунки фигур играют в стереометрии, хотя, конечно, они не могут адекватно отображать все их свойства, отношения между их элементами. Поэтому нельзя полностью отождествлять пространственные фигуры с их изображениями, и ***решение задач на построение в стереометрии сводится к доказательству возможности построения, опираясь на аксиомы и уже доказанные теоремы.***

Отметим также, что стремление построить рисунки, более полно отображающие свойства пространственных фигур, требует уточнения самого понятия изображения, разработки правил построения на изображениях, о чем будет идти речь дальше.

Решение задач на построение в стереометрии связано с доказательством определенных утверждений, в частности таких, в которых плоскости определяются с помощью прямых, удовлетворяющих определенным условиям. Примером такого утверждения является задача 1. Рассмотрим ей аналогичную.

Задача 2. Прямые a и b — скрещивающиеся. Доказать, что все прямые, параллельные прямой a и пересекающие прямую b, лежат в одной плоскости и даже образуют эту плоскость.

□ Пусть данные прямые a и b — скрещивающиеся. Проведем через произвольную точку B прямой b прямую a_1, параллельную a (рис. 113). Согласно теореме 4, это построение выполняется однозначно. Прямые a_1 и b пересекаются (почему?). Поэтому они однозначно определяют плоскость β, содержащую их (теорема 2 §7).

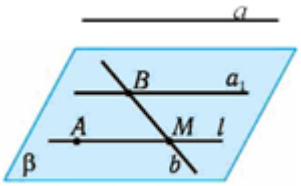


Рис. 113

Проведем в плоскости β через произвольную точку M прямой b, отличную от B, прямую l, параллельную прямой a_1. Эта прямая, согласно признаку параллельности прямых (теорема 2), параллельна прямой a. Поскольку через данную точку пространства можно провести лишь одну прямую, параллельную

данной, то множество всех прямых, параллельных прямой a и пересекающих прямую b, лежит в плоскости β и даже образует ее, поскольку через произвольную точку A плоскости β проходит прямая l, пересекающая b и параллельная a_1 (а потому и a) или совпадающая с ней. ■

Задача 2 отличается от задачи 1 тем, что в случае, когда прямые a и b пересекаются, построенные прямые заполняют не всю плоскость β. Но, если к ним добавить прямую a, то получим плоскость β.

Вопросы для самоконтроля

1. Всегда ли прямая пространства, пересекающая каждую из двух пересекающихся прямых, лежит с ними в одной плоскости?

2. Одинаковое ли содержание имеют утверждения: «Прямые a и b лежат в разных плоскостях» и «Прямые a и b не лежат в одной плоскости»?

3. Могут ли две прямые пространства, которые лежат в разных плоскостях, быть параллельными?

4. Как могут быть расположенными две прямые, если одна из них лежит в некоторой плоскости, а вторая пересекает эту плоскость?

5. Всегда ли через точку пространства можно провести прямую, параллельную данной прямой?

6. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Можно ли их попарно соединить параллельными отрезками?

7. Могут ли прямые a и b быть параллельными, если не существует прямой c, параллельной как a, так и b?

8. Верно ли, что прямая a пересекает прямую b, если она пересекает параллельную ей прямую c?

9. Может ли плоскость пересекать лишь одну сторону параллелограмма?

10. Как могут быть расположенными две прямые, каждая из которых скрещивается с третьей?

11. Может ли прямая, которая скрещивается с одной из двух параллельных прямых, быть параллельной со второй прямой?

12. Верно ли, что две прямые, соответственно параллельные двум скрещивающимся прямым, являются скрещивающимися?

13. Могут ли две прямые быть параллельными, если каждая из них параллельна одной из двух скрещивающихся прямых?

Графические упражнения

Постройте рисунок по приведенным данным:

1. Прямые a, b и c имеют общую точку O и лежат в одной плоскости.

2. Прямые a, b и c имеют общую точку O, но не существует плоскости, в которой лежат все три прямые.

3. Прямые AB и CD являются такими, что точка A *не* лежит в плоскости BCD.

4. На прямой a, пересекающей плоскость α в точке A, выбраны по разные стороны от A точки C и D. Прямые CC_1 и DD_1 параллельны и пересекают плоскость α соответственно в точках C_1 и D_1.

5. Две вершины треугольника ABC лежат в плоскости α, а вершина C не лежит в α. Прямая d пересекает стороны CB и CA соответственно в точках E и F, а плоскость α точке K.

6. Дана плоскость α, точка M на этой плоскости и отрезок AB, который не пересекается с α. Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, которые пересекают данную плоскость в точках A_1 и B_1 соответственно. Точка M лежит на прямой A_1B_1.

7. Прямые a и b лежат в разных плоскостях α, β и пересекаются в точке M.

Следующий пример иллюстрирует специфику задач на построение в стереометрии, где основным является доказательство существования фигур или конструкций, удовлетворяющих определенным условиям. Рисунки имеют вспомогательный характер, они позволяют показать наглядно ситуацию, хотя, имея хорошо развитые пространственные представления, без них можно обойтись.

Пример 5. Две прямые a и b пересекают плоскость α. Через каждую из этих прямых провести плоскости так, чтобы линия пересечения лежала в плоскости α.

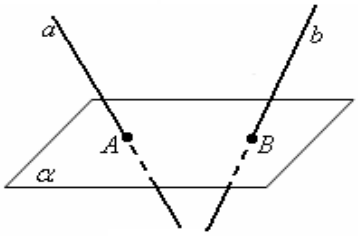


Рис. 114

□ Пусть прямые a и b пересекают плоскость α в точках A и B (рис. 114). Искомую плоскость, которая проходит через прямую a, обозначим через β, а через прямую b — γ. Понятно, что прямая, по которой плоскость β пересекается с плоскостью α, проходит через точку A, а прямая, по которой плоскость γ пересекается с плоскостью α, проходит через точку B. Как следует из условия, эти прямые должны совпадать. Поэтому плоскость β должна проходить через прямые a и AB, а плоскость γ — через b и AB (рис. 115).

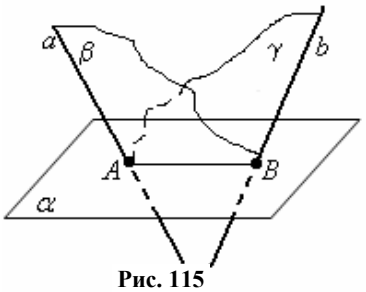


Рис. 115

Главные трудности в решении этой задачи связаны с исследованием: при каких условиях задача не имеет решения, а если имеет, то сколько. Ответ зависит от взаимного расположения прямых a и b.

1) Пусть $a \parallel b$. Тогда $\beta = \gamma$ и задача не имеет решения.

2) Пусть прямые a и b пересекаются в точке их пересечения с плоскостью α, то есть $A = B$. Тогда произвольная прямая c плоскости α, проходящая через точку A, вместе с прямыми a и b определяет две плоскости, пересекающиеся по прямой c (рис. 116). Исключение составляет прямая c, которая является пересечением плоскости α с плоскостью, проходящей через прямые a и b. Таким образом, задача в этом случае имеет бесконечное множество решей.

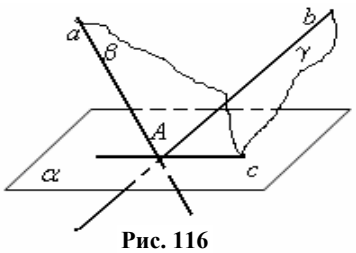


Рис. 116

3) Пусть прямые a и b пересекаются, но $A \neq B$ (рис. 117). Тогда $\beta = \gamma$, и задача решения не имеет.

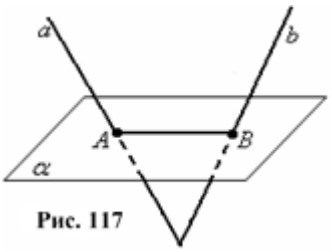


Рис. 117

4) Если же прямые a и b являются скрещивающимися, то плоскости β и γ разные (почему?) и $\beta \cap \gamma = AB$. Поэтому задача в этом случае имеет единственное решение. ■

В этом пункте нам пришлось устанавливать взаимное расположение прямых в пространстве. В дальнейшем такая задача будет касаться прямой и плоскости, двух плоскостей. Эти задачи обычно нельзя решить, опираясь только на соответствующие определения. Вообще, аналогичная ситуация является типичной в геометрии. Действительно, можно ли воспользоваться лишь определениями при доказательстве параллельности прямых даже на плоскости? Ведь прямые бесконечны.

Опыт изучения планиметрии свидетельствует, что установлению тех или иных свойств фигур или отношений между ними помогают ***признаки***. Например, признаки параллелограмма дают возможность установить, что противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то есть четырехугольник является параллелограммом по определению. И таких признаков параллелограмма несколько (назовите, какие вы знаете!). Такие же признаки есть для ромба, прямоугольника и многих других фигур. Широко используются признаки отношений: параллельности, перпендикулярности, равенства, подобия и т. п. (сколько признаков равенства треугольников вы знаете?).

Для установления скрещиваемости прямых приведены два признака (теоремы 1 и 4). Они достаточно близки друг к другу. Признак параллельности прямых в пространстве пока что один. Он считается основным. В дальнейшем будет установлено еще несколько признаков параллельности прямых в пространстве. Кстати, все планиметрические признаки можно применять и в стереометрии. Но для этого необходимо сначала «погрузиться» в плоскость.

Анализируя теоремы, которые были рассмотрены в этом и предыдущем пунктах, можно различать три вида теорем:

1) теоремы, в которых устанавливаются определенные свойства фигур или отношений, их иногда называют свойствами;

2) теоремы, в которых обеспечиваются определенные свойства фигур или отношений, их называют признаками;

3) теоремы, в которых утверждается существование объектов, которые удовлетворяют определенным условиям (теоремы существования), или единственность таких объектов (теоремы единственности), или и то, и другое (теоремы существования и единственности).

Сделаем несколько замечаний относительно третьего вида теорем. Во-первых, это очень важный вид теорем при аксиоматическом построении теории. Если не существует объекта, который удовлетворяет определенным условиям, то не о чем говорить. Во-вторых, доказательства теорем существования и единственности имеют свои особенности, которые полезно знать и использовать. Единственность некоторого объекта часто доказывают методом от противного. Он заключается в том, что сначала допускают существование, по меньшей мере, двух объектов, удовлетворяющих данным условиям. Потом путем логических рассуждений приходят к противоречию. Это противоречие возникло в связи с принятым предположением. Следовательно, оно является неправильным. То есть существует не более одного объекта, который удовлетворяет условиям (а, возможно, не существует и ни одного!).

Иногда единственность объекта устанавливают путем сравнения произвольных двух объектов, которые удовлетворяют данным условиям, и выявлением их совпадения.

Методы доказательства теорем существования также имеют свои особенности. Существует два основных подхода к доказательству таких теорем. Конструктивный метод предусматривает приведение и обоснование алгоритма решения задачи, которая содержится в теореме. Метод исключения заключается в том, что путем перебора всех частных случаев, которые охватывают данное положение, доказывается их невозможность за исключением одного, относительно которого и проводится доказательство. Типичной является ситуация, когда всех случаев два: вывод теоремы и его отрицание, а доказывается невозможность отрицания (идет речь фактически о методе от противного).

В этом пункте на множестве прямых рассмотрены отношения пересекаемости, параллельности, скрещиваемости. Исследование отношений между математическими объектами (числами, фигурами, уравнениями, функциями и т. п.) является важным классом математических задач. Можно даже утверждать, что ***математика — наука о математических объектах и отношениях между ними***. Об этом свидетельствует и ваш опыт изучения математики. Равенство и неравенство во множестве вещественных чисел, равенство и подобие фигур на плоскости, параллельность и перпендикулярность прямых в планиметрии — вот далеко не полный перечень отношений, с которыми вы знакомы.

Задания для осмысления

1. Пусть две прямые скрещиваются. Верно ли, что каждая плоскость, пересекающая одну из прямых, пересекает и другую? Исследуйте этот вопрос для другого расположения прямых. В итоге можно получить признак некоторого расположения двух прямых. Какой?

2. Какие из нижеприведенных утверждений планиметрии являются теоремами-свойствами, теоремами-признаками, теоремами существования, теоремами единственности, теоремами существования и единственности?

1) Диагонали прямоугольника равны между собой.
2) Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую.
3) Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит окружность и при том единственная.
4) Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то четырехугольник является параллелограммом.
5) Какие бы не были две точки A и B, существует один и только один параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B.
6) Касательная к окружности перпендикулярна к её радиусу, проведенному в точку касания.
7) Из каждой точки, лежащей вне круга, можно провести касательную к окружности, ограничивающей этот круг.
8) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

3. Проанализируйте утверждения, приведенные в § 8 и 9, и выясните, к какому типу теорем они относятся.

Контрольные вопросы

1. Верно ли, что прямые, которые не пересекаются и лежат в разных плоскостях, являются скрещивающимися?

2. Могут ли прямые AB и CD пересекаться, если прямые AC и BD являются скрещивающимися?

3. По каждой из двух скрещивающихся нитей ползет по два паука. Могут ли они оказаться в одной плоскости?

4. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

5. Могут ли две прямые быть скрещивающимися, если каждая из них параллельная третьей прямой?

6. Могут ли две прямые быть параллельными, если каждая из них скрещивается с третьей прямой?

7. Верно ли, что две прямые являются скрещивающимися, если каждая из них скрещивается с третьей прямой?

8. Четыре точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Как расположены отрезки, соединяющие середины сторон CD и CB, AD и AB?

9. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. Где расположены все точки D такие, что прямые AB и CD являются скрещивающимися?

10. Какую фигуру образуют все прямые, пересекающие одну из скрещивающихся прямых и параллельные второй?

Задачи

128°. Два равнобедренных треугольника ABC и ABC_1 с общим основанием AB лежат в разных плоскостях. Установите взаимное расположение прямых, содержащих:

1) стороны AC и BC_1; 2) стороны AC и AC_1;

3) средние линии треугольников, не пересекающиеся с AB;

4) высоты треугольников, проходящие через вершины C и C_1.

129°. Две трапеции $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют общее основание AB и лежат в разных плоскостях. Установите взаимное расположение прямых:

1) DC и D_1C_1; 2) AD и BC;

3) D_1C_1 и проходящей через среднюю линию трапеции $ABCD$;

4) AD_1 и DC; 5) D_1C и C_1D.

130. Треугольники ABC и ABD лежат в разных плоскостях; K, L, M, N — середины сторон AC, CB, BD, DA соответственно. Определите взаимное расположение прямых:

1°) KL и MN; 2°) NL и KM; 3) AC и BD.

131. Плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AB и треугольника ABS не совпадают, K, L — середины отрезков AS, BS соответственно. Определите взаимное расположение прямых:

1°) DC и KL; 2°) DL и KC; 3) CB и AS.

132. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, а M, N, P, Q — середины отрезков AB, BC, AD, DC, соответственно. Определите взаимное расположение прямых:

1°) PQ и MN; 2°) QM и PN; 3) AD и BC .

133. Даны плоскость α и отрезок AB, не пересекающийся с ней. Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1 и B_1 соответственно.

1°) Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью α.

2°) Проведите через середину C отрезка AB прямую, параллельную прямой AA_1, и найдите точку ее пересечения C_1 с плоскостью α.

3) Найдите длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$.

134. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α, а через конец B — прямая, пересекающая плоскость α в точке B_1. Точка C лежит между точками A и B на отрезке AB.

1°) Постройте точку пересечения C_1 плоскости α с прямой, проходящей через точку C параллельно прямой BB_1.

2) Найдите длину отрезка BB_1, если $AB = 6$ см; $AC:CC_1 = 2:5$.

135. Плоскость α не совпадает с плоскостью треугольника ABC и проходит через сторону AB. На продолжении стороны AC взяли точку C_1 так, что C лежит между A и C_1.

1°) Постройте точку пересечения B_1 плоскости α с прямой, проходящей через точку C_1 параллельно прямой CB.

2) Найдите длину отрезка BB_1, если $AC:AB = 3:2$ и $CC_1 = 9$ см.

136. Плоскость α проходит через боковую сторону AB трапеции $ABCD$, плоскость которой не совпадает с α.

1°) Постройте точку пересечения K прямой CB с плоскостью α.

2) Найдите длину отрезка KD, если $CD:AB = 2:3$, а $DA = 2$ см.

137. Пусть точка D не лежит в плоскости треугольника ABC; M и N, соответственно, точки пересечения медиан треугольников ABC и DBC.

1°) Определите взаимное расположение прямых AD и BC, DM и AN, AD и MN.

2) Постройте точку пересечения прямой DM с плоскостью, проходящей через прямую AB и середину отрезка CD.

3*) В каком отношении прямая AM делит отрезок DM?

138. Пусть точка D не лежит в плоскости треугольника ABC; точки K, P, L, соответственно, являются серединами отрезков AB, CD, DK; M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

1°) Определите взаимное расположение прямых PM и DK, PM и CB, PL и CK.

2) Постройте точку пересечения прямой DM с плоскостью ABP.

3)* В каком отношении прямая KP делит отрезок DM?

139. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая a пересекает эти плоскости в точках A и B, а прямая b проходит через точку C плоскости α и параллельна прямой a. Постройте точку пересечения прямой b с плоскостью β.

140. Постройте три прямые, две из которых пересекаются, а третья — скрещивается:

1) с каждой из двух пересекающихся прямых;

2) только с первой из них.

141. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через:

1°) вершины A_1, B_1, D; 2°) ребра A_1B_1 и CD;

3) вершины A, A_1 и центр грани DD_1C_1C;

4) вершины D_1, C_1 и центр грани A_1D_1DA;

5) прямые BD_1 и D_1C_1; 6) прямые A_1C и CD_1;

7*) центры граней A_1D_1DA, DD_1C_1C, $A_1B_1C_1D_1$;

8*) центры граней DD_1C_1C, C_1CBB_1; A_1B_1BA.

142. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через:

1°) ребро SA и точку M на ребре BC;

2°) вершину S и точки M и N, лежащие на ребрах AB и BC соответственно;

3°) точки на ребрах SA, SB, SC;

4) вершину C и точки M и N, лежащие, соответственно, на гранях ABC и ASC;

5) вершину A, точку M на ребре SB и точку K в плоскости ABC;

6*) точки M, N и P, лежащие, соответственно, на прямых SA, SC, и BC.

7*) точки M, N и P, лежащие, соответственно, на ребре SA, и в плоскостях ASC, ABC.

143. Докажите, что все прямые, пересекающие две параллельные прямые:
1°) лежат в одной плоскости; 2) образуют плоскость.

144. Пусть *A*, *B*, *C* — точки окружности, лежащей в плоскости α, а точка *D* находится вне плоскости. Докажите, что прямые *DA*, *DB*, *DC* не лежат в одной плоскости.

145. Пусть трапеция *ABCD* лежит в плоскости α, а точка *S* находится вне плоскости. Докажите, что никакие три из четырех прямых *SA*, *SB*, *SC*, *SD* не лежат в одной плоскости.

146. Прямая *c* пересекает каждую из скрещивающихся прямых *a* и *b*. Докажите, что любая прямая, параллельная прямой *c*, скрещивается с *a* или с *b*.

147*. Даны прямые *a* и *b* и точка *P*, которая им не принадлежат. Постройте прямую, проходящую через данную точку и пересекающую прямые *a* и *b*.

148*. Докажите, что в пространстве существуют три попарно скрещивающиеся прямые.

149*. Даны три попарно скрещивающиеся прямые *a*, *b* и *c*. Постройте прямую, пересекающую:
1) *a* и *b* и параллельную *c*;
2) все три прямые.

150*. Каждые две из трех плоскостей пересекаются. Докажите, что линии их пересечения или пересекаются в одной точке, или параллельны, или же совпадают.

151*. Докажите, что линия пересечения двух плоскостей, проходящих через две данные параллельные прямые, параллельна этим прямым.

Упражнения для повторения

152. Пусть две прямые параллельны, а две другие прямые пересекают их в точках *A*, *B*, *C*, *D*. Равны ли треугольники *ABC* и *DCB*?

153. Одна из сторон треугольника разделена на пять равных частей и из точек деления проведены прямые, параллельные одной из двух других сторон, длина каждой из которых 20 см. Определите длины отрезков параллельных прямых, которые содержатся между двумя сторонами треугольника.

154. Определите стороны треугольника, если средняя по длине сторона отличается от каждой из других на 1 см, и проекция большей стороны на среднюю равняется 9 см.

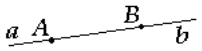
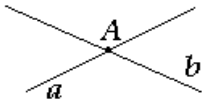
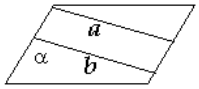
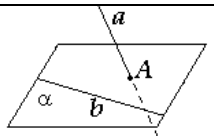
155. Диагонали параллелограмма равняются 17 см и 19 см, а стороны относятся, как 2 : 3. Определите длины сторон.

156. Два подобных параллелограмма имеют общую сторону длиной 3 см. Периметр одного из них равен 8 см. Найдите периметр второго.

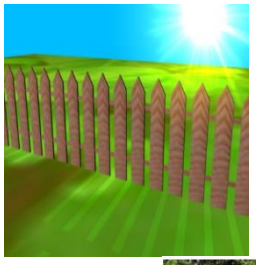
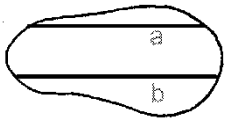
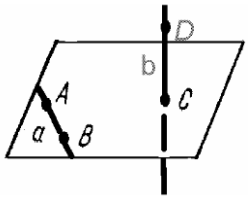
157. В параллелограмме *ABCD* точки *E*, *F* являются серединами, соответственно, сторон *BC* и *AD*. Докажите, что прямые *BF* и *ED* делят диагональ *AC* на три равные части.

Итог

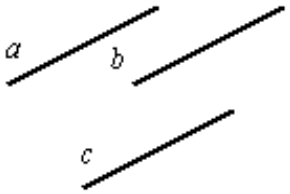
Класификация взаимного расположения двух прямых

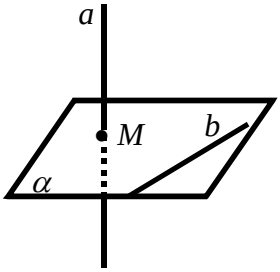
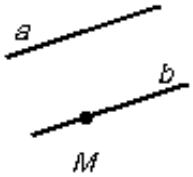
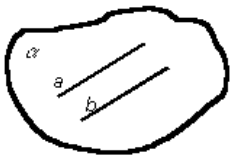
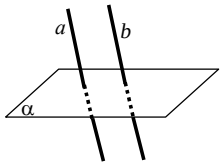
Количество общих точек	Не менее двух	Одна	Нет	
			лежат в одной плоскости	не лежат в одной плоскости
Изображение				
Терминология, обозначение	a и b совпадают ($a = b$)	a и b пересекаются ($a \times b$)	a и b параллельные ($a \parallel b$)	a и b скрещиваются ($a \dot{-} b$)

Основные определения

Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. Две прямые в пространстве, которые не лежат в одной плоскости, называются ***скрещивающимися***.	 	 $a \parallel b$.  $a \dot{-} b$.

Основные утверждения

Признак параллельности прямых в пространстве.	Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.	 $a \parallel b,\ b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

Признак скрещивающихся прямых.	Прямые a и b скрещивающиеся, если существует плоскость, содержащая прямую b и пересекающая прямую a в точке, не принадлежащей прямой b.	 $a \cap \alpha = \{M\},\ b \subset \alpha,$ $M \notin b \Rightarrow a \overset{\cdot}{-} b$
Теорема о существовании и единственности прямой, параллельной данной.	Через точку, которая не лежит на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.	 $M \notin a \Rightarrow \exists! : a \parallel b, M \in b$
Теорема о единственности плоскости, которая содержит параллельные прямые	Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.	$a \parallel b \Rightarrow \exists! \alpha :$ $a \subset \alpha, b \subset \alpha$ 
Теорема о пересечении плоскости параллельными прямыми.	Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.	 $a \parallel b, b \times \alpha \Rightarrow a \times \alpha$

§10. Параллельное проектирование

Рассматривается основной способ, на котором базируется построение рисунков в стереометрии — параллельное проектирование — и его свойства.

При изучении стереометрии одним из важнейших является вопрос об изображении пространственных фигур на плоскости. Его сложность заключается в том, что плоские изображения не могут в полной мере дать представление обо всех особенностях пространственных фигур. Речь идет, в общем, о построении таких ***изображений, которые бы отображали свойства оригинала и давали возможность достаточно просто, наглядно и полно ознакомиться с ним.***

Способ построения изображения фигуры подсказывают нам тени, которые падают от ее пространственной модели. При этом возможны два случая. В первом из них лучи исходят из точечного источника света (лампы, фонаря), размещенного вблизи модели (рис. 118). Этой ситуации отвечает ***центральное проектирование.*** По его законам формируется изображение предметов на сетчатке глаза. Однако центральное проектирование искажает одно из основных отношений геометрии — параллельность (например, нам кажется, что параллельные железнодорожные пути сливаются на горизонте) (рис. 119). Кроме того, создание такого изображения является достаточно сложным делом.

Рис. 118

Рис. 119

Рис. 120

Другой способ изображения пространственных фигур связан с освещением модели параллельными лучами. Такими, например, можно считать солнечные лучи (рис. 120). Соответствующий метод изображения называется методом ***параллельного проектирования.*** Он в достаточной степени удовлетворяет упомянутым условиям. Метод параллельного проектирования широко используется не только в геометрии, но и в черчении. В сущности, мы уже пользовались им при построении рисунков. Опишем этот способ изображения.

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем произвольную точку пространства M, не принадлежащую им. Проведем через точку M прямую m, параллельную прямой a (рис. 121). Прямая m пересечет плоскость α в некоторой точке M_1 (почему?). Эта точка называется параллельной проекцией точки M на плоскость α при проектировании параллельно прямой a. Параллельными проекциями точек прямой a служит точка ее пересечения с плоскостью α, а проекциями точек плоскости α являются сами эти точки.

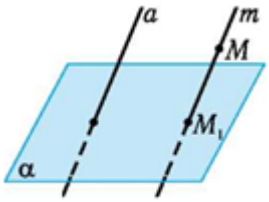


Рис. 121

***Проекция** — от латинского projection — бросание вперед.*

Иногда, когда понятно, на какую плоскость проектируется точка, и параллельно какой прямой выполняется проектирование, будем писать короче: ***параллельная проекция точки М,*** или ***проекция точки М.***

Итак, если заданы плоскость α и прямая a, пересекающая ее, то для каждой точки пространства существует ее параллельная проекция на плоскость α при проектировании параллельно прямой a. Эта проекция определяется однозначно, поскольку через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Плоскость α называется ***плоскостью проекций.*** При замене прямой a на произвольную параллельную ей прямую проекции точек пространства не меняются. Это вытекает из транзитивности отношения параллельности прямых (теорема 2 §9, признак параллельности прямых). Поэтому говорят, что прямая a определяет ***направление проектирования.*** Все прямые, параллельные прямой a, определяют одно и то же направление проектирования и вместе с прямой a называются ***проектирующими прямыми.*** Если спроектируем на плоскость все точки некоторой пространственной фигуры F, то получим фигуру F_1 в плоскости проекций (рис. 122).

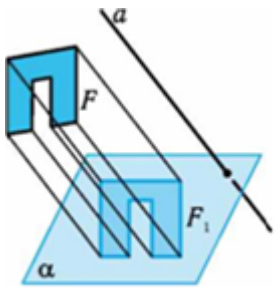


Рис. 122

Параллельной проекцией фигуры называется фигура, составленная из параллельных проекций всех точек данной фигуры.

Договоримся в дальнейшем обозначать плоскость проекций через α, прямую, задающую направление проектирования, через a, а проекцию точки, прямой и т. п. — той же буквой, что и данную фигуру, но с индексом $_1$.

Для построения параллельных проекций фигур и восстановления по ним свойств фигур следует знать свойства параллельного проектирования.

Понятно, что ***проекцией каждой проектирующей прямой является точка.***

Далее**, в теоремах 1 — 3, речь будет идти о *проектировании прямых и отрезков, не лежащих на проектирующих прямых.***

Одно из важнейших свойств параллельного проектирования хорошо иллюстрируется получением прямолинейной тени от нити или провода.

Теорема 1 *(свойство параллельной проекции прямой и отрезка).*

Параллельной проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка — отрезок.

На рис. 123 прямая l проектируется на прямую l_1, а отрезок AB проектируется на отрезок A_1B_1.

Плоскость, образованную совокупностью проектирующих прямых, пересекающих данную прямую l, будем называть ***проектирующей плоскостью*** для прямой l. *Проекция* прямой l является пересечением плоскости проекций с проектирующей плоскостью для этой прямой.

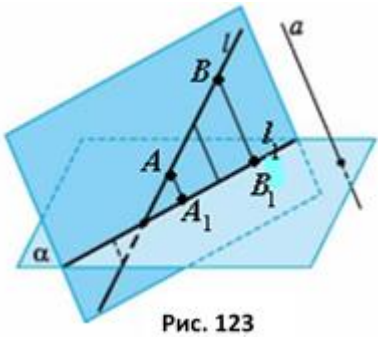


Рис. 123

Следующее свойство параллельного проектирования можно считать обоснованием известного факта: солнечные тени от параллельных столбов — параллельны.

Теорема 2 *(свойство проекции параллельных прямых).*

Проекции параллельных прямых — параллельны или совпадают.

На рис. 124,а) параллельные прямые l, m проектируются на параллельные прямые l_1, m_1, а для прямых p и q на рис.124,б) проектирующие прямые — общие, поэтому они проектируются на одну прямую $p_1 = q_1$.

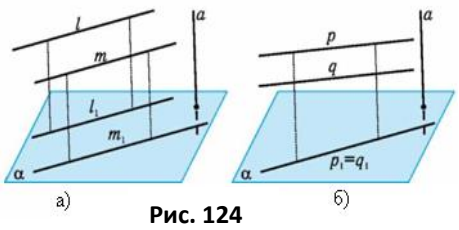


Рис. 124

При параллельном проектировании длины отрезков, вообще говоря, изменяются. Тень от вертикального столба может быть и короче, и длиннее столба, в зависимости от положения Солнца над горизонтом. Вместе с тем, можно наблюдать пропорциональную зависимость между длинами параллельных столбов и их теней.

Теорема 3 *(об отношении длин проекций параллельных отрезков).*

Отношение длин проекций двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин этих отрезков.

На рис. 125 отрезки AB и CD — параллельны. Если $AB : CD = m : n$, то для их параллельных проекций $A_1B_1 : C_1D_1 = m : n$.

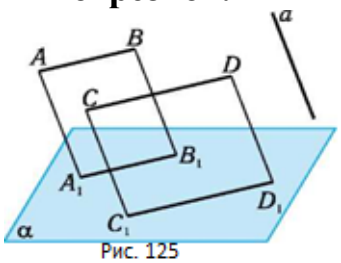


Рис. 125

С помощью рассмотренных основных свойств параллельного проектирования легко описать проекции простейших плоских фигур.

Речь идет о случае, когда *проектирующая прямая пересекает фигуру не более чем в одной точке.*

Теорема 4 *(свойства параллельных проекций плоских фигур).*

1. Проекцией угла является угол (рис. 126).

2. Проекцией треугольника является треугольник (рис. 127).

3. Проекцией параллелограмма является параллелограмм (рис. 128).

4.Проекцией трапеции является трапеция (рис. 129).

5.Проекцией *n*-угольника является *n*-угольник (рис. 130).

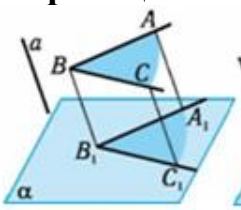


Рис. 126

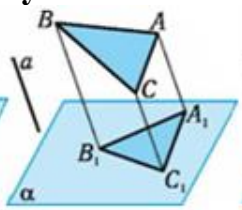


Рис. 127

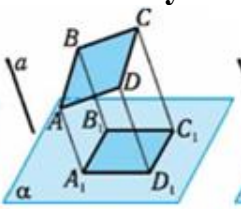


Рис. 128

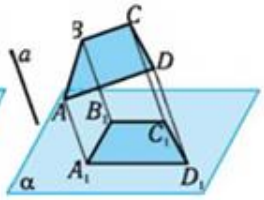


Рис. 129

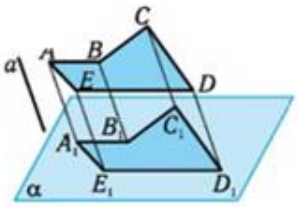


Рис. 130

Если же проектирующая прямая пересекает плоскую фигуру более чем в одной точке, то проекцией фигуры является отрезок или другое множество точек прямой.

Понятно, что параллельная проекция плоской фигуры сохраняет далеко не все свойства оригинала. В первую очередь это касается свойств, связанных с измерениями. В общем случае при параллельном проектировании не сохраня-

ются не только длины, но и величины углов. В то же время параллельная проекция фигуры содержит много информации о самой фигуре.

Пример 1. Дана параллельная проекция равнобедренного треугольника. Построить проекцию:

1) медианы, проведенной к одной из боковых сторон;

2) высоты, опущенной на основание треугольника.

 Пусть даны равнобедренный треугольник ABC с основанием BC (рис. 131, а) и его параллельная проекция — треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 131, б).

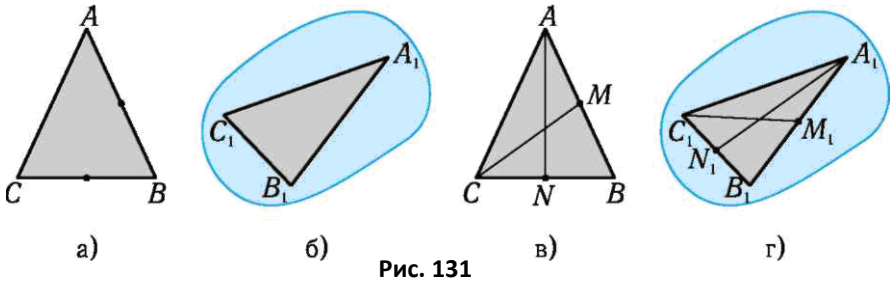


Рис. 131

1) Если CM — медиана к боковой стороне AB, то M — середина отрезка AB (рис. 131, в). Тогда проекция M_1 точки M, согласно теореме об отношении длин проекций параллельных отрезков, является серединой проекции A_1B_1 стороны AB. Поэтому отрезок C_1M_1 – проекция медианы CM.

Построение. Строим проекцию точки M, это середина M_1 отрезка A_1B_1 (рис. 131, г). Отрезок C_1M_1 является проекцией медианы, проведенной к одной из боковых сторон по теореме 1.

2) Учитывая, что высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является одновременно и медианой, для построения ее проекции достаточно построить проекцию медианы AN.

Построение. Строим проекцию точки N, это середина N_1 отрезка B_1C_1 (рис. 131, г). Тогда отрезок A_1N_1 является проекцией высоты, опущенной на основание треугольника. ■

Чтобы выполнить построения элементов плоских фигур на проекционном рисунке, сначала выполняют их на оригинале, то есть на изображении той фигуры, проекция которой изображается.

Чтобы различать оригинал и его проекцию, будем изображать проекцию на изображении плоскости проекций (см. рис. 131, б, г).

Пример 2. Точки A и B находятся по одну сторону от плоскости α; A_1, B_1 — их параллельные проекции на эту плоскость, $AA_1 > BB_1$.

1) Построить точку пересечения K прямой AB с плоскостью α.

2) Найти расстояние между серединой отрезка KB и ее проекцией на плоскость α, если $KB_1{:}B_1A_1 = 3{:}1$ и $AA_1 = 8$ см.

 1) Построим рисунок, соответствующий условию примера (рис. 132, а), пользуясь определением параллельной проекции. Прямые AA_1 и BB_1 — параллельны, а потому лежат в плоскости AA_1B_1. Плоскость AA_1B_1 пересекает плоскость α по прямой A_1B_1. Прямая AB лежит в плоскости AA_1B_1. Поскольку $AA_1 > BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$ (четырехугольник AA_1B_1B — трапеция с основаниями AA_1 и

BB_1), то прямая AB пересекает прямую A_1B_1 в некоторой точке K. Эта точка и является точкой пересечения прямой AB с плоскостью α, ведь прямая A_1B_1 лежит в плоскости α.

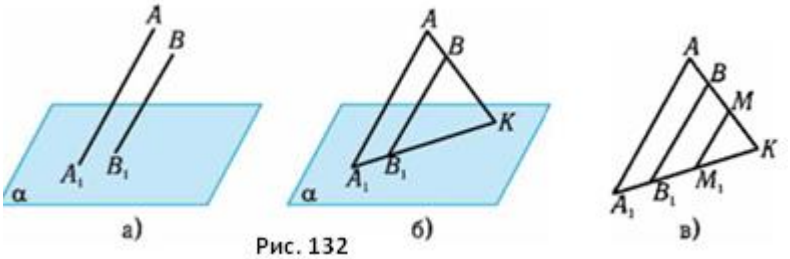


Рис. 132

Построение. Проводим прямые AB и A_1B_1, находим точку K их пересечения (рис. 132, б).

2) Из решения предыдущего задания вытекает, что данное задание сводится к планиметрической задаче. Изобразим его условие на рис. 132, в), где M — середина отрезка BK, $MM_1 \parallel BB_1$, $AA_1 = 8$ см, $KB_1 : B_1A_1 = 3 : 1$. Необходимо найти длину отрезка MM_1. По построению, треугольники MM_1K и AA_1K — подобны ($AA_1 \parallel MM_1$). Поэтому справедливо равенство: $\frac{MM_1}{AA_1} = \frac{KM_1}{KA_1}$.

Так как $AA_1 = 8$ см, то для нахождения MM_1 осталось найти отношение $KM_1 : KA_1$ или $KA_1 : KM_1$. По условию, $B_1A_1 = \frac{1}{3}KB_1$. Поэтому

$\frac{KA_1}{KM_1} = \frac{KB_1 + B_1A_1}{KM_1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{KB_1}{KM_1} = \frac{8}{3}$. Таким образом, $MM_1 = AA_1 \cdot \frac{KM_1}{KA_1} = 8 \cdot \frac{3}{8} = 3$ (см).

■ **Ответ. 2)** 3 см.

Рис. 133

Говоря о параллельных проекциях основных плоских фигур, нельзя обойти вниманием окружности. Представление о форме параллельной проекции круга и соответствующей ему окружности можно получить, экспериментируя с тенью картонного круга. Этот эксперимент можно смоделировать с помощью цилиндрического стакана с жидкостью. Если его наклонить (рис. 133), то поверхность жидкости можно рассматривать как параллельную проекцию дна стакана, которое имеет форму круга. Понятно, что направление проектирования параллельно оси симметрии стакана, а плоскость проекции — плоскость поверхности жидкости. Такую же форму имеют колбасные срезы (рис. 134). Их можно считать параллельными проекциями поперечных сечений (кругов) вдоль колбасного батона. Эти рассуждения позволяют сформулировать определение.

Рис. 134

Параллельная проекция окружности называется эллипсом.

На плоскости эллипс изображают в виде овала (рис. 135). Эта фигура играет заметную роль в математике и естествознании. Достаточно сказать, что траектории движения Земли и других планет вокруг Солнца — эллиптические.

Рис. 135

Эллипс обладает многими замечательными свойствами. Некоторые из них можно принимать в качестве его определения. Например, *эллипс является растянутой (или сжатой) окружностью от её диаметра (или к её диаметру).*

Эллипс — от греческого ἔλλειψις (elleipsis) — упущение, недостаток, недостача.

Понятно, что параллельной проекцией круга является часть плоскости, ограниченная эллипсом.

Пример 3. Дана параллельная проекция круга и его диаметра. Постройте проекцию диаметра, перпендикулярного к данному.

☐ Пусть рис. 136 а представляет оригинал конструкции, то есть круг с центром O, данный диаметр AB, а рис. 136 б — их проекции. Отметим, что

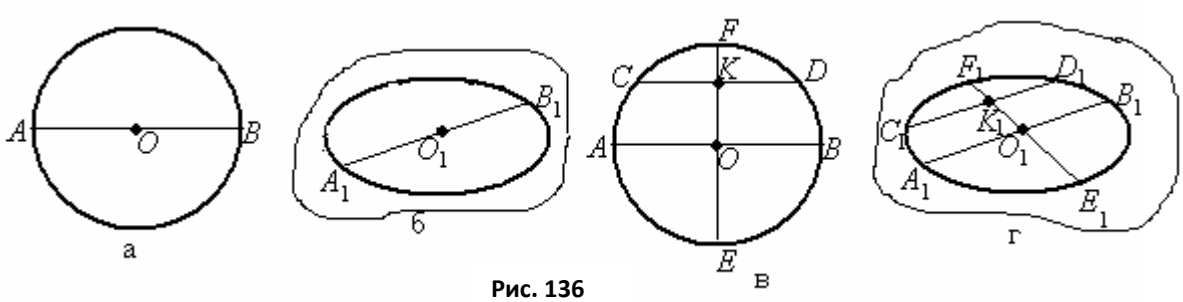


Рис. 136

центр O проектируется в середину O_1 отрезка A_1B_1. Поскольку величины углов, а потому и перпендикулярность при проектировании не сохраняется, то попробуем использовать другие свойства проектирования для нахождения проекции диаметра EF, перпендикулярного к AB (рис. 136 в). Этот диаметр делит произвольную хорду CD, параллельную AB, пополам. Проекцией хорды CD является хорда эллипса C_1D_1, параллельная A_1B_1, а проекцией ее середины K — середина K_1 отрезка C_1D_1 (рис. 136 г). Проекцией диаметра EF является хорда эллипса, проходящая через точки O_1 и K_1.

Построение. Проводим в эллипсе произвольную хорду C_1D_1, параллельную A_1B_1 (она является проекцией некоторой хорды круга, параллельной AB). Через середины O_1 и K_1 отрезков A_1B_1 и C_1D_1 проводим хорду эллипса. Она и является проекцией диаметра круга, перпендикулярного к данному. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Могут ли параллельные проекции двух точек совпадать?

2. Может ли параллельной проекцией прямой быть луч?

3. Всегда ли параллельной проекцией прямой является прямая?

4. Могут ли параллельные проекции двух параллельных прямых совпадать?

5. Могут ли проекции двух пересекающихся прямых быть параллельными?

6. Пересекаются ли прямые, если их проекции пересекаются?

7. Верно ли утверждение, что проекция середины отрезка является серединой его проекции?

8. Может ли длина проекции отрезка быть меньше длины самого отрезка?

9. Может ли параллельная проекция параллелограмма быть треугольником?

10. Может ли параллелограмм быть параллельной проекцией трапеции?

Упражнения на рисунках

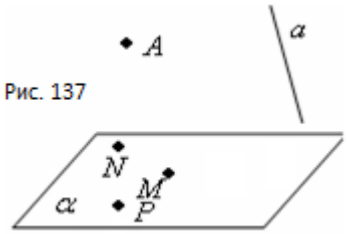


Рис. 137

1. На рис. 137 изображена плоскость проекции α, направление проектирования *a* и точка *A*. Какая из точек *M*, *N*, *P* может быть параллельной проекцией точки *A*?

2. Какой из рис. 138 *а, б*, в, г не может быть изображением параллельных проекций прямых *a* и *b* на данную плоскость, если прямые *a* и *b*: 1) параллельны; 2) пересекаются; 3) скрещивающиеся?

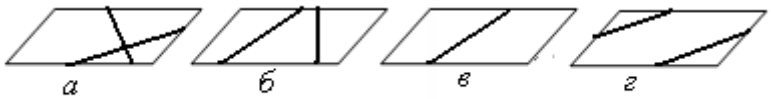


Рис. 138

3. Какой из рис. 139 *а* - *е* не может быть изображением параллельной проекции угла на плоскость, если угол является: 1) острым; 2) тупым; 3) прямым?

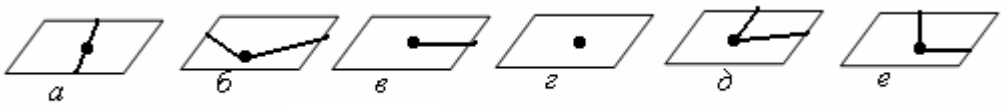
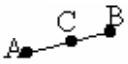


Рис. 139



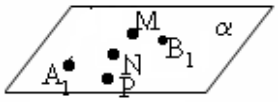


Рис. 140

4. На рис. 140 изображены точки *A, B* и их параллельные проекции на плоскость α. Какая из точек *M*, *N*, *P* может быть изображением проекции точки *C*, принадлежащей отрезку *AB*?

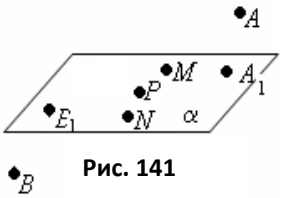


Рис. 141

5. На рис. 141 изображены точки *A, B* и их параллельные проекции на плоскость α. Какая из точек *M*, *N*, *P* может быть точкой пересечения отрезка *AB* с плоскостью α?

6. На каком из рис. 142 *а* - *д* может быть изображена параллельная проекция треугольника на данную плоскость, если он: 1) равносторонний; 2) равнобедренный; 3) прямоугольный?

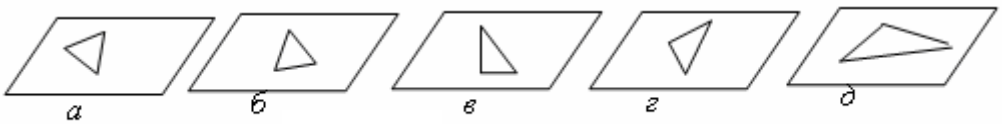


Рис. 142

7. На каком из рис. 143 *а* - *д* может быть изображена параллельная проекция четырехугольника на данную плоскость, если он является: 1) параллелограммом; 2) квадратом; 3) прямоугольником; 4) трапецией; 5) равнобокой трапецией?

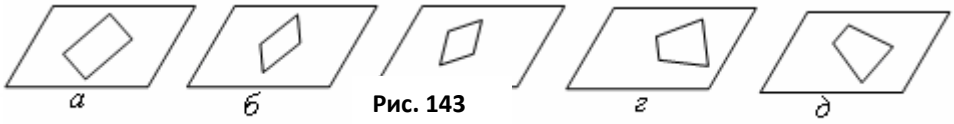


Рис. 143

8. На каком из рисунков 144, 145 представлены тени от столбиков при их освещении Солнцем, а на каком — фонариком?

Рис. 144 Рис. 145

Приведем доказательство свойств проектирования, представленных выше.

Доказательство теоремы 1 о параллельной проекции прямой и отрезка.

 Пусть даны плоскость проекций α, направление проектирования, заданное прямой a, и прямую l, $l \not\parallel a$ (рис. 146, а). Чтобы построить проекцию прямой l, нужно через все ее точки провести прямые, параллельные прямой a, и рассмотреть точки пересечения их с плоскостью α. Из задач 1, 2 §9 вытекает,

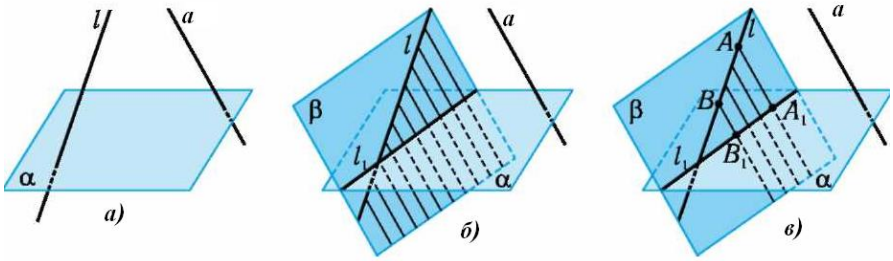


Рис. 146

что совокупность проведенных прямых образует плоскость β. Прямая l_1 пересечения плоскостей α и β (рис. 146, б) и является параллельной проекцией прямой l на плоскость α при проектировании параллельно прямой a.

Действительно, каждая точка прямой l_1 является точкой пересечения плоскости α с проектирующей прямой, проходящей через некоторую точку прямой l, то есть является параллельной проекцией некоторой точки прямой l. И наоборот, каждая проектирующая прямая, пересекающая прямую l, лежит в плоскости β. Таким образом, проекция каждой точки прямой l принадлежит прямой l_1.

Если на прямой l задан отрезок AB, то проекции его точек расположены на проекции прямой l, то есть на l_1. Из построения проекций точек прямой l вытекает, что проекции точек, содержащихся между точками A и B, расположены между проекциями A_1 и B_1 точек A и B (рис. 146, в), и наоборот. Таким образом, проекцией отрезка является отрезок. ■

Доказательство теоремы 2 о проекциях параллельных прямых.

 Пусть даны плоскость проекций α, прямая *a*, определяющая направление проектирования, и параллельные прямые *b* и *c*.

Если некоторая проектирующая прямая пересекает обе прямые *b* и *c*, то проектирующие плоскости для этих прямых совпадают с плоскостью β, проходящей через параллельные прямые *b* и *c* (рис. 147). Такая плоскость определяется прямыми *b* и *c* однозначно (теорема 5 §8), а проекции прямых *b* и *c* совпадают с пересечением общей проектирующей плоскости с плоскостью α.

Если же не существует проектирующей прямой, пересекающей обе прямые *b* и *c*, то проекции b_1 и c_1 этих прямых параллельны. Действительно, допустим, что у прямых b_1 и c_1 есть общая точка *M* (рис. 148). Тогда проектирующая прямая, проходящая через точку *M*, пересечёт и прямую *b*, и прямую *c*. То есть общая проектирующая прямая существует. Это противоречие и доказывает параллельность проекций b_1 и c_1.

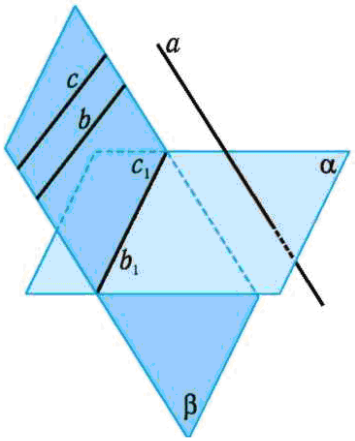


Рис. 147

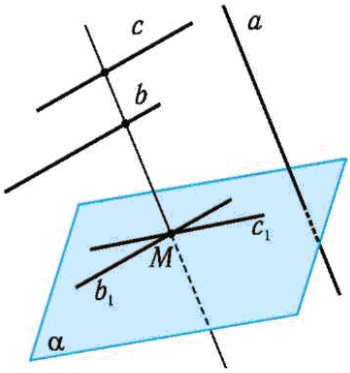


Рис. 148

■**Доказательство теоремы 3 об отношении длин проекций параллельных отрезков.** Сначала рассмотрим случай, когда данные отрезки *AB* и *BC* лежат на одной прямой и имеют общий конец *B* (рис. 149).

Проектирующие прямые AA_1, BB_1, CC_1 — попарно параллельны и лежат в одной проектирующей плоскости вместе с данными отрезками *AB*, *BC* и их проекциями A_1B_1 и B_1C_1. Проведем в этой плоскости через точку *B* прямую A_2C_2, параллельную прямой A_1C_1, где $A_2 \in AA_1$, $C_2 \in CC_1$. Треугольники ABA_2 и CBC_2 — подобны (почему?).

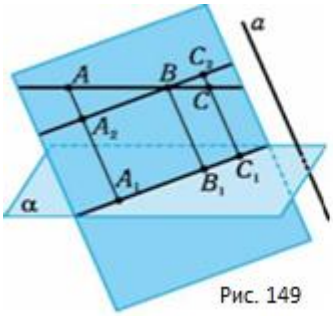


Рис. 149

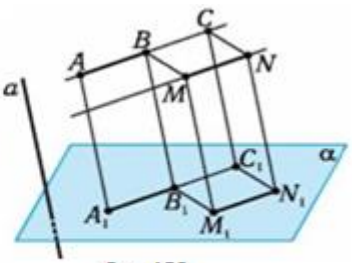


Рис. 150

Из подобия этих треугольников и равенств $A_1B_1 = A_2B$, $B_1C_1 = BC_2$, имеем: $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$.

Случай, когда данные отрезки *AB* и *MN* расположены на параллельных прямых, сводится к предыдущему. Для этого нужно один из отрезков (например, *MN*), отложить на прямой *AB* от точки *B* (рис. 149) и воспользоваться тем, что параллельные отрезки, равные между собой, имеют равные между собой проекции. Действительно, четырехугольник *BMNC* является параллелограммом ($BC \parallel MN$ и $BC = MN$). Согласно теореме 2, прямые B_1C_1 и M_1N_1 — параллельны или совпадают. В первом случае четырехугольник $B_1M_1N_1C_1$ является паралле-

лограммом ($B_1C_1 \parallel M_1N_1$ и $B_1M_1 \parallel C_1N_1$). Поэтому $B_1C_1 = M_1N_1$, то есть проекции равных отрезков равны. А случай, когда прямые B_1C_1 и M_1N_1 совпадают, рекомендуем рассмотреть самостоятельно. ■

Доказательство теоремы 4 о проекциях плоских фигур.

 Пользуясь теоремами 1 — 3, нетрудно доказать теорему 4. Докажем, например, что проекцией трапеции является трапеция. Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны и не равны. Проекцией четырехугольника является четырехугольник (мы договорились о том, что проектирующая прямая не пересекает плоскую фигуру более чем в одной точке). Проекциями отрезков являются отрезки, по теореме 1, а проекциями параллельных отрезков — оснований трапеции — являются параллельные отрезки, по теореме 2 (налагаться они не могут согласно договоренности). Осталось применить теорему 3. Отношение проекций оснований не равно единице. Таким образом, проекцией трапеция является трапеция.

Аналогично доказываются другие утверждения теоремы 4 (докажите их самостоятельно). ■

Задача 1. Даны три точки, не лежащие на одной прямой и находящиеся по одну сторону от плоскости проекций, и их параллельные проекции. Построить линию пересечения плоскости проекции с плоскостью, проходящей через данные точки.

 Пусть A, B, C — данные точки, α — плоскость проекций, A_1, B_1, C_1 — проекции данных точек (рис. 151).

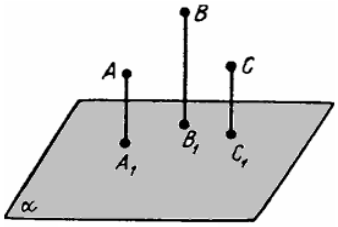


Рис. 151

Чтобы построить линию пересечения плоскостей, достаточно найти две ее точки. Искомая прямая должна содержать точки пересечения прямых AB и BC с плоскостью α (почему?). Для построения точки M пересечения прямой AB с плоскостью α проведем плоскость, проходящую через параллельные проектирующие прямые AA_1 и BB_1. Эта плоскость является проектирующей для прямой AB, и искомая точка M содержится в этой плоскости (почему?). Для построения точки M достаточно найти точку пересечения прямых AB и A_1B_1 (рис. 152). Аналогично строим точку пересечения N прямой BC с плоскостью α. Прямая MN — искомая. Эту прямую называют ***следом*** плоскости ABC на плоскости проекций α.

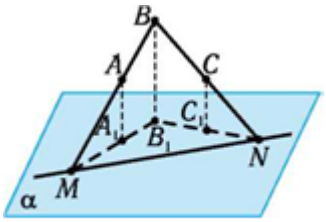


Рис. 152

Анализируя приведенное построение, можно обнаружить условия существования следа плоскости ABC на плоскости проекций α. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются тогда и только тогда, когда длины отрезков AA_1 и BB_1 различны (почему?). Аналогичный вывод можно сделать и относительно прямых BC и B_1C_1, AC и A_1C_1. Таким образом, если длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 равны, то нельзя построить след плоскости ABC на плоскости проекций α, то есть эти

плоскости непересекающиеся. Если хотя бы два из этих отрезков имеют различные длины, то такое построение возможно. ■

Из приведенных соображений можно сделать вывод, полезный для построения следа плоскости *ABC*. **Если длины отрезков** AA_1, BB_1, CC_1 **отличаются мало, то след плоскости** *ABC* **на плоскости проекций α будет очень удалён от проекций точек** *A, B, C*. **Поэтому при выполнении построения следа на листе бумаги возникают трудности: след может не поместиться на рисунке.**

Пример 4. Построить на плоскости грани *ABC* тетраэдра *ABCD* след плоскости α, делящей ребро *AD* пополам, а ребра *BD* и *CD* в отношении 2 : 1 и 1 : 2 соответственно, считая от точки *D*.

□ Пусть плоскость α пересекает ребра *AD, BD, CD* тетраэдра *ABCD* в точках *K, M, L* соответственно (рис. 153, а). Задача заключается в построении следа плоскости *KML* на плоскости *ABC*. Для этого достаточно построить две точки линии пересечения этих плоскостей.

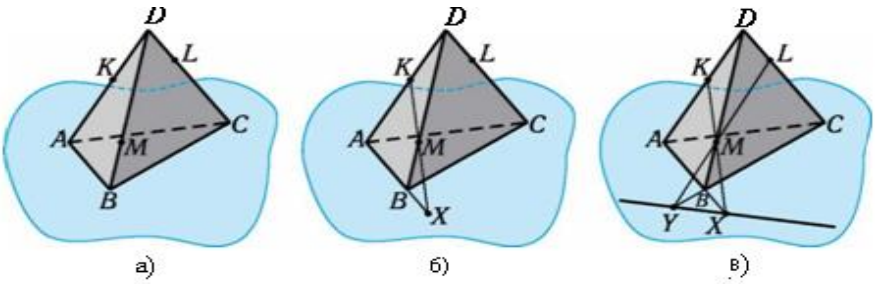


Рис. 153

Прямые *KM* и *AB* лежат в одной плоскости и пересекаются. Это вытекает из того, что точки *K* и *M* делят стороны треугольника *ABD* в разных отношениях (вспомните теорему Фалеса!). Обозначим точку пересечения прямых *KM* и *AB* через *X* (рис. 153, б)

Аналогично обосновывается, что прямые *LM* и *CB* пересекаются и строится вторая точка *Y* — точка пересечения прямых *LM* и *BC* (рис. 153, в). Следовательно, следом плоскости α на плоскости *ABC* является прямая *XY*. ■

Пример 5. Дана параллельная проекция прямоугольной трапеции *ABCD*, где ∠*DAB* = 90°, боковая сторона *AB* равняется меньшему основанию *BC*. Построить:

1) проекцию высоты трапеции, проведенной из вершины *C*;
2) проекции биссектрис углов *ABC* и *BAD*.

□ Пусть *ABCD* — данная трапеция (рис. 154 а) и $A_1B_1C_1D_1$ — ее проекция (рис. 154 б).

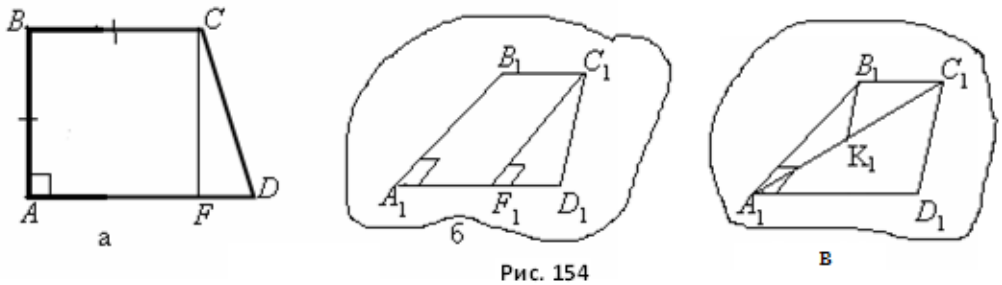


Рис. 154

1) Из условия вытекает, что боковая сторона *BA* является высотой трапеции. Но высоты

трапеции, проведенные к основанию AD, параллельны между собой. Поэтому по теореме 2 о проекциях параллельных прямых проекция C_1F_1 высоты трапеции, проведенной из вершины C, должна быть параллельной B_1A_1.

2) Четырехугольник $ABCF$ является квадратом (рис. 153 а), поэтому биссектриса угла FAB проходит через его диагональ AC. Следовательно, луч A_1C_1 является проекцией биссектрисы угла DAB (рис. 154 в).

Аналогично строится изображение биссектрисы угла ABC, исходя из изображения квадрата $ABCF$. Можно рассуждать и по-другому.

Учитывая то, что треугольник ABC является равнобедренным ($AB = BC$), то медиана, проведенная из вершины B, является и биссектрисой. Проекцией этой медианы, согласно теореме 3.3 об отношении длин проекций параллельных отрезков, является медиана B_1K_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Потому проекцией биссектрисы угла ABC является луч B_1K_1. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Параллельны ли прямые, если их параллельные проекции параллельны?

2. Может ли параллельная проекция двух пересекающихся прямых быть прямой?

3. Могут ли параллельные проекции скрещивающихся прямых совпадать?

4. Верно ли, что параллельной проекцией медианы треугольника является медиана его проекции?

5. Может ли параллельная проекция высоты треугольника быть медианой его проекции?

6. Верно ли, что высота параллельной проекции треугольника является проекцией его высоты?

7. Верно ли, что параллельная проекция биссектрисы треугольника является биссектрисой его проекции?

8. Может ли параллельная проекция произвольного параллелограмма быть квадратом? Трапецией?

9. Может ли параллельная проекция квадрата быть параллелограммом, отличающимся от квадрата?

10. Верно ли, что четырехугольник является параллелограммом, если его параллельная проекция — параллелограмм?

11. Известно, что отрезок и его параллельная проекция имеют одинаковые длины. Обязательно ли отрезок параллелен плоскости проекций или лежит в ней?

12. Может ли параллельной проекцией угла величиной 75° быть угол величиной 35°?

13. В каких пределах может изменяться величина угла, который является параллельной проекцией прямого угла?

Графические упражнения

Постройте рисунок, который соответствует приведенным данным:

1. Отрезок AB пересекает плоскость проекции в точке M, а точки A_1, B_1 — проекции точек A и B соответственно.

2. Точки A и B находятся по одну сторону от плоскости α, M — середина отрезка AB, A_1, B_1, M_1 — проекции точек A, B, M соответственно на плоскость α.

3. Дана параллельная проекция треугольника ABC и B_1M_1 — проекция медианы BM.

4. Прямоугольник $ABCD$ не имеет общих точек с плоскостью α. Через точки A, B, C, D проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

5. Дана параллельная проекция равностороннего треугольника ABC, его средних линий и центра окружности, вписанной в треугольник.

6. Дана параллельная проекция прямоугольника и точки пересечения его осей симметрии.

7. Даны параллельные проекция квадрата, центра окружности, вписанной в квадрат и точек касания окружности со сторонами квадрата.

Знание законов проектирования позволяет успешно решать задачи на построение проекций фигур по проекциям их отдельных элементов, выполнять построения в пространстве с активным использованием проектирования. К этой идее мы будем возвращаться постоянно, например, при построении сечений пространственных фигур, которые будут изучаться дальше.

Некоторые приемы построения проекций фигур и использования свойств проектирования при решении задач на построение продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 6. Дан пятиугольник $ABCDE$ и параллельные проекции трех его вершин на некоторую плоскость α. Построить проекцию пятиугольника.

☐ Пусть A_1, B_1, D_1 — проекции вершин A, B, D на плоскость α (рис. 155 а).

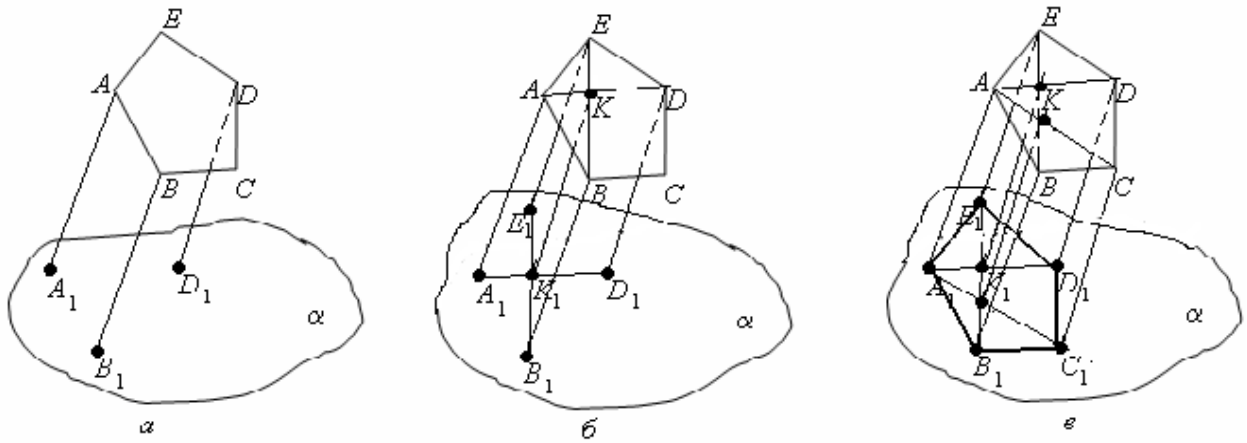


Рис. 155

Если K — точка пересечения прямых AD и BE, то ее проекция K_1 является точкой пересечения прямой A_1D_1 с проектирующей прямой, проходящей через точку K (рис. 155 *б*). Следовательно, проекцией прямой KB является прямая K_1B_1. В свою очередь, проекция E_1 вершины E находится как точка пересечения прямой B_1K_1 и проектирующей прямой, проходящей через точку E. Аналогично находится проекция C_1 вершины C. Искомая проекция изображена на рис. 155 в. Случаи, когда заданы проекции других трех вершин рассматриваются аналогично (попробуйте сделать это самостоятельно). ■

Пример 7. Пусть прямая l пересекает плоскость α, а точка A лежит вне плоскости; l_1 и A_1 — параллельные проекции l и A на плоскость α. Построить прямую, проходящую через точку A, пересекающую l и параллельную своей проекции.

□ Если B — произвольная точка прямой l (рис. 156 а), то ее проекция B_1 на плоскость α является пересечением проектирующей прямой, которая проходит через B, с прямой l_1. Отложим на прямой B_1B отрезок B_1B_2, равный отрезку A_1A.

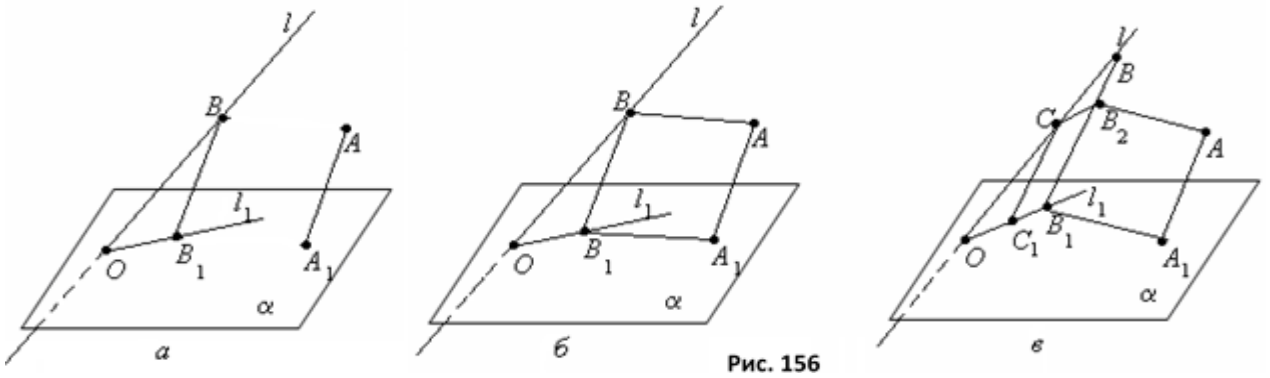


Рис. 156

Если $B_2 = B$, то прямая AB_2 удовлетворяет условиям задачи, ведь четырехугольник $AA_1B_1B_2$ является параллелограммом ($AA_1 \parallel B_1B_2$ и $AA_1 = B_1B_2$) и поэтому $AB_2 \parallel A_1B_1$ (рис. 156 б).

Если же $B_2 \neq B$, то через точку B_2 проведем прямую, параллельную l_1, которая пересекает прямую l в точке C, и тогда прямая AC удовлетворяет условию задачи (рис. 156 в). Действительно, если C_1 — проекция точки C на плоскость α, то $CC_1 = AA_1$ и $CC_1 \parallel AA_1$ (почему?) и четырехугольник AA_1C_1C является параллелограммом. Следовательно, $AC \parallel A_1C_1$. ■

Наряду с параллельным проектированием, как уже отмечалось, существует и другой способ изображения пространственных фигур, который основывается на ***центральном проектировании***. Название этого способа проектирования говорит о его особенности — проектирование осуществляется из определенного центра.

Центр *— от греческого* $\chi\varepsilon\nu\tau\rho o\nu$ *(kentron) — острие, острый конец палки — так сначала называли ножку циркуля, а потом и точку, которую эта ножка отмечала.*

Яркой иллюстрацией этого способа изображения являются тени от искусственного источника света (лампы, фонаря и т. п.). Центральное проектирова-

ние имеет важное значение в жизни человека. Ведь зрительное восприятие им окружающих предметов осуществляется по законам центрального проектирования.

Наука о центральном проектировании или о ***перспективе*** возникла еще в древней Греции. Ее развитие и применение связаны с именами многих ученых, художников, скульпторов, архитекторов, в частности с Демокритом (приблизительно 460 - 370 гг до н. э.), Эвклидом (около III ст. до н. э.), Леонардо да Винчи (1452 - 1519), Альбрехтом Дюрером (1471 - 1528) и др.

Перспектива *— французское perspective, от латинского perspicio — внимательно рассматриваю, насквозь вижу.*

Центральное проектирование определяется некоторой плоскостью α, которая называется ***плоскостью проекций*** и точкой S, лежащей вне этой плоскости — ***центром проектирования***.

Пусть M — некоторая точка пространства и такая, что прямая SM пересекает плоскость проекций π (рис. 157). Точка M_1 пересечения этой прямой с плоскостью проекций π называется центральной проекцией точточки M на эту плоскость.

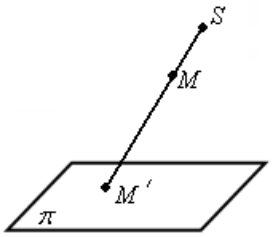


Рис. 157

При указанных ограничениях (прямая SM пересекает плоскость π) не для каждой точки пространства существует ее центральная проекция на рассматриваемую плоскость проекций (докажите это!). Точки, не имеющие центральной проекции на плоскость π из центра проектирования S, образуют плоскость, которая проходит через точку S (докажите это!).

Центральной проекцией фигуры Ф пространства на плоскость проекций π называется фигура, которая образована из центральных проекций всех точек фигуры Ф на эту плоскость.

Центральные проекции плоских фигур естественно возникают при рассмотрении пирамид. Пусть тетраэдр $SABC$ пересечен плоскостью и треугольник MNP — сечение тетраэдра (рис. 158). Понятно, что центральными проекциями точек M, N, P из центра S на плоскость проекций ABC являются соответственно точки A, B, C, а проекцией треугольника MNP является треугольник ABC.

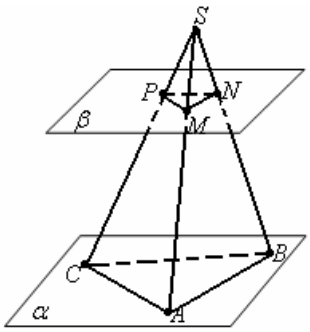


Рис. 158

Если $PM \parallel CA$, $MN \parallel AB$, то нетрудно доказать, что треугольники ABC и MNP подобны (докажите это!), то есть данная фигура и ее центральная проекция подобны. Это утверждение справедливо и в общем случае. Его следствием являются возможности оптических, проекционных приборов изменять размеры объектов.

Пропорциональное изменение размеров при центральном проектировании является одной из особенностей этого способа изображения.

Как уже отмечалось, учение о центральном проектировании или теория перспективы, очень интересовало художников, которые стремились открыть его законы и руководствоваться ими при создании картин. И они многого до-

стигли. Достаточно вспомнить «плоские» рисунки неизвестных художников древнего Египта, которые дошли до нас, и полностью реалистичные «объемные» изображения на картинах художников эпохи возрождения. В конечном итоге, начиная с XVII ст., начала интенсивно развиваться геометрическая наука о свойствах фигур, которые сохраняются при центральном проектировании, и которая получила название «проективная геометрия».

Задания для исследования и на построение

1. Исследуйте, какие из перечисленных свойств симметрии плоских фигур сохраняются при параллельном проектировании:

1) центральная симметричность фигуры;
2) осевая симметричность фигуры.

2. Имеем треугольную пирамиду и ее параллельные проекции (рис. 159 а - д). Для каждого случая опишите плоскости проекций и направления проектирования.

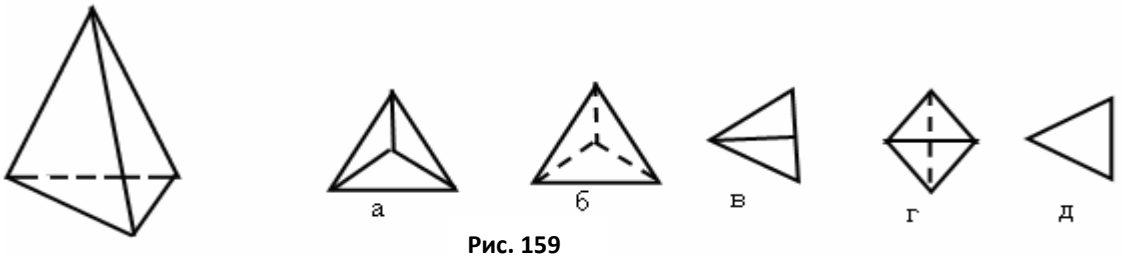


Рис. 159

3. Постройте параллельную проекцию куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость грани ADD_1A_1, если направление проектирования параллельно прямой : 1) CD; 2) CA; 3) CA_1; 4) C_1O, где O — центр грани $ABCD$.

4. Постройте след плоскости MNP на плоскости нижней грани прямоугольного параллелепипеда на рис. 160 а - г.

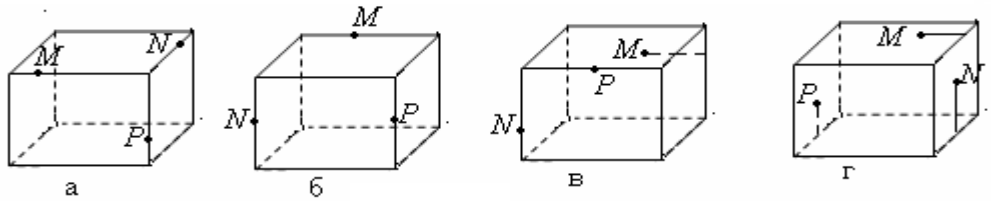


Рис. 160

5. Постройте след плоскости MNP на плоскости основания пирамиды на рис. 161 а - г.

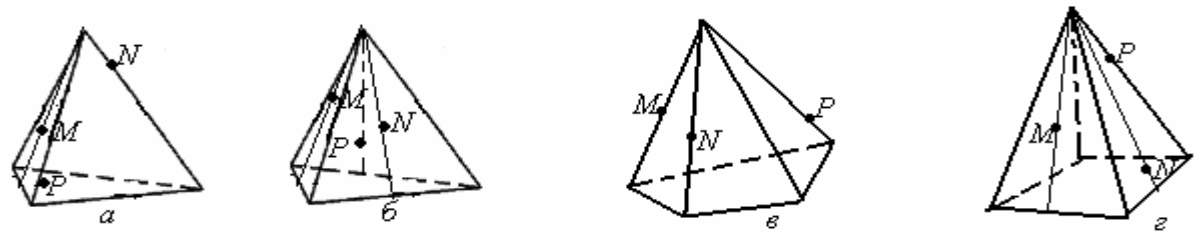


Рис. 161

Контрольные вопросы

1.Могут ли быть параллельными проекции непараллельных прямых?
2.Как могут быть расположены параллельные проекции скрещивающихся прямых?
3.Может ли трапеция быть параллельной проекцией параллелограмма?
4.Может ли прямоугольник быть параллельной проекцией квадрата?
5.Верно ли, что фигура является отрезком, если ее параллельная проекция — отрезок?
6.Можно ли один из двух отрезков, имеющих общий конец и не лежащих на одной прямой, считать проекцией второго?
7.Может ли длина параллельной проекции отрезка на плоскость быть больше длины самого отрезка?
8.Может ли проекцией прямоугольного треугольника быть тупоугольный треугольник?
9.В каких пределах может изменяться величина угла, который является параллельной проекцией другого угла?
10.Сохраняется ли при параллельном проектировании центральная симметричность фигуры?
11.Сохраняется ли при параллельном проектировании симметричность плоских фигур относительно прямой?
12.Пусть плоская фигура F_1 является проекцией плоской фигуры F. Можно ли считать F проекцией фигуры F_1? Если, вообще говоря, ответ отрицательный, то каким является условие «обратимости» параллельного проектирования?

Задачи

158°. Даны параллельная проекция ромба $ABCD$ и точки M на стороне ВС. Постройте:
1) проекцию перпендикуляра, проведенного из точки M к диагонали BD;
2) проекцию точки, делящей диагональ BD в отношении 1:3, считая от точки B.
150°. Дана параллельная проекция равнобокой трапеции $ABCD$. Постройте:
1) проекцию точки M, делящей меньшее основание BC в отношении 1:3, считая от точки D;
2) проекцию перпендикуляра, проведенного из точки M к основанию AB.
160. Дана параллельная проекция равностороннего треугольника
ABC. Постройте проекцию:
1°) медианы, проведенной из вершины B;
2°) биссектрисы угла A;
3°) высоты, проведенной из вершины C;
4) центра окружности, вписанной в треугольник ABC.
161. Дана параллельная проекция равнобокой трапеции. Постройте
проекцию:
1°) средней линии трапеции;
2) оси симметрии трапеции;

3) высоты, проведенной из вершины тупого угла.

162. Дан эллипс, являющийся параллельной проекцией окружности. Изобразите проекции:

1) центра окружности;
2) вписанного в окружность равнобедренного прямоугольного треугольника;
3) вписанного в окружность квадрата;
4) описанного около окружности квадрата;
5) вписанного в окружность равностороненного треугольника;
6) описанного около окружности равностороненного треугольника;
7) вписанного в окружность правильного шестиугольника;
8) описанного около окружности правильного шестиугольника.

163. Точки A и B расположены по разные стороны от плоскости β, а A_1, B_1 — их проекции на плоскость.

1°) Постройте точку пересечения K прямой AB с плоскостью β.

2) Найдите расстояние между серединой отрезка AB и ее проекцией на плоскость β, если $AK : KB = 2 : 1$, а $BB_1 = 8$ см.

164. Точки A, B находятся по одну сторону от плоскости α; A_1, B_1, соответственно, — их параллельные проекции на α, а M — середина отрезка BB_1.

1°) Постройте точку пересечения K прямой AM с плоскостью α.

2) Найдите длину отрезка B_1K, если $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 4$ см, $A_1B_1 = 6$ см.

165. Отрезок AB пересекает плоскость проекции в точке M, B_1 — проекция точки B.1) Постройте проекцию точки A.

2) Найдите длину проекции отрезка AB, если $MB_1 = 6$ см и $AM : MB = 2 : 3$.

166. Параллелограмм $ABCD$ не имеет общих точек с плоскостью α**.**

Через точки A, B, C, D проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1 .

1) Чем является четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ для параллелограмма $ABCD$?

2) Определите форму четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

3) Постройте проекцию центра параллелограмма $ABCD$ на плоскость α, если направление проектирования определяет прямая AA_1.

167. Точки A и B лежат на несмежных боковых ребрах четырехугольной пирамиды. Постройте пересечение прямой AB с плоскостью основания пирамиды.

168. Точка A лежит на боковой грани параллелепипеда, а точка B — на нижнем основании. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью верхнего основания.

169. Точки A и B лежат на смежных боковых гранях параллелепипеда. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостями других боковых граней.

170*. Точки A, B, C лежат на разных боковых гранях параллелепипеда. Постройте след плоскости ABC на плоскости основания. Пользуясь следом, постройте сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

171*. Постройте след плоскости, проходящей через точку на одной боковой грани треугольной пирамиды и прямую, лежащую в плоскости другой боковой грани, на плоскости основания пирамиды. Пользуясь следом, постройте сечение пирамиды указанной плоскостью.

172. Постройте проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$, если известны проекции вершин A, B, D.

173. Даны проекция пятиугольника на плоскость и положения трех его вершин. Найдите расположение остальных вершин пятиугольника.

Даны пятиугольник и проекции трех точек, лежащих на его сторонах. Найдите проекцию всего пятиугольника.

175*. Постройте параллельную проекцию куба на плоскость одной из граней, если направление проектирования параллельно некоторой диагонали куба.

Упражнения для повторения

176. Дайте алгебраическую трактовку проекции графика функции на координатную ось, если проектирование проводится параллельно другой оси.

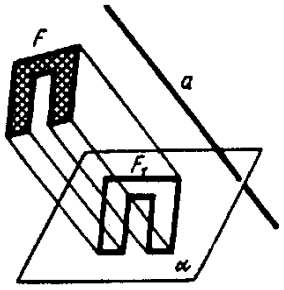
177. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если:

1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$; 2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$;

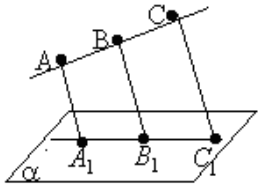
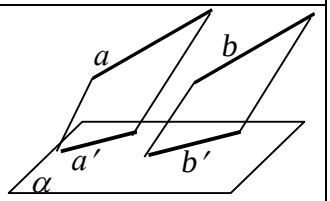
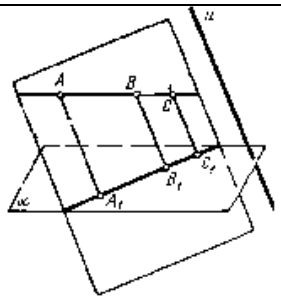
3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

178. Что представляет собой множество точек пересечения всех прямых, проходящих через точки боковой стороны трапеции параллельно ее основаниям, с прямой, проходящей через другую боковую сторону?

Итог
Основное определение

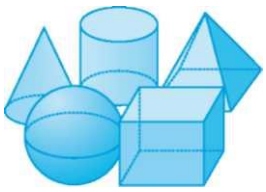
Параллельной проекцией фигуры называется фигура, составленная из параллельных проекций всех точек данной фигуры.		

Основные свойства параллельного проектирования

Параллельной проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка — отрезок.		
Проекции параллельных прямых параллельны, или совпадают.		
Отношение длин проекций двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин этих отрезков.		 $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$

Проекции простейших плоских фигур

1. Проекцией угла является угол.
2. Проекцией треугольника является треугольник.
3. Проекцией параллелограмма является параллелограмм.
4. Проекцией трапеции является трапеция.
5. Проекцией *n*-угольника является *n*-угольник.



§ 11. Изображение фигур в стереометрии

Рассматриваются особенности построения изображений фигур, в первую очередь плоских, задачи на построение на изображениях.

При изучении вопроса об изображении фигур в стереометрии основное внимание сосредоточим на изображении плоских фигур. И это понятно, поскольку глядя на реальный физический объект (дом, игральный кубик, книгу и др.), мы видим поверхность, во многих случаях состоящую из плоских частей (рис. 162 — 164). На рисунках и технических чертежах, прежде всего, пытаются изобразить поверхность объекта, а наш жизненный опыт дает возможность за деталями поверхности увидеть предмет в целом.

Поскольку основная геометрическая фигура — это треугольник, выясним, какая фигура может быть изображением треугольника. А затем мы сможем обсудить вопрос об изображении других многоугольников, известных из планиметрии. Кроме того, речь будет идти и об изображении простейших пространственных фигур.

За геометрическую основу изображения возьмем параллельное проектирование. Прежде всего, нужно уточнить содержание понятия «изображения», ведь понимать под изображением фигуры непосредственно ее параллельную проекцию — достаточно неудобно. Фигуру больших размеров просто невозможно спроектировать на лист бумаги — для того, чтобы изображение поместилось, параллельную проекцию фигуры нужно пропорционально уменьшить (или увеличить в других ситуациях).

Рис. 162

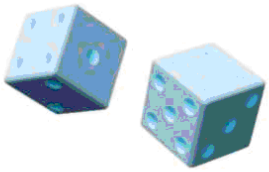


Рис. 163

Рис. 164

Изображением пространственной фигуры называется фигура, подобная параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость.

Данное определение требует дополнения. Понятно, что изображение должно содержать как можно больше информации о фигуре. Вряд ли параллельная проекция куба на рис. 165 достаточно полно отображает особенности этой фигуры. Поэтому на изображении многогранников изображают их вершины и ребра, видимые и невидимые. Как уже отмечалось, невидимые линии изображают штриховыми линиями. Таким образом, изображение куба на рис. 166 даёт более полную информацию о кубе.

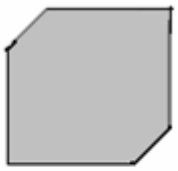


Рис. 165

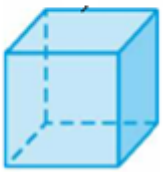


Рис. 166

На изображении пространственной фигуры выделяют также изображения ее важных элементов (например, диагоналей, сечений и т. п.).

Отметим, что в определении не фиксируется ни плоскость проекций, ни направление проектирования. Это и понятно, поскольку удобную для рассмотрения позицию можно избирать произвольно.

Теперь ответим на вопрос: какая фигура может быть изображением треугольника? Случай, когда треугольник лежит в проектирующей плоскости, не будем рассматривать. В этом случае он проектируется на отрезок (рис. 167).

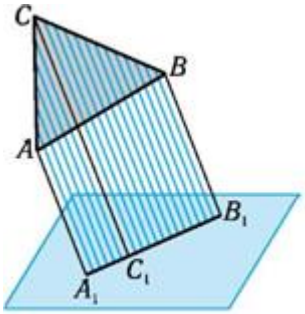


Рис. 167

Поскольку параллельной проекцией треугольника является треугольник (кроме отмеченного выше случая), то и изображением треугольника должен быть треугольник.

В то же время возникает вопрос: «А какой треугольник можно считать изображением данного треугольника?» Как известно, при параллельном проектировании изменяются длины отрезков, меры углов. Понятно, что параллельной проекцией равнобедренного треугольника является, вообще говоря, разносторонний треугольник, проекцией тупоугольного треугольника может быть остроугольный и т. д.

Проведение простых экспериментов с картонными моделями треугольников при получении их тени от Солнца или от удаленной лампы показывает, что форма параллельных проекций треугольника может быть различной. Более того, можно убедиться в том, что за счет соответствующего размещения модели можно получить в качестве проекции треугольник заданной формы. Таким образом, рассматривая различные тени одного треугольника, можно придти к следующему выводу.

Изображением данного треугольника может быть произвольный треугольник.

Математическое обоснование этого факта будет сделано позже. Пользуясь им, можно сделать определенные выводы относительно изображения некоторых четырехугольников.

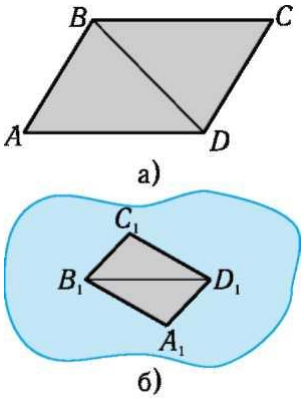


Рис. 168

Из свойств параллельного проектирования вытекает, что изображением параллелограмма является произвольный параллелограмм. Действительно, параллелограмм диагональю разбивается на два равных треугольника (рис. 168, а). Изображением треугольника ABD может быть произвольный треугольник $A_1B_1D_1$. Достроив треугольник $A_1B_1D_1$ до параллелограмма (рис. 168, б), который однозначно определяется этим треугольником, получим следующий вывод.

Изображениям данного параллелограмма может быть произвольный параллелограмм.

Относительно трапеций, то подобный вывод об их изображениях сделать нельзя, поскольку при параллельном проектировании должно сохраняться отношение длин параллельных оснований. Если, например,одно из оснований вдвое меньше второго, то и на изображении это соотношение должно сохраняться. Хотя, конечно, изображением трапеции должна быть трапеция (но не произвольная!).

Что касается изображения других многоугольников, то можновыбрать три их точки, не лежащие на одной прямой (например, три вершины). Эти точки определяют треугольник, который может изображаться произвольным треугольником. Далее, пользуясь свойствами параллельного проектирования (они являются и свойствами изображений), можно в некоторых случаях строить изображение всего многоугольника. Научившись изображать некоторые плоские фигуры, размещенные в пространстве, можем приступить к изображению простейших пространственных фигур.

Изображение прямоугольного параллелепипеда, куба ничем не отличаются от изображений произвольного параллелепипеда, так как изображениями квадратов и прямоугольников могут быть произвольные параллелограммы. Чаще всего куб изображают так, как это сделано на рис. 169, а). На рис. 169, б-г) также даны изображения куба. Однако, в отличие от рис. 169, а), по этим изображениям трудно составить представление о свойствах куба. На рис. 169, б), в) изображения простые и правильные, то есть выполненные по законам параллельного проектирования. Однако они не являются наглядными. Сказанное не означает, что в некоторых случаях нам не понадобится каждое из приведенных изображений.

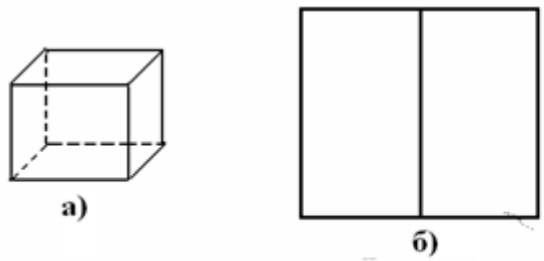


Рис. 169

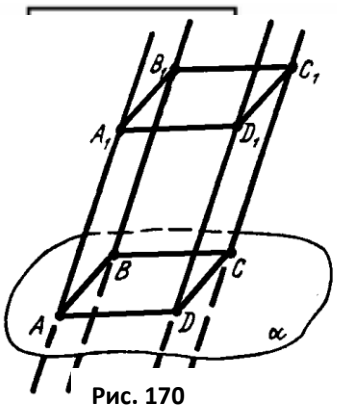


Рис. 170

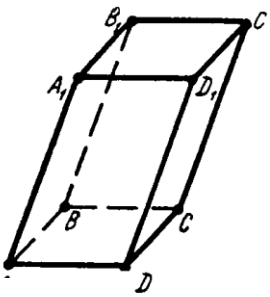


Рис. 171

рРассмотрим подробнее построение изображения параллелепипеда. В §8 параллелепипед рассматривался как многогранник, гранями которого служат шесть параллелограммов. В том же параграфе рассматривался подход к построению фигур из отрезков. Воспользуемся им.

В данной плоскости α построим параллелограмм $ABCD$ и через все его вершины проведем параллельные прямые, пересекающие плоскость α (рис. 170). На этих прямых по одну сторону от плоскости α отложим отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 одинаковой длины. Нетрудно доказать, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости и являются вершинами параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$. Действительно, поскольку AA_1D_1D, $ABCD$ и BB_1C_1C — параллелограммы, то $A_1D_1 \parallel AD$, $AD \parallel BC$, $BC \parallel B_1C_1$ и, согласно признаку параллельности прямых

(теорема 2 §9), $A_1D_1 \parallel B_1C_1$. Это, в частности, дает нам возможность утверждать, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

Аналогично имеем, что $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, то есть четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом.

Совокупность всех точек отрезков, соединяющих точки параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, образуют фигуру, которая является ***параллелепипедом*** (рис. 171). Понятно, что при построении параллелепипедов можно обойтись параллельными отрезками, соединяющими соответствующие точки параллелограммов. Изображение выполнено, как и на рис. 170, только с учетом того, что параллелепипед «заполнен» точками, и некоторые линии невидимы для наблюдателя. Как и в черчении, их изображают штриховой линией. Обозначают параллелепипед по его вершинам: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются ***смежными,*** а не имеющие общего ребра, — ***противоположными.*** Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются ***противоположными.*** Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется ***диагональю параллелепипеда.***

Изображение пирамид, в частности тетраэдров, было рассмотрено в §8 в связи с их построением из отрезков.

Рассмотрение изображений плоских и пространственных фигур позволяет *сформулировать требования к изображениям:*

1) изображение должно быть правильным, то есть удовлетворять определенным правилам;

2) изображение должно быть наглядным;

3) изображение должно быть простым для выполнения.

Правильность изображения обеспечивается соблюдением правил построения параллельных проекций. Наглядность и простота обеспечиваются выбором направления проектирования, то есть «угла зрения» на фигуру и расположением плоскости проекции. Так, изображение тетраэдра $SABC$ на рис. 172, а), б) нельзя считать удачными. В первом случае использовано параллельное проектирование на плоскость грани ABC, а во втором — направление проектирования определяется прямой AB *(на этом рисунке нет прямой AB).* В обоих этих случаях потеряна объемность фигуры. В общем случае используют третье изображение (рис. 172, в). Оно является плоским четырехугольником $ABCS$, в котором проведены диагонали AC и SB. Невидимое ребро AC изображено штриховой линией.

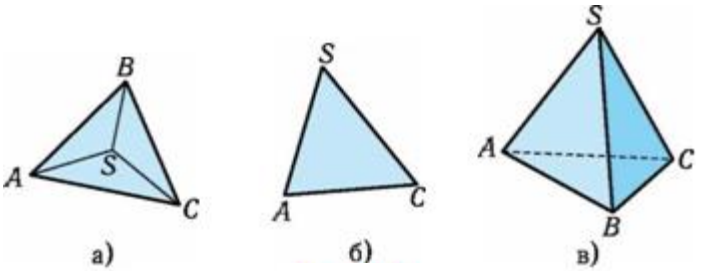


Рис. 172

Важным средством обеспечения наглядности изображения является изображение элементов фигуры (медиан, биссектрис, средних линий, диагоналей и т. п.), а также простейших сечений.

Построение изображений различных фигур является неотъемлемой составляющей решения задач стереометрии.

Пример 1. Построить произвольное изображение прямоугольной трапеции, у которой одна из оснований втрое больше другой.

□ Здесь и дальше плоскую фигуру (треугольник, трапецию и т. п.) мы отождествляем с ее «точным» изображением, когда она содержится в плоскости проекций.

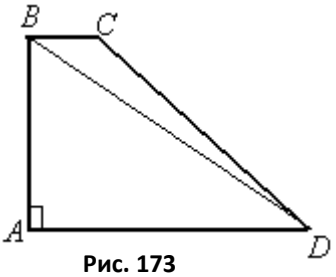


Рис. 173

Сама трапеция не определена полностью (есть только условие относительно оснований), да и к изображениям не имеем никаких требований, поэтому эти требования определяются только свойствами параллельного проектирования и изображений. Если в данной трапеции (рис. 173) выделить три вершины *A*, *B*, *D*, то они определяют прямоугольный треугольник *ABD*, изображением которого является произвольный треугольник $A_1B_1D_1$ (рис. 174). Поскольку при проектировании параллельность прямых и отношения длин отрезков, которые лежат на параллельных прямых, сохраняются, то отрезок B_1C_1, изображающий основание *BC*, параллелен A_1D_1 и втрое меньший: $B_1C_1 \parallel A_1D_1$, $B_1C_1 = \frac{1}{3}A_1D_1$. Эти построения в планиметрии легко реализуются. ■

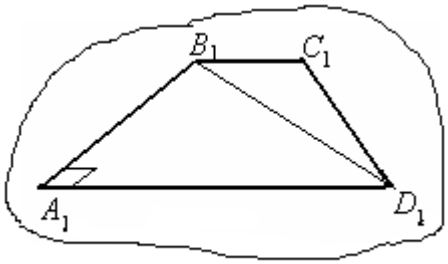


Рис. 174

Часто при решении задач необходимо выполнить определенные построения на изображении (провести медиану, указать центр вписанной окружности, построить сечение и т. п.). Эти построения обычно выполняются по свойствам параллельного проектирования. Для этого сначала выполняют построения на оригинале изображаемой фигуры. А затем определяют, какие свойства построенных элементов сохраняются при параллельном проектировании. И, наконец, выполняют построения на изображении.

Пример 2. На произвольном изображении прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC* построить изображение:

1) центра *O* описанной окружности;

2) вписанного квадрата, две стороны которого лежат на катетах треугольника, а одна из вершин — на гипотенузе *BA*.

□ Пусть изображением прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC* (рис. 175, а) является треугольник $A_1B_1C_1$ (рис 175, б).

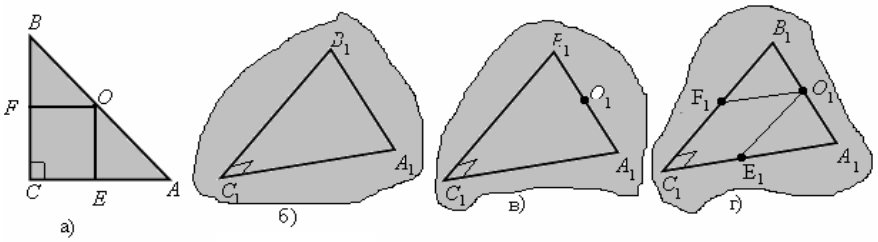


Рис. 175

1) Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности является серединой гипотенузы. Поэтому его изображение является серединой изображения гипотенузы.

Построение. Разделим отрезок A_1B_1 пополам, точка деления O_1 и является искомой (рис. 175, в).

2) Если из середины O гипотенузы AB провести перпендикуляры к катетам (рис. 175, а), то получим квадрат, удовлетворяющий условию задания. Проведенные перпендикуляры параллельны катетам. Именно этим воспользуемся для построения искомого изображения.

Построение. Из точки O_1 проводим отрезки O_1E_1 и O_1F_1, параллельные C_1B_1 и C_1A_1 соответственно (рис. 175, г). Четырехугольник $C_1E_1O_1F_1$ является искомым. ■

Пример 3. На изображении куба построить его сечение плоскостью, проходящей через середины трех параллельных ребер.

□ На рис. 176 середины ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначены соответственно через A_2, B_2, C_2, D_2. Изображения этих точек лежат на серединах изображений соответствующих отрезков (почему?). Пусть секущая плоскость проходит через точки A_2, B_2, D_2. Поскольку все грани куба — квадраты, то отрезок A_2B_2, проходящий через середины противоположных сторон квадрата AA_1B_1B, равен стороне квадрата AB (или ребру куба) и параллелен этой стороне.

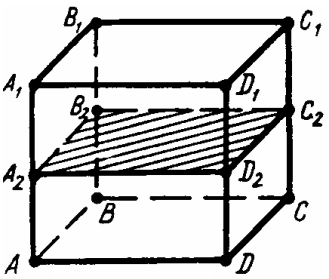


Рис. 176

Аналогично $D_2C_2 \parallel DC$ и $D_2C_2 = DC$. Поскольку и $AB \parallel DC$ то, в соответствии с транзитивностью отношения параллельности, $A_2B_2 \parallel D_2C_2$. Через параллельные прямые A_2B_2, D_2C_2 проходит единственная плоскость. В этой плоскости лежат точки A_2, B_2, D_2, поэтому данная плоскость является искомой секущей. Секущая плоскость пересекает грани куба по равным отрезкам A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2 и D_2A_2. Следовательно, четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$, являющийся искомым сечением, имеет форму ромба. Нетрудно заметить, что диагонали B_2D_2 и A_2C_2 этого ромба равны между собой. То есть четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат. Мы не только построили сечение, но и установили его форму. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Является ли параллельная проекция фигуры ее изображением?

2. Можно ли прямоугольный треугольник считать изображением равнобедренного треугольника?

3. Верно ли, что медиана изображения треугольника является изображением его медианы?

4. Может ли треугольник быть изображением ромба?

5. Верно ли, что диагональ изображения параллелограмма является изображением его диагонали?

6. Может ли параллелограмм быть изображением трапеции?

7. Может ли изображением куба быть прямоугольник?

8. Может ли треугольник быть изображением тетраэдра?

9. Можно ли тетраэдр изобразить так, чтобы ровно одно его ребро было невидимым?

10. Можно ли тетраэдр изобразить так, чтобы ровно одна его грань была невидимой?

Упражнения на рисунках

1. Какая из фигур на рис. 177 *а* - *г* не является изображением квадрата?

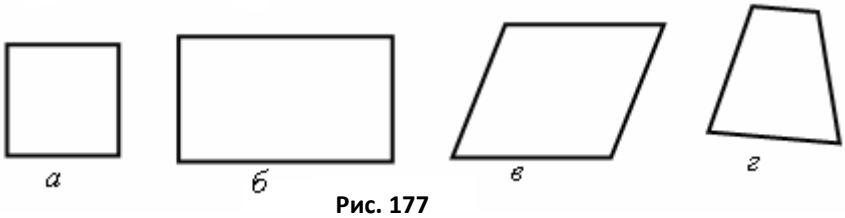


Рис. 177

2. Какая из фигур на рис. 178 *а* - *г* не является изображением куба?

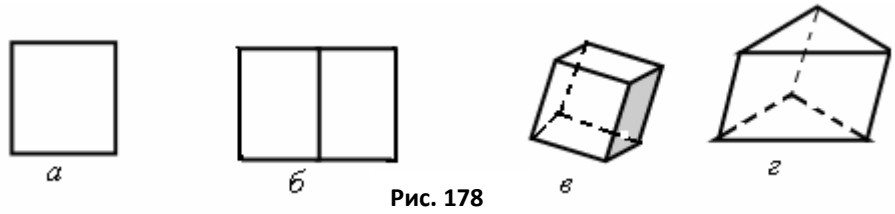


Рис. 178

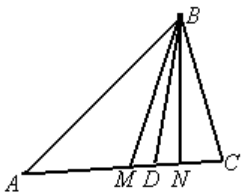


Рис. 179

3. На рис. 179 изображен равносторонний треугольник. Какой из отрезков может быть изображением высоты, проведенной из точки *B*?

4. На рис. 180 изображена равнобокая трапеция. Какой из отрезков может быть изображением высоты трапеции, проведенной из точки *B*?

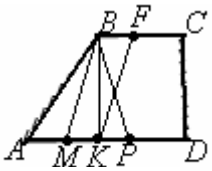


Рис. 180

5. На каком из рис. 181 *а* - *г* изображение куба не является правильным?

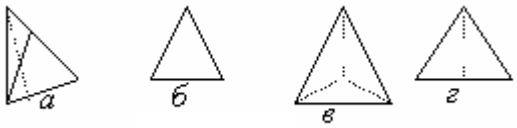


Рис. 182

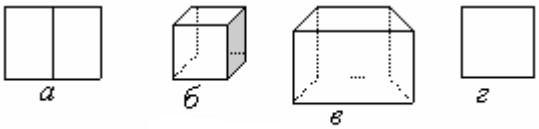


Рис. 181

6. На каком из рис. 182 *а* - *г* изображение тетраэдра не является правильным?

7. Каким граням тетраэдра *ABCD*, изображенного на рис. 183, принадлежат точки *P*, *K*, *M*?

8. Какие пары точек из точек *X*, *Y*, *Z*, *T* на рис. 184 не лежат на изображении тетраэдра в одной грани?

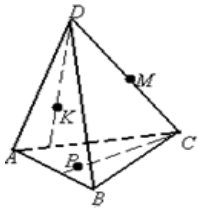
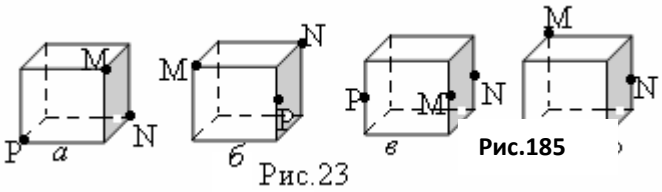


Рис. 183

Ри184

9. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проход с. ит через точки *M*, *N*, *P*, указанные на рис. 185 *а* - *г*?



10. На каких из рис. 186 а - г правильно изображено сечение тетраэдра?

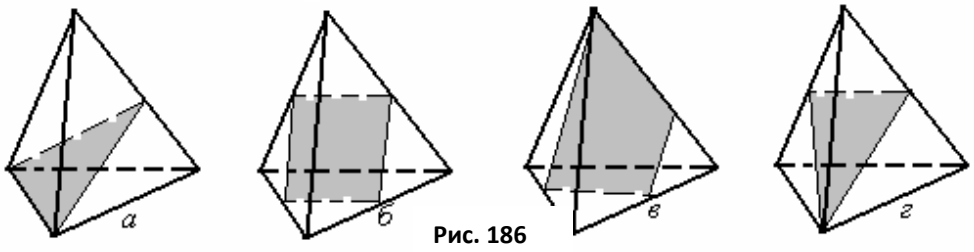


Рис. 186

Рассмотрим обоснование приведенных выше выводов относительно изображения основных плоских фигур.

Теорема 1 *(об изображении треугольника).*

Любой треугольник может быть изображением данного треугольника

 Пусть дан треугольник *ABC.* Возьмем произвольный треугольник *KMN*. Он может быть изображениям треугольника *ABC,* если существуют плоскость проекций и направление проектирования такие, что параллельная проекция треугольника *ABC* подобна треугольнику *KMN*Выберем плоскость проекций α так, чтобы она пересекала плоскость треугольника *ABC* по прямой *AC* (рис. 187). Нам нужно выбрать направление проектирования так, чтобы проекцией треугольника *ABC* на плоскость α был треугольник, подобный треугольнику *KMN*.

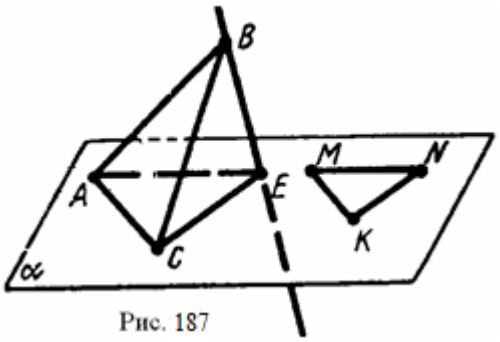


Рис. 187

Для этого построим в плоскости α треугольник *CAE,* подобный треугольнику *KMN* с коэффициентом подобия $\frac{AC}{MK}$. Тогда прямая *BE* задает нужное направление проектирования. Поскольку треугольник *CAE* является параллельной проекцией треугольника *ABC,* а треугольники *CAE* и *KMN* — подобны, то треугольник *KMN* является изображением треугольника *ABC.* ■

Эта теорема открывает широкие возможности для выбора изображений данного треугольника, хотя, конечно, не стоит использовать изображения со свойствами, которыми не обладает оригинал. Например, нецелесообразно изображать произвольный треугольник в виде прямоугольного.

Переходя к изображениям других многоугольников, заметим, что для них, как правило, теоремы, аналогичные теореме 1, не имеют места, хотя отдельные их свойства сохраняются при изображении. Прежде всего будет идти речь о параллельности сторон (почему?). В связи с этим приведем еще одну важную теорему.

Теорема 2 *(об изображении параллелограмма).*

Любой параллелограмм может быть изображениям данного параллелограмма.

Доказать эту теорему можно, разбив параллелограммы диагоналями на треугольники и воспользовавшись теоремой 1.

Мы уже встречались с ситуациями, когда планиметрические факты имеют аналоги в пространстве. И такие случаи будут встречаться и дальше. Самой простой пространственной фигуре — тетраэдру — соответствует на плоскости треугольник. По теореме 1, любой треугольник может быть изображениям данного треугольника. С другой стороны, тетраэдр проектируется в четырехугольник, который после проведения в нем диагоналей становится изображением тетраэдра. Возникает вопрос: может ли произвольный четырехугольник быть изображениям данного тетраэдра? Утвердительный ответ на него дает теорема немецких математиков Польке К. (1810 – 1877) и Шварца Г. (1843 – 1921). Исходя из нее, можно строить изображение многогранников. Для этого нужно выбрать четыре вершины, не лежащие в одной плоскости. Они являются вершинами некоторого тетраэдра. Потом задать произвольным образом изображение этих точек. А уже тогда достраивать изображение всей фигуры, пользуясь свойствами проектирования.

Пример 4.

Построить изображение четырехугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольная трапеция, у которой одно из оснований втрое больше другого.

□ При построении изображения четырехугольной пирамиды *SABCD*, основанием которой является трапеция, описанная в примере 1, достаточно выделить четыре вершины *S*, *A*, *B*, *D*, произвольно для них построить изображение S_1, A_1, B_1, D_1 (рис. 188 а), а далее, как в примере 1, построить точку C_1 — изображение вершины *C*, учитывая то, что $B_1C_1 = \frac{1}{3}A_1D_1$ и $B_1C_1 \parallel A_1D_1$ (рис. 188 б) ■

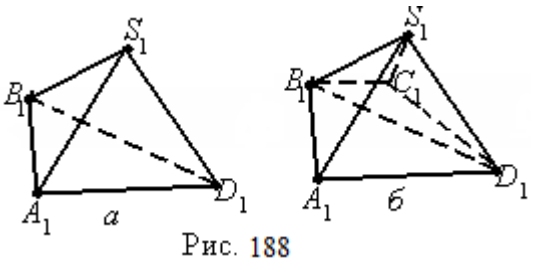


Рис. 188

Пример 5. Построить изображение правильного шестиугольника.

□ Рассмотрим правильный шестиугольник *ABCDEF* (рис. 189, а). Он обладает свойствами, которые должны сохраняться в его изображениях. Стороны

шестиугольника попарно параллельны ($AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$). Он имеет центр симметрии O, а отрезки, соединяющие точку O с вершинами шестиугольника, равны между собой и равняются его стороне. Теперь нетрудно заметить, что достаточно построить изображение параллелограмма (даже ромба) $ABCO$, чтобы потом достроить к нему изображение всего шестиугольника.

Пусть параллелограмм $A_1B_1C_1O_1$ является изображением параллелограмма $ABCO$ (это может быть произвольный параллелограмм!). Продлив A_1O_1 и C_1O_1 за точку O_1 так, чтобы $O_1D_1 = A_1O_1$, $O_1F_1 = C_1O_1$, построим параллелограмм $F_1O_1D_1E_1$ (рис. 189, б). По существу, построен параллелограмм, центрально симметричный к параллелограмму $A_1B_1C_1O_1$ относительно его вершины O_1. Соединив точки A_1 и F_1, C_1 и D_1, получим изображение правильного шестиугольника (рис. 189, в). ■

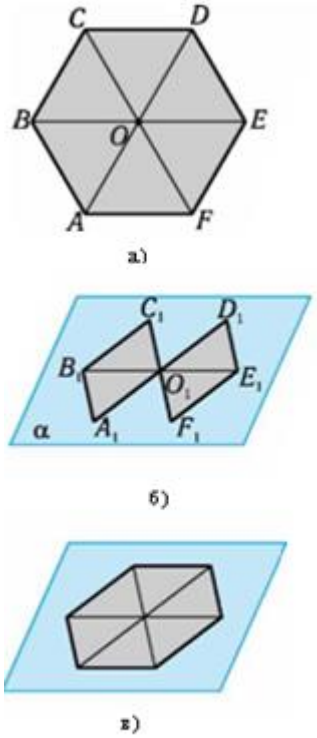


Рис. 189

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли равносторонний треугольник изобразить прямоугольным треугольником, гипотенуза которого равняется стороне данного треугольника?

2. Может ли n - угольник быть изображением m - угольника при $n < m$? А при $n > m$?

3. Можно ли изобразить куб, чтобы два его ребра были невидимыми?

4. Можно ли параллелепипед изобразить так, чтобы четыре его грани были видимыми?

5. Какими фигурами могут быть изображены сечения тетраэдра?

6. Можно ли тетраэдр изобразить так, чтобы четыре его ребра были невидимыми?

7. Какое наименьшее количество ребер куба могут быть видимыми при изображении? А наибольшее?

8. Может ли невыпуклый плоский четырехугольник изображаться выпуклым? А наоборот?

9. Верно ли, что изображением шара может быть только круг?

10. Может ли неограниченная фигура изображаться ограниченной? А наоборот?

Графические упражнения

Постройте изображение:

1) треугольника ABC и его медианы BM;

2) квадрата $ABCD$ и его центра O;

3) параллелограмма $ABCD$ и его центра симметрии;
4) равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и его высоты CD;
5) равностороннего треугольника ABC и его биссектрисы BD;
6) равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD и ее оси симметрии;
7) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если дано изображение ребер AB, AD и AA_1;
8) параллелепипеда так, чтобы только:
   а) одна грань была видима;
   б) две грани были видимы;
   в) три грани были видимы;
9) тетраэдра так, чтобы:
   а) все его ребра были видимыми;
   б) три ребра были невидимыми;
   в)* два ребра были невидимыми;
10) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если дано изображение таких точек:
   а) A, B, C, D_1;
   б) A, C, B_1, D_1;
   в) середин отрезков AB_1, BC_1, CD, A_1D_1;
   г) A, B и центров граней $A_1B_1C_1D_1$ и CDD_1C_1.

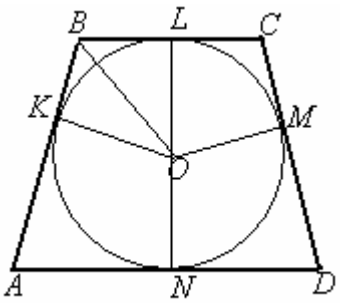


Рис. 191

Задачи о построении на изображениях даже плоских фигур существенно отличаются от планиметрических задач на построение. Например, равнобедренный треугольник ABC в пространстве с основанием BC (рис. 190 а) может изображаться в виде произвольного треугольника $A_1B_1C_1$. Изображение высоты AD на нем помогает построить лишь тот факт, что она является и медианой. По свойствам параллельного проектирования медиана изображения треугольника является изображением медианы данного треугольника. Таким образом, медиана A_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$ является изображением высоты AD (рис. 190 б).

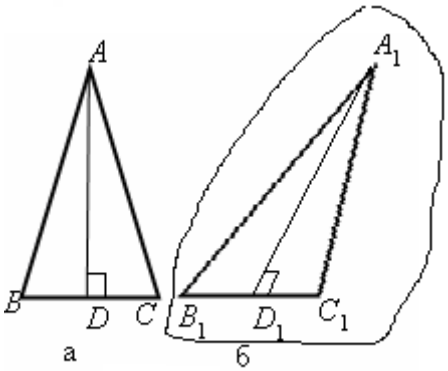


Рис. 190

При построении на изображениях необходимо максимально использовать свойства фигур, которые сохраняются при параллельном проектировании. При этом нередко вводятся вспомогательные конструкции, которые можно реально построить и использовать.

Пример 6. На изображении равнобокой трапеции, в которую можно вписать окружность, построить точки касания вписанной окружности со сторонами трапеции.

□ Прежде всего, рассмотрим «планиметрическое» изображение трапеции, или, как иногда говорят, оригинал (рис. 191). Это поможет найти путь к решению задачи. Нетрудно увидеть, что точки касания L, N с основаниями являются серединами этих оснований. Это вытекает из того, что прямая, проходящая через середины оснований, является осью симметрии равнобокой трапеции. Центр вписанной окружности O лежит на пересечении биссектрисы BO угла ABC и оси симметрии LN. При этом точка касания K вписанной окружности со стороной AB симметрична точке L относительно BO.

На произвольном изображении $A_1B_1C_1D_1$ данной трапеции изображения точок касания с основаниями L_1, N_1 и центра O_1 окружности построить легко: это середины отрезков B_1C_1, A_1D_1 и L_1N_1 (рис. 192). А изображение точки K лежит на пересечении стороны A_1B_1 и перпендикулярной B_1O_1 прямой, проходящей через точку L_1. Но перпендикуляр на произвольном изображении мы строить не можем. Попробуем заменить построение перпендикуляра построением параллельной прямой. Для этого снова возвратимся к оригиналу и построим на сторонах трапеции ромб со стороной AB так, чтобы прилежащие к ней стороны ромба лежали на основаниях трапеции. Для этого продолжим BO до пересечения с прямой AD в точке P, через точку P проведём прямую, параллельную AB до пересечения с прямою BC в точке Q (рис. 193). Понятно, что четырёхугольник $ABQP$ является параллелограммом. Так как диагональ BP является биссектрисой угла параллелограмма, то этот параллелограмм является ромбом. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны. Поскольку $AQ \perp BP$, $LK \perp BP$, то $LK \parallel AQ$. Цель сведения построения перпендикуляра к построению параллельной прямой достигнута.

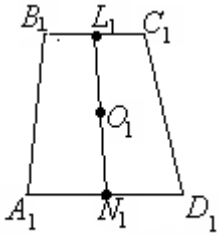


Рис. 192

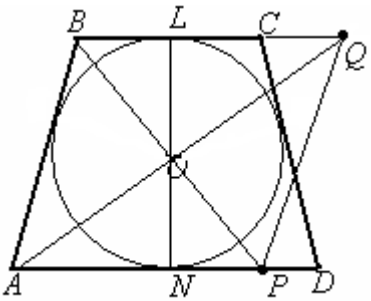


Рис. 193

Построение. На изображении трапеции проводим прямую B_1O_1 до пересечения с A_1D_1 в точке P_1. Через точку P_1 проводим прямую, параллельную A_1B_1, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке Q_1. Четырехугольник $A_1B_1Q_1P_1$ является изображением ромба $ABQP$. Через точку L_1 проводим прямую, параллельную A_1Q_1 до пересечения с A_1B_1 в точке K_1. Точка K_1 является изображением точки касания вписанной окружности с боковой стороной AB. (рис. 194).

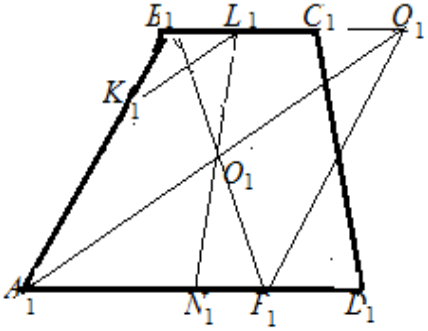


Рис. 194

Чтобы найти изображение точки касания окружности со стороной CD, нет необходимости выполнять аналогичные построения. Достаточно провести через точку K_1 прямую, параллельную A_1D_1 до пересечения со стороной C_1D_1 (почему?). Точка пересечения и будет изображением последней искомой точки касания. ■

При построении на изображениях необходимо учитывать неодинаковость искажения линейных размеров по разным направлениям.

Пример 7. На произвольном изображении квадрата *ABCD* построить изображение равностороннего треугольника *BCE*.

 Как и в предыдущем примере начнем решение с рассмотрения "оригинала" геометрической фигуры, которую надо изобразить (рис. 195). Вершина *E* равностороннего треугольника *BCE* лежит на прямой *LK*, где *L*, *K* — середины противоположных сторон квадрата *AD* и *BC*. Кроме того, $EK : KL = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$. Этих данных достаточно, чтобы построить изображение точки *E*, принимая во внимание то, что оно сохраняется и для изображений по их свойствам.

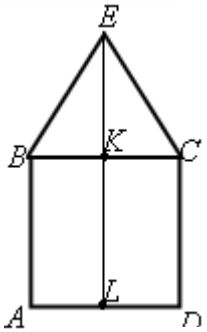


Рис 195

Построение. Рассмотрим изображение квадрата *ABCD* в виде произвольного параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$. Через середины отрезков A_1D_1 и B_1C_1, то есть через точки L_1 и K_1 проведем прямую (рис. 196 а). Построим на ней точку E_1 так, чтобы $E_1K_1 : K_1L_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$. Для этого на стороне A_1B_1 строим равносторонний треугольник A_1B_1M и его высоту *MP* (рис. 196 б). По свойствам равностороннего треугольника $MP : A_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$. Поскольку $A_1B_1 = K_1L_1$, то $MP : K_1L_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$. Таким образом, откладываем на прямой K_1L_1 от точки K_1 отрезок длиной *MP* (рис. 196 в). Конец его E_1 и есть изображением вершины треугольника *E*.

В завершение необходимо обратить внимание на то, что задача имеет

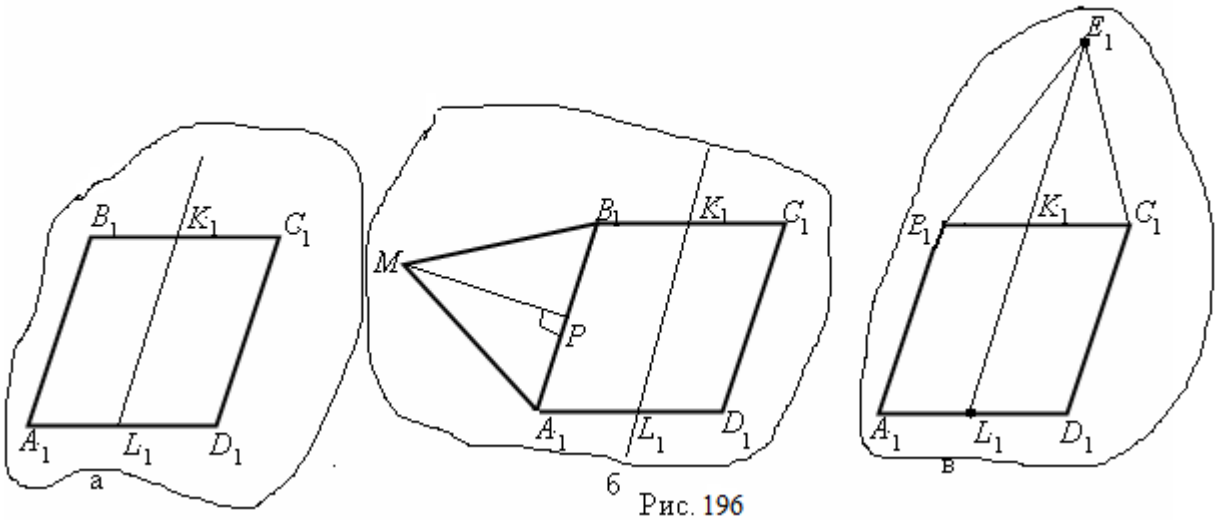


Рис. 196

два решения, поскольку равносторонний треугольник *BCE* может размещаться внутри квадрата. ■

Пример 8. На изображении правильного тетраэдра *ABCD* построить:

1) линию пересечения плоскостей *ACP* и *BMK*, где *K, M, P*, соответственно, — середины ребер *DC*, *AD*, *BD*;

2) сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки пересечения медиан *N*, *F* и *E* соответственно граней *DBC*, *DAB*, *DAC*.

 1) Чтобы построить прямую пересечения отмеченных плоскостей достаточно найти две ее точки. Одну из них можно построить в треугольнике *DBC* (рис. 197). Медианы *BK* и *CP* этого треугольника лежат в данных плоскостях, поэтому точка пересечения *N* медиан принадлежит этим плоскостям. Для построения точки *N* на проекционном рисунке нужно учесть, что изображение медианы треугольника является медианой изображения треугольника.

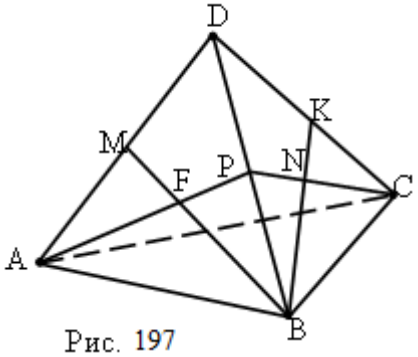


Рис. 197

Вторая точка *F* линии пересечения плоскостей строится аналогично в треугольнике *DAB*. Прямая *NF* — искомая.

2) Пусть *N*, *F*, *E* — точки пересечения медиан соответственно граней *DBC*, *DAB*, *DAC*. В плоскости треугольника *DAB* через точку *F* проведём прямую, параллельную стороне *AB*, которая пересекает этот треугольник по отрезку *GQ* (рис. 198 а). Поскольку точка *F* делит медиану *DK* в отношении 2:1, считая от точки *D*, то *DG*:*GA* = *DQ*:*QB* = 2:1. Аналогичные прямые, проходящие через точки *N* и *E* параллельно основаниям *BC* и *AC*, делят боковые стороны в отношении 2:1 точками *Q*, *H*, *G*. Треугольник *HGQ* и является искомым сечением (рис. 198 б). ■

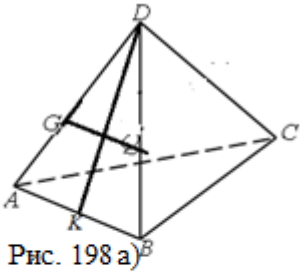


Рис. 198 а)

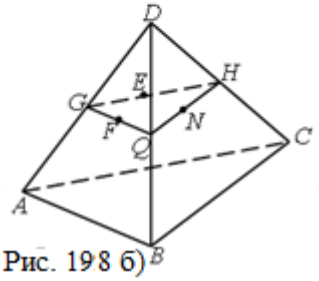


Рис. 198 б)

Задания для исследования изображений

1. Часто стереометрические понятия имеют планиметрические аналоги. Как можно ввести понятие изображения плоских фигур, беря за образец изображение пространственных фигур с использованием идеи параллельного проектирования?

2. Попробуйте охарактеризовать фигуру, если известно, что ее изображением может быть: 1) точка; 2) отрезок; 3) прямая; 4) и точка и прямая; 5) и прямая, и вся плоскость.

Контрольные вопросы

1. Является ли любое изображение фигуры ее параллельной проекцией?

2. Верно ли, что высота изображения треугольника является изображением его высоты?

3. Может ли биссектриса изображения треугольника быть изображением его биссектрисы?

4. Какой фигурой является изображение: а) отрезка; б) треугольника; в) трапеции; г) параллелограмма; д) *n*- угольника?

5. Можно ли правильный треугольник считать изображением: а) тупоугольного треугольника; б) прямоугольного треугольника?

6. Можно ли параллелограмм считать изображением: а) квадрата; б) ромба; в) прямоугольника?

7. Может ли трапеция быть изображением параллелограмма?

8. Может ли треугольник быть изображением плоского четырехугольника?

9. Можно ли куб изобразить так, чтобы все его ребра были видимыми?

10. Может ли сечением куба быть: а) треугольник; б) правильный треугольник, сторона которого равняется ребру куба; в) квадрат; г) пятиугольник; д) семиугольник?

Задачи

179.° Постройте изображение ромба и его высоты, проведенной из вершины угла, величина которого составляет 120°.

180. Постройте изображение квадрата, имея изображение точки пересечения его диагоналей и двух:

1)° соседних вершин;

2)* противоположных вершин.

181°. Дано изображение равнобедренного треугольника в виде разностороннего треугольника. На этом изображении постройте изображение:

1) биссектрисы угла при вершине;

2) перпендикуляра к основанию, проведенного через середину боковой стороны;

3) ромба, две смежные стороны которого совпадают с боковыми сторонами треугольника.

182. На изображении равнобедренного прямоугольного треугольника постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости треугольника, если стороной квадрата является:

1°) катет данного треугольника;

2) гипотенуза данного треугольника.

183. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около этого треугольника.

184. На изображении прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равняется 60°, постройте изображение:

1) биссектрисы этого угла;

2) высоты, проведенной к гипотенузе;

3) центра вписанной окружности.

185. На произвольном изображении равностороннего треугольника *ABC* постройте изображение:

1°) точки пересечения высот треугольника;
2°) «описанного» прямоугольника, одна из сторон которого совпадает с некоторой стороной треугольника, а другая содержит противоположную вершину;
3) биссектрисы внешнего угла треугольника.

186. На произвольном изображении равнобокой трапеции, боковая сторона которой равна меньшему основанию, постройте изображение:
1°) оси симметрии трапеции;
2) вписанного прямоугольника, две вершины которого лежат на большем основании и одна из сторон совпадает с меньшим основанием;
3) центра окружности, касательной к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции.

187. Дано изображение равнобокой трапеции, углы при основании которой равны 45°. Постройте изображение:
1) центра окружности, описанной около трапеции;
2*) центра окружности, касательной к меньшему основанию и боковым сторонам.

188. Дано изображение окружности и одного из его диаметров. Постройте изображение радиусов окружности, перпендикулярных к этому диаметру.

189. Дано изображение окружности и точки на ней. Постройте изображение:
1) касательной, проходящей через эту точку;
2) квадрата, вписанного в окружность, с вершиной в этой точке;
3) квадрата, описанного около окружности, если данная точка является точкой касания одной из сторон квадрата с окружностью.

190. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте изображение:
1°) высоты треугольника ABC, проведенной из вершины прямого угла;
2) линии пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ с плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер BB_1, CC_1;
3) сечения куба плоскостью, проведенной через прямые A_1C и CD.

191. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте изображение:
1°) точки касания окружности, вписанной в квадрат BB_1C_1C, с его сторонами;
2) линии пересечению плоскости ABC с плоскостью, проходящей через ребро B_1C_1 и середину ребра AA_1;
3) сечения куба плоскостью, проходящей через центры граней AA_1D_1D, $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB.

192. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1°) Постройте линию пересечения плоскостей DA_1C_1 и B_1D_1D.
2) Найдите длину отрезка этой линии, содержащегося в кубе, если ребро куба равно a.
3) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через центры трех попарно смежных его граней.

193. Дано изображение тетраэдра $ABCD$, точки K, M и P — середины DC, AD и BD, соответственно.
1°) Постройте линию пересечения плоскостей ACP и BMK.

2) Найдите длину отрезка этой линии, содержащегося в тетраэдре, если длины всех его ребер равны a.

3) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки пересечения медиан трех его граней.

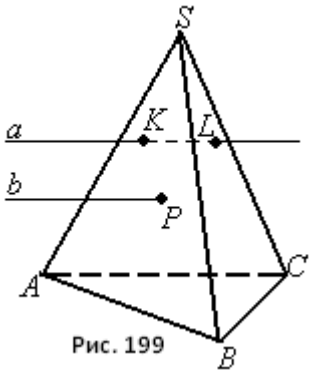


Рис. 199

194. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через:

1°) середины ребер SA, SC и BC;

2) точку M на AS ($AM:AS$ = 1:2), точку N на SC ($CN:NS$ = 1:2) и точку P на BC ($CP:PB$ = 1:2);

3) середины ребер AS, AB и центр грани SBC;

4*) центры граней ASB, ABC и BSC.

195. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через:

1) ребро CD и центр грани AA_1B_1B;

2) диагональ A_1D и центр грани BCC_1B_1;

3*) середины ребер AD, CD и точку B;

4*) центры граней CDD_1C_1, CBB_1C_1 и точку A.

Упражнения для повторения

196. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Один из восьми образованных углов равен 50°. Чему равняется каждый из остальных углов?

197. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Укажите все ребра, параллельные ребру AA_1.

2) Докажите, что ребро DC параллельно пересечению плоскостей ABC_1 и A_1B_1D.

3) Существует ли в плоскости ABC_1 прямая, параллельная прямой A_1D_1?

4) Пусть a — произвольный отрезок в грани куба. Постройте отрезок, параллельный отрезку a, в несмежной грани куба.

198. Дана правильная четырехугольная пирамида. Каким ребрам или диагоналям основания пирамиды параллельна прямая, соединяющая центры окружностей, описанных около двух боковых граней (смежных и несмежных)?

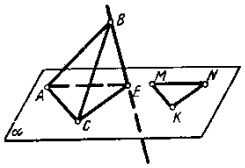
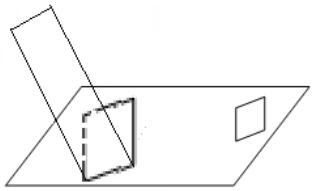
199. Прямая a пересекает поверхность тетраэдра $SABC$ в точках K и L (рис. 199), а параллельная ей прямая b — в точке P и еще в какой-то точке. Постройте эту точку.

Итог

Основное определение

Изображением пространственной фигуры называется фигура, какая подобная параллельной проекции данной фигуры на плоскость.

Основные утверждения

Любой треугольник может быть изображениям данного треугольника.	
Любой параллелограмм может быть изображениям данного параллелограмма.	

§ 12. Параллельность прямых и плоскостей

Рассматривается одно из наиболее важных отношений в стереометрии — параллельность прямой и плоскости, его свойства и применения.

В предыдущих параграфах было рассмотрено отношение параллельности прямых в пространстве и его приложения. Не менее важным, как с теоретической, так и из практической точки зрения, является отношение параллельности между прямыми и плоскостями.

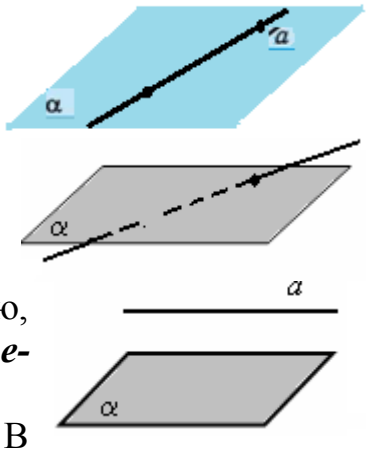
Вокруг себя мы видим множество примеров, иллюстрирующих взаимное расположение прямых и плоскостей (например, взаимное расположение стен, потолка, пола в комнате и линий их пересечения, перекладины футбольных ворот и поверхности земли, ручки и листа бумаги и т. п., рис. 200 – 202).

Рис. 200

Рис. 201

Рис. 202

Анализ случаев взаимного расположения прямой и плоскости с точки зрения наличия у них общих точек дает такие варианты расположений:



1. прямая и плоскость имеют, по крайней мере, две общие точки. Тогда, согласно аксиоме ***C₁, прямая принадлежит плоскости.***

2.прямая и плоскость имеют единственную общую точку. Возможность такого расположения прямых и плоскостей обеспечивается тем, что вне плоскости есть точки пространства. Произвольная точка на плоскости и точка вне плоскости определяют прямую, имеющую с плоскостью одну общую точку, то есть ***пересекает*** ее.

3. прямая и плоскость не имеют общих точек. В этом случае их называют ***параллельными.***

Прямая и плоскость, не имеющие общих точек, называются параллельными.

Параллельность прямой a и плоскости α обозначают привычным символом параллельности: $a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$.

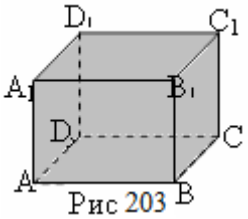


Рис 203

Пользуясь определением, можно установить параллельность прямых и плоскостей, связанных с вершинами куба. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 203). Прямая A_1B_1 параллельна плоскости $ABCD$. Действительно, эта прямая лежит в плоскости ABB_1A_1. И если бы она пересекала плоскость $ABCD$, то это было бы в точке, общей для плоскостей $ABCD$ и ABB_1A_1. Но общие точки этих плоскостей образуют прямую AB, параллельную прямой A_1B_1. Таким образом, прямая A_1B_1 не имеет общих точки с плоскостью $ABCD$, то есть она параллельна плоскости $ABCD$. Этот вывод касается каждой прямой, содержащей ребро куба, и плоскости, содержащей грань куба, не имеющую общих точек с этим ребром (B_1C_1 и ADD_1A_1, C_1D_1 и ABB_1A_1 и т. п.).

Рассмотренный способ обоснования параллельности прямой и плоскости можно обобщить в таком утверждении.

Теорема 1 *(признак параллельности прямой и плоскости).*

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой плоскости, то она параллельна самой плоскости.

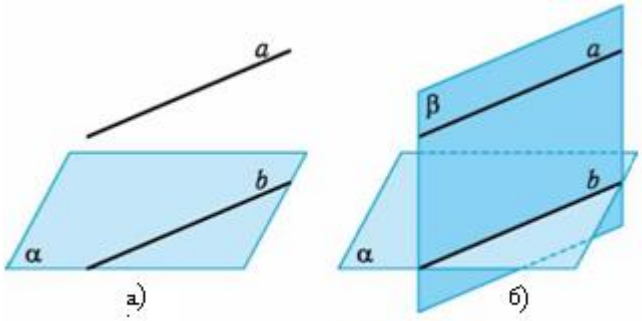


Рис. 204

□ Пусть прямая a не лежит в плоскости α и параллельна прямой b этой плоскости (рис. 204, а). Проведем через прямые a и b плоскость β (рис. 204, б) (почему это можно сделать?). Плоскости α и β пересекаются по прямой b (совпадать они не могут по условию).

Тогда, если прямая a имеет общую точку с плоскостью α, то эта точка находится на прямой b. Но это противоречит условию, ведь прямые a и b — параллельны. Поэтому прямая a не имеет общих точек с плоскостью α, то есть прямая a и плоскость α — параллельны. ■

Задача 1. Через данную точку M, не лежащую в плоскости α, провести прямую, параллельную α.

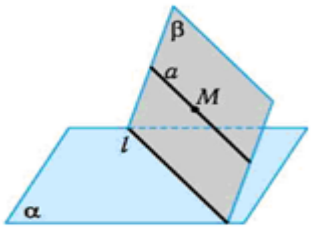


Рис. 205

 Возьмем в плоскости α произвольную прямую l. Прямая l и точка M определяют некоторую плоскость β. Проведем в плоскости β через точку M прямую a, параллельную прямой l (рис. 205). Согласно признаку параллельности прямой и плоскости, прямая a и плоскость α — параллельны. ■

Заметим, что через точку M, лежащую вне плоскости α, можно провести бесконечное количество прямых, параллельных данной плоскости. Это вытекает, например, из произвольности выбора прямой l в решении задачи.

Кстати, для произвольной прямой a, параллельной плоскости α, существует бесконечное количество прямых в плоскости α, параллельных a.

В дальнейшем под параллельностью отрезка, луча плоскости (или отрезка, луча – многоугольнику и т. п.) будем понимать параллельность соответствующих прямых и плоскостей, определяемых данными фигурами.

Пример 1. Два параллелограмма $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в различных плоскостях, N, M и K — середины сторон AB, CD и AD_1 соответственно.

1) Установить взаимное расположение прямых и плоскостей: C_1D_1 и ABC; KN и DD_1C; D_1B и MKN.

2) Построить точку пересечения L прямой KN с плоскостью BCC_1.

3) Вычислить длину отрезка KL, если KN равняется 2 см.

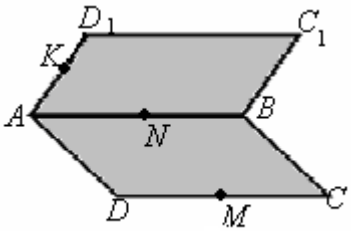


Рис. 206

 Построим рисунок, соответствующий условию (рис. 206).

1) Прямая C_1D_1 и плоскость ABC — параллельны, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), ведь прямые C_1D_1 и AB — параллельны, по условию, прямая AB принадлежит плоскости ABC, прямая C_1D_1 ей не принадлежит.

Прямая KN пересекает плоскость DD_1C. Действительно, прямые CD и C_1D_1 — параллельны, по признаку параллельности прямых (теорема 2 §9). Поэтому прямая C_1D_1 принадлежит плоскости DD_1C (почему?). В плоскости ABC_1D_1 прямые KN и C_1D_1 пересекаются. Таким образом, прямая KN имеет общую точку с плоскостью DD_1C.

Прямая D_1B параллельна плоскости MKN. Действительно, отрезок KN является средней линией треугольника AD_1B. Поэтому прямая KN параллельна прямой D_1B. Поскольку прямая D_1B не лежит в плоскости MKN, то, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая D_1B параллельна плоскости MKN.

2) Прямая KN лежит в плоскости ABC_1. Поэтому точка ее пересечения с плоскостью BCC_1 лежит на линии пересечения плоскостей ABC_1 и BCC_1, то есть на прямой BC_1.

Построение. Находим точку пересечения прямых KN и BC_1 в плоскости ABC_1, она и является искомой точкой L (рис. 207).

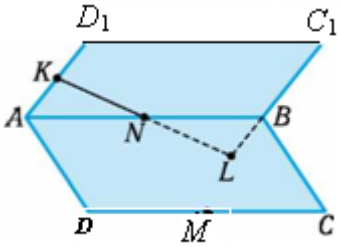


Рис. 207

4) Для вычисления длины отрезка KL изобразим построение в плоскости ABC_1D_1 (рис. 208). Рассмотрим треугольники AKN и BLN.

Они равны по признаку равенства треугольников: $AN = BN$ по условию, $\angle AKN = \angle BLN$ как внутренние разносторонние углы (накрест лежащие) при параллельных AK и BL и секущей KL, $\angle KNA = \angle BNL$ как вертикальные углы. Отсюда $NL = KN = 2$ (см). Поэтому $KL = KN + NL = 4$ (см). ■

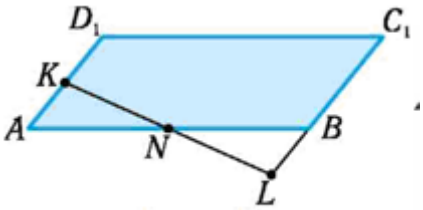


Рис. 208

Ответ. 3) 4 см.

Пример 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку A и середину M ребра CC_1 параллельно прямой CD.

 Построим изображение данного куба (рис. 209 а). Анализируя рисунок, можно прийти к заключению, что секущая плоскость проходит через точки A, B, M, то есть является плоскостью ABM. Действительно, прямые CD и BA параллельны (они содержат противоположные стороны квадрата!). Поэтому, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая CD и плоскость ABM параллельны.

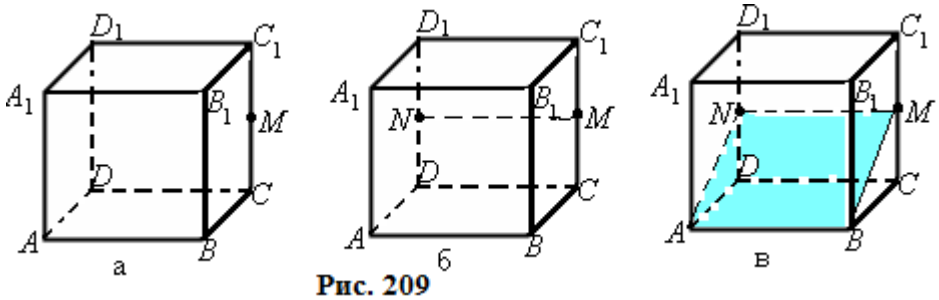


Рис. 209

Теперь понятно, как строить искомое сечение. Проведем через точку M прямую, параллельную прямой CD до пересечения с ребром DD_1 в точке N (рис. 209 б). Прямая MN лежит в плоскости ABM, поскольку она параллельна прямой AB по признаку параллельности прямых ($MN \parallel CD$, $CD \parallel BA$). Искомым сечением будет четырехугольник $ABMN$ (рис. 209 в). Нетрудно доказать, что он является параллелограммом: $MN \parallel BA$, $MN = BA$. В действительности он является прямоугольником, но доказательство оставим на будущее. ■

Построение сечений тел является одним из труднейших построений на изображении. Построение сечений параллелепипедов и пирамид сводится к построению линий пересечения секущей плоскости с их гранями.

Чтобы построить линию пересения секущей плоскости с гранью параллелепипеда или пирамиды достаточно указать две точки плоскости грани, принадлежащие секущей плоскости.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли прямая, параллельная некоторой плоскости, пересекать хотя бы одну прямую, лежащую в этой плоскости?

2. Известно, что прямая параллельна плоскости. Параллельная ли она каждой прямой этой плоскости?

3. Верно ли, что диагональ грани куба параллельна противоположной грани куба?

4. В плоскости α лежит лишь одно основание трапеции. Верно ли, что средняя линия трапеции параллельна плоскости α?

5. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

6. Может ли прямая быть параллельной одновременно двум пересекающимся плоскостям?

7. Верно ли, что через данную точку можно провести прямую, параллельную данной плоскости?

8. Верно ли, что через точку вне плоскости можно провести лишь одну прямую, параллельную данной плоскости?

9. Пусть точки A, B принадлежат, соответственно, прямым a, b, параллельным плоскости α. Параллельна ли прямая AB плоскости α?

10. Отрезок AB не имеет общих точек с плоскостью α. Верно ли, что прямая AB параллельна плоскости α?

11. Точка A лежит вне плоскости α, а точки B и C принадлежат α. Верно ли, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и AB, параллельна α?

Упражнения на рисунках

1. На рис. 210 изображен тетраэдр $ABCD$, точки K, F, M, N — середины соответствующих ребер. Заполните по приведенному образцу таблицу, выбрав необходимое расположение прямых l и плоскостей α.

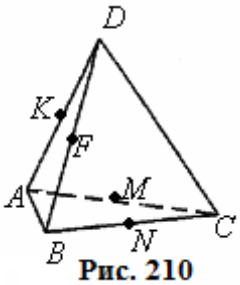


Рис. 210

l и α / Взаимное расположение	DB и AMN	MN и ABC	KC и DMN	MN и ABD	KF и DMN	CF и ADN
$l \times \alpha$	+					
$l \parallel \alpha$						
$l \subset \alpha$						

2. На рис. 211 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

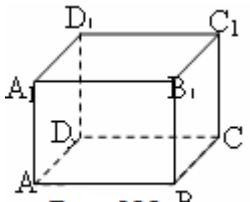


Рис. 211

1) В плоскостях каких граней куба лежит прямая CC_1?
2) С плоскостями каких граней куба пересекается прямая A_1D?
3) Плоскостям каких граней куба параллельная прямая BC?
4) Как размещены диагонали грани $A_1B_1C_1D_1$ относительно плоскости $ABCD$?

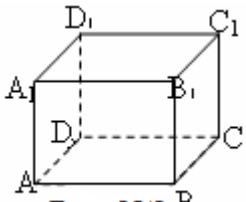


Рис. 212

3. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 212) и таких, которые проходят через:
1) вершину D;
2) ребро DC;
3) диагональ грани AC;
4) диагональ куба A_1C?

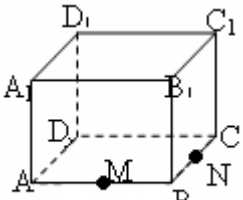


Рис. 213

4. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 213) пересекается плоскостью, которая проходит через середины M, N ребер AB и BC параллельно ребру DD_1.
1) Какой многоугольник получен в сечении?
2) Чему равняется периметр сечения, если ребро куба равняется a?

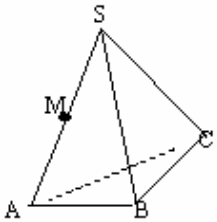


Рис. 214

5. В правильном тетраэдре $SABC$ (рис. 214) плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой CS. Может ли сечение тетраэдра плоскостью α быть: 1) треугольником; 2) правильным треугольником; 3) четырехугольником; 4) ромбом?

Рассмотрим утверждение, обратное признаку параллельности прямой и плоскости. Для этого необходимо поменять местами условие и заключение этой теоремы.

Теорема 2 *(обратная признаку параллельности прямой и плоскости).*

Если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости существует прямая, параллельная данной прямой.

Эта теорема является свойством отношения параллельности прямой и плоскости. Наглядно правильность приведенного утверждения очевидна. Ло-

гическая ее обоснованность вытекает из следующей теоремы, которая и сама полезна при решении многих задач.

Теорема 3 *(о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную второй).*

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

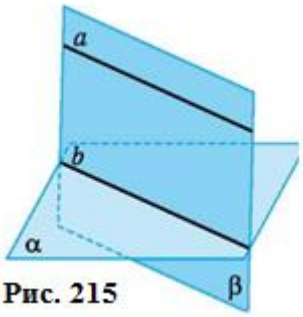


Рис. 215

 Пусть прямая a параллельна плоскости α, а плоскость β содержит прямую a и пересекает плоскость α по прямой b (рис. 215). Прямые a и b лежат в одной плоскости, по построению. Они не имеют общих точек, так как тогда прямая a имела бы общие точки с плоскостью α. А, по условию, прямая a параллельна плоскости α. Поэтому прямые a и b — параллельны. ■

Теперь понятно, как доказать теорему 2. Через данную прямую, параллельную плоскости α, следует провести плоскость, пересекающую плоскость α. Для этого достаточно взять в плоскости α произвольную точку и через прямую a и выбранную точку провести плоскость.

Задача 2. Провести через одну из двух скрещивающихся прямых плоскость, параллельную другой прямой.

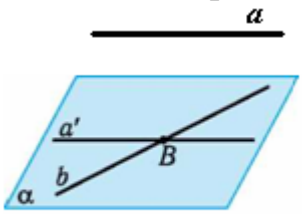


Рис. 216

 Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Проведем через произвольную точку B прямой b прямую a', параллельную прямой a (рис. 216). Прямые a' и b определяют плоскость α, которая, по признаку параллельности прямой и плоскости, параллельна прямой a. ■

Пример 3. В правильном тетраэдре $DABC$, все ребра которого равны 6 см, точка K лежит на ребре DB и DK = 2 см. Точка M лежит на ребре BC и BM = 4 см. Точка P — середина AB.

1) Доказать, что прямая KM параллельна плоскости ADC.

2) Доказать, что прямая PM пересекает плоскость ADC.

3) Провести через точку P прямую, параллельную плоскости ADC, пересекающую медиану BL треугольника BDC.

4) Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и K параллельно прямой AC.

5) Провести через центр грани BDC прямую, параллельную плоскостям ABD и ACD, и найти длину наибольшего отрезка этой прямой, принадлежащего тетраэдру.

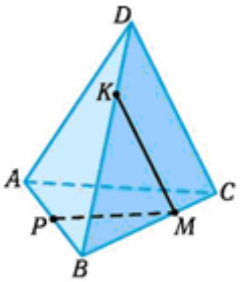


Рис. 217

 Построим рисунок, отображающий условие задания (рис. 217).

1) Из условия вытекает, что точки K и M делят стороны BD и BC треугольника BDC в одинаковом отношении, считая от вершины B. По теореме, обратной теореме Фалеса, прямая KM параллельна прямой DC. Но тогда, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая KM параллельна плоскости ADC.

2) Точки P и M делят стороны BA и BC треугольника ABC в разных отношениях, считая от вершины B. Из теоремы Фалеса вытекает, что прямая PM пересекает прямую AC. A это означает, что она пересекает и плоскость ADC.

3) Рассмотрим треугольник ABL (рис. 218, где L — середина CD. Точка P является серединой стороны AB, а точка E — серединой стороны BL, отре

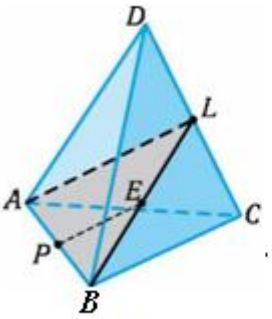


Рис. 218

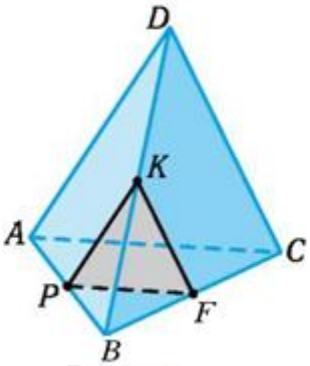


Рис. 219

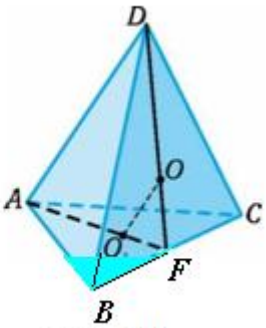


Рис. 220

зок PE является средней линией треугольника ABL. Поэтому прямая PE параллельна прямой AL, лежащей в плоскости ADC. По признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая PE параллельна плоскости ADC и пересекает медиану BL треугольника BDC.

4) Проведем через точку P прямую, параллельную прямой AC, и обозначим ее точку пересечения со стороной BC через F (рис. 219). Треугольник PKF является искомым сечением.

5) Пусть O — центр грани BDC (рис. 220). В треугольнике ADF, где F — середина BC, проведем прямую OO_1, параллельную прямой AD. Тогда прямая OO_1 будет параллельна плоскостям ABD и ACD, по признаку параллельности прямой и плоскости. Треугольники ADF и OO_1F — подобны. Поэтому $\frac{OO_1}{AD} = \frac{OF}{FD}$. Из условия имеем: $AD = 6$ см, $DF = 3\sqrt{3}$ см, $OF = \frac{1}{3}DF = \sqrt{3}$ см. Отсюда: $OO_1 = 2$ см. ■

Ответ. 5) 2 см.

Пример 4.

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки L, M — середины ребер BC, CD соответственно.

1) Доказать, что прямая LM параллельна плоскости ABD_1.

2) Провести через центр O грани $ABCD$ прямую, параллельную плоскостям AA_1D_1 и CC_1D_1.

3) Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки L, M и параллельной диагонали AC_1.

 1) Построим рисунок, который отображает условие задания (рис. 221). Чтобы воспользоваться признаком параллельности прямой и плоскости, необходимо указать прямую, принадлежащую плоскости AB_1D_1 и параллельную прямой LM. Такой прямой является прямая B_1D_1.

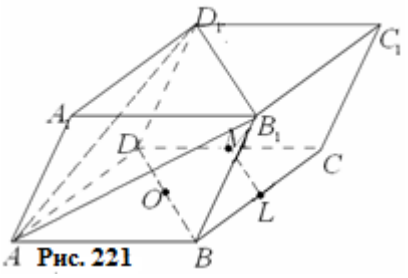


Рис. 221

Действительно, $LM \parallel BD$ по свойству средней линии треугольника. Поскольку грани параллелепипеда являются параллелограммами, то четырехугольник BB_1D_1D является также параллелограммом ($BB_1 = D_1D$, $BB_1 \parallel D_1D$). Тогда $BD \parallel B_1D_1$, а поэтому $LM \parallel B_1D_1$ по признаку параллельности прямых. По признаку параллельности прямой и плоскости, $LM \parallel AB_1D_1$.

2) Плоскости AA_1D_1 и CC_1D_1 пересекаются по прямой D_1D. Таким образом, достаточно через точку O провести прямую, параллельную прямой D_1D. Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1) построенная прямая будет параллельной плоскостям AA_1D_1 и CC_1D_1 одновременно. Поскольку четырехугольник BB_1D_1D является параллелограммом (см. 1), а точка O — середина диагонали BD, то очевидно, что искомая прямая проходит через середину O_1 диагонали B_1D_1, то есть через центр верхней грани параллелепипеда (рис. 222).

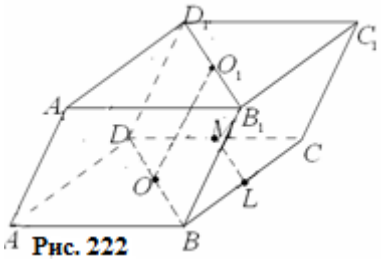


Рис. 222

3) Очевидно, что указанная в условии плоскость пересекает ребро CC_1 в некоторой точке. Для ее нахождения рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C параллелепипеда (рис. 223, а). Точка K является пересечением диагонали AC и средней линии LM треугольника BCD. Поэтому она является серединой отрезка OC. Проведем через точку K прямую, параллельную прямой AC_1, до пересечения с отрезком CC_1 в точке N (рис. 223 б). Эта точка делит отрезок CC_1 в отношении 1 : 3, считая от точки C. Искомое сечение — треугольник LMN (рис. 224). Диагональ AC_1 параллельна плоскости этого сечения по признаку параллельности прямой и плоскости ($KN \parallel AC_1$). ■

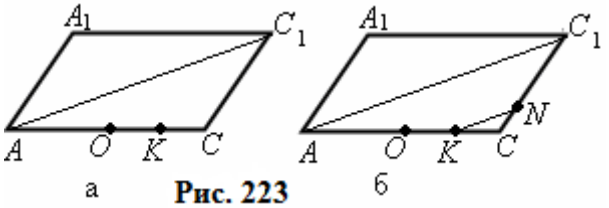


Рис. 223

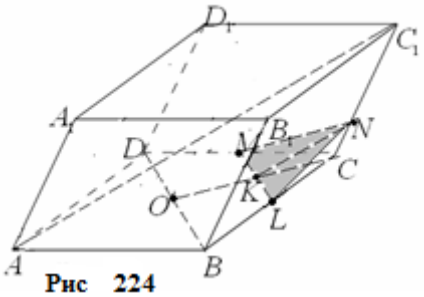


Рис 224

Пример 5.Построить сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середину K ребра BC параллельно скрещивающимся ребрам BD и AC.

 Плоскость сечения пересекает грань ABC по отрезку KL, параллельному прямой AC, ведь плоскость сечения, в которой лежит KL, не имеет с прямой AC общих точек, причем $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично, плоскость сечения пересекает грань BCD по отрезку KM, параллельному прямой BD, где $KM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = KL$, ведь идет речь о средних линиях соответствующих треугольников (рис. 225). Наконец, грани ACD и ABD тоже пересекает плоскость сечения по средним линиям MP и LP. Поскольку $KL \parallel AC \parallel PM$ и $KM \parallel BD \parallel LP$, то четырехугольник $KMLP$ является параллелограммом и даже ромбом. Ин-

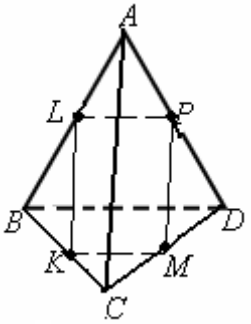


Рис. 225

туиция нам подсказывает, что это квадрат, но доказкательство этого факта опирается на результаты следующего раздела. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Прямая скрещивается с некоторой прямой, лежащей в данной плоскости. Может ли она быть параллельной этой плоскости?

2. Верно ли, что прямая и плоскость не параллельны, если прямая не параллельна некоторой прямой этой плоскости?

3. Верно ли, что средняя линия трапеции параллельна произвольной плоскости, проходящей через основание трапеции?

4. Может ли прямая, проходящая через середины смежных сторон параллелограмма, быть параллельной плоскости, содержащей одну из сторон параллелограмма?

5. Верно ли, что прямая, параллельная линии пересечения двух плоскостей, параллельна хотя бы одной из этих плоскостей?

6. Верно ли, что через данную точку можно провести плоскость, параллельную данной прямой?

7. Даны две пересекающиеся плоскости, и точка, принадлежащая лишь одной из них. Можно ли через эту точку провести прямую, которая не пересекает ни одной из этих плоскостей?

8. Как расположены прямые a и b, если через прямую b можно провести, по меньшей мере, две плоскости, параллельные прямой a?

9. Как расположены прямые a и b, если они параллельны одной плоскости?

10. Будут ли скрещивающимися прямые, если одна из них параллельна некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость?

11. Плоскость проходит через одну из скрещивающихся прямых. Как она может быть расположена относительно второй прямой?

Графические упражнения

Постройте рисунок по приведенным данным.

1. Прямая AB параллельна плоскости α, а плоскость ABC пересекает плоскость α по прямой CD.

2. Плоскость α параллельна прямой b и содержит прямую a, скрещивающуюся с прямой b.

3. Прямая a параллельна каждой из пересекающихся плоскостей α и β.

4. Плоскость α параллельна стороне BC треугольника ABC и проходит через середину стороны AB.

5. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ параллельна некоторой плоскости, а стороны AD и CD пересекают эту плоскость в точках M и N.

6. Плоскости α и β пересекаются по прямой *a*, плоскости α и γ — по прямой *b*, а плоскости β и γ — по прямой *c*. Прямые *a* и *b* пересекаются в точке *M*.
7. Плоскости α и β пересекаются по прямой *a*, плоскости α и γ — по прямой *b*, а плоскости β и γ — по прямой *c*. Прямые *a* и *b* параллельны.
8. Плоскость проходит через вершины *B*, D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельно ребру *CD*.
9. Прямая проходит через центр *O* грани *SBC* правильного тетраэдра *SABC* параллельно граням *SAB* и *SAC*.

В исследовании взаимного расположения прямой и плоскости особого внимания заслуживают задачи на построение. Основные из них следующие.

Задача 3. данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.

Задача 4.Через данную точку провести плоскость, параллельную данной прямой.

Задача 5.Через данную прямую провести плоскость, параллельную другой прямой.

Задача 6.Через данную точку провести плоскость, параллельную двум данным прямым.

Задача 7. Через данную точку провести прямую, параллельную двум данным плоскостям.

Решение этих задач предусматривает анализ условий существования решений, выявление количества решений, описания построения и его обоснования.

Обсудим реализацию этих этапов решения для приведенных задач.

Задача 3 была рассмотрена в начале этого пункта при условии, что данная точка не лежит в данной плоскости. Понятно, что это условие является необходимым для существования решения. При выполнении этого условия задача имеет решения, более того, их бесконечное множество. Очевидно, что все прямые, которые проходят через данную точку вне плоскости и параллельны этой плоскости (рис. 226), образуют плоскость (докажите это!).

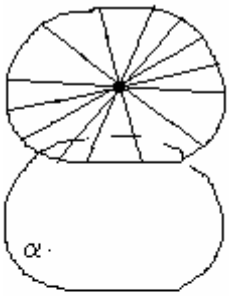


Рис. 226

Задача 4 имеет решения, их бесконечное множество, если данная точка не лежит на данной прямой. Построение искомой плоскости основывается на непосредственном применении признака параллельности прямой и плоскости. Достаточно через данную точку *M* провести прямую *b*, параллельную данной прямой *a*. А затем через построенную прямую провести плоскость, не имеющую общих точек с данной прямой (рис. 227). Совокупность всех плоскостей, удовлетворяющих условиюж задачи, почти заполняют пространство (почему почти?).

Рис. 227

Задача 5 не имеет решений, если данные прямые пересекаются. Если же они параллельны, то решений беско-

нечное множество. Этот случай является составляющей рассмотренного решения задачи 2. Наиболее содержательным является случай, когда данные прямые скрещивающиеся. Он рассмотрен в задаче 2.

Задача 6 сложнее предыдущих, особенно в части анализа условий существования решения.

 Пусть дана точка M и прямые a и b. Понятно, что точка M не лежит на этих прямых. Это необходимое условие существования решения. Дальнейшее рассмотрение задачи зависит от взаимного расположения данных прямых.

1) Рассмотрим сначала случай, когда прямые a и b параллельны. Понятно, что сначала необходимо через точку M провести прямую c, параллельную прямой a, а следовательно и b (почему?) (рис. 228). Осталось взять точку вне плоскости, содержащей прямые a и b, и через эту точку и построенную прямую c провести плоскость. Эта плоскость будет параллельна прямым a и b по признаку параллельности прямой и плоскости. Этот случай несущественно отличается от задачи 1.

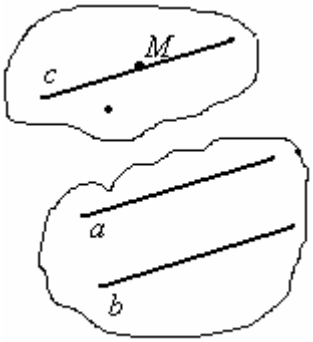


Рис. 228

2) Пусть теперь прямые a и b пересекаются. Проведем через точку M прямые a' и b', параллельные соответственно прямым a и b (рис. 229). Плоскость, которую определяют пересекающиеся прямые a' и b', является искомой при условии, что она не совпадает с плоскостью α, проходящей через прямые a и b. А это будет тогда и только тогда, когда точка M не принадлежит плоскости α (докажите это!). Таким образом, если точка M лежит вне плоскости α, то существует решение задачи. То, что оно единственное, составляет отдельную задачу (попробуйте ее решить!).

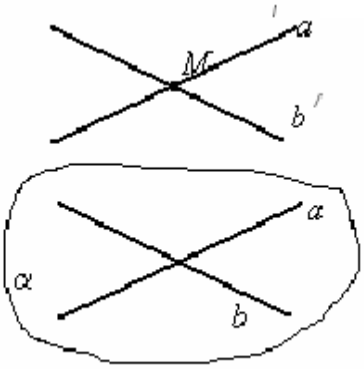


Рис. 229

3) Случай, когда прямые скрещиваются, в части построения, не отличается от случая пересекающихся прямых. Описание точек, для которых существует решение, и исследование количества решений значительно более сложны (попробуйте самостоятельно это сделать!). ■

Задача 7 также нуждается рассмотрения разных случаев расположения данных плоскостей. Случай, когда плоскости не имеют общих точек, будет рассмотрен в следующем параграфе. Там будет обосновано существование такого расположения. Случай, когда плоскости пересекаются, заслуживает особого внимания, он часто встречается в задачах.

Пусть дана точка M и плоскости α и β, пересекающиеся по прямой a (рис. 230 а). Понятно, что необходи-

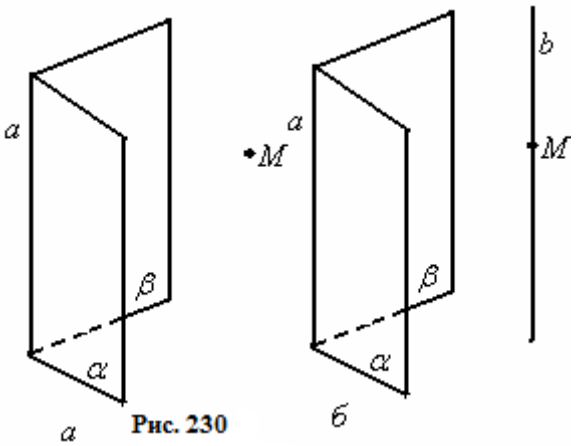


Рис. 230

мым условием существования решения задачи является расположение точки M вне плоскостей α и β. Проведем через точку M прямую b, параллельную прямой a (рис. 230 б). Прямая b удовлетворяет условию задачи по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1). Обоснование единственности решения вытекает из приведенной далее теоремы, которая и сама заслуживает внимания.

Теорема 5.4 *(о прямой, параллельной двум пересекающимся плоскостям)*

Прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей, параллельна и линии их пересечения.

 Пусть даны плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c, и прямая l, параллельная каждой из этих плоскостей (рис. 231 а).

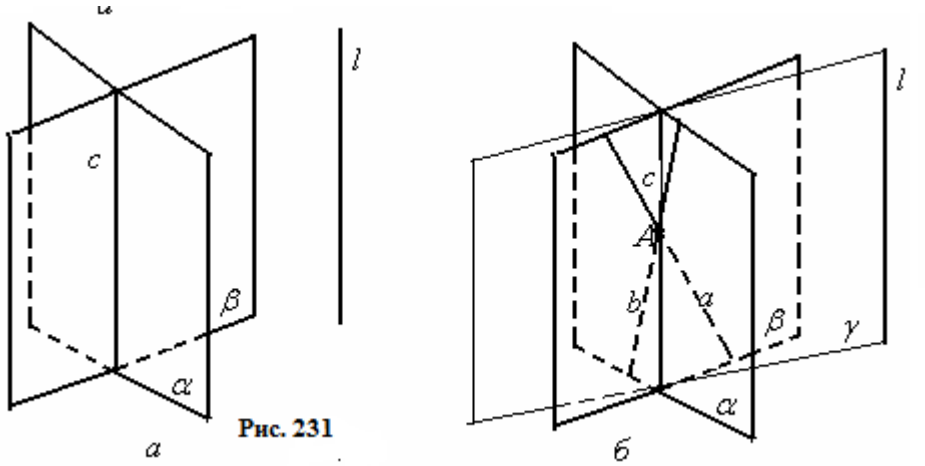


Рис. 231

Возьмем произвольную точку A прямой c и через эту точку и прямую l проведем плоскость γ. Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b (рис. 231 б). По теореме о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную второй (теорема 3), $l \parallel a$ и $l \parallel b$. Но через точку можно провести лишь одну прямую, параллельную данной. Поэтому прямые a и b совпадают. Поскольку они лежат в разных плоскостях, то это значит, что они совпадают с линией пересечения этих плоскостей, то есть с прямой c. Таким образом, прямая c параллельна прямой l. ■

Пример 6.Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести единственную плоскость, параллельную второй прямой.

 Существование указанной плоскости доказано в задаче 2. То, что плоскость единственная, докажем методом от противного. Пусть существует,

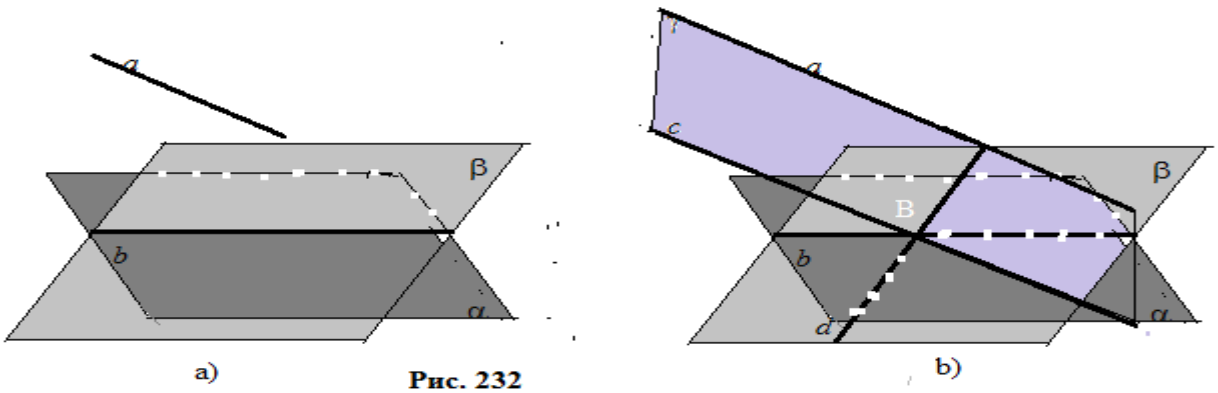


Рис. 232

кроме α, иная плоскость β, проходящая через прямую b и параллельная a (рис. 232,а). Пересечением плоскостей α и β является прямая b (почему?). Через точку B прямой b и прямую a проведем плоскость γ. Она пересечет плоскости α и β по двум различным прямым c и d, параллельным прямой a, по теореме 3 (рис. 232, б). То есть через точку B, не принадлежащую прямой a, проходят две прямые, параллельные прямой a. Полученное противоречие доказывает единственность плоскости, проходящей через прямую b параллельно прямой a. ■

Задачи на исследование

1. Опишите все точки пространства, через которые можно провести плоскость, параллельную двум данным скрещивающимся прямым.

2. Исследуйте, являются ли верными такие признаки параллельности прямой a и плоскости α ($a \notin \alpha$):

1) прямая a параллельная плоскости α тогда и только тогда, когда она параллельна проекции a на α;

2) прямая a параллельна плоскости α тогда и только тогда, когда существует прямая, параллельная a и α.

3. Посчитайте, сколько пар параллельных прямых и плоскостей определяют грани и ребра куба.

4. Над столом натянута нить параллельно ему, и на лист бумаги, который лежит на столе, наугад брошена игла. Что вероятнее, по вашему мнению, игла ляжет параллельно к нити или будет скрещивающейся с ней? Подтвердите свое мнение опытом.

Контрольные вопросы

1. Может ли прямая не быть параллельной плоскости, если в этой плоскости есть прямые, параллельные этой прямой?

2. Могут ли прямая и плоскость быть параллельными, если в плоскости не существуют прямые, параллельные данной прямой? (1 и 2 — были дубли)

3. Прямая a скрещивается с некоторой прямой, которая лежит в данной плоскости α. Может ли прямая a быть параллельной плоскости α?

4. В плоскости α лежит только одна сторона трапеции. Верно ли, что одна из сторон трапеции параллельна плоскости α?

5. Может ли плоскость, проходящая через середины двух сторон треугольника, пересекать его третью сторону?

6. Верно ли, что две прямые, параллельные одной плоскости, параллельны между собой?

7. Может ли прямая быть параллельной двум пересекающимся плоскостям?

8. Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, которая пересекает данные плоскости по параллельным прямым?

9. Может ли прямая пересекать плоскости всех граней куба?

10. Существует ли такое расположение трех плоскостей, что любая прямая пространства пересекает хотя бы одну из них?

Задачи

200. Треугольник ABC и параллелограмм $ABFD$ лежат в разных плоскостях, M, N, K — середины сторон AC, BC, BF соответственно.

1°) Установите взаимное расположение прямых и плоскостей: DF и ABC; AB и MNK; AC и DBF; MK и BCD.

2°) Постройте точку P пересечения прямой BD с плоскостью ACF.

3) Вычислите длину отрезка PK, если $MN = 3$ см.

4) Постройте прямую, параллельную плоскостям треугольника и параллелограмма.

201. Ромб $ABCD$ и прямоугольник $DBEF$ лежат в разных плоскостях; M, N, K — середины сторон AD, AB, EF соответственно.

1°) Установите взаимное расположение прямых и плоскостей: EF и ABC; MC и DEF; MN и CFE; BE и ADF.

2°) Постройте точку P пересечения прямой MN с плоскостью BCE.

3) Вычислите длину отрезка EF, если $MN = 4$ см.

4) Постройте прямую, параллельную плоскостям ромба и прямоугольника.

202. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Установите взаимное расположение прямой CD и плоскостей ABC, ABB_1, AA_1D.

2°) Докажите, что прямая AB_1 параллельна плоскости CDD_1.

3) Через середину ребра A_1D_1 проведите прямую, параллельную плоскостям AA_1B и CC_1B_1.

4°) Постройте прямую, пересекающую плоскости только четырёх граней куба.

5) Постройте линию пересечения плоскостей ADC_1 и A_1D_1C.

203. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$, $BC \parallel AD$.

1°) Установите взаимное расположение прямой AD и плоскости BCS.

2) Через середину ребра AS проведите прямую, параллельную плоскостям ABC и BCS.

3°) Постройте прямую, пересекающую плоскости только двух боковых граней.

4*) Постройте линию пересечения плоскостей, содержащих противоположные боковые грани, проходящие через основания трапеции.

204. Точка B лежит в плоскости α, а отрезок CD длиной 12 см параллелен этой плоскости. Точка A лежит на отрезке BC и $BA : AC = 4 : 3$.

1°) Постройте точку P пересечения прямой AD с плоскостью α.

2°) Установите взаимное расположение прямых BP и CD.

3) Найдите длину отрезка BP.

205. Трапеция $ABCD$ лежит в плоскости α. Её основание BC равно 12 см. Точка M лежит вне плоскости α, а точка K — середина отрезка BM.

1) Постройте точку N пересечения плоскости ADK и отрезка MC.
2) Установите взаимное расположение прямой KN и плоскости α.
3) Найдите длину отрезка KN.

206. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, що любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD, BC в вершинах параллелограмма.

207. Точка M не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости треугольника ABM.

208. Плоскость α параллельна стороне BC треугольника ABC и проходит через середину стороны AB. Докажите, что плоскость α проходит через середину стороны AC.

209. Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что:
1) произвольная прямая, параллельная прямой a и имеющая общую точку с плоскостью α, лежит в плоскости α;
2) произвольная прямая, не лежащая в плоскости α и параллельная прямой a, параллельна плоскости α.

210. Докажите, что две плоскости пересекаются, если:
1) через точку, не принадлежащую этим плоскостям, можно провести лишь одну прямую, параллельную данным плоскостям;
2) одна из плоскостей пересекает прямую, параллельную второй плоскости.

211. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ параллельна некоторой плоскости, а стороны AD и CD пересекают эту плоскость в точках M и N. Докажите, что треугольники ADC и MDN подобны.

212. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что сечение тетраэдра произвольной плоскостью, параллельной прямым AB и CD, и имеющей общие точки со всеми ребрами тетраэдра, является параллелограммом.

213. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную двум данным пересекающимся плоскостям.

214. Проведите через данную точку пространства плоскость, параллельную двум данным скрещивающимся прямым.

215. Дана треугольная пирамида $SABC$. Постройте точку пересечения плоскости ABC с прямой MN, если:
1°) точки M и N лежат на ребрах SC и SB;
2) точка M лежит на ребре AS, а точка N — в грани BSC;
3*) точка M лежит в грани ABS, а точка N — в грани ASC.

216. Через центр грани AA_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены две прямые, параллельные прямым D_1D и B_1C соответственно.
1) Найдите угол между этими прямыми.
2) Установите взаимное расположение построенных прямых и плоскостей BB_1C_1C и DD_1C_1C.

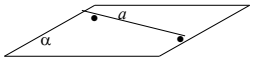
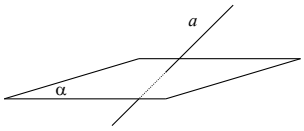
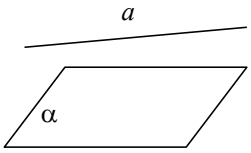
217. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через:
1°) вершины A, B, C_1;
2°) вершины B, D и середину ребра AA_1;
3°) середину ребра CD параллельно плоскости ADC_1;
4°) центр грани CDD_1C_1 параллельно плоскости ADD_1;
5) вершину A и середины ребер CC_1 и C_1D_1;
6*) отрезок, соединяющий середины ребер AA_1 и B_1C_1, параллельно плоскости AB_1C.
218. Даны тетраэдр $SABC$ и точка F на ребре AB, делящая отрезок AB в отношении 3:1 ($AF : FB$).
1) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через вершину C, середину ребра AS и параллельной прямой BS.
2*) В каком отношении построенное сечение делит отрезок, соединяющий точку F и середину отрезка AC?

Упражнения для повторения

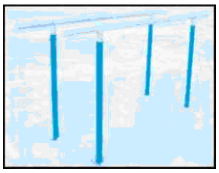
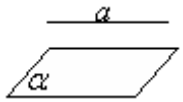
219. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1)Укажите две прямые, параллельные плоскости ABC, проходящие через одну точку.
2) Постройте плоскость, пересекающую плоскость ABC и содержащую бесконечное множество прямых, параллельных плоскости ABC.
3*) Могут ли пересекаться плоскости ABC и $A_1B_1C_1$?
220. Пусть прямые a и b пересекаются. Постройте плоскость, проходящую через данную точку пространства параллельно как прямой a, так и прямой b .

Итог

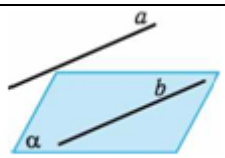
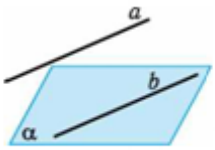
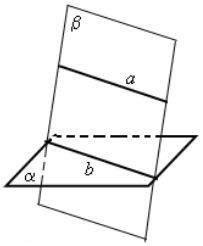
Классификация взаимного расположения прямых и плоскости

Количество общих точек	Не менее двух	Одна	Ни одной
Изображение			
Терминология, обозначение	$a \subset \alpha$ "a лежит в α"	$a \times \alpha$ "a пересекает α"	$a \parallel \alpha$ a и α параллельны

Основное определение

Прямая и плоскость, не имеющие общих точек, называются ***параллельными***		 $a \parallel \alpha$.

Основные утверждения

Признак параллельности прямой и плоскости	Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой плоскости, то она параллельна самой плоскости.	 $b \subset \alpha,\ a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$
Теорема, обратная признаку параллельности прямой и плоскости	Если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости существует прямая, параллельная данной прямой.	 $a \parallel \alpha \Rightarrow \exists b:\ b \subset \alpha,\ b \parallel a$
Теорема о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную второй плоскости	Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой.	 $a \parallel \alpha, a \subset \beta,$ $b = \alpha \cap \beta \Rightarrow a \parallel b$

§ 13. Параллельность плоскостей

Рассматривается важное для стереометрии отношение — параллельность плоскостей, его свойства и применения.

Наглядное представление о расположении двух плоскостей дает моделирование с помощью плоскостей поверхностей смежных стен, потолка и пола комнаты, двухъярусных кроватей, двух скрепленных листов бумаги и т. п. (рис. 233—235).

Рис. 233

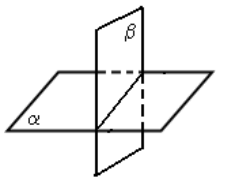
Рис. 234

Рис. 235

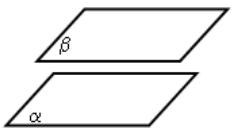
Хотя существует бесконечное множество вариантов взаимного расположения различных плоскостей, для выявления и характеристики которых в последующем будут применены измерение углов и расстояний, мы сначала остановимся на таких, где в основу классификации (как и прямых с плоскостями) положено количество их общих точек.

1. Две плоскости имеют не менее трёх общих точек, не лежащих на одной прямой. Такие плоскости ***совпадают*** (аксиома C_2, § 8).

1. Общие точки двух плоскостей расположены на одной прямой, которая является линией пересечения этих плоскостей (аксиома C_3, § 8). Такие плоскости ***пересекаются.***



3. Две плоскости не имеют общих точек. В этом случае их называют ***параллельными.***



Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей обозначается знаком $\parallel$: $\alpha \parallel \beta$.

Как всегда, при введении геометрических понятий возникает проблема их существования. Существование пересекающихся плоскостей является характерным признаком пространства. И этим мы уже многократно пользовались. Менее очевидным является существование параллельных плоскостей. Нет никакого сомнения в том, что, например, плоскости противоположных граней куба параллельны, то есть не пересекаются. Но непосредственно, по определению, этого установить невозможно. Для решения поставленного во-

проса, а также других вопросов, связанных с параллельностью плоскостей, необходимо иметь признак параллельности.

Для поиска признака целесообразно рассматривать плоскость, «сотканную» из прямых. Очевидно, что каждая прямая одной из параллельных плоскостей должна быть параллельна второй. В противном случае плоскости будут иметь общую точку. Достаточно ли параллельности плоскости β одной прямой плоскости α для того, чтобы плоскости α и β были параллельными? Безусловно, нет (обоснуйте это!). Практический опыт свидетельствует, что двух таких пересекающихся прямых достаточно. Чтобы закрепить на мачте параллельную земле площадку, достаточно положить ее на две прикрепленные к мачте балки, параллельные земле (рис. 236). Можно привести еще много примеров применения этого приема обеспечения параллельности плоских поверхностей реальных объектов (попробуйте это сделать!).

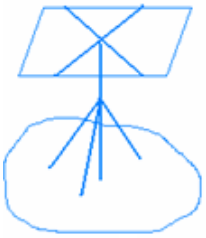


Рис. 236

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1 *(признак параллельности плоскостей).*

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

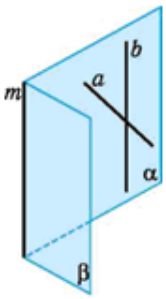


Рис. 237

□ Пусть пересекающиеся прямые *a* и *b* плоскости α параллельны плоскости β. Докажем, что плоскости α и β параллельны методом от противного. Для этого допустим, что плоскости α и β пересекаются по прямой *m* (рис. 237). Прямые *a* и *b* пересекать прямую *m* не могут по условию. Однако тогда в плоскости α через одну точку проведены две прямые, не пересекающиеся с прямой *m,* то есть параллельные ей. Это противоречие и завершает доказательство теоремы. ■

Признаком параллельности плоскостей пользуются при горизонтальном размещении плоских конструкций (бетонных плит, пола, диска угломерных приборов и т. п.) с помощью двух уровней, размещенных в плоскости конструкции на пересекающихся прямых. На основании этого признака можно выполнить построение плоскости, параллельной данной.

Задача 1. Через точку, которая находится вне данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной.

□ Пусть даны плоскость β и точка *M* вне этой плоскости (рис. 238, а). Проведем через точку *M* две пересекающиеся прямые *a* и *b*, параллельные плоскости β. Для этого нужно взять в плоскости β две пересекающиеся прямые *c* и *d* (рис. 238, б). Потом через точку *M*

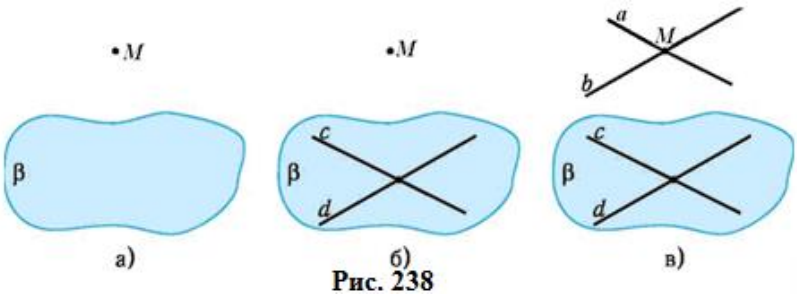


Рис. 238

провести прямые a и b, параллельные прямым c и d соответственно (рис. 238, в).

Пересекающиеся прямые a и b параллельны плоскости β, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1 §12). Они определяют однозначно плоскость α. Согласно доказанному признаку, α ∥ β. ■

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M, N, P — середины ребер BC, B_1C_1, A_1D_1 соответственно. Установить взаимное расположение плоскостей: 1) ABB_1 и PNM; 2) NMA и A_1C_1C; 3) A_1NM и PC_1C; 4) MAD_1 и DB_1C.

Установление взаимного расположения плоскостей состоит из формулирования гипотезы об их расположении на основе анализа рисунка и её обоснования с помощью определений, свойств и признаков.

1) Плоскости ABB_1 и PNM (рис. 239) параллельны, по признаку параллельности плоскостей (теорема 1). Действительно, прямые PN и NM пересекаются и параллельны плоскости ABB_1, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1 §12), ведь отрезки PN и NM соединяют середины противоположных сторон квадратов, поэтому они параллельны сторонам квадратов: $PN \parallel A_1B_1$, $NM \parallel B_1B$.

2) Плоскости NMA и A_1C_1C пересекаются по прямой AA_1 (рис. 240). Действительно, прямые AA_1 и CC_1 — параллельны, по признаку параллельности прямых ($AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \parallel CC_1$). Поэтому прямая AA_1 лежит в плоскости A_1C_1C. Аналогично обосновывается принадлежность прямой AA_1 плоскости NMA.

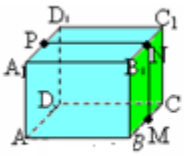


Рис. 239

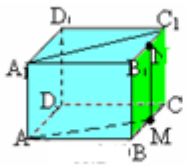


Рис. 240

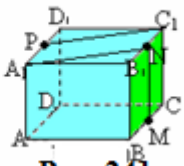


Рис. 241

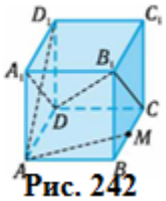


Рис. 242

3) Плоскости A_1NM и PC_1C (рис. 241) — параллельны, по признаку параллельности плоскостей. Действительно, $NM \parallel C_1C$. Поэтому прямая NM параллельна плоскости PC_1C. Отрезки PC_1 и A_1N также параллельны, поскольку четырехугольник PC_1NA_1 — параллелограмм ($A_1P \parallel NC_1$, $A_1P = NC_1$). Таким образом, прямая A_1N параллельна плоскости PC_1C. Прямые A_1N и NM пересекаются.

4) Плоскости MAD_1 и DB_1C пересекаются (рис. 242). Хотя линию их пересечения построить непросто, но указать одну точку этой линии нетрудно. Действительно, прямые A_1D и B_1C — параллельны, поскольку четырехугольник A_1B_1CD — параллелограмм ($A_1B_1 = AB = CD$, $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \parallel CD$). Поэтому прямая A_1D принадлежит плоскости DB_1C. Прямые A_1D и AD_1 пересекаются в точке, общей для плоскостей MAD_1, и DB_1C. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что две плоскости параллельны, если каждая прямая, лежащая в одной плоскости, паралельна второй плоскости?

2. В плоскости α существует бесконечное множество прямых, параллельных плоскости β. Верно ли, что плоскости α и β параллельны?

3. Плоскости α и β параллельны. Существуют ли скрещивающиеся прямые, лежащие в этих плоскостях?

4. Параллельны ли две плоскости, если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны второй плоскости?

5. Диагональ и сторона трапеции параллельны некоторой плоскости. Верно ли, что плоскость трапеции параллельна этой плоскости?

6. Две стороны треугольника параллельны некоторой плоскости. Параллельна ли этой плоскости третья сторона треугольника?

7. Всегда ли можно через данную точку пространства провести плоскость, параллельную данной плоскости?

8. Верно ли, что через данную точку вне треугольника можно провести плоскость, параллельную плоскости треугольника?

9. Сколько пар параллельных плоскостей можно провести через две параллельные прямые?

10. Как могут быть расположены две прямые, лежащие в параллельных плоскостях?

Упражнения на рисунках

1. На рис.243 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M, N, K, L, P являются серединами соответствующих ребер. Заполните по приведенному образцу таблицу, выбравнеобходмое расположение плоскостей α и β.

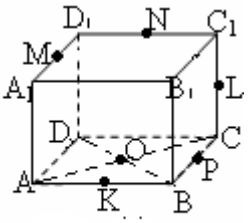


Рис. 243

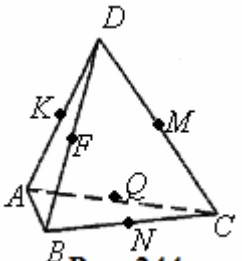


Рис. 244

α и β / Взаимное расположение	$A_1B_1C_1$ и ADC	MPK и BB_1D	MNK и MNP	D_1KP и BMN
α × β				
α ‖ β	+			
α = β				
	MNK и PLN	B_1KP и DMN	A_1DC_1 и AB_1C	A_1C_1C и MKP
α × β				
α ‖ β				
α = β				

2.На рис. 244 изображен тетраэдр *ABCD*, точки *K*, *F*, *M*, *N*, *Q* — середины соответствующих ребер. Укажите:

1) плоскость, проходящую через точку *K* параллельно плоскости *ABC*;

2) плоскость, проходящую через прямую *BD* параллельно плоскости *MNQ*.

2. Опредили-

те, чем является сечение фигуры плоскостью, проходящей через данные три то

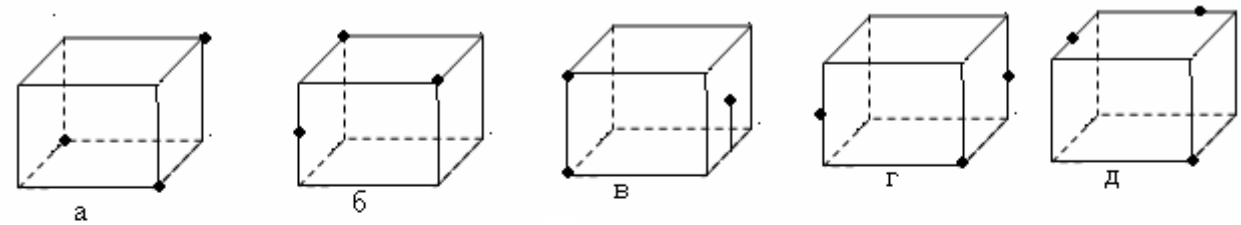


Рис. 245

Рис. 246

чки, изображенные на рисунках 245 а - д и 246 а – г.

Приведенный признак параллельности плоскостей иногда удобнее использовать в несколько другой форме.

Теорема 1' *(признак параллельности плоскостей).*

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

Пользуясь признаком параллельности прямой и плоскости (теорема 1 §12), нетрудно установить, что из условия теоремы 1' вытекает условие теоремы 1. Применение теоремы, обратной признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 2 §12), завершает обоснование эквивалентности условий теорем 1 и 1 '.

Естественно возникает вопрос об однозначности приведенного в задаче 1 построения. Поскольку нам придется не раз воспользоваться этим свойством, то выделим ее как отдельную теорему. Однако сначала рассмотрим другое утверждение.

Теорема 2 (*о пересечении двух параллельных плоскостей третьей*).

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны.

 Пусть даны параллельные плоскости α, β и плоскость γ, их пересекающая (рис. 247). Обозначим линии пересечения через *a* и *b*. Эти прямые лежат в плоскости γ и не пересекаются, поскольку плоскости α и β не имеют общих точек. Поэтому прямые *a* и *b* — параллельны. ■

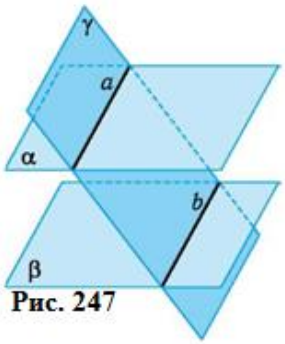


Рис. 247

Теорема 3 *(о существовании плоскости, параллельной данной).*

Через точку, расположенную вне данной плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной.

 Построение такой плоскости выполнено в задаче 1. Однозначность построения докажем методом от противного. Допустим, что через точку *M* проведены две различные плоскости α и γ, параллельные плоскости β (рис. 248), и прямая *m* — линия их пересечения. Проведем через точку *M* плоскость δ, пересекающуюся с прямой *m* и плоскостью β (как это можно сделать?). Обозначим через *a* и *b* линии пересечения плоскости δ с плоскостями α и γ, а через *c* — линию пересечения плоскостей δ и β (рис. 248). Согласно теореме 2, $a \parallel c$ и $b \parallel c$. То есть в плоскости δ через точку *M* проходят две пря-

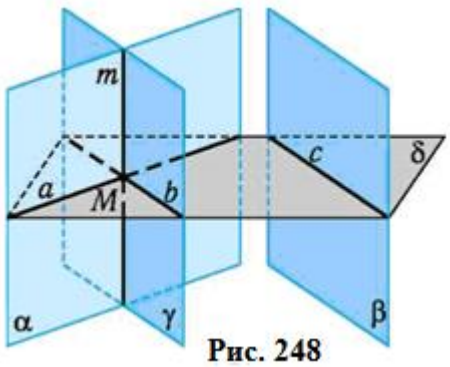


Рис. 248

мые, параллельные прямой *c*. Противоречие свидетельствует о неверности предположения. ■

Отношение параллельности плоскостей обладает рядом свойств, имеющих аналоги в планиметрии.

Теорема 4 *(об отрезках параллельных прямых между параллельными плоскостями).*

Отрезки параллельных прямых, отсекаемые параллельными плоскостями, равны между собой.

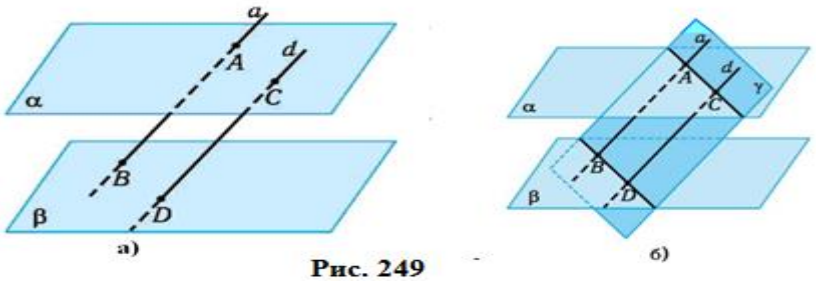


Рис. 249

 Пусть даны две параллельные плоскости α и β и отрезки *AB* и *CD* параллельных прямых *a* и *d*, отсекаемые этими плоскостями (рис. 249, а). Проведем через прямые *a* и *d* плоскость γ (рис. 249, б). Она пересекает плоскости α и β по прямым *AC* и *BD*, которые, согласно теореме 2, параллельны. Поэтому четырехугольник *ABCD* — параллелограмм, его противоположные стороны *AC* и *BD* равны.

 Из приведенного свойства вытекает, что если от всех точек плоскости отложить по одну сторону от плоскости параллельные отрезки одинаковой длины, то концы этих отрезков образуют две параллельные плоскости. Именно на этом свойстве основано построение параллелепипеда с помощью отложения отрезков (рис. 250).

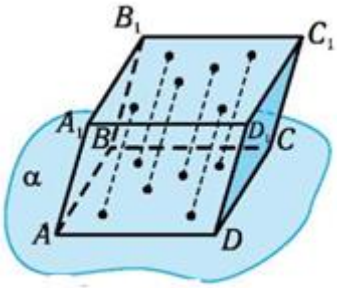


Рис. 250

Теорема 5 *(о транзитивности отношения параллельности плоскостей).*

Если каждая из двух плоскостей параллельна третьей, то данные две плоскости параллельны между собой.

 Пусть плоскости α и β параллельны плоскости γ. Допустим, что α и β не параллельны. Тогда плоскости α и β имеют общую точку. И через эту точку проходят две различные плоскости, параллельные плоскости γ, что противоречит теореме 3. Поэтому плоскости α и β не имеют общих точек, то есть они параллельны. ■

Теорема 5 является еще одним признаком параллельности плоскостей. Она широко применяется как в геометрии, так и в практической деятельности. Например, в многоэтажном здании параллельность плоскостей пола и потолка на каждом этаже гарантирует их параллельность и на разных этажах.

Задача 2. Доказать, что если прямая *a* пересекает плоскость α, то она пересекает также каждую плоскость, параллельную плоскости α.

 Пусть плоскости α и β — параллельны, а прямая *a* пересекает плоскость α в точке *A*. Докажем, что она пересекает и плоскость β. Допустим, что это не так. Тогда прямая *a* параллельна плоскости β. Проведем плоскость γ через прямую *a* и произвольную точку плоскости β (рис. 251).

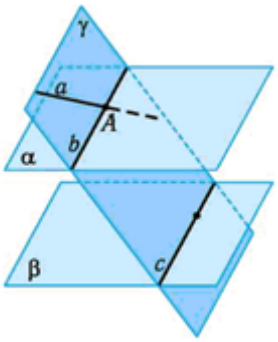


Рис. 251

Эта плоскость пересекает параллельные плоскости α и β по прямым *b* и *c*. Согласно теореме 2, *b* ∥ c, то есть в плоскости γ через точку *A* проходят две прямые *a* и *b*, параллельные прямой *c*. Это противоречие и доказывает утверждение. ■

Попробуйте доказать самостоятельно, что если плоскость α пересекает плоскость β, она пересекает также каждую плоскость, параллельную плоскости β.

Пример 2. В тетраэдре *ABCD* точки *K*, *F*, *E* — середины ребер *DA*, *DC*, *DB*, а *M* и *P* — центры масс граней *ABD* и *BCD* соответственно.

1) Установить взаимное расположение плоскостей *KEF* и *ABC*; *DEF* и *ABC*.

2) Построить линию пересечения плоскостей *AFB* и *KEC*.

3) Найти площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости *ABD* и проходящей через точку *P*, если все ребра тетраэдра равны *a*.

 Построим рисунок, соответствующий условию (рис. 252, а).

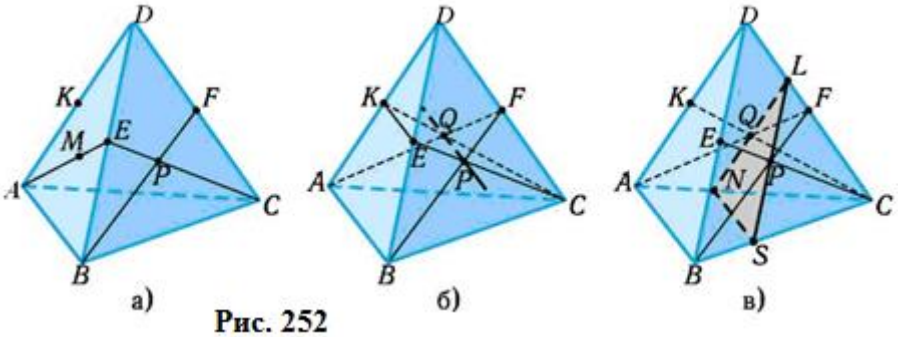


Рис. 252

1) Плоскости *KEF* и *ABC* параллельны, по признаку параллельности плоскостей (теорема 1'): пересекающиеся прямые *KE* и *KF* плоскости *KEF* параллельны пересекающимся прямым *AB* и *AC* плоскости *ABC* (на них лежат средние линии соответствующих треугольников).

Плоскости *DEF* и *ABC* пересекаются по прямой *BC*, так как прямая *BC* принадлежит обеим плоскостям, а совпадать они не могут — точки *A*, *B*, *C*, *D* не лежат в одной плоскости.

2) Плоскость *AFB* пересекается с плоскостью *KEC* по прямой, содержащей точку *P*, так как прямые *CE* и *BF*, лежащие в этих плоскостях, находятся в плоскости *BCD* и пересекаются в точке *P*. Другой точкой является точка пересечения *Q* прямых *AF* и *CK* в плоскости *ACD* (рис. 252, б). Очевидно, что эта точка является центром масс грани *ACD*. Искомым пересечением является прямая *PQ*.

3) Построим сечение, указанное в условии, пользуясь признаком параллельности плоскостей. Проведем через точки *P* и *Q* прямые *LS* и *LN*, параллельные

прямым DB и DA соответственно (рис. 252, в). Эти прямые пересекают отрезок CD в точке L. Последнее вытекает из свойства центра масс треугольника — он делит медианы треугольника в отношении 2 : 1, считая от вершины. Осталось применить теорему Фалеса. Таким образом, плоскости PLQ и BDA параллельны. Искомым сечением является треугольник LSN.

По построению, треугольники BCD и SCL — подобны с коэффициентом подобия $\frac{CE}{CP}=\frac{3}{2}$. Поэтому $LS=\frac{2}{3}BD$. Аналогично устанавливаются равенства: $LN=\frac{2}{3}AD$, $NS=\frac{2}{3}AB$. Отсюда вытекает, что треугольники LSN и ABD подобны с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. По свойствам площадей подобных треугольников, $S_{LNS}=\frac{4}{9}S_{ABD}$. Осталось найти площадь треугольника ABD. Поскольку, по условию, все ребра тетраэдра равны a, то $S_{ABD}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Искомая площадь равна $\frac{1}{3\sqrt{3}}a^2$.

Уместно обратить внимание на то, что ответ зависит лишь от площади грани ABD. Поэтому равенство всех ребер является лишь средством найти эту площадь. Таким образом, данную задачу можно существенно обобщить. ■

Ответ. 1) $KEF \parallel ABC$; 3) $\frac{1}{3\sqrt{3}}a^2$.

Пример 3. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку B параллельно плоскости AB_1D_1.

□ Пусть дано изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 253 а).

Построим сечение, указанное в условии, пользуясь признаком параллельности плоскостей. Для этого через точку B проведем две прямые, параллельные прямым плоскости AB_1D_1. Одной из этих прямых будет прямая BC_1

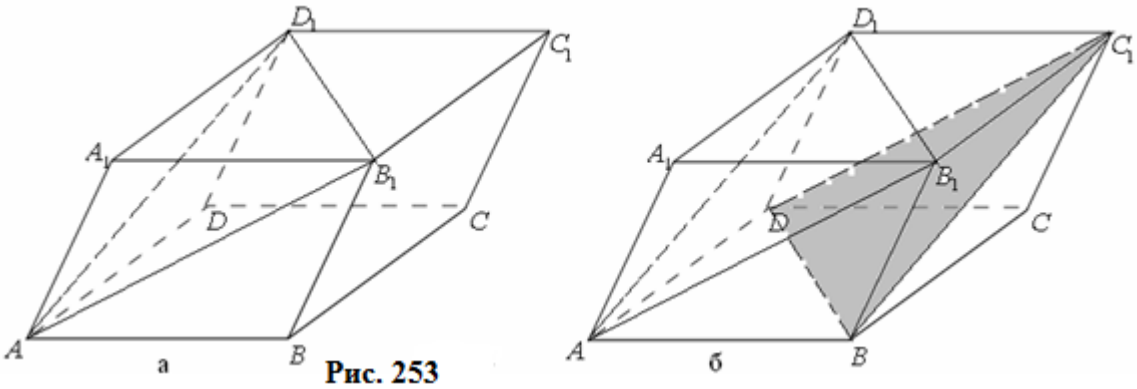


Рис. 253

(рис. 253 б). Действительно, четырехугольник ABC_1D_1 является параллелограммом, поскольку $AB \parallel A_1B_1$, $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $A_1B_1 = D_1C_1$. Поэтому

$BC_1 \parallel AD_1$. Аналогично устанавливается параллельность прямых BD и B_1D_1. Таким образом, плоскости BDC_1 и AB_1D_1 параллельны. Искомым сечением будет треугольник BC_1D. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что две плоскости параллельны, если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым второй плоскости?

2. Две стороны параллелограмма параллельны некоторой плоскости. Верно ли, что плоскость параллелограмма параллельна данной плоскости?

3. Можно ли через точку вне плоскости провести две плоскости, параллельные данной?

4. Могут ли быть неравными отрезки двух прямых, которые отсекаются параллельными плоскостями?

5. Всегда ли плоскость α, параллельная плоскости β, имеет общую точку с прямой a, пересекающей плоскость β?

6. Может ли прямая пересекать лишь одну из непараллельных плоскостей?

7. Можно ли провести параллельные плоскости через скрещивающиеся прямые?

8. Может ли сечением куба быть равнобокая трапеция?

10. * Может ли сечением куба быть правильный пятиугольник?

Графические упражнения

Постройте рисунок по приведенным данным.

1. Прямая a параллельная каждой из параллельных плоскостей α и β.

2. Из вершин параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

3. Треугольник $A_1B_1C_1$ является проекцией треугольника ABC на параллельную ему плоскость α. Точка M — середина BC, M_1 — проекция точки M на плоскость α.

4. Плоскости α и β пересекаются по прямой a, плоскости α и γ — по прямой b, а плоскости β и γ параллельны.

5. Через точку M, не принадлежащую параллельным плоскостям α и β, проведены две прямые a и b, пересекающие данные плоскости соответственно в точках A, A_1 и B, B_1.

6. Проекцией трапеции $ABCD$ с большим основанием AD на плоскость α, параллельную плоскости трапеции, является четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Плоскости ABA_1 и DCD_1 пересекаются по прямой l.

7. Плоскость, параллельная основанию *ABC* тетраэдра *SABC*, делит боковое ребро *SA* в отношении 2: 1, считая от вершины *S*.
8. Основанием четырехугольной пирамиды является грань куба, а её вершина совпадает с центром параллельной грани куба.

При изучении темы мы неоднократно обращались к сечениям геометрических фигур. Речь идёт о построении общих точек некоторой фигуры (тетраэдра, куба и т. п.) и плоскости (плоскости сечения или секущей плоскости). Понятно, что сечения являются всегда плоскими фигурами, ведь они принадлежат секущим плоскостям. Поэтому для их изучения можно применять планиметрию. Стоит ли при изучении пространственных фигур изучать их сечения — в этом и сомневаться не приходится. Ведь идет речь об изучении внутреннего строения фигур, их анатомии. Каждый, по-видимому, видел технические чертежи, которые всегда богаты на сечения. Ими отображают всю важную информацию об изображаемом предмете.

Как и раньше, будем считать, что секущая плоскость должна проходить так, чтобы по обе ее стороны существовали точки фигуры, которую пересекают плоскостью. Например, плоскость, проходящую через ребро куба и не имеющую других общих точек с кубом, не называют секущей. Пересечением этой плоскости с кубом будет отрезок. Но это не сечение.

Чтобы построить сечение многогранника (куба, тетраэдра, *n*-угольной пирамиды и т. п.), необходимо построить пересечение каждой грани с секущей плоскостью. А для этого достаточно найти точки пересечения секущей плоскости со всеми ребрами многогранника.

В этом и в предыдущих пунктах мы уже неоднократно сталкивались с построением сечений простейших многогранников. Эти построения основывались на свойствах параллельности прямых, прямой и плоскости, плоскостей. Каждый раз мы пользовались особенностями данного многогранника и расположения секущей плоскости. Однако, существуют и общие методы построения сечений многогранников. А теперь на примере покажем сущность одного из них, который называется ***методом следов***. Очевидно, что он связан с построением следа на некоторой плоскости. Как правило, ею служит плоскость какой-то грани.

Пример 4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки *K*, *M*, *N* на его ребрах (рис. 254). Построить сечение параллелепипеда плоскостью *KMN*.

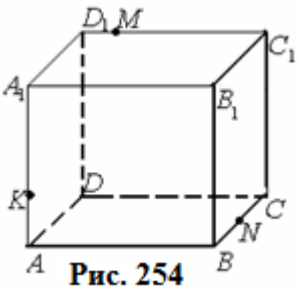


Рис. 254

□ Построим линию пересечения секущей плоскости с плоскостью грани *ABCD*, то есть след секущей плоскости на плоскости грани. Одну точку следа *N* уже имеем (рис. 255). Чтобы найти вторую точку, спроектируем точки *K* и *M* параллельно ребру DD_1 на плоскость

ABCD. Точка *K* проектируется в *A*, а точка *M* — в точку M_1 на ребре *DC*. Прямые *KM* и AM_1 лежат в одной плоскости ($MM_1 \parallel KA$), точка *P* их пересечения (рис. 255) принадлежит искомому следу (почему?). Следовательно, прямая *PN* является следом секущей плоскости на плоскости грани *ABCD*. Пересечение *R* следа с ребром *AB* является вершиной многоугольникао, который получим в сечении, как и точки *K*, *M*, *N* (они принадлежат сечению и лежат на ребрах). Попробуем найти другие вершины сечения, воспользовавшись следом *RN*.

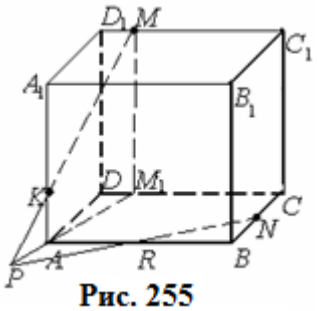


Рис. 255

Точка пересечения секущей плоскости с ребром CC_1 проектируется в точку *C* (рис. 256). Поэтому пересечение секущей плоскости с плоскостью грани DCC_1D_1 проектируется в прямую M_1C. Обозначим пересечение этой прямой со следом *RN* через *X*. Точка *X* принадлежит прямой пересечения се-

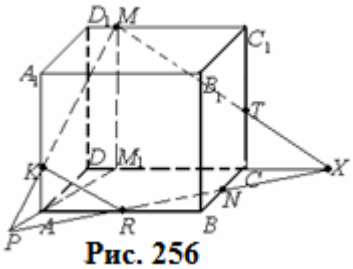


Рис. 256

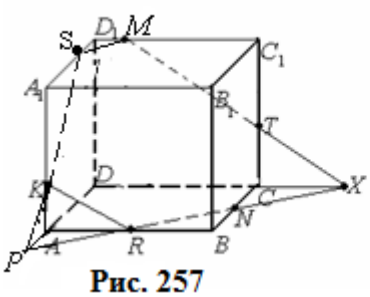


Рис. 257

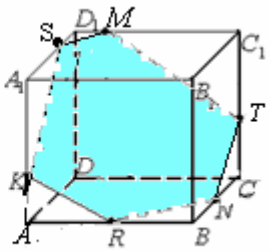


Рис. 258

кущей плоскости с плоскостью грани DCC_1D_1. Пересечение *T* прямой *MX* с ребром CC_1 является еще одной вершиной сечения.

Еще одна вершина сечения (пересечение секущей плоскости с ребром DD_1 находится аналогично (рис. 257).

Окончательно сечением параллелепипеда плоскостью *KMN* является шестиугольник *KRNTMS* (рис. 258). ■

Задания для исследования

Исследовать свойства сечений куба, в частности представить ответы на следующие вопросы.

1. Какие виды треугольников могут быть сечениями куба?

2. Существует ли для произвольного остроугольного треугольника сечение, подобное этому треугольнику?

3. Какие виды четырехугольников могут быть сечениями куба?

4. Какими свойствами обладает сечение куба, являющееся пятиугольником?

5. Может ли правильный пятиугольник быть сечением куба?

6. Какими свойствами обладает сечение куба, являющееся шестиугольником?

7. Может ли правильный шестиугольник быть сечением куба?

Контрольные вопросы

1. Верно ли, что две плоскости параллельны между собой, если каждая прямая, лежащая в одной плоскости, не лежит во второй?

2. Плоскость, в которой находится треугольник ABC, параллельна плоскости α. Как расположены медианы треугольника относительно плоскости α?

3. Два параллелограмма лежат в разных плоскостях и имеют две пары соответственно параллельных сторон. Параллельны ли плоскости, в которых лежат параллелограммы?

4. Верно ли, что две плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой?

5. Как расположены прямые, если через них можно провести бесконечное множество пар параллельных плоскостей?

6. Может ли прямая пересекать одну из параллельных плоскостей, а другой быть параллельной?

7. Могут ли быть равными непараллельные отрезки, которые содержатся между параллельными плоскостями?

8. Линии пересечения плоскостей α и β плоскостью γ параллельны между собой. Параллельны ли плоскости α и β?

9. Могут ли три грани куба быть параллельными одной плоскости?

10. Деревянный куб распилен на две части (с одной грани до противоположной). Какую фигуру получили в сечении?

Задачи

221. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O, O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно, M — середина ребра AB.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей MO_1O и ADD_1, ABD_1 и CO_1C_1.

2°) Постройте точку пересечения плоскости DCC_1 и прямой MO_1 и линию пересечения плоскостей MCC_1 и $A_1D_1C_1$.

3) Найдите площадь сечения куба плоскостью, параллельной плоскости AD_1C_1 и проходящей через точку O_1, если ребро куба равно a.

222. В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, P — центры масс граней ABD, BDC, ABC соответственно, а M — середина ребра AD.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей ACD и KLP; MLK и ABC.

2°) Постройте точку пересечения плоскости ABC и прямой ML и линию пересечения плоскостей MKL и ABC.

3) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, L и M параллельно прямой AD, если все ребра тетраэдра равны a.

223. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки L, M и M_1 — середины ребер AB, AD и A_1D_1 соответственно.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей B_1D_1D и LMM_1.

2) Постройте плоскость, проходящую через точку M параллельно плоскости ACC_1.

3) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку M_1 параллельно плоскости CDD_1.

4) Определите взаимное расположение плоскостей MA_1B_1 и CDM_1.

5) Постройте плоскость, проходящую через прямую C_1D_1 параллельно плоскости CDM_1.

6)Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит:

а) через точку M параллельно плоскости DCB_1;

б) через центр грани ADD_1A_1 параллельно плоскости MA_1B_1;

в) через точки M и L параллельно прямой AC_1.

224. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны между собой. Точки L, M и N — середины ребер AS, BS, CS соответственно.

1°) Определите взаимное расположение: прямых LM и BC; прямой LN и плоскости ABD; плоскостей LMN и BDC.

2°) Докажите, что треугольники ABC и LMN подобны.

3) Постройте сечение пирамиды плоскостью AMN; плоскостью LMN; плоскостью LBC.

4*) Какое из сечений пирамиды, проходящих через вершину S, имеет наибольшую площадь?

225. В тетраэдре $SABC$ все грани — правильные треугольники. Точки L, M и N — середины ребер AS, BS, CS соответственно.

1°) Определите взаимное расположение прямых LM и BC.

2°) Определите взаимное расположение прямой LN и плоскости ABC.

3) Докажите, что треугольники LMN и ABC подобны.

4) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, которая проходит:

а) через точку M параллельно плоскости ASC;

б) через точку M параллельно плоскости BLC;

в) через прямую LN параллельно плоскости ABC.

226. Из вершин параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены попарно параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

1°) Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

2°) Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны между собой.

3°) Определите взаимное расположение плоскостей ABB_1 и DD_1C_1.

4) Проведите через середину отрезка AA_1 плоскость так, чтобы она пересекала данные прямые в точках, являющихся вершинами параллелограмма, равного параллелограмму $ABCD$.

227. Даны две параллельных плоскости и точка O, не принадлежащая ни одной из этих плоскостей и не лежащая между ними. Из точки O проведены три луча, пересекающие плоскости соответственно в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 и не лежащие в одной плоскости.

1°) Определите взаимное расположение данных плоскостей и плоскости, проходящей через середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

2) Постройте плоскость, проходящую через точку C параллельно плоскости OAB.

3) Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $OA = m$, $AA_1 = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

228. Треугольник $A_1B_1C_1$ является проекцией треугольника ABC на параллельную ему плоскость α. Точка M — середина стороны BC; M_1 — проекция точки M на плоскость α. Точка N делит сторону AB в отношении 1: 2.

1) Постройте точку пересечения N_1 плоскости M_1MN и прямой A_1B_1.

2) Определите взаимное расположение плоскостей AA_1C и NMN_1

3) Определите форму четырехугольника M_1N_1NM.

229. Точка M лежит вне плоскости трапеции $ABCB$ с основаниями AD и BC. Постройте линию пересечения плоскостей:

1°) ABM и CDM; 2) CBM и ADM.

230. Постройте сечение куба, являющееся:

1°) равносторонним треугольником;

2) равнобокой трапецией;

3) пятиугольником;

4) ромбом, отличным от квадрата.

231. Постройте сечение тетраэдра, являющееся:

1) параллелограммом;
2) равнобедренным треугольником;
3) трапецией.

232°. Докажите, что противоположные грани параллелепипеда параллельны.

233. Докажите, что множество всех прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости, образует плоскость, параллельную данной.

234. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что каждая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD, BC в вершинах параллелограмма.

235. Докажите, что плоскость и прямая, не принадлежащая этой плоскости, параллельны между собой, если обе они параллельны одной и той же плоскости.

236. Через точку O пересечения диагоналей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость параллельно грани $ABCD$. Эта плоскость пересекает ребра BB_1 и CC_1 в точках M и N соответственно. Докажите, что угол MON — прямой.

237. Докажите, что две плоскости параллельны между собой тогда и только тогда, когда каждая прямая, пересекающая одну из плоскостей, пересекает и вторую.

238*. В треугольной пирамиде $SABC$ через отрезки AD и CE, где D — середина SB, а E — середина SA, проведите сечения пирамиды, параллельные между собой.

239. Найдите геометрические места:

1) середин всех отрезков с концами на двух данных параллельных плоскостях;

2*) середин всех отрезков с концами на двух данных скрещивающихся прямых.

240*. Сторона AB треугольника ABC, лежащего в плоскости α, параллельна плоскости β. Равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость β; $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 9$.

1) Установите взаимное расположение прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, A_1C_1 и AC.

2) Установите взаимное расположение плоскостей α и β.

3) Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

241*. Даны две скрещивающиеся прямые. Укажите множество всех точек пространства, через которые можно провести прямую, пересекающую каждую из двух данных прямых.

Упражнения для повторения

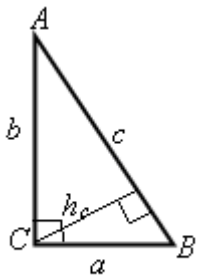


Рис. 259

242. Решите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) по следующим данным (рис. 259):

1) c, h_c; 2) c, r; 3) r, A;

2) 4) $a - b$, A; 5) R, $\frac{b}{c}$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

243. Решите треугольник ABC, не используя таблицы или калькуляторы, по следующим данным:

1) $a = 100$, $A = 45°$, $B = 30°$; 2) $a = 8$, $c = 16$, $B = 60°$;

3) $c = 3$, $b = 3\sqrt{2}$, $A = 45°$; 4) $c = 10$, $A = 30°$, $B = 105°$.

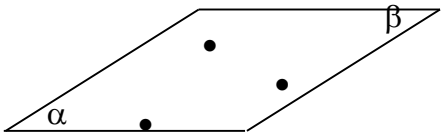
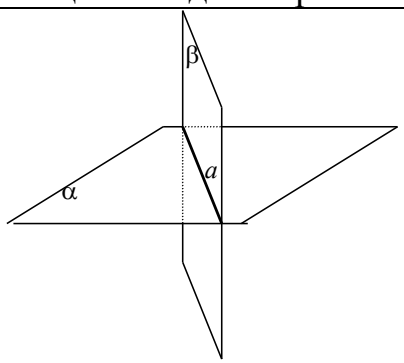
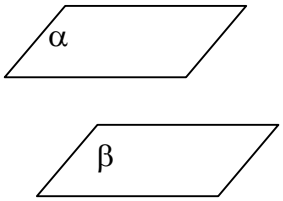
244. Стороны параллелограмма равняются 2 м и 16 дм; расстояние между большими сторонами — 8 дм. Определите расстояние между меньшими сторонами.

245. На сторонах угла от вершины A отложены равные отрезки AB и AC, и через точки B и C проведены перпендикуляры к сторонам угла. Докажите, что точка пересечения этих перпендикуляров лежит на биссектрисе угла.

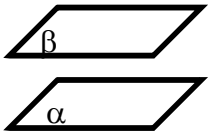
246. Докажите, что две прямые, перпендикулярные сторонам угла, меньшего развернутого, пересекаются.

Итог

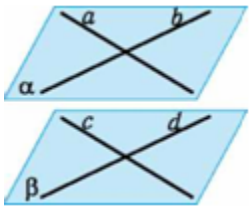
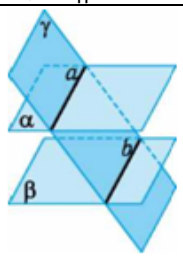
Классификация взаимного размещения плоскостей

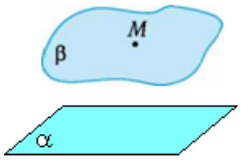
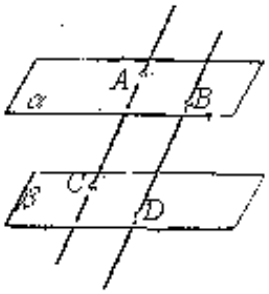
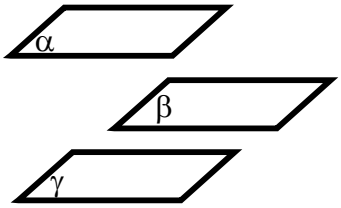
Количество общих точек	Не менее трех, не лежащих на одной прямой	Не меньше одной, но нет общих точек, не лежащих на одной прямой	Ни одной
Изображение			
Терминология, обозначение	α и β совпадают α = β	α и β пересекаются α × β	α и β параллельны α | | β

Основное определение

Две плоскости называются ***параллельными,*** если они не имеют общих точек.		α ∥ β. 

Основные утверждения

Признак параллельности двух плоскостей	Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.	 $a \parallel c,\ b \parallel d \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
Теорема о пересечении двух параллельних плоскостей третьей	Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны.	

		$\alpha \parallel \beta, a = \gamma \cap \alpha,$ $b = \gamma \cap \beta \Rightarrow a \parallel b$
Теорема о существовании плоскости, параллельной данной	Через точку, расположенную вне данной плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной.	 $M \in \alpha \Rightarrow \exists! \beta : \alpha \parallel \beta,$ $M \in \beta$
Теорема об отрезках параллельных прямых между параллельными плоскостями	Отрезки параллельных прямых, которые содержатся между параллельными плоскостями, равны между собой.	 $\alpha \parallel \beta, AB \parallel CD$ ($AB = CD$
Теорема о транзитивности отношения параллельности плоскостей	Если каждая из двух плоскостей параллельна третьей, то данные две плоскости параллельные между собой.	 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$

Готовимся к тематическому оцениванию по теме «Параллельность прямых и плоскостей»

Задания для самоконтроля

1. Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Могут ли некоторые три из них лежать на одной прямой?

2. Содержатся ли четыре точки в одной плоскости, если через некоторые три из них нельзя провести окружность?

3. Могут ли три различные плоскости иметь ровно две общие точки?

4. Верно ли, что через любые три точки можно провести лишь одну плоскость?

5. Могут ли прямые AB и CD пересекаться, если прямые AD и BC скпещиваются?

6. Могут ли две скрещивающиеся прямые быть одновременно параллельными третьей прямой?

7. Верно ли, что прямые a и b не параллельны, если не существует прямой c, параллельной a и b?

8. Всегда ли параллельной проекцией прямой является прямая?

9. Могут ли равные отрезки иметь неравные проекции?

10. Верно ли, что прямые параллельны, если параллельны их проекции?

11. Можно ли произвольный треугольник считать изображением равнобедренного треугольника?

12. Всегда ли изображение биссектрисы треугольника является биссектрисой изображения треугольника?

13. Может ли квадрат быть изображением куба?

14. Верно ли, что через данную точку пространства можно провести только одну плоскость, параллельную данной прямой?

15. Верно ли, что средняя линия треугольника параллельна произвольной плоскости, которая проходит через сторону треугольника, не имеющую общих точек с этой средней линией?

16. Всегда ли через данную точку можно провести прямую, параллельную двум данным плоскостям, не содержащим эту точку?

17. Две стороны параллелограмма параллельны плоскости α. Обязательно ли параллельны плоскость α и плоскость параллелограмма?

18. Всегда ли параллельны между собой две плоскости, одна из которых содержит две прямые, параллельные второй плоскости?

19. Линии пересечения плоскостей α и β плоскостью γ параллельны между собой. Параллельны ли плоскости α и β?

20. Можно ли через две скрещивающиеся прямые провести параллельные плоскости?

Задачи для повторения

247.° Две вершины и точка пересечения медиан треугольника лежат в плоскости α. Докажите, что и третья вершина треугольника лежит в плоскости α.

248. Плоскости MAB и NAB не совпадают. Докажите, что прямые MN и AB не пересекаются.

249*. Каждые две из трех плоскостей пересекаются по разным прямым, две из которых пересекаются. Докажите, что пересекаются все три прямые.

250*. Некоторая фигура в пространстве обладает тем свойством, что любые ее четыре точки лежат в одной плоскости. Докажите, что вся фигура лежит в некоторой плоскости.

251.° Трапеция $ABCD$ с основанием AB и параллелограмм $ABEF$ лежат в разных плоскостях. Определите взаимное расположение прямых:

1) EF и CD; 2) DE и FC; 3) AF и CB.

252. Плоскость α не совпадает с плоскостью прямоугольника $ABCD$ и проходит через его сторону AB. Точка E делит сторону DC в отношении 3: 2, если считать от D.

1 °) Постройте точку F пересечения плоскости α с прямой, проходящей через точку E параллельно прямой AD.

2) Найдите длину отрезка AF, если $AB = 10$ см.

253. Пусть две плоскости пересекаются, A — точка в одной из них. Проведите через точку A прямую, не пересекающую ни одной из плоскостей.

254. Только одна вершина C квадрата $ABCD$ лежит в плоскости α. Прямая AB пересекает плоскость α в точке M. Постройте точку пересечения прямой AD с плоскостью α.

255. Докажите, что две прямые параллельны тогда и только тогда, когда произвольная плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую.

256*. На одной из двух скрещивающихся прямых взяли две различные точки A и A_1, а на другой — B и B_1. Докажите, что прямые AB и A_1B_1 скрещивающиеся.

257. Дана параллельная проекция параллелограмма $ABCD$. Постройте:

1°) проекцию высоты DE, делящую сторону AB в отношении 1, : 3, если считать от A;

2°) проекцию высоты, проведенной из точки C к стороне AB.

258. Точки A и B находятся по разные стороны от плоскости β; A_1, B_1, соответственно, их параллельные проекции на β, а M — середина отрезка BB_1.

1°) Постройте точку пересечения K прямой AM с плоскостью β.

2) Найдите расстояние между точкой K и точкой B_1, если $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 = 4$ см.

259. Постройте параллельную проекцию параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если даны параллельные проекции точек :

1) A, B, D, A_1;2) A, B, C, D_1; 3*) A, C и середин BB_1 и A_1D_1.

260. На произвольном изображении равнобокой трапеции, боковая сторона которой равня меньшему основанию, постройте изображение:
а °) оси симметрии трапеции;
б °) центра окружности, касающейся боковых сторон и меньшего основания трапеции;
в) вписанного прямоугольника, две вершины которого лежат на большем основании и одна из сторон совпадает с меньшим основанием.
261. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте изображение:
1 °) биссектрисиы угла AA_1D_1;
2) линии пересечения плоскости ABC_1 с плоскостью A_1B_1C;
3) сечения куба плоскостью, проходящей через ребро DC и центр грані $A_1B_1C_1D_1$.
262. Дано изображение пирамиды $ABCD$. На ребрах AB, CB и DB отмечены точки K, L и M соответственно. Постройте:
1) линию пересечения плоскостей CDK и MLA;
2) точку пересечения плоскостей ACM, CDK и ADL;
3) точку пересечения плоскостей AML, CKM и DKL.
263*. Дано произвольное изображение квадрата $ABCD$ и точки K на стороне AB. Постройте изображение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой KD.
264*. На ребрах AD и BP пирамиды $ABCD$ выбраны точки K и M соответственно. Постройте точку пересечения прямой KM с плоскостью, проходящей через точки A, B и середину ребра CD.
265*. Дано произвольное изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$ и точки S, находящейся вне его плоскости. Постройте:
1) изображение биссектрис углов: а) ACB; б) ADB;
2) линию пересечения плоскостей: а) SAB и SCD; б) SAB и SDE.
266. Квадрат $ABCD$ и трапеция $DCFE$ лежат в разных плоскостях; M, N, K — середины сторон DE, CF, AD соответственно, DC — большее основание трапеции $DCFE$.
1°) Определите взаимное расположение прямых и плоскостей:
а) AB и DFE; б) FM и ABC; в) EF и ABN; г) BF и ADE.
2°) Постройте точку пересечения прямой EN с плоскостью ABD.
3) Вычислите длину отрезка EF, если $AB = 4$ см, $MN = 3$ см.
4) Постройте прямую, параллельную плоскостям трапеции и квадрата.
267. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N — середины ребер AA_1, BB_1, а O — центр грани DCC_1D_1.
1°) Определите взаимное расположение плоскостей: а) MDB и CB_1D_1; б) MNO и ABC.
2°) Постройте: а) точку пересечения плоскости BCD и прямой MD_1; б) линию пересечения плоскостей BB_1O и ADD_1.
3) Найдите площадь сечения куба плоскостью, параллельной прямой AD_1 и проходящей через точки B и D, если ребро куба равно a.

268. Докажите, что плоскость, проходящая через середины двух медиан треугольника и пересекающая его плоскость, параллельна одной из его сторон.

269*. В треугольной пирамиде $ABCD$ в гранях ABD и DBC проведены медианы из вершин D и B соответственно. На них взяты точки E и F так, что отрезок EF параллелен AC. Найдите отношение $EF : AC$.

270. В тетраэдре $ABCS$ все грани являются правильными треугольниками, а точки L, M, N — серединами ребер BC, BS, BA соответственно.

1) Установите взаимное расположение прямых, содержащих биссектрисы треугольников ACS и LMN, проведенных из вершин S и M.

2) Установите взаимное расположение высоты треугольника ACS, проведенной из вершины S, и плоскости LMN.

3) Проведите через центр треугольника ABC плоскость, параллельную плоскости LMN.

4) Постройте точку пересечения плоскости LMN с отрезком, соединяющим точку B и центр треугольника ACS. В каком отношении эта точка делит упомянутый отрезок?

5) Постройте сечение тетраэдра, являющееся параллелограммом.

6) В каких из выше приведенных заданий существенной является правильность граней?

271. Сторона AB треугольника ABC, лежащего в плоскости α, параллельна плоскости β. Равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость β (A_1 — проекция A, B_1 — проекция B, C_1 — проекция C). Стороны треугольника ABC равняются: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см.

1) Установите взаимное расположение прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1.

2) Как расположена прямая, соединяющая центры тяжести этих треугольников, относительно плоскости ABB_1A_1?

3) Как расположены плоскости α и β?

4) Найдите площадь треугольника ABC и его проекции.

272. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, точка M — середина AA_1, точка N делит ребро D_1D в отношении 3:1 (считая от точки D_1).

1) Постройте точки пересечения X_1 и X_2 прямой MN с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, соответственно, и найдите длину отрезка X_1X_2.

2) Постройте точку пересечения X_3 прямой BX_1 с плоскостью DD_1C и найдите отношение, в котором эта точка делит отрезок CD.

3) Постройте линию пересечения плоскостей $X_1X_2X_3$ и AA_1B.

273. Трапеции $ABCD$ и $MBCP$ имеют общее основание BC, а их высоты равняются, соответственно, 2 и 1.

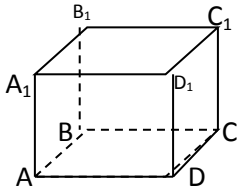
1) Как может изменяться расстояние r между прямыми MP и AD?

2) Для каких целых значений r прямые AC и BP скрещиваются

3) Найдите отношение площадей трапеций, если прямая MA параллельна прямой PD.

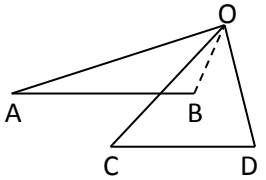
Тест для диагностики усвоения темы "Параллельность прямых и плоскостей"

1. Сколько плоскостей можно провести через вершины A, D_1, C куба, изображенного на рисунке?



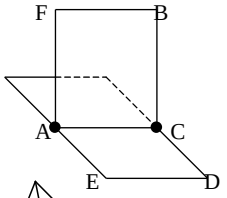
А. Ни одной. **Б.** Одну.
В. Три. **Г.** Бесконечное множество.

2. Прямая AB не принадлежит плоскости COD. Сколько общих точек имеют плоскости AOB и COD, изображенные на рисунке?



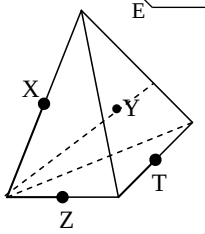
А. Одну. **Б.** Две. **В.** Бесконечное множество.
Г. Ответ отличен от приведенных.

3. Пересечением плоскостей AED и AFB, изображенных на рисунке, является …



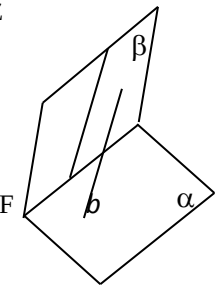
А. точка A. **Б.** отрезок AC.
В. совокупность двух точек $\{A; C\}$.
Г. прямая AC.

4. На изображении тетраэдра в одной грани не лежат точки …



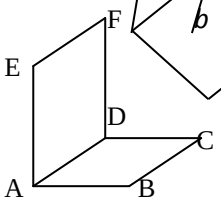
А. X и Y. **Б.** X и Z.
В. Y и T. **Г.** Z и T.

5. Плоскости α и β пересекаются. Прямые a и b, изображенные на рисунке …



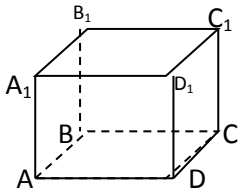
А. скрещивающиеся. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.
Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от расположения плоскостей.

6. Два прямоугольника $ABCD$ и $AEFD$ лежат в разных плоскостях. Прямые BC и EF ...



А. пересекаются. **Б.** параллельны. **В.** скрещиваются.
Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от расположения плоскостей.

7. Диагонали противоположных граней AA_1B_1B и DD_1C_1C куба …

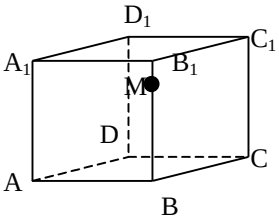


А. параллельны. **Б.** скрещиваются.
В. параллельны или скрещиваются. **Г.** пересекаются.

8. Проекцией двух параллельных прямых не может быть ...
А. одна прямая. **Б.** одна точка. **В.** две прямые. **Г.** две точки.

9. Проекцией квадрата не может быть ...
А. отрезок. **Б.** ромб. **В.** прямоугольник. **Г.** трапеция.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка $M \neq B$ на ребре BB_1. Прямая MC пересекает плоскость $A_1B_1D_1$ в точке, лежащей на прямой …



А. A_1B_1. **Б.** A_1D_1. **В.** B_1C_1. **Г.** A_1C_1.

11. Если d — длина отрезка, d_1 — длина его параллельной проекции на плоскость, то ...

А. $d > d_1$. **Б.** $d < d_1$. **В.** $d = d_1$.

Г. ни одно из приведенных соотношений не является правильным.

12. Если прямая параллельна плоскости, то ...

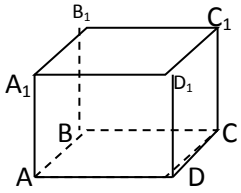
А. все прямые плоскости ей параллельны.

Б. существуют в плоскости прямые, ей не параллельные.

В. каждая прямая плоскости с ней скрещивается.

Г. существуют в плоскости прямые, пересекающие данную прямую.

13. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину D?



А. Ни одной. **Б.** Одна.

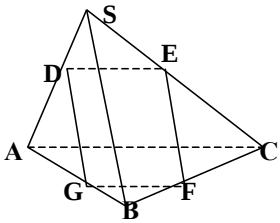
В. Две. **Г.** Бесконечное множество.

14. Сколько плоскостей можно провести через вершину треугольника, параллельных его стороне, не содержащей эту вершину?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Бесконечное множество.

Г. Не более одной

15. На рисунке точки D, E, F, G — середины ребер AS, SC, BC, AB. Найдите периметр четырехугольника $DEFG$, если DG = 4 см, AC = 16 см.



А. 24 см. **Б.** 16 см. **В.** 32 см. **Г.** 40 см.

16. Известно, что прямые a и b параллельны плоскости α. Как расположены прямые a и b?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются. **В.** Совпадают.

Г. Могут быть расположены по-разному.

17. Если две смежные стороны параллелограмма параллельны плоскости α, то плоскость параллелограмма и плоскость α ...

А. параллельны. **Б.** пересекаются.

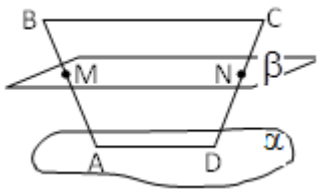
В. совпадают или параллельны. **Г.** параллельны или пересекаются.

18. Если диагонали трапеции параллельны плоскости α, то основания трапеции.

А. лежат в плоскости α. **Б.** параллельны α. **В.** пересекают α.

Г. могут пересекать α, а могут и быть ей параллельны.

19. Одно основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Через середину AB — точку M — проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая CD в точке N. Прямые MN и BC ...



А. параллельны. **Б.** скрещиваются.

В. пересекаются. **Г.** совпадают.

20. Сколько плоскостей, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку пространства?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Бесконечное множество.

Г. Ответ зависит от расположения данной точки относительно данной плоскости.

21. Если линии пересечения плоскостей α и β плоскостью γ параллельны, то плоскости α и β ...

А. параллельны. **Б.** пересекаются.

В. могут быть параллельны, или пересекаться.

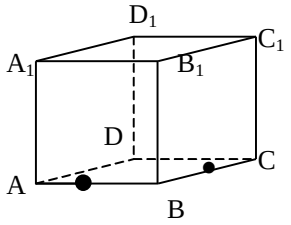
Г. параллельны или совпадают.

22. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено два сечения: через точки A, B_1, C и через точки A, D, C_1. Плоскости этих сечений ...

А. совпадают. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

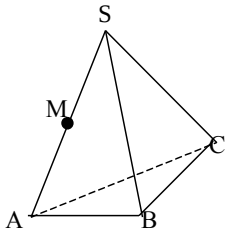
Г. могут быть расположены по-разному в зависимости от размеров куба.

23. Периметр многоугольника, полученного в сечении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a плоскостью, проходящей через середины ребер AB и BC параллельно ребру DD_1, равняется ...



А. $2a$. **Б.** $2\sqrt{2}a$. **В.** $2(a+\sqrt{2}a)$. **Г.** $2a+\sqrt{2}a$.

24. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой CB. Сечением тетраэдра плоскостью α является …



А. правильный треугольник. **Б.** квадрат.

В. равнобедренный треугольник. **Г.** трапеция.

25. Сечением правильного тетраэдра плоскостью не может быть ...

А. трапеция. **Б.** равносторонний треугольник. **В.** ромб.

Г. правильный шестиугольник.

Образец контрольной работы

1. Два параллелограмма $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в различных плоскостях.

1°) Определите взаимное расположение прямых CD и C_1D_1.

2°) Определите взаимное расположение прямой C_1D_1 и плоскости ABC.

3°) Постройте линию пересечения плоскостей DD_1C_1 и BCC_1.

4°) Определите взаимное расположение плоскостей ADD_1 и BCC_1.

5) Через точку M, делящую отрезок AB в отношении 2:1, проведите плоскость α, параллельную плоскости C_1BC.

6) Постройте точку пересечения прямой AC с плоскостью α и найдите отношение, в котором эта точка делит отрезок AC.

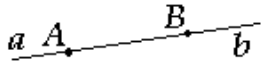
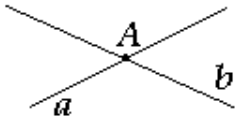
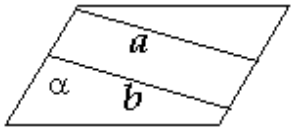
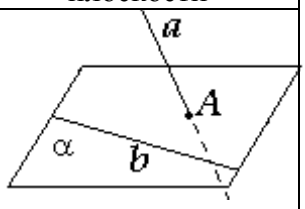
2*. В двух данных плоскостях через две точки, лежащие в этих плоскостях, провендите параллельные между собой прямые.

Ответы к заданиям для самоконтроля

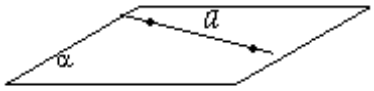
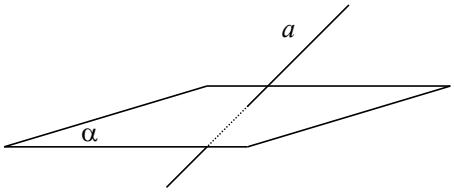
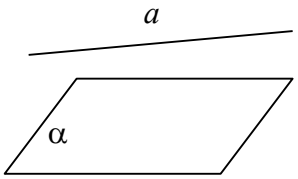
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Нет	Да	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Нет	Нет	Так	Нет	Нет	Да
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Нет	Так	Нет	Нет	Да	Да	Нет	Да	Нет	Нет	Да	Да	

Таблицы для повторения и систематизации учебного материала

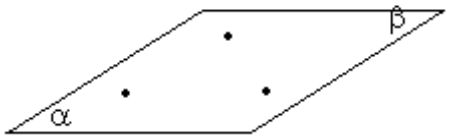
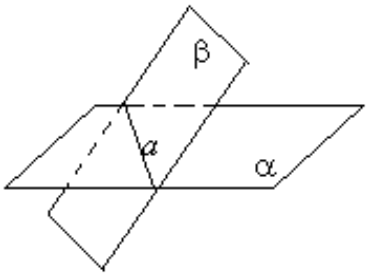
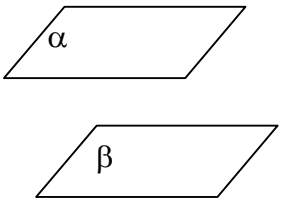
Взаимное расположение прямых в пространстве

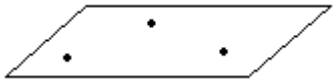
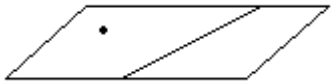
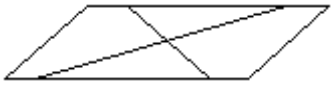
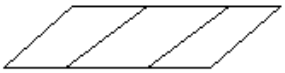
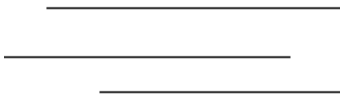
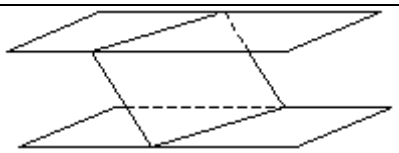
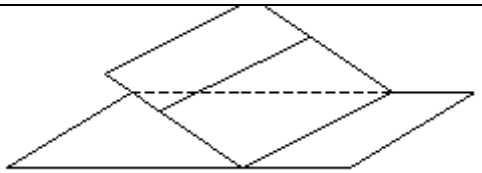
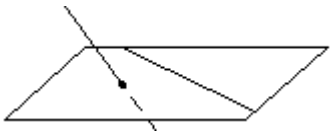
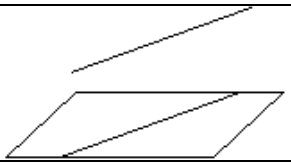
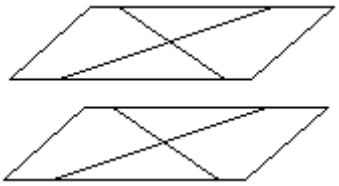
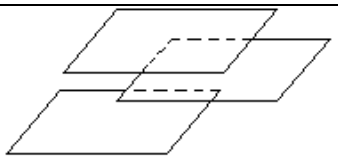
Число общих точек			
Не менее двух	Одна	Нет	
		лежат в одной плоскости	не лежат в одной плоскости
			
a и b совпадают $a = b$	a и b пересекаются $a \times b$	a и b параллельны $a \mid\mid b$	a и b скрещивающиеся $a \bullet b$

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Число общих точек		
Не менее двух	Одна	Отсутствуют
		
$a \subset \alpha$ a лежит в α	$a \times \alpha$ a пересекает α	$a \mid\mid \alpha$ a и α параллельны

Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Число общих точек		
Не менее трех, не лежащих на одной прямой	Не меньше одной, но нет общих точек, не лежащих на одной прямой	Отсутствуют
		
α и β совпадают $\alpha = \beta$	α и β пересекаются $\alpha \times \beta$	α и β параллельны $\alpha \mid\mid \beta$

Для того, чтобы зафиксировать плоскость в пространстве достаточно задать:	
➢ три точки, не лежащие на одной прямой	
➢ прямую и точку, не лежащую на этой прямой	
➢ две различные пересекающиеся прямые	
➢ две параллельные прямые	
Для установления параллельности двух прямых в пространстве достаточно проверить:	
➢ найдется ли прямая, параллельная каждой из данных прямых	
➢ будут ли даны прямые линиями пересечения двух параллельных плоскостей третьей.	
➢ будет ли одна из данных прямых линией пересечения двух плоскостей, одна из которых параллельна данной прямой, а другая проходит через эту прямую.	
Для установления скрещиваемости двух прямых в пространстве достаточно проверить:	
➢ Найдется ли плоскость, в которой лежит одна из данных прямых и которую пересекает вторая прямая в точке, не принадлежащей первой прямой.	
Для установления параллельности прямой и плоскости достаточно проверить:	
➢ найдется ли в плоскости прямая, параллельная данной прямой	
Для установления параллельности двух плоскостей достаточно проверить:	
➢ найдутся ли в одной из плоскостей две пересекающиеся прямые, соответственно параллельные двум прямым второй плоскости	
➢ найдется ли плоскость, параллельная каждой из данных плоскостей	

Раздел 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

В разделе «Параллельность ***прямых*** *и плоскостей» рассмотрены различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. В частности, обстоятельно изучалось отношение параллельности. Однако многочисленные применения геометрии связаны, в первую очередь, с измерением геометрических величин (расстояний, углов и т. п.). Предметом многих измерений являются пересекающиеся прямые и плоскости. Поэтому необходимо более детально исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей, ввести величины, характеризующие это расположение.*

Частным случаем расположения прямой и плоскости, имеющих одну общую точку, является перпендикулярность, моделирующая отношение вертикальности между физическими телами и другие подобные отношения (например, гвоздь, забитый в стену). Воспользовавшись понятиям перпендикулярности, мы сможем измерять расстояние от точки до плоскости, от прямой до параллельной ей плоскости, расстояние между параллельными плоскостями. На этих измерениях основано измерение расстояния между произвольными реальными объектами.

Не менее важным является введение количественных характеристик взаимного расположения пересекающихся прямых и плоскостей — угла между прямой и плоскостью, угла между плоскостями. Эти понятия родственны планиметрическому понятию угла между прямыми (да и определяются с его помощью).

§14. Перпендикулярность прямой и плоскости

Рассматривается взаимное расположение прямой и плоскости, моделирующее, в частности, отношение вертикальности.

Можно привести много примеров взаимного расположения физических объектов, характеризующихся математическим понятием перпендикулярности прямой и плоскости: вертикальная колонна перпендикулярна поверхности земли (рис. 260), ножки стола перпендикулярны полу (рис. 261), шнур, на котором висит лампа, — потолку (рис. 262), траектория свободно падающего тела — поверхности Земли и т. п.

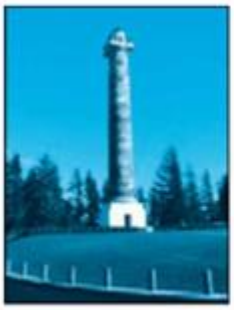


Рис.260

Рис. 261

Рис. 262

В приведенных примерах расположение тел моделируется таким взаимным расположением прямой и плоскости, при котором прямая, пересекающая плоскость, не имеет наклона ни в одном направлении на плоскости. В связи с этим необходимо обобщить понятие перпендикулярности прямых на случай пространства, поскольку перпендикулярность прямых как раз и характеризует отсутствие наклона.

Две прямые пространства называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Как и в планиметрии, перпендикулярность прямых обозначается знаком $\perp$ (например, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$).

Перпендикулярность отрезков означает перпендикулярность прямых, их содержащих.

Понятие перпендикулярности прямых в пространстве в конечном итоге сводится к перпендикулярности прямых на плоскости. Две пересекающиеся прямые определяют плоскость, и понятие угла между такими прямыми берется из планиметрии. Поэтому, конечно, в поисках примеров перпендикулярности прямых, обращаются к определенным плоскостям. Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 263) каждая грань — квадрат — определяет плоскость и в ней перпендикулярными являются прямые, проходящие через смежные ребра (AA_1 и AB, CC_1 и C_1D_1 и т. п.), диагонали (BC_1 и CB_1 и др.). Представляет интерес, что $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$, то есть в пространстве через точку A прямой AA_1 проходит не одна прямая, перпендикулярная прямой AA_1. Такого на плоскости не бывает. Более того, есть уверенность, что прямая AA_1 перпендикулярна прямой AC, и, вообще, произвольной прямой грани $ABCD$, проходящей через точку A, ведь она одинаково наклонена ко всем этим прямым. Если иметь в виду, что плоскость $ABCD$ состоит из всех прямых плоскости, проходящих через точку A, то отсутствие наклона прямой ни к одному направлению на плоскости (рис. 264) можно сформулировать в виде следующего определения.

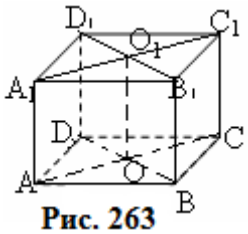


Рис. 263

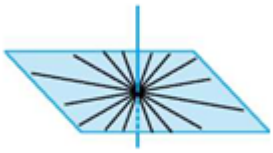


Рис. 264

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна каждой прямой плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Для обозначения перпендикулярности прямой l и плоскости α также используют знак $\perp$: $l \perp \alpha$.

Конечно, пользуясь только определением, установить перпендикулярность прямой плоскости невозможно, ведь это сводилось бы к проведению бесконечного множества проверок. Но пример с кубом показывает, что перпендикулярность ребра AA_1 грани $ABCD$ является следствием перпендикулярности его двум смежным ребрам этой грани.

В практической деятельности вертикальность башен, опор, столбов и других конструкций тоже проверяют по вертикальности их двум направлениям.

Вертикальность корешка полураскрытой книги, стоящей на столе, обеспечивает его перпендикулярность двум краям обложки, на которые опирается книга и которые лежат в плоскости стола. Другими словами, для установления перпендикулярности прямой a плоскости α достаточно проверить перпендикулярность этой прямой двум пересекающимся прямым b и c плоскости α (рис. 265). Имеем простой и удобный признак перпендикулярности прямой и плоскости.

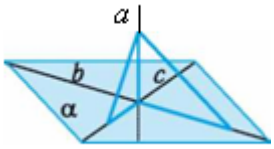


Рис. 265

Теорема 1 *(признак перпендикулярности прямой и плоскости).* **Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.**

В том, что перпендикулярности данной прямой одной прямой плоскости не хватает для ее перпендикулярности плоскости, можно убедиться с помощью следующего примера. Ручка швабры перпендикулярна перекладине, лежащей на полу (рис. 266, а), но этого недостаточно, чтобы ручка была расположена вертикально. Но, если ручку вращать вокруг перекладины (рис. 266, б, 266, в), то можно найти положение, когда она будет вертикальной. Это как раз будет тогда, когда она будет перпендикулярной еще одному направлению на полу.

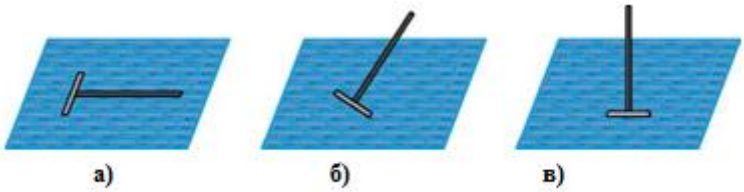


Рис. 266

Теорему 1 можно использовать для установки вертикальных конструкций.

Задача 1. Установить мачту вертикально с помощью растяжек, закрепленных на мачте на определенном уровне.

 Обычно для установки мачты достаточно иметь четыре растяжки одинаковой длины. Понятно, что длина растяжек должна быть больше, чем расстояние от земли до места их закрепления на мачте.

Расположим основание мачты в данной точке O на поверхности земли, закрепим свободные концы двух растяжек в точках B и B_1, расположенные на одинаковом расстоянии от точки O и лежащие на прямой, проходящей через точку O (рис. 267, а). Это обеспечивает перпендикулярность мачты прямой BB_1. С помощью двух других растяжек мачту поднимают, вращая ее вокруг оси BB_1. Потом фиксируют то положение мачты, в котором свободные концы растяжек закрепляются в точках C и C_1, центрально симметричных относительно точки O (рис. 267, б). Мачта стоит вертикально, так как,

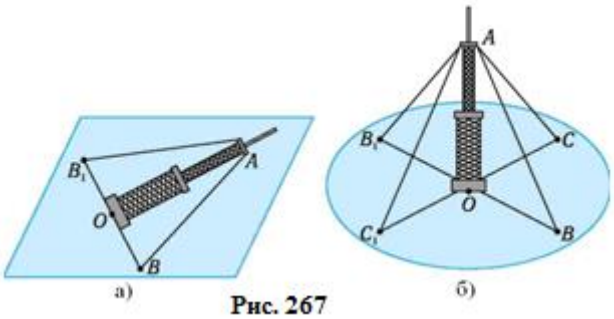


Рис. 267

по построению, $AO \perp BB_1$ и $AO \perp CC_1$. ■

Существуют и другие способы установления мачты. Например, можно уменьшить количество растяжек, брать растяжки различной длины, закреплять их на разных уровнях мачты. Но все эти случаи требуют обеспечения устойчивой вертикальности мачты в двух направлениях.

Решение задания, сформулированного в задаче 1, свелось с позиций геометрии к построению прямой, проходящей через точку плоскости перпендикулярно этой плоскости. Именно в этом заключается следующая задача.

Задача 2. Через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.

 Возможность построения такой прямой фактически обосновано в задаче 1. Осталось лишь перевести это обоснование на математический язык.

Пусть даны плоскость α и точка O на ней. Проведем в плоскости α через точку O прямую l (рис. 268, а) и возьмем некоторую плоскость β, пересекающую плоскость α по прямой l (как выбрать такую плоскость?). В этой плоскости построим прямую AO, перпендикулярную прямой l (рис. 268, б). В плоскости это всегда можно сделать однозначно.

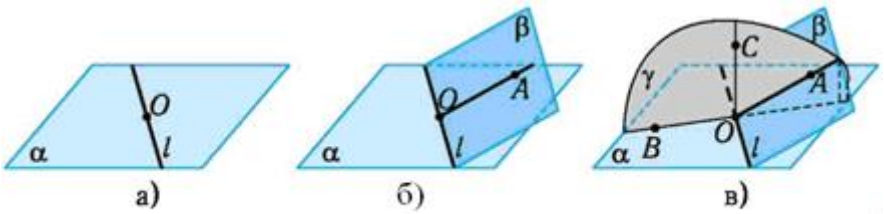


Рис. 268

Осталось только повернуть прямую OA вокруг прямой l так, чтобы она стала перпендикулярной плоскости α. Для этого в плоскости α через точку O проведем прямую OB, перпендикулярную прямой l. А затем через прямые OA и OB проведем плоскость γ (рис. 268, в). Наконец, проведем в плоскости γ прямую OC перпендикулярно прямой OB. Она и является искомой. Действительно, она перпендикулярна двум прямым плоскости — прямой OB, по построению, и прямой l, по определению перпендикулярности прямой и плоскости. Дело в том, что $l \perp \gamma$, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости ($l \perp OA$, $l \perp OB$, $OA \cap OB = \{O\}$). Таким образом, дважды примененный признак завершает доказательство возможности проведения прямой, проходящей через данную точку плоскости перпендикулярно этой плоскости. ■

Построение прямой, перпендикулярной данной плоскости, проходящей через данную точку, относится к основным построениям. В последующем будем вместо описания построения писать: «Проведем прямую, перпендикулярную плоскости».

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a; O — точка пересечения диагоналей грани $ABCD$.

1) Каким ребрам куба перпендикулярна прямая AC?
2) Установить взаимное расположение прямых D_1O и AC.
3) Доказать, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1D_1.

4) Через точку M на ребре AB провести прямую, перпендикулярную диагонали AC.

5) Построить сечение куба плоскостью, проходящей через середину ребра AB перпендикулярно прямой AC.

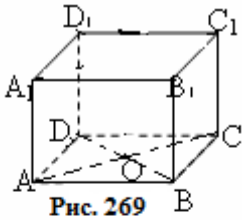


Рис. 269

□ Изобразим условие примера на рис. 269.

1) Прямая AC перпендикулярна ребрам AA_1 и CC_1. Это вытекает из того, что указанные ребра перпендикулярны плоскости грани, в которой лежит прямая AC, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1): $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$; $CC_1 \perp CB$, $CC_1 \perp CD$.

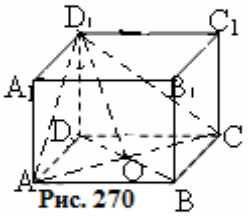


Рис. 270

2) Прямые D_1O и AC — перпендикулярны. Действительно, рассмотрим треугольник AD_1C (рис. 270). Он равнобедренный: $AD_1 = D_1C$, как диагонали равных квадратов. Отрезок D_1O является медианой этого треугольника, проведенной к основанию. А потому он является и высотой. Таким образом, прямые D_1O и AC пересекаются под прямым углом.

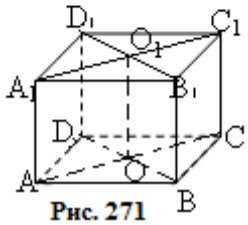


Рис. 271

3) Прямая A_1C_1 пересекается с прямой B_1D_1 под прямым углом в центре O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 271). Осталось доказать, что прямая A_1C_1 перпендикулярна прямой O_1O, лежащей в плоскости BB_1D_1. Но это вытекает из того, что четырехугольник ACC_1A_1 является прямоугольником: $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = CC_1$, по свойству транзитивности отношений параллельности и равенства, $AA_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AC$ (см. решение задания 1). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1D_1, так как она перпендикулярна прямым B_1D_1 и O_1O этой плоскости.

4) Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно диагонали AC, параллельна прямой BD, поскольку BD также перпендикулярна AC, и все эти прямые лежат в одной плоскости (рис. 272). Построение заключается в проведении через точку M прямой MN, параллельной прямой BD.

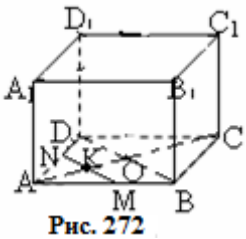


Рис. 272

5) Анализируя предыдущее построение, можно прийти к заключению, что секущая плоскость проходит через прямую MN (рис. 272). Осталось провести через точку K пересечения отрезков MN и AC еще одну прямую, перпендикулярную прямой AC. Таким свойством обладает прямая KK_1, где K_1 — точка пересечения M_1N_1 и A_1C_1, а M_1, N_1 — середины ребер A_1B_1, A_1D_1 (рис. 273). Действительно, точки K, K_1 — точки пересечения средних линий с медианами в равных треугольниках ABD и $A_1B_1D_1$. Поэтому $AK = A_1K_1$ и $KK_1 \parallel AA_1$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1.1) прямая AC перпендикулярна плоскости MNN_1M_1. Четырехугольник MNN_1M_1 — искомое сечение (рис. 273). Нетрудно доказать, что он является параллелограммом: $MN = M_1N_1$, как средние линии в равных треугольниках, $MN \parallel M_1N_1$,

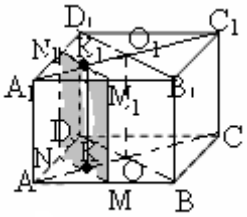


Рис. 273

как линии пересечения параллельных граней плоскостью. Попробуйте доказать, что он является прямоугольником ■.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что через точку на прямой в пространстве можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной прямой?

2. Могут ли быть скрещивающимися две прямые в пространстве, перпендикулярные одной и той же прямой?

3. Прямая проходит через вершину квадрата перпендикулярно его плоскости. Перпендикулярна ли она одной из диагоналей квадрата?

4. Сторона правильного треугольника лежит в плоскости α. Может ли одна из его сторон быть перпендикулярной плоскости α?

5. Сторона квадрата лежит в плоскости α. Перпендикулярная ли плоскости α смежная с ней сторона?

6. Перпендикулярны ли две пересекающиеся прямые, если через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой?

7. Верно ли, что прямая, перпендикулярная двум сторонам треугольника, перпендикулярна его плоскости?

8. Можно ли с помощью двух угольников определить направление, перпендикулярное плоскости стола?

9. Достаточно ли одной пары растяжек для обеспечения вертикальности мачты?

10. Обязательным ли является требование, чтобы все растяжки, которые обеспечивают вертикальность мачты, имели одинаковую длину?

11. Можно ли обеспечить вертикальность мачты с помощью трех растяжек одинаковой длины?

12. Будет ли обеспечена вертикальность мачты с помощью провисающих растяжек?

Упражнения на рисунках

1. На рис. 274 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Какие из прямых CD, C_1D, D_1D, B_1B, C_1B, A_1B перпендикулярны прямой BD?

2) Какие из прямых CD, AB, A_1C, D_1C_1, AC_1, C_1D не перпендикулярны плоскости грани ADD_1A_1?

3) Какие из прямых A_1C, A_1B, A_1C_1, A_1A не перпендикулярны плоскости B_1C_1D?

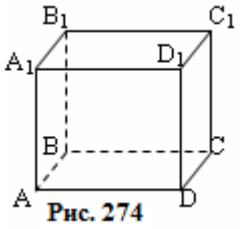


Рис. 274

2. На рис. 275 изображен квадрат *ABCD*, *O* — его центр, *M* — середина стороны *BC*, отрезок *OS* перпендикулярен плоскости квадрата.

1) Как расположены прямая *BD* и плоскость *ACS*?
2) Какая плоскость перпендикулярна прямой *AC*?
3) Как расположены прямая *BC* и плоскость *MOS*?

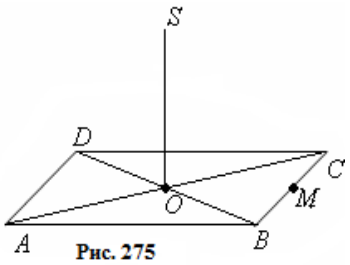


Рис. 275

3. На рис. 276 изображен прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *A*, отрезок *AP* перпендикулярен плоскости треугольника.

1) Как расположены плоскость *PAB* и прямая *AC*?
2) Какая прямая перпендикулярна плоскости *PAC*?

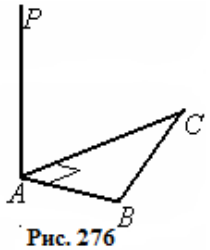


Рис. 276

4. На рис. 277 изображен прямоугольник *ABCD*, отрезок *DM* перпендикулярен плоскости прямоугольника.

1) Как расположены плоскость *MDA* и прямая *CD*?
2) Какая прямая перпендикулярна плоскости *MDC*?

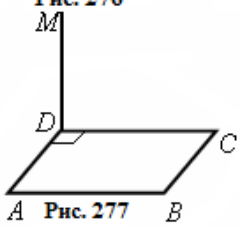


Рис. 277

5. На рис. 278 изображен правильный тетраэдр *ABCD*, *K* — середина ребра *BC*.

1) Можно ли утверждать, что $DK \perp ABC$?
2) Верно ли, что $BC \perp AKD$?

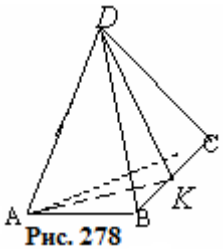


Рис. 278

6. На рис. 279 изображены два прямоугольника *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$.

1) Верно ли, что $AB \perp ADD_1$?
2) Какая прямая перпендикулярна плоскости BCC_1?

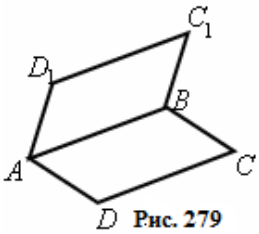


Рис. 279

Рассмотренные задачи 1 и 2 облегчают восприятие доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1). Запишем эту теорему в знако-символьной форме и докажем ее.

Теорема 1. Дано: $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, $b \cap c = \{O\}$. Доказать: $a \perp \alpha$.

 Известно, что прямая *a* перпендикулярна двум прямым *b* и *c*, принадлежащим плоскости α (рис.280, а). Понятно, прямая *a* проходит через точку пересечения *O* прямых *b* и *c* (обоснуйте этот вывод). Возьмем на прямой *a* произвольную точку *A* и соединим ее с концами равных отрезков *OB*, OB_1, *OC*, OC_1, отложенных от точки *O* на прямых *b* и *c* (рис. 280, б). Тогда прямоугольные треугольники *AOB*, AOB_1, *AOC*, AOC_1 равны, так как они имеют один общий катет *AO* и равные катеты *OB*, OB_1, *OC*, OC_1, а потому равны и гипотенузы *AB*, AB_1, *AC*, AC_1.

Покажем, что прямая *a* перпендикулярна произвольной прямой *m* плоскости α, проходящей через точку *O* (рис. 280, в). Обозначим через *M* и M_1 точки

пересечения прямой m со сторонами четырехугольника BCB_1C_1. Поскольку BCB_1C_1 — параллелограмм (докажите!), то точка O пересечения его диагоналей является центром симметрии четырехугольника. Точки M, M_1 — центрально симметричны относительно точки O, поэтому $OM = OM_1$ и AO — медиана треугольника AMM_1.

Треугольники ABC и AB_1C_1 равны по трём сторонам, поэтому $\angle ABM = \angle AB_1M_1$, а поскольку $BM = B_1M_1$ (хотя бы из соображений центральной симметричности этих отрезков относительно точки O), то и треугольники ABM и AB_1M_1 равны. Отсюда $AM = AM_1$, треугольник MAM_1 — равнобедренный с основанием MM_1, его медиана AO является одновременно и высотой. То есть $a \perp m$. ■

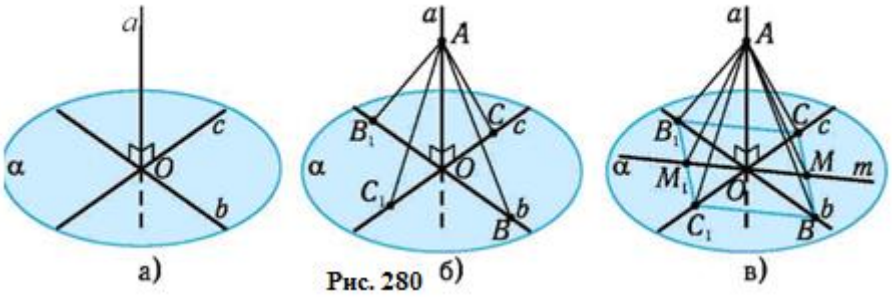


Рис. 280

Все предыдущие результаты касались перпендикулярности прямой плоскости. Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то говорят также, что плоскость α перпендикулярна прямой a. Следующая задача связана с построением плоскости, перпендикулярной данной прямой.

Задача 3. Через данную точку в пространстве провести плоскость, перпендикулярную данной прямой.

□ Решение задачи нуждается в рассмотрении двух случаев:

1) данная точка не принадлежит данной прямой;

2) данная точка принадлежит данной прямой.

Пусть данная точка O не принадлежит данной прямой a. Искомая плоскость может быть задана двумя пересекающимися прямыми. Согласно доказанному признаку перпендикулярности прямой плоскости, достаточно перпендикулярности этих прямых прямой a. Следовательно, задача сводится к построению двух пересекающихся прямых, перпендикулярных прямой a, одна из которых проходит через точку O. Для этого через точку O и прямую a проведем плоскость α и в ней построим прямую m, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку O (рис. 281, а). Потом через прямую a проведем плоскость β, отличную от α, и в этой плоскости через точку пересечения прямых a и m проведем прямую n, перпендикулярную a (рис. 281, б). Прямые m и n определяют искомую плоскость γ.

Случай, когда данная точка лежит на данной прямой, рассматривают аналогично. Для этого через прямую, a проводят произвольную плоскость, а в ней — прямую m, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку O. А далее все строится так же, как и в первом случае.

Алгоритм построения плоскости, проходящей через данную точку O, перпендикулярную данной прямой a:

– через точку O и прямую a проводим плоскость α (см. рис. 281, а);

– проводим в плоскости α прямую *m*, проходящую через точку *O* и перпендикулярную прямой *a* (см. рис. 281, а);

– через прямую *a* проводим плоскость β, отличную от плоскости α (см. рис. 281, б);

– проводим в плоскости β прямую *n*, перпендикулярную прямой *a* и проходящую через точку пересечения прямых *a* и *m* (см. рис. 281, б);

– проводим через прямые *m* и *n* плоскость γ. ■

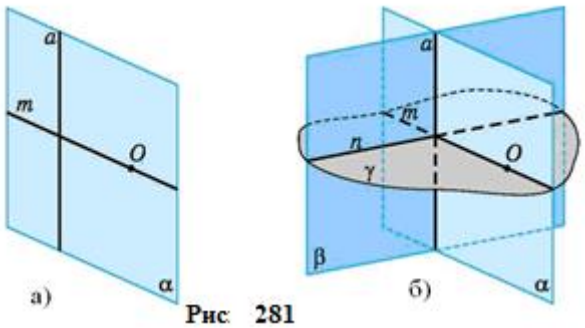


Рис. 281

Построенная в задаче 3 плоскость состоит из прямых, проходящих через точку данной прямой и перпендикулярных этой прямой.

Задача 4. Доказать, что прямые, проходящие через данную точку прямой и перпендикулярные ей, образуют плоскость, перпендикулярную этой прямой.

 Пусть дана прямая *a* и точка *O* на этой прямой. Проведем через точку *O* плоскость α, перпендикулярную прямой *a* (рис. 282 а). Тогда каждая прямая плоскости α, проходящая через точку *O*, перпендикулярна прямой *a*. Понятно, что эти прямые образуют плоскость α. Осталось лишь доказать, что каждая прямая *b*, проходящая через точку *O* и перпендикулярная прямой *a*, принадлежит плоскости α.

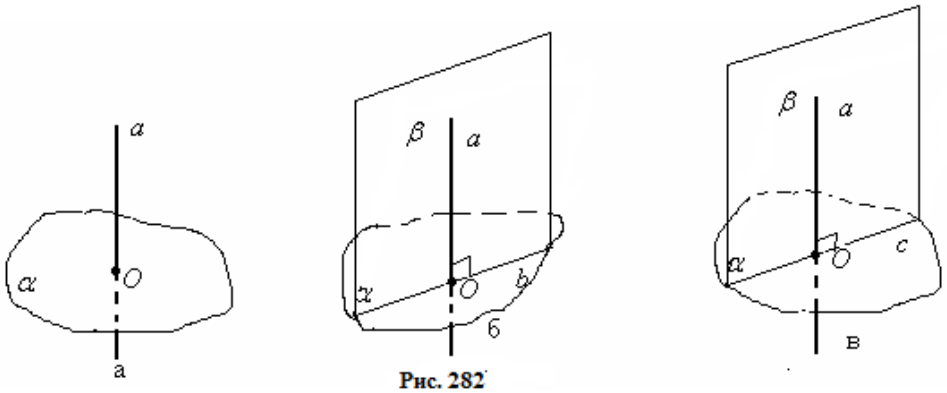


Рис. 282

Проведем через прямые *a* и *b* плоскость β (рис. 282 б). Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой *c*, проходящей через точку *O* и перпендикулярной прямой *a*,так как она лежит в плоскости α (рис. 282 в). Но в плоскости β через данную точку *O* прямой *a* можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную прямой *a*. Поэтому прямые *b* и *c* совпадают, то есть прямая *b* принадлежит плоскости α. ■

Понятие перпендикулярности прямой и плоскости связано с симметричностью расположения прямой, перпендикулярной плоскости, относительно самой этой плоскости. Симметричность проявляется в том, что при повороте на произвольный угол вокруг прямой перпендикулярная ей плоскость отображается сама на себя.

Сказанное выше требует уточнения. Пусть дана прямая l. Определим ***преобразование поворота точек пространства вокруг этой прямой на угол φ.*** Для этого возьмем произвольную точку M, не лежащую на данной прямой, и проведем через нее плоскость α, перпендикулярную прямой l (рис. 283). Эта плоскость пересекает прямую l в некоторой точке O. Повернём точку M в плоскости α на угол φ вокруг точки O до положения M_1. Говорят, что точку M_1 получили из точки M поворотом вокруг оси l на угол φ. Точки прямои l при повороте вокруг нее не меняют своего положения.

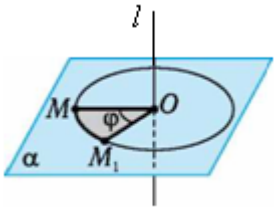


Рис. 283

Из определения поворота вокруг оси вытекает, что точки плоскости, перпендикулярной оси, переходят в точки той же плоскости, причем данное преобразование плоскости есть не что иное, как поворот вокруг точки пересечения оси с плоскостью на угол φ.

Поворот вокруг прямой на угол 180° является ***симметрией относительно этой прямой.*** Это преобразование аналогично симметрии относительно прямой на плоскости. Действительно, при повороте вокруг прямой l на 180° каждая точка A, не принадлежащая прямой l, переходит в такую точку A_1, что прямая l перпендикулярна отрезку AA_1 и пересекает его посередине (рис. 284). Такое преобразование называют ***осевой симметрией.*** В каждой плоскости, проходящей через прямую l, это преобразование является осевой симметрией в этой плоскости.

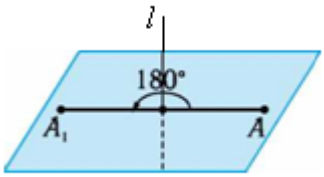


Рис. 284

В планиметрии важную роль играет задача на отыскание множества точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек A и B. Как известно, это множество образуют все точки прямой l, проходящие через середину M отрезка AB перпендикулярно к нему (рис. 285). Эту прямую, как известно, называют срединным перпендикуляром к данному отрезку. Решим аналогичную задачу для пространства.

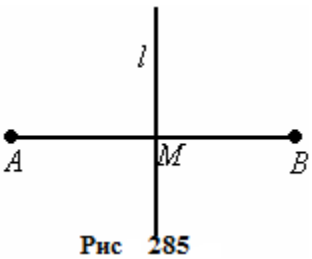


Рис 285

Задача 5. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных точек A и B.

□ Очевидно, что середина M отрезка AB удовлетворяет условию задачи. Пусть X — произвольная точка пространства, удовлетворяющая условию задачи, то есть $AX = BX$, и отличающаяся от точки M. Понятно, что точки A, B, X не лежат на одной прямой, а потому определяют некоторую плоскость α, и в этой плоскости точка X находится на прямой XM, перпендикулярной отрезку AB (рис. 286). Но все прямые, проходящие через точку M перпендикулярно прямой AB (рис. 287), образуют плоскость β (см. задачу 4). В ней, в конечном итоге, и лежит произвольная точка, удовлетворяющая условию задачи.

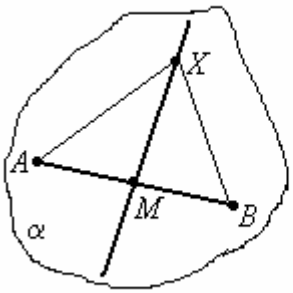


Рис. 286

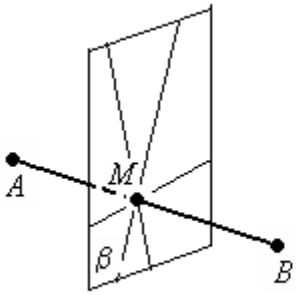


Рис. 287

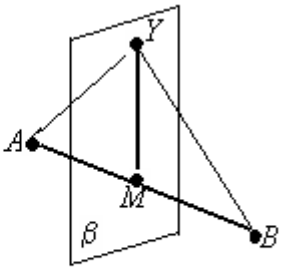


Рис. 288

а) Рис. 291 б)

Обратно, если Y — произвольная точка плоскости β (рис. 288), то прямая YM перпендикулярна отрезку AB по определению перпендикулярности прямой и плоскости и является к тому же срединным перпендикуляром к отрезку AB в плоскости AYB. Поэтому $AY = BY$.

Таким образом, плоскость, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная ему, образует множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных точек. ■

Пример 2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, точка O является центром основания $ABCD$.

1) Доказать, что $SO \perp ABC$; $AC \perp DBS$.

2) Через точку B провести плоскость, перпендикулярную прямой SC.

3) Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AS перпендикулярно прямой: а) BD; б) AB.

□ 1) Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, точка O — центр ее основания (рис. 289). Так как треугольник ASC является равнобедренным ($AS = SC$), то его медиана SO является и высотой. Следовательно, $SO \perp AC$. Аналогично, $SO \perp BD$. Поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $SO \perp ABC$. Далее, $BD \perp AC$, как диагонали квадрата, и $SO \perp AC$, поэтому, по тому же признаку, $AC \perp DBS$.

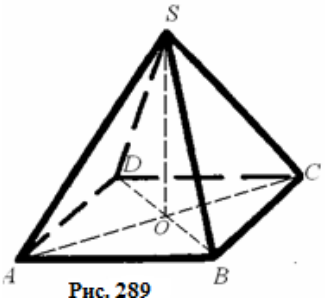


Рис. 289

2) Воспользуемся построением, выполненным в задаче 3. Для этого в треугольнике BSC проведем $BK \perp SC$ (рис. 290). Поскольку $\Delta BCK = \Delta DCK$ (по двум сторонам и углу между ними), то $\angle DKC = \angle BKC = 90°$. Следовательно, так как $SC \perp BK$, то $SC \perp DK$, поэтому $DBK \perp SC$, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Приведенная конструкция характерна для правильной пирамиды. Эта же плоскость определяется прямыми DB и OK, где $OK \perp SC$, или же является решением задачи: через точку O (или диагональ основания BD) провести плоскость, перпендикулярную ребру SC.

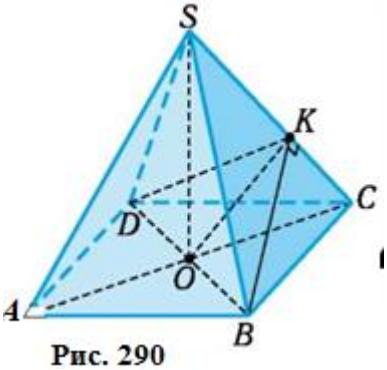
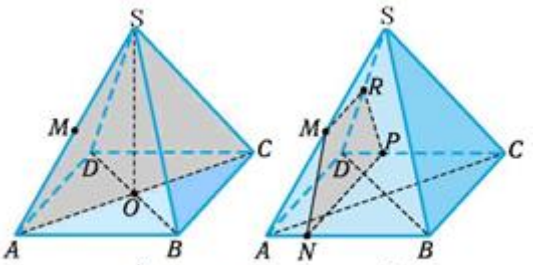


Рис. 290

3) а) Пусть M — середина ребра AS. Прямая BD перпендикулярна плоскости ACS, содержащую точку

M. Это устанавливается аналогично доказательству перпендикулярности прямой *AC* плоскости *DBS*. Поэтому искомым сечением служит треугольник *ASC* (рис. 291, а).



а) Рис. 291 б)

б) Если в плоскости *SAB* через точку *M* провести перпендикуляр *MN* к *AB* и в плоскости *ABC* — перпендикуляр *NP* к *AB* (рис. 291, б), то плоскость *MNP* перпендикулярна прямой *AB,* то есть она является плоскостью искомого сечения. Поскольку $NP \parallel AD$, то $NP \parallel SAD$, и плоскость сечения пересекает грань *SAD* по отрезку *MR,* параллельному *NP*. Следовательно, сечением является трапеция *NMRP* (легко доказать, что она равнобокая, попробуйте это сделать). ■

Вопросы для самоконтроля

1. Всегда ли через точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой?

2. Как расположены две прямые в пространстве, перпендикулярные одной и той же прямой?

3. Верно ли, что плоскость, проходящая через одну из перпендикулярных прямых, перпендикулярна второй?

4. Сторона правильного треугольника лежит в плоскости α. Верно ли, что высота треугольника, проведенная к этой стороне, перпендикулярна плоскости α?

5. Верно ли, что прямая, пересекающая круг в его центре и перпендикулярная двум радиусам круга, перпендикулярна плоскости круга?

6. Верно ли, что прямая, перпендикулярная двум смежным сторонам параллелограмма, перпендикулярна его диагонали?

7. Как проверить вертикальность стержня, пользуясь лишь прямоугольным листом бумаги?

8. Можно ли проверить вертикальность столба, измеряя только расстояния?

9. Как установить горизонтально платформу на вертикальной мачте?

10. Прямая, проходящая через середины оснований трапеции, перпендикулярна плоскости α. Паораллельна ли этой плоскости средняя линия трапеции?

Графические упражнения

Постройте рисунок по приведенным данным.

1. Прямая AM перпендикулярна плоскости треугольника ABC. Через середину отрезка MB проведена прямая, перпендикулярная той же плоскости.
2. Прямая OS проходит через точку O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ и перпендикулярна его плоскости. Через середину отрезка SC проведена прямая, перпендикулярная той же плоскости.
3. Отрезок CS проведен через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC перпендикулярно его катетам. Через точку S проведена прямая, перпендикулярная гипотенузе.
4. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярны плоскости треугольника ABC.
5. Плоскость сечения куба проходит через середину ребра перпендикулярно ему.
6. Через середину M ребра SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена прямая, перпендикулярная плоскости основания $ABCD$.
7. Через точку M диагонали AC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, перпендикулярную ей.

В данном пункте было введено понятие преобразования поворота точек пространства вокруг прямой (оси). При этом мы опирались на планиметрическую ситуацию. Для поворота произвольной точки A пространства на угол φ вокруг оси l проводилась через точку A плоскость α, перпендикулярна оси l (такая плоскость всегда существует, см. задачу 3), и в плоскости α выполнялся поворот на угол φ вокруг точки пересечения O оси l с плоскостью α (рис. 292). Конечно, такое определение поворота требует определенных уточнений, даже для плоскости, относительно выбора направления поворота. А именно, на плоскости указывают направление поворота — по часовой стрелке, или против нее.

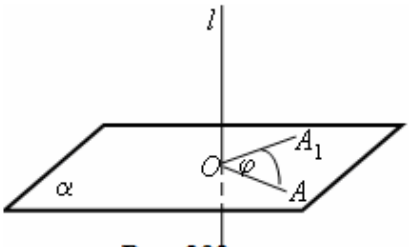


Рис. 292

Если использовать понятие положительного и отрицательного углов для определения направления поворота (положительного — против часовой стрелки, отрицательного — по часовой стрелке), то тем самым ситуация с направлением поворота на плоскости полностью определяется. Решение вопроса о направлении поворота вокруг оси в пространстве несколько сложнее, ведь придется действовать, вообще говоря, в разных плоскостях. Можно, например, выбрать на прямой l направление, обозначив его стрелкой (рис. 293) и при повороте точек A, B, … лежащих в разных плоскостях α, β,…, перпендикулярных l (они, как легко доказать, параллельны

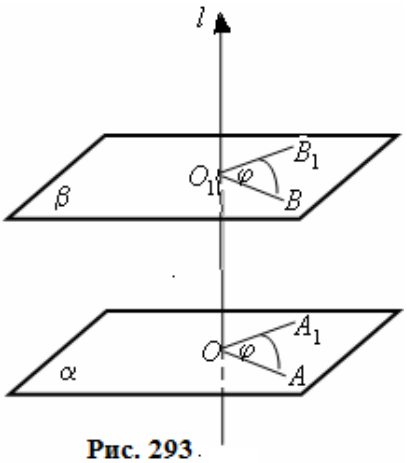


Рис. 293

между собой) общее направление поворота на угол φ — по часовой стрелке, или против нее — определять, глядя на плоскости α и β со стороны стрелки.

При изучении поворотов (и их частных случаев — осевых симметрий) более сложных геометрических фигур, чем точки, надо решить ряд вопросов. Самый простой из них (а по существу и один из важнейших) — что мы получим при преобразовании поворота отрезка?

С позиций здравого смысла, который основывается на многочисленных реальных примерах (то есть на физических моделях), ответ не вызывает сомнений: получим снова-таки отрезок, равный по длине данному. Как следствие этого, имеем, что при повороте прямая преобразовывается в прямую, треугольник — в равный ему треугольник, плоскость — в плоскость и т. д. Мы не станем здесь строить соответствующих формальных доказательств. Попробуем на уровне физического восприятия понятия поворота вокруг прямой в пространстве рассмотреть роль этих преобразований при изучении геометрических фигур.

Обратим, в первую очередь, внимание на то, что повороты реальных физических объектов встречаются на каждом шагу. Колеса всевозможных

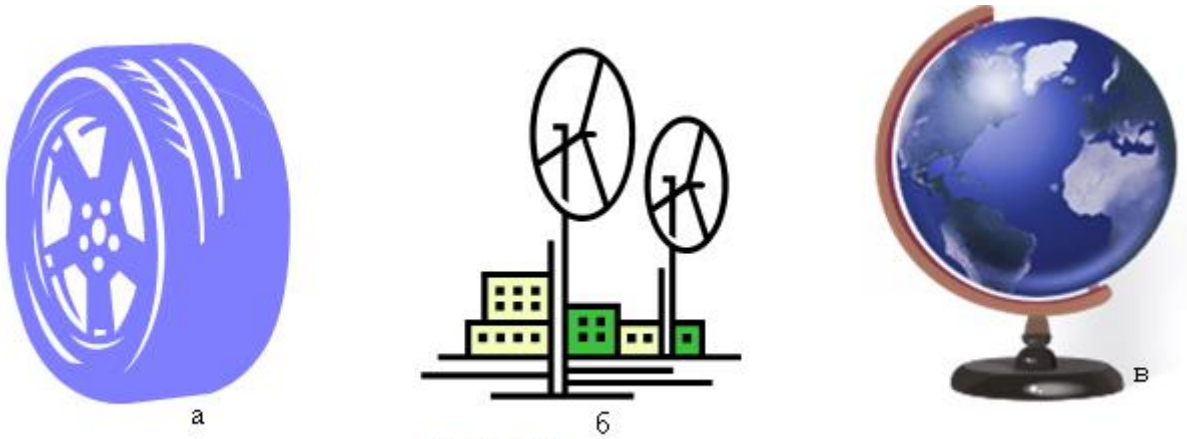


Рис. 294

форм и размеров, турбины и электродвигатели, планеты, имеющие ось вращения (рис. 294 а - в) и много др., — все это функционирует по законам вращения вокруг оси.

С помощью преобразований поворота можно характеризовать определенную симметричность, правильность геометрической фигуры. А именно, говорят, что фигура имеет ***симметрию поворота*** (или ***поворотную симметрию***), если существует преобразование поворота пространства, в результате которого фигура совмещается сама с собой.

Например, рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Очевидно, что прямая, проходящая через центры O, O_1 противоположных граней куба (рис. 295), перпендикулярна им. Поворот вокруг этой прямой на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ совмещает куб с собой ($A \to B, B \to C, C \to D, D \to A$ и т. д.). То есть указанный поворот является поворотной симметрией ку-

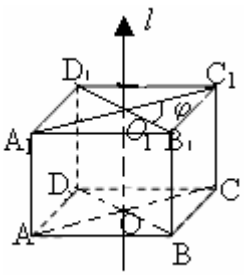


Рис. 295

ба. Поворотными симметриями куба вокруг указанной оси являются также повороты на углы φ = 0, φ = π, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Поскольку поворот на угол φ и на углы $\varphi + 2k\pi, k \in Z,$ дают те же самые геометрические результаты, то такие повороты отождествляют. Следовательно, куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет 4 поворотные симметрии относительно оси OO_1. Понятно, что ось OO_1 является и осью симметрии куба.

Количество поворотных симметрий фигуры вокруг определенной оси называет ***порядком этой оси.*** Тождественный поворот, то есть поворот на угол φ = 0, включается в эти повороты, но ось, которая допускает только тождественный поворот — самосовмещение, не считается осью поворотной симметрии. Таким образом, ось OO_1 для куба имеет порядок 4. Попробуйте для куба указать другие оси поворотной симметрии (их достаточно много) и определить порядок этих осей.

Менее "правильным", чем куб, по отношению к количеству поворотных симметрий является произвольный прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 296). Хотя прямая OO_1, проходящая через центры его двух противоположных граней, также является осью его поворотной симметрии, но эта ось, в отличие от куба, имеет порядок 2, если $AB \neq BC$. Множество поворотных симметрий вокруг этой оси состоит из поворотов на угол φ = 0 и на угол φ = π, то есть фактически речь идет об осевых симметриях параллелепипеда.

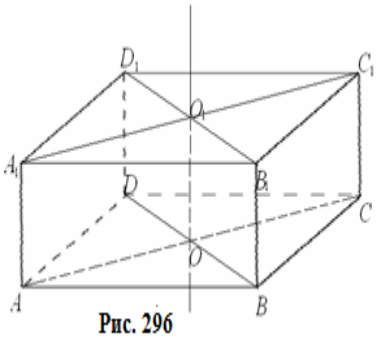


Рис. 296

А вот шар является одной из самых богатых на симметрии поворота геометрических фигур. Произвольная прямая, проходящая через его центр, является осью, поворот вокруг которой на произвольный угол является поворотной симметрией (рис. 297).

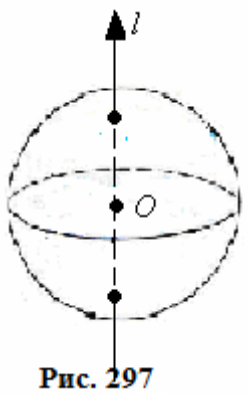


Рис. 297

Нетрудно увидеть, что композиция (то есть последовательное выполнение) поворотных симметрий вокруг фиксированной оси является снова поворотной симметрией; преобразование, обратное к поворотной симметрии, является поворотной симметрией.

В завершение отметим, что понятие о преобразовании — самосовмещении фигур приводят к понятию фигур вращения. Это такие фигуры, которые имеют ось вращения, для которой поворот на произвольный угол приводит к самосовмещению фигуры. Класс фигур вращения, который, кстати, включает шар, интересен, практически применимый и заслуживает дальнейшего изучения.

Задачи на исследование

1. Исследуйте, какие из приведенных фигур имеют оси симметрии, поворотную симметрию, какого порядка оси симметрии поворота, сколько их:
1) куб; 2) правильный тетраэдр.

2. На примере пирамид покажите возможность существования у геометрических фигур осей симметрии поворота произвольного порядка. Можно ли дать определение правильной пирамиды, используя язык поворотной симметрии?

Контрольные вопросы

1. Верно ли, что прямые пространства, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой?

2. Почему через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в пространстве лишь одну перпендикулярную ей прямую, а через точку данной прямой — бесконечное множество таких прямых?

3. Верно ли, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?

4. Верно ли, что прямая перпендикулярна плоскости в том случае, если она перпендикулярна некоторой прямой, принадлежащей этой плоскости?

5. Верно ли, что прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, перпендикулярна его плоскости?

6. При поперечном распиливании деревянного бруса плотник держит пилку так, чтобы можно было видеть две смежные грани бруса. С какой целью он это делает?

7. Как установить вертикально мачту с помощью растяжек?

8. Как проверить перпендикулярность оси сверла плоскости стола, на котором закрепляют деталь?

9. Как с помощью рулетки проверить вертикальность столба?

10. К какому классу преобразований можно отнести поворот вокруг оси на 180°?

11. Является ли композиция поворотов вокруг оси снова поворотом?

Задачи

274. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1°) Найдите все ребра куба, перпендикулярные ребру AA_1.
2°) Докажите, что прямая, проходящая через вершину куба A_1 и центр грани $ABCD$, перпендикулярна прямой BD.
3°) Через точку B проведите прямую, перпендикулярную прямой A_1C_1.

4) Докажите, что каждая прямая, проходящая через середину отрезка A_1C_1 и пересекающая отрезок BD, перпендикулярна прямой A_1C_1.

275. Отрезок OS проведен из центра O квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости, точка M — середина отрезка BC.

1°) Укажите прямые, перпендикулярные прямой BD.

2°) Установите взаимное расположение плоскости ASC и прямой BD.

3°) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости SOM.

4) Через точку O проведите плоскость, перпендикулярную прямой AB.

5) Постройте точки пересечения плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой BD, с прямыми BS, BA, BC. Вычислите площадь треугольника, образованного этими точками, если длина стороны квадрата равна 6 см, а отрезка OS — 4 см.

276. Отрезок CS проведен через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC перпендикулярно его катетам. Точка M — середина гипотенузы AB, $CB = CS = CA = a$.

1°) Укажите прямые, перпендикулярные прямой CS и прямой MC.

2°) Определите взаимное расположение плоскости SCA и прямой BC.

3°) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости CMS.

4) Через точку M проведите плоскость, перпендикулярную прямой AC.

5) Вычислите площадь треугольника, плоскость которого перпендикулярна прямой MS, одна из вершин — середина катета CB, а две другие — точки пересечения плоскости треугольника с прямыми CA и MS.

277. На изображении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте:

1°) прямую, проходящую через точку A_1 перпендикулярно плоскости BB_1D;

2°) плоскость, проходящую через точку A_1 перпендикулярно прямой B_1D_1;

3°) прямую, проходящую через середину ребра AB перпендикулярно плоскости CDD_1;

4°) плоскость, проходящую через середину ребра AA_1 перпендикулярно прямой DD_1;

5) прямую, проходящую через середину ребра AB перпендикулярно плоскости A_1C_1C;

6) плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно прямой CD_1;

7*) прямую, проходящую через точку A_1 перпендикулярно плоскости AB_1D_1.

278. Точка S расположена на одинаковом расстоянии от всех вершин квадрата $ABCD$ и не принадлежит его плоскости. Постройте:

1) прямую, проходящую через точку S, перпендикулярную плоскости ABC;

2) плоскость, проходящую через середину K стороны AD, перпендикулярную прямой AD;

3*) прямую, проходящую через середину M стороны CD, перпендикулярную плоскости ABS;

4*) плоскость, проходящую через точку K перпендикулярно прямой DS.

279. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена

прямая CD, перпендикулярная его плоскости.

1)° Постройте плоскость, проходящую через точку D перпендикулярно прямой CD.
2) Можно ли построить плоскость, проходящую через прямую AC перпендикулярно прямой AB?
3)* Постройте прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости ACD.

280. Комната имеет длину 6 м, ширину 5 м и высоту 3 м. Найдите расстояние от светильника, размещённого в центре потолка, до нижних углов комнаты.
281°. Докажите, что через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой. Исследуйте, когда такую прямую можно провести лишь одну.
282°. Докажите, что прямая, проходящая через центры противоположных граней куба, перпендикулярна этим граням.
283°. Прямая a перпендикулярна плоскости α и перпендикулярна прямой b, не лежащей в плоскости α. Докажите, что прямая b и плоскость α параллельны.
284. Докажите, что через точку, лежащую вне плоскости, можно провести только одну прямую, перпендикулярную этой плоскости.
285. Два отрезка AB и CD, лежащие в плоскости α, точкой пересечения E делятся пополам. Точка K находится вне плоскости α, причем $KA = KB$ и $KC = KD$. Докажите, что прямая KE перпендикулярна плоскости α.
286. Докажите, что прямые a и b параллельны, если они имеют две общие перпендикулярные прямые.
287*. Докажите, что прямые, перпендикулярные данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

288. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей:
1°) через середину ребра, перпендикулярно этому ребру;
2) через середину диагонали грани куба, перпендикулярно этой диагонали.
289. В правильном тетраэдре $SABC$ точка K — середина ребра SC.
1°) Докажите, что плоскость AKB перпендикулярна прямой SC.
2) Изобразите сечения тетраэдра плоскостями, проходящими через вершину A перпендикулярно прямым BC и SB. Найдите линию пересечения этих сечений.
290*. Даны три скрещивающиеся прямые.
1) Постройте параллелепипед, три ребра которого лежат на этих прямых.
2) Докажите, что возможно существование лишь одного параллелепипеда.
3) При каких условиях построенный параллелепипед будет прямым; прямоугольным?

Упражнения для повторения

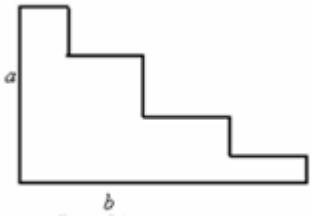


Рис. 298

291. Найдите периметр фигуры, у которой стороны перпендикулярны, по данным, представленным на рис. 298.

292. Докажите, что две прямые плоскости, перпендикулярные двум сторонам треугольника, пересекаются.

293. Верно ли, что четырехугольник, у которого диагонали равны между собой, а два угла прямые, является прямоугольником?

294. На катетах прямоугольного треугольника *ABC* построили квадраты (рис. 299). Из их вершин к прямой *AB* проведены перпендикуляры *DK* и *HM*. Докажите, что треугольник *ABC* можно составить из треугольников *BDK* и *AHM*.

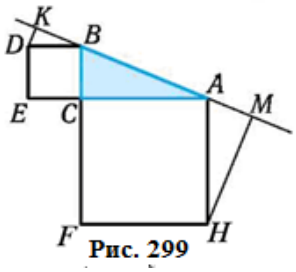
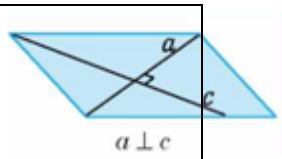
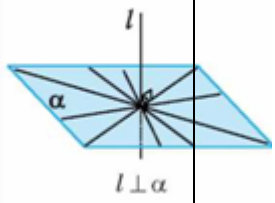


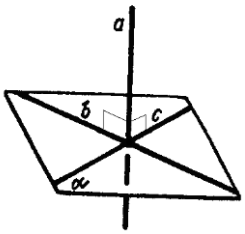
Рис. 299

Итог

Основные определения

Две прямые пространства называются ***перпендикулярными,*** если они пересекаются под прямым углом.		
Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна каждой прямой плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.		

Основное утверждение

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.	Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости	 $a \perp b, a \perp c,\ b \subset \alpha, c \subset \alpha$ $\Rightarrow a \perp \alpha$

§15. Связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей

Данный параграф посвящен установлению связей между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей, широко применяемых в геометрии.

О существовании связей между параллельностью и перпендикулярностью в пространстве свидетельствует наш опыт. Действительно, столбы, установленные вертикально, параллельны между собой (рис. 300); параллельны вертикально направленные ледовые сосульки (рис. 301), верти-

Рис. 300

Рис. 301

Рис. 302

кальные колонны, украшающие сооружения (рис. 302) и т. п.

Хорошо известно содержание аналогичных связей в планиметрии: два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собой, и наоборот, прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и второй. Однако для прямых в пространстве эти утверждения не всегда выполняются (попробуйте сами привести соответствующие примеры). Вместе с тем можно изучать ситуации, связанные с параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей.

Рассмотрим детальнее связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью плоскости. Эти связи отражают отношения между реальными объектами, которыми мы пользуемся в повседневной жизни. Действительно, если одна доска забора прилажена вертикально к поверхности земли, то вторую доску достаточно расположить параллельно первой, чтобы она также была вертикальной (рис. 303). Этот способ построения забора основывается на следующей теореме.

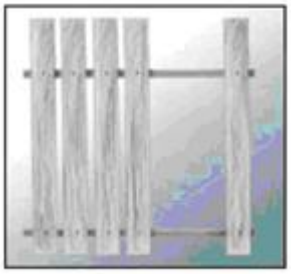


Рис. 303

Теорема 1 *(о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости).*

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Приведенная теорема является признаком перпендикулярности прямой и плоскости, то есть с ее помощью устанавливают перпендикулярность прямой и плоскости. Её широко используют не только в геометрии, но и в практической деятельности. Сооружение здания с использованием отвеса является яркой иллюстрацией применения этого признака

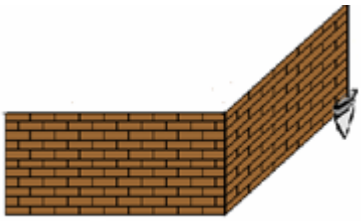


Рис. 304

перпендикулярности прямой и плоскости. Действительно, нить отвеса расположена вертикально, и если кромка сооружения параллельна нити, то она также вертикальна (рис. 304).

Рассмотрение теоремы 1 естественно порождает вопрос: будут ли параллельными две прямые, перпендикулярные одной плоскости? Ответ на него нам подсказывает опыт (два вертикально установленных столба — параллельны!) и он подтверждается следующей теоремой, обратной теореме 1.

Теорема 2 *(о параллельности прямых, перпендикулярных плоскости).*

Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они — параллельны.

Приведенная теорема также является признаком. С её помощью устанавливают параллельность прямых в пространственных конструкциях. Ведь вертикальность или перпендикулярность плоскости иногда легче проверить (особенно на громоздких объектах), чем параллельность. Речь идет, например, о расположении поперечных балок при сооружении потолка здания, распознавания параллельности прямых в геометрических конфигурациях и др.

Не менее важными в геометрии и ее приложениях являются связи между параллельностью плоскостей и их перпендикулярностью прямой. Речь идёт о двух плоскостях и одной прямой. Если две плоскости параллельны и одна из них перпендикулярна прямой, то как будет расположена вторая плоскость по отношению к этой прямой? Как расположены две плоскости, если они обе перпендикулярны прямой? Ответы на эти вопросы также нам подсказывает опыт практической деятельности. Если вбить гвоздь в доску перпендикулярно к одной стороне доски, то он будет перпендикулярен и противоположной (рис. 305). Если на ось колесной пары насадить колеса с обеих сторон так, чтобы их плоскости были перпендикулярными оси, то плоскости этих колес будут параллельными (рис. 306).

Рис. 305

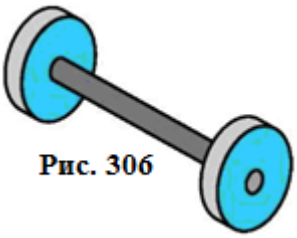


Рис. 306

Сформулируем два взаимно обратных утверждения, отражающие связь между параллельностью плоскостей и их перпендикулярностью прямой.

Теорема 3 *(о параллельных плоскостях, одна из которых перпендикулярная прямой).*

Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то и вторая плоскость перпендикулярна этой же прямой.

Теорема 4 *(о двух плоскостях, перпендикулярных к прямой).*

Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они — параллельны.

Привлекает внимание родство приведенных двух пар теорем. Каждую из них можно сформулировать, заменив термин «прямая» на «плоскость», и наоборот.

Теоремы 3 и 4 также является признаками.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 3) связан с расположением опорных колонн относительно пола и потолка. Если плоскости потолка и пола параллельны, то колонну достаточно поставить перпендикулярно полу, чтобы она была перпендикулярной и потолку (рис. 307).

Рис. 307

Практическую ценность признака, выраженного в теореме 4, иллюстрирует транспортировка железобетонной плиты в горизонтальном положении с помощью крана. Для этого используют четыре одинаковых троса, концы которых закреплены в точках A_1, A_2, A_3, A_4 плиты и к крюку S (рис. 308). Поскольку плита висит свободно, то трос, на котором закреплен крюк, перпендикулярен поверхности земли и расположен на прямой, проходящей через центр масс плиты (для однородной плиты). Если пренебречь толщиной плиты, то ее центр находится на пересечении диагоналей прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$. Поскольку $SA_1=SA_2=SA_3=SA_4$, то прямая, соединяющая точку S с точкой пересечения диагоналей, перпендикулярна плоскости плиты (задача 1 §14). Поэтому, согласно теореме 4, плита расположена горизонтально.

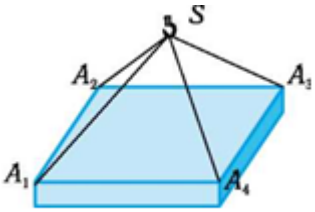


Рис. 308

Приведенные примеры не исчерпывают всего разнообразия применений рассмотренных признаков при решении практических задач. Важными являются данные признаки и для последующего углубления геометрических знаний.

Задача 1. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Случай, когда данная точка A лежит в данной плоскости α, мы рассматривали в предыдущем параграфе. Пусть теперь точка A лежит вне плоскости α. Через произвольную точку B плоскости α проведем прямую b, перпендикулярную плоскости α (рис. 309). Потом через точку A проведем прямую, параллельную прямой b (как это сделать?). Она и будет искомой, поскольку ее перпендикулярность плоскости α обусловлена теоремой 1.

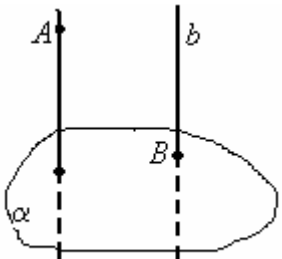


Рис. 309

Пример 1. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен отрезок AM, перпендикулярный плоскости ABC. Построить:

1) плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно прямой AC;

2) прямую, проходящую через середину отрезка MC перпендикулярно плоскости ABC;

3) плоскость, проходящую через точку B параллельно плоскости ACM.

Изобразим условие примера на рис. 310, а.

1) Рассмотрим плоскость MAC. По условию, прямая MA перпендикулярна прямой AC. Для построения ис-

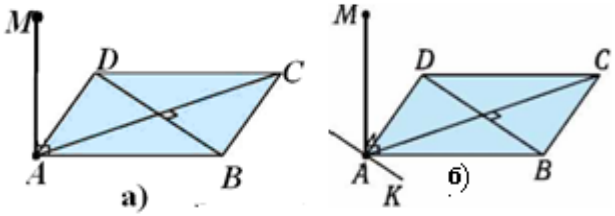


Рис. 310

комой плоскости достаточно провести через точку *A* еще одну прямую, перпендикулярную прямой *AC*. Поскольку прямая *BD* перпендикулярна прямой *AC*, то искомая прямая должна быть параллельной прямой *BD*.

Построение. Через точку *A* проведём прямую *AK*, параллельную прямой *BD* (рис. 310, б). Она перпендикулярна прямой *AC*. Плоскость *MAK* перпендикулярна прямой *AC* по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 14).

2) Пусть *N* — середина отрезка *MC* (рис. 311, а). Искомая прямая параллельна прямой *MA*, по теореме о параллельности прямых, перпендикулярных плоскости (теорема 2). Это — необходимое условие. Оно и достаточно, по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1).

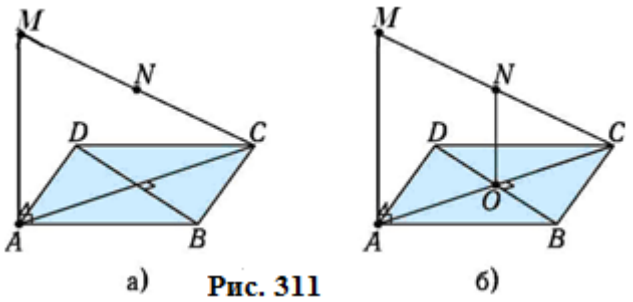


Рис. 311

Построение. Через точку *N* проведём прямую, параллельную прямой *MA* (рис. 311, б). Точка ее пересечения *O* с плоскостью квадрата является центром квадрата, поскольку прямая *NO* лежит в плоскости *MAC* и проходит через середину отрезка *AC* (по теореме Фалеса).

3) Прямая *BD* перпендикулярна плоскости *MAC* по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1), поскольку она перпендикулярна прямым *AC* и *NO* этой плоскости (рис. 311, б). Поэтому искомая плоскость будет перпендикулярной прямой *BD* по теореме о параллельных плоскостях, одна из которых перпендикулярна прямой (теорема 3). Это необходимое условие. Оно является и достаточным по теореме о двух плоскостях, перпендикулярных прямой (теорема 4).

Построение. Через точку *B* проводим прямую *BP*, параллельную прямой *MA* (рис. 312, а). Она будет перпендикулярна плоскости *ABC* по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1), а потому перпендикулярна прямой *BD*. Затем через точку *B* проводим прямую *BF*, параллельную прямой *AC* (рис. 312, б). Она также будет перпендикулярна прямой *BD*. Плоскость *PBF* перпендикулярна прямой *BD* по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1). Она и является искомой по теореме о двух плоскостях, перпендикулярных прямой (теорема 4). ■

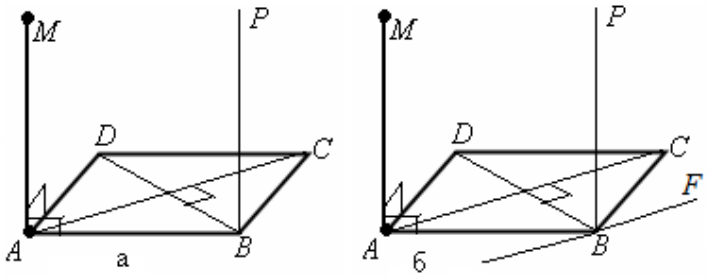


Рис. 312

Вопросы для самоконтроля

1. Могут ли быть параллельными две прямые, если только одна из них перпендикулярна данной плоскости?

2. Верно ли, что две прямые, перпендикулярные некоторой плоскости, лежат в одной плоскости?

3. Можно ли провести плоскость, перпендикулярную одновременно двум пересекающимся прямым?

4. Могут ли два боковых ребра пирамиды быть перпендикулярными плоскости основания пирамиды?

5. Можно ли убедиться в том, что мачта антенны стоит вертикально, сравнивая ее с вертикальной мачтой, стоящей рядом?

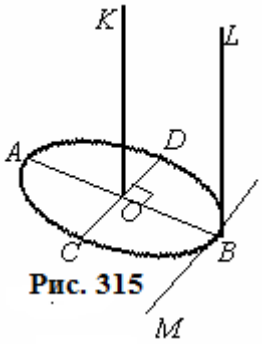


Рис. 315

6. Можно ли провести прямую перпендикулярно двум пересекающимся плоскостям?

7. Может ли только одна грань куба быть перпендикулярной данной прямой?

8. Существует ли взаимосвязь между расположением ножек стола относительно его поверхности и пола, на котором он стоит?

9. Верно ли, что сечение куба плоскостью, проходящей через его ребро, является прямоугольником?

10. Верно ли, что сечение куба плоскостью, перпендикулярной его ребру, является квадратом?

11. Существует ли сечение куба плоскостью, перпендикулярной только двум его ребрам?

12. При каком расположении плоскости относительно ребра куба форма сечения куба этой плоскостью не зависит от того, где плоскость пересекает ребро?

13. Через центры противоположных граней параллелепипеда проведены прямые, перпендикулярные плоскостям этих граней. Как расположены эти прямые?

Упражнения на рисунках

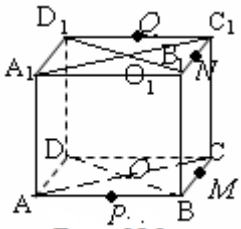


Рис. 313

1. На рис. 313 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с квадратной гранью $ABCD$, точки M, N, P, Q — середины соответственно ребер BC, B_1C_1, AB, D_1C_1, точки O, O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ Установите взаимное расположение указанных прямой и плоскости:

1) OO_1 и ABC; 2) OM и ADD_1; 3) OC и DBB_1; 4) CC_1 и NQO_1; 5) B_1C и BAD_1; 6) A_1C_1 и MNQ; 7) PM и BDD_1; 8) QN и NPM.

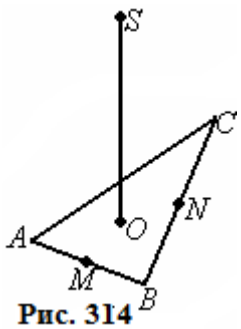


Рис. 314

2. На рис. 314 изображен правильный треугольник ABC, O — его центр, OS — отрезок, перпендикулярный плоскости треугольника, точки M, N — соответственно середины сторон AB, BC. Установите взаимное размещение:

1) прямой AB и плоскости SOC;

2) прямой MN и плоскости SOB;

3) прямой AC и плоскости MNS.

3. На рис. 315 изображен круг с центром O, AB и CD — его перпендикулярные диаметры, MB — касательная к окружности, ограничивающей этот круг, OK, BL — равные отрезки, перпендикулярные плоскости круга. Установите взаимное расположение:

1) прямой BL и плоскости AOC;
2) прямой BM и плоскости LOK;
3) прямой BM и плоскости COK;
4) прямой KL и плоскости DOK;
5) плоскостей DOK и MBL;
6) прямой BK и плоскости CLD.

Рассмотрим доказательство приведенных теорем о связях между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей. Указанная связь между двумя парами теорем и между собой в парах дает возможность надеяться, что доказательство одной из теорем облегчит доказательство других. Начнем с теоремы 1. Запишем ее в знакосимвольной форме.

Теорема 1. Дано: $a_1 \parallel a_2$, $a_1 \perp \alpha$. **Доказать:** $a_2 \perp \alpha$.

□ Для доказательства теоремы воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

Обозначим через O_1 точку пересечения прямой a_1 и плоскости α. Согласно теореме о пересечении плоскости параллельными прямыми (теорема 6 § 9), прямая a_2, параллельная прямой a_1, также пересекает плоскость α в некоторой точке O_2 (рис. 316, а).

Возьмем на прямых a_1 и a_2 точки A_1 и A_2 по одну сторону от плоскости α так, чтобы отрезки O_1A_1 и O_2A_2 были равными. Построенный четырехугольник $O_1A_1A_2O_2$ (рис. 316, б) является параллелограммом, так как $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, $O_1A_1 =$

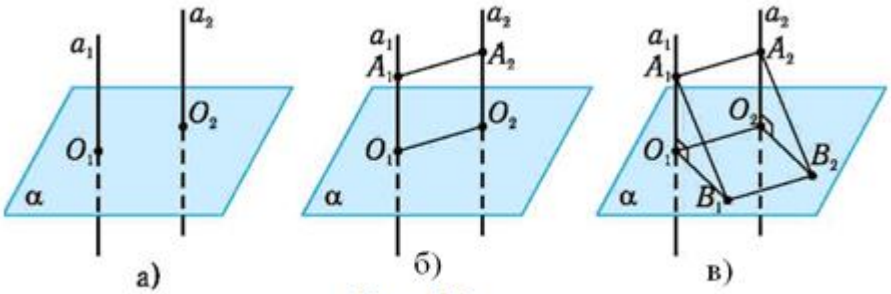


Рис. 316

O_2A_2. Аналогично строим параллелограмм $O_1B_1B_2O_2$ для произвольного направления в плоскости α. Для этого через точки O_1 и O_2 в плоскости α проведем произвольные параллельные прямые, на которых выбираем точки B_1 и B_2 аналогично выбору точек A_1 и A_2 (рис. 316, в).

Из приведенных построений вытекает, что четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ является параллелограммом. Действительно, отрезки A_1A_2 и B_1B_2 — парал-

лельны и равны, по свойствам транзитивности параллельности прямых и равенства длин ($A_1A_2 \parallel O_1O_2$, $O_1O_2 \parallel B_1B_2$, $A_1A_2 = O_1O_2$, $O_1O_2 = B_1B_2$).

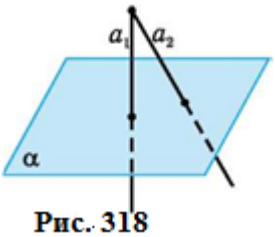


Рис. 318

А теперь рассмотрим треугольники $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$. Они равны по трём сторонам: $A_1O_1 = A_2O_2$, $O_1B_1 = O_2B_2$, по построению, $A_1B_1 = A_2B_2$ как противоположные стороны параллелограмма. Поэтому равны соответствующие углы этих треугольников, в частности, $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$. Но угол $A_1O_1B_1$ по условию — прямой. Поэтому прямым будет и угол $A_2O_2B_2$. А это означает, что прямая a_2 перпендикулярна каждой прямой плоскости α, проходящей через точку O_2. По определению, она перпендикулярна плоскости α. ■

Теорема 2. Дано: $a_1 \perp \alpha$, $a_2 \perp \alpha$. Доказать: $a_1 \parallel a_2$.

□ Пусть прямые a_1 и a_2 перпендикулярны плоскости α, O_1, O_2 — точки их пересечения с плоскостью α (рис. 317, а). Через точку O_2 проведем прямую b, параллельную прямой a_1 (рис. 317, б). По предыдущей теореме, $b \perp \alpha$. Если прямая b не совпадает с прямой a_2, то через них можно провести плоскость β, пересекающую плоскость α по прямой c (рис. 317, в). Прямые a_2 и b перпендикулярны прямой c, по определению перпендикулярности прямой и плоскости. Однако в плоскости через данную точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной прямой. Полученное противоречие означает, что прямые a_2 и b совпадают, то есть $a_1 \parallel a_2$. ■

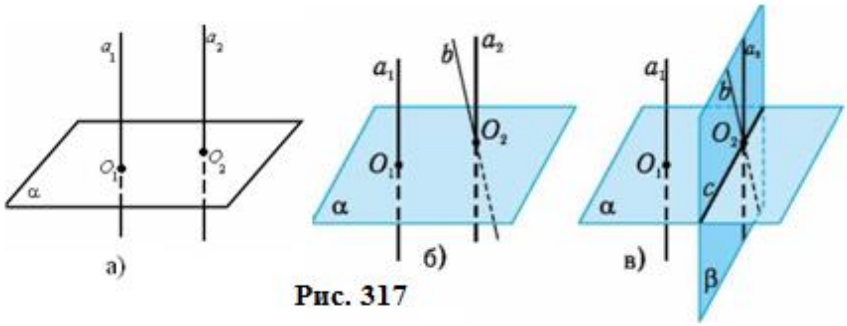


Рис. 317

Доказательство теорем 3 и 4 проводится по такой же схеме, что и доказательство теорем 1 и 2 соответственно. Сделайте это самостоятельно, пользуясь указанием, приведенным после формулировок теорем 3 и 4.

Важность рассмотренных теорем для стереометрии и ее приложений, как уже отмечалось, связана с тем, что каждая из них является признаком: первая и третья — признаки перпендикулярности прямой и плоскости, вторая — признак параллельности прямых, четвертая — признак параллельности плоскостей. Этим самым расширяются наши возможности при изучении взаимного расположения прямых и плоскостей, проведении построений.

Обобщением результата задачи 1 является следующая теорема.

Теорема 5 (*о прямой, перпендикулярной данной плоскости*).

Через произвольную точку пространства проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и к тому же только одна.

□ Первая часть теоремы о существовании такой прямой обоснована в решении задачи 1. Для доказательства единственности такой прямой допустим противное, а именно: через некоторую точку A проведены две различные пря-

мые a_1 и a_2, перпендикулярные плоскости α (рис. 318). По теореме 2, они параллельны, то есть не имеют общих точек. Это противоречие и доказывает утверждение. ■

Аналогичное обобщение имеет и результат задачи 2 предыдущего параграфа.

Теорема 6 *(о плоскости, перпендикулярной данной прямой).*

Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и к тому же только одна.

□ Существование такой плоскости обосновано в решении задачи 3 предыдущего параграфа. Осталось доказать единственность плоскости, удовлетворяющей условиям теоремы. Как обычно в таких случаях, допустим противное, а именно: через данную точку *A* проходят две различные плоскости α_1 и α_2, перпендикулярные прямой *a* (рис. 319). По теореме 4, они параллельны. Но эти плоскости имеют общую точку *A*. Полученное противоречие и доказывает утверждение. ■

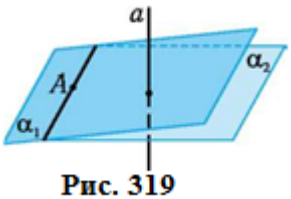


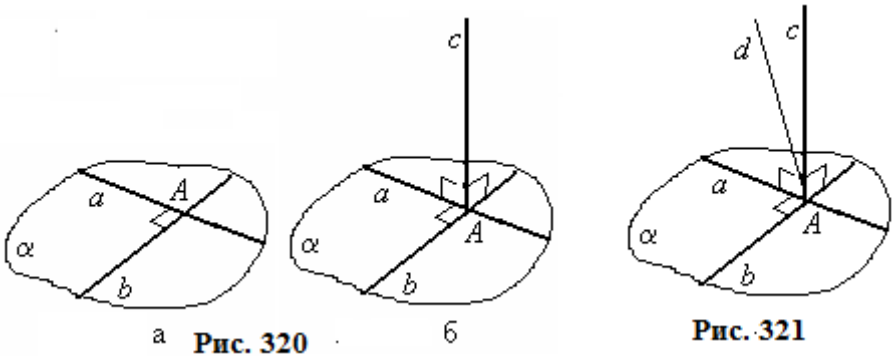
Рис. 319

На плоскости через каждую точку проходят две перпендикулярные прямые, а третью прямую, перпендикулярную им, провести нельзя. В пространстве это не так. И в этом заключается главное отличие пространства от плоскости: в пространстве — три измерения, на плоскости — два. Обоснуем это отличие рассмотрением следующей задачи.

Задача 2. Сколько попарно перпендикулярных прямых можно провести через точку пространства?

□ Очевидно, что две можно провести, поскольку точка пространства может рассматриваться как точка некоторой плоскости (и таких плоскостей бесконечное множество!). То, что можно провести три попарно перпендикулярные прямые через данную точку пространства, доказать нетрудно. Перпендикулярные прямые *a* и *b*, проходящие через точку *A*, определяют некоторую плоскость α (рис. 320 а). Через точку *A* проведем прямую *c*, перпендикулярную плоскости α (задача 1). По определению, прямая *c* перпендикулярна прямым *a* и *b*, которые лежат в этой плоскости. Имеем три прямые *a*, *b* и *c*, попарно перпендикулярные (рис. 320 б).

А вот четырех таких прямых не существует. Если бы была еще и четвертая прямая *d*, то она была бы перпендикулярна прямой *a* и прямой *b* и проходила бы через точку их пересечения *A*. Но тогда бы суще-



а Рис. 320 б Рис. 321

ствовали две прямые c и d, проходящие через точку A и перпендикулярные плоскости α, которую определяют прямые a и b (рис. 321). А это противоречит теореме 5 о прямой, перпендикулярной данной плоскости. ■

Пример 2. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная плоскости квадрата, и на ней взята точка S. Построить:

1) прямую, проходящую через центр O квадрата перпендикулярно его плоскости;

2) плоскость, проходящую через середину P отрезка AS перпендикулярно ему;

3) плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно прямой BD;

4) прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости SBD.

 1) По условию, прямая AS перпендикулярна плоскости квадрата (рис. 322, а). Любая другая прямая, перпендикулярная этой плоскости, будет параллельна прямой AS по теореме 2, то есть параллельность прямой AS является необходимым условием перпендикулярности искомой прямой плоскости. Это является и достаточным условием по теореме 1.

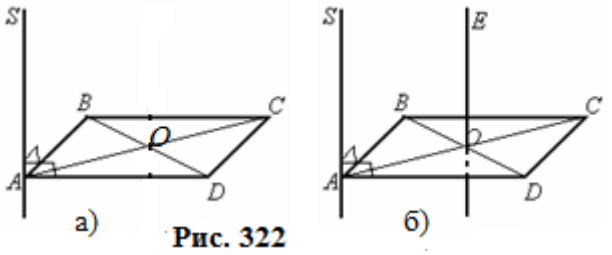


Рис. 322

Построение. Через точку O проводим прямую OE параллельно прямой AS (рис. 322, б). Прямая OE перпендикулярна плоскости квадрата по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.

2) По условию, прямая AS перпендикулярна плоскости $ABCD$ (рис. 323, а). Любая иная плоскость, перпендикулярная прямой AS, будет параллельной плоскости $ABCD$, по теореме 4. Параллельность искомой плоскости плоскости $ABCD$ является по теореме 3 и достаточным условием.

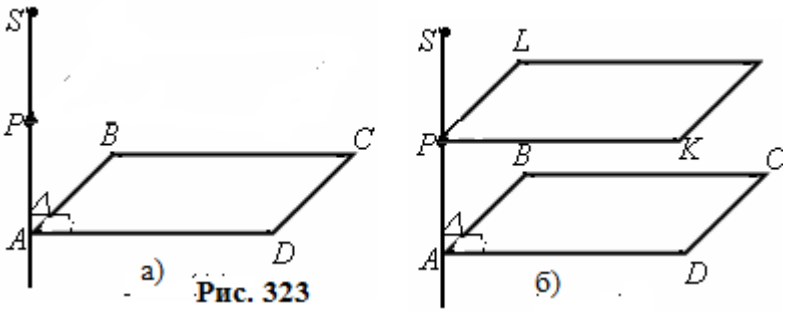


Рис. 323

Построение. Проведем через точку P плоскость, параллельную плоскости $ABCD$. Для этого через точку P проведем прямые PK и PL, параллельные прямым AD и BD соответственно (рис. 323, б). Плоскость PKL параллельна плоскости $ABCD$, по признаку параллельности плоскостей, а потому является искомой.

3) Диагонали квадрата перпендикулярны, то есть $BO \perp AO$ (см. рис. 324, а). Поэтому прямая AO лежит в искомой плоскости. Если через точку O провести еще одну прямую OE, перпендикулярную BO, то прямая BO будет перпендикулярной плоскости AOE, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 §14). Эта плоскость содержит точку A.

Построение. Проведем через точку *O* прямую *OE,* параллельную прямой *AS*. Она будет перпендикулярной плоскости *ABCD* (рис. 324, б). Прямая *OE* перпендикулярна прямой *BO*, по определению перпендикулярности прямой и плоскости. Плоскость *AOE* является искомой.

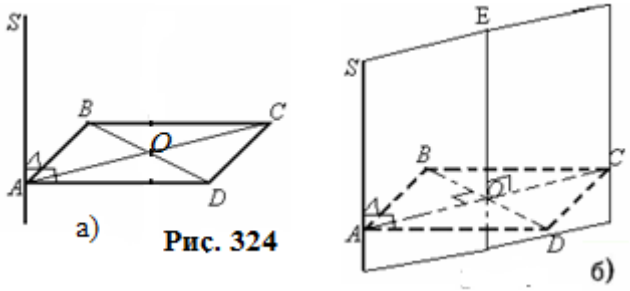


Рис. 324

4) Рассмотрим треугольники *ABD* и *SBD* (рис. 325, а). Они равнобедренные, так как *AD* = *AB*, по условию, а равенство *SB* = *SD* вытекает из равенства прямоугольных треугольников *ASD* и *ASB*. Их медианы *SO* и *AO* являются высотами, а потому прямая *BD* перпендикулярна плоскости *AOS*, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1). В прямоугольном треугольнике *AOS* из вершины прямого угла *A* проведем высоту *AE* (рис. 325, б). Прямая *AE* является искомой. Действительно, проведем в плоскости *SBD* через точку *E* прямую *EF* параллельно прямой *BD*. Эта прямая будет перпендикулярной плоскости *AOS*, по теореме 1. А это означает, что она перпендикулярна прямой *AE*. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 14), прямая *AE* перпендикулярна плоскости *SBD*. ■

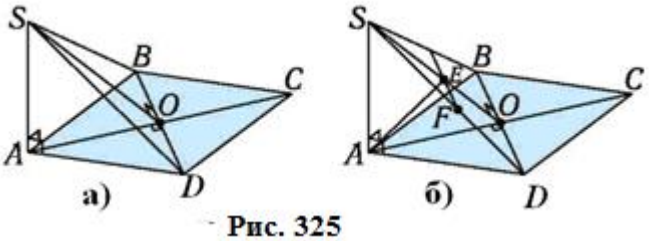


Рис. 325

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли только одна сторона параллелограмма быть перпендикулярной данной плоскости?

2. Верно ли, что три прямые, перпендикулярные данной плоскости, лежат в одной плоскости, если их точки пересечения с плоскостью лежат на одной прямой?

3. Можно ли провести плоскость, перпендикулярную одновременно двум скрещивающимся прямым?

4. Верно ли, что средняя линия трапеции перпендикулярна некоторой плоскости, если одно из оснований трапеции перпендикулярно этой плоскости?

5. Почему ледовые сосульки, которые свисают с крыши весной, можно считать параллельными между собой (пренебрегая их толщиной)?

6. Одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости α, а другая пересекает плоскость β, причем не перпендикулярна ей. Могут ли быть параллельными плоскости α и β?

7. Два прямоугольника имеют общую сторону и лежат в разных плоскостях. Верно ли, что вершины прямоугольников, не лежащие на общей стороне, являются вершинами прямоугольника?

8. Перпендикулярны ли две пересекающиеся прямые, если одна из них перпендикулярна некоторой плоскости, а другая ей параллельна?

9. Известно, что прямая a перпендикулярна прямой b, которая, в свою очередь, перпендикулярна плоскости. Верно ли, что прямая a параллельна этой плоскости?

10. Каждое ли сечение куба плоскостью, проходящей через четыре его вершины, является прямоугольником?

11*. Каждое ли сечение куба, являющееся квадратом, образовано плоскостью, перпендикулярной ребру куба?

Графические упражнения

Постройте рисунок по приведенным данным.

1. Плоскость, проходящая через ребро основания AB правильного тетраэдра $SABC$, перпендикулярна боковому ребру SC.

2. Через точку M, лежащую на диагонали основания AC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, проходит плоскость, перпендикулярная AC.

3. Плоскость, проходящая через ребро CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, перпендикулярна AC.

4. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, O — центр ее основания. Плоскость α проходит через вершину S перпендикулярно SO.

5. Плоскость α проходит через перпендикуляр AK к плоскости равностороннего треугольника ABC перпендикулярно прямой BC.

Продолжим разговор об изучении сечений, а тем самым и об изучении свойств соответствующих геометрических фигур.

Среди сечений часто выделяют те, которые связаны с перпендикулярностью прямых и плоскостей. Например, фиксируется определенная прямая и рассматриваются сечения геометрической фигуры плоскостями, перпендикулярными этой прямой. Это, в частности, происходит при нахождении объемов, когда тело разбивается на однотипные или удобные по каким-то причинам части, вычисляется точно или приближенно объем отдельных частей, а затем результаты подытоживаются.

Да и в быту, технике, строительстве используются сечения, перпендикулярные определенным прямым (сечение деревянного бруса чаще всего делают перпендикулярным его ребру, сечения колоды — перпендикулярными ее оси, да и буханку хлеба мы режем перпендикулярно его ребру.

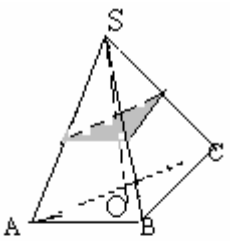


Рис. 326

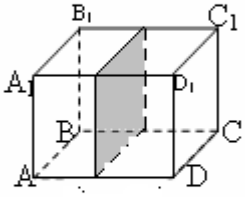


Рис. 327

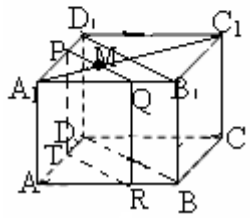


Рис. 328

Обратимся к сечениям простейших фигур. Если $SABC$ — правильная треугольная пирамида, то нетрудно показать, что отрезок SO, соединяющий вершину S с центром O основания ABC перпендикулярен основанию. Сечения пирамиды, перпендикулярные SO, параллельны основанию и подобны ему, то есть являются правильными треугольниками (рис. 326). Предлагаем доказать это самостоятельно.

Очевидно, что сечения куба, перпендикулярные ребру, являются квадратами, равными граням куба (рис. 327).

Обратимся к другим сечениям куба.

Пример 3. Построить сечение куба с ребром a плоскостью, проходящей через точку M диагонали грани перпендикулярно этой диагонали. Найти зависимость площади сечения от расстояния точки M до концов диагонали.

□ Пусть M — точка диагонали A_1C_1 грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 328). Поскольку плоскость D_1B_1B перпендикулярна прямой A_1C_1 (почему?), то секущая плоскость параллельна этой плоскости. Отсюда вытекает, что стороны четырехугольника $PQRT$, являющегося сечением, параллельны сторонам прямоугольника DD_1B_1B. Поэтому сечение также является прямоугольником.

Обозначим через x длину отрезка A_1M, тогда $PQ = 2x$, если точка M принадлежит отрезку A_1O_1 (рис. 329), и площадь сечения S можно записать в виде $S = 2ax$. Если же точка M принадлежит отрезку O_1C_1, то $PQ = 2\left(a\sqrt{2} - x\right)$, $S = 2a\left(a\sqrt{2} - x\right)$. ■

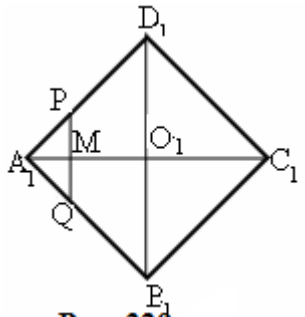


Рис. 329

Пример 4. Выяснить, какой формы могут быть сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, проходящими через точки диагонали A_1C перпендикулярно ей.

□ Понятно, что равносторонний треугольник AB_1D_1 является сечением куба, пересекающим диагональ A_1C в некоторой точке K (рис. 330). В силу симметричности конструкции возникает предположение, что $A_1C \perp AB_1D_1$. Поскольку точка K принадлежит A_1C, то она принадлежит и прямоугольнику AA_1C_1C, то есть точка K принадлежит линии пересечения плоскостей AB_1D_1 и AA_1C_1, проходящей через медиану AO_1 (и высоту) равностороннего треугольника AB_1D_1, где O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Покажем, что $O_1A \perp A_1C$. Обратимся к пря-

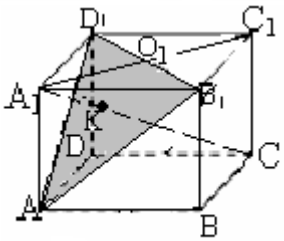


Рис. 330

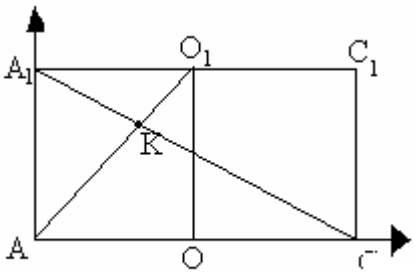


Рис. 331

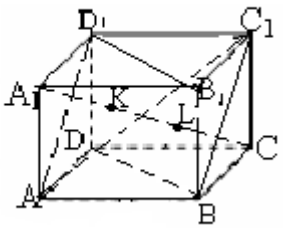


Рис. 332

моугольнику AA_1C_1C (рис. 331). Если ребро куба считать равным 1, то $A_1C_1=\sqrt{2}$, $A_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, и в прямоугольной системе координат с осями AC и AA_1 точки A, C, A_1, C_1 имеют такие координаты: $A(0;0)$, $C(\sqrt{2};0)$, $A_1(0;1)$, $O_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$. Поэтому $\overrightarrow{AO_1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$, $\overrightarrow{CA_1}(-\sqrt{2};1)$. Поскольку $\overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0$, то $O_1A\perp A_1C$. Аналогично имеем, что диагональ A_1C перпендикулярна другим медианам треугольника AB_1D_1, поэтому $A_1C\perp AB_1D_1$.

Если теперь рассмотреть сечения куба, перпендикулярные A_1C и проходящие через точки отрезка A_1K (не считая точку A_1), то, очевидно, что они являются равносторонними треугольниками. То же самое имеем для сечений, проходящих через точки отрезка LC (не считая точку C), где L — точка пересечения диагонали A_1C с плоскостью DBC_1 (рис. 332).

А что же имеем для сечений, проходящих через внутренние точки отрезка KL? Плоскости сечений пересекают все 6 граней куба по отрезкам, причем, отрезки, лежащие в параллельных гранях, параллельны между собой. Следовательно, сечение имеет вид шестиугольника, изображенного на рис. 333.

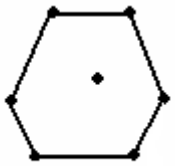


Рис. 333

Более детальное рассмотрение таких сечений оставляем для самостоятельной работы. ■

Задачи на исследование

1. Докажите, что прямая A_1C, проходящая через диагональ куба, является осью поворотной симметрии. Найдите порядок этой оси.

Указание. Воспользуйтесь решением примера 4.

2. Исследуйте зависимость формы и площади сечения куба со стороной a плоскостью, перпендикулярной диагонали куба, от расстояния до одного из концов диагонали.

Указания. 1) Постройте несколько сечений указанными плоскостями аналогично тому, как это было сделано во время решения примера 4.

2) Воспользуйтесь тем, что плоскость, проходящая через три вершины куба, соседние с концом диагонали, перпендикулярна этой диагонали.

3) Найдите расстояние от конца диагонали до точки пересечения с плоскостью, указанной в предыдущем пункте плана.

4) Исследуйте форму сечения куба, если секущая плоскость пересекает все грани куба.

5) Обратите внимание на то, как изменяется площадь сечения при приближении плоскости сечения к середине диагонали.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через внутреннюю точку M диагонали BD_1 проведено сечение, перпендикулярное этой диагонали; ребро куба равняется a. Найдите зависимость суммы внутренних углов сечения от x, где $x = MB$.

Контрольные вопросы

1. Может ли быть перпендикулярным данной плоскости только одно ребро куба?

2. Верно ли, что все прямые, перпендикулярные данной плоскости, лежат в одной плоскости, если точки их пересечения с плоскостью лежат на прямой?

3. На чем основывается метод проверки вертикальности столба с помощью отвеса?

4. Как расположен канат в спортивном зале относительно потолка? А относительно пола?

5. На потолке закреплен крюк. С помощью канатов необходимо подвесить к нему платформу так, чтобы ее плоскость была горизонтальной. Как это сделать?

6. Может ли ребро тетраэдра быть перпендикулярным одной из его граней?

7. Может ли диагональ параллелепипеда быть перпендикулярной некоторой его грани?

8. Можно ли через данную точку пространства провести три взаимно перпендикулярные прямые? А четыре?

9. Какую форму может иметь сечение куба плоскостью:

1) параллельной ребру; 2) перпендикулярной ребру?

10. Сколько разных плоскостей определяют четыре прямые, перпендикулярные одной плоскости?

11. Всегда ли можно провести через одну из скрещивающихся прямых плоскость, перпендикулярную другой прямой?

12. Верно ли, что сечение куба плоскостью, проходящей через прямую, перпендикулярную его грани, является прямоугольником?

13. Одинаковую ли форму имеют сечения куба, перпендикулярные его диагонали?

Задачи

295. Из вершины прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная плоскости этого треугольника, и на ней взята точка S. Постройте:

1°) плоскость, проходящую через точку S перпендикулярно прямой AB;

2°) прямую, проходящую через середину отрезка AS перпендикулярно плоскости ABC;

3°) плоскость, проходящую через точку A параллельно плоскости BCS;

4) прямую, проходящую через точку C перпендикулярно плоскости ABS, если $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}CS$.

296. Из середины K гипотенузы BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная плоскости этого треугольника, и на ней взята точка M. Постройте:

1°) плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно прямой AC;
2°) прямую, проходящую через середину отрезка AM перпендикулярно плоскости ABC;
3°) плоскость, проходящую через точку A параллельно плоскости BCM;
4) плоскость, проходящую через точку K перпендикулярно прямой AM, если $MK = CK$.

297. Из центра O правильного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника, и на ней взята точка S. Постройте:
1°) плоскость, проходящую через точку O перпендикулярно прямой BC;
2°) прямую, проходящую через середину отрезка AS перпендикулярно плоскости ABC;
3) плоскость, проходящую через середину отрезка AS перпендикулярно прямой OS;
4*) прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости BCS.

298. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте:
1°) прямую, проходящую через центр грани $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно противоположной грани;
2°) плоскость, проходящую через вершину A перпендикулярно диагонали BD;
3) прямую, проходящую через центр грани AA_1B_1B перпендикулярно плоскости BDD_1.
4*) плоскость, проходящую через точку D перпендикулярно прямой BD_1.

299. В тетраэдре $SABC$ все грани — правильные треугольники, точка O — центр основания ABC, D — середина ребра BC, точка N принадлежит боковому ребру SA.
1°) Определите взаимное расположение прямой SO и плоскости ABC.
2°) Определите взаимное расположение прямой BC и плоскости ASD.
3) Проведите через точку N прямую, перпендикулярную основанию.
4*) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку N перпендикулярно прямой OS.

300. В правильном тетраэдре $PABC$ точка O — центр грани ABC, точка K — середина ребра PA. Изобразите прямые, проведенные перпендикулярно:
1)° из точки P к плоскости ABC;
2)° из точки K к плоскости ABC;
3) из точки O к плоскости APC;
4) из точки A к плоскости, проходящей через вершину P параллельно грани ABC;
5*) из точки O к плоскости BKC.

301°. Два электрических провода необходимо протянуть от столба высотой 7 м к зданию высотой 4 м. Сколько нужно иметь провода, если расстояние от здания до столба равно 10 м и на провисание провода нужно добавить 3% от расчетной длины?

302. Сторожевая башня для охраны участка прямоугольной формы установлена в одной из вершин прямоугольника. Расстояния от наблюдателя, который стоит на башне, до остальных вершин прямоугольника равны a, b, c, причем $a > b > c$. Чему равняется высота башни?

303. Три параллельные прямые a, b, c не лежат в одной плоскости. Через точку M, лежащую на прямой a, проведены перпендикуляры к прямым b и c, пересекающие их, соответственно, в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямым b и c.

304. Через точку O, находящейся на высоте CD треугольника ABC, проведен перпендикуляр OM к его плоскости. Докажите, что плоскость, проходящая через прямые CD и OM, перпендикулярна прямой AB.

305*. Даны плоскость α и прямая a, пересекающая плоскость в точке M и не перпендикулярная α. Докажите, что в плоскости α через точку M проходит прямая, перпендикулярная прямой a, и к тому же лишь одна.

306. На прямой, перпендикулярной плоскости α, взяты две точки A и B, не лежащие в плоскости α, а в плоскости α взяты две точки X и Y. Известно, что $XA > XB$. Сравните отрезки YA и $YБ$.

307*. Через вершину A произвольного тетраэдра $ABCD$ проведены три плоскости, перпендикулярные ребрам BC, CD, BD. Докажите, что все эти плоскости пересекаются по одной прямой.

308*. Точки A и B расположены вне некоторой плоскости. Найдите на этой плоскости такую точку M, чтобы:

1) сумма расстояний AM и MB была наименьшей;

2) модуль разности расстояний AM и MB был наибольшим.

Упражнения для повторения

309. Докажите, что все прямые плоскости, перпендикулярные данной прямой плоскости, образуют эту плоскость.

310. Как разделить отрезок пополам, пользуясь лишь шаблоном:

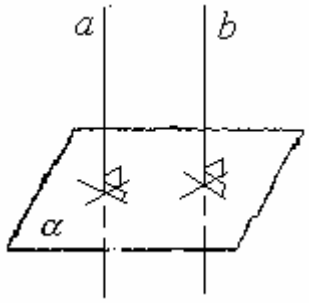
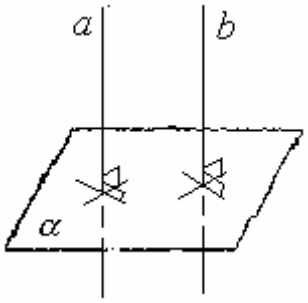
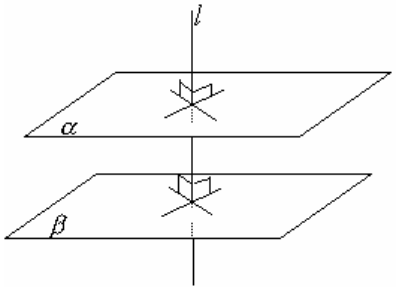
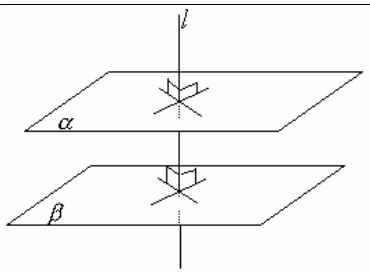
а) прямого угла;

б) острого угла?

311. Стороны параллелограмма равны 2 м и 16 дм; расстояние между большими сторонами — 8 дм. Определите расстояние между меньшими сторонами.

312. Докажите, что через точку плоскости нельзя в этой плоскости провести три попарноперпендикулярные прямые.

Итог
Основные утверждения

Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.	Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.	 $a \parallel b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$
Теорема о параллельности прямых, перпендикулярных плоскости.	Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.	 $\perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$
Теорема о параллельных плоскостях, одна из которых перпендикулярна прямой.	Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то и вторая плоскость перпендикулярна этой прямой.	 $\alpha \parallel \beta, \alpha \perp l \Rightarrow \beta \perp l$
Теорема о двух плоскостях, перпендикулярных прямой.	Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.	 $\alpha \perp l, \beta \perp l \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

§ 16. Перпендикулярность плоскостей

Рассматривается отношение перпендикулярности плоскостей — одно из важнейших и наиболее используемых в геометрии пространства и ее приложениях.

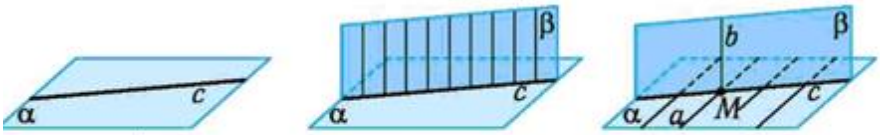
Из всего разнообразия взаимных расположений двух плоскостей особого внимания и изучения заслуживают то, при котором плоскости перпендикулярны друг другу (например, смежные стены комнаты, забор и участок земли, двери и пол и т. п.) (рис. 334, а-в).

а) б) в)

Рис. 334

Приведенные примеры позволяют увидеть одно из основных свойств отношения, которое мы будем изучать, — симметричность расположения каждой из плоскостей относительно к другой. Симметрия обеспечивается тем, что плоскости вроде бы «сотканы» из перпендикуляров. Попробуем уточнить эти наблюдения.

Пусть имеем плоскость α и прямую *c* на ней (рис. 335, а). Проведем через каждую точку прямой *c* прямые, перпендикулярные плоскости α. Все эти прямые параллельны между собой (почему?) и образуют, на основании задачи 1 § 14?, некоторую плоскость β (рис. 335, б). Естественно назвать плоскость β ***перпендикулярной*** плоскости α.



а) б) в)

Рис. 335

В свою очередь, все прямые, лежащие в плоскости α и перпендикулярные прямой *c,* образуют плоскость α и перпендикулярны плоскости β (рис. 335, в).

Действительно, если a — произвольная такая прямая, то она пересекает прямую *c* в некоторой точке *M*. Через точку *M* проходит в плоскости β перпендикулярная α прямая *b*, поэтому $b \perp a$. Следовательно, $a \perp c$, $a \perp b$, поэтому $a \perp \beta$. Выходит, что плоскость α перпендикулярна плоскости β, а прямая *c* является линией их пересечения.

Две плоскости называются перпендикулярными, если каждая из них образована прямыми, перпендикулярными второй плоскости и проходящими через точки пересечения этих плоскостей.

Перпендикулярность плоскостей α и β обозначается привычным уже знаком $\alpha \perp \beta$. Это обозначение для плоскостей использовалось выше.

Одну из иллюстраций этого определения можно представить, если рассмотреть фрагмент комнаты дачного дома (рис. 336). На нем пол и стена сложены из досок, перпендикулярных стене и полу. Поэтому они перпендикулярны. На практике это означает, что пол горизонтален, а стена вертикальна.

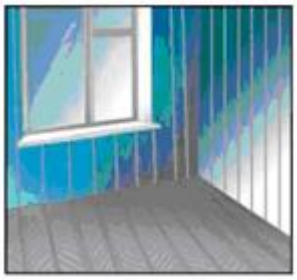


Рис. 336

Приведенное определение трудно использовать при фактической проверке перпендикулярности плоскостей. Но если внимательно проанализировать рассуждения, которые привели к этому определению, то видим, что перпендикулярность плоскостей α и β обеспечило наличие в плоскости β прямой *b*, перпендикулярной плоскости α (рис. 335, в). Мы пришли к признаку перпендикулярности двух плоскостей, который чаще всего применяется на практике.

Теорема 1 *(признак перпендикулярности плоскостей).*

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную второй плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

□ Пусть плоскость β проходит через прямую *b*, перпендикулярную плоскости α и *c* — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 337, а). Все прямые плоскости β, параллельные прямой *b* и пересекающие прямую *c* вместе с прямой *b*, образуют плоскость β. По теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярная плоскости (теорема 1 § 15), все они вместе с прямой *b* перпендикулярны плоскости α. То есть плоскость β состоит из прямых, проходящих через линию пересечения плоскостей α и β и перпендикулярных плоскости α (рис. 337, б).

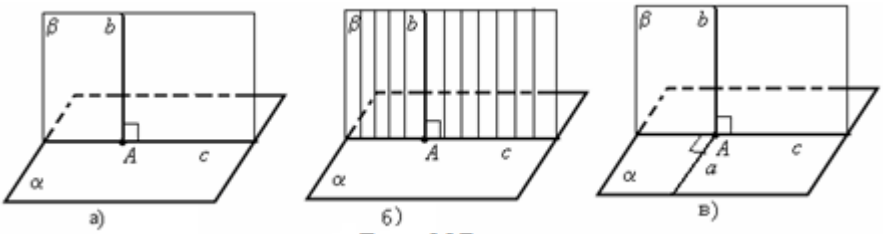


Рис. 337

Теперь в плоскости α через точку *A* пересечения прямых *b* и *c* проведем прямую *a*, перпендикулярную прямой *c* (рис. 337, в). Прямая *a* перпендикулярна плоскости β, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости ($a \perp c$, по построению, $a \perp b$, так как $b \perp \alpha$). Повторив предыдущие рассуждения, получим, что плоскость α состоит из прямых, перпендикулярных плоскости β, проходящих через линию пересечения плоскостей. Согласно определению, плоскости α и β перпендикулярны. ■

Приведенный признак дает возможность устанавливать перпендикулярность плоскостей или же обеспечивать ее.

Пример 1. Прикрепить щит к столбу так, чтобы он был расположен вертикально.

 Если столб стоит вертикально, то достаточно произвольно приложить щит к столбу и закрепить его (рис. 338, а). Согласно рассмотренному выше признаку, плоскость щита будет перпендикулярной поверхности земли. В этом случае задача имеет бесконечное множество решений.

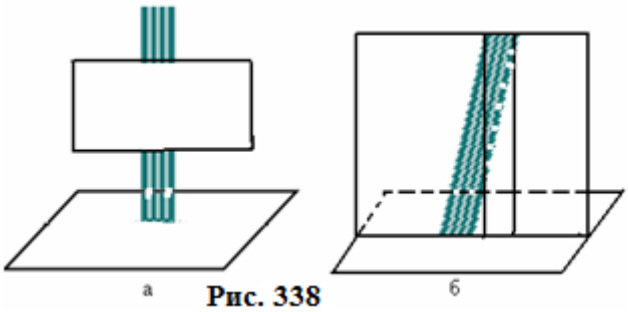


Рис. 338

Если же столб стоит наклонно к земле, то достаточно к столбу прикрепить вертикальную рейку (рис. 338, б), а затем щит прикрепить и к рейке, и к столбу. В этом случае положение щита будет вполне определённым, поскольку столб и вертикаль определяют единственную плоскость. ■

В предыдущем примере «техническое» задание свелось к математической задаче о проведении через данную прямую плоскости, перпендикулярной другой плоскости.

Пример 2. Из вершины *A* квадрата *ABCD* проведен перпендикулярный его плоскости отрезок *AK*, *AB* = *AK* = *a*.

1) Определить взаимное расположение плоскостей *AKC* и *ABD*, *AKD* и *ABK*.

2) Построить плоскость, проходящую через прямую *BD* перпендикулярно плоскости *ABC*.

3) Провести через середину *F* отрезка *KC* плоскость, перпендикулярную плоскости *KAC*.

4) Найти площадь треугольника *BDF*.

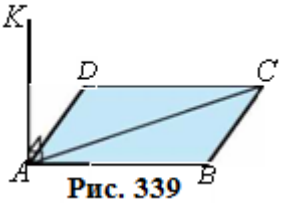


Рис. 339

 Построим рисунок, соответствующий условию примера (рис. 339).

1) Плоскости *AKC* и *ABD* перпендикулярны, по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1): *AK* ⊥ *ABD*, по условию. Плоскости *AKD* и *ABK* также перпендикулярны, по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1). Действительно, прямая *AB*, через которую проходит плоскость *ABK*, перпендикулярна плоскости *AKD*, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 14): *AB* ⊥ *AD*, как смежные стороны квадрата; *AB* ⊥ *AK*, так как *AK* ⊥ *ABD*.

2) По признаку перпендикулярности плоскостей, для искомого построения достаточно через некоторую точку прямой *BD* провести прямую, перпендикулярную плоскости *ABC*. А для этого достаточно через эту точку провести прямую, параллельную прямой *AK*. Действительно, по условию, прямая *AK* перпендикулярна плоскости *ABC* и потому, согласно теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1 § 15), построенная прямая будет перпендикулярной плоскости *ABC*.

Построение. Через точку *B* проводим прямую *BE*, параллельную прямой *AK* (рис. 340). Плоскость *BDE* – искомая.

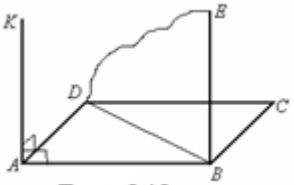


Рис. 340

3) Пусть F — середина отрезка KC. Проведем через точку F прямую, перпендикулярную плоскости ABC. Этой прямой будет прямая FO, где O — центр квадрата $ABCD$ (рис. 341). Действительно, $FO \parallel AK$, как средняя линия треугольника AKC. Поскольку прямая AK перпендикулярна плоскости ABC, то и прямая FO будет ей перпендикулярна, по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1 § 15). Поэтому $FO \perp DB$. А поскольку $AC \perp DB$, то $DB \perp AOF$ (или KAC). Плоскость BDF проходит через перпендикулярную прямую к плоскости KAC, то есть она является искомой.

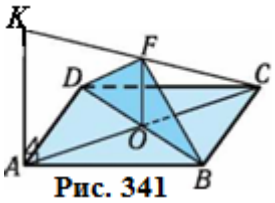


Рис. 341

4) В треугольнике BDF отрезок FO — высота, проведенная к стороне BD (см. рис. 341). Имеем: $BD = \sqrt{2}a$, как диагональ квадрата; $FO = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}a$, по свойству средней линии треугольника. Таким образом, $S = \frac{1}{2}BD \cdot FO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sqrt{2}}a^2$. ■

Ответ: 4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}a^2$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Верно ли, что произвольная прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна другой плоскости?
2. Две плоскости перпендикулярны. Можно ли через произвольную точку одной из них провести прямую в этой плоскости, перпендикулярную второй плоскости?
3. В плоскости α нельзя провести прямую, перпендикулярную плоскости β. Могут ли эти плоскости быть перпендикулярными?
4. Как могут быть расположены две прямые, лежащие в перпендикулярных плоскостях?
5. Через некоторую точку плоскости α проходит прямая, которая лежит в этой плоскости и перпендикулярна плоскости β. Верно ли, что плоскости α и β перпендикулярны?
6. Боковое ребро параллелепипеда перпендикулярно его основанию. Верно ли, что плоскости боковых граней параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания?
7. Верно ли, что плоскости двух боковых граней пирамиды перпендикулярны плоскости основания, если одно из боковых ребер ее перпендикулярно этой плоскости?
8. Секция забора прикреплена к вертикальному столбу. Можно ли утверждать, что плоскость забора вертикальна?
9. Как к рельсу, параллельному земле, прикрепить вертикально щит?
10. Всегда ли можно построить плоскость, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной плоскости?

Упражнения на рисунках:

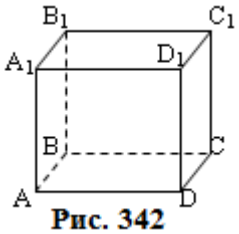


Рис. 342

1. На рис. 342 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1) Укажите плоскости, перпендикулярные плоскости BDD_1?
2) Как расположены плоскости A_1B_1C и AD_1C_1?

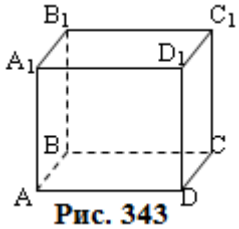


Рис. 343

2. На рис. 343 изображен четырехугольник *ABCD* — квадрат, прямая *MD* перпендикулярна плоскости *ABCD*. Какие из пар плоскостей не перпендикулярны:
1) *MAD* и *MDC*; 2) *MBД* и *MAB*;
3) *ABC* и *MDC*; 4) *MAD* и *MAB*?

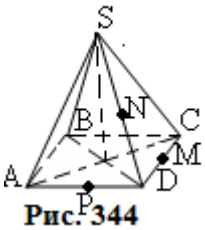


Рис. 344

3. На рис. 344 изображена правильная четырехугольная пирамида *SABCD*, точки *P*, *M*, *N* — середины ребер *AB*, *BC*, *BS*, *O* — центр основания *ABCD*. Какие из пар плоскостей являются перпендикулярными:
1) *ACS* и *BDS*; 2) *MOS* и *POS*; 3) *COS* и *MNP*;
4) *MNP* и *SOB*; 5) *CND* и *ABS*?

Рис. 345

4. На рис. 345 изображен прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C* и прямая *BP*, перпендикулярная плоскости *ABC*. Какие из следующих пар плоскостей являются перпендикулярными:
1) *CBP* и *ABC*; 2) *ABP* и *ABC*;
3) *PAC* и *PBC*; 4) *PAC* и *PAB*?

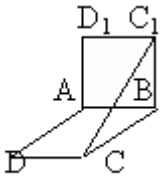


Рис. 346

5. На рис. 346 плоскости квадратов *ABCD* и ABC_1D_1 перпендикулярны. Расстояние CC_1 равняется *b*. Найдите длину отрезка: 1) *AB*; 2) D_1C; 3) D_1D; 4) C_1D.

Исследование свойств отношения перпендикулярности плоскостей и его применений начнем с простой, но очень полезной теоремы.

Теорема 2 *(о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей).*

Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, принадлежащая одной плоскости и перпендикулярная линии пересечения этих плоскостей, перпендикулярна второй плоскости.

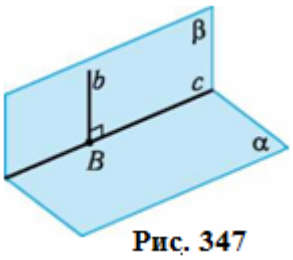


Рис. 347

□ Пусть перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой *c*, а прямая *b* в плоскости β перпендикулярна прямой *c* и пересекает ее в точке *B* (рис. 347). По определению перпендикулярности плоскостей, в плоскости β через точку *B* проходит прямая b_1, перпендику-

лярная плоскости α. Понятно, что она перпендикулярна прямой c. Но через точку прямой в плоскости можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной прямой. Поэтому прямые b и b_1 совпадают. А это значит, что прямая одной плоскости, перпендикулярная линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна второй плоскости. ■

Приведенная теорема часто применяется для построения прямой, перпендикулярной некоторой плоскости. Алгоритм построения может быть таким:

1) через заданную точку проводим плоскость, перпендикулярную данной плоскости;

2) находим линию пересечения данной и построенной плоскостей;

3) строим прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную линии пересечения плоскостей.

Применим рассмотренную теорему к обоснованию еще одного признака перпендикулярности плоскостей, важного с точки зрения последующего изучения взаимного расположения двух плоскостей.

Пусть плоскости α и β перпендикулярны, прямая c — линия их пересечения. Через произвольную точку A прямой c проведем в плоскостях α и β прямые a *и* b, перпендикулярные прямой c (рис. 348). По теореме 2, прямые a *и* b перпендикулярны соответственно плоскостям β и α, потому они перпендикулярны между собой: $a \perp b$. Прямые a и b определяют некоторую плоскость γ. Линия пересечения c плоскостей α и β перпендикулярна плоскости γ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 14): $c \perp a$, $c \perp b$, $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$. Если учесть произвольность выбора точки A на прямой c, то можно сделать следующий вывод

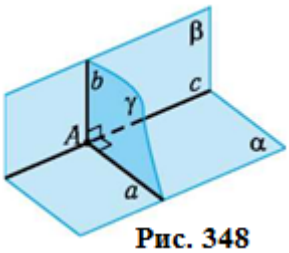


Рис. 348

Теорема 3 *(о плоскости, перпендикулярной линии пересечения перпендикулярных плоскостей).*

Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым.

Таким образом, установлено еще одно свойство перпендикулярных плоскостей. Это свойство является характеристическим, то есть если оно справедливо для некоторых двух плоскостей, то плоскости перпендикулярны между собой. Имеем еще один признак перпендикулярности плоскостей.

Теорема 4 *(второй признак перпендикулярности плоскостей).*

Если прямые пересечения двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения, перпендикулярны, то данные плоскости тоже перпендикулярны.

□ Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой *c*, и плоскость γ, перпендикулярная прямой *c*, пересекает плоскости α и β соответственно по прямым *a* и *b* (рис. 349). По условию, $a \perp b$. Поскольку $\gamma \perp c$, то $a \perp c$. А поэтому прямая *a* перпендикулярна плоскости β, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 14). Отсюда вытекает, что плоскости α и β перпендикулярны, по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1). ■

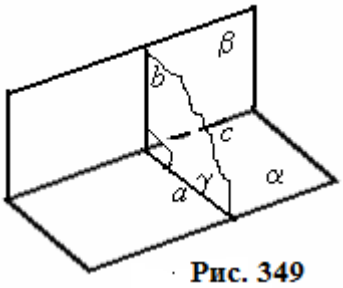


Рис. 349

Заслуживают внимания и теоремы о связях перпендикулярности двух плоскостей третьей плоскости с их взаимным расположением.

Теорема 5 *(о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости).*

Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то линия их пересечения перпендикулярна этой плоскости.

□ Пусть плоскости α и β, перпендикулярные плоскости γ, пересекаются по прямой *a*, и *A* — точка пересечения прямой *a* с плоскостью γ (рис. 350). Точка *A* принадлежит линиям пересечения плоскостей γ и α, γ и β, а, по условию, $\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$. Поэтому, по определению перпендикулярности плоскостей, через точку *A* можно провести прямые, лежащие в плоскостях α и β и перпендикулярные плоскости γ. Поскольку через точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную плоскости, то построенные прямые совпадают и совпадают с линией пересечения плоскостей α и β. Таким образом, прямая *a* — линия пересечения плоскостей α и β — перпендикулярна плоскости γ. ■

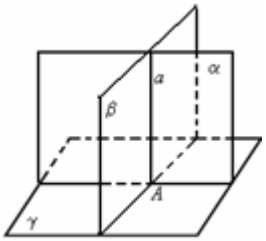


Рис. 350

Рассмотрим теорему, описывающую связь между параллельностью и перпендикулярностью плоскостей. Соответствующий результат мы уже имели для прямых и плоскостей.

Теорема 6 *(о параллельных плоскостях, перпендикулярных третьей плоскости).*

Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна третьей, то и вторая плоскость перпендикулярна ей.

□ Пусть плоскости α и β параллельны, а плоскость γ перпендикулярна плоскости α. Поскольку плоскость γ пересекает плоскость α, то она должна пересекать и параллельную ей плоскость β. Возьмем в плоскости α произвольную прямую *m*, перпендикулярную плоскости γ, и проведем через нее, а также через произвольную точку плоскости β, плоскость δ (рис. 351). Плоскости δ и β пересекаются по прямой *n*, а поскольку $\alpha \parallel \beta$, то $m \parallel n$ (теорема 2 § 13). Из теоремы 1 вытекает, что $n \perp \gamma$, а потому перпендикулярной плоскости γ будет и плоскость β,проходящая через прямую *n*. ■

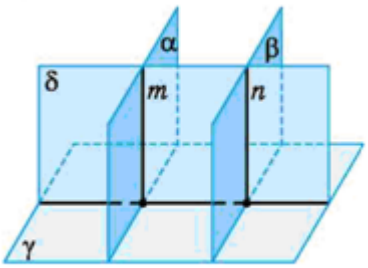


Рис. 351

Доказанная теорема дает еще один признак перпендикулярности плоскостей.

Далее рассмотрим ряд задач на построение перпендикулярных плоскостей. Через заданную точку провести плоскость, перпендикулярную данной, можно с помощью признака перпендикулярности плоскостей (теорема 1). Достаточно через эту точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости (см. задачу 1 § 15. А затем через построенную прямую провести плоскость. Она будет перпендикулярной данной плоскости по указанному признаку. Понятно, что таких плоскостей можно провести бесконечное множество.

Более содержательной является задача о построении плоскости, перпендикулярной данной, при условии, что она проходит через данную прямую. Понятно, что если дана прямая, перпендикулярная данной плоскости, то таких плоскостей можно построить бесконечное множество. Осталось рассмотреть случай, когда данная прямая не перпендикулярна данной плоскости. Возможность такого построения обоснована на уровне физических моделей прямых и плоскостей в примере 1.

Задача 1. Доказать, что через произвольную прямую, не перпендикулярную плоскости, можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

 Пусть даны плоскость α и прямая l. Возьмём на прямой l произвольную точку M и проведем через нее прямую m, перпендикулярную плоскости α (рис. 352, а). Поскольку, по условию, l не перпендикулярна α, то прямые l и m пересекаются. Через эти прямые можно провести плоскость β (рис. 352, б), которая, согласно признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1), будет перпендикулярной плоскости α.

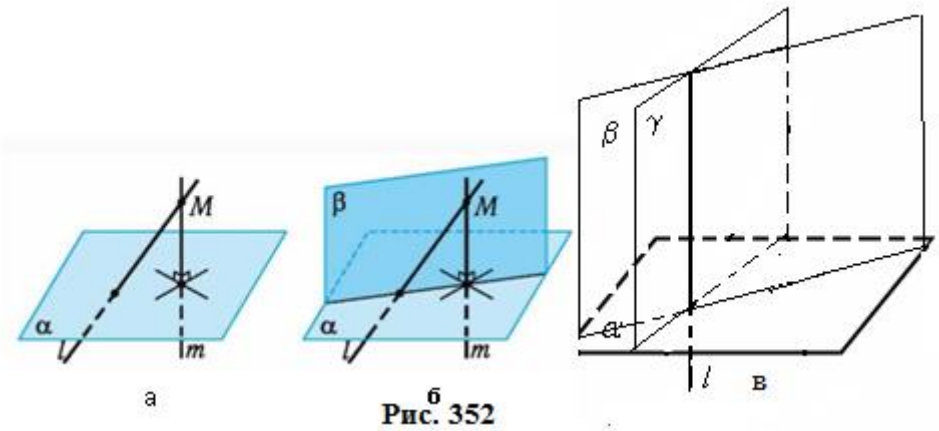


Рис. 352

Однозначность построения вытекает из теоремы о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости (теорема 5). Действительно, если бы через прямую l проходили две различные плоскости β и γ, перпендикулярные плоскости α (рис. 352 в), то прямая l — линия пересечения этих плоскостей — была бы перпендикулярной плоскости α. А это противоречит условию. Поэтому через прямую l можно провести лишь одну плоскость, перпендикулярную данной. ■

Пример 3. Через вершину A правильной пирамиды $SABC$ з основанием ABC провести прямую, перпендикулярную плоскости боковой грани SBC.

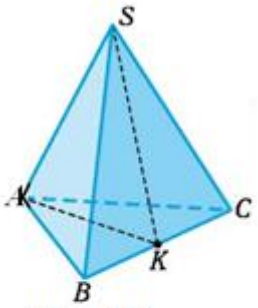


Рис. 353

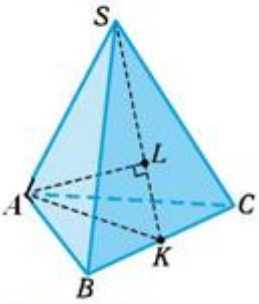


Рис. 354

 Для решения данной задачи воспользуемся теоремой о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей (теорема 2). Пусть K — середина ребра BC (рис. 353). Плоскости AKS и BCS перпендикулярны, по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1). Действительно, $BC \perp SK$ и $BC \perp AK$, как медианы, проведенные к основаниям в равнобедренных треугольниках. Поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 14), прямая BC перпендикулярна плоскости AKS. Плоскость BCS проходит через прямую, перпендикулярную к плоскости AKS.

Построение. Проведем в плоскости AKS из точки A прямую AL, перпендикулярную прямой KS — линии пересечения плоскостей AKS и BCS (рис. 354). По теореме о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей (теорема 2), прямая AL перпендикулярна плоскости BCS. ■

Пример 4.На стороне AB ромба $ABKL$ с острым углом A построен квадрат $ABCD$, плоскость которого перпендикулярна плоскости ромба.

1) Доказать, что $ADK \perp BLK$, $ADL \perp BLK$, $ADK \perp CBL$.

2) Построить прямую, проходящую через точку K, перпендикулярно плоскости AKD.

 Построим рис. 355, а по условию задачи.

1) Плоскость BLK — это плоскость ромба $ABKL$. Плоскости ADK и ADL проходят через прямую AD, перпендикулярную плоскости ромба. Действительно, прямая AD лежит в плоскости квадрата $ABCD$ и перпендикулярна линии пересечения плоскостей ромба и квадрата. По теореме о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей (теорема 2) она перпендикулярна плоскости ромба. Поэтому по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1) плоскости ADK и ADL перпендикулярны плоскости BLK.

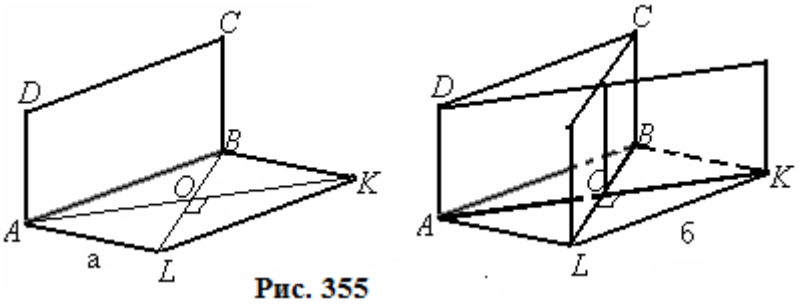


Рис. 355

Плоскости ADK и CBL перпендикулярны плоскости ромба. Для плоскости ADK это доказано выше, а для плоскости CBL это делается аналогично. Тогда по теореме о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости (теорема 5) линия пересечения плоскостей ADK и CBL, проходящая через точку O — точку пересечения диагоналей ромба, перпендикулярна плоскости $ABKL$ (рис. 355 б). Прямые AK и BL — линии пересечения

плоскостей ADK и CBL перпендикулярной им плоскостью $ABKL$ — перпендикулярны по свойству диагоналей ромба. Поэтому по второму признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 3.4) плоскости ADK и CBL перпендикулярны.

2) Плоскости AKD и ABK перпендикулярны, по доказанному в 1). Поэтому для построения искомой прямой достаточно в плоскости ABK через точку K провести прямую KM, перпендикулярную прямой AK. Она параллельна LO (рис. 356). По теореме о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей (теорема 2) прямая KM будет перпендикулярной плоскости AKD. ■

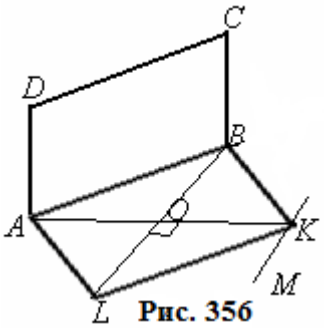


Рис. 356

Пример 5.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$с ребром 2.

1) Докажите, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BDD_1.

2) Докажите, что плоскость A_1D_1CB перпендикулярна плоскости ADC_1B_1.

 Пусть дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 357).

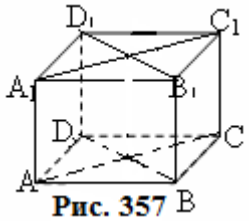


Рис. 357

1) Прямая A_1C_1 лежит в плоскости $A_1B_1D_1$, перпендикулярной плоскости BDD_1 по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 3.1): $BB_1 \perp A_1B_1D_1$. К тому же она перпендикулярна линии пересечения этих плоскостей — прямой B_1D_1 (диагонали квадрата перпендикулярны). По теореме о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей (теорема 2) прямая A_1C_1 будет перпендикулярной плоскости BDD_1.

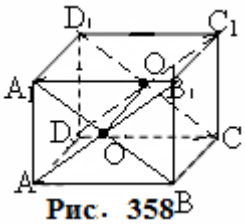


Рис. 358

2) Плоскости A_1D_1CB и ADC_1B_1 пересекаются по прямой OO_1, где O, O_1 — центры граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 (рис. 358). Прямая OO_1 перпендикулярна плоскости ABB_1A_1, поскольку она параллельна прямой BC, так как соединяет середины сторон прямоугольника A_1BCD_1, а прямая BC перпендикулярна плоскости ABB_1A_1 по признаку перпендикулярности прямой и плоскости: $BC \perp AB$, $BC \perp BB_1$. Линии пересечения плоскости ABB_1A_1 с плоскостями A_1D_1CB и ADC_1B_1 перпендикулярны: они содержат диагонали квадрата. Тогда по второму признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 4) данные плоскости перпендикулярны. ■.

Пример 6. Найти множество точек пространства, которые одинаково удалены от трех точек, не лежащих на одной прямой.

 Пусть A, B, C — точки, не лежащие на одной прямой, и α — плоскость, определяемая ими (рис 359 а). Как доказано в задаче 5 п. 3.1, точки, равноудаленные от точек A и B, образуют плоскость β, проходящую через середину M отрезка AB перпендикулярно ему (рис. 359 б). Эта плоскость перпендикулярна плоскости α по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1): $AB \perp \beta$, $AB \subset \alpha$.

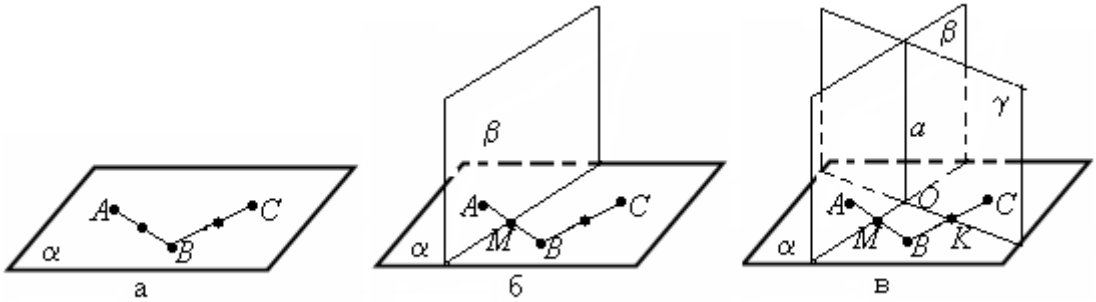


Рис. 359

Аналогично, плоскость γ, проходящую через середину *K* отрезка *BC* перпендикулярно ему, образуют точки, равноудаленные от точек *B* и *C*. Плоскости β и γ пересекаются по прямой *a*, (рис. 359 в) перпендикулярной плоскости *ABC*, по теореме о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости (теорема 5). Эта прямая пересекает плоскость α в точке, равноудаленной от точек *A*, *B*, *C*, то есть в центре окружности, проходящей через точки *A*, *B*, *C*. Следовательно, искомое множество точек составляют точки прямой, перпендикулярной плоскости, которая определяется данными точками, и которая проходит через центр окружности, содержащей эти точки. ■

Пример 7. Сколько попарно перпендикулярных плоскостей можно провести через точку пространства?

 В задаче 2 §14 построены три попарно перпендикулярные прямые *a*, *b*, *c*, проходящие через точку *A* пространства (рис. 360). Каждые две из них определяют плоскости α, β, γ (рис. 361), попарно перпендикулярные по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1).

Четвертой такую плоскость построить нельзя. Действительно, допустим, что такая плоскость δ существует. Тогда ее линия пересечения с плоскостью α пе-рпендикулярна плоскости γ, так как γ ⊥ α, γ ⊥ δ, а следовательно, α ∩ δ ⊥ γ. Но через точку *A* перпендикулярно плоскости γ проходит прямая *a*. Поэтому α ∩ δ = *a*. Аналогично устанавливается, что β ∩ δ = *c*, то есть δ = β. Таким образом, наибольшее количество попарно перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку пространства, равняется трём. ■

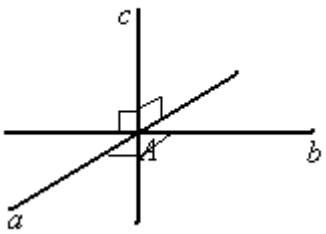


Рис. 360

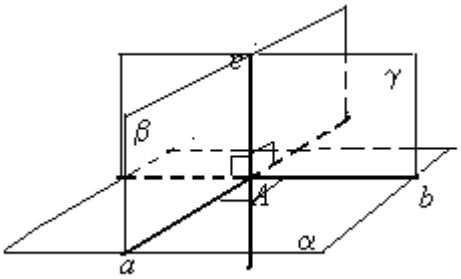


Рис. 361

Вопросы для самоконтроля

1. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α проведена прямая, перпендикулярная линии пересечения плоскостей α и β. Верно ли, что эта прямая перпендикулярна плоскости β?

2. Верно ли, что через каждую точку линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей можно провести две перпендикулярные прямые, лежащие в этих плоскостях?

3. Через некоторую точку линии пересечения плоскостей α и β проведены в этих плоскостях две прямые, перпендикулярные линии пересечения. Оказалось, что угол между этими прямыми острый. Могут ли плоскости α и β быть перпендикулярными?

4. Почему поверхность дверей, независимо от того, закрытые они или открыты, расположена вертикально к полу?

5. Почему отвес плотно прилегает к вертикальной стене, а к наклонной нет?

6. Верно ли, что через данную точку пространства можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной плоскости?

7. Всегда ли через данную прямую можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной плоскости?

8. Можно ли две перпендикулярные плоскости пересечь третьей плоскостью, перпендикулярной обеим данным плоскостям?

9. Параллельные прямые a и b лежат в плоскости α. Через каждую из этих прямых проведена плоскость, перпендикулярная плоскости α. Как расположены построенные плоскости?

10. Верно ли, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна третьей, то и вторая перпендикулярная к ней?

11. Плоскость α перпендикулярна плоскости β, а плоскость β перпендикулярна плоскости γ. Перпендикулярны ли плоскости α и γ?

12. Плоскости α и β перпендикулярны, а прямая l параллельна плоскости α. Верно ли, что прямая l перпендикулярна плоскости β?

13. Перпендикулярны ли плоскости двух сечений куба, проходящие через диагонали его параллельных граней?

14. Если через два ребра куба можно провести плоскость, то будет ли она перпендикулярной плоскости некоторой грани куба?

Графические упражнения

Постройте рисунок по приведенным данным.

1. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ABK перпендикулярны.

2. Плоскость ABC перпендикулярна плоскостям BDC и BEA.

3. Пусть $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ и $a \perp b$.

4. Плоскости α и β перпендикулярны. Прямая a лежит в плоскости α и перпендикулярна линии пересечения c плоскостей α и β. Через точку пересечения прямых a и c проведена прямая b, перпендикулярная прямым a и c.

5. Плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ и пересекаются по прямой a, линиями их пересечения с плоскостью γ являются прямые b и c.
6. Параллельные плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ.
7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости AB_1C_1 и BCA_1 перпендикулярны.
8. Плоскость α проходит через ребро SA правильного тетраэдра $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC.

Анализируя первые шаги в систематическом изучении стереометрии, которые, конечно, опираются на планиметрию да и на другие разделы математики младших классов, стоит осмыслить некоторые общие приемы, в соответствии с которыми развивается математика и проходит ее изучение. В частности, к ним относится действие по аналогии.

Действуя по аналогии, исследователь или ученик (а ученик, работая над новым материалом, тоже делает открытие — для себя) подмечает определенное сходство, подобие по вполне определенному плану, между тем, что изучается, и тем, что уже известно. Это позволяет ему делать не только предположения относительно строения или свойств новых объектов, отношений между ними, но и обосновывать их. Например, отношение между прямыми в планиметрии во многом аналогичны отношениям между плоскостями в стереометрии. Речь идет о транзитивности обоих отношений, симметричности; равенстве отрезков параллельных прямых между параллельными прямыми и параллельными плоскостями; параллельность прямых, перпендикулярных одной прямой на плоскости и параллельность прямых, перпендикулярных одной плоскости в пространстве, и много-много др.

Дальнейшее изучение стереометрии позволяет устанавливать новые аналогии. Ведь само конструктивное построение треугольника и тетраэдра, параллелограмма и параллелепипеда (см. § 8 и 11) говорит об аналогичности этих пар фигур, потому стоит ожидать одинаковость или сходство некоторых их свойств.

Да и в рамках отдельных математических наук полезно находить и использовать аналогии. Вспомним, что некоторые свойства десятичных дробей аналогичны свойствам натуральных чисел, свойства арифметической прогрессии во многом аналогичны свойствам геометрической прогрессии, как и свойства равенств и неравенств.

Следует предостеречь от легкомысленного отношения к понятию аналогии. Например, в планиметрии две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны между собой, но две плоскости, перпендикулярные одной плоскости, не обязательно параллельны между собой в пространстве.

Следует отличать понятие аналогии от понятия ***обобщения***. Обобщением является переход от рассмотрения данного множества объектов, конструкций или отношений к большему множеству, для которого данное множество

является частью. Произвольные тетраэдры являются обобщением правильных тетраэдров. Теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора, параллелепипеды являются обобщениями кубов и т. п. Понятие обобщения противоположно понятию ***специализации***, когда из данного множества объектов или отношений выделяется их часть.

Конечно, и обобщение, и специализация — неотъемлемые спутники математической деятельности. Обобщение расширяет сферу действия важных идей и математических методов. Специализация выделяет из объектов наиболее интересные, полезные. Да и в учебном процессе мы постоянно обращаемся к обобщению и специализации.

Рассмотрим примеры, которые иллюстрируют рассмотренные понятия при изучении геометрии.

Пример 8.На сколько частей делят пространство плоскости, проходящие через грани тетраэдра?

 Хотя, в конечном итоге, эта задача не относится к слишком сложным, но все же она неплохо иллюстрирует пользу, которую можно получить при обращении к ее плоскому аналогу: на сколько частей разделяют плоскость прямые, проходящие через стороны треугольника (рис. 362). Все части, которые составляют решение, занумерованы, их семь. Но важно отметить то, что одну из них составляет сам треугольник (1), три (2, 3, 4) прилегают к сторонам, а еще три (5, 6, 7) — к вершинам треугольника. Эта "классификация» частей плоскости позволяет мигом решить соответствующую задачу для тетраэдра (рис. 363) : в нем выделяется часть, которую составляет сам тетраэдр, 6 частей прилегают к ребрам, 4 — к вершинам, а еще 4 — к граням тетраэдра. Всего имеем 15 частей. ■

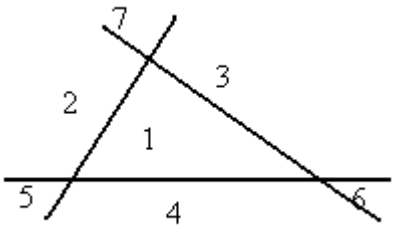


Рис. 362

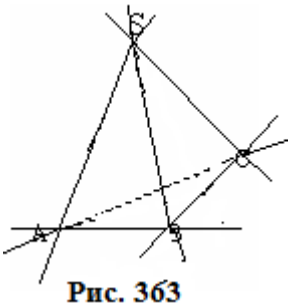


Рис. 363

Подход, предложенный во время решения примера 8, позволяет обобщить задачу и ее решение на более широкий класс многогранников.

Пример 9.О некоторых обобщениях и аналогах теоремы Пифагора.

 Теорема Пифагора является настолько важной и содержательной, что она порождает и еще будет порождать интересные и важные обобщения и аналогии.

В геометрической формулировке в соответствии с рис. 364 она, как хорошо известно, звучит так.

Площади квадратов S_1, S_2, S_3, построенных на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, связаны соотношением:

$$S_1 + S_2 = S_3, \ (1) \quad \text{или} \quad a^2 + b^2 = c^2. \ (2)$$

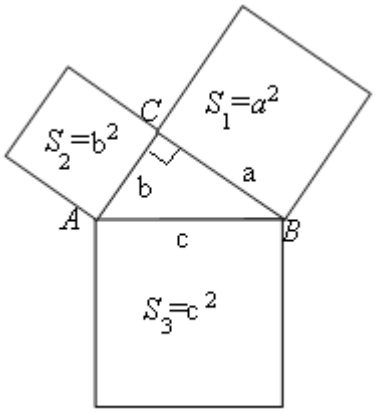


Рис. 364

Если же умножим последнее равенство на число $k = \frac{\sqrt{3}}{4}$, то получим:

$$a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \qquad (3)$$

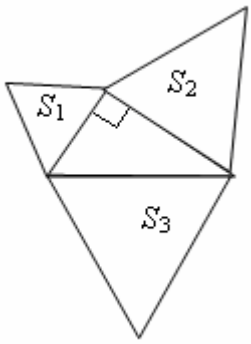


Рис. 365

Поскольку выражение $x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ определяет площадь равностороннего треугольника со стороной x, то имеем, что площади равносторонних треугольников, построенных на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 365), связаны соотношением $\boldsymbol{S_1 + S_2 = S_3}$.

Далее, при $k = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ получим соответствующий результат для правильных шестиугольников, построенных на катетах и гипотенузе прямокутного треугольника. Вообще, подходящий подбор коэффициента $k > 0$ даёт соотношение

$$ka^2 + kb^2 = kc^2, \qquad (4)$$

связывающее площади произвольных правильных n-угольников, построенных на катетах и гипотенузе прямокутного треугольника.

Следовательно, мы получили определенное обобщение теоремы Пифагора. Обобщением теоремы Пифагора является и формула (4) при произвольном $k > 0$, которая, кстати, алгебраически равносильная формуле (2), то есть формула (4) является алгебраическим аналогом теоремы Пифагора, построенным на геометрической основе. Она дает широкие возможности поиска новых геометрических обобщений теоремы Пифагора. ■

Задачи для исследования

1. На основе алгебраического аналога теоремы Пифагора $ka^2 + kb^2 = kc^2$, где $k > 0$, a, b, c — длины катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника найдите ее геометрические аналоги.

Указания. 1) Высотой, проведенной из вершины прямого угла, разделите данный прямоугольный треугольник на прямоугольные треугольники, подобные данному.

2) Попробуйте истолковать выражения ka^2, kb^2, kc^2 как объемы известных вам геометрических тел, или площади плоских фигур (например, круглых).

2. Исследуйте, на сколько частей разбивают пространство плоскости, которые проходят через грани известных вам многогранников.

Контрольные вопросы

1. Верно ли, что две плоскости, проходящие через две взаимно перпендикулярные прямые, являются перпендикулярными?

2. Верно ли, что если две плоскости перпендикулярны, то любые пересекающиеся прямые, лежащие в этих плоскостях, перпендикулярны между собой?

3. Можно ли провести плоскость, перпендикулярную двум пересекающимся плоскостям?

4. Всегда ли через боковое ребро пирамиды можно провести единственную плоскость, перпендикулярную плоскости основания пирамиды?

5. Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

6. Прямая лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой. Верно ли, что эта прямая перпендикулярна линии пересечения плоскостей?

7. Сколько можно разместить в пространстве попарно перпендикулярных плоскостей, имеющих общую точку?

8. Можно ли щит установить вертикально с помощью двух опор?

9. Можно ли к наклонному столбу прикрепить щит так, чтобы он был перпендикулярным поверхности земли?

10. Как на практике установить, перпендикулярна ли плоскость стены плоскости пола?

Задачи

313. Отрезок OS проведен из центра O квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей ACS и ABC.

2°) Определите взаимное расположение плоскостей ACS и BDS .

3) Постройте плоскость, проходящую через прямую OS перпендикулярно плоскости ABS.

4) Постройте плоскость, перпендикулярную плоскости ABC *и* проходящую через середины сторон AD *и* CD.

314. Из точки пересечения O диагоналей ромба $ABCD$ проведен перпендикулярный плоскости ромба отрезок OS; $AB = DB = SA = a$.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей SDB и ABC, SDB и ACS.

2°) Постройте плоскость, проходящую через прямую BC перпендикулярно плоскости ABD.

3) Проведите через середину F отрезка CS плоскость, перпендикулярную плоскости ABC.

4) Найдите площадь треугольника BDF.

315. Из вершины B прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикулярный его плоскости отрезок BS; $AB = BS = a$, $BC = b$, $a \neq b$.

1)° Определите взаимное расположение плоскостей DBS и ADC, ABS и BCS.

2)° Постройте плоскость, которая проходит через прямую AC перпендикулярно плоскости BCD.

3) Проведите через середину F отрезка DS плоскость, перпендикулярную плоскости ABC.

4) Найдите площадь треугольника AFC.

316. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей AB_1C_1 и CDD_1.

2°) Определите взаимное расположение плоскостей AB_1C_1 и CD_1A_1.

3°) Постройте плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости BB_1D_1.

4) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер A_1D_1 и B_1C_1 перпендикулярно плоскости ABC.

5) Определите взаимное расположение плоскости AA_1B и плоскости, проходящей через середины ребер A_1B_1, C_1D_1, CD.

6) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через ребро BB_1 и середину ребра A_1D_1 $(BB_1 = a)$.

7) Постройте точку, симметричную точке A относительно плоскости A_1B_1C.

317. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 2 см точка M — середина DB, а точка N — середина AC.

1°) Докажите, что прямая DB перпендикулярна плоскости AMC.

2°) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости AMC.

3) Через точку O пересечения медиан треугольника ADC проведите прямую, перпендикулярную плоскости AMC.

4) Найдите длину отрезка этой прямой внутри тетраэдра.

5)В каком отношении делит этот отрезок плоскость AMC?

318. Два равносторонних треугольника ABC и ADC лежат в перпендикулярных плоскостях.

1°) Найдите длину отрезка BD, если $AC = 1$ см.

2) Докажите, что плоскость BKD (K лежит на прямой AC) перпендикулярна плоскости каждого из треугольников тогда и только тогда, когда K является серединой стороны AC.

319. Прямоугольник $ABCD$, стороны которого 3 см и 4 см, перегнули по диагонали AC так, что треугольники ABC и ADC расположились в перпендикулярных плоскостях. Определите расстояние между точками B и D после того, как перегнули прямоугольник $ABCD$.

320. Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную каждой из двух данных плоскостей.

321*. Три взаимно перпендикулярные прямые OX, OY, OZ определяют три плоскости α, β, γ. Плоскость φ_1 перпендикулярна плоскости α и пересекает ее по прямой a. Плоскость φ_2 перпендикулярна плоскости β и пересекает ее по прямой b. Постройте линии пересечения плоскостей φ_1 и φ_2 с остальными плоскостями и между собой.

322°. Докажите, что плоскости смежных граней куба перпендикулярны.

323. Плоскости α и β перпендикулярны между собой. Из точки *A* плоскости α проведена перпендикулярная плоскости β прямая *AB*. Докажите, что прямая *AB* лежит в плоскости α.

324. Докажите, что если плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны между собой.

325. Через точки *A и B,* лежащие на линии пересечения *p* перпендикулярных между собой плоскостей α и β, проведены перпендикулярные к *p* прямые AA_1 в α, BB_1 в β. Точка *X* лежит на прямой AA_1, а точка *Y* — на BB_1. Докажите, что прямая BB_1 перпендикулярна прямой *BX,* а прямая AA_1 перпендикулярна прямой *AY*.

326. Плоскость α перпендикулярна плоскости правильного треугольника *ABC* и содержит его высоту AA_1; плоскость β перпендикулярна плоскости треугольника *ABC* и содержит его высоту BB_1. Точка М принадлежит прямой пересечения плоскостей α и β. Докажите, что $MA_1 = MC_1$.

327. Через точки *D* и *E* — середины сторон *AB* и *BC* треугольника *ABC* — проведены плоскости α и β, перпендикулярные *AB* и *BC* соответственно. Точка *M* принадлежит прямой пересечения плоскостей α и β. Докажите, что *MA* = *MC*.

328*. Через середину каждой стороны треугольника проведена плоскость, перпендикулярная этой стороне. Докажите, что все три проведенные плоскости пересекаются по одной прямой, перпендикулярной плоскости треугольника.

Упражнения для повторения

329. В равностороннем треугольнике со стороной *b* определите:
1) высоту; 2) радиусы вписанной и описанной окружностей.

330. Из одной точки проведен к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Определите длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 см и 50 см, а их проекции на данную прямую относятся, как 3 : 10.

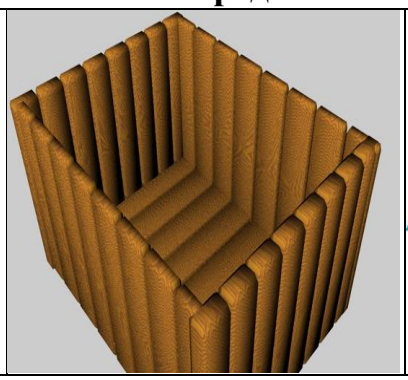
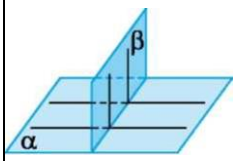
331. Прямая, проведенная через вершину ромба вне его, отсекает на продолжениях двух сторон отрезки *p* и *q*. Определите сторону ромба.

332. Внутри квадрата *ABCD* существует такая точка *M*, что *MA* = 7 см, *MB* = 13 см, *MC* = 17 см. Определите длину отрезка *MD*.

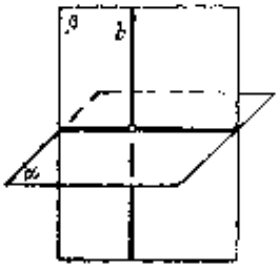
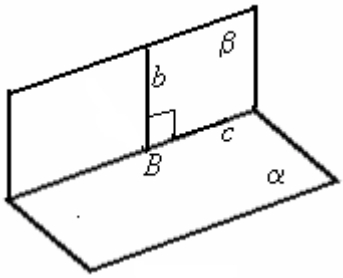
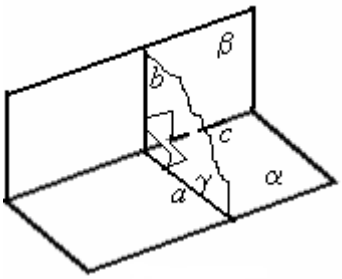
333. Определите катеты прямоугольного треугольника, если биссектрисы прямого угла делят гипотенузу на отрезки 15 см и 20 см.

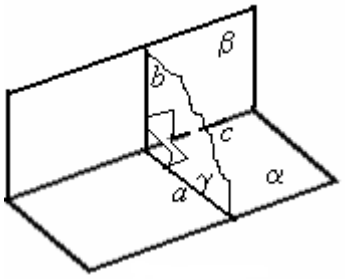
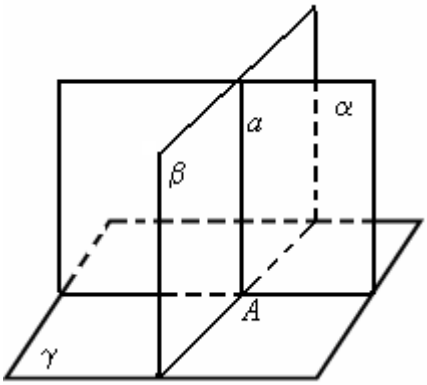
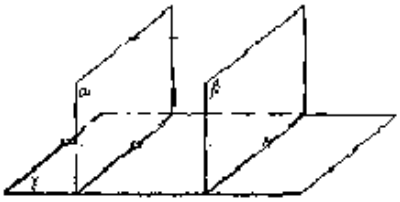
Итог

Основное определение

Две плоскости называются ***перпендикулярными***, если каждая из них образована прямыми, перпендикулярными второй плоскости и проходящими через точки пересечения этих плоскостей		

Основные утверждения

Признак перпендикулярности двух плоскостей.	Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную второй плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.	 $b \perp \alpha, b \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$
Теорема о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей.	Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, принадлежащая одной плоскости и перпендикулярная линии пересечения этих плоскостей, перпендикулярна второй плоскости.	 $\alpha \perp \beta, b \subset \beta, c = \alpha \cap \beta,$ $b \perp c \Rightarrow b \perp \alpha$
Теорема о пересечении двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярных третьей	Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым.	 $\alpha \perp \beta, c = \alpha \cap \beta, \gamma \perp c,$ $a = \alpha \cap \gamma, b = \beta \cap \gamma$ $\Rightarrow b \perp a$

Второй признак перпендикулярности плоскостей.	Если прямые пересечения двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения, перпендикулярны, то данные плоскости также перпендикулярны.	 $c=\alpha\cap\beta, \gamma\perp c,$ $a=\alpha\cap\gamma, b=\beta\cap\gamma,$ $b\perp a\Rightarrow\alpha\perp\beta$
Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости.	Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то линия их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.	 $\alpha\perp\gamma, \beta\perp\gamma, c=\alpha\cap\beta,$ $\Rightarrow c\perp\gamma$
Теорема о паралельных плоскостях, перпендикулярных третьей плоскости	Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна третьей, то и вторая плоскость перпендикулярна ей.	 $\alpha\parallel\beta, \alpha\perp\gamma\Rightarrow\beta\perp\gamma$

§17. Ортогональное проектирование

Рассматривается проектирование по направлению, перпендикулярному плоскости проекции, и его применения.

Введение понятий перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей дает возможность вернуться к вопросам об изображении пространственных геометрических фигур. Как уже отмечалось, качество изображений в стереометрии, то есть возможность по ним получить наиболее полное представление о фигуре, зависит от выбора направления параллельного проектирования. Среди всех возможных направлений проектирования выделяется направление, перпендикулярное

плоскости проекций. Во-первых, такое направление лишь одно. Во-вторых, оно естественнее всего для восприятия человеком (рис. 366—368).

Рис. 366

Рис. 367

Рис. 368

Таким образом, одним из важных в геометрии и ее приложениях частным случаем параллельного проектирования является ***ортогональное проектирование,*** то есть проектирование вдоль прямой, перпендикулярной плоскости проекций.

Ортогональный — от греческих ορθος (orthos) — прямой, вертикальный и γωνια (gonia) — угол — буквально: прямоугольный. То же, что и «перпендикулярный».

Параллельная проекция точки на плоскость называется ее ортогональной проекцией, если прямая, определяющая направление проектирования, перпендикулярна плоскости проекций.

Из теоремы о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1 § 15) имеем, что каждая проектирующая прямая при ортогональном проектировании перпендикулярна плоскости проекций.

Поскольку ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, то оно обладает всеми свойствами последнего. В частности, ортогональной проекцией прямой a на неперпендикулярную к ней плоскость α является прямая a_1, которую можно считать пересечением плоскости α с плоскостью β, составленной из проектирующих прямых (рис. 369). Эти проектирующие прямые перпендикулярны плоскости α. То есть ортогональная проекция прямой на неперпендикулярную ей плоскость является пересечением перпендикулярных плоскостей.

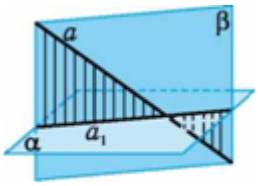


Рис. 369

Ортогональное проектирование имеет ряд особенностей. Ортогональному проектированию на плоскость соответствует взгляд сверху на предмет,

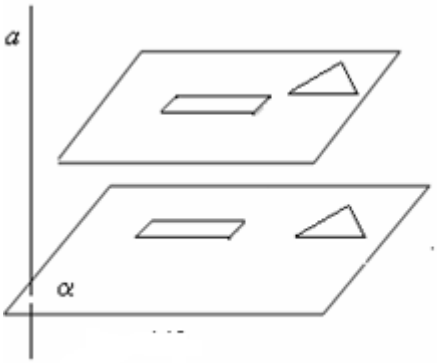


Рис. 370

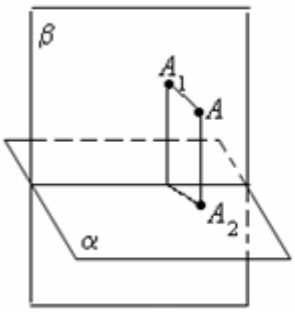


Рис. 371

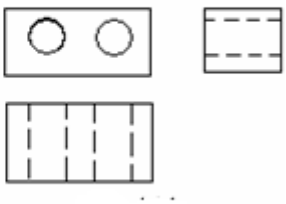


Рис. 372

расположенный на горизонтальной площадке. Поэтому плоские фигуры, расположенные параллельно плоскости проекций, не искажаются (рис. 370). В частности, не изменяются их линейные и угловые размеры, и это свойство предопределяет широкое использование ортогонального проектирования в техническом черчении. Впрочем, поскольку проектирование на одну плоскость, вообще говоря, не дает целостного представления о предмете, то ортогональные проекции выполняют, по крайней мере, на две или на три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 371, 372). По такому чертежу несложно воспроизвести и форму предмета, и его размеры. Так, на рис. 372 представлены фронтальная (вид спереди), горизонтальная (вид сверху) и профильная (вид сбоку) проекции детали (пластины с двумя отверстиями).

Ортогональное проектирование, обычно, используют и при изображении шара. В результате изображением шара является круг. Если же проектирующие прямые не перпендикулярны плоскости проекций, то проекцией шара является часть плоскости, ограниченная эллипсом (представьте себе тень, которая следует вплоть до горизонта, от шара, лежащего на земле), не соответствующая нашему представлению о шаре (рис. 373).

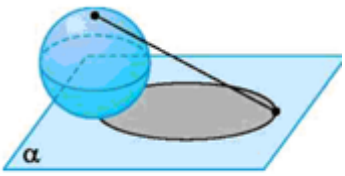


Рис. 373

Пример 1. Правильная треугольная пирамида *SABC* с боковым ребром 5 см и стороной основания $3\sqrt{3}$ см ортогонально проектируется на плоскость основания *ABC*.

1) В какую точку треугольника *ABC* проектируется вершина *S*?

2) Определить длину отрезка, соединяющего точку *S* с ее проекцией на плоскость основания.

□ 1) Пусть при ортогональном проектировании точка *S* проектируется в точку *O*, $SO \perp ABC$ (рис. 374). Поскольку $AO \perp SO$, то треугольник *SAO* — прямоугольный с гипотенузой *SA*. По теореме Пифагора, $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2}$. Аналогично из прямоугольных треугольников *SCO* и *SBO* имеем: $CO = \sqrt{SC^2 - SO^2}$, $BO = \sqrt{SB^2 - SO^2}$. Но в правильной пирамиде $AS = CS = BS$, поэтому $AO = CO = BO$, то есть *O* — центр окружности, описанной около основания *ABC*.

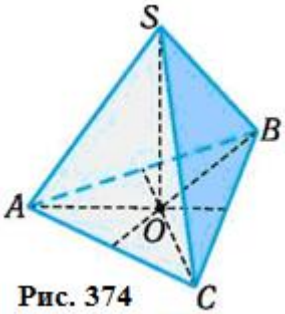


Рис. 374

2) Как известно, радиус окружности *R*, описанной около правильного треугольника со стороной *a*, вычисляется по формуле: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Поэтому $AO = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 3$ (см), а $SO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). ■

Ответ: 2) 4 см.

Понятие перпендикулярности прямой и плоскости порождает один из важнейших видов симметрии в пространстве, а именно: симметрию относительно плоскости.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок AA_1 перпендикулярен плоскости α и точкой O пересечения его с α делится пополам **(рис. 375).** ***Точка плоскости α считается симметричной сама себе.***

Из этого определения вытекает, что $AO = OA_1$, то есть точки A и A_1 — центрально симметричны относительно точки O.

Фигуры пространства F и F_1 называются симметричными относительно плоскости α, если для каждой точки одной фигуры имеется симметричная ей точка во второй фигуре **(рис. 376).**

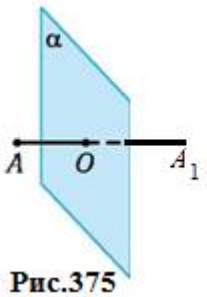


Рис.375

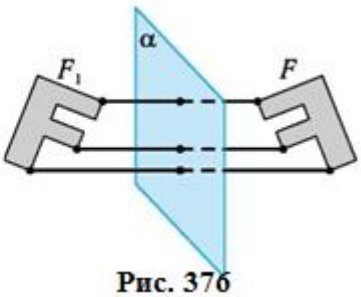


Рис. 376

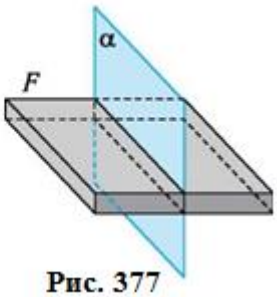


Рис. 377

Если же в этом определении $F = F_1$ (идет речь об одной и той же фигуре), то F называется ***симметричной относительно плоскости α*** (рис. 377).

Примерами симметричных относительно плоскостей фигур насыщены как реальное физическое пространство, так и геометрическое. Природа создала симметричными фигуры людей и большинства живых существ, симметрична книга, которую вы держите в руках, столовая посуда, утюг и много-много др. (рис. 378 - 380).

Рис. 378

Рис. 379

Рис. 380

Нетрудно указать плоскости, относительно которых симметричны куб, правильная пирамида, шар и т. п. Отыскание у геометрической фигуры симметрий относительно плоскостей является существенным шагом при ее изучении. Это существенно облегчает нахождение и доказательство ее свойств.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли ортогональной проекцией квадрата быть прямоугольник, не являющийся квадратом? А наоборот?

2. Может ли отрезок быть ортогональной проекцией треугольника?

3. Верно ли, что ортогональной проекцией произвольной прямой является прямая?

4. Верно ли, что длина ортогональной проекции отрезка меньше или равна длине самого отрезка?

5. Два равных отрезка расположены на параллельных прямых. Всегда ли равны ортогональные проекции этих отрезков на данную плоскость?

6. Может ли ортогональной проекцией острого угла быть тупой угол? А наоборот?

7. Может ли ортогональной проекцией прямого угла быть прямой угол?

8. Равны ли между собой ортогональные проекции двух равных треугольников, лежащих в одной плоскости?

9. Прямые углы лежат в параллельных плоскостях. Равны ли ортогональные проекции этих углов на данную плоскость проекций?

10. Относительно каких плоскостей симметричны: а) точка; б) отрезок; в) прямая; г) плоскость?

11. Верно ли, что плоская фигура всегда симметрична относительно некоторой плоскости?

Вопросы на рисунках

1. На рис. 381 изображена конструкция, сделанная из провода. Одинаковы ли ее ортогональные проекции на плоскости нижней грани и боковой грани каркасного куба?

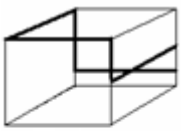


Рис. 381

2. На рис. 382 изображена конструкция, сделанная из провода. Сравните ее ортогональные проекции на плоскости нижней, верхней и боковой граней каркасного куба.

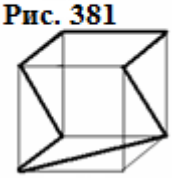


Рис. 382

3. На рис. 383 изображена городошная фигура «колодец». На каком из рис. 384, а-г изображена одна из ортогональных проекций этой фигуры?

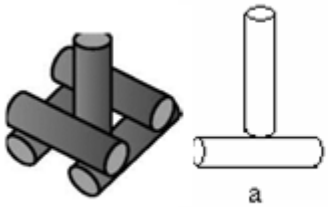


Рис. 383

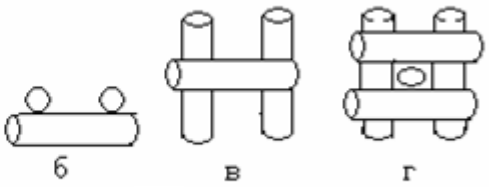


Рис. 384

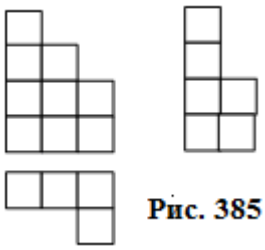


Рис. 385

4. Сколько деревянных кубиков использовано для построения башни, если с трех сторон она выглядит, как на рис. 385?

5. На каждом из рис. 386 а, б, в, г, д изображен вид спереди и вид сверху некоторой фигуры. Для каждой пары укажите тело, которое может так выглядеть (отсутствие на рисунках штриховых линий означает, что у соответствующей фигуры нет невидимых ребер, или они закрыты видимыми).

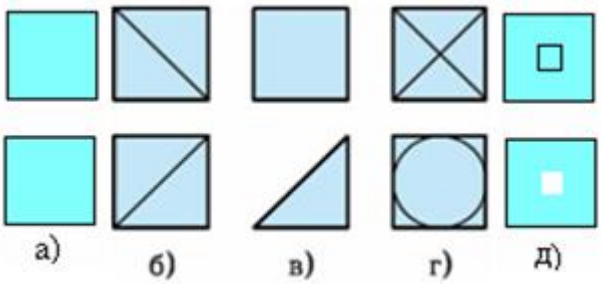


Рис. 386

Симметричность фигур относительно плоскости связана с преобразованием пространства, которое называется симметрией относительно плоскостей.

Пусть дана плоскость α. Для произвольной точки пространства M, не лежащей на плоскости, можно построить симметричную ей точку относительно плоскости α (другими словами: зеркальный образ точки M). Для этого нужно через точку M провести перпендикулярную плоскости α прямую (рис. 387) и на ней найти точку M_1, симметричную точке M относительно точки пересечения O прямой с плоскостью. Точки плоскости считаются симметричными самим собе.

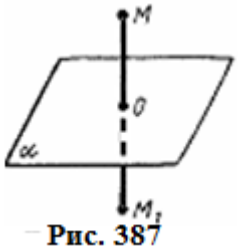


Рис. 387

Преобразование точек пространства, при котором произвольная точка пространства переходит в симметричную относительно данной плоскости, называют симметрией относительно этой плоскости.

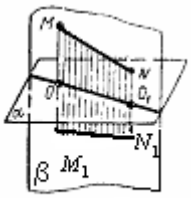


Рис. 388

Нетрудно убедиться в том, что если через прямую OM провести плоскость β (она, конечно, будет перпендикулярной α), то в плоскости β описанное преобразование совпадает с осевой симметрией относительно линии пересечения плоскостей α и β (рис. 388).

Известно, что при преобразовании симметрии плоскости относительно прямой переходят в себя (остаются неподвижными) только точки этой прямой. Отсюда вытекает, что преобразование симметрии пространства относительно плоскости α оставляет неподвижными лишь точки плоскости.

Языком преобразований можно сформулировать определение симметричной фигуры относительно плоскости.

Фигура называется симметричной относительно плоскости, если при преобразовании симметрии относительно этой плоскости все ее точки переходят в точки этой самой фигуры.

Плоскость, относительно которой фигура симметрична, называется ***плоскостью симметрии этой фигуры***.

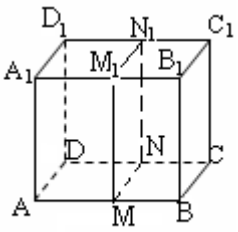


Рис. 389

Очевидно, что куб симметричен относительно плоскости, проходящей через середины четырех параллельных его ребер. Действительно, пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а M, N, M_1, N_1 являются серединами соответственно ребер AB, DC, A_1B_1, C_1D_1 (рис. 389). Точки M, N, M_1, N_1 лежат в одной плоскости, которой перпендикулярны отмеченные ребра. Поэтому точки A_1, D_1, D, A симметричны соответственно точкам B_1, C_1, C, B относительно плоскости MNN_1M_1. Нетрудно убедиться в том, что и точка, симметричная произвольной точке куба, принадлежит кубу (попробуйте это обосновать самостоятельно!).

Пример 2. Доказать, что правильный тетраэдр $SABC$ симметричен относительно плоскости SAD, где D — середина ребра BC.

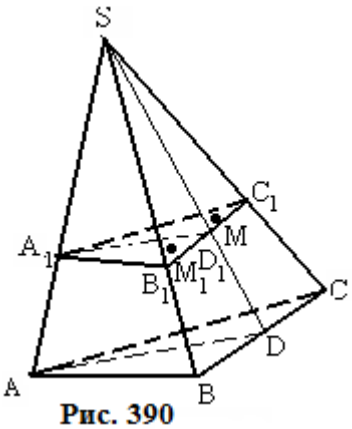


Рис. 390

□ Плоскости SAD и ABC перпендикулярны по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1 §16): $BC \subset ABC$, $BC \perp SAD$ ($BC \perp SD$, $BC \perp AD$) (рис. 390). Возьмем произвольную точку M тетраэдра и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости ABC. Сечением правильного тетраэдра этой плоскостью является правильный треугольник $A_1B_1C_1$. Плоскость этого треугольника перпендикулярна плоскости SAD по теореме о параллельных плоскостях, перпендикулярных третьей плоскости (теорема 6 §16), причем эти плоскости пересекаются по прямой A_1D_1, где D_1 — середина B_1C_1. Но, как известно, медиана правильного треугольника является его осью симметрии. Поэтому симметричная M относительно плоскости SAD точка M_1 будет симметричной ей и относительно прямой A_1D_1, то есть она принадлежит треугольнику $A_1B_1C_1$, а вместе с этим и тетраэдру. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли квадрат быть ортогональной проекцией куба?

2. Может ли ортогональной проекцией круга быть круг с меньшим радиусом?

3. Может ли ортогональной проекцией угла быть отрезок?

4. Может ли ортогональной проекцией отрезка быть отрезок, длина которого вдвое меньше длины данного отрезка?

5. Может ли ортогональной проекцией отрезка быть отрезок, длина которого больше длины данного отрезка?

6. Верно ли, что ортогональные проекции равных отрезков равны между собой?

7. Может ли ортогональной проекцией отрезка на непараллельную ему плоскость быть равный ему отрезок?

8. Может ли прямой угол быть ортогональной проекцией тупого угла?

9. Ортогональной проекцией угла является угол, равный данному. Верно ли, что плоскость угла параллельна плоскости проекций или совпадает с ней?

10. Ортогональной проекцией квадрата является прямоугольник, не являющийся квадратом. Может ли плоскость квадрата быть параллельной плоскости проекций?

Графические упражнения

1. Постройте рисунок по приведенным данным.

1) Точки A и B находятся по одну сторону от плоскости α, M — середина отрезка AB, A_1, B_1, M_1 — ортогональные проекции точек A, B, M, соответственно, на плоскость α.

2) Точки A и B находятся по одну сторону от плоскости α, A_1, B_1 — их ортогональные проекции на плоскость α, точка M — точка пересечения отрезка, соединяющего точку A и точку B', симметричную точке B относительно плоскости α.

2. Постройте ортогональную проекцию правильной четырёхугольной пирамиды на

1) плоскость основания;

2) плоскость, проходящую через ребро основания перпендикулярно плоскости основания;

3) плоскость, проходящую через диагональ основания и вершину пирамиды.

Ортогональное проектирование имеет важное значение в геометрии и ее приложениях. Как уже отмечалось, плоское изображение не дает полного представления о фигуре. В технике, строительстве часто используют ортогональные проекции фигуры на две или три плоскости (комплексные чертежи). Однако такие чертежи не имеют наглядности, или же не дают представления о форме и размерах фигур. Поэтому используют другие методы построения изображений, которые изучает такой раздел математики, как начертательная геометрия. Творцом начертательной геометрии считается известный французский математик и политический деятель Гаспар Монж (1746 - 1818).

Идеей одного из методов изображений является задание положения точки с помощью ее ортогональных проекций на две перпендикулярные плоскости α и β (рис. 391).

Плоскости α и β пересекаются по прямой *x*, которую называют ***осью проекций***, и разбивают пространство на четверти. Если повернуть плоскость α по стрелке, как показано на рис. 391, то плоскости α и β совместятся и будут изображаться одним плоским рисунком, который называют ***епюром*** (рис. 392). В зависимости от того, в какой четверти находится точка *A*, ее проекции на эпюре находятся выше или ниже оси проекций. Понятно, что положение проекций A_1 и A_2 точки *A* (на эпюре они всегда находятся на одном перпендикуляре) определяют расположение точки *A* в пространстве.

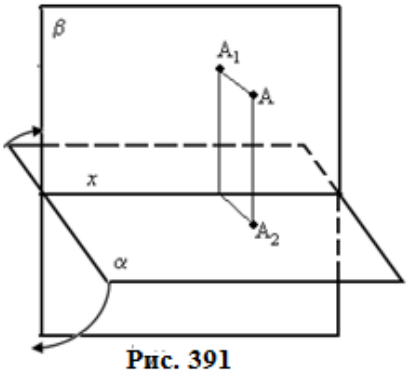


Рис. 391

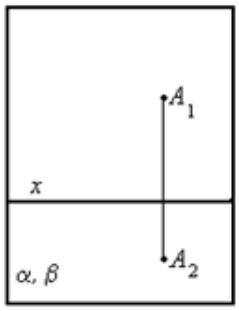


Рис. 392

Эпюр — от французского epure — буквально практический рисунок.

Таким образом, для произвольной фигуры можно строить эпюр, а по эпюру восстанавливать фигуру. Начертательная геометрия изучает законы и правила, которые позволяют с помощью изображений на эпюре восстанавливать свойства данной фигуры.

Далее рассмотрим более подробно преобразование симметрии пространства относительно плоскости. Для удобства будем его обозначать S_α, где α — плоскость симметрии. Запись $M' = S_\alpha(M)$ означает, что точка *M* преобразуется в точку *M′*, симметричную точке М относительно плоскости α.

Отметим некоторые основные свойства симметрии относительно плоскости.

Свойство 1.

Если $M' = S_\alpha(M)$, то $S_\alpha(M') = M$, то есть дважды выполненное преобразование симметрии относительно плоскости является тождественным преобразованием.

□ Если $M \in \alpha$, то $M = M'$ и доказывать нечего. Если $M' = S_\alpha(M)$ и $M \notin \alpha$,, то отрезок *MM′* перпендикулярен плоскости α и точкой пересечения с ней делится пополам. Поэтому симметричной точке *M′* относительно плоскости α является точка *M*, то есть $S_\alpha(M') = M$. ■

Свойство 2.

Симметрия относительно плоскости преобразует прямую в прямую, отрезок — в равный ему отрезок.

□ Точки, симметричные точкам прямой *l* относительно плоскости α, лежат на прямых, перпендикулярных плоскости α. Эти прямые образуют плоскость β, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает ее по прямой *a* (рис. 393). Преобразование *Sα* прямой *l* совпадает с преобразованием симметрии в плоско-

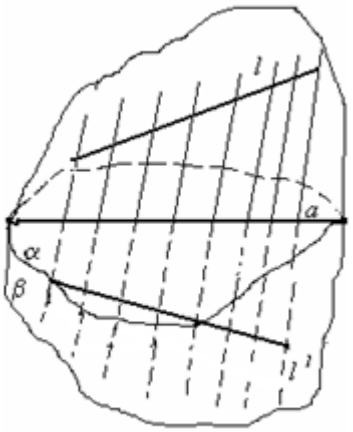


Рис. 393

сти β относительно прямой *a*. А такие преобразования, как известно из планиметрии, пререобразуют прямую в прямую, отрезок — в равный ему отрезок. ■

Свойство 3.

Произвольная плоскость симметрией относительно плоскости преобразуется в плоскость.

 Рассмотрим преобразование симметрии относительно плоскости α. Пусть дана произвольная плоскость β. Эта плоскость состоит из точек всех прямых, которые проходят через некоторую ее точку *A* (рис. 394 а). По свойству 1 симметрия относительно плоскости α преобразует все эти прямые в прямые, которые проходят через точку $A' = S_\alpha(A)$. Если *a′*, *b′* — две такие прямые, что $a' = S_\alpha(a), b' = S_\alpha(b),$ то они определяют плоскость β′. Покажем, что для произвольной прямой $c \subset \beta$ прямая $c' = S_\alpha(c) \subset \beta'$. Действительно, возьмем в плоскости β прямую, пересекающую прямые *a*, *b*, *c* в точках *X*, *Y*, *Z* (рис. 394 б).

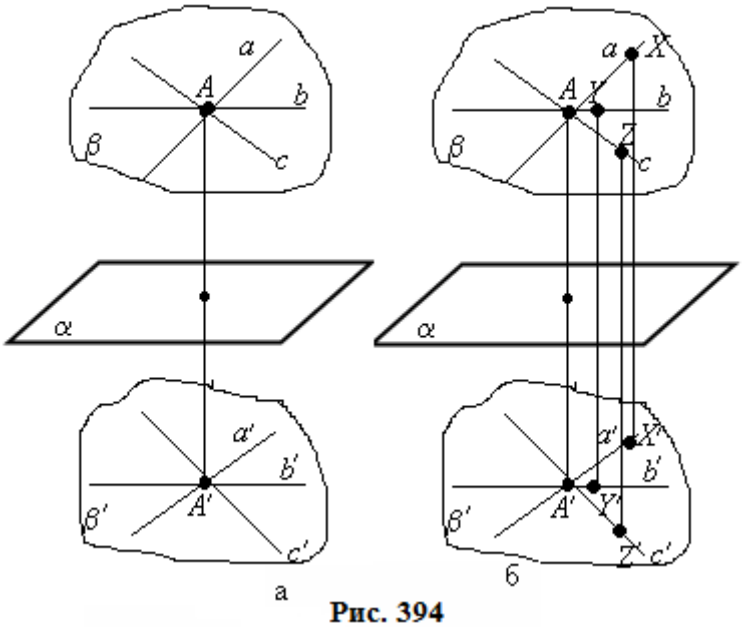


Рис. 394

Понятно, что точки $X' = S_\alpha(X), Y' = S_\alpha(Y)$ принадлежат плоскости β′ и вся прямая *X′Y′* ей принадлежит. Тогда и точка $Z' = S_\alpha(Z)$ тоже принадлежит плоскости β'. Поэтому прямая *c′* вместе со своими точками *A′* и *Z′* должна принадлежать β′. Осталось выяснить, все ли прямые, лежащие в плоскости β' и проходящие через точку *A′*, получаются путем преобразования S_α из некоторых прямых из β, проходящих через точку *A*. Из свойства 1 и вышеприведенных рассуждений вытекает, что если прямая *l′*, проходящая через точку *A′*, принадлежит β', то прямая $l = S_\alpha(l')$ проходит через точку *A* и принадлежит плоскости β. Но тогда $S_\alpha(l) = l'$. ■

Рис. 395

Геометрические фигуры и соответствующие им материальные объекты, которые окружают нас, часто симметричны относительно некоторых плоскостей (рис. 395).

Пример 3. Указать плоскости симметрии квадрата.

 Понятно, что плоскость квадрата является его плоскостью симметрии. Иные плоскости симметрии должны быть перпендикулярны плоскости квадрата, а их пересечение с плоскостью квадрата является осью симметрии квадрата. В квадрате на плоскости четыре оси симметрии (рис. 396). Каждой из них соответствует плоскость симметрии. Всего имеем пять плоскостей симметрии. ■

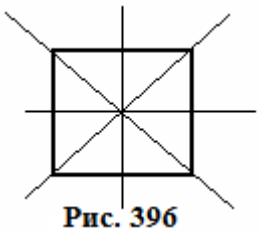


Рис. 396

Пример 4. Указать плоскости симметрии куба.

 Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M, N, M_1, N_1 — середины соответственно ребер AB, DC, A_1B_1, D_1C_1 (рис. 397). Симметрия относительно плоскости переводит вершины куба в вершины куба (докажите это, пользуясь свойством 2). Это облегчает поиск плоскостей симметрии куба.

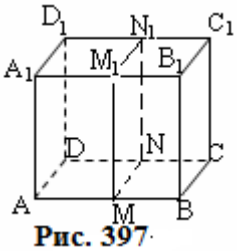


Рис. 397

Точки M, N, M_1, N_1 находятся в одной плоскости, потому что $MN \parallel M_1N_1$. Эта плоскость является плоскостью симметрии куба, поскольку вершины куба симметричны относительно этой плоскости. Это преобразование переводит точки куба в точки куба (докажите это, пользуясь свойствами симметрии относительно плоскости!).

Плоскостей симметрии, построенных по серединам параллельных ребер, всего три (укажите их).Еще один вид плоскостей симметрии куба определяется плоскостью A_1D_1CB (рис. 398). Симметричность вершин B_1 и A, C_1 и D при симметрии относительно плоскости A_1D_1CB вытекает из того, что эта плоскость перпендикулярна плоскости AB_1C_1D, а в плоскости AB_1C_1D точки B_1 и C_1 симметричные соответственно точкам A и D относительно прямой OO_1 — линии пересечения плоскостей A_1D_1CB и AB_1C_1D. Всего таких плоскостей симметрии шесть (укажите их!). Таким образом, найдено 9 плоскостей симметрии куба. То, что других плоскостей симметрии не существует, можно доказать, пользуясь вышеприведенными свойствами (попробуйте это сделать самостоятельно!). ■

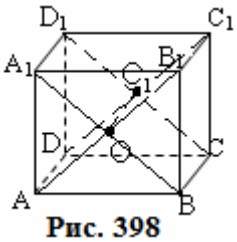


Рис. 398

Задачи для исследования

1. Исследуйте, существуют ли фигуры, имеющие ровно n плоскостей симметрии:
1) при $n = 1, 2, 3, 4$; 2) при произвольном $n > 4$.

2. Исследуйте, является ли последовательное выполнение двух симметрий относительно разных плоскостей снова симметрией относительно плоскости. В случае, если плоскости двух симметрий пересекаются, выясните, к какому виду известных уже симметрий относится их композиция, при этом воспользуйтесь изучением аналогичного вопроса для симметрий на плоскости относительно двух прямых.

3. Сколько плоскостей симметрии должен иметь тетраэдр, чтобы быть правильным?

Контрольные вопросы

1. Может ли отрезок быть ортогональной проекцией трапеции?

2. Обязательно ли ортогональной проекцией квадрата является прямоугольник?

3. Может ли длина ортогональной проекции отрезка равняться длине самого отрезка?

4. Может ли длина ортогональной проекции отрезка быть вдвое больше длины самого отрезка?

5. Верно ли, что отрезок параллелен плоскости или принадлежит ей, если его ортогональная проекция на эту плоскость имеет такую же длину, как и отрезок?

6. Какой угол может быть ортогональной проекцией прямого угла? острого угла? тупого угла?

7. Ортогональной проекцией параллелограмма является параллелограмм, не равный данному. Может ли плоскость параллелограмма быть параллельной плоскости проекций или совпадать с ней?

8. Может ли площадь ортогональной проекции многоугольника равняться площади самого многоугольника?

9. Верно ли, что плоскость, проходящая через точки C и C_1, симметричные относительно плоскости α, быть перпендикулярной α?

10. Могут ли две фигуры быть симметричными относительно разных плоскостей?

Задачи

334°. Концы отрезка AB лежат по одну сторону от плоскости α. Расстояния концов отрезка AB до их ортогональных проекций A_1, B_1 на плоскость α равны 4 см и 8 см. Найдите:

1) длину отрезка AB, если $A_1B_1 = 5$ см;

2) расстояние между серединой отрезка AB и серединой симметричного к нему отрезка относительно плоскости α.

335°. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от плоскости α. Расстояния концов отрезка AB до их ортогональных проекций A_1, B_1 на плоскость α равны 4 см и 8 см. Найдите:

1) длину отрезка AB, если $A_1B_1 = 5$ см;

2) расстояние между серединой отрезка AB и серединой симметричного к нему отрезка относительно плоскости α.

336. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ со стороной основания a расстояние между ее вершиной S и симметричной ей точкой S_1 относительно плоскости $ABCD$ равно b. Найдите:

1) длину бокового ребра пирамиды;

2) площадь сечения пирамиды, проходящего через противоположные боковые ребра.

337. Фигура задана на рис. 399 а - е с помощью трех ортогональных проекций.

1) Изобразите эту фигуру.

2) Выясните, имеет ли фигура плоскости симметрии? Если имеет, то сколько?

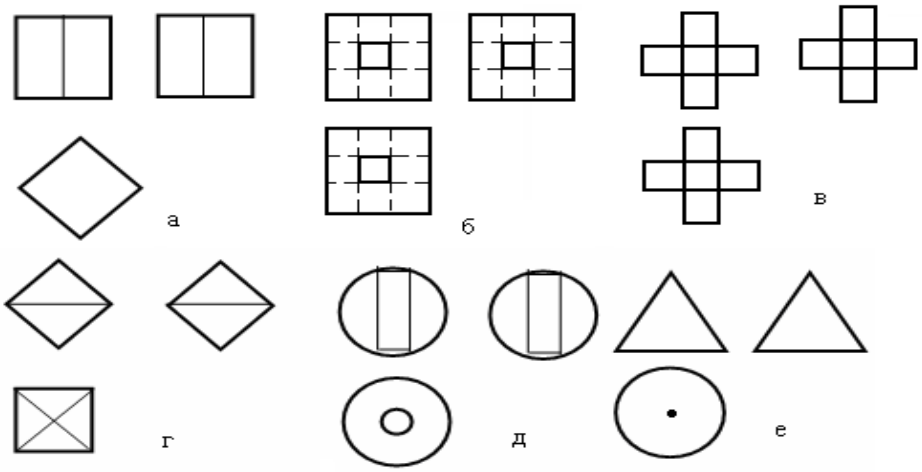


Рис. 399

338. Только одна из сторон угла лежит в плоскости проекций. Докажите, что ортогональной проекцией прямого угла является прямой угол, острого угла — угол, меньший проектируемого, тупого угла — угол, больший проектируемого, если плоскость, в которой лежит угол, неперпендикулярна плоскости проекций.

339. Плоскость, параллельная основанию правильной четырехугольной пирамиды, делит боковое ребро пополам. Изобразите пирамиду, симметричную данной относительно этой плоскости. Изобразите также фигуру, полученную объединением данной и полученной пирамид?

340. Три взаимно перпендикулярные прямые *OX*, *OY*, *OZ* определяют три плоскости α, β, γ. Точки *M* и *N* лежат в плоскостях β и γ. Постройте ортогональные проекции прямой *MN* на плоскости α, β, γ.

341. Балка закреплена концами на стенке и на потолке, причем расстояние от концов балки до линии пересечения потолка и стены равны, соответственно, 30 см и 40 см. Найдите длину балки, если длина ее проекции на линию пересечения потолка и стены равна 120 см.

Упражнения для повторения

342. Из точки *A* проведены к данной прямой две равные наклонные *AB* и *AC,* расстояние между основаниями которых равно 16 см. Определите длину проекции каждой наклонной на данную прямую.

343. В треугольнике проекции двух сторон на третью равны 15 м и 27 м, а большая из первых двух сторон равна 45 м. На какие части она делится перпендикуляром к третьей стороне, проведенным из ее середины.

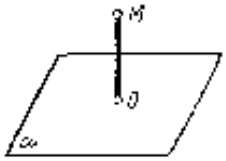
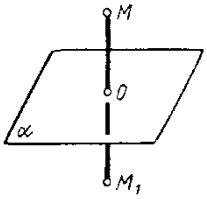
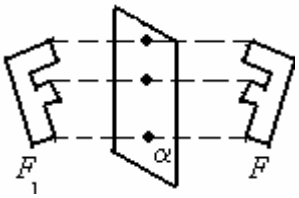
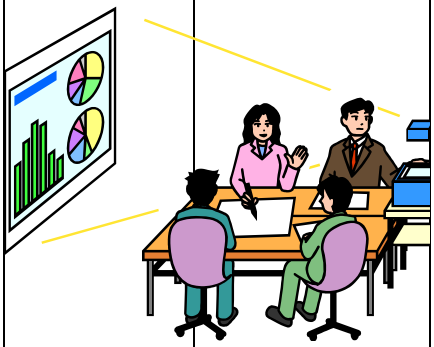
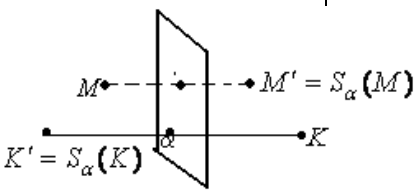
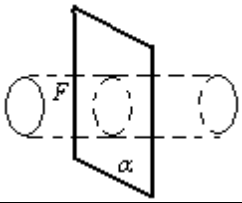
344. В прямоугольном треугольнике катеты равны 13 см и 84 см. Определите радиус вписанного круга.

345. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Определите расстояние от центра вписанной окружности до высоты, проведенной на гипотенузу.

346. Длины трех сторон прямоугольной трапеции равны 25 см, 25 см, 32 см. Найдите длину четвертой стороны.

Итог

Основные определения

Параллельная проекция точки на плоскость называется ее ***ортогональной проекцией,*** если прямая, определяющая направление проектирования, перпендикулярна плоскости проекций.		
Точки M и M_1 называются ***симметричными относительно плоскости α***, если отрезок MM_1 перпендикулярен α и точкой O пересечения его с α делится пополам. Точка плоскости α считается симметричной сама себе.		
Фигуры пространства F и F_1 называются ***симметричными относительно плоскости α***, если для каждой точки одной фигуры имеется симметричная ей точка во второй фигуре.		
Преобразование точек пространства, при котором произвольная точка пространства переходит в симметричную относительно данной плоскости, называют ***симметрией относительно плоскости.***		
Фигура называется ***симметричной относительно плоскости***, если относительно этой плоскости все ее точки переходят в точки этой самой фигуры.		

§ 18. Перпендикуляр и наклонная

Рассматриваются свойства перпендикуляра и наклонной к плоскости, их применения к измерению расстояний в пространстве.

В планиметрии измерение расстояний между точкой и прямой (или между параллельными прямыми) связано со сравнением длин наклонных и перпендикуляров. Рассмотрим аналогичные понятия в пространстве.

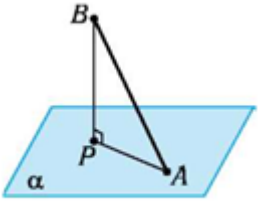


Рис. 400

Пусть один из концов A отрезка AB лежит в плоскости α, а другой — вне плоскости (рис. 400). Если отрезок и плоскость не перпендикулярны, то ортогональной проекцией отрезка AB на плоскость α является отрезок AP, где P — ортогональная проекция точки B на плоскость α. Имеем плоскость α и прямоугольный треугольник ABP, один из катетов которого лежит в плоскости, а второй — перпендикулярен ей.

Стороны прямоугольного треугольника ABP имеют свои названия: гипотенуза AB называется ***наклонной,*** катет BP — ***перпендикуляром,*** катет AP — ***проекцией наклонной*** (речь идет, конечно, об ортогональной проекции). Точку P называют ***основанием перпендикуляра BP,*** а точку A — ***основанием наклонной BA.***

Поскольку треугольник ABP прямоугольный, то, согласно теореме Пифагора

$$AP^2 + PB^2 = AB^2.$$

Это равенство вместе с другими свойствами прямоугольных треугольников позволяет сформулировать ряд свойств перпендикуляра, наклонной и ее проекции.

Теорема 1 *(свойство перпендикуляра к плоскости).*

Перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к данной плоскости.

Теорема 2 *(свойство наклонных и их проекций).*

Наклонные к плоскости, проведенные из одной точки, равны тогда и только тогда, когда равны их проекции. Если даны две наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, то большая наклонная имеет большую проекцию, и наоборот, большей проекции соответствует большая наклонная.

Все эти свойства можно считать следствиями теоремы Пифагора. Их легко можно проиллюстрировать примерами из окружающей среды.

Вертикальная подпорка к столбу с фонарем (рис. 401) меньше части столба от земли до места крепления подпорки (перпендикуляр меньше наклонной).

Рис. 401

Рис. 402

Рис. 403

При запуске воздушного змея чем больше отмотаешь бечевки (рис. 402), тем дальше будешь находиться от места, над которым находится змей (большей наклонной соответствует большая проекция).

Во время катания на карусели (рис. 403) все находятся на одинаковом расстоянии от столба, к которому крепятся кабинки (равные наклонные имеют равные проекции).

Свойства перпендикуляра и наклонной широко применяются в стереометрии для установления взаимного расположения геометрических фигур, измерения расстояний. Стоит обратить внимание и на удобство пользования терминологией, которая сформировалась при этом. Рассмотрим обобщение результатов примера 1 из § 17.

Задача 1. Доказать, что ортогональная проекция вершины правильной шестиугольной пирамиды на плоскость основания является центром окружности, описанной около основания пирамиды.

□ Пусть S — вершина пирамиды, A_1, A_2, ..., A_6 — вершины основания, а точка O — проекция вершины S на плоскость основания (рис. 404, а). Боковые ребра SA_i, i = 1, 2, …, 6, можно рассматривать как наклонные, проведенные к плоскости основания из точки S. Они равны между собой, а потому равны и их проекции A_iO на плоскость основания (рис. 404, б). Следовательно, каждая из вершин A_i основания расположена на одинаковом расстоянии от точки O, то есть на окружности с центром O и радиуса OA_i. ■

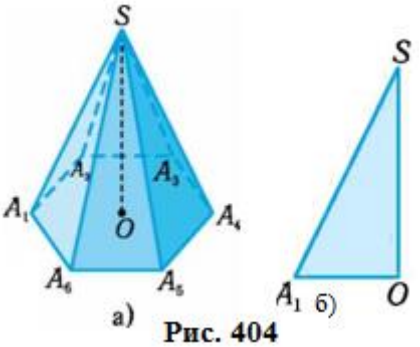


Рис. 404

Легко догадаться, что задача справедлива для произвольной правильной n-угольной пирамиды с таким же доказательством.

Если проанализировать решение задачи 1, то можно прийти к выводу, что ортогональная проекция вершины любой n-угольной пирамиды, боковые ребра которой равны между собой, на плоскость основания является центром окружности, описанной около основания пирамиды.

Пример 1. Найти расстояние от вершины C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a до центра O грани $ABCD$.

□ Построим рис. 405, который соответствует условию примера. Отрезок CC_1 — перпендикуляр к плоскости грани $ABCD$, C_1O — наклонная, CO — ее проекция. По условию, $CC_1 = a$, а CO равняется половине длины диагонали квадрата: $CO = \frac{1}{2}CA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

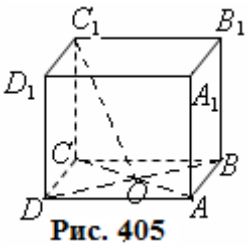


Рис. 405

Из прямоугольного треугольника COC_1 имеем: $C_1O = \sqrt{CO^2 + CC_1^2} = \sqrt{\frac{2}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. ■

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{2}}a.$

На самом деле это задание является сугубо планиметрическим, если рассмотреть равносторонний треугольник DC_1B со стороной $\sqrt{2}a$.

Рассмотрим задачу об измерении расстояния от точки до прямой в пространстве. Поскольку через прямую и точку, не лежащую на прямой, можно провести единственную плоскость, то сформулированная задача является вообще планиметрической. Однако в стереометрии эта задача имеет свои особенности, которые можно проиллюстрировать таким примером.

Пример 2. Найти расстояние от вершины башни до дороги, если известна высота башни h и расстояние a от дороги до подножия башни.

 Условие примера иллюстрирует рис. 406, на котором поверхность земли моделируется плоскостью α, дорога — прямой AB, башня — отрезком OO_1, перпендикулярным к плоскости α. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра OC, проведенного из точки O к прямой AB.

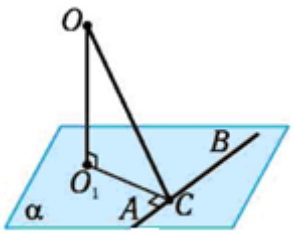


Рис. 406

Проблема заключается в том, как найти основание этого перпендикуляра, находясь в плоскости α. Очевидно, что для этого достаточно из точки O_1 провести перпендикуляр O_1C к прямой AB (рис. 406). Отрезок OC и является искомым перпендикуляром. Действительно, согласно свойству наклонных и проекций (теорема 2), каждый другой отрезок, соединяющий точку O с точкой прямой AB, длиннее отрезка OC, так как более длиннее его проекция. Вычисления в этой задаче простые. Поскольку треугольник OCO_1 прямоугольный и OC — его гипотенуза, то OC = $\sqrt{CO_1^2 + O_1O^2} = \sqrt{h^2 + a^2}$. ■

Ответ: $\sqrt{h^2 + a^2}$.

В рассмотренном примере мы пришли к выводу, который широко используется при измерении расстояний и установлении перпендикулярности прямых в пространстве.

Теорема 3 *(о трех перпендикулярах).*

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее проекции.

Сжатое доказательство этой теоремы фактически приведено в примере 2. Оно основывается на том, что сравнение длин наклонных, проведенных из одной точки, эквивалентно сравнению их проекций.

Теорема о трех перпендикулярах является признаком перпендикулярности прямых в пространстве, а потому имеет важное значение в стереометрии.

Пример 3. Плоскости квадратов $ABCD$ *и* ABC_1D_1 со стороной a перпендикулярны. Найти расстояние от середины M стороны C_1D_1 *до* стороны CD.

□ Расстояние от точки M до прямой CD равно длине отрезка MN, где N — середина CD (рис. 407). Действительно, перпендикуляр MP, проведенный к плоскости $ABCD$, лежит в плоскости ABC_1D_1, так как эти плоскости перпендикулярны. Поэтому $MP \perp AB$. Точка P является серединой отрезка AB, ибо $MP \parallel C_1B$ и M — середина C_1D_1. Но тогда проекция PN наклонной MN перпендикулярна прямой CD как отрезок, соединяющий середины противоположных сторон квадрата. По теореме о трех перпендикулярах (теорема 3), $MN \perp CD$, то есть MN — перпендикуляр к прямой CD. Из прямоугольного треугольника MPN имеем

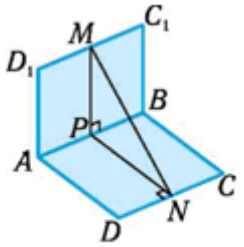


Рис. 407

$$MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a. \blacksquare$$

Ответ: $\sqrt{2}a$.

Сравните решение примеров 2 и 3. Что у них общего, чем они отличаются?

Пример 4. Из точки M гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр MN к плоскости треугольника. Провести через точку N прямую, перпендикулярную прямой BC.

□ Построим рис. 408 по условию задачи. Воспользуемся теоремой о трех перпендикулярах. Для этого из точки M проведем перпендикуляр MK к прямой BC. Поскольку $AC \perp CB$, то искомый перпендикуляр параллелен AC.

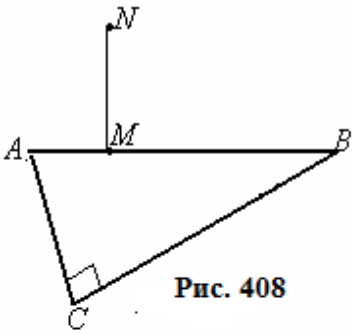


Рис. 408

Построение. Через точку M проведем прямую MK параллельно прямой AC (рис. 409), где K — точка ее пересечения с прямой BC. Наклонная NK перпендикулярна прямой BC. Прямая NK — искомая. ■

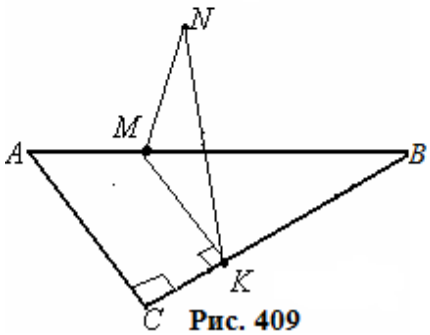


Рис. 409

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли перпендикуляр к плоскости, проведенный из конца наклонной, равняться ее проекции на эту плоскость?

2. Сколько равных между собой наклонных можно провести из конца перпендикуляра к плоскости?

3. Какую фигуру образуют основания всех равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки?

4. Чему равняется угол между перпендикуляром и наклонной, если наклонная вдвое длиннее перпендикуляра?

5. Точка пространства равноудалена от всех точек окружности. Верно ли, что она совпадает с центром окружности?

6. Прямая проходит через центр окружности и перпендикулярна её плоскости. Равноудалены ли точки прямой от точек окружности?

7. Верно ли, что каждая точка, равноудаленная от вершин квадрата, принадлежит прямой, пересекающей плоскость квадрата в его центре и перпендикулярной этой плоскости?

8. Верно ли, что прямая, перпендикулярна наклонной на некоторую плоскость, если она перпендикулярна ее проекции на эту плоскость?

9. Верно ли, что прямая, перпендикулярная наклонной на плоскость и ее проекции на эту плоскость, лежит в этой плоскости?

Упражнения на рисунках

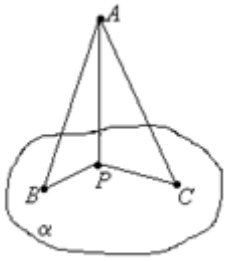


Рис. 410

1. На рис. 410 изображены две наклонные *AB* и *AC* и их проекции *PB* и *PC* на плоскость α. Какая из этих проекций больше, если:

1) AB = 6, *AC* = 4; 2) *AB* = 5, *AC* = 7?

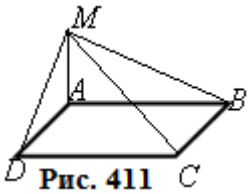


Рис. 411

2. Из вершины *A* прямоугольника *ABCD* (*AB* < *BC*) проведен перпендикуляр *AM* к его плоскости. Точка *M* соединена с точками *B, C, D* (рис. 411).

1) Сравните длины отрезков *MA, MB, TC, MD*.

2) Длина какого отрезка равняется расстоянию от точки *M* до прямой *BC*?

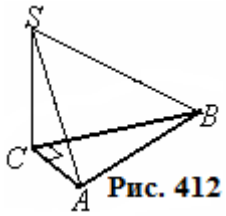


Рис. 412

3. Из вершины *C* прямого угла прямоугольного треугольника *ABC* проведен перпендикуляр *CS* к его плоскости (рис. 412).

1) Какая из наклонных *SA* и *SB* больше, если угол *A* равняется 30°?

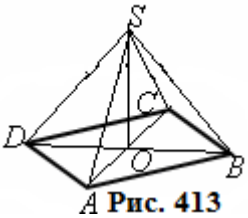


Рис. 413

2) Длина какого отрезка равняется расстоянию от точки *S* до прямой, проходящей через точку *B* параллельно прямой *AC*?

4. Из центра симметрии *O* параллелограмма *ABCD* проведен перпендикуляр *OS* к его плоскости (рис. 413).

1) Сравните длины наклонных *SA* и *SC*.

2) При каких условиях длина наклонной *SD* больше длины наклонной *SB*?

3) Длине какого отрезка равняется расстояние от точки *S* до прямой, проходящей через точку *B* параллельно прямой *AC*?

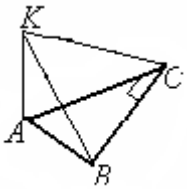


Рис. 414

5. Из вершины *A* прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *C* проведен перпендикуляр *AK* к плоскости треугольника (рис. 414).

1) Длина какого отрезка равняется расстоянию от точки *K* до катета *CB*?

2) При каких условиях длина наклонной *KB* больше длины наклонной *KC*?

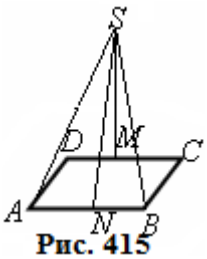


Рис. 415

6. Из середины *M* стороны *CD* прямоугольника *ABCD* проведен перпендикуляр *MS* к его плоскости, *N* — середина *AB* (рис. 415).

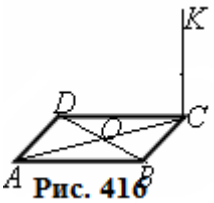


Рис. 416

1) Сравните длины наклонных *SC* и *SB*.
2) Длина какого отрезка равняется расстоянию от точки *S* до прямой *AB*?
3) При каких условиях длины наклонных *SC* и *SN* равны?

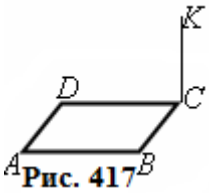


Рис. 417

7. Из вершины *C* ромба *ABCD* проведен перпендикуляр *CK* к его плоскости (рис. 416).
1) Сравните длины наклонных *KO* и *KB*.
2) Длина какого отрезка равняется расстоянию от точки *K* до диагонали *BD*?

8. Из вершины *C* параллелограмма *ABCD* с острым углом *BAD* и *AB* > *AD* проведен перпендикуляр *CK* к его плоскости (рис. 417). Сравните расстояния от точки *K* до прямых *AB* и *AD*.

В связи со значимостью теоремы о трех перпендикулярах (теорема 3) рассмотрим подробнее ее доказательство. При этом воспользуемся способом, связанным с использованием ее для установления перпендикулярности прямых в пространстве.

Дано: *AP* — проекция наклонной *AB* к плоскости α, $l \subset \alpha$, $A \in l$. **Доказать:** $l \perp AB \Leftrightarrow l \perp AP$.

□ Доказательство теоремы состоит из двух частей. Пусть сначала наклонная *AB* перпендикулярна к прямой *l*, лежащей в плоскости α (рис. 418, а). Докажем, что ее проекция *AP* также перпендикулярна прямой *l*.

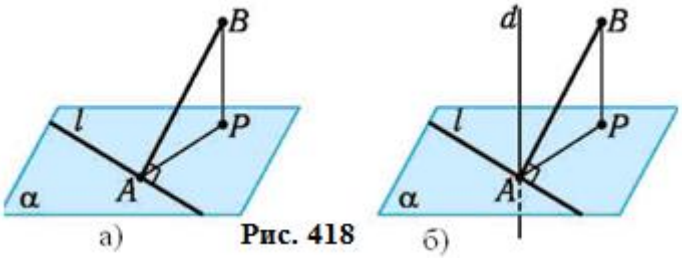


Рис. 418

Проведем через точку *A* в плоскости треугольника *ABP* прямую *d*, параллельную перпендикуляру *BP* (рис. 418, б). Согласно теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1 § 15), прямая *l* перпендикулярна плоскости α, поэтому перпендикулярны между собой прямые *d* и *l*. По условию, прямая *l* перпендикулярна еще и прямой *AB*. Следовательно, прямая *l* перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости *ABP*, а потому перпендикулярна этой плоскости, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 16). Поскольку проекция *AP* лежит в плоскости *ABP* и пересекает *l*, то $AP \perp l$.

Доказательство обратного утверждения аналогично приведенному. Для этого достаточно слово «проекция» заменить словом «наклонная», и наоборот.
■

Применение теоремы о трех перпендикулярах как признака перпендикулярности прямых в пространстве сводится к проверке правильности одного из следующих утверждений.

1) Содержит ли одна из данных прямых проекцию наклонной к плоскости, в которой лежит другая прямая, и перпендикулярна ли наклонная ей?

2) Содержит ли одна из данных прямых наклонную к плоскости, в которой лежит другая прямая, и перпендикулярна ли проекция наклонной ей?

Пример 5. Отрезок *AP* перпендикулярен плоскости параллелограмма *ABCD*. Докажите, что:

1) *ABCD* — прямоугольник, если прямая *PD* перпендикулярна *CD*;

2) *ABCD* — ромб, если прямая *PO*, где *O* — точка пересечения диагоналей параллелограмма, перпендикулярна *BD*.

□ 1) Если прямая *PD* перпендикулярна прямой *CD*, лежащей в плоскости параллелограмма α (рис. 419), то, по теореме о трех перпендикулярах (теорема 3), ее проекция *AD* перпендикулярна прямой *DC*. Поэтому параллелограмм *ABCD* является прямоугольником.

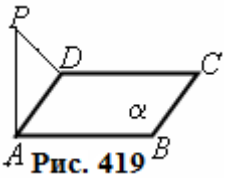


Рис. 419

2) Если наклонная *PO* перпендикулярна диагонали *BD* (рис. 420), то ее проекция *AO* будет перпендикулярна прямой *BD*, по теореме о трех перпендикулярах. Диагонали параллелограмма *ABCD* — перпендикулярны. Поэтому он является ромбом. ■

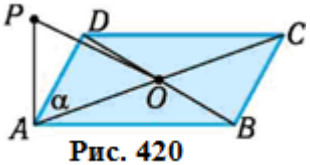


Рис. 420

Понятие наклонной, перпендикуляра, проекции, теорема о трех перпендикулярах расширяют возможности нахождения геометрических мест точек пространства, которые удовлетворяют определенным условиям, связанным с расстояниями между точками, точками и прямыми. При этом часто анализируют и используют плоскую ситуацию, а потом обобщают ее на пространство, обращаясь к наклонным и проекциям.

Задача 2. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

□ Две пересекающиеся прямые *a* и *b* определяют некоторую плоскость α (рис. 421). В этой плоскости, как известно из планиметрии, геометрическим местом точек, равноудаленных от этих прямых, является «крест» прямых *x*, *y*, на которых лежат биссектрисы четырех углов, образованных прямыми *a* и *b*. И уже совсем понятной становится идея «подняться» от плоскости в пространство, проведя через прямые *x* и *y* плоскости δ и γ, перпендикулярные α (напомним, что они состоят из перпендикулярных α прямых, проходящих соответственно через прямые *x* и *y* (рис. 422).

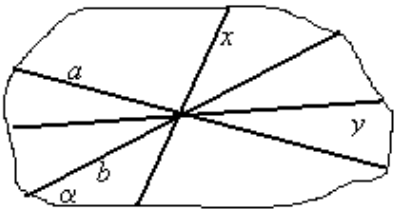


Рис. 421

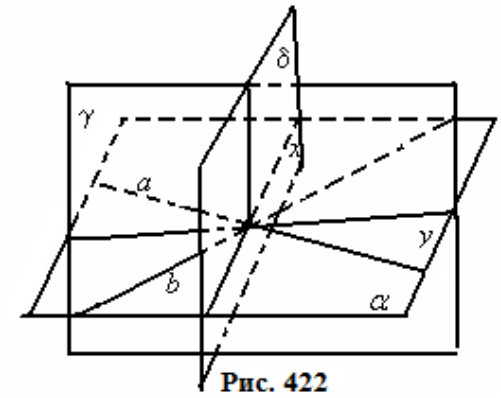


Рис. 422

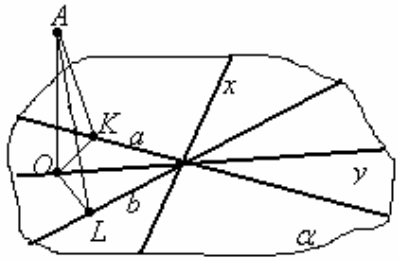


Рис. 423

Каждая точка A этих плоскостей ортогонально проектируется на прямую x или на прямую y. Проекция O точки A равноудалена от прямых a и b, и если эти расстояния определяются отрезками $OK = OL$ (рис. 423), перпендикулярными a и b, то наклонные AK и AL также будут перпендикулярны a и b и равны между собой. Поэтому эти наклонные определяют одинаковые расстояния от точки A до прямых a и b.

Мы доказали, что все точки плоскостей δ и γ равноудалены от прямых a и b. Аналогично доказывается, что произвольная точка, равноудаленная от прямых a и b, находится в плоскости δ или γ. Предлагаем доказать это самостоятельно. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Какую фигуру образуют основания всех наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, если они наклонены под равными углами к перпендикуляру, проведенному из этой точки?

2. Две равные наклонные, проведенные из разных точек к плоскости, имеют равные проекции на эту плоскость. Образуют ли они равные углы с перпендикулярами, проведенными из этих точек к этой плоскости?

3. Где расположены точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от вершин прямоугольника?

4. Какую фигуру образуют точки пространства, равноудаленные от вершин треугольника?

5. Верно ли, что прямая перпендикулярна к плоскости квадрата, если две точки прямой равноудалены от всех вершин квадрата?

6. Точка, находящаяся на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата, равноудалена от всех вершин квадрата. Верно ли, что прямая пересекает плоскость квадрата в его центре?

7. Верно ли, что проекция вершины тетраэдра на его основание равноудалена от вершин основания, если боковые ребра тетраэдра равны между собой?

8. Прямая пересекает плоскость. Всегда ли существует в этой плоскости прямая, перпендикулярная этой прямой?

9. Точка пространства равноудалена от сторон угла. Где расположена ее ортогональная проекция на плоскость угла?

10. Перпендикулярна ли прямая плоскости треугольника, если две точки прямой равноудалены от всех сторон треугольника?

Графические упражнения

1. Из вершины *A* равнобедренного треугольника с основанием *BC* проведен перпендикуляр *AS* к плоскости треугольника. Изобразите отрезок, длиной которого выражается расстояние от точки *S* до прямой *BC*.

2. Через середину *D* стороны *AC* равностороннего треугольника *ABC* проведен перпендикуляр *DS*. Проведите в плоскости треугольника через вершину *B* прямую, перпендикулярную наклонной *SB*.

3. Из центра *O* окружности проведены перпендикуляр *OS* к плоскости окружности. Отрезок *SA* соединяет точку *S* с точкой окружности *A*. Проведите через точку *A* в плоскости окружности прямую, перпендикулярную наклонной *SA*.

4. Плоскости квадрата *ABCD* и равностороннего треугольника *ABK* перпендикулярны. Постройте прямую, проходящую через точку *K* перпендикулярно *CD*.

5. Через вершину *C* правильной треугольной пирамиды *SABC* проведите прямую, перпендикулярную прямой *SC*.

6. В основании пирамиды *SABCD* лежит квадрат *ABCD* с центром *O*. Ребро пирамиды *SA* перпендикулярно плоскости основания. Проведите через точку *C* прямую, перпендикулярную наклонной *SC*.

7. На изображении правильной пирамиды *SABC* из точки *M* ребра *SC* проведите перпендикуляр к стороне основы *AB*.

В планиметрии употреблялось понятие геометрического места точек на плоскости, как фигуры, состоящей из всех точек, обладающих определенным свойством. Аналогичное содержание имеет понятие геометрического места точек в пространстве, которым мы уже пользовались. Его употребляют при построении фигур, введении определений.

Как и в планиметрии, наиболее употребляемыми являются геометрические места точек в пространстве, характеризующиеся с помощью расстояния. В задаче 5 §14 доказано, что геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух данных точек *A* и *B*, является плоскость, перпендикулярная отрезку *AB* и делящая его пополам. Этот факт является обобщением соответствующего геометрического места точек на плоскости. И вообще, геометрические места точек на плоскости и в пространстве, обладающие теми же свойствами, имеют определенные аналогии. Например, окружность — геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной точки на определенное расстояние. А геометрическим местом точек пространства, удаленных от данной

точки на определенное расстояние, является ***сфера*** — пространственное обобщение понятия окружности.

Сфера — от греческого σφαιρα (sphaira) — круглое тело, мяч, шар.

Установление того, что фигура Ф является геометрическим местом точек, удовлетворяющих определенному условию, сводится к обоснованию справедливости двух утверждений:

1) если точка M удовлетворяет данному условию, то точка принадлежит фигуре Ф;

2) если точка M принадлежит фигуре Ф, то она удовлетворяет данному условию.

Рассмотрение задачи о геометрическом месте точек, равноудаленных от трех точек, не лежащих на одной прямой (пример 6 §16) иллюстрирует важный метод решения задач на нахождение геометрических мест точек. Он заключается в том, что находят фигуру Φ_1, которая удовлетворяет части условий, потом фигуру Φ_2, удовлетворяющую остальным условиям. Тогда пересечение фигур $\Phi_1 \cap \Phi_2$ является искомым геометрическим местом точек. В указанном примере фигура Φ_1 — это геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек A и B, а фигура Φ_2 — геометрическое место точек, равноудаленных от точек B и С. Пересечение $\Phi_1 \cap \Phi_2$ и было искомым геометрическим местом точек в этом примере. Рассмотренный метод иногда называют ***методом геометрических мест точек***.

В данном параграфе уже неоднократно приходилось рассматривать геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольников, четырехугольников, их сторон. В общем виде имеем такую задачу.

Задача 3. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от вершин многоугольника.

□ Для треугольников задача решена в примере 6 §16. Она всегда имеет решение. Искомым геометрическим местом точек является прямая, перпендикулярная плоскости треугольника, пересекающаят ее в центре окружности, описанной около треугольника. Поскольку около четырехугольника не всегда можно описать окружность, то вполне понятно, что решение задачи существует не всегда. Если же можно описать окружность около четырехугольника, то ответ к задаче является таким же, как и для треугольника. В общем случае ситуация такая же, как и для четырехугольников.

Пусть A_1, A_2, …, A_n — вершины многоугольника, около которого можно описать окружность, и O — центр этой окружности. Тогда произвольная точка прямой OS, перпендикулярной плоскости многоугольника, равноудалена от вершин многоугольника. Это вытекает из равенства проекций наклонных, которые соединяют произвольную точку прямой OS с вершинами многоугольника (рис. 424).

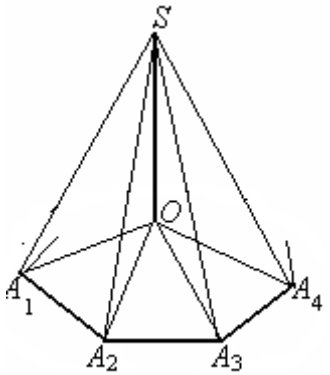


Рис. 424

И наоборот, если точка M равноудалена от вершин многоугольника, то есть наклонные MA_1, MA_2, …, MA_n равны между собой, и P — основание перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости многоугольника, то проекции PA_1, PA_2, …, PA_n равны, то есть точка P равноудалена от вершин многоугольника. По условию, она совпадает с точкой O, а точка M принадлежит прямой OS.

В ходе решения задачи оказалось необходимым условие существования точки в плоскости многоугольника, равноудаленной от вершин многоугольника. То есть задача имеет решение тогда и только тогда, когда около многоугольника можно описать окружность. ■

Заслуживает внимания и задача, родственная рассмотренной.

Задача 4. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от сторон многоугольнка.

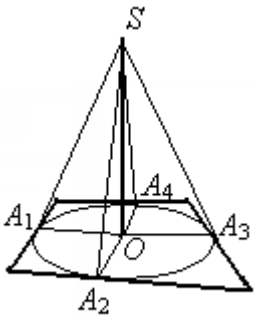


Рис. 425

□ На плоскости задача имеет решение при условии существования окружности, вписанной в многоугольник. Как и в предыдущей задаче, переход от пространственной ситуации к плоской осуществляется с помощью перехода от наклонных к их проекциям с сохранением свойства, характеризующего геометрическое место точек. В данном случае это обеспечивает теорема о трех перпендикулярах. Таким образом, точка пространства удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда ее проекция на плоскость удовлетворяет этому условию. Отсюда вытекает, что искомым геометрическим местом точек будет прямая, перпендикулярная к плоскости многоугольника, проходящая через центр окружности, вписанной в многоугольник, если она существует (рис.425). ■

Задания для размышлений

1. Докажите с помощью теоремы о трех перпендикулярах, что диагональ куба перпендикулярна плоскости, проходящей через концы ребер, выходящих из той же вершины, что и диагональ.

2. Сформулируйте для всех известных Вам задач о геометрических местах точек на плоскости их пространственные аналоги. Решите их.

Контрольные вопросы

1. Может ли длина наклонной, проведенной из данной точки к плоскости, равняться длине перпендикуляра, проведенной из этой же точки?

2. Может ли наклонная быть короче своей проекции?

3. Могут ли быть равными проекции двух наклонных к данной плоскости, если одна длиннее другой?

4. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через наклонную к этой плоскости?

5. Точку, находящуюся на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата, соединили с вершинами квадрата равными отрезками. Обязательно ли прямая пересекает плоскость в центре квадрата?

6. Точка A пространства равноудалена от двух вершин квадрата с центром O. Как расположены прямая AO и плоскость квадрата?

7. Какую фигуру образует совокупность точек, равноудаленных от: а) вершин квадрата; б) точек окружности?

8. Точка M лежит вне плоскости треугольника ABC. Где расположено основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC, если точка расположена на одинаковом расстоянии от вершин треугольника?

9. Верно ли, что боковые ребра тетраэдра равны, если проекция его вершины на плоскость основания равноудалена от вершин основания тетраэдра?

10. Какую фигуру образуют точки, равноудаленные от: а) вершин треугольника; б) прямых, содержащих стороны треугольника?

Задачи

347°. Из некоторой точки пространства проведен к данной плоскости перпендикуляр длиной 6 см и наклонная длиной 9 см. Найдите длину проекции наклонной и угол, который она образует с наклонной.

348. Пусть MA — перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$ со сторонами 15 см и 16 см, MC = 25 см. Найдите расстояния от точки M до других вершин прямоугольника.

349. Из некоторой точки A к данной плоскости проведен перпендикуляр AO длиной 1 см и две равные между собой наклонные AB и AC, образующие с перпендикуляром углы по 60°, а между собой — прямой угол. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

350. Из некоторой точки к данной плоскости проведены две равные наклонные. Угол между ними равен 60°, угол между их проекциями — 90°. Найдите угол между наклонной и ее проекцией.

351. Из данной точки пространства к плоскости проведены две наклонные, разность длин которых составляет 6 см. Их проекции на эту плоскость равны 27 см и 15 см. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из данной точки к плоскости.

352. Из точки A проведен к данной плоскости перпендикуляр AC длиной 10 см, а из точки B — наклонная BD длиной 11 см. Найдите AB, если CD = 6 см и $AB \perp BD$.

353. Из точки M, лежащей за пределами плоскости треугольника ABC, проведите перпендикуляр к прямой AB, если:

1) прямая MC перпендикулярна плоскости ABC и $AC = BC$;

2) основание O перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости ABC, делит BC пополам, а угол BAC — прямой;

3) треугольник ABC — равносторонний, O — середина стороны BC и $MO \perp ABC$.

354. Точка, лежащая вне плоскости треугольника со сторонами 10 см, 8 см, 6 см, удалена от его вершин на 13 см. Найдите расстояния от данной точки до сторон треугольника.

355°. Из точки пересечения диагоналей прямоугольника проведен перпендикуляр к его плоскости. Докажите, что каждая точка этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника.

356. Из данной точки *A,* не лежащей в плоскости α, проведены наклонные *AB* и *AC,* образующие равные углы с прямой *BC* плоскости α. Докажите, что проекции этих наклонных на плоскость α равны между собой.

357. Докажите, что прямые, проходящие через точку *M* прямой, перпендикулярной плоскости α, и образующие с ней равные острые углы, пересекают плоскость α в точках, расположенных на окружности.

358. Пусть из точки *A*, находящейся вне плоскости α, опущен перпендикуляр на эту плоскость, а из основания перпендикуляра проведен перпендикуляр к прямой *BC*, лежащей в плоскости α. Докажите, что плоскость, проходящая через эти перпендикуляры, будет перпендикулярной прямой *BC*.

359. Середина *O* большей высоты треугольника со сторонами 13 см, 13 см, 10 см является основанием перпендикуляра *OS* = 8 см к плоскости треугольника. Вычислите расстояния от точки *S* до сторон треугольника.

360. Из середины стороны ромба со стороной a проведен перпендикуляр к его плоскости, верхний конец которого удален на $\frac{a}{2}$ от большей диагонали длиной d. Определите длину этого перпендикуляра.

361. Из середины стороны правильного шестиугольника со стороной a проведен перпендикуляр к его плоскости длиной $\frac{a}{4}$. Найдите расстояние от его верхнего конца до сторон шестиугольника.

362. В правильной четырехугольной пирамиде плоскости двух противоположных боковых граней — перпендикулярны. Перпендикулярны ли плоскости двух других боковых граней?

363. Точки *A* и *B* лежат на боковых рёбрах прямого параллелепипеда, не принадлежащих одной грани. Найдите в плоскости основания точку, сумма расстояний котопрой от *A* и *B* будет наименьшей. А есть ли понятие прямого параллелепипеда?

Упражнения для повторения

364. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Докажите, что высота B_1K_1 треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости ACC_1.
2) Проведите из точки *B* прямую, перпендикулярную диагонали A_1C_1.
3) Вычислите расстояние от точки *B* до прямой A_1C_1.

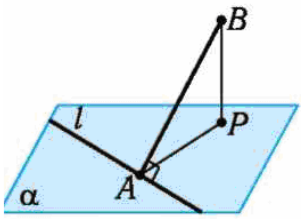
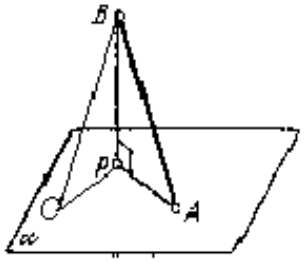
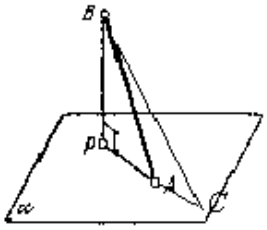
365. Дан прямоугольный треугольник *ABC,* катеты какого *AC* и *BC* равны, соответственно, 20 см и 15 см. Через точку *A* проведена плоскость α, парал-

лельную прямой BC. Длина проекции одного из катетов на плоскость α равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

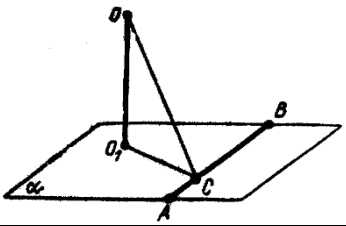
366. Известно, что две хорды окружности пересекаются под прямым углом. Докажите, что сумма длин этих хорд больше длины диаметра окружности.

367. Эскалатор метрополитена имеет 170 ступеней шириной 40 см и высотой 20 см. Определите: 1) длину эскалатора; 2) угол его наклона к горизонтали; 3) глубину станции (то есть высоту эскалатора).

Итог
Свойства перпендикуляра, наклонной и ее проекции

Перпендикуляр, проведенный из точки до плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из этой же точки к данной плоскости.	 $BP \perp \alpha, P \in \alpha, A \in \alpha \Rightarrow BP < BA$
Наклонные к плоскости, проведенные из одной точки, равны тогда и только тогда, когда равны их проекции.	 $BP \perp \alpha; \quad BA = BC \Leftrightarrow CP = AP$
Если даны две наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, то большая наклонная имеет большую проекцию, и наоборот, — большей проекции соответствует большая наклонная.	 $BP \perp \alpha; BA < BC \Leftrightarrow AP < CP$

Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярная ее преокции.	

§19. Измерение расстояний в пространстве

В этом параграфе рассматривается измерение расстояний между основными фигурами стереометрии (точкой и плоскостью, прямой и плоскостью, плоскостями).

Измерение расстояний между различными физическими объектами является одним из самых распространённых видов математической деятельности человека. Если размерами объекта можно пренебречь, то идет речь об измерении расстояний между точками, то есть об определении длин отрезков. В других случаях моделирование данных объектов с помощью точек при измерении расстояний между ними нецелесообразно или бессмысленно, например, когда идет речь об измерении расстояния между электролампой и столом (рис. 426), если первую можно отождествлять с точкой, то для моделирования стола более пригодна плоскость или ее часть. Аналогичная ситуация возникает при определении расстояния между фасадами зданий (рис. 427), что при математическом моделировании сводится к определению расстояния между параллельными плоскостями; при установлении вертикального рельса на определенном расстоянии от стены (рис. 428) (определение расстояния между параллельными прямой и плоскостью) и т. п.

Рис. 426

Рис. 427

Рис. 428

Рассмотрим вопрос об измерении расстояний между самыми простыми фигурами в пространстве. Содержание понятия расстояния остаётся таким же, как и в планиметрии. Например, расстояние d от точки A до прямой a — это кратчайшее расстояние между этой точкой и точками прямой (рис. 429), а расстояние между параллельными прямыми a и b — это длина d кратчайшего из отрезков, соединяющих точки этих прямых (рис. 430).

Такое же содержание имеет и общее понятие расстояния между фигурами. Например, измерение расстояния d от пункта A до озера B (рис. 431), расстояния d между озерами A и B (рис. 432) сводится к измерению кратчайшего отрезка, соединяющего точки этих фигур (точка тоже является фигурой).

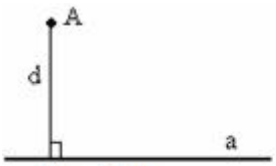


Рис. 429

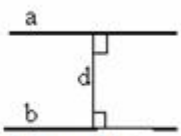


Рис. 430

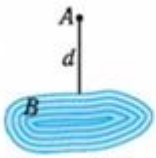


Рис. 431

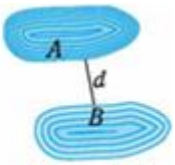


Рис. 432

Обобщение понятия расстояния между фигурами в пространстве не вызывает затруднений.

Расстоянием между фигурами называют длину кратчайшего из отрезков, соединяющих точки данных фигур.

Если фигуры пересекаются, то будем считать, что расстояние между ними равно нулю. Это и понятно, так как фигуры в целом «не удалены» друг от друга. Для фигур, не имеющих общих точек, расстояние между ними является одной из мер их взаимного расположения.

Понятно, что задача нахождения расстояний между произвольными геометрическими фигурами является слишком общей, а потому ограничимся детальным рассмотрением расстояний между простейшими фигурами пространства — точками, прямыми, плоскостями. Как и в планиметрии, эти расстояния реализуются через длины соответствующих перпендикуляров. Кроме того, к указанным ситуациям часто сводится задача об измерении расстояний между более сложными фигурами.

Теорема 1 *(о расстоянии от точки до плоскости).*

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки на данную плоскость.

Это свойство расстояния от точки до плоскости непосредственно вытекает из свойства наклонных и перпендикуляров. Действительно, перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше наклонных, проведенных из той же точки до точек плоскости (рис. 433).

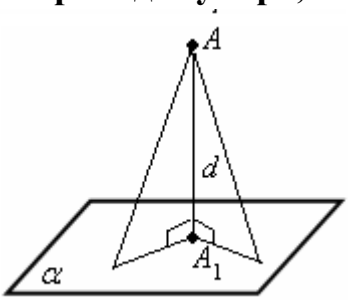


Рис. 433

Теорема 2 *(о расстоянии между прямой и плоскостью).*

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равняется длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой к данной плоскости.

Обоснование этого свойства о расстоянии между прямой и плоскостью опирается на свойства прямой, параллельной плоскости, и теорему 1 о расстоянии от точки к плоскости. Действительно, расстояние от каждой точки прямой до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки к плоскости. Для точек прямой, параллельной плоскости, эти расстояния являются равными (рис. 434).

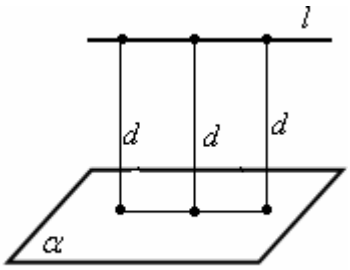


Рис. 434

Теорема 3 *(о расстоянии между параллельными плоскостями).*

Расстояние между параллельными плоскостями равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости ко второй плоскости.

Обоснование теоремы 3 аналогично обоснованию теоремы 2. Отличие заключается лишь в том, что перпендикуляры проводятся из всех точек одной плоскости ко

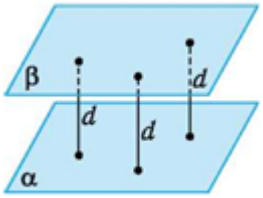


Рис. 435

второй (рис. 435).

Приведенными свойствами широко пользуются в различных сферах деятельности человека, в быту. Например, с их помощью определяют расстояния от самолета до поверхности земли, от светильника до пола, от провода линии электропередач до поверхности земли, между потолком и полом и т. п.

Пример 1. Плоскости правильного треугольника *ABS* и квадрата *ABCD* со стороной *a* перпендикулярны, точки *L, K, M* являются серединами соответственно сторон *DC, AB, AS*. Найти расстояние:

1) от точки *A* до прямой *BS*;
2) от точки *A* до плоскости *SBC;*
3) от прямой *AD* до плоскости *SBC*;
4) между плоскостями *MKL* и *SBC*.

Чтобы найти расстояние от точки до прямой или плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями, необходимо:
– убедиться, что заданные фигуры не имеют общих точек;
– построить соответствующий ситуации перпендикуляр;
– найти длину этого перпендикуляра.

 1) Расстояние от точки *A* до прямой *BS* равно длине перпендикуляра, проведенного из точки *A* к прямой *BS* в плоскости *ABS*. Поскольку треугольник *ABS* — правильный, то таким перпендикуляром будет медиана *AP* этого треугольника (рис. 436). Её длина равна $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

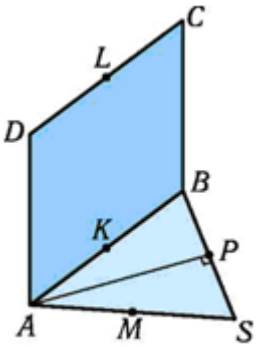


Рис. 436

2) Расстояние от точки *A* до плоскости *SBC* равно, по свойству расстояния от точки до плоскости (теорема 1), длине перпендикуляра, проведенного из точки *A* к плоскости *SBC*. Этим перпендикуляром будет отрезок *AP*, где *P* — середина стороны *SB* (рис. 436). Действительно, отрезок *AP* перпендикулярен к стороне *SB* треугольника *ABS*, так как он является медианой правильного треугольника. Прямая *BC* перпендикулярна плоскости *ABS*, ибо она лежит в одной из перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения. Проведем через точку *P* прямую *PE*, параллельную прямой *BC* (рис. 437). Она лежит в плоскости *SBC* (почему?) и перпендикулярна плоскости *ABS*, по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1 § 15): $BC \parallel PE$, $BC \perp ABS$. Поэтому $PE \perp ABS$. По определению, $PE \perp AP$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1 § 14), $AP \perp SBC$. Длина перпендикуляра *AP* равна $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Это и является искомым расстоянием от точки *A* до плоскости *SBC*.

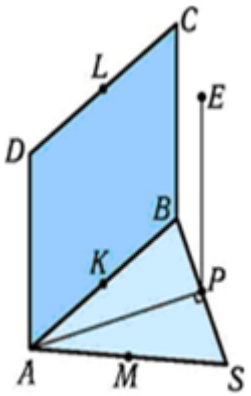


Рис. 437

3) Прямая *AD* и плоскость *SBC* параллельны, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1 § 12): $AD \parallel BC$. Поэтому искомое расстояние, по свойству расстояния между прямой и плоскостью (теорема

2), равно расстоянию от точки A до плоскости SBC и, по предыдущему заданию, равно $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

4) Плоскости MKL и SBC — параллельны, по признаку параллельности плоскостей (теорема 1 §13): $KM \parallel BC$ (KM — средняя линия треугольника ABS), $KL \parallel BC$ (KL — отрезок, соединяющий середины параллельных сторон квадрата $ABCD$), поэтому $MKL \parallel SBC$. Следовательно, искомое расстояние, по свойству расстояния между параллельными плоскостями (теорема 3), равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки плоскости MKL к плоскости SBC. Возьмем точку пересечения F отрезков MK и AP (рис. 438). Поскольку AP является перпендикуляром к плоскости SBC (см. задание 2), то FP — перпендикуляр к этой плоскости. Его длина равна $\frac{1}{2}AP$, так как средняя линия треугольника делит медиану, которую она пересекает, пополам (почему?). Искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{4}a$. ■

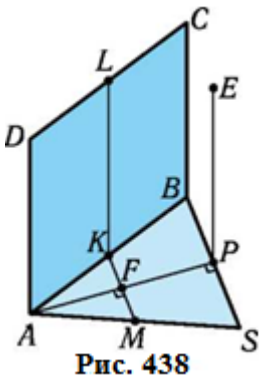


Рис. 438

Ответ: 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

Пример 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 см. Найдите расстояния:

1) от вершины D_1 до прямой AC;

2) от точки A до плоскости D_1DB;

3) от прямой AA_1 до плоскости DBB_1;

4) от плоскости, проходящей через середины ребер AB, AD, A_1B_1, до плоскости DBB_1.

□ 1) Для нахождения расстояния от вершины D_1 до прямой AC проведем из точки D_1 перпендикуляр к этой прямой. Нетрудно установить, что им будет отрезок D_1O, где O — центр грани $ABCD$ (рис. 439). Действительно, D_1D — перпендикуляр к плоскости $ABCD$, DO — проекция наклонной D_1O. Прямая AC лежит в плоскости $ABCD$ и перпендикулярна проекции DO по свойству диагоналей квадрата. Поэтому по теореме о трех перпендикулярах (теорема 3 § 18) наклонная D_1O перпендикулярна прямой AC. Она является искомым перпендикуляром к прямой AC. Из прямоугольного треугольника DD_1O, в котором $DD_1 = 2$ см, а, имеем: $D_1O = \sqrt{DD_1^2 + DO^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$ (см).

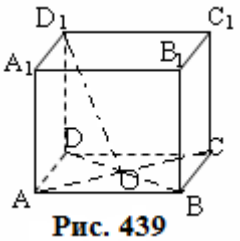


Рис. 439

2) Расстояние от точки A до плоскости D_1DB равняется длине перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости D_1DB. Этим перпендикуляром является отрезок AO (рис. 439) по признаку перпендикулярности прямой и

плоскости: $AO \perp BD$ по свойству диагоналей квадрата, $AO \perp OD_1$, как это было доказано во время решения задания 1). Поэтому $AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ (см).

3) Прямая AA_1 параллельна плоскости DBB_1 по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1 § 12): $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \subset DBB_1$. Расстояние от прямой AA_1 до плоскости DBB_1 равняется расстоянию от точки A до этой плоскости. Поскольку плоскость DBB_1 содержит точку D_1 ($BB_1 \parallel DD_1$), то найденное в предыдущем задании расстояние и является искомым: $AO = \sqrt{2}$ (см).

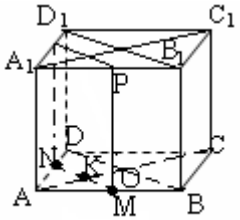


Рис. 440

4) Пусть M, N, P — середины ребер AB, AD, A_1B_1 (рис. 440). Плоскости NMP и DBB_1 параллельны по признаку параллельности плоскостей (теорема 1 § 13): $NM \parallel DB$ по свойству средней линии треугольника, $NP \parallel BB_1$, как отрезок, соединяющий середины параллельных сторон квадрата. Искомое расстояние равняется длине перпендикуляра, проведенного из точки K пересечения NM с AC к плоскости DBB_1. Но точка K является серединой отрезка AO по теореме Фалеса. Поэтому искомое расстояние равняется $\frac{1}{2}AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см). ■

Ответ: 1) $\sqrt{6}$ см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) $\sqrt{2}$ см; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см.

Вопросы для самоконтроля

1. Известно, что две точки A и B равноудалены от плоскости α. Как расположены прямая AB и плоскость α?

2. Пусть прямая a параллельна плоскости α. Могут ли точки прямой a находиться на разных расстояниях от точек плоскости α?

3. Верно ли, что если расстояние от прямой до плоскости отлично от нуля, то прямая и плоскость параллельны?

4. Верно ли, что если расстояние от прямой до плоскости равняется нулю, то прямая лежит в этой плоскости?

5. Известно, что отрезок AB удален от плоскости α на 3 см. Означает ли это, что прямая AB удалена от плоскости α на 3 см?

6. Прямые a и b находятся на одинаковом отличном от нуля расстоянии от плоскости α. Параллельны ли они между собой?

7. Верно ли, что две плоскости совпадают, если расстояние между ними равняется нулю?

8. Параллельны ли две прямые, если они имеют два общих для них перпендикуляра?

Упражнения на рисунках

1. На рис. 441 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, точки M, M_1 — середины ребер AD, A_1D_1 соответственно. Найдите расстояние:

1) от точки A_1 до прямой AB;
2) от точки D_1 до прямой AB;
3) от точки A_1 до плоскости BCC_1B_1;
4) от точки A_1 до плоскости AB_1C_1D;
5) от точки M_1 до плоскости AB_1C_1D;
6) от прямой A_1D_1 до плоскости AB_1C_1D;
7) от прямой AD_1 до плоскости AB_1C_1D;
8) между плоскостями AA_1D_1 и BB_1C_1.

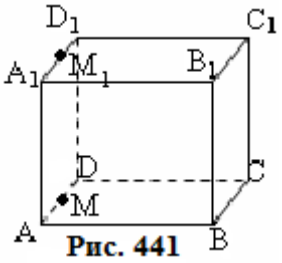


Рис. 441

2. На рис. 442 изображен правильный тетраэдр $ABCD$, F — середина BC, O — центр грани ABC. Длина какого отрезка равняется расстоянию:

1) от точки D до плоскости ABC;
2) от точки D до прямой BC;
3) от точки C до плоскости AOB?

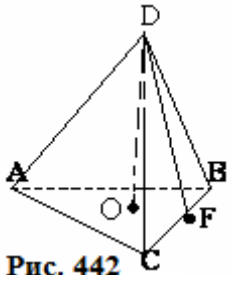


Рис. 442

3. Из центра O квадрата $ABCD$ (рис. 443) проведен перпендикуляр OS к плоскости квадрата. Точка M — середина BC, P — основание высоты треугольника OMS, OK — его медиана. Длине какого отрезка равняется расстояние:

1) от точки O до плоскости BCS;
2) от точки S до плоскости ABC;
3) от точки C до плоскости BDS?

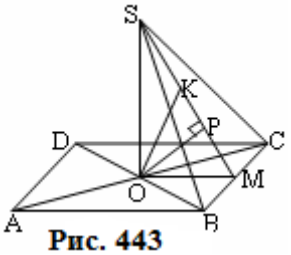


Рис. 443

4. На рис. 444 точка S, не лежащая в плоскости квадрата $ABCD$, удалена от каждой из его сторон на 6 см. Точки P, N, Q, M являются серединами сторон квадрата, каждая из которых равняется 6 см. Найдите расстояние:

1) от точки S до плоскости квадрата;
2) от точки D до плоскости ACS;
3) от прямой DC до плоскости MNS;
4) от прямой MQ до плоскости ACS.

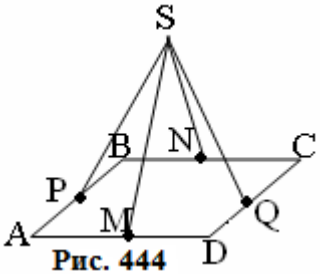


Рис. 444

5. На рис. 445 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точки O, O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

1) Какая из точек A_1, O_1, B_1 лежит ближе к грани $ABCD$ куба?
2) Какие из ребер куба наиболее удалены от плоскости AA_1B_1B?
3) Какое из расстояний больше: от прямой AO_1 до плоскости DCC_1 или от прямой AD_1 до плоскости BDC_1?
4) Чему равняется расстояние между плоскостями ADD_1 и BCC_1?

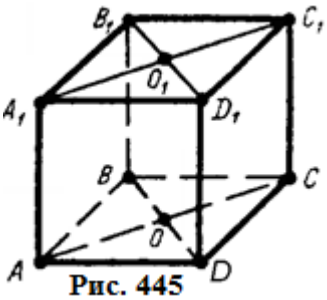


Рис. 445

Рассмотрим детальнее доказательство свойств расстояний в пространстве. Поскольку теорема 1 является прямым следствием

свойств наклонных и перпендикуляров, рассмотрим доказательство теоремы 2.

Пусть имеем прямую l и параллельную ей плоскость α (рис. 446). Поскольку расстояние между прямой l и плоскостью α — это длина самого короткого отрезка, соединяющего их точки, то длина наклонной, соединяющей точки прямой и плоскости, не может быть искомым расстоянием. Докажем, что длины всех перпендикуляров, проведенных из точек прямой l к плоскости α, равны между собой. А потому расстояние между прямой и плоскостью равно длине каждого из таких перпендикуляров.

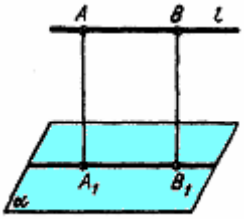


Рис. 446

Проведем из двух точек A и B прямой l перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости α. Поскольку прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой (теорема 2 § 15), то через прямые AA_1 и BB_1 можно провести плоскость, содержащую l. Прямая A_1B_1 является линией пересечения этой плоскости с плоскостью α (почему?). Однако в этом случае $AB \parallel A_1B_1$, то есть четырехугольник AA_1B_1B является параллелограммом (даже прямоугольником). Отсюда $AA_1 = BB_1$. ■

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Как и в теореме 2, наклонная, соединяющая две точки параллельных плоскостей, не может определять расстояние между ними. А все перпендикуляры, проведенные из точек одной из плоскостей ко второй, параллельны, по теореме о параллельности прямых, перпендикулярных к плоскости (теорема 2 § 15). Кстати, они одновременно перпендикулярны обеим плоскостям по теореме о параллельных плоскостях, одна из которых перпендикулярна прямой (теорема 3 § 15).

Пусть α и β — параллельные плоскости, а AA_1 и BB_1 — два произвольных перпендикуляра, соединяющие точки этих плоскостей (рис. 447). Они параллельны, а потому равны по теореме об отрезках параллельных прямых между параллельными плоскостями (теорема 4 § 13). Можно и непосредственно доказать равенство этих отрезков, рассмотрев четырехугольник AA_1B_1B, как это было сделано при доказательстве теоремы 2. ■

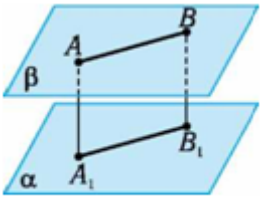


Рис. 447

С помощью понятия расстояния можно характеризовать параллельность прямой и плоскости, параллельность плоскостей. При этом справедливы следующие утверждения, обратные к теоремам 2 и 3.

Теорема 4 *(признак параллельности прямой и плоскости).*

Если все точки прямой лежат на одинаковом, отличающемся от нуля, расстоянии от плоскости, то прямая и плоскость параллельны.

Теорема 5 *(признак параллельности плоскостей).*

Если все точки одной плоскости лежат на одинаковом, отличающемся от нуля, расстояния от второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

Действительно, при выполнении условий этих утверждений соответствующие фигуры не могут иметь общих точек, иначе бы расстояние между ними равнялось нулю.

Утверждения будут правильными, если условия выполняются не для всех точек, а для нескольких. В первом утверждении достаточно допустить, что условие выполняется для двух точек прямой, во втором — для трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 448, 449). Попробуйте доказать это самостоятельно. Приведенные утверждения широко используются на практике как признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей. Так, параллельность поверхности стола к полу обеспечивается одинаковой длиной его ножек.

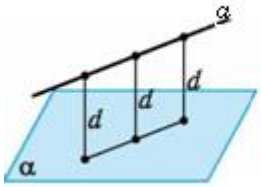


Рис. 448

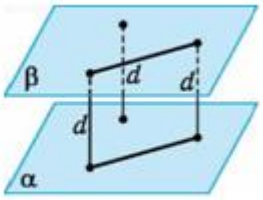


Рис. 449

Рассмотрение расстояний между фигурами в пространстве завершим измерениями расстояния между скрещивающимися прямыми. Поскольку через скрещивающиеся прямые нельзя провести плоскость, то нахождение этого расстояния не сводится к планиметрической задаче в отличие от измерения расстояния между параллельными прямыми.

По определению, расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине кратчайшего отрезка AB, концы которого лежат на этих прямых (рис. 450).

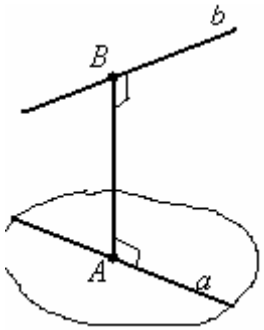


Рис. 450

Если такой отрезок существует, то очевидно, что он должен быть перпендикулярен обеим прямым. Действительно, если он, например, не перпендикулярен прямой b, то проведем из точки A перпендикуляр AB_1 к прямой b (рис. 451). Тогда $AB_1 < AB$ по свойству перпендикуляра и наклонной. Но по условию отрезок AB является кратчайшим среди отрезков, которые соединяют точки прямых a и b. Полученное противоречие свидетельствует о том, что $AB \perp b$. Аналогично устанавливается перпендикулярность AB и a.

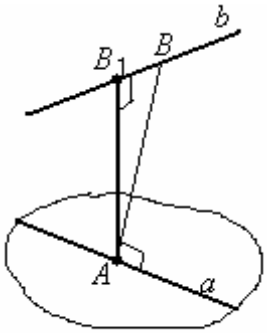


Рис. 451

Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых и который перпендикулярен этим прямым, называется общим перпендикуляром скрещивающихся прямых.

Например, ребро A_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 452) является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AA_1 и D_1C_1, а ребро BB_1 — для прямых AB и B_1C_1.

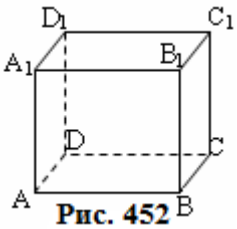


Рис. 452

Рассуждая в обратном порядке, можно доказать, что общий перпендикуляр скрещивающихся прямых является кратчайшим из всех отрезков, концы которых лежат на этих прямых. Таким образом, задача измерения расстояния между скрещивающимися прямыми свелась к нахождению длины общего перпендикуляра этих прямых. Существует

ли он для произвольных скрещивающихся прямых? Ответ на этот вопрос составляет содержание следующей задачи.

Задача 1. Доказать, что для скрещивающихся прямых *a, b* можно построить прямую *c*, которая пересекает их под прямым углом, и что такая прямая единственная.

 В первую очередь отметим, что скрещивающиеся прямые *a* и *b* лежат в параллельных плоскостях α и β. Действительно, плоскость α определяется прямой *a* и прямой a_1, проходящей через произвольную точку прямой *a* параллельно прямой *b*. Аналогично, плоскость β определяется прямой *b* и прямой b_1, проходящей через произвольную точку прямой *b* параллельно прямой *a* (рис. 453). Спроектируем ортогонально плоскость α на плоскость β. Тогда прямая *a* проектируется на прямую *c* плоскости β, причем прямые *b* и *c* пересекаются (почему?) в некоторой точке *M* (рис. 454). Если *N* — точка прямой *a*, которая проектируется в *M*, то прямая *MN* является искомой, ведь она определяет направление проектирования и перпендикулярна как параллельным плоскостям α и β, так и прямым *a* и *b*, лежащих в этих плоскостях и пересекающихся с прямой *MN*.

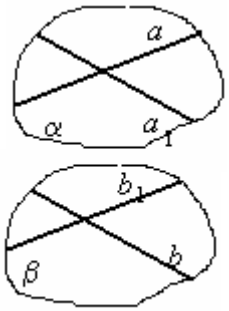


Рис. 453

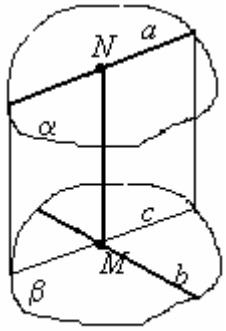


Рис. 454

То, что общая перпендикулярная прямая для скрещивающихся прямых одна, можно доказать методом от противного. Если бы существовали две такие прямые, то они бы определяли плоскость, в которой лежат обе данные скрещивающиеся прямые, что невозможно. ■

Вопрос о существовании общего перпендикуляра для двух скрещивающихся прямых решен для произвольных прямых. Однако, его расположение в общем случае определить трудно.

В частности, поскольку в задаче 1 показано, что скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях и общий перпендикуляр к ним лежит на перпендикулярной плоскостям проектирующей прямой, то расстояние между прямыми равняется расстоянию между этими плоскостями. Возьмем, например, куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 455). Скрещивающиеся прямые *AD* и B_1D_1 лежат в параллельных гранях куба, поэтому расстояние между ними равняется расстоянию между гранями куба, то есть длине ребра куба.

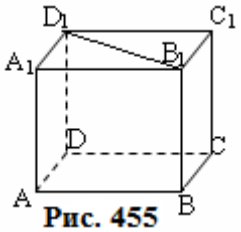


Рис. 455

Пример 3. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра, ребро которого равняется *a*.

 В правильном тетраэдре *SABC* противоположные ребра лежат на скрещивающихся прямых (рис. 456). Построение параллельных плоскостей, в которых лежат скрещивающиеся прямые, в данном случае не является необходимым. Воспользовавшись симметричностью кон-

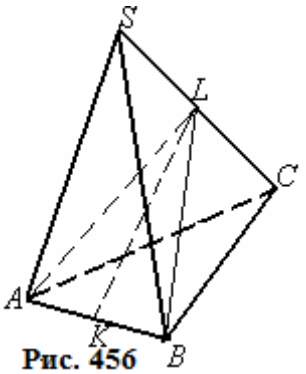


Рис. 456

струкции, предыдущим опытом работы с правильным тетраэдром, попробуем отыскать общий перпендикуляр для прямых SC и AB.

Если K, L — середины ребер AB и SC, то $LK \perp AB$, как медиана и высота в равнобедренном треугольнике LAB, где $AL = BL$. Аналогично, $LK \perp SC$.

Поскольку $KB = \frac{a}{2}, LB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, то по теореме Пифагора $LK = \sqrt{LB^2 - KB^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

Понятно, что в данном случае расстояние между ребрами (отрезками) совпадает с расстоянием между прямыми, содержащими эти ребра (обратите внимание — в данном случае, а не вообще!). Кроме того, очевидно, что рассмотрение еще двух пар скрещивающихся ребер не нужно, поскольку расстояния между всеми парами скрещивающихся ребер равны в связи с симметрией конструкции. ■

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}a.$

Измерение расстояний в пространстве дает возможность значительно расширить класс задач на нахождение геометрических мест точек (ГМТ).

Задача 2. Найти геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых.

 Известно, что через данные скрещивающиеся прямые a и b проходит вполне определенная пара параллельных плоскостей α и β. Можно допустить, что середины указанных в условии отрезков лежат в плоскости γ, параллельной плоскостям α и β и находящейся на одинаковом расстоянии от них (рис. 457). Действительно, этим свойством обладают середины всех отрезков, концы которых лежат на параллельных плоскостях (обоснуйте это утверждение!).

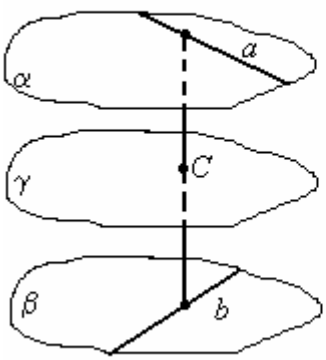


Рис. 457

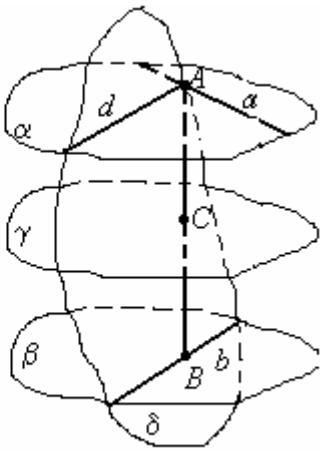


РИс. 458

И вовсе не очевидно, что каждая точка C плоскости γ является серединой некоторого отрезка с концами на прямых a и b (рис. 457). Для доказательства этого проведем через прямую b и точку C плоскость δ (рис. 458). Она пересекает (почему?) плоскость α по некоторой прямой d, параллельной прямой b, а поэтому не параллельна прямой a. Прямая d пересекает прямую a в некоторой точке A. Тогда прямая AC принадлежит плоскости δ (как и прямая b!). Она не параллельна прямой b, а поэтому пересекает ее в некоторой точке B. Отрезок AB является искомым. ■

Пример 4. В тетраэдре *SABC* основание *ABC* — равносторонний треугольник со стороной 6 см, боковые грани *SAB, SAC, SBC* — равнобе-дренные треугольники с боковым ребром 5 см. Найти расстояние от центра *O* основания до плоскости боковой грани.

 Расстояние от точки *O* до плоскости *SBC* равно длине перпендикуляра *OK* из точки *O* на плоскость *SBC* (рис. 459). Точка *O* лежит на пересечении медиан (и высот!) треугольника *ABC*, причем $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{6\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \sqrt{3}$. Поскольку в треугольнике *SBC* медиана *SD* также является высотой, то $SD \perp BC$, поэтому $BC \perp ODC$ и $SBC \perp ODC$. Следовательно, перпендикуляр из точки *O* на плоскость *BSC* совпадает с перпендикуляром *OK* из точки *O* на прямую *SD*, являющейся линией пересечения плоскостей *SAD* и *SBC*. По теореме Пифагора, $SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). Поскольку ортогональные проекции боковых ребер на основание равны, то *S* ортогонально проектируется в центр описанной около треугольника *ABC* окружности, то есть в точку *O*. Поэтому треугольник *SOD* — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$ (см). Нетрудно увидеть, что $OK = (SO \cdot OD) : SD = (\sqrt{13} \cdot \sqrt{3}) : 4 = \frac{\sqrt{39}}{4}$ (см). Понятно, учитывая симметрию, что расстояния от точки *O* до других боковых граней такие же. ■

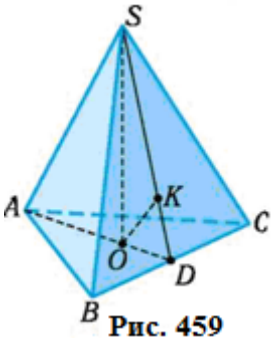


Рис. 459

Ответ. $\frac{\sqrt{39}}{4}$ см.

Вопросы для самоконтроля

1. Известно, что точки *A* и *B* равноудалены от плоскости α. Как расположены прямая *AB* и ее ортогональная проекция на плоскость α?

2. Верно ли, что расстояние от отрезка до плоскости равняется расстоянию от одного из его концов до этой плоскости?

3. Верно ли, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от плоскости, проходящей через его середину?

4. Известно, что три точки не лежат на одной прямой и находятся на одинаковом расстоянии от плоскости. Можно ли утверждать, что эти точки принадлежат плоскости, параллельной данной?

5. Параллельны ли две прямые, если расстояние между ними отличается от нуля?

6. Все стороны треугольника *ABC* находятся на расстоянии *a* от плоскости α. Параллельны ли плоскости *ABC* и плоскость α?

7. Какую фигуру образуют точки, равноудаленные от данной плоскости?

8. Сколько существует точек пространства, которые находятся на расстоянии *a* от сторон квадрата, имеющих длину *b*?

Графические упражнения

1. Точка M лежит на одинаковом расстоянии от всех вершин квадрата $ABCD$. Постройте отрезок, длина которого равняется расстоянию:
1) от точки M до плоскости квадрата;
2) от точки B до плоскости AMC;
3) от середины стороны AB до плоскости MCD;
4) * между прямыми BD и MC.

2. Из точки K — середины гипотенузы AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC — проведен перпендикуляр KS к плоскости треугольника. Постройте отрезок, длина которого равняется расстоянию:
1) от точки C до плоскости AKS;
2) от точки A до плоскости CKS;
3) от точки K до плоскости BCS;
4) между прямыми BC и KS.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте отрезок, длина которого равняется расстоянию :
1) от вершины B до плоскости ACC_1;
2) от прямой BC до плоскости ADC_1B_1;
3) от центра грани до противоположной грани;
4) между скрещивающимися ребрами куба;
5) между плоскостями ADK и B_1C_1L, где K — середина A_1B_1, L — середина AB.

4. Дана правильная четырехугольная пирамида. Постройте отрезок, длина которого равняется расстоянию:
1) от вершины пирамиды до основания;
2) от центра основания до боковой грани;
3) от ребра основания до боковой грани, не имеющей общих точек с этим ребром;
4) * между скрещивающимися ребрами пирамиды.

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми относится к непростым задачам стереометрии. Их разнообразие можно в определенной степени проиллюстрировать на кубе.

На рис. 460 а, б, в, г изображен куб, две скрещивающиеся прямые a и b и их общий перпендикуляр p.

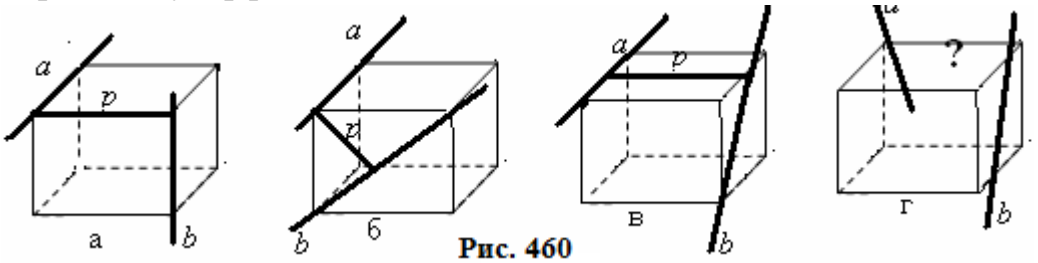


Рис. 460

Если в случаях а, б, в общий перпендикуляр p находится сразу из тех или иных соображений, то в случае г его увидеть трудно. Построение парал-

лельных плоскостей, в которых лежат скрещивающиеся прямые, и нахождение расстояния между этими плоскостями (а это и будет искомое расстояние) также не всегда являются простыми делами.

Существуют другие приемы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми. Остановимся на одном из них.

Метод ортогонального проектирования.

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

□ Пусть скрещивающиеся прямые a и b лежат в параллельных плоскостях α и β (рис. 461 а). Как уже отмечалось, такие плоскости существуют для произвольных скрещивающихся прямых. Построим плоскость γ, перпендикулярную одной из прямых, например, прямой a (рис. 461 б). Тогда $\alpha \perp \gamma$ по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1 §16). А поэтому $\beta \perp \gamma$ по теореме о параллельных плоскостях, перпендикулярных третьей плоскости (теорема 6 §16). Прямые $a_1 = \alpha \cap \gamma$ и $b_1 = \beta \cap \gamma$ параллельны по теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей (теорема 2 §13).

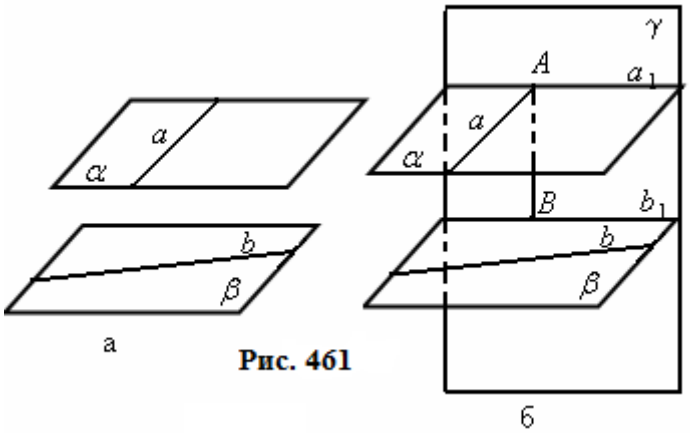


Рис. 461

При ортогональном проектировании на плоскость (прямая a проектируется в точку A — точку пересечения прямой a с плоскостью γ. Прямая b проектируется в прямую b_1 — линию пересечения плоскостей β и γ. Тогда перпендикуляр AB из точки A на прямую b_1 будет перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости β, а поэтому и к плоскости α по соответствующим теоремам (какими?). Его длина равняется расстоянию между плоскостями α *и* β, а следовательно и скрещивающимися прямыми a и b. ■

Приведенные рассуждения приводят к следующей схеме нахождения расстояния между данными скрещивающимися прямыми:

1) находят (строят) плоскость, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых;

2) ортогонально проектируют на эту плоскость скрещивающиеся прямые;

3) находят расстояние между точкой и прямой, в которые проектируются скрещивающиеся прямые.

Пример 5. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a. Найти расстояние между прямыми A_1C и BC_1.

□ Воспользуемся приведенной схемой для данных прямых, изображенных на рис. 462. В качестве плоскости проекций целесообразно выбрать плоскость прямоугольника DCB_1A_1. Прямая BC_1 ей перпендикулярна (почему?), поэтому проектируется в середину K отрезка B_1C (рис. 462). По-

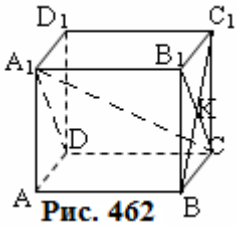


Рис. 462

скольку прямая A_1C лежит в плоскости проекций, то ее проекция на эту плоскость совпадает с ней.

Рассмотрим прямоугольник A_1B_1CD и изображение проекций данных прямых на нем (рис. 463). Для решения задачи надо найти расстояние LK от точки K до отрезка A_1C. Поскольку $A_1D = \sqrt{2}a, DC = a,$ то по теореме Пифагора $A_1C = \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \sqrt{3}a$. Отрезок LK равняется половине длины отрезка B_1M, где B_1M — высота треугольника A_1CB_1. Площадь этого треугольника равняется $\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot B_1C$ или $\frac{1}{2}A_1C \cdot B_1M$. Отсюда $B_1M = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C}{A_1C} = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{3}a} = \sqrt{\frac{2}{3}}a,\ KL = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{a}{\sqrt{6}}$. ■

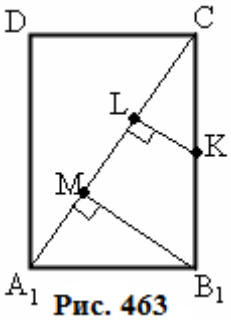


Рис. 463

Ответ: $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Задачи для исследования

1. Предложите практический способ измерения диагонали кирпича без любых вычислений.
2. Как измерить кратчайшие расстояния по поверхности куба?
3. Какими геометрическими фигурами можно смоделировать блины, баранку, скалку? Попробуйте определить их как определенные геометрические места точек пространства.
4. Исследуйте геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных прямых в зависимости от их взаимного расположения.

Контрольные вопросы

1. Какими могут быть наибольшее и наименьшее расстояния между ребрами куба, длина которых равняется a?
2. Пусть для многоугольника существует точка пространства, равноудаленная от всех его вершин. Верно ли, что около многоугольника можно описать окружность?
3. Расстояние между двумя лучами равняется 2 см. Верно ли, что лучи параллельны?
4. Какую фигуру образуют точки пространства, равноудаленные от сторон ромба?
5. Прямая лежит на одинаковом расстоянии от двух разных плоскостей. Верно ли, что она параллельна этим плоскостям?

6. Как нужно закреплять провод на столбах, чтобы обеспечить его параллельность поверхности земли?

7. Почему тени исчезают в полдень?

8. Как измерить высоту дерева, не поднимаясь к его верхушке?

9. Две прямые параллельны. Что представляет собой фигура, точки которой находятся на расстоянии d от обеих прямых?

10. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Каково геометрическое место точек, удаленных на d от плоскости α и от прямой.

Задачи

368. Точка D находится на расстоянии 8 см от вершин равностороннего треугольника ABC *со* стороной 4 см. Найдите расстояние:

1°) от точки B до плоскости DOC, где O — центр треугольника ABC;

2°) от точки D до плоскости ABC;

3) от плоскости, проходящей через середины отрезков DA, DB, DC, до плоскости треугольника ABC.

369. Пусть точка O является серединой катета AC прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой AB = 4 см; OP — перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 см. Найдите расстояние:

1°) от точки B до плоскости AOP;

2°) от плоскости, проходящей через середины сторон CB и AB параллельно OP, до плоскости CPA;

3) от точки O до плоскости PAB.

370°. Из точки K — середины гипотенузы AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с катетами длиной 8 см — проведен перпендикуляр KS до плоскости треугольника. Длина KS составляет 6 см. Найдите расстояние:

1) от точки C до плоскости AKS;

2) от точки A до плоскости KCS;

3) от точки S до прямой BC.

371. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите расстояние:

1°) от точки A_1 до плоскости BDD_1;

2°) от прямой B_1D_1 до плоскости ABC;

3°) между противоположными гранями куба;

4°) от точки A_1 до прямой BD;

5) между прямыми A_1D *и* BC_1;

6*) от точки A_1 до плоскости AB_1D_1;

7) между прямыми AD_1 *и* CC_1;

8*) между плоскостями CD_1B_1 и DA_1B;

9*) между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

372. Точка M лежит на расстоянии b от всех вершин квадрата $ABCD$ со стороной a и центром в точке O. Найдите расстояние:

1°) от точки M до плоскости ABC;

2°) от точки A до плоскости BMD;

3) от точки O до плоскости MCD, если $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$;

4) от точки M до прямой CD;
5) между прямыми OM и AD;
6*) между прямыми BD и MC.

373. Найдите множество точек, равноудаленных от:
1)° двух точек;
2) двух пересекающихся прямых;
3) трех, попарно параллельных, прямых;
4)° трех прямых, которым принадлежат стороны треугольника;
5) двух плоскостей;
6) трех точек;
7)* четырех точек.

374. Концы отрезка удалены от некоторой плоскости на 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до этой плоскости.

375. Катеты прямоугольного треугольника равны 16 см и 12 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника лежит точка, удаленная от каждой вершины треугольника на $10\sqrt{2}$ см?

376. Сторона равностороннего треугольника равна 6 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника расположена точка, удалённая на 9 см от:
1) сторон треугольника;
2*) каждой из прямых, содержащих стороны треугольника?

377. Гипотенуза прямоугольного треугольника равняется 12 см. Вне плоскости треугольника дана точка, удаленная от каждой его вершины на 10 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

378°. Если из двух точек, находящихся на различных расстояниях от плоскости, провести равные наклонные, то на этой плоскости большей будет проекция наклонной, проведенной из более близкой к плоскости точки. Докажите это.

379. Если из точки A, находящейся вне плоскости α, опустить перпендикуляр на эту плоскость, а из его основания провести перпендикуляр к прямой BC, лежащей в плоскости α, то плоскость, проходящая через эти перпендикуляры, будет перпендикулярной прямой BC. Докажите это.

380*. Пусть AB — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b. Точки A и C лежат на прямой a, точки B и D — на прямой b; $AC = BD$. Докажите, что углы ACD и BDC равны между собой.

381*. Докажите, что расстояние от центра масс треугольника до некоторой плоскости, не имеющей с ним общих точек, равняется трети суммы расстояний вершин треугольника до этой плоскости.

382*. Плиту прямоугольной формы подняли краном так, что три ее вершины удалены от поверхности земли, соответственно, на 2 м, 3 м и 4 м. На каком расстоянии от земли находится четвертая вершина?

383. Точка, равноудаленная от всех вершин треугольника со сторонами 4 см, 13 см и 15 см, лежит на расстоянии 19,5 см от его плоскости. На каком расстоянии от вершин треугольника находится эта точка?

384. В равнобедренном треугольнике основание равняется 24 см, а боковая сторона — 20 см. Точка A удалена от каждой из прямых, которые проходят через стороны треугольника, на 18 см. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

385*. Точка A удалена от сторон угла, равного 60°, на 20 см и 7 см, а от его вершины — на 25 см. Найдите расстояние от точки A до плоскости угла.

386*. Точка, лежащая вне плоскости прямого угла, находится на расстоянии 4 см от каждой из его сторон. Найдите расстояние от точки до вершины угла, если точка удалена от плоскости угла на $\sqrt{7}$ см.

387. Плоскости квадрата $ABCD$ и равностороннего треугольника ABM взаимно перпендикулярны, $AB = a$. Постройте общий перпендикуляр к прямой AC и медиане MO треугольника и определите длину этого перпендикуляра.

388. Пусть AB — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b. Точки A и C лежат на прямой a, точки B и D — на прямой b; $AC = BD$. Докажите, что $\angle ACB = \angle BDC$.

Упражнения для повторения

389. В одной полуплоскости, ограниченной прямой AB, построены углы: $\angle BAC = 38°$, $\angle CAD = 68°$, $\angle DAE = 85°$, $\angle EAK = 99°$. Определите $\angle KAC$.

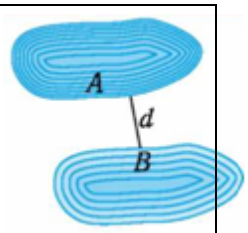
390. Один из смежных углов втрое больше разности между ними. Определите их градусную меру.

391. Найдите углы треугольника, если они составляют арифметическую прогрессию, а наибольшая сторона вдвое больше наименьшей.

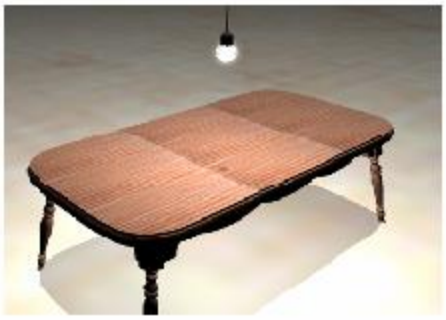
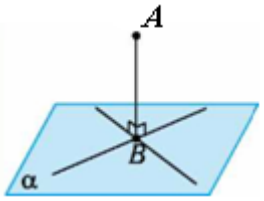
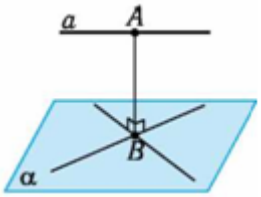
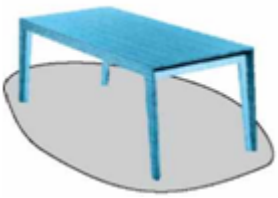
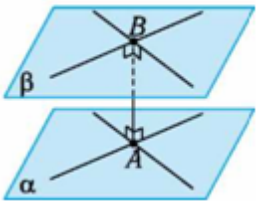
392. В квадрате $ABCD$ точка E является серединой стороны CD, прямые BE и AC пересекаются в точке F. Найдите тангенсы углов треугольника FCE.

393. Наблюдатель, находящийся на берегу озера на высоте h над уровнем воды, видит тучку под углом α, а ее отображение — под углом β к горизонту. Найдите высоту тучки над поверхностью озера при $\alpha = 53°27'$, $\beta = 55°42'$, $h = 76{,}8$ м.

Итог
Основное определение

Расстоянием между произвольными фигурами называют длину кратчайшего из отрезков, соединяющих точки данных фигур		

Свойства расстояний

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной плоскости.		
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой к данной плоскости.		
Расстояние между параллельными плоскостями равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости ко второй плоскости.		

§ 20. Измерение углов в пространстве

Рассматриваются понятия угла между прямыми и плоскостями, а также между плоскостями.

Взаимное расположение прямых, прямых и плоскостей, а также плоскостей характеризуют в стереометрии различными способами. Один из них базируется на количестве общих точек этих фигур. Он приводит к важным отношениям между прямыми и плоскостями — отношениям параллельности. Уточнение взаимного расположения указанных фигур осуществляется с помощью отношений перпендикулярности. Они отображают определенную симметрию взаимного расположения фигур. Рассмотрение расстояний между фигурами дает возможность характеризовать их взаимное расположение с помощью чисел. Последующее уточнение взаимного расположения прямых и плоскостей осуществляется с помощью измерения углов между этими фигурами. Необходимость таких измерений вызвана потребностями как геометрии, так и практики. Измерения углов необходимы в геометрии, геодезии, мореходном деле, космонавтике и т. п. Их применяют и в повседневной жизни (рис. 464 — 466).

Рис. 464

Рис. 465

Рис. 466

Две пересекающиеся прямые пространства определяют некоторую плоскость. Для числовой характеристики их взаимного расположения используют, как и в планиметрии, понятие угла между ними. Этой величиной мы уже неоднократно пользовались. Напомним ее определение.

Углом между пересекающимися прямыми называется величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми.

По определению, угол между прямыми является величиной, изменяющейся от 0° до 90°. Угол между параллельными прямыми считают ровным 0°, а между перпендикулярными — 90°.

Введем аналогичную характеристику для пересекающихся прямой и плоскости. Практическую необходимость в измерении угла между прямой и плоскостью можно проиллюстрировать на примерах. Такими измерениями издавна пользовались мореплаватели при определении положения корабля (рис. 467, а). Они необходимы геодезистам, проводящим работы на местности, строителям при установлении конструкций и т. п. (рис. 467, б, в).

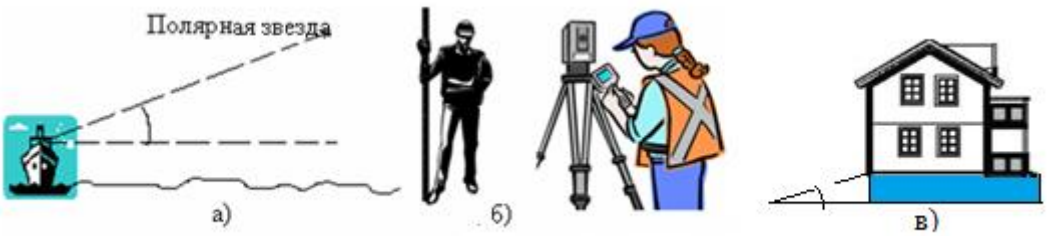


Рис. 467

Для измерения угла между прямой a и плоскостью α следует обратиться к измерению углов между данной прямой и прямыми, лежащими в плоскости α и пересекающими прямую a. Однако таких прямых в плоскости α бесконечное множество, и указанные углы различны по величине. Преимущество имеет угол между прямой a и ее ортогональной проекцией, если прямая a не перпендикулярна плоскости α. Этот угол определяется однозначно, поскольку ортогональная проекция для каждой прямой определена однозначно (рис. 468). В практических приложениях соответствующую величину легко измерять, и она удобна для характеристики наклона прямой к плоскости.

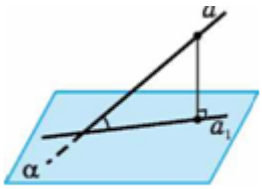


Рис. 468

Углом между прямой и неперпендикулярной ей плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Напомним, что угол между пересекающимися прямыми изменяется в пределах от 0 к 90°. Поэтому и угол между прямой и плоскостью является величиной, изменяющейся в этих пределах.

Если наклон прямой к плоскости плавно уменьшать, то предельным положением подвижной прямой будет прямая, лежащая в плоскости (рис. 469).

Угол между прямой и плоскостью, в которой она лежит. считают равным 0°.

Если же наклон прямой к плоскости плавно увеличивать, то предельным положением подвижной прямой является прямая, перпендикулярная плоскости (рис. 469).

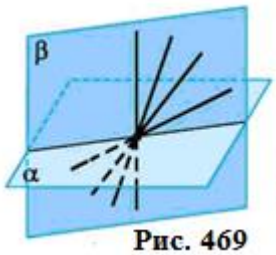


Рис. 469

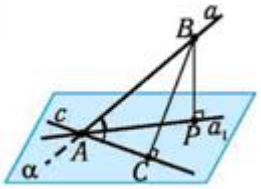


Рис. 470

Угол между прямой и перпендикулярной ей плоскостью считают равным 90°.

Обратим внимание еще на одну особенность угла между прямой, пересекающей плоскость, и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Этот угол является наименьшим среди всех других углов между данной прямой и прямыми, пересекающими ее и лежащими в данной плоскости (рис. 470).

Действительно, пусть прямая a пересекает плоскость α, BP — перпендикуляр к этой плоскости, a_1 — ее ортогональная проекция на плоскость α, c — произвольная прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку A пересечения прямой a и плоскости α. Угол между прямыми a и a_1 равен величине угла BAP прямоугольного треугольника ABP, а угол между прямыми a и c — величине угла BAC прямоугольного треугольника ABC. Прямоугольные треугольники ABC и ABP имеют общую гипотенузу, катет одного треугольника является наклонной, а другого — перпендикуляром к плоскости. Сравнение углов BAC и BAP дает возможность придти к указанному выводу.

Под углом между отрезком и плоскостью, между отрезком и плоской фигурой (например, между диагональю куба и его гранью) понимают угол между соответствующими прямой и плоскостью.

При решении задач прямые, пересекающие плоскость, задаются с помощью наклонных к плоскости.

Пусть AB — наклонная к плоскости α, AP — ее проекция (рис. 471). Угол BAP является одним из углов, образованных прямыми AB и AP. Поскольку треугольник ABP — прямоугольный, то угол BAP — острый, то есть его угловая мера равна углу между прямыми AB и AP. Следовательно, мы показали, что угол между наклонной и ее проекцией равен углу между прямой, заданной наклонной, и плоскостью. Это дает возможность отождествлять названные величины при решении задач.

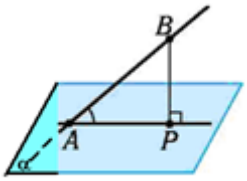


Рис. 471

Чтобы построить угол между прямой и плоскостью, необходимо:

— из произвольной точки данной прямой провести перпендикуляр к заданной плоскости;

— через основание перпендикуляра и точку пересечения прямой и плоскости провести прямую.

Угол между заданной и построенной прямыми является углом между прямой и плоскостью.

Мы рассмотрели понятие угла между плоскостью и пересекающей ее прямой. Таким образом, мы ввели числовую характеристику их взаимного расположения. Дальше рассмотрим особенности взаимного расположения двух пересекающихся плоскостей. Это задание связано с практической деятельностью человека и пригодится при оценивании наклона крыши к поверхности земли (рис. 472, а), учета профиля местности при строительстве дороги (рис. 472, б), при изготовлении резцов с различными свойствами резания (рис. 472, в) и т. п.

а) б) в)

Рис. 472

Следовательно, необходимо уметь характеризовать взаимное расположение непараллельных плоскостей с помощью числа после выбора единицы измерения и в случае определения угла между прямой и плоскостью, попробуем найти плоский угол, характеризующий взаимное расположение двух плоскостей. Глядя на обложки полураскрытой книги (рис. 473, а), нетрудно увидеть, что мерой взаимного расположения обложек (мерой «развёрнутости» книги) может быть величина угла α, образованного краями обложек. Если рассматривать плоскости, в которых расположены эти обложки, то угол α получают как результат пересечения данных двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии пересечения первых двух плоскостей.

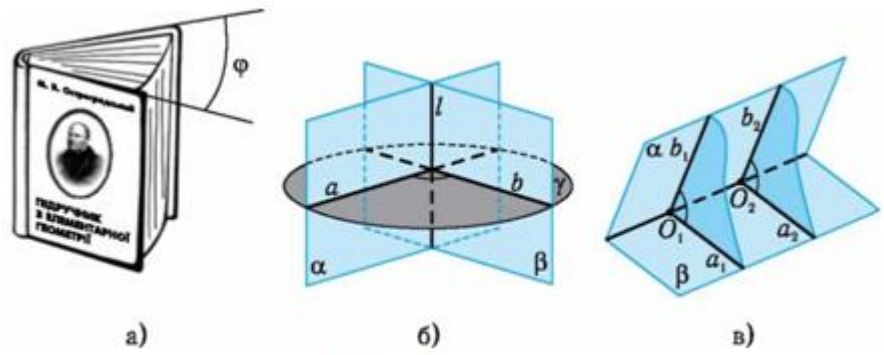


Рис. 473

Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, образующимися при пересечении данных плоскостей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения.

Пусть α и β — две плоскости, пересекающиеся по прямой l (рис. 473, б). Через произвольную точку прямой l проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой l. Эта плоскость пересекает плоскости α и β по прямым a и b. Угол между этими прямыми и является углом между данными плоскостями. Остается лишь убедиться, что угол между плоскостями не зависит от места проведения секущей плоскости. Для этого рассмотрим два различных пересечения, проходящие через точки O_1 и O_2 (рис. 473, в). Обозначим через a_1 и a_2 линии пересечения секущих плоскостей с плоскостью α. Эти прямые параллельны, поскольку в плоскости α они перпендикулярны прямой l. Из тех же соображений параллельными являются и прямые b_1 и b_2 — линии пересечения секущих плоскостей с плоскостью β. Таким образом, идет речь о равенстве углов между прямыми a_1, b_1 и параллельными данным прямыми a_2, b_2. В планиметрии этот факт хорошо известен. Он имеет место и в стереометрии.

Теорема 1 (*о равенстве углов между соответственно параллельными прямыми*).

Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, то углы между этими парами прямых равны.

Доказательство этой теоремы будет приведено далее.

Напомним, что угол между прямыми изменяется в пределах от 0 к 90°. Так же изменяется и угол между плоскостями. В частности, ***угол между совпадающими плоскостями естественно считать равным 0°. Если же угол между плоскостями равен 90°, то плоскости — перпендикулярны,*** по второму признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 3 § 16). Обратно, угол между перпендикулярными плоскостями равен 90°. Следовательно, можно придти к такому выводу.

Теорема 2 (*признак перпендикулярности плоскостей*).

Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°.

Рассмотрение измерения углов в пространстве завершим введением понятия угла между скрещивающимися прямыми. Угол между пересекающимися

прямыми характеризует наклон одной прямой к другой. При замене прямой на параллельную ей прямую этот наклон не изменяется (рис. 474). Это свойство углов между пересекающимися прямыми и лежит в основе определения угла между скрещивающимися прямыми.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между параллельными им пересекающимися прямыми.

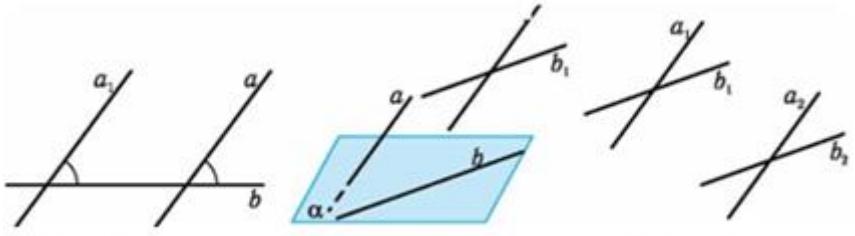


Рис. 474 **Рис. 475** **Рис. 476**

Угол между скрещивающимися прямыми a и b на рис. 475 измеряется углом между пересекающимися прямыми a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. Остаётся только обосновать, что эта величина не зависит от выбора прямых a_1 и b_1, параллельных соответственно a и b. То есть, если взять другую пару пересекающихся прямых a_2 и b_2, параллельных a и b, то угол между ними равен углу между прямыми a_1 и b_1 (рис. 476). Истинность этого утверждения составляет содержание теоремы 1, приведенной выше.

Пример 1. Пусть OS — перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ с центром в точке O; $OS = AB = 2$.

1) Найти угол между прямой CS и плоскостью ABD.

2) Найти угол между прямой AS и плоскостью DBS.

3) Найти угол между прямой, проходящей через точку S и середину стороны AB, и плоскостью DBS.

□ 1) Построим рис. 477, который соответствует условию примера. Прямая OC является ортогональной проекцией прямой CS на плоскость ABD. По определению угла между прямой и плоскостью, искомый угол α равен величине угла OCS. Из прямоугольного треугольника SOC имеем:

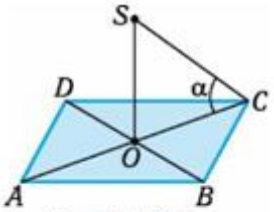


Рис. 477

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{OC} = \frac{2SO}{AC} = \frac{2\cdot 2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

2) Найдем ортогональную проекцию прямой AS на плоскость DBS (рис. 478). Нетрудно убедиться в том, что это прямая SO. Действительно, $AO \perp BD$, по свойству диагоналей квадрата, $AO \perp SO$, поскольку $SO \perp ABC$. Поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AO \perp DBS$ и точка O является основанием перпендикуляра AO.

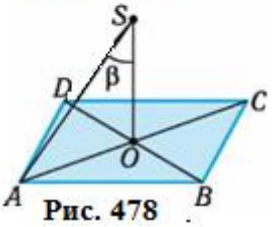


Рис. 478

По определению угла между прямой и плоскостью, искомый угол β равен величине угла ASO. Из прямоугольного треугольника ASO имеем:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{AO}{SO} = \frac{AC}{2SO} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Этот ответ можно было получить, пользуясь решением задания 1). Треугольники *AOS* и *COS* равны по трём сторонам. Поэтому

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}$. Отсюда

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) Пусть *K* — середина стороны *AB*. Построим ортогональную проекцию прямой *KS* на плоскость *DBS*. Для этого проведем из точки *K* прямую *KP*, параллельную прямой *AO* (рис. 479), где точка *P* — середина отрезка *OB* — является точкой ее пересечения с плоскостью *DBS*. Поскольку *AO* является перпендикуляром к плоскости *DBS* (см. решение задания 2)), то *KP* — перпендикуляр к ней, по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярная плоскости (теорема 1 § 15). Ортогональной проекцией прямой *KS* является прямая *SP*. Искомый угол γ равен величине угла *KSP*. Из прямоугольного треугольника *KPS* имеем: $tg\gamma = \frac{KP}{SP}$. Отрезок *KP* является средней линией треугольника *AOB*, потому $KP = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AC = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного треугольника *SOP* имеем: $SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$. Таким образом, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \gamma = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}$.■

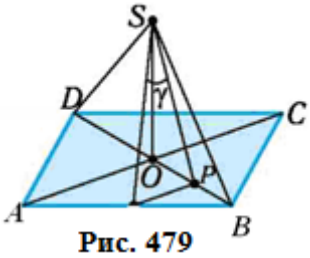


Рис. 479

Ответ: 1) $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$; 2) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Пример 2. Из центра *O* квадрата *ABCD* со стороной 2*a* проведен перпендикуляр *OS* длиной *a* к плоскости квадрата. Найти угол между:

1) плоскостями *SOB* и *SOC*;

2) плоскостями *ABC* и *BCS*;

3) прямыми *SB* и *AD*.

□ 1) Построим рис. 480, соответствующий условию задачи. Плоскости *SOB* и *SOC* пересекаются по прямой *SO*. Чтобы найти угол между ними, надо сначала указать (построить) плоскость, перпендикулярную этой прямой. Такой плоскостью, по условию, является плоскость *ABC*.

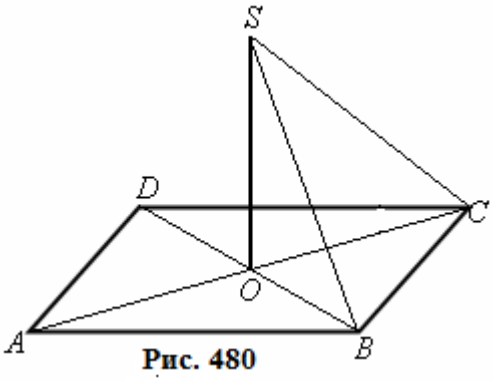


Рис. 480

Дальше необходимо найти линии пересечения построенной плоскости с данными

плоскостями. В нашем случае это прямые OB и OC. Угол между ними и является искомым. Он равняется 90° по свойству диагоналей квадрата, то есть плоскости SOB и SOC перпендикулярны. Это можно было установить и по признаку перпендикулярности плоскостей : $BO \perp OC$, $BO \perp OS$, так как $OS \perp ABC$.

2) Применим схему, приведенную при решении задания 1). Плоскость SOK, где K — середина BC, перпендикулярна линии пересечения плоскостей ABC и BSC (рис. 481) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости: $BC \perp OK$ по построению, $BC \perp SK$, поскольку треугольник BSC равнобедренный ($BS = CS$, так как их проекции OB и OC равны), а SK — медиана, проведенная к основанию.

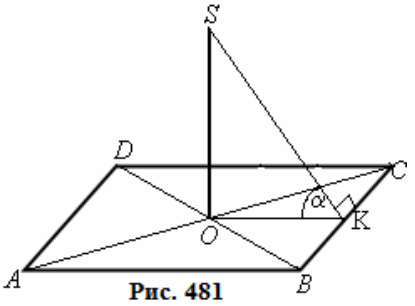


Рис. 481

Плоскость SOK пересекает данные плоскости по прямым SK и OK. Угол α между ними находим из прямоугольного треугольника SOK: $tg\alpha = \frac{SO}{OK} = \frac{2SO}{AB} = \frac{2a}{2a} = 1, \quad \alpha = 45°.$

3) Прямые SB и AD скрещивающиеся. Угол β между ними равняется величине угла SBK, поскольку $BC \parallel AD$ (рис. 482). Из прямоугольного треугольника SBK имеем:

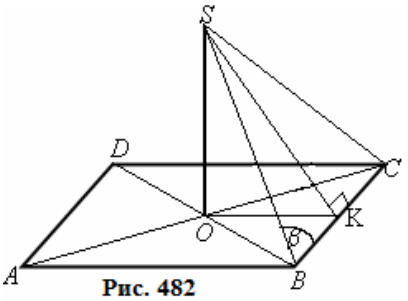


Рис. 482

$$tg\beta = \frac{SK}{BK} = \frac{2\sqrt{OK^2 + OS^2}}{BC} = \frac{2\sqrt{a^2 + a^2}}{2a} = \sqrt{2}.$$ β $= arctg\sqrt{2}$ ■

Ответ: 1) 90°; 2) 45°; 3) β = $arctg\sqrt{2}$

Пример 3. Антенну закрепляют с помощью четырех растяжек одинаковой длины, изготовленных из троса. Известно, что для надежного крепления антенны растяжки должны быть натянуты под углом, не превышающим 60° к поверхности земли. Хватит ли для крепления 80 м троса, если точка крепления располагается на высоте 15 м над поверхностью земли и на закрепление одной растяжки идет до 1 м троса?

□ Установленная антенна схематически изображена на рис. 483. Здесь OA — схематическое изображение антенны, а A — место крепления растяжек на антенне, B, C, B_1, C_1 — точки крепления растяжек на земле. По условию, AO = 15 м, $AB = AC = AB_1 = AC_1$. Углы ABO, ACO, AB_1O, AC_1O равны между собой и не превышают 60°. Обозначим их угловую меру через α. Наиболее экономное крепление соответствуетет случаю, когда α = 60°. Из прямоугольного треугольника AOB имеем:

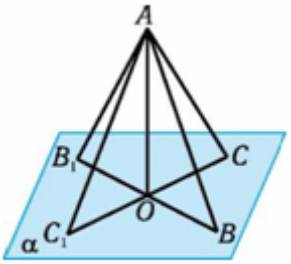


Рис. 483

$$AB = \frac{AO}{\sin 60°} = \frac{216}{\sqrt{3}} \approx 17{,}3 \text{ (м)}.$$

Таким образом, на изготовление одной растяжки нужно не менее чем 18,3 м троса, а на изготовление четырех — 73,2 м. Следовательно, имеющейся длины троса хватит для установления антенны. ■

Ответ. Хватит.

Вопросы для самоконтроля

1. Известно, что равные наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, имеют равные проекции. Могут ли указанные наклонные быть наклонены к этой плоскости под разными углами?

2. Может ли угол между прямой и плоскостью равняться 130°? 70°? 20°?

3. Какую фигуру образуют основания наклонных, проведенных к плоскости из одной точки под равными углами?

4. Будут ли равными в тетраэдре боковые ребра, если они образуют равные углы с плоскостью основания?

5. Верно ли, что угол между прямыми, одна из которых перпендикулярна к плоскости, а вторая параллельна этой плоскости, равняется 90°?

6. Как, пользуясь лишь рулеткой, определить угол наклона столба к земле?

7. Как бы Вы измеряли угол, образованный солнечным лучом с поверхностью земли?

8. Труба расположена на склоне горы. Предложите способ определения угла ее наклона к горизонтальной поверхности.

Упражнения на рисунках

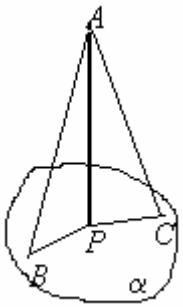


Рис. 484

1. На рис. 484 изображены две наклонные AB и AC и их проекции BP и PC на плоскость α. Какая из наклонных образует меньший угол с плоскостью α, если

1) $AC = 4$, $AB = 6$; 2) $AC = 5$, $AB = 3$?

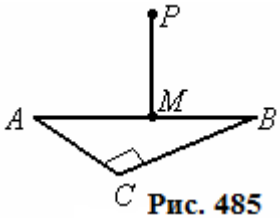


Рис. 485

2. Из середины M гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр MP к плоскости треугольника (рис. 485). Сравните углы наклона прямых PA, PB, PC к плоскости ABC.

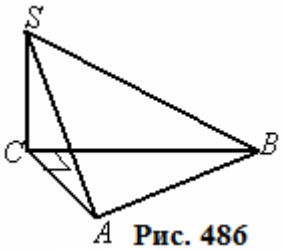


Рис. 486

3. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр CS к плоскости ABC (рис. 486). Сравните катеты AC и BC, если угол наклона наклонной SA к плоскости ABC больше, чем угол наклона наклонной SB к этой плоскости.

4. Из вершины B квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр BS к плоскости $ABCD$ (рис. 487). Сравните углы α и β между плоскостями ASD и CSD и плоскостью ABC.

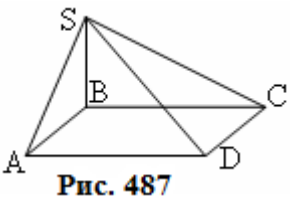


Рис. 487

5. На рис. 488 изображен равносторонний треугольник ABC, точка O — его центр, D — середина BC, OP — перпендикуляр к плоскости ABC. Величина какого угла является углом между плоскостями: 1) BPC и ABC; 2) APO и BPO?

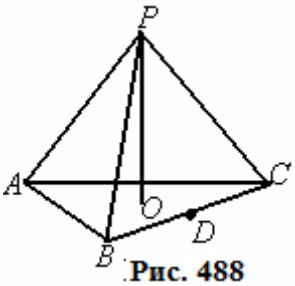


Рис. 488

6. Из центра O квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр OS к плоскости квадрата, точки N, M — середины сторон BC и AD (рис. 489). Величина какого угла является углом между:

1) прямой SN и плоскостью ADC;
2) прямой OS и плоскостью BCS;
3) плоскостями ASD и ABC;
4) плоскостями ASD и BSC;
5) прямыми AS и BC :
6) прямыми AC и SB.

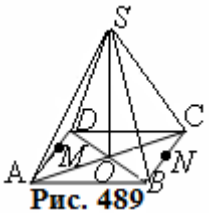


Рис. 489

7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 490). Найдите угол между:

1) диагональю C_1D грани CDD_1C_1 и гранью ADD_1A_1;
2) диагональю B_1D куба и гранью $ABCD$;
3) плоскостями AA_1B и ACC_1;
4) плоскостями A_1C_1B и ABC;
5) прямыми AB_1 и D_1C;
6) прямыми B_1D и AC.

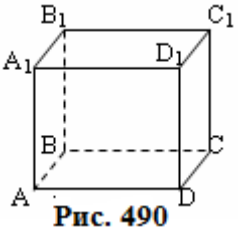


Рис. 490

Рассмотрим детальнее измерение углов в пространстве. Сначала приведем полное доказательство важнейшего свойства угла между прямой и плоскостью.

Теорема 3 (*о минимальности угла между прямой и плоскостью*)

Угол между прямой и плоскостью является наименьшим среди всех углов, который эта прямая образует с прямыми плоскости, пересекающие её.

□ Действительно, пусть a — данная прямая, b — ее ортогональная проекция на плоскость α, а c — произвольная прямая плоскости α, которая проходит через точку O пересечения прямой a и плоскости (рис. 491).

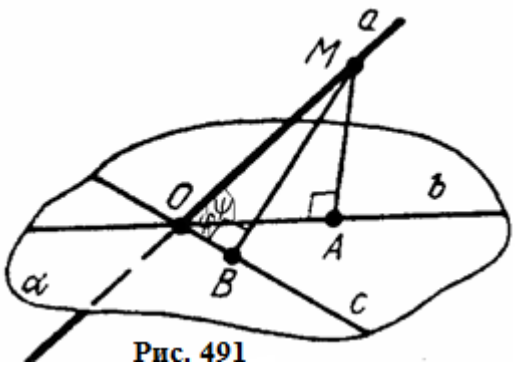


Рис. 491

Через произвольную точку M прямой a, не совпадающей с точкой O, прове-

дем перпендикуляры к прямым b и c. Пусть A, B — основания этих перпендикуляров. Поскольку BM — наклонная к плоскости α, а AM — перпендикуляр, то $BM > AM$. У прямоугольных треугольников OMB и OMA гипотенуза OM общая. Обозначим острые углы MOB и MOA через φ и ψ. Тогда $\sin\varphi = \frac{BM}{OM} > \frac{AM}{OM} = \sin\psi$. Поэтому $\varphi > \psi$. ■

Важность отношения параллельности прямых связана с тем, что при замене прямой на параллельную ей прямую сохраняются многие геометрические отношения и величины. Например, сохраняется величина углов с одинаково направленными сторонами.

Пусть даны два угла AOB и $A_1O_1B_1$ и известно, что луч OA, направлен так же, как и луч O_1A_1, а луч OB — как луч O_1B_1. Такие углы называются ***углами с одинаково направленными сторонами***. В этом определении понятия одинаковой направленности в пространстве аналогично понятию одинаковой направленности в плоскости.

Два луча OA и O_1A_1 в пространстве, не лежащие на одной прямой, одинаково направлены, если они параллельны и принадлежат одной полуплоскости, ограниченная прямой OO_1. Два луча, лежащие на одной прямой, одинаково направлены, если один из них полностью принадлежит второму.

Как и в планиметрии, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4 (*об углах с одинаково направленными сторонами*).

Углы с одинаково направленными сторонами равны между собой.

 Проведем через стороны угла AOB плоскость α. Если угол $A_1O_1B_1$ имеет с углом AOB одинаково направленные стороны, то возможны лишь два случая: прямые O_1A_1 и O_1B_1 не имеют общих точек с плоскостью α или же они обе лежат в плоскости α. Действительно, параллельные прямые O_1A_1 и O_1B_1 не могут пересекать плоскость α, поскольку они параллельны прямым OA и OB.

Рассмотрим первый случай (рис. 492). Пусть $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Тогда четырехугольник OAA_1O_1 — параллелограмм (он лежит в плоскости, определяемрй параллельными прямыми OA и O_1A_1, и имеет равные противоположные стороны). Аналогично, четырехугольник O_1B_1BO также является параллелограммом. Поскольку $AA_1 \| OO_1$, $OO_1 \| BB_1$ и $AA_1 = BB_1$, то четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм и $AB = A_1B_1$. Треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по трем сторонам, а потому равны между собой углы AOB и $A_1O_1B_1$.

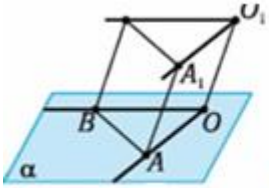


Рис. 492

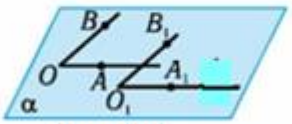


Рис. 493

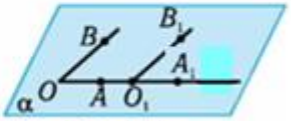


Рис. 494

Во втором случае имеем одну плоскость α. Если стороны углов не лежат на одной прямой, то доказательство аналогично приведенному выше (рис. 493). Если же стороны углов (например, OA и O_1A_1) лежат на одной прямой (рис.

494), то нужно воспользоваться свойством углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей. ■

Возвратимся к теореме 1 о равенстве углов между соответственно параллельными прямыми.

 Пусть даны две пары пересекающихся прямых a_1, a_2 и b_1, b_2 и $a_1 \| b_1$, $a_2 \| b_2$. Прямые a_1, a_2 образуют четыре, попарно равных между собой, угла, которым соответствуют четыре угла с одинаково направленными сторонами, образованными прямыми b_1 и b_2.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает, что угол между прямыми a_1 и a_2 равен углу между прямыми b_1 и b_2. Таким образом, теорема 1, которой мы пользовались при введении понятий угла между плоскостями и скрещивающимися прямыми, доказана. ■

Отметим, что в практических задачах более распространенной является не конструкция из двух пересекающихся плоскостей, а конструкция из двух полуплоскостей, имеющих общую границу (скаты крыши, обложки книги, стенки желоба и т. п.).

Фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую границу, называется двугранным углом. Общая прямая полуплоскостей называется ребром, а сами полуплоскости — гранями двугранного угла.

Двугранный угол с ребром AB и точками M, N, принадлежащими различным граням (рис. 495), будем обозначать $M\underline{AB}N$.

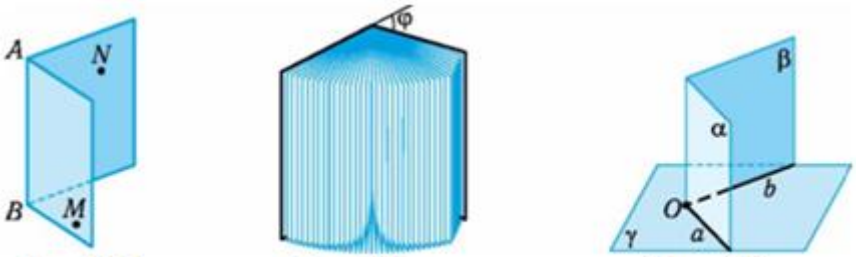


Рис. 495 **Рис. 496** **Рис. 497**

Угловая мера двугранного угла может отличаться от угла между плоскостями, определяемые гранями двугранного угла. Действительно, книга на рис. 496 «развернута больше», чем на рис. 473, а, но угол между плоскостями-обложками на рис. 496 — в данном случае меньше, чем на рис. 473, а.

Плоскость γ, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым a и b (рис. 497), выходящим из общей точки O. Построенный таким образом угол называется ***линейным углом двугранного угла***. Собственно, он и определяет угловую меру двугранного угла. Понятно, что линейный угол двугранного угла как геометрическая фигура определяется неоднозначно, но все линейные углы данного двугранного угла равны между собой. Обоснование этого факта аналогично рассуждениям о произвольности выбора секущей плоскости при измерении угла между плоскостями.

В отличие от угла между плоскостями, изменяющегося в пределах от 0 до 90°, угловая мера двугранного угла изменяется от 0 до 180°. Это отличие связано с тем, что в первом случае, в конце концов, измеряется угол между прямыми, а во втором — плоский угол, который может быть и острым, и

тупым. Однако, существует простая связь между этими величинами: они или совпадают, или же в сумме равны 180°. Так, на рис. 498 изображен двугранный угол и прямые a и b, проходящие через стороны его линейного угла. Двугранный угол равен β. Но угол между прямыми a и b может равняться α, если β > 90°. Понятно, что β + α = 180°.

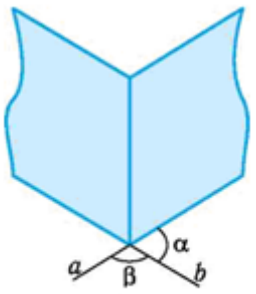


Рис. 498

Для построения линейного угла достаточно взять точку на ребре двугранного угла и в каждой грани провести лучи, перпендикулярные ребру.

Иногда при определении двугранного угла в него включают и часть пространства, содержащуюся между его гранями.

Понятие угла между плоскостями позволяет установить связь между площадью плоской фигуры и площадью ее ортогональной проекции.

Задача 1. Доказать, что площадь S_{ABC} треугольника ABC и площадь $S_{A_1B_1C_1}$ его ортогональной проекции $A_1B_1C_1$ на плоскость α связаны соотношением:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между плоскостями ABC и α.

□ Можно считать, что линия пересечения плоскостей ABC и α проходит через одну из сторон треугольника ABC (например AB, рис. 499, а) или через одну из вершин (например A, рис. 499, б). Этого можно достичь параллельным переносом плоскости α, в результате которого проекция не изменяется.

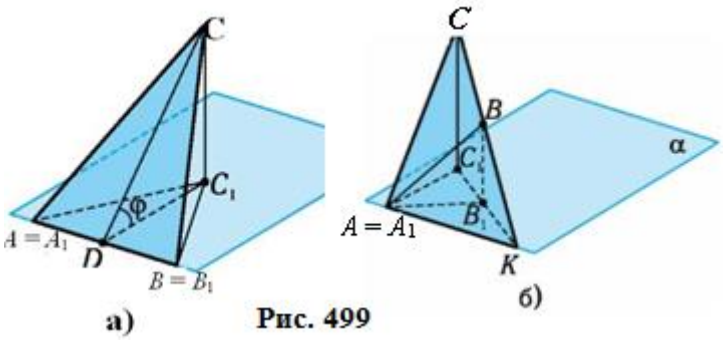


Рис. 499

В первом случае треугольник и его проекция имеют общее основание AB, а угол φ равен углу CDC_1 между высотами этих треугольников. Поскольку $DC_1 = DC \cdot \cos\varphi$, то

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} AB \cdot DC_1 = \frac{1}{2} AB \cdot DC \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Во втором случае рассмотрим треугольник ACK, где K — точка пересечения прямой BC с линией пересечения плоскостей ABC и α (BC не параллельна α, иначе, перенеся параллельно плоскость α, мы пришли бы к первому случаю). Треугольник ABC можно получить, «отрезав» от треугольника ACK треугольник ABK, основание которых AK лежит на линии пересечения плоскостей ABC и α. Аналогичное соотношение имеем для проекций треугольников. Поэтому

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{AC_1K} - S_{AB_1K} = S_{ACK} \cdot \cos\varphi - S_{ABK} \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi. \ ■$$

Каждый многоугольник можно разбить на треугольники. При этом площадь многоугольника равна сумме площадей треугольников разбиения. Кроме

того, разбиению многоугольника на треугольники соответствует разбиение его ортогональной проекции на треугольники, являющиеся ортогональными проекциями треугольников, на которые разбит многоугольник. Из приведенных соображений и задачи 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 5 (*о площади ортогональной проекции многоугольника*).

Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

На самом деле теорема справедлива для произвольной плоской фигуры, для которой определена площадь, ведь для нее площадь можно определить с любой точностью с помощью площадей вписанных многоугольников.

Пример 4. Равнобокую трапецию *ABCD* с большим основанием *AD* и высотой 8 см перегнули по прямой, проходящей через середины *M* и *N* сторон *AB* и *CD*, так, что вершина *B* расположилась от плоскости *AMN* на расстоянии 2 см.

1) Найти угол между плоскостями *AMD* и *MBC*.

2) Построить линейный угол двугранного угла *AMNC* и найти его угловую меру, если ортогональная проекция точки C на плоскость четырехугольника *AMND* лежит за его пределами.

3) Найти расстояние от точки *B* до прямой *AD*.

4) Найти расстояние от прямой *AN* до плоскости *ABD*.

5) Построить линию пересечения плоскостей *AMB* и *DNC*.

□ Языком геометрических преобразований условие примера можно интерпретировать как поворот части трапеции *MBCN* вокруг средней линии *MN* данной трапеции (рис. 500, а), при котором каждая точка, в частности точки *B*, *C* и др., вращаются в плоскости, проходящей через эту точку и перпендикулярной *MN*.

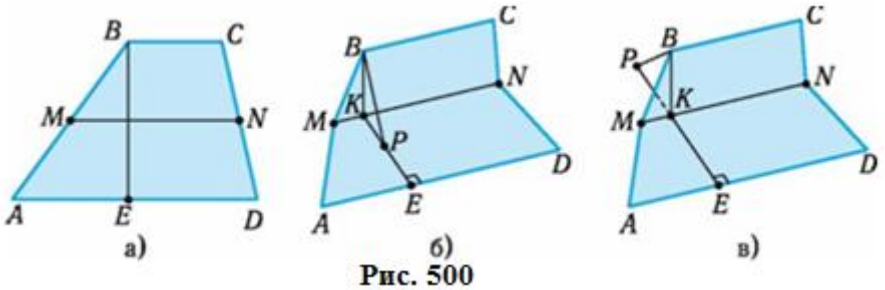


Рис. 500

1) Построим рис. 500, б, в, соответствующие условию. Расстояние от точки *B* до плоскости *AMN* определяется длиной перпендикуляра *BP*, основание какого *P* лежит на прямой *BE* (рис. 500, а), или на прямой *KE* (рис. 500, б), где *K* — точка пересечения высоты *BE* трапеции *ABCD* со средней линией *MN*. При этом точка *P* может лежать на луче *KE* (рис. 500, б) или же на дополнительном луче до всей прямой *KE* (рис. 500, в).

В обоих отмеченных случаях угол между плоскостями *AMD* и *MBC* равен углу *BKP* одноименного прямоугольного треугольника, ведь плоскость *BKE*

перпендикулярна MN и угол BKP — острый угол прямоугольного треугольника. Поскольку $BK = 4$ см, $BP = 2$ см, то $\sin\angle BKP = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\angle BKP = 30°$.

2) Этому условию соответствует рис. 500, в, ведь $KP < 4$ см и если точка P принадлежит лучу KE, то точка P попадает на отрезок KE. А расположение проекций точек B и C относительно четырехугольника $AMND$ одинаково. Поэтому линейным углом двугранного угла $A\underline{MN}C$ может быть угол BKE, а его мера равна 180° – 30° = 150°.

3) Поскольку $BE \perp AD$, то расстояние от точки B до прямой AD определяется длиной стороны BE треугольника BKE. И опять имеем два случая, когда $\angle BKE = 30°$ и $\angle BKE = 150°$ (рис. 501, а, б), а $KB = KE = 4$ см в обоих случаях. Тогда, по теореме косинусов, $BE = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos 30°} = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (см) или $BE = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (см).

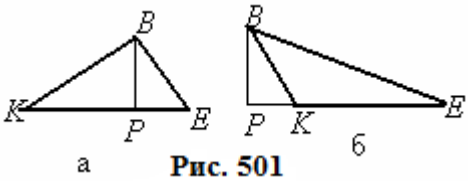


Рис. 501

4) Расстояние от прямой MN до плоскости ABD определяется длиной перпендикуляра из точки K до плоскости ABD. А поскольку плоскости ABD и KBE — перпендикулярны (почему?), то искомый перпендикуляр является высотой h треугольника KBE, проведенной из вершины K. И опять имеем два случая (рис. 501, а, б). В обоих из них высоту к стороне BE можно найти как отношение удвоенной площади $2S = KE\cdot BP = 4\cdot 2 = 8$ (см^2) треугольника KBE к стороне BE. То есть $h = \frac{8}{4\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ или $h = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

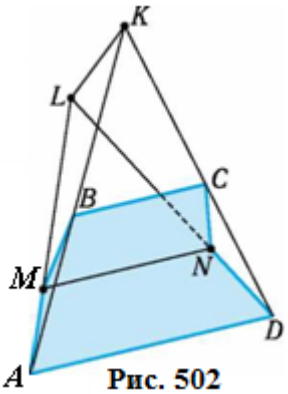


Рис. 502

5) Возвратимся к рис. 500, б, в. Прямую, по которой пересекаются плоскости ABM и DCN, можно задать, определив две ее точки. Одну из них, точку K, можно получить как пересечение прямых AB и DC этих плоскостей. Причем эти прямые обязательно пересекаются, поскольку они проходят через боковые стороны AB и DC. Вторая точка L находится как точка пересечения прямых AM и DN, проходящих через боковые стороны трапеции $AMND$ (рис. 502). ■

Ответы: 1) 30°; 2) 150°; 3) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см или $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 4) $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ или $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Пример 5. Три прямые проходят через данную точку и образуют с данной плоскостью равные углы. Доказать, что точки пересечения прямых с плоскостью равноудалены от основания перпендикуляра, проведенного из данной точки к плоскости.

□ Пусть прямые a, b, c проходят через точку S и пересекают плоскость α в точках A, B, C, $SO \perp \alpha$ (рис. 503). Поскольку угол между прямой и плоскостью равняется углу, образованному наклонной, лежащей на прямой, и ее проекцией, то углы SAO, SBO, SCO, по условию, равны. Соответствующие треугольники равны, так как имеют общий катет и равные острые углы. Поэтому $AO = OB = OC$. ■

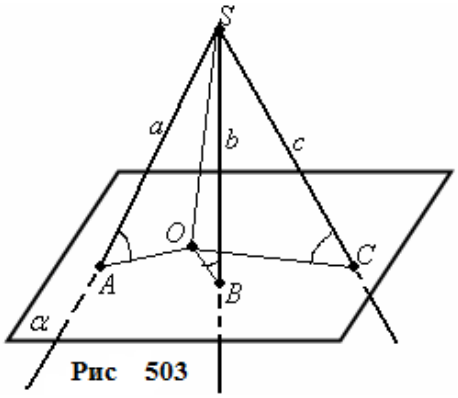


Рис 503

Пример 6. Ортогональной проекцией треугольника ABC со сторонами 25, 29, 36 на плоскость δ является треугольник $A_1B_1C_1$. Ортогональной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC является треугольник $A_2B_2C_2$ со сторонами 12, 17, 25. Найти угол между плоскостями ABC и δ.

□ Если S, S_1, S_2 — площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, соответственно, то $S_1 = S\cos\varphi$, $S_2 = S_1\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями ABC и δ. Отсюда $S_2 = S\cos^2\varphi$. Площади S_2 и S находим по формуле Герона: $S_2 = \sqrt{27(27-12)(27-17)(27-25)} = 90$, $S = \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} = 360$. Следовательно, $\cos^2\varphi = \frac{1}{4}$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, или $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$. Поскольку угол между плоскостями не тупой, то $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60^0$. ■

Ответ: 60^0.

Вопросы для самоконтроля

1. Проекция одной из наклонных больше проекции второй, а сами наклонные равны. Какая из этих наклонных образует больший угол с данной плоскостью?

2. Может ли прямая, пересекающая плоскость, образовывать с некоторой прямой этой плоскости угол, больший 90°?

3. Верно ли, что боковые стороны равнобедренного треугольника образуют равные углы с плоскостью, в которой лежит основание треугольника?

4. Диагональ параллелограмма лежит в плоскости α, а его стороны образуют равные углы с плоскостью α. Можно ли утверждать, что этот параллелограмм является ромбом?

5. Диагональ параллелепипеда одинаково наклонена ко всем его граням. Верно ли, что этот параллелепипед является кубом?

6. Почему падающий и отражённый световые лучи определяют плоскость, перпендикулярную к плоскости зеркала?

7. Какой фигурой является множество биссектрис всех линейных углов данного двугранного угла?

8. Может ли угловая мера двугранного угла равняться 160°?

9. Угловая мера двугранного угла равняется 100°. Чему равняется угол между плоскостями граней этого двугранного угла?

10. Известно, что боковые грани тетраэдра одинаково наклонены к плоскости основания. Можно ли утверждать, что проекция вершины тетраэдра совпадает с центром окружности, вписанной в его основание?

Графические упражнения

Постройте рисунок, который соответствует приведенным данным.

1. Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ наклонена к его граням под углами α, β, γ.

2. Все ребра пирамиды $SABC$, основанием которой является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, одинаково наклонены к плоскости основания. Вершина S ортогонально проектируется в точку O.

3. Квадрат $ABCD$ со стороной a перегнули по прямой, которая проходит через середины M и N сторон DC и BC, так, что расстояние от вершины C до плоскости AMN равняется d.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между плоскостями противоположных боковых граней равняется α.

6. Основанием тетраэдра является правильный треугольник. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом α.

7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы боковых граней, вершины которых совпадают с вершиной S пирамиды, равняются по 100°. Угол AMB — линейный угол двугранного угла $S\underline{AB}C$.

8. Плоскости всех граней треугольной пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к плоскости основания. Точка O является основанием перпендикуляра, проведенного из точки S к плоскости основания.

Введение понятий расстояния между фигурами, угла между прямыми и плоскостями значительно расширяет возможности задания геометрических мест точек.

Задача 2. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от граней данного двугранного угла.

□ Из планиметрии известно, что точки биссектрисы OC угла AOB равноудалены от его сторон (рис. 504 а). Кроме того, это свойство имеют и точки, которые находятся внутри угла KOL (рис. 504 б), где $KO \perp OB$, $LO \perp OA$, ведь для каждой такой точки M расстояние до сторон угла определяется длиной отрезка

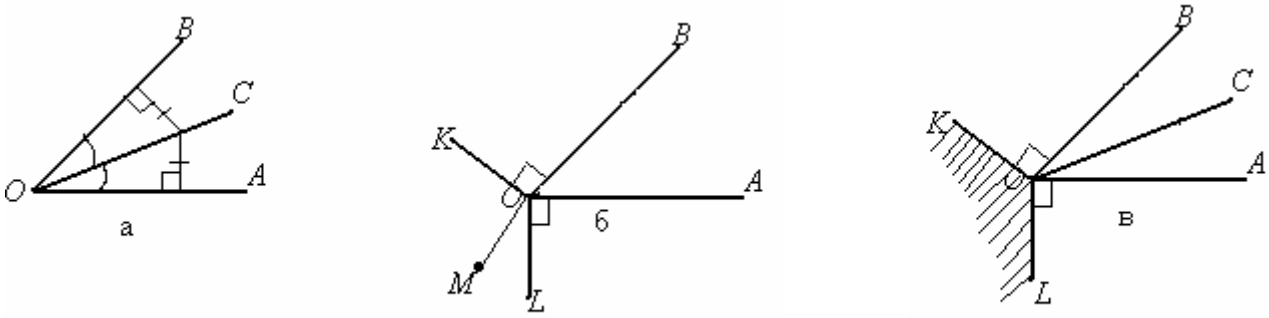


Рис. 504

MO (почему?). Указанные точки (рис. 504 в) и составляют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от сторон данного угла, ведь, очевидно, все другие точки находятся на разных расстояниях от сторон угла *AOB*.

К планиметрической ситуации легко сводится пространственная относительно нахождения геометрического места точек, равноудаленных от граней двугранного угла *K*<u>*AB*</u>*L* (рис. 505). Если точка *M* находится внутри этого угла, то ее расстояния до граней угла определяются перпендикулярами *PM* и *MQ* к ним. Плоскость *PMQ* перпендикулярна граням угла, а потому перпендикулярна и прямой *AB* их пересечения (теорема 5 §16 о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости). Поэтому угол *POQ*, где *O* — точка пересечения прямой *AB* с плоскостью *PMQ*, является линейным углом данного двугранного угла, а *PM* = *MQ* тогда и только тогда, когда *OM* — биссектриса угла *POQ*.

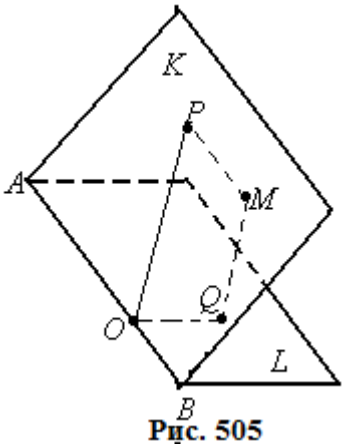


Рис. 505

Следовательно, множество точек, которые лежат внутри двугранного угла и равноудалены от граней, составляют биссектрисы всех его линейных углов. Эти биссектрисы образуют полуплоскость, которую называют ***бисекторной*** для угла *K*<u>*AB*</u>*L* (рис. 506). Относительно нахождения других точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла, то снова ситуация сводится к планиметрической и в конечном итоге идет речь о точках, которые находятся внутри двугранного угла с ребром *AB*, грани которого перпендикулярны граням данного двугранного угла. Детали доказательства предлагаем восстановить самостоятельно. ■

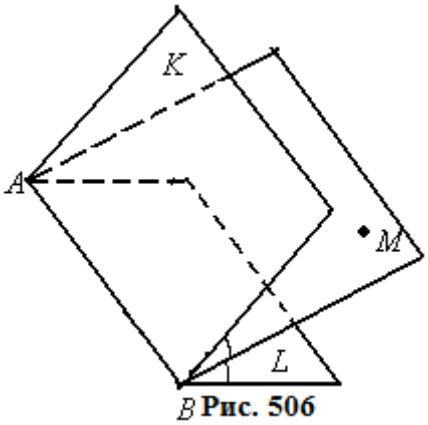


Рис. 506

Бисектор — латинское bisector *от* bis *— дважды и* seco *— секу, разделяю — тот, кто разделяет на две части.*

Рассмотренный в п. 2.6 метод проектирования для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми применим и для нахождения угла между ними.

Пример 7. В правильном тетраэдре с ребром a найти угол между скрещивающимися медианами соседних граней

☐ Пусть AE и CF — скрещивающиеся медианы граней тетраэдра $DABC$ (рис. 507). Проведем в плоскости грани DBC через точку E прямую, параллельную медиане CF. Она пересекается с прямой BC в точке G. Угол между прямыми AE и CF равняется углу между прямыми AE и GE. Рассмотрим треугольник AGE. В нем $AE = CF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Поскольку EF — средняя линия треугольника CDB, то $EF||CG$, то есть четырехугольник $EFCG$ — параллелограмм. Следовательно, $EG = CF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Поскольку $CG = EF = \frac{a}{2}$; $AC = a$; $\angle ACG = \frac{2\pi}{3}$, то по теореме косинусов $AG^2 = FC^2 + GC^2 - 2AC \cdot GC \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{7a^2}{4}$. $AG = \frac{a}{2}\sqrt{7}$. Применяя теорему косинусов к треугольнику AEG, получим: $AG^2 = AE^2 + GE^2 - 2AE \cdot GE \cdot \cos\angle AEG$ или $\frac{7a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\angle AEG$. Отсюда $\cos\angle AEG = -\frac{1}{6}$, $\angle AEG = \arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$. Поскольку угол между прямыми равняется меньшему из углов, образованных при пересечении данных прямых, а $\arccos\left(-\frac{1}{6}\right) > 90^\circ$, то искомый угол между прямыми AE и GF (а потому и между скрещивающимися медианами) равняется $\pi - \arccos\left(-\frac{1}{6}\right) = \arccos\frac{1}{6}$. ■

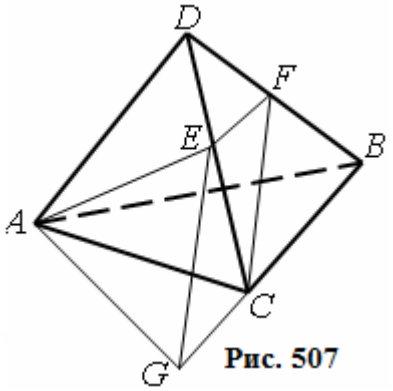


Рис. 507

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.

Задания для размышлений

1. Две пересекающиеся плоскости пересекают третью под одинаковыми углами. Выясните, как расположена на третьей плоскости проекция прямой пересечения первых двух плоскостей. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

2. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой x, а прямая y наклонена к плоскостям α и β под углами φ и ψ. Можно ли найти углы между прямыми x и y?

3. Известно, что величина двугранного угла определяется величиной линейного плоского угла, полученного при пересечении двугранного угла плоскостью,

перпендикулярной его ребру. А можно ли для измерения двугранного угла взять плоский угол, построенный по другим принципам (хотя и не такой удобный, как обычный линейный)?

4. Детализируйте доказательство в задаче 2.

Контрольные вопросы

1. Под каким углом к плоскости должна располагаться наклонная, чтобы ее проекция была в два раза меньше наклонной?

2. Длина одной наклонной больше длины второй, а проекции их равны. Какая из этих наклонных образует больший угол с данной плоскостью?

3. Какая из прямых, расположенных на данной плоскости, образует наибольший угол с наклонной к этой плоскости?

4. Прямая образует с плоскостью угол 75°. Есть ли в плоскости прямые, которые образуют с данной прямой угол 90°?

5. Верно ли, что диагональ куба наклонена одинаково ко всем граням?

6. Верно ли, что диагональ куба образует с гранью больший угол, чем произвольная диагональ смежной грани?

7. Будут ли равными боковые ребра тетраэдра, если они образуют равные углы с плоскостью основания?

8. Что надо измерить, чтобы определить: а) высоту башни, к основанию которой наблюдатель может подойти; б) расстояние до дома, высота которого известна, если наблюдатель не может к нему подойти?

9. Может ли угол между плоскостями равняться 27°, 135°, 270°? Может ли иметь такие значения угловая мера двугранного угла?

10. Квадрат повернули на некоторый угол вокруг его стороны. Можно ли определить угол поворота, измеряя только расстояния?

11. Точка S равноудалена от вершин квадрата $ABCD$. Верно ли, что плоскости SAB, SBC, SCD, SAD пересекаются с плоскостью квадрата под одинаковыми углами?

12. Равносторонний треугольник ABC перегнули по медиане BK. Всегда ли угловая мера ли угла AKC равняется величине угла между плоскостями ABK и CBK?

13. Грани одного двугранного угла соответственно параллельны граням второго. Какая существует зависимость между величинами этих двугранных углов?

Задачи

394. Пусть KS — перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$, где K — середина стороны AD; $KS = \sqrt{3}$, $AB = 3$.

1°) Найдите угол между прямой SD и плоскостью ABC.

2°) Найдите угол между прямой *BS* и плоскостью *ACD*.
3°) Определите взаимное расположение плоскостей *ABD* и *KCS*.
4) Найдите угол между прямой, проходящей через точку *K* и середину стороны *BC*, и плоскостью *BCS*.
5) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *CS*.

395. Из вершины *A* квадрата *ABCD* со стороной $\sqrt{3}$ см проведен перпендикуляр *AS* к плоскости квадрата длиной 3 см.
1°) Найдите угол между прямой *BS* и плоскостью *ABC*.
2°) Найдите угол между прямой *CS* и плоскостью *ABC*.
3°) Определите взаимное расположение плоскостей *ABS* и *BDC*.
4) Найдите угол между прямой *CS* и плоскостью *ASD*.
5) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *CS*.

396°. Из вершины прямого угла *A* треугольника *ABC* проведен перпендикуляр *AP* к плоскости треугольника длиной 4 см. Катет *AC* равен 4 см, а угол *ACB* = 60°. Найдите угол:
1) между прямой *PB* и плоскостью *ABC*;
2) между прямой *PB* и плоскостью *APC*.

397. Из центра *O* квадрата *ABCD* со стороной длиной 8 см восставлен перпендикуляр *OP* так, что угол между прямой *PC* и плоскостью *ABC* равен 60°.
1°) Найдите углы между прямой *PD* и плоскостями *ABC* и *APC*.
2°) Сравните углы, образованные прямыми *PA*, *PB*, *PC*, *PD* с плоскостью *ABC*.
3°) Найдите расстояние от точки *P* до плоскости *ABC*.
4) Докажите, что точки *A* и *C* симметричны относительно плоскости *PBD*.

398. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*.
1) Найдите угол между диагональю B_1D и плоскостью ACC_1.
2) Сравните углы, образованные диагональю B_1D с плоскостями его граней.
3) Найдите угол между диагональю B_1D и плоскостью A_1C_1D.
4) Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости A_1C_1D.

399. Дан правильный тетраэдр. Вычислите углы, которые образованы:
1) ребром с плоскостями граней;
2) высотами боковых граней с основанием;
3) высотой тетраэдра и плоскостями граней;
4) * высотами смежных граней.

400. Равнобедренный треугольник *ABC* с высотой 16 см, проведенной к его основанию, перегнули по средней линии *MN*, параллельной основанию *AC*, так, что вершина *B* удалена от плоскости четырехугольника *ACNM* на 4 см.
1°) Найдите угол между плоскостями *AMC* и *MBN*.
2°) Постройте линейный угол двугранного угла $B\underline{MN}C$ и найдите его угловую меру, если ортогональная проекция вершины *B* на плоскость четырехугольника *AMNC* лежит за его пределами.
3°) Сравните угловые меры двугранного угла $B\underline{MN}C$ и угла *BMA*.
4°) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *AC*.
5) Найдите расстояние от прямой *MN* до плоскости *ABC*.

6) Постройте линию пересечения плоскостей *AMB* и *BNC*.

401. Квадрат *ABCD* со стороной $4\sqrt{2}$ см перегнули по прямой, проходящей через середины *M* и *N* сторон *DC* и *BC* так, что вершина *C* удалена от плоскости *AMN* на 1 см.

1°) Найдите угол между плоскостями *ADM* и *CMN*.

2°) Постройте линейный угол двугранного угла $B\underline{MN}C$ и найдите его угловую меру, если ортогональная проекция вершины С на плоскость пятиугольника *ABNMD* лежит за его пределами.

3°) Сравните угловые меры двугранного угла $B\underline{MN}C$ и угла *CNB*.

4°) Найдите расстояние от точки *C* до прямой *BD*.

5) Найдите расстояние от прямой *MN* до плоскости *BDC*.

6) Постройте линию пересечения плоскостей *BNC* и *DMC*.

402°. Из вершины квадрата *ABCD* проведен перпендикуляр *AP* к плоскости квадрата.

1) Докажите, что угол *PBA* является линейным углом двугранного угла $P\underline{BC}A$.

2) Сравните угловые меры двугранных углов $P\underline{BC}A$ и $P\underline{CD}A$.

3) Найдите угол между плоскостями *APB* и *APD*.

403. Два одинаковых равнобедренных треугольника *ABC* и *ABD* с общим основанием *AB* лежат в различных плоскостях; *K* — середина *AB*.

1°) Докажите, что *CKD* — линейный угол двугранного угла $C\underline{AB}D$.

2) Постройте линейный угол двугранного угла *D*A*C*B.

3) Сравните угловые меры двугранных углов $C\underline{AB}D$ и $A\underline{CD}B$, если *AB* = *CD*.

404. Из центра *O* равностороннего треугольника *ABC* проведен перпендикуляр *OP*.

1)° Постройте линейные углы двугранных углов $A\underline{PO}C$ и $P\underline{AC}B$.

2) Сравните угловые меры двугранных углов $P\underline{AC}B$ и $A\underline{PO}C$.

3) Найдите угол между плоскостями *APC* и *ABC*, если $OP = \frac{AB}{2}$.

4) Найдите угол между плоскостями *APO* и *POC*.

405. Найдите угол между диагоналями двух смежных граней куба, которые:

1)° выходят из одной вершины;

2)* не выходят из одной вершины.

406. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; *M* — середина ребра AA_1. Вычислите:

1) угол между диагональю грани $A_1B_1C_1$ и плоскостью *MDB*;

2) углы между прямой MC_1 и плоскостями $A_1B_1D_1$, BCC_1, DBD_1;

3) угол между прямыми MC_1 и *BC*.

407°. Длина ручки швабры равна 1,2 м.

1) На каком расстоянии от пола расположен конец швабры при вытирании пола, если швабра наклонена к нему под углом 60°?

2) Какой угол образует ручка швабры с полом, если конец ручки удален от пола на 0,6 м?

408. Канатная дорога в течение 15 мин поднимает лыжника на вершину горы от ее подножия со скоростью 2 м/с. Определите высоту горы, считая, что угол наклона горы приблизительно равен 30°.

409*. Пользуясь законами отражения света, докажите, что падающий и отраженный лучи образуют с зеркалом одинаковые углы.

410°. Точка M лежит между гранями двугранного угла и удалена от каждой из них на 8 см. Найдите расстояние от точки M до ребра, если величина двугранного угла равна: 1) 90°; 2) 60°; 3) 120°.

411°. Найдите угловую меру двугранного угла, если точка, лежащая на одной грани, расположена от ребра на расстоянии, вдвое большем, чем от второй грани.

412. Угол падения угольного пласта равен 35°. При вертикальном бурении обнаружено, что длина пути бура в угле равна 2,2 м. Вычислите толщину пласта.

413*. Прямая a образует равные углы с тремя прямыми, лежащими в плоскости α и проходящими через точку пересечения прямой a с плоскостью α. Докажите, что $a \perp \alpha$.

414. Дан равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами $AC = AB = a$ и углом α при вершине A, AK — перпендикуляр к плоскости треугольника, длина которого равняется b. Вычислите:

1) расстояние от точки C до плоскости AKB;
2) расстояние между прямыми AK и BC;
3) расстояние от точки A до плоскости BKC;
4)* угол между прямыми KC и AB;
5)* угол между прямой BK и плоскостью AKC.

415. Докажите, что угол между плоскостями равняется углу между прямыми, перпендикулярными к этим плоскостям.

416. Плоскость α проходит через катет прямоугольного равнобедренного треугольника и наклонена к его плоскости под углом 30°. Найдите расстояние от центра масс треугольника к плоскости α, если длина гипотенузы равняется $3\sqrt{2}$.

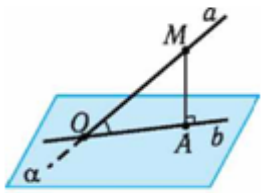
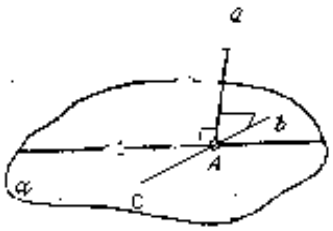
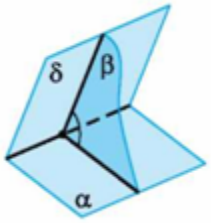
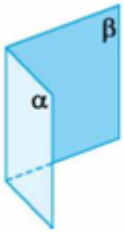
417. Докажите, что двугранный угол имеет бесконечное множество плоскостей симметрии.

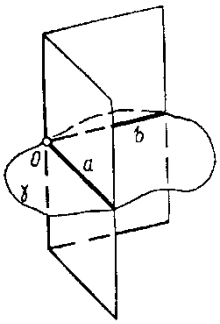
418. Через данную точку проведите плоскость так, чтобы она составляла равные углы с гранями данного двугранного угла.

419*. Из вершины B ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр BK к его плоскости. Сторона ромба равна a, острый угол при вершине A равен α, а длина перпендикуляра — b. Найдите:

1) расстояния от точки A до плоскостей KDB; KBC; KDC;
2) углы между прямой AK и прямыми CD; BD;
3) угол между прямой AK и плоскостью BDK;
4) углы между плоскостями ABK и KBC; ADK и DKC; ABK и DKC

Итог
Основные определения

Углом между прямой и неперпендикулярной к ней плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.		
Угол между прямой и перпендикулярной ей плоскостью равняется 90°.		
Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, образованными при пересечении данных плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии пересечения первых двух.		
Угол между совпадающими плоскостями равняется 0°.		
Фигура, образованная двумя полуплоскостями, выходящимит из одной прямой, называется ***двугранным углом.*** Общая прямая полуплоскостей называется ***ребром***, а сами полуплоскости — ***гранями двугранного угла.***		

Плоскость γ, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум лучам *a* и *b*, выходящими из общей точки *O*. Угол, образованный лучами *a* и *b*, называется ***линейным углом двугранного угла.*** Он и определяет угловую меру (величину) двугранного угла.		

Готовимся к тематическому оцениванию по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Задания для самоконтроля

1. Сторона *BC* правильного треугольника *ABC* лежит в плоскости α. Может ли прямая *AB* быть перпендикулярной плоскости α?

2. Сторона *AB* правильного треугольника *ABC* лежит в плоскости α. Всегда ли высота *CD* этого треугольника перпендикулярна плоскости α?

3. Можно ли утверждать, что прямая, перпендикулярная диаметру окружности, перпендикулярна и её плоскости?

4. Перпендикулярна ли плоскости круга прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная трем его радиусам?

5. Можно ли с помощью двух прямоугольных пластин определить направление, перпендикулярное плоскости стола?

6. Существует ли такая прямая, через которую можно провести бесконечное множество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости?

7. Может ли прямая быть перпендикулярной двум сторонам параллелограмма и не быть перпендикулярной ни одной из его диагоналей?

8. Могут ли две прямые быть перпендикулярными некоторой плоскости и пересекаться?

9. Могут ли быть параллельными две плоскости, если известно, что только одна из них перпендикулярна данной прямой?

10. Одна из диагоналей ромба перпендикулярна плоскости, содержащей только одну его вершину. Параллельна ли этой плоскости вторая диагональ?

11. Могут ли быть параллельными две прямые, если известно, что только одна из них перпендикулярна данной плоскости?

12. Имеют ли одинаковую форму сечения куба, перпендикулярные его диагонали?

13. Верно ли, что две различные плоскости, перпендикулярные одной прямой, не имеют общих точек?

14. Перпендикулярны ли две плоскости, если они перпендикулярны третьей плоскости и линии их пересечения с этой плоскостью перпендикулярны между собой?

15. На каждой из двух перпендикулярных плоскостей выбрали по одной прямой. Может ли случиться, что эти прямые скрещивающиеся?

16. Параллельны ли две плоскости, если они проходят через две параллельные прямые и перпендикулярны некоторой плоскости?

17. Может ли ортогональной проекцией острого угла быть развернутый угол?

18. Прямая равноудалена от двух разных плоскостей, причем расстояние от прямой до каждой из плоскостей не равняется нулю. Верно ли, что она параллельна этим плоскостям?

19. Могут ли быть равными ортогональные проекции двух неравных наклонных?

20. Основание перпендикуляра, проведенного из данной точки к плоскости ромба, не являющегося квадратом, совпадает с точкой пересечения диагоналей ромба. Может ли данная точка быть равноудаленной от вершин ромба?
21. Могут ли две наклонные различной длины быть одинаково наклоненными к плоскости?
22. Может ли угол между плоскостями равняться 100°?
23. Чтобы убедиться в вертикальности двух столбов, ученик проверил, что первый столб установлен вертикально, а потом убедился в том, что высоты столбов одинаковы и расстояния между их основаниями и верхушками тоже одинаковы. Можно ли после этого сделать вывод о том, что и второй столб установлен вертикально?
24. Всегда можно ли к невертикальному столбу прикрепить вертикально стенку?

Задачи для повторения

420. Отрезок SC — перпендикуляр к сторонам BC и DC ромба $ABCD$; O — точка пересечения диагоналей; M — середина стороны DC; $AB = BD = SC = a$.
1)° Определите взаимное расположение прямых AC и SC.
2)° Определите взаимное расположение прямых BD и SO.
3)° Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости ACS.
4) Через точку M проведите прямую, перпендикулярную диагонали BD.
5) Вычислите площадь треугольника, плоскость которого перпендикулярна прямой AS, одна из его вершин — точка M, а две другие — точки пересечения плоскости треугольника с прямыми AS и BC.
421*. Докажите, что прямая, образующая равные углы с тремя прямыми плоскости, перпендикулярна этой плоскости.
422. Из центра O равностороннего треугольника ABC проведен отрезок OM, перпендикулярный плоскости треугольника. Постройте:
1)° плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно прямой AB;
2)° прямую, проходящую через середину отрезка CM перпендикулярно плоскости ABC;
3) плоскость, проходящую через точку A параллельно плоскости MOC;
4) плоскость, проходящую через точку O перпендикулярно прямой BM, если

$$OM = \frac{\sqrt{3}}{3} AB.$$

423*. Дано изображение куба и изображение перпендикуляра MN из точки M к плоскости одной из граней куба. Известно, что отрезок MN больше ребра куба. Постройте тень куба на плоскость этой грани от источника света, помещенного в точку M.
424. Из центра O квадрата $ABCD$ проведена перпендикулярная плоскости квадрата прямая OM, причем $BM = BD = d$.
1)° Определите взаимное расположение плоскостей: а) AMC и ABC; б) AMC и BMD.

2)° Постройте плоскость, проходящую через прямую AB перпендикулярно плоскости ACD.
3)° Докажите, что прямая MC не перпендикулярна плоскости BMD.
4) Проведите через середину F отрезка BM плоскость, перпендикулярную прямой OM.
5) Найдите площадь треугольника AFC.

425. Постройте ортогональную проекцию куба на плоскость, перпендикулярную:
1) °ребру куба;
2) диагонали боковой грани;
3) * диагонали куба.

426*. Ортогональной проекцией треугольника ABC со сторонами 25, 29, 36 на плоскость α является треугольник $A_1B_1C_1$. Ортогональной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC является треугольник $A_2B_2C_2$ со сторонами 12, 17, 25. Найдите угол между плоскостями ABC и α.

427. Пусть точка O является серединой гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC; OP — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $OP = AB = 4$ см. Найдите расстояния:
1)° от точки P до стороны AC;
2)° от точки A до плоскости COP;
3)° от плоскости, проходящей через середины сторон AC и BC параллельно OP, до плоскости AOP;
4) от точки O до плоскости PAC.

428. Из точки, удаленной от плоскости α на 16 см, проведены две наклонные, длины которых относятся как 3:5. Вычислите длины этих наклонных, если одна из них образует с плоскостью α вдвое больший угол, чем вторая.

429. Пусть OS — перпендикуляр к плоскости равностороннего треугольника ABC с центром в точке O; $AB = OS = 2$.
1°) Найдите угол между прямой CS и плоскостью ABC.
2°) Найдите угол между прямой AO и плоскостью SOB.
3°) Определите взаимное расположение плоскостей ABC и SOC.
4) Найдите угол между прямой AO и плоскостью SBC.
5) Найдите расстояние от точки B до прямой CS.

430. Предложите способ определения угла наклона желоба для стекания воды с крыши здания до поверхности земли.

431. Пусть A, B, C, D — четыре точки пространства. Докажите, что:
1°) середины отрезков AB, BC, CD и DA являются вершинами параллелограмма;
2) угол между прямыми AC и BD прямой, если $AB = BC$, $CD = DA$;
3) * угол между прямыми AC и BD прямой, если расстояние между серединами отрезков AD и BC равняется расстоянию между серединами отрезков AB и CD.

432. Даны прямоугольник $ABCD$ и точка M вне его плоскости. Пусть l — линия пересечения плоскостей ABM и CDM, а m — линия пересечения плоскостей BCM и CDM. Найдите угол между прямыми l и m.

433. Квадрат $ABCD$ со стороной $4\sqrt{2}$ см перегнули по диагонали BD так, что точка C удалена от плоскости треугольника ABD на 2 см.

1)° Найдите угол между плоскостями ABD и DBC.

2)° Постройте линейный угол двугранного угла $A\underline{DB}C$ и найдите его угловую меру, если ортогональная проекция C_1 точки C на плоскость треугольника ABD лежит за его пределами.

3)° Сравните угловые меры двугранного угла $A\underline{BD}C$ и угла ABC.

4)° Найдите расстояние от точки C до средней линии MN треугольника ABD, параллельной основанию BD.

5) Найдите расстояние от прямой BD до плоскости MNC.

6) Постройте линию пересечения плоскостей CC_1D и ABC.

434. Из вершины B квадрата $ABCD$ проведен отрезок BD, перпендикулярный стороне квадрата и равный стороне квадрата. Найдите величину двугранного угла:

1) $K\underline{BC}D$; 2) $K\underline{AD}C$; 3) $K\underline{CD}B$; 4) $A\underline{KB}C$.

435. Плоскость проходит через катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равняется c и наклонена к плоскости под углом 30°. Найдите расстояние от центра масс треугольника до этой плоскости.

436. Из середины M стороны AB правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной длиной a проведен перпендикуляр MK длиной a к плоскости шестиугольника. Найдите:

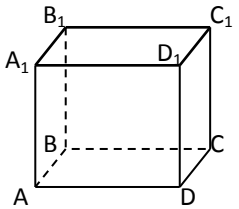
1) расстояния от точки K до сторон шестиугольника;

2) углы между плоскостью шестиугольника и плоскостями KDC, KAF;

3) угол между прямыми KF и DF.

Тест для диагностики усвоения темы

«Перпендикулярность прямых и плоскостей»



1. На рисунке изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскости грани ADD_1A_1 не перпендикулярна прямая …

А. DC. **Б.** AB. **В.** A_1C . **Г.** D_1C_1.

2. Сколько плоскостей проходит через данную точку пространства перпендикулярно данной прямой?

А. Ни одной. **Б.**Одна. **В.** Бесконечное множество.

Г. Ответ зависит от расположения точки.

3. Определите взаимное расположение прямой a и плоскости α, если прямая a перпендикулярна двум смежным сторонам параллелограмма, лежащего в плоскости α.

А. $a \perp \alpha$. **Б.** $a \parallel \alpha$. **В.** $a \subset \alpha$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

4. Если только одна из двух плоскостей перпендикулярна прямой, то эти плоскости …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** пересекаются.

Г. могут быть расположены как угодно.

5. Сечением куба плоскостью, перпендикулярной его грани, является ...

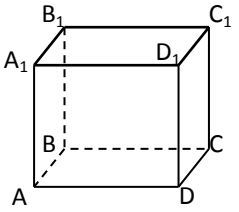
А. квадрат. **Б.** прямоугольник. **В.** треугольник.

Г. многоугольник, отличный от приведенных.

6. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, проходит через прямую, не перпендикулярную данной плоскости?

А. Бесконечное множество. **Б.** Ни одной.

В. Одна**. Г**. Две.



7. На рисунке изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость BDD_1 перпендикулярна плоскости …

А. C_1CD. **Б.** C_1B_1B. **В.** C_1CB. **Г.** $C_1D_1B_1$.

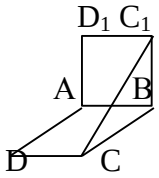
8. Если прямая a перпендикулярна плоскости β, а плоскость α параллельна прямой a, то плоскости α и β ...

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны.

В. параллельны или совпадают.

Г. могут быть расположены как угодно.

9. Плоскости квадратов $ABCD$ и ABC_1D_1 перпендикулярны. Расстояние CC_1 равняется b. Длина отрезка AB равняется .



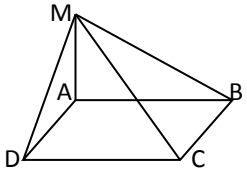
А. $\frac{b}{2}$. **Б.** $\frac{b\sqrt{3}}{2}$. **В.** $b\sqrt{2}$. **Г.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

10. Проекцией куба при ортогональном проектировании параллельно его грани является …

А. квадрат. **Б.** прямоугольник.

В. пятиугольник. **Г.** шестиугольник.

11. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ ($AB < BC$) проведен перпендикуляр AM к его плоскости. Точка M соединена с точками B, C, D. Какой из отрезков MA, MB, MC, MD имеет наибольшую длину?



А. MA. **Б.** MB. **В.** MC. **Г.** MD.

12. Из центра O окружности с радиусом 5 проведен перпендикуляр OA длиной 5 к плоскости окружности. Под каким углом из точки A виден диаметр окружности?

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.

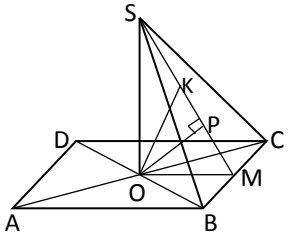
13. Геометрическим местом оснований наклонных данной длины, проведенных к этой плоскости из данной точки, не лежащей в плоскости, является ...

А. прямая. **Б.** отрезок. **В.** окружность. **Г.** круг.

14. Наклонная длиной a образует с плоскостью проекции угол 45^0. Проекция этой наклонной на плоскость равняется .

А. $\sqrt{2}a$. **Б.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **В.** $\frac{2a}{\sqrt{2}}$. **Г.** a.

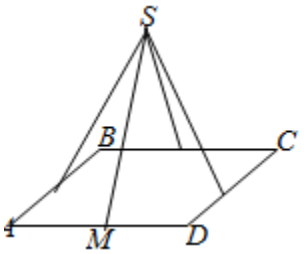
15. Из центра O квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр OS к плоскости квадрата. M — середина BC. Расстояние от точки O до плоскости BCS равняется ...



А. высоте OM Δ OBC. **Б.** медиане OK ΔOMS.

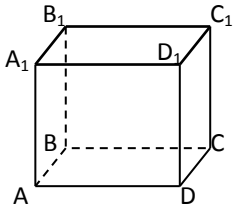
В. высоте OP Δ OMS. **Г.** перпендикуляру OS.

16. Точка S, не лежащая в плоскости квадрата $ABCD$, удалена от каждой из его сторон на 5 см. Сторона квадрата равняется 6 см. Расстояние от точки S до плоскости квадрата равняется …



А. $\sqrt{7}$ см. **Б.** 3 см. **В.** 4 см. **Г.** 1 см.

17. Расстояние от диагонали BC_1 грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a до грани ADD_1A_1 равняется …



А. a. **Б.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **В.** $a\sqrt{2}$. **Г.** $a\sqrt{3}$.

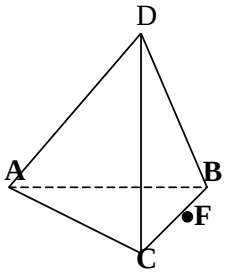
18. Геометрическим местом точек пространства, расположенных на расстоянии $d \neq 0$ от данной плоскости, является …

А. прямая. **Б.** плоскость.

В. пара параллельных плоскостей.

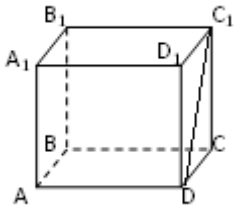
Г. фигура, отличающаяся от приведенных.

19. На рисунке изображен правильный тетраэдр $ABCD$, F — середина BC. Расстоянием от точки D до ребра BC является длина отрезка …



А. DB. **Б.** DC. **В.** DF. **Г.** отличного от приведенных.

20. Угол наклона диагонали C_1D грани CDD_1C_1 к грани ADD_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равняется …



А. $\angle C_1D_1A_1$. **Б.** $\angle C_1D_1A$. **В.** $\angle C_1DA_1$. **Г.** $\angle C_1DD_1$.

21. Прямая наклонена к плоскости под углом 60^0. В плоскости есть прямая, которая образует с данной прямой угол в ...

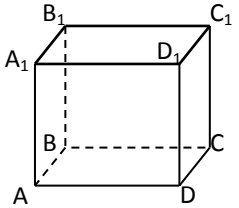
А. 75^0. **Б.** 55^0. **В.** 45^0. **Г.** 15^0.

22. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равняется 4 см, а длина отрезка прямой, содержащегося между этими плоскостями, равняется 8 см. Какие углы образует прямая с этими плоскостями?

А. 45^0 и 45^0. **Б.** 60^0 и 60^0. **В.** 30^0 и 60^0.

Г. 30^0 и 30^0.

23. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равняется угол между плоскостями AA_1B_1 и B_1C_1D?



А. 45^0. **Б.** 90^0. **В.** 60^0.

Г. Ответ, отличный от приведенных.

24. Угол между плоскостями не может равняться ...

А. 45^0. **Б.** 95^0. **В.** 85^0. **Г.** 5^0.

25. Какой угол образует плоскость линейного угла двугранного угла величиной 30^0 с каждой из его граней?

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.

Образец контрольной работы

1. Из центра O правильного треугольника ABC со стороной 2 см проведен перпендикуляр OS длиной 2 см.

1°) Определите взаимное расположение прямой AB и плоскости OCS.

2°) Определите взаимное расположение плоскостей OSC *и* ABC.

3°) Найдите расстояние от точки *A* до плоскости *OSC*.
4°) Найдите угол между прямой *SC* и плоскостью *ABC*.
5°) Найдите угол между плоскостями *SBC и ABC*.
6) Постройте плоскость, проходящую через середину отрезка *AS* параллельно плоскости *SBC*, и найдите расстояние между этими плоскостями.

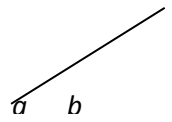
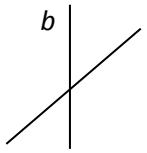
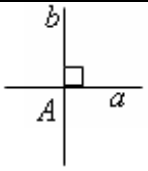
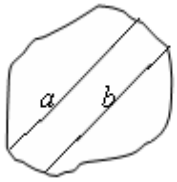
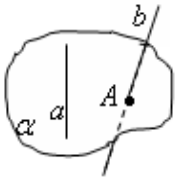
2. Луч образует с двумя из трёх попарно перпендикулярных плоскостей углы α и β. Какой угол образует луч с третьей плоскостью?

Ответы к заданиям для самоконтроля

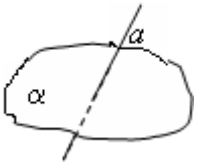
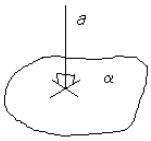
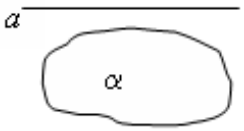
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Нет	Нет	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет	Нет	Да	Нет	Нет
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Да	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	Нет	Да	Нет	Да	Да

Таблицы для повторения и систематизации учебного материала

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

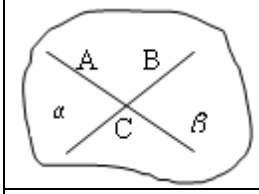
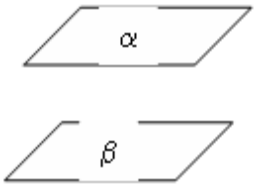
Количество общин точек				
Не менее двух	Одна		Нет	
	Общий случай	Частный случай	Лежат в одной плоскости	Не лежат в одной плоскости
				
a и *b* совпадают	*a* и *b* пересекаются	*a* и *b* перпендикулярны	*a* и *b* параллельны	*a* и *b* скрещивающиеся
$a=b$	$a \times b$	$a \perp b$	$a \parallel b$	$a \overset{\bullet}{-} b$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Количество общин точек			
Не менее двух	Одна		Нет
	Общий случай	Частный случай	
			

a принадлежит α	*a* пересекает α	*a* и α перпендикулярны	*a* параллельна α
$a \subset \alpha$	$a \times \alpha$	$a \perp \alpha$	$a \parallel \alpha$

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Количество общин точек			
Не менее трёх, не лежащих на одной прямой	Не менее одной, но все они лежат на одной прямой		Нет
	Общий случай	Частный случай	
			
α и β совпадают	α и β пересекаются	α и β перпендикулярны	α и β параллельны
$\alpha = \beta$	$\alpha \times \beta$	$\alpha \perp \beta$	$\alpha \parallel \beta$

Установление взаимного расположения прямых и плоскостей

Для установления параллельности двух прямых в пространстве достаточно проверить:

найдётся ли прямая, параллельная каждой из данных прямых;

будут ли данные прямые линиями пересечения двух параллельных плоскостей третьей.

Для установления скрещиваемости двух прямых в пространстве достаточно проверить:

найдётся ли плоскость, в которой лежит одна из данных прямых и которую пересекает вторая прямая в точке, не принадлежащей первой прямой.

Для установления параллельности прямой и плоскости достаточно проверить:

найдётся ли в плоскости прямая, параллельная данной прямой.

Для установления параллельности двух плоскостей достаточно проверить:

найдётся ли в одной из плоскостей две пересекающиеся прямые, соответственно параллельные двум прямым другой плоскости;

найдётся ли плоскость, параллельная каждой из данных плоскостей.

Ответы и указания к задачам

Раздел 1

1. Два решения: 0,5 м или 5,9 м. **2.** $\frac{a+b}{2}$. **3.** $\frac{a+2b}{2}$. **4.** 12 м. **5.** Пересекает. **6.** 55°. **7.** 1) 0°; 2) 30°; 3) 90°; 4) 45°. **8.** ***Указание:*** примените метод «от противного» и аксиому 2. **9.** ***Указание:*** примените метод «от противного» и аксиому 5. **10.** ***Указание:*** примените метод «от противного» и аксиому 6. **18.** ***Указание:*** определите, чему равняется сумма $\angle BAC + \angle ACD$ и примените свойство параллельности двух прямых. **19.** 70°. **20.** 120°, 60°. **21.** ***Указание:*** речь идёт о смежном угле. **22.** 180°. **23.** 48°, 60°, 72°. **24.** 22°, 82°. **29.** 54°. **30.** 80°. **31.** 60 см. **32.** $\frac{5}{3}\sqrt{13}$. **35.** $m, 2m, m\sqrt{3}$. **36.** 60°, 30°, 90°. **37.** α + β. **38.** 64 см. **39.** 65 см. **41.** 1) Точка пересечения серединных перпендикуляров; 2) две прямые; 3) прямая; 4) биссектриса угла и точки угла, образованного лучами, выходящими из вершины данного угла и перпендикулярными к его сторонам; 5) «крест» биссектрис углов, образованных прямыми. **42.** 1) 9,6 см и 5,4 см; 4) $\frac{144}{7}$ см; 5) $\frac{36}{7}\sqrt{2}$ см; $4\sqrt{10}$ см; $\frac{9}{2}\sqrt{5}$ см. 7) $\frac{\sqrt{109}}{7}$ см. **43.** $\frac{ab}{a+b}$. ***Укаание:*** вспомните, в каком отношении биссектриса кута треугольника делит противоположную сторону. **44.** 22,5 см и 7,5 см. **45.** 18 см и 12 см. **46.** 6 см. **47.** 2 см. **49.** 2:3. **50.** 3:4. **51.** Указание: медиану можно рассматривать, как полудиагональ параллелограмма, построенного на треугольнике. **52.** 16 см. **53.** 12 см и 12 см. **54.** $\sqrt{2n(m+n)}, \sqrt{4m^2+6mn+2n^2}$. **58.** 60° и 120°. **59.** 40° или 80°. **61.** 36 мм. Указание: с конца отрезка на меньшем основании проведите прямые, параллельные боковым сторонам. **63.** 1) $8\sqrt{3}$ см; 2) 5 см и 9 см. **64.** 60°. **65.** $R(\sqrt{2}-1)$ или $R(\sqrt{3}+1)$. **67.** 1 см. **68.** 1,5 мм. **69.** 25 и 9 см. **70.** Указание: вспомните, при каком условии четырехугольник является описанным около окружности. **77.** 72 см^2. **78.** 150 см^2. **79.** 72 см^2. **80.** 2) 20 см^2. **81.** $\frac{a^2}{4}$. **82.** 15 см и $\sqrt{313}$ см. **83.** 34 мм, 78 мм, 34 мм, 78 мм. **84.** 2) b:a; 4) $b\cos\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha}{4}, \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **85.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см. **86.** 1) $\frac{\pi S}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\pi S}{6\sqrt{3}}$. **87.** 1) $\frac{R^2}{2}(\pi+2)$; 2) $\frac{R^2}{6}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$. **90.** 45°, 45°, 90°. **91.** 110°, 115°, 135°. **92.** 13:12:11. **93.** $AO:OA_1=(b+c):a$. **95.** 60°, 120°, 100°, 80°. **96.** 124 °. **97.** 1) Окружность, центром которого является середина отрезка AB, или окружность с центром в середине отрезка AB, или пустое множество в зависимости от того, будет ли длина отрезка AB равняться $2\sqrt{2}$, меньше этого числа, или пре-

вышать его; 2) окружность с центром на прямой AB. **98.** Прямая, перпендикулярная AB. **99.** Указание: рассмотрите случаи, когда отношение расстояний равняется 0; 1, отличается от 0 и 1. Получим точку, или прямую, или окружность.

Раздел 2

101. Указание: воспользуйтесь тем, что вне каждой плоскости существует бесконечное множество точек пространства. **102. Указания:** 1) рассмотрите плоскость α, определяемую данными точкой и прямой; 2) обратите внимание на точки прямой, проходящие через A параллельно α. **103, 104. Указание:** воспользуйтесь методом «от противного». **106. Указание:** рассмотрите плоскость, которая определяется прямыми AB и AC. **107. Указание:** докажите сначала, что точка N лежит вне плоскости ABC. **108. Указание:** обратите внимание на расположение точки D и плоскости ABC. **109. Указание:** используйте существование в пространстве четырёх точек, не лежащих в одной плоскости. **110.** 1) B_1C_1; 2) A_1B_1; 3) AB; 4) AB; 5) BD; 6) B_1D_1. **111. Указание:** воспользуйтесь тем, что прямые AB и c пересекаются, а $c \subset \beta$. **112. Указание:** постройте сначала точку пересечения плоскости ABC с прямой l. **113. Указания:** 1) постройте вначале линию пересечения плоскостей SMP и ABC; 2) используйте построение точки пересечения прямой MP с плоскостью ABC, обратите внимание на отличия в существовании построений в 1) и 2). **114. Указание:** выясните, всегда возможно ли такое построение. **115. Указание:** Используйте для построений плоскость, определяемую произвольной прямой a, лежащей в плоскости α, и точкой B.**116. Указание:** обратите внимание на то, что точка A является общей для данных плоскостей. **117. Указание:** запишите условие символично: $a = \gamma \cap \alpha, b = \gamma \cap \beta$. **118. Указание:** определите данные прямые с помощью четырех точек, не лежащих в одной плоскости. **119. Указание:** рассмотрите плоскость, определяемую двумя из данных прямых. Для последнего вопроса важным является тот случай, когда все прямые проходят через одну точку. **120. Указание:** если фигура имеет три точки, не лежащие на одной прямой, то она содержит две прямые, проходящие через эти точки. Поэтому и вся плоскость, определяемая этими прямыми, принадлежит данной фигуре, так как она состоит из всех прямых, проходящих через две точки, взятые на каждой из этих прямых. Рассмотрите другие случаи самостоятельно. **121. Указание:** если все точки лежат на одной прямой, то таких плоскостей будет бесконечное множество. Если же существуют три точки, не лежащие на одной прямой, то они определяют некоторую плоскость, которой принадлежат остальные точки.**122. Указание:** 4), 5) используйте то, что центр грани является точкой пересечения диагоналей. **123. Указание:** 2) — 4) используйте то, что центр грани является точкой пересечения медиан. **124. 1)** $MN \parallel PQ$, $MP \parallel BC$, $AB \times PQ$, $MQ \parallel BD$; 2) параллелограмм; 3) 14 см, $24\sqrt{3}$ см^2. **125.** Да. **126. Указание:** проанализируйте всевозможные варианты проведе-

ния прямой и зависимость ответа от вида треугольника и расположения точки в нём. **127.** 1) Не обязательно; 2) не обязательно. **128.** 1) Скрещиваются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) пересекаются. **129.** 1) Параллельны; 2) пересекаются; 3) скрещиваются; 4) пересекаются. **130.** 1) Параллельны; 3) параллельны; 4) скрещиваются; 5) пересекаются. **131.** 1) Параллельны; 2) пересекаются; 3) скрещиваются. **132.** 1) Параллельны; 2) пересекаются; 3) скрещиваются. **133. Указания:** 1) исследуйте условие существования искомой точки; 2) выясните, зависит ли ответ от существования точки пересечения прямой AB с плоскостью α; 3) $CC_1 = 3{,}5$. **134.** 2) 15 см. **135.** 2) 6 см. **136.** 2) 4 см. **137. 1)** $AD \perp BC$, $DM \times AN$, $AD \parallel MN$; 3) 3:1. **138.** 1) $PM \times DK$, 2) $PM \perp CB$, $PL \parallel CK$; 3) 3:1. **139. Указание:** рассмотрите два случая: $CA \parallel m$ и $CA \nparallel m$. **140. Указание:** проведите через пересекающиеся прямые плоскость и примените второй признак мимобіжності прямых. **141. Указание:** 7), 8) постройте сначала пересечение секущей плоскости с плоскостью одной из граней. **142. Указание:** 6), 7) рассмотрите отдельно случай, когда прямая MN пересекает плоскость ABC и когда не пересекает. **143. Указание:** 2) используйте то, что на плоскости каждая прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую. **144. Указание:** обратите внимание на то, что точки A, B, C не лежат на одной прямой. **145. Указание:** обратите внимание на то, что три произвольные вершины трапеции не лежат на одной прямой. **146. Указание:** если существует еще одна прямая d, параллельная c и пересекающая a и b, то она вместе с c определяет плоскость, в которой содержатся a и b (почему?). **147. Указание:** для параллельных прямых a и b и непересекающихся прямых a и b всё понятно. Если же они скрещивающиеся, то целесообразно провести через одну из них и точку P плоскость. Всегда ли задача имеет решения? **149. Указания:** 1) Пусть $A \in \alpha$, b' параллельна b и проходит через a. Спроектируйте прямую b параллельно c на плоскость, определяемую прямыми a и b'; 2) попробуйте сначала через точку пространства провести прямую, пересекающую две скрещивающиеся прямые. **150. Указание:** каждый из указанных случаев имеет место. Докажите невозможность того, что две линии пересечения параллельны, а третья пересекается лишь одной из этих двух. **151. Указание:** проведите через данные прямые плоскость и примените метод «от противного». **152.** Не обязательно. **153.** 4, 8, 12, 16. **154.** 14 см. **155.** 10 см, 15 см. **156.** 24 см. **157. Указание:** воспользуйтесь признаками равенства треугольников, свойством точки пересечения медиан треугольника. **158. Указание:** используйте то, что диагонали ромба перпендикулярны и что два перпендикуляра к прямой на плоскости параллельны. **159. Указание:** 2) используйте то, что отрезок, соединяющий середины оснований равнобокой трапеции, перпендикулярен к основаниям. **160. Указания:** 2), 3) используйте свойства биссектрисы и высоты в равно-

стороннем треугольнике; 4) попробуйте охарактеризовать центр окружности, вписанной в равносторонний треугольник, с помощью медиан. **161. Указание:** 3) используйте то, что ось симметрии равнобокой трапеции и высота перпендикулярны основаниям. **162. Указания:** 1) охарактеризуйте центр окружности с помощью параллельных хорд; 2), 3) воспользовавшись указанием к предыдущему заданию, постройте два взаимно перпендикулярных диаметра; 4) рассмотрите стороны описанного квадрата, параллельные диагоналям вписанного квадрата; 5) постройтесначала диаметр, на котором должна лежать высота треугольника, и исследуйте, в каком отношении основание этой высоты делит построенный диаметр; 6) – 8) примените построение вписанного правильного треугольника. **163. Указание:** 1) используйте то, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости и то, что прямая A_1B_1 лежат в плоскости β; 2) 4 см. **164.** 2) 2 см. **165.** 2) 10 см. **166.** 1) Параллельной проекцией; 2) параллелограмм. **167. Указание:** проанализируйте возможность построения. **168. Указание:** спроектируйте точки A и B на плоскость верхнего основания параллельно боковому ребру. **169. Указание:** спроектируйте точки A и B на плоскость соответствующих граней параллельно ребрам, пересекающим эти грани. **170, 171. Указание:** используйте решение задачи 1 и примера 3 из § 10. **172. Указание:** используйте то, что проекция центра шестиугольника симметрична проекции вершины B относительно середины проекции отрезка AC. **173. Указание:** воспользуйтесь решением примера 5 из § 10 и примените обратимость проектирования. **174. Указание:** обратитесь к поримеру 5. **175. Указание:** построение облегчается, если к граням куба достроить такие же кубы. **176.** Область определения или множество значений функции. **177.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{cb}{a+c}$. **178.** Вторая боковая сторона без ее концов. **179. Указание:** используйте то, что меньшая диагональ делит этот ромб на равносторонние треугольники. **180. Указания**: 1) используйте то, что точкой пересечения диагонали квадрата делятся пополам; 2) обратите внимание на то, что задача имеет бесконечное множество решений. **181. Указание**: 1), 2) используйте свойство биссектрис, проведенных из вершины равнобедренного треугольника. **182. Указание:** учтите неоднозначность решения задачи. **183. Указание:** используйте то, что серединные перпендикуляры параллельны соответствующим высотам. **184. Указания:** 1) обоснуйте то, что основание биссектрисы делит катет в отношении 2:1; 2), 3) подсчитайте, в каком отношении делят гипотенузу основание высоты, проведенной из вершины прямого угла, и основание биссектрисы угла в 30°.**185. Указание:** 3) обратите внимание на взаимное расположение биссектрис внешнего угла равностороннего треугольника и его сторон. **186. Указания:** 2) докажите,

что центр окружности является пересечением оси симметрии трапеции и медианы равнобедренного треугольника, построенного на боковой стороне трапеции и меньшем основании; 3) установите взаимное расположение сторон прямоугольника и оси симметрии трапеции. **187. Указания:** 1) обоснуйте, что это пересечение изображений оси симметрии трапеции и прямой, проходящей через середину боковой стороны и основание высоты, опущенной из вершины тупого угла; 2) центр окружности лежит на пересечении оси симметрии и биссектрисы тупого угла трапеции. Поскольку мы умеем строить изображение медианы к основанию (биссектрисы угла при вершине) равнобедренного треугольника, то попробуйте построить на заданном тупом угле трапеции равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны боковой стороне трапеции. При этом, конечно, нужно учитывать «искажение» расстояния по разным направлениям. **188. Указание:** изобразите хорду, параллельную данному диаметру. Как искомый диаметр делит эту хорду? **189. Указание:** 1) – 3) — воспользовавшись указаниями к задаче 162, постройте изображение окружности, диаметра, проходящего через данную точку, и перпендикулярного ему диаметра. **190. Указание:** 2) постройте точки пересечения прямых, проходящих через вершину A и середины рёбер BB_1, CC_1, соответственно с прямыми A_1B_1 и A_1C_1; 3) обратите внимание на то, что точка B находится в плоскости A_1CD. **191. Указание:** 2) можно использовать указание к задаче 190 2), а можно воспользоваться тем, что данная плоскость проходит через точку D; 3) обоснуйте, что искомое сечение проходит через середины параллельных рёбер куба. **192.** 1) **Указание:** обратите внимание на то, что одна точка пересечения плоскостей уже известна, осталось найти еще одну; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}a$. **193.** 1) **Указание:** используйте то, что все данные точки находятся в двух гранях; 2) $\frac{a}{3}$; 3) **указание:** найдите отношение, в котором искомая плоскость пересекает три ребра пирамиды. **194. Указания:** 3) проведите через центр грани SBC прямую, параллельную SB; 4) сечение будет параллельным к грани ASC. **195. Указания:** 3) воспользуйтесь следом секущей плоскости на плоскости грани $ABCD$; 4) найдите пересечение секущей плоскости с ребром CC_1. **196.** 130° или 50°. **197.** 1) BB_1, CC_1, DD_1; 3) нет. **198. Указание:** воспользуйтесь тем, что боковые грани являю.тся равными равнобедренными треугольниками. **199. Указание:** используйте для искомого построения точку пересечения прямых KP и SB. **200.** 1) $DF \parallel ABC$, $AB \parallel MNK$, $AC \times DBF$, $MK \times BCD$; 3) 3 см. **201.** 1) $EF \parallel ABC$, $MC \times DEF$, $MN \parallel CFE$, $BE \parallel ADF$; 3) 8 см. **202**. 1) $CD \subset ABC$, $CD \parallel ABB_1$, $CD \times AA_1D$; 4) например, прямая, проходящая через середины ребер AA_1 и CC_1; 6) 60°. **203.** 1) $AD \parallel BCS$; 4) **указание**: обоснуйте, что искомая прямая параллельна основаниям. **204.** 2) парал-

лельные; 3) 16 см. **205.** 2) параллельна; 3) 6 см. **206.** ***Указание:*** Обратите внимание на то, что такое построение не всегда возможно. **207.** ***Указание:*** воспользуйтесь тем, что противоположные стороны прямоугольника параллельны. **208.** ***Указание:*** плоскость α пересекает плоскость треугольника ABC по прямой, параллельной BC. **209.** 1) $B_1D_1D \parallel LMM_1$; 4) $MA_1B_1 \parallel CDM_1$. **210.** ***Указания:*** если бы таких прямых было больше, то две из них определили бы плоскость, параллельную обеим данным плоскостям, и тогда бы они были параллельны между собой; 2) рядом с прямой, параллельной второй плоскости, рассмотрите прямую, лежащую во второй плоскости и параллельную данной прямой. **211.** 1) $LM \dot{-} BC$, $LN \parallel ABC$. **212.** 3) $ABB_1 \parallel DD_1C_1$. **213, 214.** ***Указание***: учтите, что такие построения не всегда возможны. Укажите эти случаи. **215.** ***Указание***: 1)—3) постройте след плоскости SMN на плоскости ABC. **216.** 1) 45°; 2) построенные прямые параллельны плоскости BB_1C_1C; плоскость DD_1C_1C одна из этих прямых пересекает, а вторая — параллельна ей. **217.** 1) Четырехугольник ABC_1D_1; 2) треугольник BDK, где K — середина AA_1 3) если M, N — середины ребер CC_1, D_1C_1, то секущая плоскость пересекает плоскость AA_1B по прямой, параллельной MN. Далее воспользуйтесь методом следов. **218.** 1) Треугольник SMN, где M — середина AS, N — середина AB; 2) 1 : 1. **219.** 2) Например, плоскость ABC_1; 3) ***указание:*** обратите внимание на то, что прямые AB и A_1B_1 параллельны. **220.** ***Указание:*** обратите внимание на то, что такое построение не всегда возможно. Укажите эти случаи. **221**. 1) $MO_1O \parallel ADD_1$, $ABD_1 \times CD_1C_1$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **222.** 1) $ACD \parallel KLP$, $MLK \times ABC$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **223.** 1) $B_1D_1D \parallel LMM_1$; 4) $MA_1B_1 \parallel CDM_1$. **224.** 1) $LM \dot{-} BC$, $LN \parallel ABD$, $LMN \parallel BDC$; 4) ***указание:*** сечением является треугольник, для вычисления площади которого можно воспользоваться выражением $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где α — угол при вершине S, b, c — прилежащие стороны. **225.** 1) $LM \dot{-} BC$, $LN \parallel ABC$. **226.** 3) $ABB_1 \parallel DD_1C_1$. **227.** 1) Параллельны. 2) 3) $\frac{(a+b+c)(m+n)}{m}$, или $\frac{(a+b+c)(m-n)}{m}$. **228.** 2) Пересекаются; 3) параллелограмм. **229.** 1) ML, где $L = AB \cap CD$; 2) прямая, параллельная AD и проходящая через M. **230.** 3) Например, сечение, проходящее через вершины A, B_1, D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 4) сечение, проходящее через середины рёбер AB, AD, B_1C_1, D_1C_1 того же куба. **231.** Например, в тетраэдре $SABC$ сечение, проходящее через средние линии треугольников SAB и CAB, параллельные общему основанию AB. **232.** ***Указание:*** воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей. **233.** ***Указание:*** две прямые, проходящие через одну точку параллельно плоскости, опре-

деляют плоскость, параллельную данной. Нужно доказать, что эта плоскость и является искомой. **234.** ***Указание:*** воспользуйтесь тем, что эти плоскости параллельны двум плоскостям, проходящим через скрещивающиеся прямые AB и CD. **235.** ***Указание:*** воспользуйтесь свойствами прямой, пересекающей одну из параллельных плоскостей. **236.** ***Указание:*** сечением куба является квадрат с центром O и стороной MN. **237.** ***Указание:*** целесообразно рассуждать «от противного». **238.** ***Указание:*** в ΔADS проведите среднюю линию EF, а в ΔFCB — отрезок $DK \parallel FC$, $K \in BC$. Сечения EFC и ADK — искомые. **239.** 1), 2) Плоскость. **240.** 1) $AB \parallel A_1B_1$; $BC \times B_1C_1$; $AC \times A_1C_1$; 2) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. **241.** ***Указание:*** спроектируйте одну из прямых на плоскость, проходящую через вторую прямую параллельно первой. **242.** 1) $\sin 2A = \frac{2h_c}{c}$; 2) $\cos(A-45°) = \frac{c+2r}{c\sqrt{2}}$; 3) $c = \frac{r\sin(45°-A)}{\sin\frac{A}{2}\sin\left(45°-\frac{A}{2}\right)}$; 4) $a = \frac{(a-b)\sin A}{\sqrt{2}\sin\left(A-45°\right)}$; 5) C= 2R, $\cos A = \frac{b}{c}$. **243.** 1) $105°$, $50\sqrt{2}, 50\left(\sqrt{3}+1\right)$; 2) $8\sqrt{3}, 90°, 30°$. **244.** 1 м. **245.** ***Указание:*** продолжите каждый из перпендикуляров к одной стороне до пересечения с другой стороной угла. **246.** ***Указание:*** целесообразно провести через вершину угла прямую, параллельную одному из перпендикуляров к сторонам угла. **247.** ***Указание:*** учтите, что указанные точки не лежат на одной прямой. **248.** ***Указание:*** целесообразно воспользоваться методом «от противного». **249.** ***Указание:*** используйте существование точки, принадлежащей всем трём плоскостям. **250.** ***Указание:*** рассмотрите случаи, когда все точки фигуры лежат на одной прямой и когда не лежат. **251.** 1) Параллельны; 2) пересекаются; 3) скрещивающиеся. **252.** 2) 10 см. **253.** ***Указание:*** в плоскости, где лежит точка A, проведите прямую, параллельную линии пересечения данных плоскостей. **254.** ***Указание:*** учтите, что точки A, B, C, D, M лежат в одной плоскости. **255.** ***Указание:*** обратите внимание на то, что необходимо доказать два утверждения — прямое и обратное. **256.** ***Указание:*** воспользуйтесь методом «от противного». **257.** ***Указание:*** 2) воспользуйтесь построением в задаче 1). **258.** 2) 6 см. **259.** ***Указание:*** воспользуйтесь свойствами параллельного проектирования. **260.** ***Указание:*** 3) прямая, проходящую через сторону квадрата, параллельную основанию трапеции, отсекает на боковоцй стороне отрезок $a\sqrt{2}$, де a — длина стороны квадрата. **261.** 1) Речь идёт о медиане ΔAA_1D_1; 2) прямая, проходящая через центры граней AA_1D_1D и BB_1C_1C; 3) секущая плоскость пересекает грань $A_1B_1C_1D_1$ по отрезку, параллельному DC. **262.** ***Указание:*** 2) сначала найдите прямую пересечения двух плоскостей, а при нахождении пересечения этой прямой с третьей плоскостью обратитесь к методу следов. **263.** ***Указание:*** постройте на стороне изображения квадрат и установите соответствие между элементами этого квадрата и данного изображения. **264.** ***Указание:*** воспользуйтесь

пересечением AB плоскостей ABD и ABE, где E — середина CD. **265.** ***Указания:*** 1) найдите отношение, в котором биссектрисы углов делят стороны треугольника; 2 б) линия пересечения параллельна плоскости шестиугольника. **266.** 1) $AB \parallel DFE, FM \times ABC,$ $EF \parallel ABN, BF \times ADE;$ 3) 2 см. **267.** 1) $MDB \times CB_1D_1, MNO \parallel ABC;$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **268.** ***Указание:*** докажите, что в треугольнике AOC, где O — точка пересечения медиан данного треугольника, M, N — середины медиан, которые принадлежат AO и OC, $MN \parallel AC$. **269.** $\frac{1}{3}$. **270.** 1) Параллельны; 2) параллельны; 4) 1:1; 6) ни в одном. **271.** 1) $AB \parallel A_1B_1, BC \times B_1C_1, AC \times A_1C_1;$ 2) параллельны; 3) пересекаются; 4) $10\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{325}}{4}$. **272.** 1) $\frac{\sqrt{137}}{4}a;$ 2) $1:3$. **273.** 1) $1 \le r \le 3;$ 2) $1 < r < 3;$ 3) $2:1$.

Раздел 3

274. 1) A_1D_1, A_1B_1, AD, AB; 3) ***указание:*** используйте результат выполнения задания 2); 4) указание: все эти прямые лежат в плоскости BDD_1, которая перпендикулярна A_1C_1. **275.** 1) SO, AC; 2) перпендикулярны; 4) SON, где N — середина AB;
5) $3\sqrt{2}$ см^2. **276.** 1) $CS \perp CB, CS \perp CM, CS \perp CA, CM \perp AB;$ 2) перпендикулярны;
5) $\frac{\sqrt{6}}{24}a^2$. **277.** 1) A_1C_1; 2) AA_1C_1; 3) BN, где N — середина CD; 6) ADC_1; 7) A_1C. **278.** 1) SO, где O – центр квадрата $ABCD$; 2) SKO; 3) высота из вершины M треугольника SMP, где P — середина ребра AB. **279.** 1) ***указание:*** проведите через точку D прямые, параллельные CA и CB. Они и определяют искомую плоскость; 2) нет; 3) ***указание:*** используйте то, что $BC \perp ACD$. **280.** ≈ 4,9 м. **281. Указание:** учтите взаимное расположение данных точки и прямой. **282. Указание:** используйте то, что диагональное сечение куба является прямоугольником. **283. Указание:** проведите через прямые a и b плоскость и рассмотрите ее пересечение с плоскостью α. **284. Указание:** примените метод "от противного". **285. Указание:** выясните, чем является отрезок KE для треугольников KAB и KCD. **286. Указание:** для прямых, лежащих в одной плоскости, все понятно. Если допустить, что прямые, имеющие два общих перпендикуляра, скрещиваются, то эти перпендикуляры являются перпендикулярными и параллельным плоскостям, в которых лежат прямые, а потому они параллельны между собой. **287. Указание:** используйте то, что указанные прямые параллельны между собой. **288. Указания:** 1) рассмотрите сечение плоскостью, проходящей через середины параллельных ребер; 2) рассмотрите сечение плоскостью, проходящей через диагонали противоположных граней. **289.** 2) Сечениями являются треугольники SAD и ACL, где D, L — середины отрезков BC и SB, а их пересечени-

ем является отрезок, соединяющий точку A с точкой пересечения отрезков SD и BK. **290. Указание:** проведите через все пары скрещивающихся прямых параллельные плоскости. **291.** $2a + 2b$. **292. Указание:** примените метод "от противного". **293.** Да. **Указание:** рассмотрите случаи, когда прямые углы прилегают и когда не прилегают к одной стороне. **294. Указание:** проведите из точки C перпендикуляры к BA. **295.** 1) SOC, где O – середина AB; 2) KL, где K, L – середины отрезков AS и AC; 3) **указание:** проведите через точку A прямые, параллельные CS и CB; 4) 4) **указание:** из точки С проведите перпендикуляр к прямой SO. **296.** 1) MKO, где O – середина AC; 2) прямая, проходящая через середину AM параллельно MK; 3) **указание:** прямая, которая проходит через середину AM параллельно BC и KM; 4) BCL, где L – середина AM. **297.** 1) AOS; 2) прямая, параллельная SO; **указания:** 3) воспользуйтесь тем, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC. 4) докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости ASO. **298.** 1) Проходит через центры указанных граней; AC. **299.** 1) $SO \perp ABC$; 2) $BC \perp ASD$. **300.** 3) искомая прямая параллельна PQ. **301.** $\approx 21{,}5$ м. **302.** $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$. **303. Указание:** достаточно доказать, что прямая a перпендикулярна плоскости MPQ. **304. Указание:** через точку D проведите прямую, параллельную OM. **305. Указание:** это прямая, перпендикулярная ортогональной проекции прямой a на плоскость α. **306.** $YA>YB$. **307.** Плоскости пересекаются по прямой, перпендикулярной плоскости DBC. **308. Указание:** 1), 2) — если А и В находятся по разные стороны от плоскости, то искомая точка — точка пересечения прямой АВ с плоскостью. В другом случае рассмотрите точки A и B', симметричную B относительно данной плоскости. **309. Указание:** через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная данной прямой. **310. Указание:** а) постройте два прямоугольника на данном отрезке и найдите точки пересечения их диагоналей; б) постройте два равнобедренных треугольника, основаниями которых является данный отрезок. **311.** 10 дм. **312. Указание:** примените метод "от противного". **313.** 1) Перпендикулярны; 2) перпендикулярны; 3) плоскость проходит через середину отрезка AB; 4) плоскость проходит через перпендикуляр к ABC, проведенный через середину

AD. **314.** 1) $SDB \perp ABC, SDB \perp ABK$; 4) $\frac{1}{4}a^2$. **315.** 1) $DBS \perp ADC, ASB \perp CBS$; 4) $\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{4}$. **316.** 1) Перпендикулярны; 2) перпендикулярны; 5) перпендикулярны; 6) $\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$. **317. Указание:** 1) воспользуйтесь тем, что медиана в правильном треугольнике есть высотой; 2) воспользуйтесь заданием 1); 3) учтите то, что $BD \perp AMC$; 4) $\frac{4}{3}$ см; 5) пополам. **318.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см; 2) **указание:** используйте то, что отмеченная плоскость единственная. **319.** $\frac{1}{5}\sqrt{337}$ см. **320. Указа-**

ние: рассмотрите случаи, когда плоскости параллельны и когда пересекаются. **321. Указание:** постройте пересечение следа плоскости φ_1 на плоскости β из b и следов плоскостей φ_1, φ на плоскости γ. **322. Указание:** укажите ребро одной грани, перпендикулярное второй грани. **323. Указание:** воспользуйтесь определением перпендикулярности плоскостей и однозначностью перпендикуляра из точки к плоскости. **324. Указание:** воспользуйтесь тем, плоскость, перпендикулярную другой плоскости, можно считать "сотканной" из перпендикулярных прямых к другой плоскости. **325. Указание:** докажите, что, например, $BB_1 \perp \alpha$, и тогда $BB_1 \perp BX$. **326. Указание:** докажите сначала, что прямая пересечения плоскостей α и β перпендикулярна плоскости треугольника ABC, а потом установите равенство треугольников MOB_1 и MOA_1, где O — точка пересечения высот AA_1 и BB_1. **327. Указание:** докажите сначала, что прямая пересечения плоскостей α и β перпендикулярна плоскости треугольника, а потом установите равенство треугольников MOA и MOB, где O — точка пересечения срединных перпендикуляров отрезков AB и BC. **328. Указание:** рассмотрите сначала две указанных плоскости и установите свойства их линии пересечения. **329.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}b$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}b, \frac{\sqrt{3}}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{2}b$. **330.** 40 см. **331.** $\sqrt{pq}$. **332.** 13 см. **333.** 21 см, 28 см. **334.** 1) $\sqrt{41}$ см; 2) 12 см. **335.** 1) 13 см; 2) 4 см. **336.** 1) $\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}ab$. **337.** 2) а) пять; б) девять; в) девять; г) пять; д) бесконечное множество; е) бесконечное множество. **338. Указание:** попробуйте реализовать конструкцию на прямоугольном параллелепипеди. **341.** 130 см. **342.** 8 см. **343.** 10 см, 35 см. **344.** 6 см. **345.** 1 см. **346.** Или $\sqrt{674}$ см, или $25+\sqrt{399}$ см, или $25-\sqrt{399}$ см. **347.** $3\sqrt{5}$ см, $\arcsin\frac{2}{3}$. **348.** 12 см, $3\sqrt{41}$ см, 20 см. **349.** $2\sqrt{2}$ см. **350.** 45°. **351.** 36 см. **352.** $\sqrt{15}$ см. **353. Указание:** во всех случаях идет речь о построении наклонной MK, перпендикулярной прямой AB. Для этого целесообразно сначала построить проекцию наклонной MK, перпендикулярную AB, а потом воспользоваться теоремой о трёх перпендикулярах. **354.** 12 см, $\sqrt{178}$ см, $\sqrt{185}$ см. **355. Указание:** воспользуйтесь тем, что наклонные, проведенные из точек перпендикуляра до вершин прямоугольника, своими проекциями имеют половины диагоналей. **356. Указание:** выясните, какой вид имеет треугольник ABC. **357. Указание:** докажите, что наклонные, проведенные из точки M к плоскости α и лежащие на данных прямых, равны между собой. **358. Указание:** примените теорему о трех перпендикулярах. **359.** 10 см, $\frac{4}{13}\sqrt{901}$ см. **360.** $\frac{1}{4}\sqrt{3a^2+\frac{1}{4}d^2}$. **361.** $\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}a, \frac{\sqrt{29}}{4}a, \frac{7}{4}a$. **362.** Так. **363. Указание:** воспользуйтесь точкой A_1, симметричной точке A относительно плоскости основания. **364.** 3) $\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2}}$. **365.** $3\sqrt{41}$ см. **366. Указание:** проведите

хорду, параллельную одной из хорд, через конец второй. **367.** 1) ≈ 75 м; 2) ≈ 27°; 3) ≈ 34 м. **368.** 1) 2 см; 2) $\frac{4}{3}\sqrt{11}$ см; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{11}$ см. **369.** 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ см. **370.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $2\sqrt{13}$ см. **371.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 2) a; 3) a; 4) $\sqrt{1{,}5}a$; 5) a; 6) a; 7) $\frac{\sqrt{3}}{3}a$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{3}a$;; 9) $\frac{\sqrt{3}}{3}a$; **372.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 3) $\frac{a}{2\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$; 5) $\frac{a}{2}$; 6) $\frac{ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$. **373.** 1) Плоскость; 2) "крест" плоскостей; 3) прямая или пустое множество; 4) четыре прямые; 5) "крест" плоскостей или плоскость; 6) прямая или пустое множество; 7) точка или прямая или пустое множество. **374.** 2,5 см или 1,5 см. **375.** 10 см. **376.** 1) $\sqrt{78}$ см; 2) $\sqrt{78}$ см или $3\sqrt{6}$ см. **377.** 8 см. **378. Указание:** сравните выражения наклонных через перпендикуляры и проекции. **379. Указание:** воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах. **380. Указание:** воспользуйтесь тем, что треугольники *DAB* и *ABC* равны. **381. Указание:** идет речь о расстоянии от точки пересечения медиан треугольника. **382. Указание:** следует рассмотреть трапеции, построенные на перпендикулярах, проведенных из противоположных вершин прямоугольника до поверхности Земли. Они имеют общую среднюю линию. Поскольку порядок следования вершин в задаче не обусловлен, то может быть три варианта ответа: 1; 3; 5 м. **383.** $\frac{169}{8}$ см. **384.** $12\sqrt{2}$ см. **385.** $\sqrt{37}$ см. **386.** 5 или 4 см (последний случай может иметь место, когда точка ортогонально проектируется за пределы угла, и когда расстояние от вершин равняется расстоянию от вершины). **387.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a$. **388. Указание:** рассмотрите треугольники *ACB* и *BDC*. **389.** 82°. **390.** 72° и 108° или $\frac{540}{7}°$ и $\frac{720}{7}°$. **391.** 30°, 60°, 90°. **392.** 1; 2; 3. **393.** ≈ 1848 м. **394.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{15}}$; 3) $ABD \perp SKC$; 4) 30°; 5) $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{57}}$. **395.** 1) 60°; 2) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $ABS \perp BDC$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 5) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **396.** 1) 30°; 2) 60°. **397.** 1) 60° і 30°; 2) рівні; 3) $4\sqrt{6}$. **398.** 1) ≈ 55°; 2) равные; 3) ≈ 19°; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}a$. **399.** 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}, 0$; 2) $\arccos\frac{1}{3}$. 3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 4) $2\arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}}; \arccos\frac{2}{3}; \arccos\frac{1}{6}$.

400. 1) 30°; 4) $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 5) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. **401.** 1) 30°; 4) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 5) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. **402.** 2) Равные; 3) 90°. **403.** 3) Равные. **404.** 3) 60°; 4) 60°. **405.** 1) 60°. 2) 60°. **406.** 1) 45°, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}; \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **407.** 1) ≈ 1 м; 2) 30°. **408.** ≈900 м. **410.** 1) $8\sqrt{2}$ см; 2) 16 см; 3) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ см. **411.** 30°. **412.** ≈ 1,8 м. **413. Указание:** пусть $O = a \cap \alpha$. Отложите на трех данных прямых плоскости α отрезки *OA* = *OB* = *OC*. Тогда точки прямой *a* равноудалены от вершин треугольника *ABC*. **414.**

$$1)\, a\sin\alpha;\ 2)\, a\cos\frac{\alpha}{2};\ 3)\, \frac{ab\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}};\ 4)\, \arcsin\frac{b^2+a^2\sin^2\alpha}{\sqrt{b^2+a^2}};\quad 5)\, \arcsin\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{b^2+a^2\cos^2\alpha}}.$$

415. Указание: сведите к планиметрической задаче. **416.** $\frac{1}{2}$. **417. Указание:** речь идёт о плоскостях, перпендикулярных ребру. **418. Указание:** следует провести плоскость через данную точку перпендикулярно бисекторной плоскости.

419. $1)\, a\cos\frac{\alpha}{2},\ a\sin\alpha;\ 2)\, arctg\frac{b}{a},\ \arccos\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+a^2}};\ 3)\, \arcsin\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+a^2}};$

$$4)\ \ \alpha;\ \pi-2\operatorname{arctg}\frac{btg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}};\ \operatorname{arctg}\frac{a\sin\alpha}{b}.$$

420. 1) $AC \perp SC$; 2) $BD \perp SO$; 4) **указание:** прямая параллельна *AC*; 5) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{32}$. **421. Указание:** докажите, что ортогональная проекция прямой на плоскость проходит через биссектрисы углов, образованных данными прямыми плоскости. **422.** 1) *MOC*; 2) искомая прямая параллельна *MO*; 3) плоскость определяется прямыми, проходящими через точку А параллельно прямым *CO* и *OM*. **423. Указание:** найдите точки пересечения прямых, проходящих через изображения вершин куба и точки *M* с плоскостью указанной грани. **424.** 1) а) $AMC \perp ABC$; б) $AMC \perp BMD$; 2) **указание:** проведите через точку *B* прямую, параллельную *OM*; 3) **указание:** скористайтесь теоремой 6 § 15; 4) **указание:** эта плоскость должна проходить через середину отрезка *OM* параллельно плоскости *ADC*; 5) $\frac{d^2}{4}$. **425.** 1) Квадрат; 2) прямоугольник; 3) шестиугольник. **426.** 60°. **427.** 1) $3\sqrt{2}$ см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) 1 см; 4) $\frac{4}{3}$

см. **428.** $\frac{96}{\sqrt{11}}$ см; $\frac{288}{5\sqrt{11}}$ см. **429.** 1) 60°; 2) 60°; 3) перпендикулярны; 4) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{13}$. **431. Указания:** 1) используйте свойства средней линии трапеции; 2), 3) рассмотрите сначала плоскую ситуацию. **432.** 90°. **433.** 1) 30°; 2) 150°; 3) $\angle ABC$ — меньший; 4) $2\sqrt{5 \mp 2\sqrt{3}}$ см; 5) $\frac{2}{\sqrt{5 \mp 2\sqrt{3}}}$ см. **434.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 45°; 4) 90°. **435.** $\frac{c}{6}$. **436.** a; $2a$; $\frac{a}{2}\sqrt{11}$; $\frac{a}{2}\sqrt{5}$; **указание:** учтите, что идет речь о расстоянии от точки до отрезка, а не до прямой, проходящей через этот отрезок; 2) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3\sqrt{3}}$; $\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{3}}$; 3) $\arccos\frac{3}{2\sqrt{33}}$. **437. Указание:** воспользуйтесь тем, что срединные перпендикуляры к сторонам треугольника параллельны соответствующим высотам. **438. Указание:** воспользуйтесь серединой хорды, параллельной данному диаметру. **439. Указание:** центр лежит на пересечении оси симметрии трапеции и срединного перпендикуляра к боковой стороне. **440. Указание:** идет речь об обобщении примера 5 из §9.**441.** 60°. **442.** Нет; **указание:** выясните, при каком условии прямой угол ортогонально проектируется в прямой. **443. Указание:** докажите, что точка M ортогонально проектируется в центр описанной около ΔABC окружности. **444.**

1) $AB \perp BB_1C$, $ABB_1 \perp ADD_1$; 2) $\frac{b}{a\sqrt{2}}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{arctg}\frac{b\sqrt{2}}{a}$; $\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{2}b}$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$.

445. 30°. **446.** 1) Параллельны; параллельны; 3) 1:1. **447. Указание:** если a, b, c — длины указанных отрезков, то по теореме Пифагора квадраты сторон треугольника ABC равняются $a^2 + b^2$, $a^2 + c^2$, $c^2 + b^2$. Далее проверьте, что квадрат произвольной стороны меньше суммы квадратов двух других сторон. **448.** $\sqrt{31}$. **449. Указание:** спроектируйте прямую SC на плоскость ASB. **450.** $BD_1 = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$. **451. Указание:** спроектируйте ортогонально тетраэдр на плоскость грані. **452.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0°. **453. Указание:** докажите, что точка O совпадает с основанием перпендикуляра, проведенного из точки S на плоскость ABC. **454. Указание:** докажите, что M_1M_2 параллельна средней линии треугольника ABC и воспользуйтесь транзитивностью отношения параллельности. **455.** $\sqrt{k^2 + l^2 + m^2 \pm lm}$.