

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 4 (69)**

**2019**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** В.И. Сторожев

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** С.А. Калоеров

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** Пачева М.Н.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*Анциферов А.В.*

*Белоусов В.В.*

*Болнокин В.Е.*

*Болонов Н.И.*

*Ватульян А.О.*

*Вовк Л.П.*

*Глазунов В.А.*

*Глухов А.А.*

*Гольцев А.С.*

*Горр Г.В.*

*Губанов В.В.*

*Дрибан В.А.*

*Ковалев А.М.*

*Коносевиц Б.И.*

*Левин В.М.*

*Муцанов В.Ф.*

*Недопекин Ф.В.*

*Петраков А.А.*

*Судаков С.Н.*

*Улитин Г.М.*

*Шалдырван В.А.*

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Тел. 302 92 71  
E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 4 (69) / 2019

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### Механика деформируемого твердого тела

- Сторожев С.В.* Нечетко-множественная методика оценки влияния разбросов исходных параметров на характеристики напряженного состояния изгибаемых тонких изотропных плит..... 3
- Глушанков Е.С.* К вопросу корректности принципа стабильности линейного потока тепла для задачи о действии линейного потока в много-связной пьезопластинке..... 21
- Нескородев Р.Н.* Методика получения разрешающих уравнений теории изгиба ортотропных плит в уточненной постановке..... 32
- Глушанков Е.С.* Решения задач теории изгиба тонких плит для некоторых неканонических областей..... 39
- Дубяго Л.В., Сторожев В.И.* Дисперсионный спектр упругих волн изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными либо шарнирно опертыми краями..... 48

### Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Глухов А.А.* 2.5D Моделирование сейсмических волн в массиве горных пород..... 57
- Голубев Ф.М.* Методика прогноза оседаний земной поверхности при затоплении очистных выработок ликвидируемых угольных шахт..... 65



## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1:519

©2019. С.В. Сторожев

**НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ МЕТОДИКА ОЦЕНКИ  
ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСОВ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
НА ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
ИЗГИБАЕМЫХ ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ**

Дано описание численно-аналитической нечетко-множественной методики получения оценок влияния разбросов исходных физико-механических и геометрических параметров в прикладной модели Кирхгоффа для описания изгибного деформирования тонких круговых и кольцевых изотропных плит на эндогенные характеристики их напряженного состояния. Применяемый в нескольких типах задач о действии осесимметричных изгибающих нагрузок подход основывается на интерпретации параметров с разбросами как нормальных трапецеидальных нечетких интервалов, и на последующем использовании модифицированных версий эвристического принципа обобщения в процессе перехода в соотношениях классических детерминистических моделей расчета внутренних изгибающих усилий к нечетко-множественным аргументам.

*Ключевые слова:* тонкие изотропные плиты, прикладная теория изгиба, круговая и кольцевая геометрия, осесимметричное напряженное состояние, разброс исходных параметров, учет факторов неопределенности, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

**Введение.** Расчеты напряженного состояния тонких плит под действием внешних изгибающих усилий являются чрезвычайно распространенной проблемой предпроектного моделирования в строительной индустрии, машиностроении, приборостроении, аэрокосмической промышленности и ряде других научно-технических отраслей [1 – 5]. При этом, одной из задач, возникающих в практике прочностных расчетов с использованием тех или иных моделей деформирования, является определение методики учета разбросов исходных физико-механических и геометрических параметров изгибаемых плит на характеристики их напряженного состояния.

Эффективная методика учета разбросов исходных данных в расчетных схемах на основе выбранных моделей должна учитывать природу информации о характере и величинах этих разбросов, которая во многих случаях формируется на основе экспертных заключений и опытных оценок. Данное обстоятельство в ряде случаев затрудняет обоснованное применение разработанных эффективных методов вероятностно-стохастического анализа [6, 7] для получения искомых эн-

догменных оценок и, соответственно, ставит вопрос о создании альтернативных подходов.

С учетом данных соображений, целью представляемых в работе исследований является разработка альтернативной методики получения оценок влияния разбросов исходных физико-механических и геометрических параметров на искомые силовые и деформационные характеристики напряженного состояния изгибаемых тонких изотропных плит в рамках прикладной модели, базирующейся на гипотезах прямых нормалей [1 – 5]. Применяются методологические принципы теории нечетких множеств [8 – 14] и используются расчетные соотношения, получаемые в результате анализа задач теории изгиба тонких изотропных плит в классической четкой постановке, с последующим переходом в этих соотношениях к нечетко-множественным аргументам на основе фрагментированного поэтапного применения альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения в сочетании с методами нечетко-интервальной арифметики [15 – 20].

**1. Получение нечетко-множественных оценок для параметрических распределений прогибов и изгибных усилий в круговой плите под действием осесимметричных распределенных и сосредоточенных нагрузений.** В процессе получения нечетко-множественных оценок для параметрических радиальных распределений прогибов и изгибных усилий в тонких изотропных круговых плитах в случае действия осесимметричных распределенных либо сосредоточенных нагрузений могут быть использованы точные аналитические решения задач данного типа в рамках классических детерминистических моделей. Соответствующие решения приведены, в частности, в работах [1 – 5].

Так, для изотропной круговой плиты радиуса  $R$  с закрепленным краем, изгибаемой равномерно распределенными по лицевой поверхности усилиями интенсивности  $q$ , имеющей толщину  $h$  и изготовленной из материала с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , функция прогиба описывается в полярных координатах  $(r, \theta)$  выражением [1]

$$\begin{aligned} w_1(r) &= F_w^{(1)}(\nu, E, h, R, q, r) = q(64D)^{-1}(R^2 - r^2)^2, \\ D &= Eh^3[12(1 - \nu^2)]^{-1}; \end{aligned} \quad (1)$$

а радиальные и тангенциальные изгибающие моменты имеют представления

$$M_r^{(1)} = G_r^{(1)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[R^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \quad (2)$$

$$M_\theta^{(1)} = G_\theta^{(1)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[R^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \quad (3)$$

Аналогичные представления для изотропной плиты с опертым краем соответственно имеют вид [1]

$$\begin{aligned} w_2(r) &= F_w^{(2)}(\nu, E, h, R, q, r) = \\ &= q(64D)^{-1}((R^2 - r^2)^2 + 4R^2(R^2 - r^2)(1 + \nu)^{-1}); \end{aligned} \quad (4)$$

$$M_r^{(2)} = G_r^{(2)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[(3 + \nu)(R^2 - r^2)], \quad (5)$$

$$M_{\theta}^{(2)} = G_{\theta}^{(2)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[R^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \quad (6)$$

В случае нагружения закрепленной по краю изотропной круговой плиты сосредоточенной силой величины  $P$ , приложенной в центральной точке  $r = 0$ , функция прогиба описывается выражением [1]

$$\begin{aligned} w_3(r) &= F_w^{(3)}(\nu, E, h, R, P, r) = \\ &= P(8\pi D)^{-1}[(3 + \nu)(2(1 + \nu))^{-1}(R^2 - r^2) - r^2 \ln(R/r)], \end{aligned} \quad (7)$$

а при задании на контуре условия опирания

$$w_4(r) = F_w^{(4)}(\nu, E, h, R, P, r) = P(8\pi D)^{-1}[(1/2)(R^2 - r^2) - r^2 \ln(R/r)]. \quad (8)$$

Соответственно предположениям о наличии разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров плиты  $\nu, E, h, R$ , а также в значениях параметров нагружения  $q$  и  $P$ , реализуется переход к описанию указанных неопределенных экзогенных параметров рассматриваемой модели в форме трапециевидальных нормальных нечетких интервалов [15 – 18] с кортежами реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), & \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), \\ \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), & \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3, R_4), \\ \tilde{q} &= (q_1, q_2, q_3, q_4), & \tilde{P} &= (P_1, P_2, P_3, P_4). \end{aligned} \quad (9)$$

При этом нечетко-интервальные величины  $\nu, E, h, R, q$  могут быть представлены суперпозициями множеств  $\alpha$  – уровня в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{\alpha}, \bar{\nu}_{\alpha}], & \tilde{E} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{\alpha}, \bar{E}_{\alpha}], & \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{\alpha}, \bar{h}_{\alpha}], \\ \tilde{R} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{\alpha}, \bar{R}_{\alpha}], & \tilde{q} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{\alpha}, \bar{q}_{\alpha}], & \tilde{P} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{\alpha}, \bar{P}_{\alpha}], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha} &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, & \bar{\nu}_{\alpha} &= \alpha\nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4; \\ \underline{E}_{\alpha} &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, & \bar{E}_{\alpha} &= \alpha E_3 + (1 - \alpha)E_4; \\ \underline{h}_{\alpha} &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \bar{h}_{\alpha} &= \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4; \\ \underline{R}_{\alpha} &= (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, & \bar{R}_{\alpha} &= \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4; \\ \underline{q}_{\alpha} &= (1 - \alpha)q_1 + \alpha q_2, & \bar{q}_{\alpha} &= \alpha q_3 + (1 - \alpha)q_4; \\ \underline{P}_{\alpha} &= (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2, & \bar{P}_{\alpha} &= \alpha P_3 + (1 - \alpha)P_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Искомая процедура получения параметрических нечетких оценок  $\tilde{w}_j(r)$ ,  $M_r^{(j)}(r)$ ,  $M_{\theta}^{(j)}(r)$  для характеристик напряженно-деформированного состояния

рассматриваемых плит заключается в применении модифицированной  $\alpha$ -уровневой формы эвристического принципа расширения [9] в процессе перехода к нечетко-интервальным аргументам в функциональных зависимостях (1) – (8). Эта процедура включает использование возможности получения справедливых во всей области определения аргументов  $F_w^{(j)}(\nu, E, h, R, q, r)$ ,  $G_r^{(j)}(\nu, R, q, r)$ ,  $G_\theta^{(j)}(\nu, R, q, r)$  оценок для частных производных (за исключением точки  $r = 0$  в модели сосредоточенного нагружения):

$$\begin{aligned} \partial F_w^{(1)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial \nu < 0, \quad \partial F_w^{(1)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial E < 0, \\ \partial F_w^{(1)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial h < 0, \quad \partial F_w^{(1)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial R \geq 0, \\ \partial F_w^{(1)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial q > 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial G_r^{(1)}(\nu, R, q, r)/\partial \nu \geq 0, \quad \partial G_r^{(1)}(\nu, R, q, r)/\partial R > 0, \\ \partial G_r^{(1)}(\nu, R, q, r)/\partial q > 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\partial G_\theta^{(1)}(\nu, R, q, r)/\partial R > 0, \quad \partial G_\theta^{(1)}(\nu, R, q, r)/\partial q > 0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \partial F_w^{(2)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial E < 0, \quad \partial F_w^{(2)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial h < 0, \\ \partial F_w^{(2)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial R > 0, \quad \partial F_w^{(2)}(\nu, E, h, R, q, r)/\partial q > 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \partial G_r^{(2)}(\nu, R, q, r)/\partial \nu \geq 0, \quad \partial G_r^{(2)}(\nu, R, q, r)/\partial R > 0, \\ \partial G_r^{(2)}(\nu, R, q, r)/\partial q > 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\partial G_\theta^{(2)}(\nu, R, q, r)/\partial R > 0, \quad \partial G_\theta^{(2)}(\nu, R, q, r)/\partial q > 0; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \partial F_w^{(3)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial \nu < 0, \quad \partial F_w^{(3)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial E < 0, \\ \partial F_w^{(3)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial h < 0, \quad \partial F_w^{(3)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial R \geq 0, \\ \partial F_w^{(3)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial P > 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \partial F_w^{(4)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial E < 0, \quad \partial F_w^{(4)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial h < 0, \\ \partial F_w^{(4)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial R > 0, \quad \partial F_w^{(4)}(\nu, E, h, R, P, r)/\partial P > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В результате для эндогенных нечетко-множественных характеристик  $\tilde{w}_j(r)$ ,  $M_r^{(j)}$ ,  $M_\theta^{(j)}$  записываются параметрические представления вида

$$\tilde{w}_j(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{w}_{j\alpha}(r), \overline{w}_{j\alpha}(r)], \quad (20)$$



$$\tilde{M}_r^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r), \overline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r)], \quad (21)$$

$$\tilde{M}_\theta^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r), \overline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r)], \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{w}_{1\alpha}(r) &= F_w^{(1)}(\underline{\nu}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r), \\ \overline{w}_{1\alpha}(r) &= F_w^{(1)}(\overline{\nu}_\alpha, \overline{E}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \overline{R}_\alpha, \overline{q}_\alpha, r); \\ \underline{w}_{2\alpha}(r) &= \inf_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{F_w^{(2)}(\nu, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r)\}, \\ \overline{w}_{2\alpha}(r) &= \sup_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{F_w^{(2)}(\nu, \overline{E}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \overline{R}_\alpha, \overline{q}_\alpha, r)\}; \\ \underline{w}_{3\alpha}(r) &= F_w^{(3)}(\underline{\nu}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{P}_\alpha, r), \\ \overline{w}_{3\alpha}(r) &= F_w^{(3)}(\overline{\nu}_\alpha, \overline{E}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \overline{R}_\alpha, \overline{P}_\alpha, r); \\ \underline{w}_{4\alpha}(r) &= \inf_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{F_w^{(4)}(\nu, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{P}_\alpha, r)\}, \\ \overline{w}_{4\alpha}(r) &= \sup_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{F_w^{(4)}(\nu, \overline{E}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \overline{R}_\alpha, \overline{P}_\alpha, r)\}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}_{r\alpha}^{(1)}(r) &= G_r^{(1)}(\underline{\nu}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r), \quad \overline{G}_{r\alpha}^{(1)}(r) = G_r^{(1)}(\overline{\nu}_\alpha, \overline{R}_\alpha, \overline{q}_\alpha, r); \\ \underline{G}_{\theta\alpha}^{(1)}(r) &= \inf_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{G_\theta^{(1)}(\nu, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r)\}, \\ \overline{G}_{\theta\alpha}^{(1)}(r) &= \sup_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{G_\theta^{(1)}(\nu, \overline{R}_\alpha, \overline{q}_\alpha, r)\}; \\ \underline{G}_{r\alpha}^{(2)}(r) &= G_r^{(2)}(\underline{\nu}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r), \quad \overline{G}_{r\alpha}^{(2)}(r) = G_r^{(2)}(\overline{\nu}_\alpha, \overline{R}_\alpha, \overline{q}_\alpha, r); \\ \underline{G}_{\theta\alpha}^{(2)}(r) &= \inf_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{G_\theta^{(2)}(\nu, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r)\}, \\ \overline{G}_{\theta\alpha}^{(2)}(r) &= \sup_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} \{G_\theta^{(2)}(\nu, \overline{R}_\alpha, \overline{q}_\alpha, r)\}. \end{aligned}$$

В качестве примеров численной реализации описанной методики оценивания разбросов для параметрических количественных оценок  $w_j(r)$ ,  $M_r^{(j)}(r)$ ,  $M_\theta^{(j)}(r)$  представлены результаты расчетов, в которых рассматриваются процессы нагружения пластины в случае задания следующих нечетко-интервальных параметров:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= (0.29, 0.297, 0.301, 0.307), \quad \tilde{E} = (202E_*, 205E_*, 207E_*, 209E_*), \\ \tilde{h} &= (2.7l_*, 2.9l_*, 3.0l_*, 3.1l_*), \quad \tilde{R} = (375l_*, 395l_*, 410l_*, 435l_*), \\ \tilde{q} &= (3.6q_*, 3.9q_*, 4.1q_*, 4.5q_*), \quad \tilde{P} = (1.1p_*, 1.17p_*, 1.21p_*, 1.26p_*), \\ E_* &= 1[\text{ГПа}], \quad l_* = 10^{-3}[\text{М}], \quad q_* = 10^3[\text{Па}], \quad p_* = 10^3[\text{Н}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Вид функций принадлежности для введенных нечетко-интервальных исходных параметров приведен на рисунках 1 – 6.

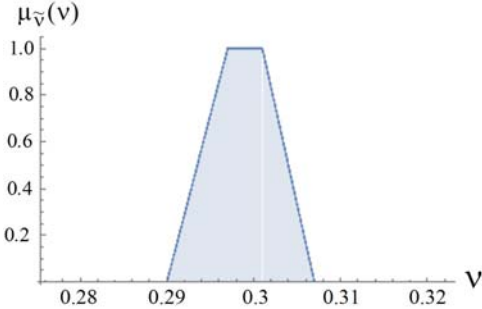


Рис. 1. Функция принадлежности  $\tilde{v}$ .

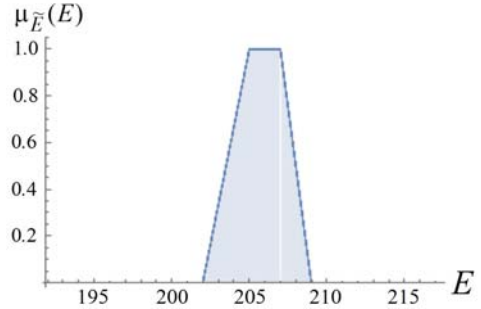


Рис. 2. Функция принадлежности  $\tilde{E}$ .

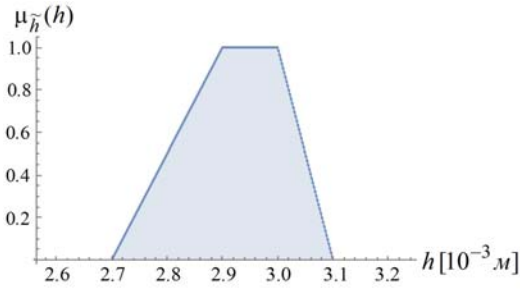


Рис. 3. Функция принадлежности  $\tilde{h}$ .

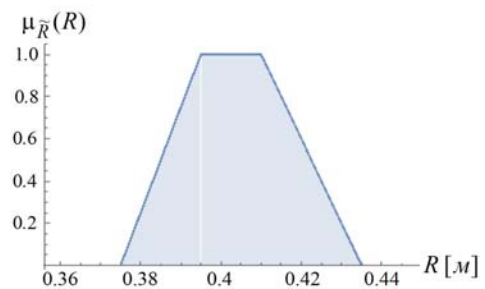


Рис. 4. Функция принадлежности  $\tilde{R}$ .

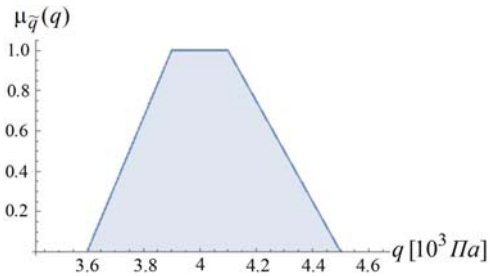


Рис. 5. Функция принадлежности  $\tilde{q}$ .

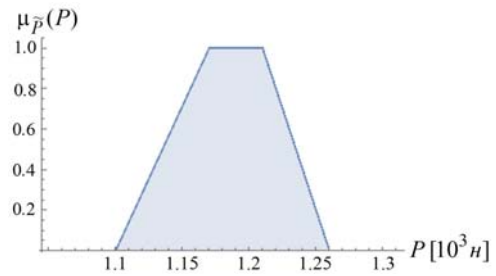


Рис. 6. Функция принадлежности  $\tilde{P}$ .

В свою очередь результаты расчетов, характеризующих нечетко-множественные параметрические оценки  $\tilde{w}_j(r)$ ,  $\tilde{M}_r^{(j)}(r)$ ,  $\tilde{M}_\theta^{(j)}(r)$ , представлены на рисунках 7 – 16.

Так, на рисунке 7 представлены параметрические зависимости для границ  $\mu = 0$  носителей и границ  $\mu = 1$  модальных областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенной характеристики  $\tilde{w}_1(r)$  от параметра радиальной координаты  $r$ , а на рисунке 8 – форма функции принадлежности для нечетко-множественной оценки  $\tilde{w}_1(0)$ .

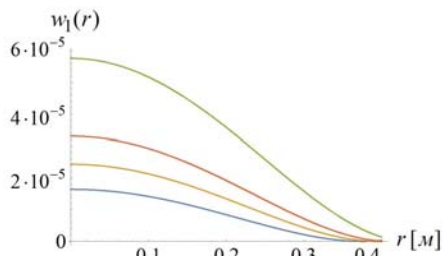


Рис. 7. Распределения  $w_1(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{w}_1(r)}(w_1(r))$ .

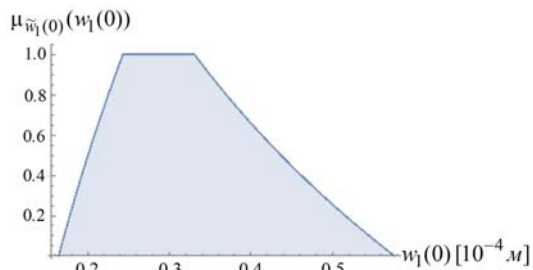


Рис. 8. Функция принадлежности  $\tilde{w}_1(0)$ .

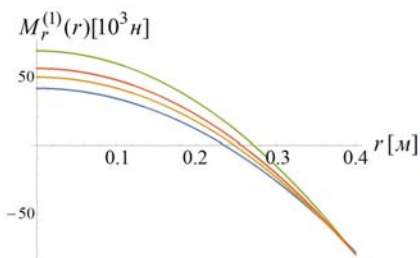


Рис. 9. Распределения  $M_r^{(1)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_r^{(1)}(r)}(M_r^{(1)}(r))$ .

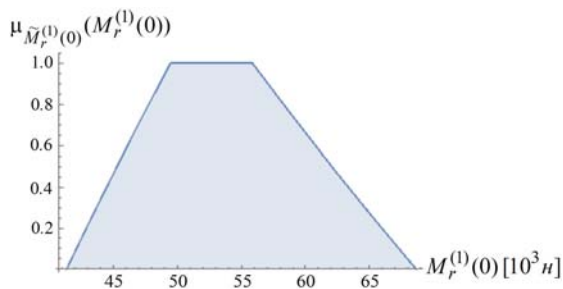


Рис. 10. Функция принадлежности  $\tilde{M}_r^{(1)}(0)$ .

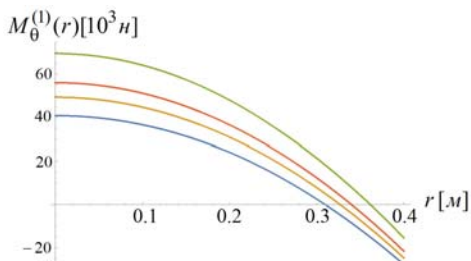


Рис. 11. Распределения  $M_\theta^{(1)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(1)}(r)}(M_\theta^{(1)}(r))$ .

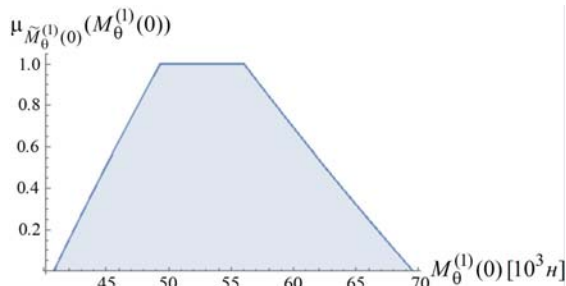


Рис. 12. Функция принадлежности  $\tilde{M}_\theta^{(1)}(0)$ .

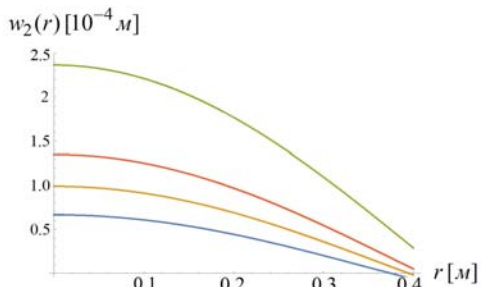


Рис. 13. Распределения  $w_2(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{w}_2(r)}(w_2(r))$ .

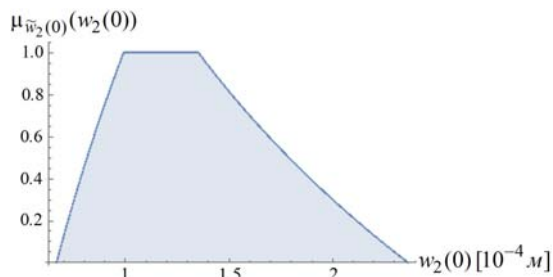


Рис. 14. Функция принадлежности  $\tilde{w}_2(0)$ .

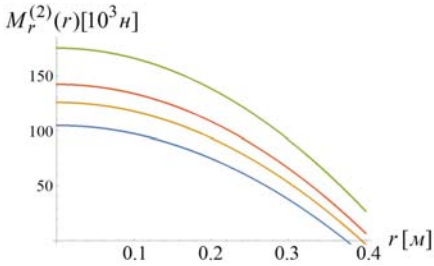


Рис. 15. Распределения  $M_r^{(2)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_r^{(2)}(r)}(M_r^{(2)}(r))$ .

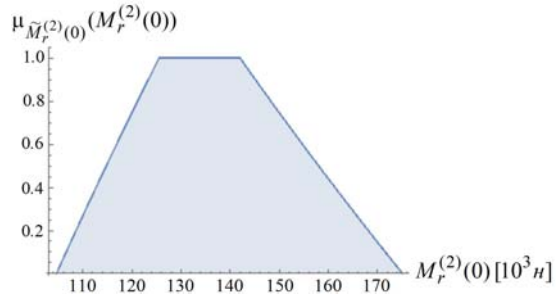


Рис. 16. Функция принадлежности  $\tilde{M}_r^{(2)}(0)$ .

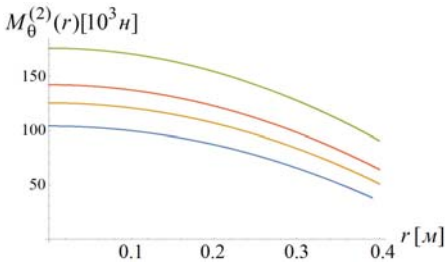


Рис. 17. Распределения  $M_\theta^{(2)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(2)}(r)}(M_\theta^{(2)}(r))$ .

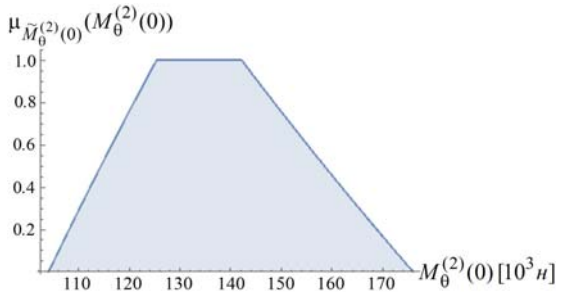


Рис. 18. Функция принадлежности  $\tilde{M}_\theta^{(2)}(0)$ .

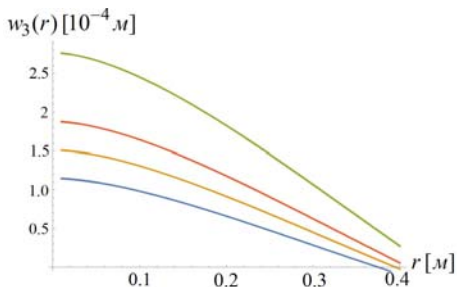


Рис. 19. Распределения  $w_3(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{w}_3(r)}(w_3(r))$ .

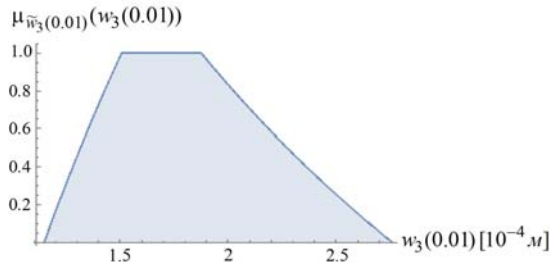


Рис. 20. Функция принадлежности  $\tilde{w}_3(0.01)$ .

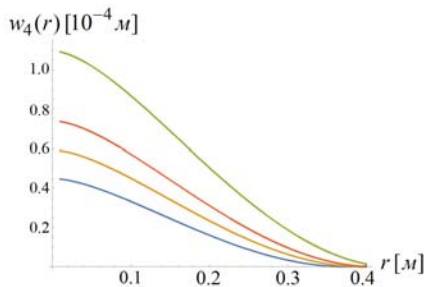


Рис. 21. Распределения  $w_4(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{w}_4(r)}(w_4(r))$ .

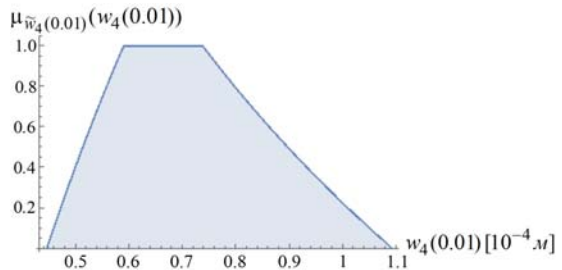


Рис. 22. Функция принадлежности  $\tilde{w}_4(0.01)$ .

**2. Нечетко-множественные параметрические распределения для изгибных усилий в осесимметрично нагруженной кольцевой плите.** Получение нечетко-множественных оценок для параметрических радиальных распределений прогибов и изгибных усилий в тонких изотропных кольцевых при осесимметричных нагружениях базируется на использовании точных аналитических представлений для решений соответствующих задач в рамках классической детерминистической постановки, приведенных, в частности, в работе [2].

Согласно полученным в [2] решениям, представления для радиальных и тангенциальных изгибающих моментов в изотропной концентрической кольцевой плите с внешним радиусом  $R_0$  и внутренним радиусом  $R_1$  имеют следующий вид при следующих рассматриваемых типах нагружения.

При жестком закреплении внешнего контура плиты и действии на внутреннем контуре равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности  $N$

$$\begin{aligned} M_r^{(5)} &= G_r^{(5)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = \\ &= -2D(1 + \nu)[A \ln r + a + A] - D(1 - \nu)[A - br^{-2}], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} M_\theta^{(5)} &= G_\theta^{(5)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = \\ &= -2D(1 + \nu)[A \ln r + a + A] + D(1 - \nu)[A - br^{-2}], \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (4D)^{-1}R_1N, \\ a &= -[D(1 - \nu)[AR_0^2(2 \ln R_0 + 1) + AR_1^2((\vartheta - 1) \ln R_1 - 1)] + \\ &\quad + NR_1^3[D(1 - \nu)((\vartheta - 1)R_1^2 + 2R_0^2)]^{-1}, \\ b &= -[D(1 - \nu)[A(\vartheta - 1)(2 \ln R_0 + 1) - 2A((\vartheta - 1) \ln R_1 - 1)] - \\ &\quad - 2NR_1]R_0^2R_1^2[D(1 - \nu)((\vartheta - 1)R_1^2 + 2R_0^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

При жестком закреплении внутреннего контура плиты и действии на внешнем контуре равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности  $N$

$$\begin{aligned} M_r^{(6)} &= G_r^{(6)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = \\ &= -2D(1 + \nu)[A \ln r + a + A] - D(1 - \nu)[A - br^{-2}], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M_\theta^{(6)} &= G_\theta^{(6)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = \\ &= -2D(1 + \nu)[A \ln r + a + A] + D(1 - \nu)[A - br^{-2}], \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= -(4D)^{-1}R_0N, \\
 a &= -[D(1-\nu)[AR_1^2(2\ln R_1+1) + AR_0^2((\vartheta-1)\ln R_0-1)] - \\
 &\quad -NR_0^3[D(1-\nu)((\vartheta-1)R_0^2+2R_1^2)]^{-1}, \\
 b &= -[D(1-\nu)[A(\vartheta-1)(2\ln R_1+1) - 2A((\vartheta-1)\ln R_0-1)] + \\
 &\quad +2NR_0]R_0^2R_1^2[D(1-\nu)((\vartheta-1)R_0^2+2R_1^2)]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

При жестком закреплении внешнего контура плиты, свободном внутреннем контуре и действии по всей ее лицевой поверхности равномерно распределенных усилий интенсивности  $q$

$$\begin{aligned}
 M_r^{(7)} &= G_r^{(7)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = \\
 &= -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] - D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(3+\nu)r^2,
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 M_\theta^{(7)} &= G_\theta^{(7)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = \\
 &= -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] + D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(1+3\nu)r^2,
 \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= -(8D)^{-1}qR_1^2, \\
 a &= [-(AR_0^2(2\ln R_0+1) + AR_1^2((\vartheta-1)\ln R_1-1) + 4dR_1^3) + \\
 &\quad +4(5-\nu)(1-\nu)^{-1}dR_1^4][(\vartheta-1)R_1^2+2R_0^2]^{-1}, \\
 d &= q/(64D), b = -[(1-\nu)[A(\vartheta-1)(2\ln R_0+1) - 2A((\vartheta-1)\ln R_1-1)] + \\
 &\quad +8(1+\nu)dR_0 + 4(5-\nu)dR_1^4]R_0^2R_1^2[(1-\nu)((\vartheta-1)R_1^2+2R_0^2)]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

При жестком закреплении внутреннего контура плиты, свободном внешнем контуре и действии по всей ее лицевой поверхности равномерно распределенных усилий интенсивности  $q$

$$\begin{aligned}
 M_r^{(8)} &= G_r^{(8)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = \\
 &= -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] - D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(3+\nu)r^2,
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 M_\theta^{(8)} &= G_\theta^{(8)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = \\
 &= -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] + D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(1+3\nu)r^2,
 \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= -(8D)^{-1}qR_0^2, \\
 a &= [-(AR_1^2(2 \ln R_1 + 1) + AR_0^2((\vartheta - 1) \ln R_0 - 1) + 4dR_0^3) + \\
 &\quad + 4(5 - \nu)(1 - \nu)^{-1}dR_0^4][(\vartheta - 1)R_0^2 + 2R_1^2]^{-1}, \\
 d &= q/(64D), \\
 b &= -[(1 - \nu)[A(\vartheta - 1)(2 \ln R_1 + 1) - 2A((\vartheta - 1) \ln R_0 - 1)] + \\
 &\quad + 8(1 + \nu)dR_1 + 4(5 - \nu)dR_0^4]R_0^2R_1^2[(1 - \nu)((\vartheta - 1)R_0^2 + 2R_1^2)]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

В случае жесткого закрепления внешнего контура плиты, наличия недеформируемого подкрепления на внутреннем контуре и действии по всей ее лицевой поверхности равномерно распределенных усилий интенсивности  $q$

$$\begin{aligned}
 M_r^{(9)} &= G_r^{(9)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = \\
 &= -2D(1 + \nu)[A \ln r + a + A] - D(1 - \nu)[A - br^{-2}] - 4dD(3 + \nu)r^2,
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 M_\theta^{(9)} &= G_\theta^{(9)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = \\
 &= -2D(1 + \nu)[A \ln r + a + A] + D(1 - \nu)[A - br^{-2}] - 4dD(1 + 3\nu)r^2,
 \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= q^*/(8\pi D), \quad q^* = -\pi qR_1^2, \\
 a &= [\gamma_{10}R_0 - \gamma_{11}R_1]/[2(R_0^2 - R_1^2)], \\
 b &= [R_0(\gamma_{11}R_0R_1 - \gamma_{10}R_1^2)]/[(R_0^2 - R_1^2)], \\
 \gamma_{ij} &= -[AR_j^i(\ln R_j^i + 1) + 4dR_j^3].
 \end{aligned} \tag{39}$$

При получении и анализе нечетко-множественных обобщений моделей, описываемых соотношениями (25) – (39), вводятся дополнительные нечетко-интервальные описания для обладающих разбросами исходных геометрических параметров и параметра наружения

$$\begin{aligned}
 \tilde{N} &= (N_1, N_2, N_3, N_4), \\
 \tilde{R}_0 &= (R_{01}, R_{02}, R_{03}, R_{04}), \quad \tilde{R}_1 = (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}), \\
 \tilde{R}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}], \\
 \underline{R}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)R_{01} + \alpha R_{02}, \quad \overline{R}_{0\alpha} = \alpha R_{03} + (1 - \alpha)R_{04};
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}], \\ \underline{R}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)R_{11} + \alpha R_{12}, \quad \overline{R}_{1\alpha} = \alpha R_{13} + (1 - \alpha)R_{14}; \\ \tilde{N} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{N}_\alpha, \overline{N}_\alpha], \\ \underline{N}_\alpha &= (1 - \alpha)N_1 + \alpha N_2, \quad \overline{N}_\alpha = \alpha N_3 + (1 - \alpha)N_4.\end{aligned}$$

и для эндогенных характеристик напряженного состояния на основании применения  $\alpha$  – уровневой формы эвристического принципа обобщения записываются представления вида

$$\begin{aligned}\tilde{M}_r^{(j)}(r) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r), \overline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r)], \\ \tilde{M}_\theta^{(j)}(r) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r), \overline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r)], \quad (j = \overline{5, 9}),\end{aligned}\tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}\underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \overline{N}_\alpha]}} \{G_r^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r)\}, \\ \overline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \overline{N}_\alpha]}} \{G_r^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r)\}; \\ \underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \overline{N}_\alpha]}} \{G_\theta^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r)\}, \\ \overline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \overline{N}_\alpha]}} \{G_\theta^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r)\}, \\ &\quad (j = \overline{5, 6});\end{aligned}\tag{42}$$



$$\begin{aligned}
 \underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha]} \{G_r^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r)\}, \\
 \overline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha]} \{G_r^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r)\}; \\
 \underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha]} \{G_\theta^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r)\}, \\
 \overline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \overline{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha]} \{G_\theta^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r)\} \\
 &\quad (j = \overline{7, 9}).
 \end{aligned} \tag{43}$$

Примеры численной реализации описанной методики оценивания количественных разбросов параметрических оценок  $M_r^{(j)}(r)$ ,  $M_\theta^{(j)}(r)$  для рассматриваемых моделей осесимметричного изгиба кольцевых пластин представлены применительно к случаю задания исходных нечетко-интервальных параметров в виде (24) с дополнением:

$$\begin{aligned}
 \tilde{N} &= (0.28n_*, 0.31n_*, 0.32n_*, 0.36n_*), \\
 n_* &= 10^3 [\text{н}/(\text{рад} \cdot \text{м})].
 \end{aligned} \tag{44}$$

Расчеты, результаты которых отражены на рисунках 23 – 43, относятся к случаям, когда геометрические параметры рассматриваемых плит полагаются точными величинами без разбросов со значениями

$$R_0 = 0.4l_*, \quad R_1 = 0.1l_*, \quad h = 3 \cdot 10^{-3}l_*, \quad l_* = 1[\text{м}], \tag{45}$$

а механические свойства материала плиты и характеристик внешнего нагружения обладают описываемыми представлениями (24), (44) разбросами значений.

В частности, на рисунке 23 представлена форма функции принадлежности для нечетко-множественного экзогенного параметра  $\tilde{N}$ . Описания характеристик нечетко-множественных параметрических распределений  $\tilde{M}_r^{(j)}(r)$ ,  $\tilde{M}_\theta^{(j)}(r)$ , определяемых соотношениями (25) – (39), (41) – (43), а также формы функций принадлежности для этих нечетко-множественных величин при отдельных значениях радиальной координаты даны на рисунках 24 – 43.

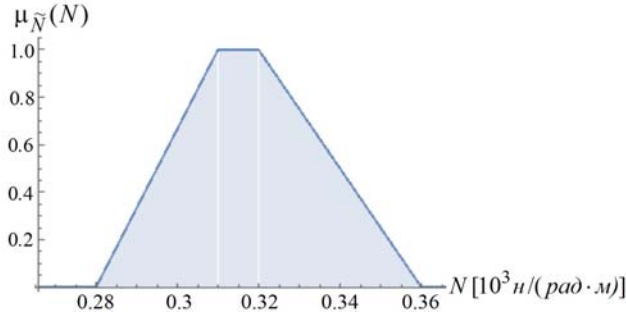


Рис. 23. Функция принадлежности  $\tilde{N}$ .

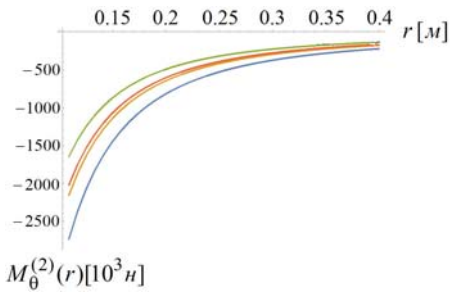


Рис. 24. Распределения  $M_r^{(5)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_r^{(5)}(r)}(M_r^{(5)}(r))$ .

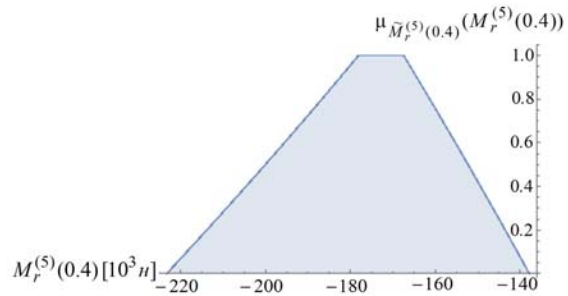


Рис. 25. Функция принадлежности  $\tilde{M}_r^{(5)}(0.4)$ .

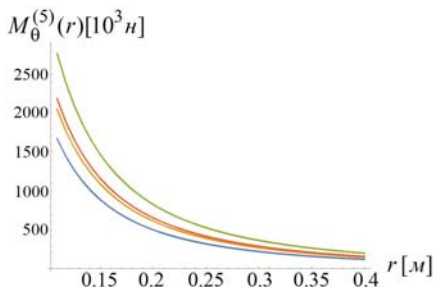


Рис. 26. Распределения  $M_\theta^{(5)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(5)}(r)}(M_\theta^{(5)}(r))$ .

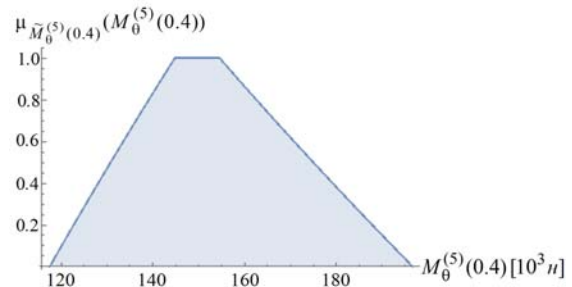


Рис. 27. Функция принадлежности  $\tilde{M}_\theta^{(5)}(0.4)$ .

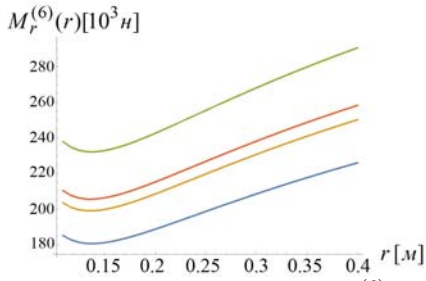


Рис. 28. Распределения  $M_r^{(6)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_r^{(6)}(r)}(M_r^{(6)}(r))$ .

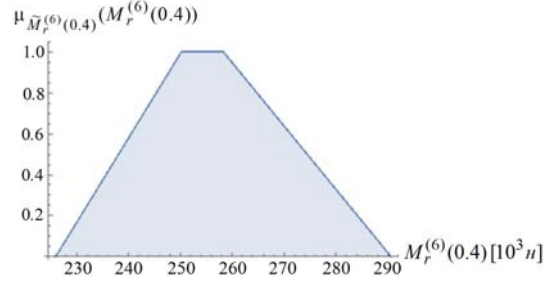


Рис. 29. Функция принадлежности  $\tilde{M}_r^{(6)}(0.4)$ .

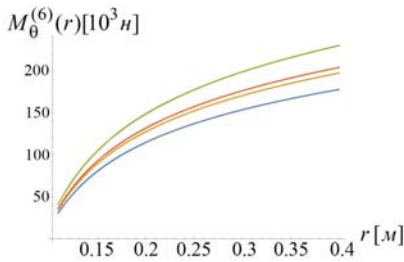


Рис. 30. Распределения  $M_\theta^{(6)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(6)}(r)}(M_\theta^{(6)}(r))$ .

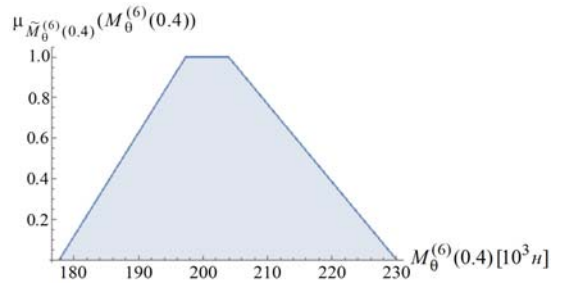


Рис. 31. Функция принадлежности  $\tilde{M}_\theta^{(6)}(0.4)$ .

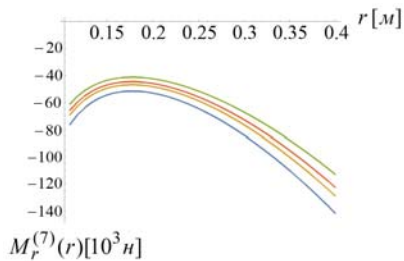


Рис. 32. Распределения  $M_r^{(7)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_r^{(7)}(r)}(M_r^{(7)}(r))$ .

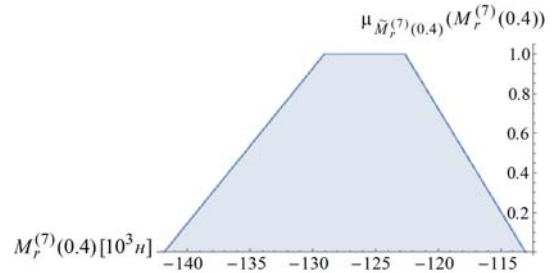


Рис. 33. Функция принадлежности  $\tilde{M}_r^{(7)}(0.4)$ .

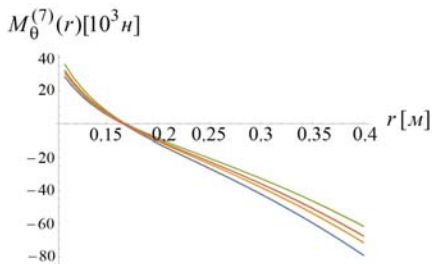


Рис. 34. Распределения  $M_\theta^{(7)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(7)}(r)}(M_\theta^{(7)}(r))$ .

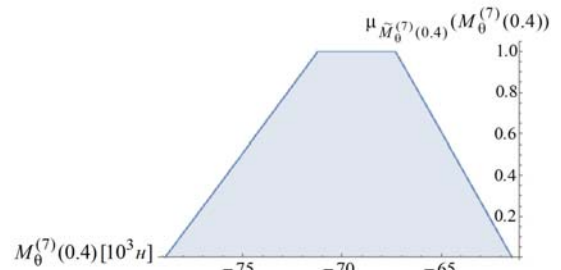


Рис. 35. Функция принадлежности  $\tilde{M}_\theta^{(7)}(0.4)$ .

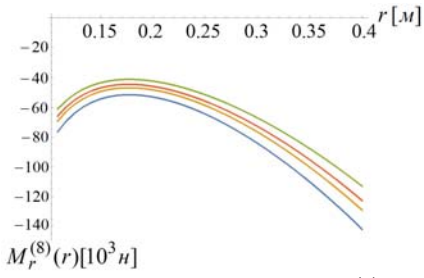


Рис. 36. Распределения  $M_r^{(8)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_r^{(8)}(r)}(M_r^{(8)}(r))$ .

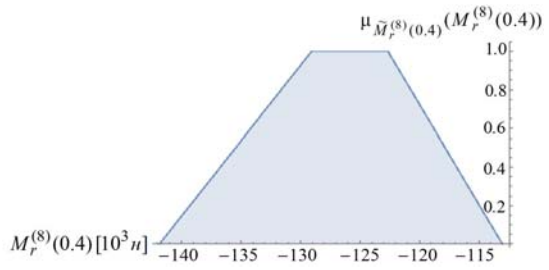


Рис. 37. Функция принадлежности  $\tilde{M}_r^{(8)}(0.4)$ .

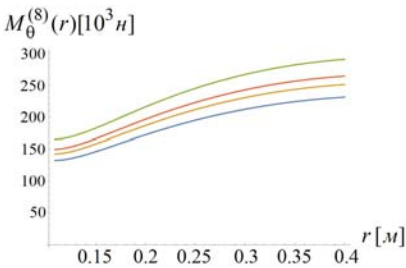


Рис. 38. Распределения  $M_\theta^{(8)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(8)}(r)}(M_\theta^{(8)}(r))$ .

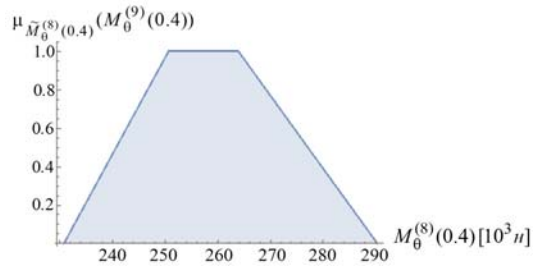


Рис. 39. Функция принадлежности  $\tilde{M}_\theta^{(8)}(0.4)$ .

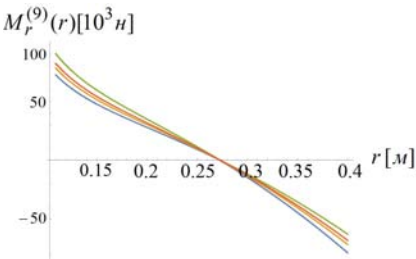


Рис. 40. Распределения  $M_r^{(9)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_r^{(9)}(r)}(M_r^{(9)}(r))$ .

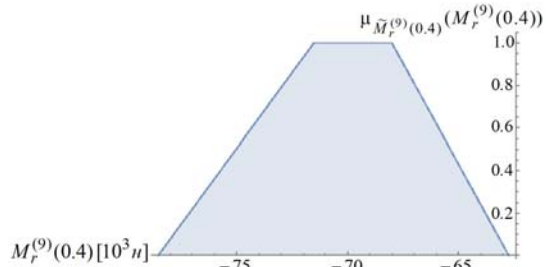


Рис. 41. Функция принадлежности  $\tilde{M}_r^{(9)}(0.4)$ .

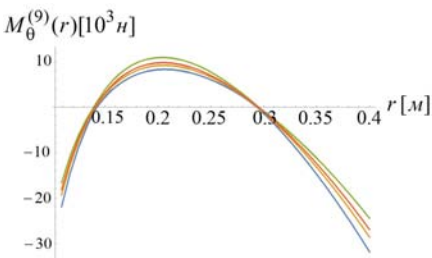


Рис. 42. Распределения  $M_\theta^{(9)}(r)$  с показателями  $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(9)}(r)}(M_\theta^{(9)}(r))$ .

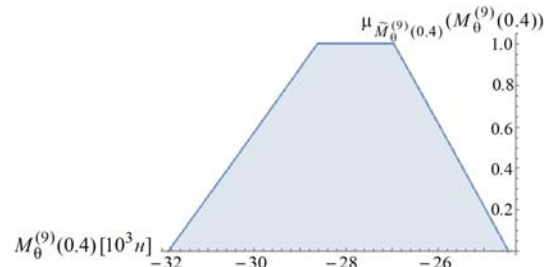


Рис. 43. Функция принадлежности  $\tilde{M}_\theta^{(9)}(0.4)$ .

Результаты расчетов во всех рассмотренных случаях согласуются с оценками, получаемыми в работах [1, 2] на основе детерминистических вариантов соответствующих моделей.

**Выводы.** Итогом представленных исследований является разработка нечетко-множественной численно-аналитической методики учета разбросов в значениях исходных параметров на характеристики напряженно-деформированного состояния изгибаемых тонких изотропных плит, определяемые в рамках применения прикладной теории, базирующейся на гипотезах прямой нормали. Предложенный и реализованный для ряда примеров подход основывается на использовании соотношений модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения в процессе перехода в аналитических представлениях решений, полученных в рамках классической четкой постановки соответствующих задач, к нечетко-множественным аргументам в виде нормальных трапецидальных нечетких интервалов. Оценки, получаемые в результате применения предложенной методики, дают возможность установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях анализируемых характеристик напряженно-деформированного состояния изгибаемых плит при заданных разбросах их исходных физико-механических и геометрических параметров, а также определить предельные границы возможных разбросов для значений анализируемых характеристик на минимальном уровне уверенности.

1. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости / С.П. Тимошенко. – Киев: Наукова думка, 1972. – 508 с.
2. *Калоеров С.А.* Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 99–138.
3. *Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – № 7 (53). – С. 83–100.
4. *Калоеров С.А.* Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко.– Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.
5. *Космодамианский А.С.* Изгиб тонких многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов.– Донецк, 1973.– 256 с.
6. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
7. *Ларин В.Б.* Статистические задачи виброзащиты / В.Б. Ларин. – Киев: Наукова думка, 1974. – 128 с.
8. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
9. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
10. *Алтунин А.Е.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2002. – 352 с.
11. *Kaufmann A., Gupta M.* Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications / A. Kaufmann, M. Gupta. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.

12. *Anastassiou G.A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
13. *Kandasamy W.B.V.* Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
14. *Sonbol A.H.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42. – P. 702-712.
15. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst.– 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.
16. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
17. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
18. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
19. *Сторожев В.И.* Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103 – 111.
20. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде / С.В. Сторожев, С.В. Номбре // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 38 – 43.

## S.V. Storozhev

### **Fuzzy-set methodology for estimating the influence of scattering of initial parameters on the characteristics of the stressed state of bended thin isotropic plates.**

A description of a numerical-analytical fuzzy-set technique for obtaining estimates of the effect of scatter of the initial physical, mechanical and geometric parameters in the Kirchhoff applied model for describing the bending deformation of thin circular and annular isotropic plates on the endogenous characteristics of their stress state is given. The approach used in several types of problems on the action of axisymmetric bending loads is based on the interpretation of parameters with scatter as normal trapezoidal fuzzy intervals, and on the subsequent use of modified versions of the heuristic generalization principle during the transition to fuzzy-set arguments in the ratios of classical deterministic models for calculating internal bending forces.

**Keywords:** *thin isotropic plates, applied theory of bending, circular and ring geometry, axisymmetric stress state, scatter of initial parameters, allowance of uncertainties, fuzzy-set technique, heuristic generalization principle..*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры”, Макеевка  
s.storozhev@donnu.ru

Получено 27.08.2019

УДК 539.3 : 536.21

©2019. Е.С. Глушанков

## К ВОПРОСУ КОРРЕКТНОСТИ ПРИНЦИПА СТАБИЛЬНОСТИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ЛИНЕЙНОГО ТЕПЛООВОГО ПОТОКА В МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПЛАСТИНКЕ

В данной работе рассмотрен вопрос корректности принципа стабильности теплового потока в задаче о действии линейного теплового потока в многосвязной пластинке из пьезоматериала. С помощью численных исследований термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязной пластинки установлено, что принцип может нарушаться, объяснены физические причины нарушения, показано влияние на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинки.

**Ключевые слова:** принцип стабильности теплового потока, линейный тепловой поток, температурные напряжения, многосвязная пластинка, комплексные потенциалы.

**Введение.** Во многих областях науки и техники в качестве конструктивных элементов широко используются пластинки из пьезоматериалов [1]. По технологическим или эксплуатационным причинам эти пластинки могут содержать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. В процессе эксплуатации пластинки могут подвергаться температурному воздействию, которое может порождать высокие концентрации напряжений в пластинке. Это необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций [2, 3]. К настоящему времени были проведено множество исследований температурного воздействия [4], в том числе, действия линейного (однородного) теплового потока [5].

В работе [6] Вейник А.И., основываясь на аналогиях из теории упругости (принцип Сен-Венана) и гидродинамики (свойство стабильности потока вязкой жидкости) и сходстве дифференциальных уравнений теории упругости и теории гидродинамики с дифференциальными уравнениями теплопроводности, предположил существование подобного принципа и в теории теплопроводности. Пользуясь также практическими результатами, он выдвинул общее предположение: «Любое местное возмущение данного температурного поля является локальным и не распространяется на отдаленные участки поля» [6]. Это свойство он назвал *принципом стабильности теплового потока* [6].

Результаты многих исследований [4, 5] и др. входят в соответствие с принципом стабильности теплового потока.

В данной работе исследован вопрос корректности принципа стабильности теплового потока для задачи о действии линейного теплового потока в многосвязной пьезопластинке. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) находящейся под действием линейного теплового потока пьезопластинки с двумя отверстиями, в которых показано влияние

геометрических характеристик пластинки на корректность принципа стабильности теплового потока (на температурное поле в пластинке) и, как следствие, на распределение напряжений в пластинке.

**1. Постановка и решение задачи о действии линейного теплового потока в многосвязной пьезопластинке.** Рассмотрим пластинку из пьезоматериала, занимающую бесконечную многосвязную область  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с центрами  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуосями  $a_l, b_l$ , углами поворота  $\varphi_l$  (рис. 1). Контур  $L_l$  могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе, касаться, пересекаться,

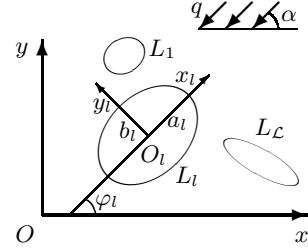


Рис. 1

переходить в прямолинейные разрезы. Контур  $L_l$  криволинейных отверстий можно аппроксимировать совокупностями дуг эллипсов и берегов прямолинейных разрезов. На контурах пластинки заданы значения температуры  $T_l$  либо плотности теплового потока  $q_{ln}$ . Контур  $L_l$  не подкреплены либо жестко подкреплены. На бесконечности под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  действует линейный тепловой поток плотности  $q$ , а напряжения и индукции электромагнитного поля равны нулю.

Если несвязанную задачу определения ТЭМУС пьезопластинки решать с использованием комплексных потенциалов, то она сводится к определению сперва комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$ , а затем комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) из соответствующих граничных условий. После определения этих функций значения основных характеристик ТЭМУС (температура  $T$ , плотности теплового потока  $q_x, q_y$ , напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , индукции  $D_x, D_y, B_x, B_y$  и напряженности  $E_x, E_y, H_x, H_y$  электромагнитного поля, перемещения  $u, v$ , потенциалы  $\varphi, \psi$  электромагнитного поля) в точках пластинки вычисляются по формулам [4, 5]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) - 2 \operatorname{Re} i \chi_T(\mu_5, 1) F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$



Здесь

$$T^* = q(t_x x + t_y y),$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa_T^2},$$

$$\varkappa_T^2 = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2};$$

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha;$$

$\mu_5$  – корни характеристических уравнений теплопроводности

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

и  $\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – корни характеристических уравнений электромагнитоупругости [4, 5]

$$\Delta(\mu) = l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] - \quad (8)$$

$$-l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] = 0,$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \quad l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1}{r_5};$$

$$(E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) = (t_1, t_2, m_1, m_2)T^*;$$

$$u^* = \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y x y,$$

$$v^* = \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x x y,$$

$$\varphi^* = -\frac{t_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{t_2 q t_y}{2} y^2 - t_1 q t_x x y,$$

$$\psi^* = -\frac{m_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{m_2 q t_y}{2} y^2 - m_1 q t_x x y;$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластинки;  $s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей и температуре;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной проницаемости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре;  $\alpha_i$  — коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля;  $t_i$  и  $m_i$  — пирозлектрические и пиромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях;  $\delta_j^i$  — символ Кронекера.

Функции  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) определены в многосвязных областях  $S_5$ ,  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями [4, 5]

$$z_5 = x + \mu_5 y. \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

В общем случае эти функции имеют вид [4, 5]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

К вопросу корректности принципа стабильности теплового потока

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь  $c_5$  — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки;  $D_l = -q_l/4\pi\kappa_T$ ;  $q_l$  — суммарный тепловой поток через контур  $L_l$  в область  $S$ ;  $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $c_{5ln}$  — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;  $\Gamma_k, A_{kl}, B_{kl}$  — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$ ;  $A_{5l} = r_5 D_l$ ;  $B_{5l} = r_5 (b_{5l} - D_l z_{5l})$ ;  $b_{5l}$  — вычет функции  $F_5^2(z_5)$  в точке  $z_{5l}$ ;  $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ .

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе  $Oxy$  координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где  $\theta$  — параметр параметрического задания эллипса ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

Переменные  $\zeta_{5l}, \zeta_{kl}$  определяются из конформных отображений [4, 5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

внешностей единичных кругов  $|\zeta_{5l}| \geq 1, |\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{5l}, L_{kl}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (9), (10). Здесь

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_k + \mu_k \sin \varphi_k) - i b_l (\sin \varphi_k - \mu_k \cos \varphi_k)}{2R_{kl}}.$$

Функция  $F_5(z_5)$  должна удовлетворять граничному условию [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} d_l F_5(t_5) = f_l(t), \quad (14)$$

в котором в случае задания значений температуры  $T_l$

$$d_l = 1, \quad f_l = T_l,$$

а в случае задания плотности теплового потока  $q_{ln}$

$$d_l = i\alpha_T, \quad f_l = \int_0^s (q_n^* - q_{ln}) ds + c_l.$$

Функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) должны удовлетворять граничным условиям [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \Phi_k(t_k) = (f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)), \quad (15)$$

где для неподкрепленных контуров  $L_l$

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) = (-u^*, -v^*, c_{l3}, c_{l4}).$$

В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$  определяются из граничных условий (14) и (15) с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Для этого на контурах  $L_i$  выбирается система точек  $M_{im}$  ( $m = \overline{1, M_i}$ ), в которых удовлетворяются граничные условия соответствующих задач.

В задаче теплопроводности при подстановке функции (11) в граничное условие (14) для определения неизвестных постоянных  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} d_i c_5 + 2 \operatorname{Re} d_i w_{5l}(t_{5im}) D_l + 2 \operatorname{Re} d_i \varphi_{5ln}(t_{5im}) c_{5ln} = f_i(t_{im}) \quad (16)$$

$$(i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}),$$

где  $t_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$ ,  $t_{im} = t_{im}(x_{im}, y_{im})$ . Систему (16) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [7, 8]. После решения этой системы постоянные  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$ , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции можно в любой точке найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1)–(2).

В задаче термоэлектромагнитоупругости граничным условиям (15) проще удовлетворить в дифференциальной форме, чтобы не определять функции  $\Phi_5(z_5)$  (коэффициенты  $a_{5ln}$ ) и неизвестные постоянные  $c_{i\alpha}$ , входящие в граничные условия. Дифференцируя (15) по дуге контура  $s$ , получим [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kl\alpha} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{l\alpha}}{ds} - 2 \operatorname{Re} d_{5l\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_5) \quad (\alpha = \overline{1,4}), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{k,s} &= dt_k/ds, \\ \Phi'_k(z_k) &= N'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \\ N'_k(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right], \\ \varphi'_{kln}(z_k) &= - \frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}. \end{aligned} \quad (18)$$

При подстановке функций (11) и (18) в условия (17) для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получается следующая система линейных алгебраических уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} d_{kia} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kim}) a_{kln} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kia} \delta_{k,s} N'_k(t_{kim}) - \\ &- 2 \operatorname{Re} d_{5i\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{5im}) + \frac{df_{i\alpha}}{ds}(t_{im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}, \alpha = \overline{1,4}) \end{aligned} \quad (19)$$

где  $t_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$ .

Систему (19) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [7, 8]. После решения этой системы постоянные  $a_{kln}$ , а, следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12) будут известны, и по ним можно находить значения основных характеристик ТЭМУС в точках пластинки по формулам (3)–(6) [4, 5].

**2. Численные исследования.** При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (11) и (12) и точек  $M_i$  на контурах  $L_i$ , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (16) и (19), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических и упругих характеристик пластинок необходимо было в указанных рядах оставлять от 30 до 40 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 400 «коллокационных точек».

Были проведены численные исследования для пластинки из композита на основе титаната бария-феррита (II) кобальта  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  [9]. Физико-механические и теплофизические постоянные приведены в табл. 1.

Таблица 1. Постоянные материала

Величина	Значение	Величина	Значение
$s_{11}/s_0$	7,165	$\beta_{22}/\beta_0$	0,137
$s_{22}/s_0$	6,797	$\nu_{11}/\nu_0$	-0,190
$s_{66}/s_0$	19,912	$\nu_{22}/\nu_0$	-0,185
$s_{12}/s_0$	-2,337	$\chi_{11}/\chi_0$	0,336
$g_{16}/g_0$	2,028	$\chi_{22}/\chi_0$	0,119
$g_{21}/g_0$	-0,496	$\alpha_1/\alpha_0$	8,530
$g_{22}/g_0$	1,157	$\alpha_2/\alpha_0$	1,990
$p_{16}/p_0$	1,850	$t_2/t_0$	133,000
$p_{21}/p_0$	0,576	$m_2/m_0$	133,000
$p_{22}/p_0$	1,186	$k_{11}/k_0$	2,500
$\beta_{11}/\beta_0$	0,156	$k_{22}/k_0$	2,500

При этом приняты обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА},$$

$$\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТл}^{-1}, \quad \alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{ К})^{-1},$$

$$m_0 = 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{ К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{ К})^{-1}.$$

Данный материал относится к кристаллографическому классу *6mm*.

Рассматривался случай действия линейного теплового потока под углом  $\alpha = \pi/2$  рад. в пластинке с двумя одинаковыми круговыми отверстиями радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$ ), расстояние между которыми равно  $c$ , расположенными вдоль направления теплового потока (рис. 2), когда на неподкрепленных контурах отверстий задана температура  $T_1 = T_2 = 0$ .

В табл. 2, с точностью до плотности линейного теплового потока  $q$  как множителя, приведены значения плотности теплового потока  $q_n$  через контур нижнего отверстия по направлению нормали в некоторых точках контура в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$ . В табл. 3 приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых точках контура нижнего отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, при некоторых значениях отношения  $c/a$ , для задач термоупругости (ТУ), когда не учитываются электромагнитные свойства материала, и термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала.

По контуру верхнего отверстия значения плотности теплового потока и напряжений имеют распределены симметрично, но с противоположным знаком.

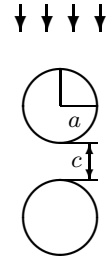


Рис. 2

К вопросу корректности принципа стабильности теплового потока

Таблица 2. Значения плотности теплового потока  $q_n$  в точках контура нижнего отверстия

$\theta$ , рад.	Значения $c/a$						
	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100
$-\pi/2$	-2,469	-2,488	-2,568	-2,664	-2,845	-4,030	-12,811
$-5\pi/12$	-2,408	-2,426	-2,507	-2,604	-2,786	-3,971	-12,750
$-\pi/3$	-2,228	-2,247	-2,330	-2,428	-2,612	-3,800	-12,571
$-\pi/4$	-1,947	-1,966	-2,051	-2,152	-2,340	-3,530	-12,287
$-\pi/6$	-1,588	-1,609	-1,697	-1,801	-1,992	-3,181	-11,916
$-\pi/12$	-1,188	-1,209	-1,300	-1,406	-1,600	-2,780	-11,485
0	-0,786	-0,808	-0,900	-1,007	-1,199	-2,356	-11,023
$\pi/12$	-0,432	-0,453	-0,541	-0,643	-0,826	-1,941	-10,562
$\pi/6$	-0,172	-0,189	-0,263	-0,351	-0,513	-1,563	-10,132
$\pi/4$	-0,035	-0,045	-0,091	-0,154	-0,281	-1,245	-9,764
$\pi/3$	-0,001	-0,003	-0,018	-0,050	-0,134	-1,006	-9,481
$5\pi/12$	0,000	0,000	-0,002	-0,012	-0,060	-0,858	-9,304
$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	-0,004	-0,038	-0,808	-9,243

Из результатов следует, что отношение  $c/a$  значительно влияет на значения плотности теплового потока и напряжений, особенно в зоне между отверстиями.

Таблица 3. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура нижнего отверстия

Тип задачи	$\theta$ , рад.	Значения $c/a$						
		0,01	0,1	0,5	1	2	10	100
ТЭМУ	$-\pi/2$	-0,860	-0,876	-0,946	-1,032	-1,204	-2,694	-21,305
	$-5\pi/12$	-0,203	-0,206	-0,216	-0,227	-0,250	-0,508	-4,542
	$-\pi/3$	0,662	0,678	0,750	0,841	1,025	2,481	18,982
	$-\pi/4$	0,960	0,984	1,091	1,226	1,498	3,719	29,871
	$-\pi/6$	0,886	0,910	1,020	1,158	1,439	3,791	32,261
	$-\pi/12$	0,675	0,698	0,798	0,926	1,187	3,463	31,739
	0	0,446	0,466	0,556	0,670	0,912	3,134	31,126
	$\pi/12$	0,250	0,268	0,347	0,453	0,687	2,953	31,281
	$\pi/6$	0,108	0,122	0,187	0,284	0,519	2,863	31,418
	$\pi/4$	0,025	0,032	0,073	0,153	0,377	2,606	28,847
	$\pi/3$	-0,001	-0,002	0,000	0,048	0,209	1,696	18,251
	$5\pi/12$	-0,001	-0,011	-0,031	-0,025	-0,012	-0,226	-4,273
	$\pi/2$	-0,009	-0,031	-0,038	-0,051	-0,148	-1,592	-20,260
ТУ	$-\pi/2$	-1,097	-1,127	-1,259	-1,421	-1,736	-4,068	-28,472
	$-5\pi/12$	-1,012	-1,040	-1,163	-1,315	-1,608	-3,785	-26,621
	$-\pi/3$	-0,797	-0,819	-0,920	-1,044	-1,283	-3,061	-21,880
	$-\pi/4$	-0,531	-0,547	-0,619	-0,707	-0,876	-2,147	-15,896
	$-\pi/6$	-0,281	-0,291	-0,333	-0,384	-0,483	-1,264	-10,123
	$-\pi/12$	-0,093	-0,097	-0,112	-0,132	-0,177	-0,592	-5,803
	0	0,009	0,010	0,011	0,007	-0,016	-0,303	-4,140
	$\pi/12$	0,031	0,034	0,037	0,025	-0,021	-0,468	-5,703
	$\pi/6$	0,015	0,016	0,001	-0,045	-0,158	-0,994	-9,885
	$\pi/4$	0,002	-0,001	-0,060	-0,166	-0,372	-1,704	-15,471
	$\pi/3$	0,001	-0,012	-0,155	-0,331	-0,619	-2,433	-21,243
	$5\pi/12$	-0,002	-0,062	-0,312	-0,516	-0,839	-3,005	-25,804
	$\pi/2$	-0,045	-0,182	-0,417	-0,610	-0,932	-3,228	-27,584

Однако гораздо более существенно на значения плотности теплового потока и напряжений влияет ориентация отверстий относительно направления действия теплового потока. Так, из результатов, приведенных в работе [5], видно, что если отверстия расположены поперек направления теплового потока, то при увеличении расстояния между отверстиями значения напряжений около их контуров стремятся к конечным значениям для случая пластинки с одним отверстием [10]. Если же отверстия расположены вдоль направления теплового потока, то, как установлено в данной работе, при увеличении расстояния значения напряжений резко возрастают. Это связано с резким увеличением плотности теплового потока вблизи контуров отверстий, поскольку одно отверстие оказывается в более холодной зоне, второе отверстие — в более горячей зоне, и при удалении отверстий контраст температур около отверстий нарастает.

Из результатов, полученных для пластинки с двумя теплоизолированными отверстиями следует, что в этом случае температура на контурах отверстий приближается к локальной температуре материала, плотности теплового потока изменяются слабо, а следовательно, слабо изменяется и ТЭМУС. Возрастание концентрации напряжений около отверстий при увеличении расстояний между ними не наблюдается.

Таким образом, если в пластинке с одним круговым отверстием, на контуре которого заданы значения температуры, на большом расстоянии по направлению теплового потока добавить второе отверстие с такими же условиями на контуре, то температурное поле около первого отверстия резко и существенно изменится (*нарушается принцип стабильности теплового потока*), вследствие чего существенно изменится и ТЭМУС. Если же контуры отверстий теплоизолированы, то нарушения принципа не происходит.

1. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
4. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
5. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
6. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности / А.И. Вейник. – М.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
10. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластиках / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 12–25.



**E.S. Glushankov**

**To the problem of correctness of the principle of heat flux stability in the problem of linear heat flux action in multiply connected piezoelectric plate.**

A problem of correctness of the principle of heat flux stability is considered for the problem of linear heat flux action in multiply connected piezoelectric plate. With the numerical studies of the thermo-electro-magneto-elastic state of the multiply connected plate it is found out the principle can be violated, its physical cause is explained, its influence on the thermo-electro-magneto-elastic state is shown.

**Keywords:** *the principle of heat flux stability, linear heat flux, thermal stresses, multiply connected plate, complex potentials.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
*eugenij.glushankov@gmail.com*

*Получено 23.09.2019*

УДК 539.3

©2019. Р.Н. Нескороев

## МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В статье предложена методика построения системы дифференциальных уравнений шестого порядка для теории изгиба ортотропных плит, позволяющая ставить граничные условия с произвольным заданием внешних усилий по толщине плиты. Приведены представления для напряжений через функции, являющиеся решением полученной системы.

**Ключевые слова:** изгиб, ортотропная плита, уточненная теория, напряжение, момент.

**Введение.** В работах [1, 2] была предложена методика решения задач изгиба изотропных и трансверсально-изотропных плит, основывающаяся на сравнении выражений для касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , заданных различными формулами [3]. В этих задачах система дифференциальных уравнений состоит из бигармонического и метагармонического уравнений, что позволяет ставить краевые задачи с тремя граничными условиями.

Для ортотропных плит разрешающее уравнение характерно тем, что оно не разделяется на два независимых уравнения четвертого и второго порядков. В работе [4] при помощи метода малого параметра предложен способ разделения уравнения шестого порядка на два уравнения четвертого и второго порядков.

В данной работе для получения разрешающих уравнений в представлениях для перемещений учтены слагаемые более высокого порядка, что позволило получить систему, состоящую из дифференциальных уравнений четвертого и второго порядков.

**1. Основные соотношения уточненной теории изгиба ортотропных плит.** Рассматривается ортотропная плита, имеющая толщину  $2h$  и отнесенная к декартовой системе координат  $Oxyz$ . Оси  $Ox$  и  $Oy$  расположены в срединной плоскости плиты, а  $Oz$  - нормальна к этой плоскости. Основная система уравнений теории упругости в случае изгиба ортотропных плит имеет вид уравнения обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + A_{13}\varepsilon_3, & \sigma_4 &= A_{44}\varepsilon_4, \\ \sigma_2 &= A_{21}\varepsilon_1 + A_{22}\varepsilon_2 + A_{23}\varepsilon_3, & \sigma_5 &= A_{55}\varepsilon_5, \\ \sigma_3 &= A_{31}\varepsilon_1 + A_{32}\varepsilon_2 + A_{33}\varepsilon_3, & \sigma_6 &= A_{66}\varepsilon_6;\end{aligned}\tag{1}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \partial_i u_i \quad (i = 1, 2, 3), & \varepsilon_4 &= \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3, \\ \varepsilon_5 &= \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3, & \varepsilon_6 &= \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1;\end{aligned}\tag{2}$$

трехмерные уравнения равновесия без учета объемных сил

$$\begin{aligned}\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 + \partial_3\sigma_5 &= 0, \\ \partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 + \partial_3\sigma_4 &= 0, \\ \partial_1\sigma_5 + \partial_2\sigma_4 + \partial_3\sigma_3 &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6] &\text{ для } [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}], \\ [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6] &\text{ для } [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}], \\ \partial_1 = \partial/\partial x, \partial_2 = \partial/\partial y, \partial_3 = \partial/\partial z, & A_{ij} - \text{модули упругости.}\end{aligned}$$

Представление для перемещений выбираются в виде отрезков рядов по функциям толщинной координаты  $p_i(z)$

$$\begin{aligned}u_1 = p_1\partial_1\varphi_1(x, y) + p_3\partial_1\varphi_3(x, y), \quad u_2 = p_1\partial_2\varphi_2(x, y) + p_3\partial_2\varphi_4(x, y), \\ u_3 = w_0(x, y) + p_2w_2(x, y) + p_4w_4(x, y).\end{aligned}\tag{4}$$

Из уравнений равновесия следует, что если в разложении для напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_6$  ограничиться слагаемыми, имеющими порядок малости  $h^k$ , то в напряжениях  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  необходимо оставить слагаемые, имеющие порядок  $h^{k+1}$ , а для напряжений  $\sigma_3$  нужно учитывать слагаемые, имеющие порядок  $h^{k+2}$ . Уравнения закона Гука (1) с учетом отмеченных выше фактов, а также соотношений (2) и (4) в первом приближении дают выражения для напряжений в форме

$$\begin{aligned}\sigma_1 = p_1s_{11} &= p_1 (A_{11}\partial_1^2\varphi_1 + A_{12}\partial_2^2\varphi_2 + A_{13}w_2), \\ \sigma_2 = p_1s_{21} &= p_1 (A_{21}\partial_1^2\varphi_1 + A_{22}\partial_2^2\varphi_2 + A_{23}w_2), \\ \sigma_6 = p_1s_{61} &= p_1A_{66}\partial_1\partial_2(\varphi_1 + \varphi_2); \end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_4^* &= A_{44}\partial_2 [w_0 + p_0\varphi_2 + p_2(w_2 + \varphi_4)], \\ \sigma_5^* &= A_{55}\partial_1 [w_0 + p_0\varphi_1 + p_2(w_2 + \varphi_3)], \\ \sigma_3^* = p_1s_{31} + p_3s_{33} &= p_1 (A_{31}\partial_1^2\varphi_1 + A_{32}\partial_2^2\varphi_2 + A_{33}w_2) + \\ &+ p_3 (A_{31}\partial_1^2\varphi_3 + A_{32}\partial_2^2\varphi_4 + A_{33}w_4)\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь  $p_1(z)$  нечетная по переменной  $z$  функция, характеризующая распределение усилий по толщине плиты и приняты обозначения

$$p_0 = p_1', \quad p_i(z) = \int p_{i-1}(z)dz \quad (i > 1).$$

Выражения для напряжений  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  можно также найти удовлетворяя уравнениям равновесия (3)

$$\sigma_4 = P_2 S_{42}, \quad \sigma_5 = P_2 S_{52}, \quad \sigma_3 = P_3 S_{33}. \quad (7)$$

Здесь принято

$$\begin{aligned} P_2 &= p_2(h) - p_2(z), \quad P_3 = p_3(z) - p_2(h)z, \\ S_{42} &= \partial_1 s_{61} + \partial_2 s_{21} = \partial_2 (c_{11} \partial_1^2 \varphi_1 + L_{22} \varphi_2 + A_{23} w_2), \\ L_{22} &= A_{66} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2, \\ S_{52} &= \partial_1 s_{11} + \partial_2 s_{61} = \partial_1 (L_{11} \varphi_1 + c_{11} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{13} w_2), \\ L_{11} &= A_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2, \\ S_{33} &= \partial_1 S_{52} + \partial_2 S_{42} = R_2 \partial_1^2 \varphi_1 + G_2 \partial_2^2 \varphi_2 + D_2 w_2, \\ D_2 &= A_{13} \partial_1^2 + A_{23} \partial_2^2, \\ R_2 &= A_{11} \partial_1^2 + D_{12} \partial_2^2, \quad G_2 = D_{12} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2, \\ c_{11} &= A_{12} + A_{66}, \quad D_{12} = c_{11} + A_{66}. \end{aligned} \quad (8)$$

Представления для напряжений (5) и (7) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия, а представления для  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  в (7), удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты:  $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$  при  $z = \pm h$ . Однако, представления (7) для напряжений  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  отличаются от соотношений (6). Для получения корректного результата в работах [3, 4] предложено приравнять между собой поперечные усилия  $Q_4$  и  $Q_5$ . В данной работе предлагается дополнительно приравнять между собой и моменты  $M_3$ :

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_{-h}^h \sigma_3^* z dz = \int_{-h}^h \sigma_3 z dz, \\ Q_4 &= \int_{-h}^h \sigma_4^* dz = \int_{-h}^h \sigma_4 dz, \quad Q_5 = \int_{-h}^h \sigma_5^* dz = \int_{-h}^h \sigma_5 dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения, описывающие изгиб плит получим, полагая:

1. Поперечное нормальное напряжение  $\sigma_3$  в соотношениях (7) равно нулю, когда  $z = \pm h$ . Поскольку  $P_3(h) \neq 0$ , следует положить

$$S_{33} = \partial_1 S_{52} + \partial_2 S_{42} = R_2 \partial_1^2 \varphi_1 + G_2 \partial_2^2 \varphi_2 + D_2 w_2 = 0. \quad (10)$$

2. Поперечные усилия и моменты (9), полученные интегрированием правых частей соотношений (6) и (7) равны.

Реализация указанных предположений приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} A_{55} [w_0 + k_0 \varphi_1 + k_2 (w_2 + \varphi_3)] - K_2 [L_{11} \varphi_1 + c_{11} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{13} w_2] &= 0, \\ A_{44} [w_0 + k_0 \varphi_2 + k_2 (w_2 + \varphi_4)] - K_2 [c_{11} \partial_1^2 \varphi_1 + L_{22} \varphi_2 + A_{23} w_2] &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$k_1 s_{31} + k_3 s_{33} - K_3 S_{33} = 0. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения

$$k_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_0 dz, \quad k_2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_2 dz, \quad K_2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h P_2 dz,$$

$$k_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_1 z dz, \quad k_3 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_3 z dz, \quad K_3 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h P_3 z dz.$$

Таким образом, для определения функций  $\varphi_i$ ,  $w_i$  получена система уравнений (10) - (12). Значения коэффициентов  $k_i$ , когда  $p_1(z) = z$ , таковы:

$$k_0 = 1, \quad k_2 = h^2/6, \quad K_2 = h^2/3, \quad k_1 = h^2/3,$$

$$k_3 = h^4/30, \quad K_3 = -2h^4/15, \quad P_{3h} = -h^3/3.$$

Из уравнений (11) находится функция  $w_0$

$$w_0 = -[k_0(A_{55}\varphi_1 + A_{44}\varphi_2) + k_2(Aw_2 + A_{55}\varphi_3 + A_{44}\varphi_4)]/A +$$

$$+ K_2 [(L_{11} + c_{11}\partial_1^2)\varphi_1 + (L_{22} + c_{11}\partial_2^2)\varphi_2 + (A_{13} + A_{23})w_2]/A, \quad (13)$$

$$A = A_{44} + A_{55}.$$

Уравнения (11) при таком значении функции  $w_0$  совпадают и имеют вид

$$[k_0 A_{44} A_{55} - K_2 (A_{44} L_{11} - A_{55} c_{11} \partial_1^2)] \varphi_1 -$$

$$[k_0 A_{44} A_{55} - K_2 (A_{55} L_{22} - A_{44} c_{11} \partial_2^2)] \varphi_2 +$$

$$+ K_2 (A_{55} A_{23} - A_{44} A_{13}) w_2 + k_2 A_{44} A_{55} (\varphi_3 - \varphi_4) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (12) с учетом (10) и (6) будет таким

$$k_1 (A_{31} \partial_1^2 \varphi_1 + A_{32} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{33} w_2) + k_3 (A_{31} \partial_1^2 \varphi_3 + A_{32} \partial_2^2 \varphi_4 + A_{33} w_4) = 0. \quad (15)$$

Дифференциальные уравнения (10), (14) и (15) имеют достаточный произвол для получения разрешающих уравнений шестого порядка теории изгиба тонких ортотропных плит. Рассматриваются два варианта нахождения этих уравнений.

Первый вариант предусматривает тождественное удовлетворение уравнения (10). Для этого функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $w_2$  представляются через новую функцию  $\psi$  следующим образом

$$\varphi_1 = \alpha_1 \psi, \quad \varphi_2 = \alpha_2 \psi, \quad w_2 = (\beta_1 \partial_1^2 + \beta_2 \partial_2^2) \psi. \quad (16)$$

После подстановки представления (16) в уравнение (10) и приравнивания коэффициентов при одинаковых операторах нулю получается

$$\begin{aligned} A_{11}\alpha_1 + A_{13}\beta_1 &= 0, & A_{22}\alpha_2 + A_{23}\beta_2 &= 0, \\ D_{12}(\alpha_1 + \alpha_2) + A_{13}\beta_2 + A_{23}\beta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение системы (17) записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_{13}r, & \beta_1 &= -A_{11}r, & \alpha_2 &= A_{23}\delta r, & \beta_2 &= -A_{22}\delta r, \\ \delta &= (A_{11}A_{23} - D_{12}A_{13}) / (D_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}). \end{aligned}$$

При решении уравнения (14) полагается

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \frac{1}{k_{22}A_{44}A_{55}} [(A_{44}A_{66} - A_{55}A_{22} + A_{44}c_{11})\alpha_2\partial_2^2 - A_{55}A_{23}(\beta_1\partial_1^2 + \beta_2\partial_2^2)]\psi, \\ \varphi_4 &= \frac{1}{k_{22}A_{44}A_{55}} [(A_{55}A_{66} - A_{44}A_{55} + A_{55}c_{11})\alpha_1\partial_1^2 - A_{44}A_{13}(\beta_1\partial_1^2 + \beta_2\partial_2^2)]\psi. \end{aligned}$$

Тогда для функции  $\psi$  получается уравнение

$$[1 - \varepsilon^2(\partial_2^2 + q^2\partial_1^2)]\psi = 0, \quad \varepsilon^2 = \frac{K_2}{k_0} \frac{A_{66}}{A_{55}}, \quad q^2 = \frac{A_{55}}{A_{44}}. \quad (18)$$

Уравнение (15) приводится к виду (18). Для этого полагается

$$w_4 = -\frac{1}{A_{33}} \left[ \frac{A_{66}}{A_{55}} \frac{1}{k_0 k_{33}} (\partial_2^2 + q^2\partial_1^2) + A_{31}\partial_1^2\varphi_3 + A_{32}\partial_2^2\varphi_4 \right].$$

Тогда уравнение (15) будет таким

$$[(A_{31}\alpha_1 + A_{33}\beta_1)\partial_1^2 + (A_{32}\alpha_2 + A_{33}\beta_2)\partial_2^2] [1 - \varepsilon^2(\partial_2^2 + q^2\partial_1^2)]\psi = 0.$$

Таким образом, функция  $\psi$ , введенная соотношениями (16), удовлетворяет уравнению второго порядка (18).

Второй вариант решения системы уравнений (10), (14), (15) предусматривает тождественное удовлетворение уравнений (14), (15). Для этого берется

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = \varphi, & w_2 &= -\frac{1}{A_{33}}D_2\varphi, & w_4 &= -\frac{1}{A_{33}}(A_{31}\partial_1^2\varphi_3 + A_{32}\partial_2^2\varphi_4), \\ \varphi_3 &= -\frac{1}{k_{22}A_{44}A_{55}} \left[ A_{44}L_{11} - A_{55}c_{11}\partial_1^2 + \frac{A_{55}A_{23}}{A_{33}}D_1 \right] \varphi, \\ \varphi_4 &= -\frac{1}{k_{22}A_{44}A_{55}} \left[ A_{55}L_{22} - A_{44}c_{11}\partial_2^2 + \frac{A_{44}A_{13}}{A_{33}} \right] \varphi. \end{aligned}$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению четвертого порядка, которое принимает вид

$$[B_{11}\partial_1^4 + 2R_{12}\partial_1^2\partial_2^2 + B_{22}\partial_2^4]\varphi = 0, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11} - A_{13}^2/A_{33}, & B_{22} &= A_{22} - A_{23}^2/A_{33}, \\ R_{12} &= B_{12} + 2A_{66}, & B_{12} &= A_{12} - A_{13}A_{23}/A_{33}. \end{aligned}$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению четвертого порядка. Общее решение задачи изгиба ортотропных плит представляется суммой решений уравнений (18) и (19).

Общим действительным решением уравнением (19) является выражение [5]

$$\varphi = 2Re [\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)],$$

где  $\Phi_j(z_j)$  - произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных  $z_j = x + \mu_j y$ ; параметры  $\mu_j$  являются корнями уравнения

$$\mu^4 + 2R_{12}/B_{22}\mu^2 + B_{11}/B_{22} = 0.$$

Методика получения приближенного решения уравнения (18) изложена в работе [4].

Представления для напряжений (5) и (7) через функции  $\varphi$  и  $\psi$ , являющихся решениями уравнений (19) и (18), имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= p_1 [(B_{11}\partial_1^2 + B_{12}\partial_2^2)\varphi + (A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22})\delta r\partial_1^2\psi], \\ \sigma_2 &= p_1 [(B_{21}\partial_1^2 + B_{22}\partial_2^2)\varphi + (A_{21}A_{13} - A_{23}A_{11})r\partial_1^2\psi], \\ \sigma_6 &= p_1 [2A_{66}\partial_1\partial_2\varphi + A_{66}(A_{13} + A_{23}\delta)r\partial_1\partial_2\psi], \\ \sigma_5 &= P_2 [(B_{11}\partial_1^2 + R_{12}\partial_2^2)\partial_1\varphi + c_5\partial_1\partial_2^2\psi], \\ \sigma_4 &= P_2 [(R_{12}\partial_1^2 + B_{22}\partial_2^2)\partial_2\varphi + c_4\partial_1^2\partial_2\psi], \\ \sigma_3 &= P_3 [(B_{11}\partial_1^4 + 2R_{12}\partial_1^2\partial_2^2 + B_{22}\partial_2^4)\varphi + (c_5 + c_4)\partial_1^2\partial_2^2\psi], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} c_5 &= [(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} + A_{66}A_{23})\delta + A_{66}A_{13}]r, \\ c_4 &= [(A_{21}A_{13} - A_{23}A_{11} + A_{66}A_{13}) + A_{66}A_{23}\delta]r. \end{aligned}$$

Представления (20) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям плоских гранях плиты. Функции  $\varphi$  и  $\psi$  в совокупности удовлетворяют системе уравнений шестого порядка. Это позволяет удовлетворить трем граничным условиям на боковой поверхности плиты.

1. Нескородев Р.Н. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит / Р.Н. Нескородев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 65–73.
2. Шевченко В.П. Об одном варианте уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 50–57.
3. Васильев В.В. Классическая теория пластин - история и современный анализ / В.В. Васильев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46–58.

*Р.Н. Нескородев*

4. *Нескородев Р.Н.* Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикл. механики. – 2017. – № 3-4 (60-61). – С. 60–68
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

**R.N. Neskoroдев**

**Method for obtaining the resolving equations of the theory of bending of orthotropic plates in the improved theory.**

The article proposes a method for constructing a system of sixth-order differential equations for the theory of bending of orthotropic plates, which makes it possible to set boundary conditions with an arbitrary setting of external forces across the plate thickness. Representations for stresses in terms of functions that are a solution to the resulting system are given.

**Keywords:** *bending, orthotropic plate, improved theory, strain, momentum.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
*prom@i.ua*

*Получено 23.09.2019*



УДК 539.3

©2019. Е.С. Глушанков

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛИТ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Решены задачи об изгибе тонких плит для некоторых неканонических областей. В полиномиальном виде получены решения (даны выражения для прогиба, изгибающих моментов, крутящего момента, перерезывающих сил) для жестко заземленных по контуру тонких плит в форме внутренности гиперболы, внутренности параболы, прямоугольного клина, а также для жестко заземленного и опертого клина с произвольным углом раствора.

**Ключевые слова:** теория изгиба тонких плит, полиномиальные решения, функция прогиба, изгибающие и крутящий моменты

**Введение.** Широкое применение во многих областях науки, техники, инженерии в качестве элементов конструкций получили плиты из анизотропных материалов. Зачастую эти плиты подвергаются распределенному либо сосредоточенному воздействию по основаниям либо по краям, что может приводить к их изгибу. Это следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Решение задач теории изгиба зачастую строится на основе теории тонких плит Кирхгофа-Лява [1, 2] К настоящему времени разработаны различные методы [3, 4] и решены многие задачи теории изгиба изотропных [3, 5, 6] и анизотропных [7, 6] плит.

В данной работе с применением известных подходов получены точные аналитические решения в виде полиномов для задач изгиба тонких анизотропных плит с различными неканоническими очертаниями.

**1. Постановка задачи теории изгиба тонких плит.** Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $Oxyz$  тонкую анизотропную плиту толщины  $2h$ . Срединная плоскость плиты лежит в плоскости  $Oxy$  и занимает двумерную область  $S$ . Пусть для каждой точки плиты имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Плита находится под действием нормальных усилий  $q(x, y)$ , распределенных по верхнему основанию, а также внешних сил, распределенных по краю.

По теории тонких плит Кирхгофа-Лява [2], определение напряженно-деформированного состояния плиты сводится к решению уравнения

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \quad (1)$$

$$= q(x, y),$$

где  $w = w(x, y)$  — прогиб срединной плоскости плиты;  $D_{ij} = \frac{2h^3}{3} B_{ij}$  — жесткости

материала плиты;

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{pmatrix}^{-1};$$

$a_{ij}$  — коэффициенты деформации материала плиты.

Уравнение (1) следует решать при соответствующих граничных условиях. После этого прогиб плиты становится известным и по нему в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящего момента  $H_{xy}$ , перерезывающих сил  $N_x$ ,  $N_y$  [2]:

$$\begin{aligned} M_x &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ M_y &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy} &= - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ N_x &= - \left( D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right), \\ N_y &= - \left( D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

После этого становится возможным определение моментов и перерезывающих сил на произвольной площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$  [2]:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ M_s &= M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \\ N_n &= N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny), \\ N_s &= N_x \cos(ny) - N_y \cos(nx). \end{aligned} \quad (3)$$

Вид граничных условий для определения функции прогиба  $w(x, y)$  зависит от физических условий по краю плиты.

Если по краю плиты действуют изгибающие, крутящие моменты и перерезывающие силы, то граничные условия имеют вид [2]

$$M_n = m(s), \quad H_{ns} = f(s), \quad N_n = p(s), \quad (4')$$

где  $m(s)$ ,  $f(s)$ ,  $p(s)$  — распределения по краю плиты изгибающего момента, крутящего момента и перерезывающих сил. В частности, если край плиты свободен

от внешних воздействий, то  $m(s) = f(s) = p(s) = 0$ . Однако, трем граничным условиям одновременно удовлетворить удастся не всегда, поэтому зачастую второе и третье граничные условия комбинируются, и тогда условия принимают вид [2]

$$M_s = m(s), \quad H_{ns} = f(s), \quad N_n + \frac{dH_{ns}}{ds} = p(s). \quad (4)$$

Если край плиты является опертым и на нем действуют изгибающие моменты, то граничные условия имеют вид [2]

$$w = 0, \quad M_n = m(s), \quad (5)$$

В частности, если край плиты является свободно опертым, то  $m(s) = 0$ .

Если край плиты жестко защемлен, то граничные условия имеют вид [2]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (6')$$

что эквивалентно

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

**2. Решения задач для тонких плит с жестко защемленными контурами.** Рассмотрим задачи изгиба для тонких плит с различными очертаниями, контуры которых жестко защемлены.

*Внутренность гиперболы.* Рассмотрим тонкую плиту, ограниченную гиперболой. Плита жестко защемлена по краю. На верхнем основании действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Следуя подходу к решению задачи об изгибе эллиптической плиты [8], функцию прогиба  $w$  будем искать в виде

$$w(x, y) = k \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (8)$$

Функция (8) тождественно удовлетворяет граничным условиям (6). Тогда для определения неизвестной постоянной  $k$  подставим (8) в уравнение (1) и получим

$$k = \frac{qa^4b^4}{8(3D_{22}a^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})a^2b^2 + 3D_{11}b^4)}. \quad (9)$$

Для моментов и перерезывающих сил из формул (2) получим выражения:

$$M_x = k \left[ \left( \frac{4D_{12}}{a^2b^2} - \frac{12D_{11}}{a^4} \right) x^2 + \frac{16D_{16}}{a^2b^2} xy + \left( \frac{4D_{11}}{a^2b^2} - \frac{12D_{12}}{b^4} \right) y^2 + \left( \frac{4D_{11}}{a^2} - \frac{4D_{12}}{b^2} \right) \right],$$

$$M_y = k \left[ \left( \frac{4D_{22}}{a^2b^2} - \frac{12D_{12}}{a^4} \right) x^2 + \frac{16D_{26}}{a^2b^2} xy + \left( \frac{4D_{12}}{a^2b^2} - \frac{12D_{22}}{b^4} \right) y^2 + \left( \frac{4D_{12}}{a^2} - \frac{4D_{22}}{b^2} \right) \right],$$

$$H_{xy} = k \left[ \left( \frac{4D_{26}}{a^2b^2} - \frac{12D_{16}}{a^4} \right) x^2 + \frac{16D_{66}}{a^2b^2} xy + \left( \frac{4D_{16}}{a^2b^2} - \frac{12D_{26}}{b^4} \right) y^2 + \left( \frac{4D_{16}}{a^2} - \frac{4D_{26}}{b^2} \right) \right],$$

$$N_x = k \left[ \left( \frac{8(D_{12} + 2D_{66})}{a^2b^2} - \frac{24D_{11}}{a^4} \right) x + \left( \frac{24D_{16}}{a^2b^2} - \frac{24D_{26}}{b^4} \right) y \right],$$

$$N_y = k \left[ \left( \frac{24D_{26}}{a^2b^2} - \frac{24D_{16}}{b^4} \right) x + \left( \frac{8(D_{12} + 2D_{66})}{a^2b^2} - \frac{24D_{22}}{b^4} \right) y \right].$$

Для ортотропного материала  $a_{16} = a_{26} = 0$ , следовательно,  $D_{16} = D_{26} = 0$ , и для моментов и перерезывающих сил выражения обретают такой вид:

$$M_x = k \left[ \left( \frac{4D_{12}}{a^2b^2} - \frac{12D_{11}}{a^4} \right) x^2 + \left( \frac{4D_{11}}{a^2b^2} - \frac{12D_{12}}{b^4} \right) y^2 + \left( \frac{4D_{11}}{a^2} - \frac{4D_{12}}{b^2} \right) \right],$$

$$M_y = k \left[ \left( \frac{4D_{22}}{a^2b^2} - \frac{12D_{12}}{a^4} \right) x^2 + \left( \frac{4D_{12}}{a^2b^2} - \frac{12D_{22}}{b^4} \right) y^2 + \left( \frac{4D_{12}}{a^2} - \frac{4D_{22}}{b^2} \right) \right],$$

$$H_{xy} = k \frac{16D_{66}}{a^2b^2} xy,$$

$$N_x = k \left( \frac{8(D_{12} + 2D_{66})}{a^2b^2} - \frac{24D_{11}}{a^4} \right) x,$$

$$N_y = k \left( \frac{8(D_{12} + 2D_{66})}{a^2b^2} - \frac{24D_{22}}{b^4} \right) y.$$

Из полученных формул следует, что при удалении от вершины гиперболы значения моментов возрастают вместе с величиной прогиба.

*Внутренность параболы.* Рассмотрим тонкую плиту, ограниченную параболой. Плита жестко закреплена по краю. На верхнем основании действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 - px = 0. \quad (10)$$

Вновь применим подход, использованный при решении задачи об изгибе эллиптической плиты [8], и функцию прогиба  $w$  будем искать в виде

$$w(x, y) = k (y^2 - px)^2. \quad (11)$$

Функция (11) тождественно удовлетворяет граничным условиям (6). Тогда для определения неизвестной постоянной  $k$  подставим (11) в уравнение (1) и получим

$$k = \frac{q}{24}. \quad (12)$$

Для моментов и перерезывающих сил из формул (2) получим выражения:

$$M_x = k (-12D_{12}y^2 + 4D_{12}px + 8D_{16}py - 2D_{11}p^2),$$

$$M_y = k (-12D_{22}y^2 + 4D_{22}px + 8D_{26}py - 2D_{12}p^2),$$

$$H_{xy} = k (-12D_{26}y^2 + 4D_{26}px + 8D_{66}py - 2D_{16}p^2),$$

$$N_x = k (-24D_{26}y + 4(D_{12} + 2D_{66})p),$$

$$N_y = k (-24D_{22}y + 12D_{26}p).$$

Для ортотропного материала выражения для моментов и перерезывающих сил упрощаются:

$$M_x = k (-12D_{12}y^2 + 4D_{12}px - 2D_{11}p^2),$$

$$M_y = k (-12D_{22}y^2 + 4D_{22}px - 2D_{12}p^2),$$

$$H_{xy} = 8kD_{66}py,$$

$$N_x = k (4(D_{12} + 2D_{66})p),$$

$$N_y = k (-24D_{22}y + 12D_{26}p).$$

Из полученных формул следует, что при удалении от вершины параболы значения моментов возрастают вместе с величиной прогиба.

*Прямоугольный клин.* Рассмотрим плиту в форме прямоугольного клина. Плита жестко закреплена по краю. На верхнем основании действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

Вершину прямого угла поместим в точку начала координат, а его стороны расположим вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . Тогда плита будет занимать область, ограниченную линиями

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Функцию прогиба  $w$  выберем в виде

$$w(x, y) = kx^2y^2. \quad (13)$$

Функция (13) удовлетворяет граничным условиям (6), а для определения неизвестной постоянной  $k$  подставим ее в дифференциальное уравнение (1). Тогда получим

$$k = \frac{q}{8(D_{12} + 2D_{66})}. \quad (14)$$

Из формул (2) получаем выражения для моментов и перерезывающих сил в точках плиты:

$$\begin{aligned} M_x &= k(-2D_{12}x^2 - 8D_{16}xy - 2D_{11}y^2), \\ M_y &= k(-2D_{22}x^2 - 8D_{26}xy - 2D_{12}y^2), \\ H_{xy} &= k(-2D_{26}x^2 - 4D_{66}xy - 2D_{16}y^2), \\ N_x &= k(-4(D_{12} + 2D_{66})x - 12D_{16}y), \\ N_y &= k(-12D_{26}x - 4(D_{12} + 2D_{66})y), \end{aligned}$$

а для ортотропного материала эти формулы примут такой вид:

$$\begin{aligned} M_x &= k(-2D_{12}x^2 - 2D_{11}y^2), \\ M_y &= k(-2D_{22}x^2 - 2D_{12}y^2), \\ H_{xy} &= -4kD_{66}xy, \\ N_x &= -4k(D_{12} + 2D_{66})x, \\ N_y &= -4k(D_{12} + 2D_{66})y. \end{aligned}$$

Из полученных формул следует, что при удалении от вершины клина значения моментов возрастают вместе с величиной прогиба.

**3. Решения задач теории изгиба для ортотропного клина с произвольным углом раствора при различных условиях по краю.** Рассмотрим тонкую клиновидную плиту с произвольным углом раствора, ограниченную двумя прямыми линиями. Плита подвержена различным воздействиям по верхнему основанию и по краю.

Для удобства будем полагать, что уравнения прямых, образующих клин, имеют вид

$$y - px = 0, \quad y + px = 0. \quad (15)$$

Для угла раствора клина получается значение  $2 \arctg p$ .

*Клин с жестко защемленным контуром.* Рассмотрим плиту в форме клина, ограниченного двумя прямыми. Плита жестко защемлена по краю. На верхнем основании действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

Функцию прогиба  $w$  будем искать в виде

$$w(x, y) = k((y - px)(y + px))^2 = k(y^2 - p^2x^2)^2. \quad (16)$$

Функция (16) тождественно удовлетворяет граничным условиям (6). Тогда для определения неизвестной постоянной  $k$  подставим (16) в уравнение (1) и получим

$$k = \frac{q}{8(-3D_{22} + (D_{12} + 2D_{66})p^2 - 3D_{11}p^4)}. \quad (17)$$

Для моментов и перерезывающих сил из формул (2) имеем выражения:

$$M_x = k((4D_{12}p^2 - 12D_{11}p^4)x^2 + (4D_{11}p^2 - 12D_{12})y^2),$$

$$\begin{aligned} M_y &= k \left( (4D_{22}p^2 - 12D_{12}p^4) x^2 + (4D_{12}p^2 - 12D_{22}) y^2 \right), \\ H_{xy} &= 16kD_{66}p^2xy, \\ N_x &= k \left( 8(D_{12} + 2D_{66})p^2 - 24D_{11}p^4 \right) x, \\ N_y &= k \left( 8(D_{12} + 2D_{66})p^2 - 24D_{22} \right) y. \end{aligned}$$

Из полученных формул следует, что при удалении от вершины клина значения моментов возрастают вместе с величиной прогиба.

Заметим, что вышеприведенные формулы для клиновидной плиты можно получить также из формул для внутренности гиперболы, положив в них  $b = ap$  и  $a \rightarrow \infty$ .

*Клин, опертый по контуру и нагруженный изгибающим моментом.* Рассмотрим плиту в форме клина, ограниченного двумя прямыми. Плита оперта по краю, действует нормальный изгибающий момент  $M_n = m$ . Основания плиты свободны от нагрузки.

Функцию прогиба будем искать в виде

$$w(x, y) = k (y^2 - p^2x^2). \quad (18)$$

Функция (18) тождественно удовлетворяет уравнению (1) при  $q(x, y) = 0$  и первому граничному условию (5).

Для моментов и перерезывающих сил из формул (2) имеем выражения:

$$\begin{aligned} M_x &= 2k (D_{12} - D_{11}p^2), \\ M_y &= 2k (D_{22} - D_{12}p^2), \\ H_{xy} &= 0, \quad N_x = 0, \quad N_y = 0. \end{aligned}$$

Неизвестную постоянную  $k$  будем определять из второго граничного условия (5). Для момента  $M_n$ , действующего на произвольной площадке с нормалью  $n$ , из формул (3) получим

$$M_n = 2k \left[ (D_{12} - D_{11}p^2) \cos^2(nx) + (D_{22} - D_{12}p^2) \cos^2(ny) \right].$$

На линиях  $y \pm px = 0$ , составляющих границу плиты,  $\cos(nx) = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ ,  $\cos(ny) = \mp \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ . Тогда на площадках, параллельных контуру плиты, изгибающий момент

$$M_n = 2k \frac{p^2}{1+p^2} \left[ D_{12} + D_{22} - (D_{11} + D_{12})p^2 \right] = m.$$

Отсюда для неизвестной постоянной  $k$  получаем значение

$$k = \frac{m(1+p^2)}{2p^2 [D_{12} + D_{22} - (D_{11} + D_{12})p^2]}. \quad (19)$$

Таким образом, для ортотропного клина с опертым краем значения моментов постоянны во всех точках плиты, а перерезывающие силы отсутствуют.

*Клин, край которого загружен изгибающим и крутящим моментами.* Рассмотрим плиту в форме клина, ограниченного двумя прямыми. Край плиты загружен изгибающим моментом  $M_n = m$  и крутящим моментом  $H_{ns} = \mp t$  (где знак «-» относится к границе  $y + px = 0$ , а знак «+» относится к границе  $y - px = 0$ ). Основания плиты свободны от нагрузки.

Функцию прогиба будем искать в виде

$$w(x, y) = k_1 x^2 + k_2 y^2. \quad (20)$$

Функция (20) тождественно удовлетворяет уравнению (1) при  $q(x, y) = 0$  и третьему граничному условию (4').

Для моментов и перерезывающих сил из формул (2) имеем выражения:

$$\begin{aligned} M_x &= -2k_1 D_{11} - 2k_2 D_{12}, \\ M_y &= -2k_1 D_{12} - 2k_2 D_{22}, \\ H_{xy} &= 0, \quad N_x = 0, \quad N_y = 0. \end{aligned}$$

Неизвестные постоянные  $k$  будем определять из первого и второго граничных условий (4'). Для моментов  $M_n$  и  $H_{ns}$ , действующих на площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$ , из формул (3), получим

$$\begin{aligned} M_n &= -2 [(k_1 D_{11} + k_2 D_{12}) \cos^2(nx) + (k_1 D_{12} + k_2 D_{22}) \cos^2(ny)], \\ H_{ns} &= -2 [(k_1 D_{12} + k_2 D_{22}) - (k_1 D_{11} + k_2 D_{12})] \cos(nx) \cos(ny). \end{aligned}$$

Тогда на площадках, параллельных контуру плиты, для изгибающего и крутящего моментов имеем

$$\begin{aligned} M_n &= -2 \frac{p^2}{1+p^2} [(D_{11} + D_{12}) k_1 + (D_{12} + D_{22}) k_2] = m, \\ H_{ns} &= \mp 2 \frac{p^2}{1+p^2} [(D_{11} - D_{12}) k_1 + (D_{12} - D_{22}) k_2] = \mp t. \end{aligned}$$

Решая полученную систему, для неизвестных постоянных  $k_1, k_2$  получаем значения

$$k_1 = \frac{(D_{12} - D_{22}) p^2}{4(D_{11} D_{22} - D_{12}^2)(1+p^2)} m + \frac{(D_{12} + D_{22}) p^2}{4(D_{11} D_{22} - D_{12}^2)(1+p^2)} t, \quad (21)$$

$$k_2 = \frac{(D_{12} - D_{11}) p^2}{4(D_{11} D_{22} - D_{12}^2)(1+p^2)} m - \frac{(D_{12} + D_{11}) p^2}{4(D_{11} D_{22} - D_{12}^2)(1+p^2)} t. \quad (22)$$

Следовательно, для ортотропного клина с краем, загруженным изгибающим и крутящим моментами, значения моментов постоянны во всех точках плиты, а перерезывающие силы отсутствуют.



1. *Love A.E.H.* On the small free vibrations and deformations of elastic shells / A.E.H. Love // Philosophical trans. of the Royal Society. – 1888. – Vol. serie A, No. 17. – P. 491–549.
2. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
3. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки / С.П.Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
4. *Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
5. *Mansfield E.H.* The bending and stretching of plates / E.H. Mansfield. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 228 p.
6. *Калоеров С.А.* Решения задач изгиба тонких плит для канонических областей / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 99–138.
7. *Космодамианский А.С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К.-Донецк: Вища шк., 1976. – 200 p.
8. *Ляв А.* Математическая теория упругости / А. Ляв. – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.

**E.S. Glushankov**

**The solutions of the problems of bending of thin plates for some uncanonical domains.**

The problems of bending of thin plates are solved for some uncanonical domains. The solutions are obtained in polynomials (the expressions given for deflection, bending moments, twisting moment, transverse forces) for clamped hyperbola interior, parabola interior, rectangular wedge, as well as for clamped, supported and loaded wedges with arbitrary opening angle.

**Keywords:** *bending theory of thin plates, polynomial solutions, deflection function, bending and twisting moments.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
*eugenij.glushankov@gmail.com*

Получено 01.11.2019

УДК 539.3:534.1

©2019. Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев

## ДИСПЕРСИОННЫЙ СПЕКТР УПРУГИХ ВОЛН ИЗГИБА ВДОЛЬ ОКРУЖНОГО НАПРАВЛЕНИЯ В ТОНКОЙ ИЗОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЕ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ЛИБО ШАРНИРНО ОПЕРТЫМИ КРАЯМИ

Получено трансцендентное дисперсионное уравнение, описывающее спектр бегущих и краевых стоячих волн чистого изгиба, распространяющихся вдоль углового окружного координатного направления в тонкой изотропной пластине в форме концентрического кольца при различных сочетаниях условий жесткого закрепления либо шарнирного опирания на внутреннем и внешнем краях. Используются соотношения прикладной теории динамического изгибного деформирования, базирующейся на гипотезах прямых нормалей. Построенные дисперсионные уравнения имеют форму равенства нулю функционального определителя четвертого порядка из элементов в виде комбинаций разнотипных цилиндрических функций с содержащими искомые волновые числа индексными параметрами. Представлены примеры численного исследования полученных уравнений, а также расчета форм исследуемых волновых движений.

**Ключевые слова:** тонкие изотропные пластины, концентрическая кольцевая форма, закрепленные края, шарнирно-опертые края, прикладная модель изгиба, изгибные упругие волны, окружное направление распространения, трансцендентное дисперсионное уравнение, численное исследование, волновые спектры, формы волновых движений.

**Введение.** Теоретические исследования закономерностей распространения волн деформаций вдоль траекторий криволинейной геометрии в упругих телах и элементах конструкций относятся к числу актуальных заданий в механике деформируемого твердого тела [1 – 4]. Они представляют интерес для приложений в механике машин и строительных сооружений, в исследованиях моделей ультразвуковой дефектоскопии, в акустоэлектронике при предпроектном расчетном моделировании электронных устройств на поверхностных акустических волнах, волноводных трактов, линий задержки, электроакустических фильтров [5 – 6]. Одним из классов задач данного типа являются задачи описания спектров и свойств изгибных волн вдоль окружного (углового) направления в тонких пластинах круговой формы, в пластинах концентрической кольцевой геометрии в составных кольцевых пластинах при различных типах задания граничных условий на их краях. В исследованиях по этой проблематике также подлежат анализу вопросы использования разновариантных уточненных моделей волнового изгибного деформирования тонких пластин, моделей учета анизотропии, поперечной либо радиальной неоднородности физико-механических свойств, моделей учета начальных деформаций, моделей динамического изгиба при наличии упругих оснований.

Вместе с тем, при наличии столь обширного круга подлежащих анализу аспектов данной проблемы, вопросам о закономерностях распространения изгибных упругих волн в окружных направлениях кольцевых тонких пластин по-

священо крайне ограниченное число опубликованных исследований. При этом работой, содержащей отдельные результаты численного анализа, является публикация [7], в которой представлено теоретико-числовое исследование процесса распространения волны изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной концентрической кольцевой пластине со свободной внутренней и внешней границами.

В контексте вышеизложенного, целью данной работы является получение и анализ дисперсионных уравнений, описывающих спектры бегущих и краевых стоячих волн чистого изгиба, распространяющихся вдоль углового окружного координатного направления в тонкой изотропной пластине в форме концентрического кольца при различных сочетаниях условий жесткого закрепления либо шарнирного опирания на внутреннем и внешнем краях, а также численный анализ форм рассматриваемых волновых движений.

**1. Постановка задачи и получение основного дисперсионного соотношения.** Рассматривается изотропная пластина малой толщины  $h$ , имеющая концентрическую кольцевую форму. Полагается, что в полярных координатах  $Or\theta$  срединная плоскость пластины занимает область

$$S = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

Динамическое изгибное деформирование пластины в рамках прикладной теории, базирующейся на гипотезе прямой нормали, описывается уравнением для комплексной функции прогиба  $w(r, \theta, t)$ , имеющем вид

$$\Delta\Delta w(r, \theta, t) + (\rho h/D)(\partial^2 w(r, \theta, t)/\partial t^2) = 0. \quad (1)$$

Значения характеристик динамического напряженно-деформированного состояния пластины  $M_{rr}(r, \theta, t)$ ,  $M_{\theta\theta}(r, \theta, t)$ ,  $M_{r\theta}(r, \theta, t)$ ,  $N_r(r, \theta, t)$ ,  $N_\theta(r, \theta, t)$  на основных площадках полярной координатной системы при неосесимметричном волновом деформировании описываются соотношениями

$$\begin{aligned} M_{rr}(r, \theta, t) &= -D[(\partial^2/\partial r^2 + \nu r^{-1}\partial/\partial r + \nu r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)], \\ M_{\theta\theta}(r, \theta, t) &= -D[(\nu\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)], \\ M_{r\theta}(r, \theta, t) &= -D(1-\nu)[(r^{-1}\partial^2/\partial r\partial\theta - r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)], \\ N_r(r, \theta, t) &= -D[(\partial^3/\partial r^3 + r^{-1}\partial^2/\partial r^2 - r^{-2}\partial/\partial r - \\ &\quad - 2r^{-3}\partial^2/\partial\theta^2 + r^{-2}\partial^3/\partial r\partial\theta^2)w(r, \theta, t)], \\ N_\theta(r, \theta, t) &= -D[(r^{-3}\partial^3/\partial\theta^3 + r^{-2}\partial^2/\partial r\partial\theta + r^{-1}\partial^3/\partial r^2\partial\theta)w(r, \theta, t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Краевые условия в случае жесткого закрепления внутренней и внешней границ

пластины могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} [w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0, \\ [\partial/\partial r \cdot w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0 \\ (j = \overline{1, 2}); \end{aligned} \quad (3)$$

в случае шарнирного опирания обеих границ пластины

$$\begin{aligned} [w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0, \\ [(\partial^2/\partial r^2 + \nu r^{-1}\partial/\partial r + \nu r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0 \\ (j = \overline{1, 2}); \end{aligned} \quad (4)$$

в случае жесткого закрепления внутренней и шарнирного опирания внешней границ пластины

$$\begin{aligned} [w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0 \quad (j = \overline{1, 2}); \\ [\partial/\partial r \cdot w(r, \theta, t)]_{r=R_1, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0; \\ [(\partial^2/\partial r^2 + \nu r^{-1}\partial/\partial r + \nu r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)]_{r=R_2, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

в случае жесткого закрепления внешней и шарнирного опирания внутренней границ пластины

$$\begin{aligned} [w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0 \quad (j = \overline{1, 2}); \\ [(\partial^2/\partial r^2 + \nu r^{-1}\partial/\partial r + \nu r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)]_{r=R_1, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0. \\ [\partial/\partial r \cdot w(r, \theta, t)]_{r=R_2, \theta \in [0, 2\pi]} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В соотношениях (1) – (6)  $\rho$  – плотность материала плиты;  $D = Eh^3/((12(1-\nu^2)))$  – параметр цилиндрической жесткости;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$  – оператор Лапласа в полярных координатах.

Для комплексной функции изгибных перемещений в исследуемых гармонических волнах с круговой частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ , распространяющихся вдоль окружного углового направления  $\theta$  в рассматриваемых кольцевых пластинах, вводится представление

$$w(r, \theta, t) = w_0(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)). \quad (7)$$

При подстановке представления (7) в выражение (1) для амплитудной функции  $w_0(r)$  следует уравнение

$$(\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r - (k/r)^2 + \lambda^2)(\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r - (k/r)^2 - \lambda^2)w_0(r) = 0, \quad (8)$$

$$\lambda = ((-\rho h \omega^2)/D)^{1/4}, \quad (9)$$

решение которого выражается через специальные цилиндрические функции первого и второго рода с индексами  $k$

$$w_0(r) = a_1 J_k(\lambda r) + a_2 Y_k(\lambda r) + a_3 I_k(\lambda r) + a_4 K_k(\lambda r). \quad (10)$$

При рассматриваемых видах граничных условий для функции  $w(r, \theta, t)$  на контурных линиях пластины  $r = R_j$  дисперсионные уравнения для волн исследуемого типа с учетом формул дифференцирования цилиндрических функций [8] могут быть записаны как равенства нулю функциональных определителей

$$F(k, \omega) = \det \|\vartheta_{qp}(k, \omega)\| = 0 \quad (q, p = \overline{1, 4}), \quad (11)$$

элементы которых имеют вид:

– в случае жесткого закрепления внутренней и внешней границ пластины

$$\begin{aligned} \vartheta_{j1}(k, \omega) &= J_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j2}(k, \omega) &= Y_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j3}(k, \omega) &= I_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j4}(k, \omega) &= K_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j+2,1}(k, \omega) &= (J_{k-1}(\lambda R_j) - J_{k+1}(\lambda R_j))/2, \\ \vartheta_{j+2,2}(k, \omega) &= (Y_{k-1}(\lambda R_j) - Y_{k+1}(\lambda R_j))/2, \\ \vartheta_{j+2,3}(k, \omega) &= (I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j))/2, \\ \vartheta_{j+2,4}(k, \omega) &= -(K_{k-1}(\lambda R_j) + K_{k+1}(\lambda R_j))/2 \\ & \quad (j = \overline{1, 2}); \end{aligned} \quad (12)$$

– в случае шарнирного опирания обеих границ пластины

$$\begin{aligned} \vartheta_{j1}(k, \omega) &= J_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j2}(k, \omega) &= Y_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j3}(k, \omega) &= I_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j4}(k, \omega) &= K_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j+2,1}(k, \omega) &= (J_{k-2}(\lambda R_j) - 2J_k(\lambda R_j) + J_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ & + (\nu/(2R_j))(J_{k-1}(\lambda R_j) - J_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)J_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j+2,2}(k, \omega) &= (Y_{k-2}(\lambda R_j) - 2Y_k(\lambda R_j) + Y_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ & + (\nu/(2R_j))(Y_{k-1}(\lambda R_j) - Y_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)Y_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j+2,3}(k, \omega) &= (I_{k-2}(\lambda R_j) + 2I_k(\lambda R_j) + I_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ & + (\nu/(2R_j))(I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)I_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j+2,4}(k, \omega) &= -(K_{k-2}(\lambda R_j) + 2K_k(\lambda R_j) + K_{k+2}(\lambda R_j))/4 - \\ & - (\nu/(2R_j))(K_{k-1}(\lambda R_j) + K_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)K_k(\lambda R_j) \\ & \quad (j = \overline{1, 2}); \end{aligned} \quad (13)$$

– в случае жесткого закрепления внутренней и шарнирного опирания внешней границ пластины

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{j1}(k, \omega) &= J_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j2}(k, \omega) &= Y_k(\lambda R_j), \\
 \vartheta_{j3}(k, \omega) &= I_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j4}(k, \omega) &= K_k(\lambda R_j), \\
 \vartheta_{31}(k, \omega) &= (J_{k-1}(\lambda R_1) - J_{k+1}(\lambda R_1))/2, \\
 \vartheta_{32}(k, \omega) &= (Y_{k-1}(\lambda R_1) - Y_{k+1}(\lambda R_1))/2, \\
 \vartheta_{33}(k, \omega) &= (I_{k-1}(\lambda R_1) + I_{k+1}(\lambda R_1))/2, \\
 \vartheta_{44}(k, \omega) &= -(K_{k-1}(\lambda R_1) + K_{k+1}(\lambda R_1))/2, \\
 \vartheta_{41}(k, \omega) &= (J_{k-2}(\lambda R_2) - 2J_k(\lambda R_2) + J_{k+2}(\lambda R_2))/4 + \\
 &+ (\nu/(2R_2))(J_{k-1}(\lambda R_2) - J_{k+1}(\lambda R_2)) - (\nu k^2/R_2^2)J_k(\lambda R_2), \\
 \vartheta_{42}(k, \omega) &= (Y_{k-2}(\lambda R_2) - 2Y_k(\lambda R_2) + Y_{k+2}(\lambda R_2))/4 + \\
 &+ (\nu/(2R_2))(Y_{k-1}(\lambda R_2) - Y_{k+1}(\lambda R_2)) - (\nu k^2/R_2^2)Y_k(\lambda R_2), \\
 \vartheta_{43}(k, \omega) &= (I_{k-2}(\lambda R_2) + 2I_k(\lambda R_2) + I_{k+2}(\lambda R_2))/4 + \\
 &+ (\nu/(2R_2))(I_{k-1}(\lambda R_2) + I_{k+1}(\lambda R_2)) - (\nu k^2/R_2^2)I_k(\lambda R_2), \\
 \vartheta_{44}(k, \omega) &= -(K_{k-2}(\lambda R_2) + 2K_k(\lambda R_2) + K_{k+2}(\lambda R_2))/4 - \\
 &- (\nu/(2R_2))(K_{k-1}(\lambda R_2) + K_{k+1}(\lambda R_2)) - (\nu k^2/R_2^2)K_k(\lambda R_2) \\
 &\quad (j = \overline{1, 2});
 \end{aligned} \tag{14}$$

– в случае жесткого закрепления внешней и шарнирного опирания внутренней границ пластины

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{j1}(k, \omega) &= J_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j2}(k, \omega) &= Y_k(\lambda R_j), \\
 \vartheta_{j3}(k, \omega) &= I_k(\lambda R_j), & \vartheta_{j4}(k, \omega) &= K_k(\lambda R_j), \\
 \vartheta_{31}(k, \omega) &= (J_{k-2}(\lambda R_1) - 2J_k(\lambda R_1) + J_{k+2}(\lambda R_1))/4 + \\
 &+ (\nu/(2R_1))(J_{k-1}(\lambda R_1) - J_{k+1}(\lambda R_1)) - (\nu k^2/R_1^2)J_k(\lambda R_1), \\
 \vartheta_{32}(k, \omega) &= (Y_{k-2}(\lambda R_1) - 2Y_k(\lambda R_1) + Y_{k+2}(\lambda R_1))/4 + \\
 &+ (\nu/(2R_1))(Y_{k-1}(\lambda R_1) - Y_{k+1}(\lambda R_1)) - (\nu k^2/R_1^2)Y_k(\lambda R_1), \\
 \vartheta_{33}(k, \omega) &= (I_{k-2}(\lambda R_1) + 2I_k(\lambda R_1) + I_{k+2}(\lambda R_1))/4 + \\
 &+ (\nu/(2R_1))(I_{k-1}(\lambda R_1) + I_{k+1}(\lambda R_1)) - (\nu k^2/R_1^2)I_k(\lambda R_1), \\
 \vartheta_{34}(k, \omega) &= -(K_{k-2}(\lambda R_1) + 2K_k(\lambda R_1) + K_{k+2}(\lambda R_1))/4 - \\
 &- (\nu/(2R_1))(K_{k-1}(\lambda R_1) + K_{k+1}(\lambda R_1)) - (\nu k^2/R_1^2)K_k(\lambda R_1), \\
 \vartheta_{41}(k, \omega) &= (J_{k-1}(\lambda R_2) - J_{k+1}(\lambda R_2))/2, \\
 \vartheta_{42}(k, \omega) &= (Y_{k-1}(\lambda R_2) - Y_{k+1}(\lambda R_2))/2, \\
 \vartheta_{43}(k, \omega) &= (I_{k-1}(\lambda R_2) + I_{k+1}(\lambda R_2))/2, \\
 \vartheta_{44}(k, \omega) &= -(K_{k-1}(\lambda R_2) + K_{k+1}(\lambda R_2))/2 \\
 &\quad (j = \overline{1, 2}).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Подлежащий определению параметр волнового числа  $k$  фигурирует в полу-

ченных уравнениях как величина, входящая в выражения для индексных показателей специальных цилиндрических функций.

В процессе представляемых исследований разработан алгоритм численного анализа дисперсионных уравнений, описываемых соотношениями (11) – (15).

Расчет кинематических и силовых характеристик для мод исследуемых изгибных свободных бегущих либо краевых стоячих волн с параметрами  $(k_m, \omega)$ , где  $k_m$  – корни уравнений (11), реализуется с использованием соотношений (2), (10) на основе записи представлений решений однородных систем алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, a_4$  соответствующими матрицами  $\|\vartheta_{qp}(k_m, \omega)\|$  в форме

$$a_p = a_{*m} \Delta_{pm}. \quad (16)$$

Здесь  $\Delta_{pm}$  – алгебраические дополнения для элементов  $\vartheta_{4p}(k_m, \omega)$  в матрицах  $\|\vartheta_{qp}(k_m, \omega)\|$ .

**2. Результаты численных исследований.** Пример реализации представленной методики получения и исследования дисперсионных соотношений, описывающих спектры рассматриваемых изгибных волн, дается для пластины с приведенными безразмерными геометрическими и физико-механическими характеристиками  $\rho h = 1, D = 1, \nu = 0.3, r_1^* = R_1/h = 2, r_2^* = R_2/h = 8$  в диапазоне приведенной циклической частоты  $\omega \in [0.05, 1.75]$ .

На рисунке 1 представлен фрагмент диаграммы дисперсионных кривых с отрезками действительных ветвей спектра, отвечающих бегущим волнам анализируемого типа, а также отрезками мнимых ветвей спектра, описывающих краевые стоячие волны для случая жесткого закрепления внутреннего и внешнего контуров пластины. Рисунок характеризует случай ненулевого значения

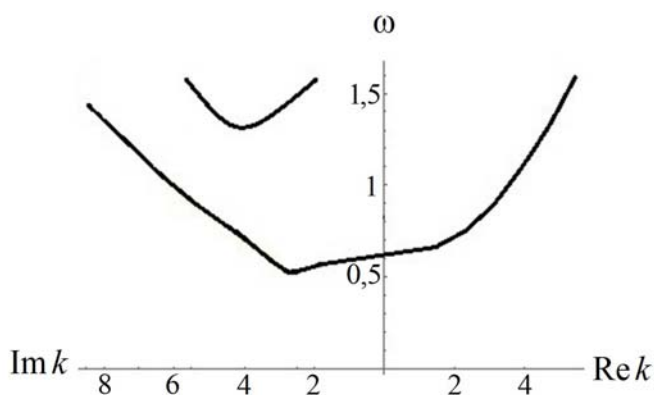


Рис. 1. Диаграмма дисперсионных кривых для изгибных волн в окружном направлении кольцевой пластины с закреплением внутреннего и внешнего граничных контуров.

частоты записания низшей моды бегущих волн и описывает общую картину топологии действительных и мнимых ветвей для данного фрагмента спектра.

Формы кривых указывают на присутствие в спектре комплексных ветвей, для описания траекторий которых необходимы дополнительные численные исследования.

На рисунке 2 дано описание фрагмента диаграммы дисперсионных кривых, описывающего моды бегущих и краевых стоячих волн в кольцевой пластине с шарнирным опиранием внутреннего и жестким закреплением внешнего граничных контуров. Топологическая структура данного фрагмента указывает на снижение в данном случае ненулевого значения частоты запираания низшей моды бегущих волн, наличие для рассматриваемого частотного интервала двух мод бегущих волн, увеличение плотности и изменение форм ветвей в мнимой части спектра. Все указанные особенности в сравнении со случаем, описываемым на рисунке 1, являются следствием снижения меры механического стеснения внутренней границы кольцевой пластины.

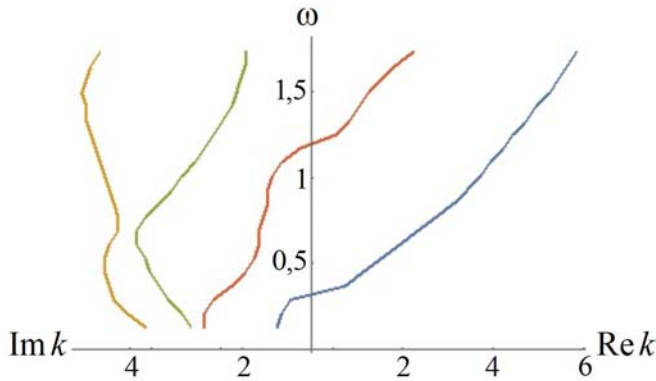


Рис. 2. Диаграмма дисперсионных кривых для изгибных волн в окружном направлении кольцевой пластины с шарнирным опиранием внутреннего и закреплением внешнего граничных контуров.

Наряду с расчетами ветвей дисперсионных спектров реализовано также исследование некоторых свойств для форм изгибных перемещений в рассматриваемых волнах. Отдельные результаты таких расчетов, описываемых характеристиками

$$\tilde{w}_0(r) = w_0(r) / \max_{r \in [R_1, R_2]} |w_0(r)|, \quad (17)$$

представлены на рисунках 3, 4. Они характеризуют изменение относительной формы волновых изгибных перемещений при  $r \in [R_1, R_2]$  в волне низшей моды спектра для кольцевой пластины с шарнирным опиранием внутреннего и закреплением внешнего граничных контуров в двух точках на дисперсионной кривой низшей моды: точке  $k_m = 1.55$ ,  $\omega = 0.51$  в окрестности частоты запираания данной моды и точки  $k_m = 2.25$ ,  $\omega = 1.73$  в высокочастотной области рассматриваемого фрагмента дисперсионного спектра. Анализ рассчитанных форм приводит к заключению о существенных изменениях в формах радиальных рас-



пределений по мере уменьшения относительной длины рассматриваемых волн, появлении узла для формы перемещений высокочастотной волны.

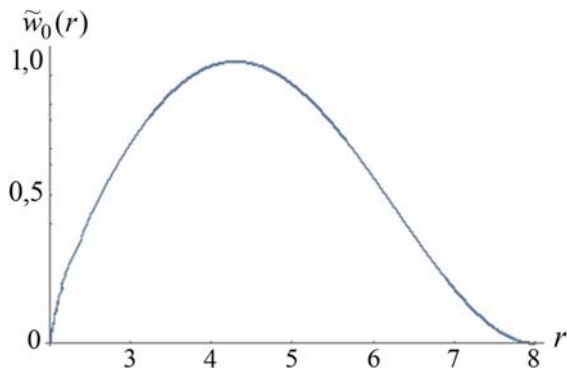


Рис. 3. Форма волновых изгибных перемещений в низшей бегущей волне для кольцевой пластины с шарнирным опиранием внутреннего и закреплением внешнего граничных контуров при  $t = 0$ ,  $a_* = 1$ ,  $k_m = 1.55$ ,  $\omega = 0.51$ .

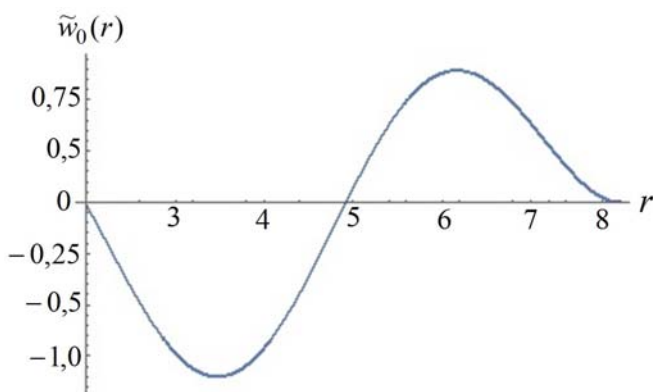


Рис. 4. Форма волновых изгибных перемещений в низшей бегущей волне для кольцевой пластины с шарнирным опиранием внутреннего и закреплением внешнего граничных контуров при  $t = 0$ ,  $a_* = 1$ ,  $k_m = 2.25$ ,  $\omega = 1.73$ .

**Выводы.** В результате проведенных исследований в рамках прикладной теории динамического изгибного деформирования, базирующейся на гипотезах прямых нормалей, получены трансцендентные дисперсионные уравнения, описывающие спектры бегущих и краевых стоячих волн чистого изгиба вдоль углового окружного координатного направления в тонких изотропных кольцевых пластинах при различных сочетаниях условий жесткого закрепления либо шарнирного опирания на внутреннем и внешнем краях. Построенные дисперсионные уравнения имеют форму равенств нулю функциональных определителя

четвертого порядка из элементов в виде комбинаций разнотипных цилиндрических функций с содержащими искомыми волновые числа индексными параметрами. Реализованы отдельные исследования анализируемых волновых процессов, касающиеся расчетов фрагментов дисперсионных спектров, а также форм исследуемых волновых движений. Дана характеристика отдельных эффектов, свойственных рассматриваемому типу волновых движений.

1. *Бреховских Л.М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы / Л.М. Бреховских // Акуст. журн. –1960. –Т. 13, № 4. – С. 541 – 554.
2. *Голубева Е.В.* О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре / Е.В. Голубева // Акуст. журн. –1986. – Т. 22, № 3. – С. 385 –386.
3. *Rostafinski W.* Analysys of propagation of waves of acoustic frequensis in curved ducts / W. Rostafinski // J. Acoust. Soc. Amer. – 1975. – V. 56. – P. 11 – 15.
4. *Vboulis G.* Curcumferental waves around cylindrical inhomogeneties in plane viscoelastic solid systems / G. Vboulis, S.A. Paipetis, P.S. Theocariss // J. Sound Vibrat. –1974. – V. 35, № 4. – P. 521 – 533.
5. *Дьелесан Э.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
6. *Гринченко В.Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
7. *Тютекин В.В.* Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны. / В.В. Тютекин // Акуст. журн. –2003. – Т. 49, № 6. – С. 843 –851.
8. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. / Д.С. Кузнецов – М.: Высшая школа, 1965. – 272 с.

**L.V. Dubyago, V.I. Storozhev**

**Dispersion spectrum of elastic bending waves along the angular circumferential direction in a thin isotropic ring plate with rigidly fixed or hingedly supported edges.**

A transcendental dispersion equation that describes the spectrum of traveling and edge standing bending waves propagating along the angular circumferential coordinate direction in a thin isotropic plate in the form of a concentric ring under various combinations of conditions of rigid attachment or hinge support at the inner and outer edges is obtained. The relations of the applied theory of dynamic bending deformation, based on the hypotheses of direct normals are used. The constructed dispersion equations have the form of equality to zero of the fourth-order functional determinant from elements in the form of combinations of cylindrical functions of different types with index parameters containing the desired wave numbers. Examples of the numerical study of the obtained equations, as well as the calculation of the forms of the studied wave motions are presented.

**Keywords:** *thin isotropic plates, concentric annular shape, fixed edges, hingedly supported edges, applied model of bending, flexural elastic waves, circumferential direction of propagation, transcendental dispersion equation, numerical study, wave spectra, wave motion shapes.*

## ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК 550.834:622.12

©2019. А.А. Глухов

### 2.5D МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД

В настоящей статье предложен адаптированный для задач шахтной сейсморазведки алгоритм моделирования процесса распространения сейсмических колебаний в массиве горных пород. На конкретных примерах показано, что предлагаемый способ моделирования адекватно передает физику процесса и структуру волнового поля и может в полной мере быть использован как инструмент для исследований процесса распространения колебаний в среде, параметры которой не изменяются вдоль заданного направления.

*Ключевые слова:* шахтная сейсморазведка, сейсмически волны, 2.5D математическое моделирование.

**Введение.** Внезапные встречи горными работами геологических нарушений вызывают не только экономические потери, но и критические ситуации, угрожающие здоровью и жизни людей. Для решения данной проблемы на стадии эксплуатации месторождений полезных ископаемых широко применяются оперативные геофизические, в первую очередь, сейсмоакустические исследования, позволяющие осуществлять прогноз строения и состояния массива горных пород из одиночной горной выработки и очистного забоя на участках, где еще не ведутся горные работы.

Практически не решенной проблемой метода является его ограниченная применимость в условиях полевых выработок, когда эффект каналирования колебательной энергии угольным пластом не проявляется.

При математическом моделировании сейсмических полей в задачах шахтной пластовой сейсморазведки широко используются явные конечно-разностные схемы второго порядка, в основе которых лежит двумерная модель среды [1]. Плоскость моделирования располагается перпендикулярно напластованию горных пород. Такое расположение может быть обосновано соответствующей симметрией задачи.

Альтернативное решение возможно при использовании трехмерной модели среды, параметры которой не изменяются вдоль некоторого направления [2-4].

В настоящей статье предложен адаптированный для задач шахтной сейсморазведки алгоритм моделирования процесса распространения сейсмических ко-

лебаний в массиве горных пород. На конкретных примерах показано, что предлагаемый способ моделирования адекватно передает физику процесса и структуру волнового поля и может в полной мере быть использован как инструмент для исследований процесса распространения колебаний в среде, параметры которой не изменяются вдоль заданного направления.

**1. Описание математической модели.** Моделирование процесса распространения сейсмических колебаний базируется на использовании классической системы уравнений в виде

$$\begin{cases} \ddot{u} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \ddot{v} = a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + c \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \ddot{w} = a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + b \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

где  $u, v, w$  – компоненты смещений волнового поля вдоль направлений  $x, y$  и  $z$ , соответственно,  $a = V_p^2$ ,  $c = V_s^2$ ,  $b = a - c$ ,  $V_s$  и  $V_p$  – скорости распространения волн сдвига и сжатия, соответственно. Для описания затухания в среде предполагается, что компоненты вектора перемещений можно представить в следующем виде:

$$u = ue^{-\alpha_x t}, \quad v = ve^{-\alpha_y t}, \quad w = we^{-\alpha_z t}, \quad (2)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициенты затухания соответствующих компонент смещения во времени. При расчетах можно считать их одинаковыми и равными  $\alpha$ .

Пусть геометрия и характеристики пород не изменяются вдоль оси  $y$ . К уравнениям системы применяется преобразование Фурье по схеме

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-iky} dy = U, \\ \frac{\hat{\partial} u}{\partial y} &= ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-iky} dy = ikU, \\ \frac{\hat{\partial}^2 u}{\partial y^2} &= -k^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-iky} dy = -k^2 U, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k$  – волновое число вдоль направления  $y$ . В результате преобразований вещественная часть получаемой системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{U} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} + c \left( -k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ \ddot{V} = -k^2 a V + c \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ \ddot{W} = a \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + b \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + c \left( -k^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \end{cases} \quad (4)$$

Для решения системы в конечно-разностном виде используем следующую схему. Пусть  $m$  и  $n$  – номера ячейки по осям  $x$  и  $z$ , соответственно,  $p$  – номер шага по времени. Тогда, уравнения системы (4) можно представить как

$$\begin{aligned}
 U_{m,n}^{p+1} &= G_{m,n}U_{m,n}^p - \beta U_{m,n}^{p-1} + A_{m,n} \left( U_{m+1,n}^p + U_{m-1,n}^p \right) + \\
 &\quad + C_{m,n} \left( U_{m,n+1}^p + U_{m,n-1}^p \right) + \\
 &\quad + B_{m,n} \left( W_{m+1,n+1}^p + W_{m-1,n-1}^p - W_{m+1,n-1}^p - W_{m-1,n+1}^p \right), \\
 W_{m,n}^{p+1} &= G_{m,n}W_{m,n}^p - \beta W_{m,n}^{p-1} + A_{m,n} \left( W_{m,n+1}^p + W_{m,n-1}^p \right) + \\
 &\quad + C_{m,n} \left( W_{m+1,n}^p + W_{m-1,n}^p \right) + \\
 &\quad + B_{m,n} \left( U_{m+1,n+1}^p + U_{m-1,n-1}^p - U_{m+1,n-1}^p - U_{m-1,n+1}^p \right),
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$V_{m,n}^{p+1} = F_{m,n}V_{m,n}^p - \beta V_{m,n}^{p-1} + C_{m,n} \left( V_{m,n+1}^p + V_{m,n-1}^p + V_{m+1,n}^p + V_{m-1,n}^p \right),$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{m,n} &= a_{m,n} \frac{\tau^2}{h^2}, \quad C_{m,n} = c_{m,n} \frac{\tau^2}{h^2}, \quad B_{m,n} = \frac{1}{4} b_{m,n} \frac{\tau^2}{h^2}, \\
 D_{m,n} &= c_{m,n} k^2 \tau^2, \quad E_{m,n} = a_{m,n} k^2 \tau^2, \\
 F_{m,n} &= 2(1 - 2C_{m,n}) - E_{m,n} + \alpha\tau - (\alpha\tau)^2, \\
 G_{m,n} &= 2(1 - A_{m,n} - C_{m,n} - D_{m,n}) + \alpha\tau - (\alpha\tau)^2, \\
 \beta &= 1 + \alpha\tau.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Система соотношений (5) и (6) при  $k = 0$  представляет собой решение двухмерной задачи в плоскости  $y = 0$ .

Для последовательных шагов по времени по соотношениям (5) вычисляются  $U_{m,n}^{p+1}$ ,  $W_{m,n}^{p+1}$ ,  $V_{m,n}^{p+1}$  для набора  $k_j = j\Delta k$ . Искомое решение трехмерной задачи при  $y = 0$  получается по схеме

$$\begin{aligned}
 u(x, 0, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk U(x, k, z, t) e^{ik \cdot 0} \approx \\
 &\approx \frac{\Delta k}{\pi} \sum_{j=0}^j U(x, k_j, z, t),
 \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку  $U(x, k, z, t)$  это чётная функция  $k$ , поле  $u(x, 0, z, t)$  можно получить, суммируя вклады для всех положительных  $k_j$ .

Легко заметить, что соотношения для вычисления  $V_{m,n}^{p+1}$  и для вычисления  $U_{m,n}^{p+1}$  и  $W_{m,n}^{p+1}$  не зависят друг от друга. В задаче, для которой геометрия и характеристики пород не изменяются вдоль оси  $y$  расчет процесса распространения SH колебаний может производиться отдельно от полей колебаний P и SV.

Шаг дискретизации  $\Delta k$  для волнового числа  $k$  определяется из свойства дискретного преобразования Фурье как  $\Delta k = \pi / (y_{max} - y_{min})$ , где  $[y_{min}, y_{max}]$  – интервал в боковом направлении, который был бы охвачен в 3D моделировании, а число шагов (по условию Найквиста) теоретически ограничивается предельным значением  $k_{max} \leq \pi/h$ . В работе [2] показано, что можно использовать несколько меньшее значение, а именно  $k_{max} \leq \frac{4}{\sqrt{3}h}$ .

Кроме того, значение  $\Delta k$  должно быть таким, чтобы на трассах не появились сигналы, сгенерированные «зеркальными» источниками, которые находятся на расстояниях  $y_m = \frac{2\pi m}{\Delta k}$ , где  $m$  – целое число  $m \neq 0$  вдоль оси  $y$ . Ближайшие источники находятся на расстоянии  $y_1 = \frac{2\pi}{\Delta k} = 2(y_{max} - y_{min})$  слева и справа по оси  $y$ . Исходя из этого должно выполняться условие  $\frac{y_1}{V} > t_{max}$ , где  $t_{max}$  – максимальное время на трассе.

**2. Результаты численных экспериментов.** При выполнении расчетов использовался набор моделей, которые служат для анализа информативности различных типов волн и разработки методики обработки данных при проведении сейсмических экспериментов из полевой выработки методом отраженных волн. Горная выработка с системой наблюдений лежит в плоскости  $y = 0$ . В качестве вмещающей породы выбран алевролит со скоростями распространения продольных и поперечных волн  $V_p = 3500$  и  $V_s = 2400$ , соответственно. Сместитель нарушения моделировался как среда, в которой данные значения уменьшены на 30%.

Нарушение находится на расстоянии от 50, до 100 м от источника колебаний. Сейсмоприемники (СП) расположены с шагом 10 м вдоль выработки (всего 24). Пункт возбуждения (ПВ) сейсмических колебаний расположен на СП №1. Угол наклона сместителя варьировался от  $0^\circ$  до  $70^\circ$  относительно расположения выработки.

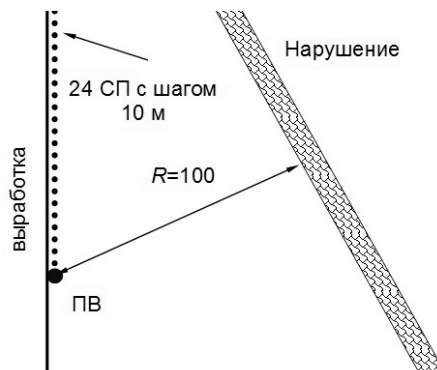


Рис. 1. Базовая модель для анализа особенностей проведения экспериментов по методу отраженных волн.

На последующем наборе рисунков представлены картины отражения волнового поля от тектонического нарушения. Наиболее просто такая картина выглядит для SH волн. Волна как преломляется в среду за нарушением, так и отра-

жается от него. На рис. 2 данный процесс проявляется со всей наглядностью. Можно заметить, что колебания отраженной волны, как и следует из теории, происходят в обратной фазе.

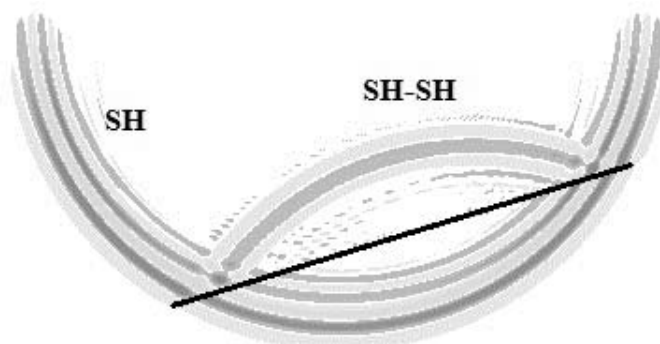


Рис. 2. Процесс прохождения SH волн через тектоническое нарушение.

На рис. 3 и рис. 4 (представляющих поля колебаний P и SV волн в моменты времени 60мс и 75мс) четко различимы несколько типов волн. Две волны имеют фронты в виде концентрических окружностей. Это классические волны сжатия P и сдвига SV, распространяющиеся со скоростями  $V_p$  и  $V_s$  волн, соответственно. До нарушения они распространяются не взаимодействуя.

На границах раздела сред волны преломляются и отражаются испытывая трансформации. Например, P волна, распространяясь вдоль выработки порождает в каждой точке вторичную SV волну, фронт которой прямолинеен. Его участок выделен на рис.3 тонкой линией и подписан как P - SV. Данный способ обозначения применяется и далее. Линией выделяется участок фронта упоминаемой волны. В подписи первой обозначается исходная волна, второй – волна, получившаяся в результате трансформации.

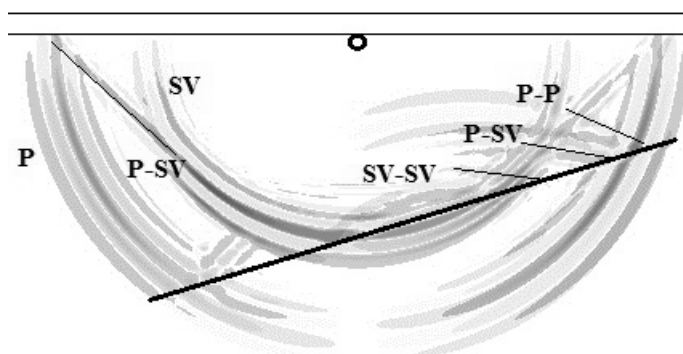


Рис. 3. Процесс отражения P и SV волн от тектонического нарушения. Момент времени 60мс.

К примеру, на рис. 3 описан процесс отражения P и SV волн от тектониче-

ского нарушения. Момент времени - 60мс. Отмечены следующие типы волн:

1. SV волна, полученная SV волной при отражении от нарушения. Она помечена как SV-SV;
2. P волна, полученная P волной при отражении от нарушения (P – P);
3. SV волна, полученная P волной в результате трансформации при отражении от нарушения (P – SV);

На рис. 4 показан процесс прохождения P и SV волн через тектоническое нарушение в момент времени 75мс. Представлены волны, преломленные в среде за нарушением:

1. SV волна, полученная в результате преломления SV волны. Она помечена как SV-SV;
2. P волна, образованная преломлением P волны (P – P);
3. SV волна, полученная в результате преломления и трансформации P волны (P – SV);
4. P волна, полученная в результате преломления и трансформации SV волны (SV – P);

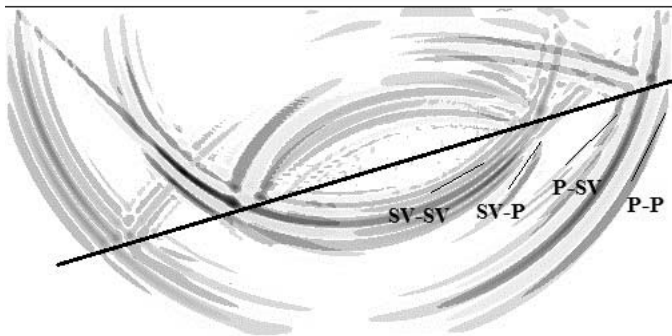


Рис. 4. Процесс прохождения P и SV волн через тектоническое нарушение. Момент времени 75мс.

В целом можно отметить, что предлагаемый способ моделирования адекватно передает физику процесса и может в полной мере быть использован как инструмент для исследований процесса распространения колебаний в среде, параметры которой не изменяются вдоль заданного направления.

Представляет отдельный интерес вопрос о том, какой вклад в суммарный результат вносят решения соотношений (5) для различных значений  $k$ . Его можно



оценить как модули максимальных величин  $V_{m,n}^{p+1}$ ,  $U_{m,n}^{p+1}$  и  $W_{m,n}^{p+1}$ . Расчеты, проведенные для данной модели, показывают, что распределение вклада для всех компонент смещений подобно в среднем может быть проиллюстрировано кривой, изображенной на рис. 5. Согласно расчету, вклад половины диапазона  $k$  находится в зоне погрешности реальных практических измерений.

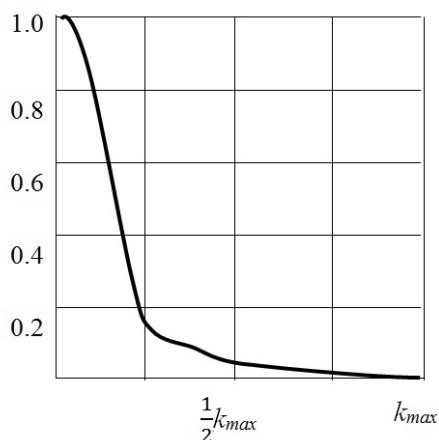


Рис. 5. Вклад различных значений  $k$  в суммарный результат решения соотношений (5).

Исследования проведены в рамках НИР «Разработка теории и методических основ сейсмического прогноза структуры углепородного массива из полевых выработок», выполняемой по заказу Министерства образования и науки ДНР.

**Заключение.** Таким образом, применение 2.5D подхода позволяет адекватно моделировать структуру волновых полей, используемых в шахтной сейсморазведке для прогноза геологических нарушений. Это важный в методическом плане результат, поскольку использование точных методов математического моделирования может быть использовано для разработки прогнозных методик.

1. Анциферов А.В. Математическое моделирование в шахтной сейсморазведке / А.В. Анциферов, А.А. Глухов. – Киев: Наук. думка, 2012. – 255 с.
2. Novias A. 2.5D finite-difference solution of the acoustic wave equation / A. Novias, J. Santos // Geophysical Prospecting. – 2005. – № 53. – P. 523–531.
3. Liner C.L. Some analytic aspects of a 2.5-D wave equation / C.L. Liner // Geophysics. – 1995. – № 60. – P. 1536–1540.
4. Bleistein N. Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation / N. Bleistein // Geophys. Prosp. – 1986. – № 34. – P. 686–703.

**A.A. Glukhov**

### 2.5D Simulation of seismic waves in a rock mass.

The algorithm for modeling of seismic waves propagation process in a rock mass adapted for mine seismic exploration is proposed. It is shown that the proposed method of modeling adequately conveys the physics of the process and wave field structure. It can be used as a tool for studying the

А.А. Глухов

process of propagation of vibrations in a medium whose parameters do not change along a given direction.

**Keywords:** *mine seismic, seismic waves, 2.5D mathematical modeling.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк  
*Glukhov1964@yandex.ru*

*Получено 17.10.2019*

УДК 622.831, 622.23.02

©2019. Ф.М. Голубев

## МЕТОДИКА ПРОГНОЗА ОСЕДАНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЗАТОПЛЕНИИ ОЧИСТНЫХ ВЫРАБОТОК ЛИКВИДИРУЕМЫХ УГОЛЬНЫХ ШАХТ

В настоящей статье описан механизм деформационных процессов, происходящих в горном массиве при его намокании с применением экспериментальных и лабораторных исследований. Установлены недостатки существующей методики и предложены решения по их устранению. Описан инновационный подход к моделированию геомеханических процессов, связанных с ликвидацией угледобывающих предприятий. На основании МКЭ моделей выведены зависимости величины оседаний от высоты подъема шахтных вод над лавой и глубины затопляемых горных выработок. Приведена общая формула расчета оседаний земной поверхности.

**Ключевые слова:** *сдвигения земной поверхности, затопление горных выработок, ликвидация шахт, МКЭ модели.*

**Введение** Активизация геомеханических процессов может происходить не только при подработке земной поверхности, но и при ликвидации угольных предприятий, в результате затопления массива. Существующие способы прогнозирования деформаций, вызванных активизацией геомеханических процессов при затоплении ликвидируемых шахт, требуют уточнения, так как они не учитывают влияние ряда факторов, которые могут серьёзно сказаться на точности прогноза деформаций земной поверхности при затоплении ликвидируемых горных выработок.

Существующие методики прогноза деформаций земной поверхности, вызванных активизацией геомеханических процессов, которые описаны в источниках [1, 2] обладают целым рядом недостатков. Как показывают расчёты, значения деформаций, полученные по таким методикам, могут различаться в несколько раз. Кроме того, методика [1] имеет собственные ограничения по глубине. Фактическая мощность пласта при этом в соответствии с [1] заменяется на остаточную мощность, которая вычисляется по формуле:

$$m_0 = K_1 \times K_2 \times K_3 \times K_4 \times K_5 \times m_{\text{в}}, \quad (1)$$

где  $K_1$  – коэффициент зависящий от степени метаморфизма углей (угли марки А –  $K_1 = 1,0$ ; угли марок ТС, Т, ОС, КС, КЖ, К, Ж –  $K_1 = 0,8$ ; угли марок ГЖС, ГЖ, Г, ДГ, д –  $K_1 = 0,6$ );

$K_2$  – коэффициент, зависящий от последующих подработок горной выработки нижележащими пластами ( $K_2 = 1,0$  если выработка не была подработана;  $K_2 = 0,8$  если выработка подработана одним пластом;  $K_2 = 0,5$  если выработка была подработана 2-мя и более пластами);

$K_3$  – коэффициент, зависящий от наличия пустот и зон разуплотнений (принимается по результатам дополнительных исследований);

$K_4$  – коэффициент зависящий от обводнённой горных пород ( $K_4 = 0,5$  если горные выработки затоплены, и  $K_4 = 1,0$  если горные выработки не затоплены);

$K_5$  – коэффициент зависящий от глубины горных работ ( $K_5 = 1,0$  если  $H < 100$  м,  $K_5 = 0,5$  при  $H$  в пределах 101-200 м,  $K_5 = 0,3$  при  $H$  в пределах 201-300 м,  $K_5 = 0,1$  при  $H$  в пределах 300-500 м, если  $H > 500$  м,  $K_5 = 0$ );

$m_{\text{в}}$  – вынутая мощность пласта, м.

Для расчёта деформаций необходимо полученное значение  $m_0$  подставить в формулу расчёта оседаний, указанную в «Правилах подработки» [5], вместо  $m_{\text{в}}$

Несовершенство существующей методики, в частности коэффициента  $K_5$ , не позволяет учитывать в полной мере влияние затопления горных выработок на всех пластах на поверхность. Ярким подтверждением того, что затопление выработок, расположенных на глубинах более 500 метров может вызывать деформации земной поверхности, являются наблюдения Е.И. Питаленко, результаты которых представлены на рисунке 1. Стоит отметить, что на момент наблюдений на шахте «Кочегарка» были затоплены исключительно выработки, расположенные ниже глубины 800 метров, а водоотлив велся на шахте им. В.И. Ленина.



Рис. 1. – Визуализация результатов измерений на наблюдательной станции по ул. Первомайская, г. Горловка ш. "Кочегарка".

Кроме того, жесткое ограничение глубин для каждого коэффициента, ведет к образованию в прогнозных величинах деформаций необъяснимых скачков (рис. 2).

Аналогичным недостатком обладает и методика вычисления продолжительности процесса сдвижения описанная в [1].

Очевидна необходимость разработки новой методики, учитывающей указанные недостатки, и позволяющей прогнозировать критические деформации при ликвидации угледобывающих предприятий. Для разработки такой методики была создана конечно-элементная модель отработки горного массива. Для корректировки МКЭ модели на основании исследований [3] моделировался образец горной породы размерами 50x50x50 мм, для которого рассчитывались следующие механические характеристики.



Рис. 2. – Визуализация графика изменения коэффициента  $K_5$  с увеличением глубины согласно действующему нормативному документу.

Модуль сдвига:

$$G = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3}}, \text{ МПа.} \quad (2)$$

Модуль Юнга:

$$E = \frac{9K \cdot G}{3K + G}, \quad (3)$$

Коэффициент поперечной деформации:

$$\nu = \frac{3R - 2G}{6K + 2G}, \quad (4)$$

Соответствующий образец моделировался в программном комплексе Ansys и калибровался по результатам натуральных экспериментов описанных в [4].

На основании откалиброванного образца создавалась конечно-элементная модель подработки со следующими параметрами: максимальная глубина отработки лав 850 м; длина 1 погашенной очистной выработки 200 м; максимальное количество лав на пласте - 11; Размеры модели: ширина 4000 метров, глубина 1100.

В модель закладывались следующие физико-механические свойства: модуль Юнга (МПа); коэффициент Пуассона; плотность(кг/м<sup>3</sup>); удельное сцепление; угол внутреннего трения (град). Форма элемента тетраэдр. Модель ортотропная. Учитываются глубина отработки, мощность угольных пластов и наносов. Прочностные характеристики горных пород описываемых в экспериментальной модели указаны в таблице 1.

Чтобы модель работала адекватно необходимо провести ее калибровку по фактическим или расчетным параметрам. Критерием калибровки были выбраны рассчитанные по [2] оседания земной поверхности при подработке. Откалиброванная модель представлена на рисунке 3.

Таблица 1. Характеристика моделируемой породной толщи

№	Наименование пород	Крепость по шкале проф. Протождяконова, f
1	Наносы	1
2	Глинистый сланец	4
3	Песчаный сланец	6
4	Песчаник	8
5	Песчаный сланец	6
6	Угольный пласт	1,5
7	Глинистый сланец	4
8	Песчаник	8
9	Песчаный сланец	6
10	Известняк	10
11	Угольный пласт	1,5
12	Глинистый сланец	4
13	Песчаник	8
14	Песчаный сланец	6
15	Песчаник	8
16	Глинистый сланец	4
17	Известняк	10
18	Песчаный сланец	6
19	Угольный пласт	1,5
20	Глинистый сланец	4
21	Песчаник	8
контактная поверхность		
22	Песчаник	8
23	Известняк	10
24	Песчаный сланец	6
25	Песчаник	8
26	Угольный пласт	1,5
27	Песчаник	8
контактная поверхность		
28	Песчаник	8
29	Угольный пласт	1,5
30	Песчаный сланец	6
31	Угольный пласт	1,5
32	Глинистый сланец	4
33	Песчаный сланец	6
34	Песчаник	8
35	Глинистый сланец	4
36	Песчаный сланец	6
37	Песчаник	8
38	Глинистый сланец	4
39	Песчаный сланец	6

При калибровке была получена сходимость графиков оседаний с максимальной погрешностью 3-5 %, это позволяет утверждать, что модель работает адекватно, как в отношении новых, так и в отношении погашенных лав.

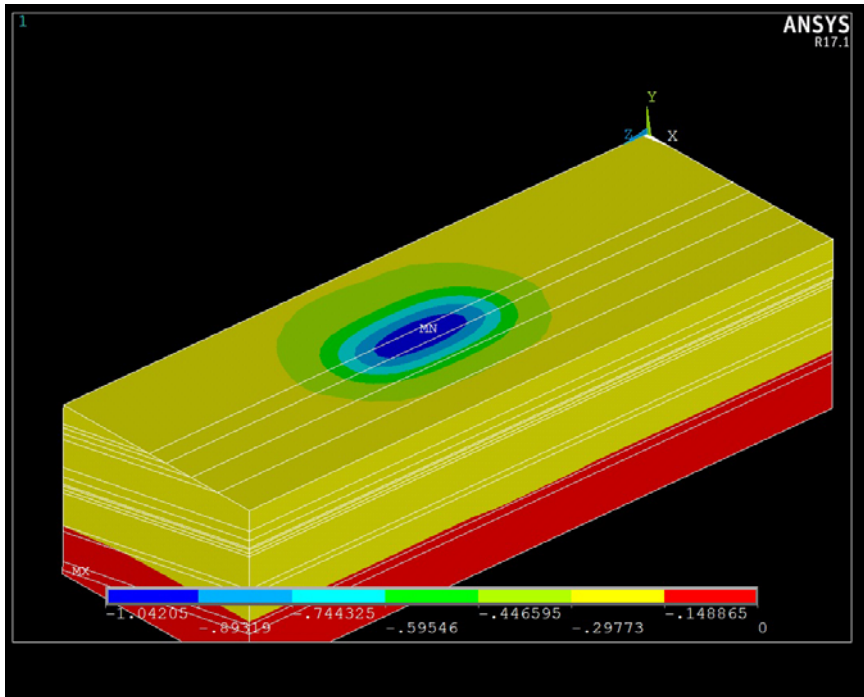


Рис. 3. – Результаты расчета оседаний на конечно-элементной модели.

Моделировался ряд случаев затопления угольного массива на 50 метров над лавой при различном количестве лав на пласте (от 1 до 11 лав). А также моделировался подъем воды на высоту распространения зон водопродящих трещин (ЗВТ), которые по различным исследованиям, в зависимости от ряда горно-геологических и горно-технических факторов могут варьироваться от нескольких десятков до сотен метров над лавой [5]. Для моделирования затопления использовались закономерности изменения физико-механических свойств горных пород при увлажнении описанные в [3, 6]. Характер изменения свойств песчаника отражают следующие зависимости:

$$E_{песч}^{увлажн} = \frac{E_{песч}^{сух}}{1,5} \quad (5)$$

$$\mu_{песч}^{увлажн} = \mu_{песч}^{сух} \times 1,2 \quad (6)$$

где:  $E_{песч}^{увлажн}$  – модуль упругости увлажненного песчаника;  $E_{песч}^{сух}$  – модуль упругости сухого песчаника;  $\mu_{песч}^{увлажн}$  – коэффициент Пуассона увлажненного песчаника;  $\mu_{песч}^{сух}$  – коэффициент Пуассона сухого песчаника.

По результатам моделирования выявлено соответствие характера оседаний, вызванных затоплением горного массива, характеру оседаний при подработке. При этом величина оседаний вызванных затоплением горного массива не превышает 20 % от оседаний вызванных подработкой. В результате исследований были выведены зависимости оседаний, вызванных активизацией геомеханических

процессов, от высоты подъема подземных вод при затоплении ликвидируемых горнодобывающих предприятий, и от глубины расположения затапливаемого выработанного пространства (рисунок 4 а,б).

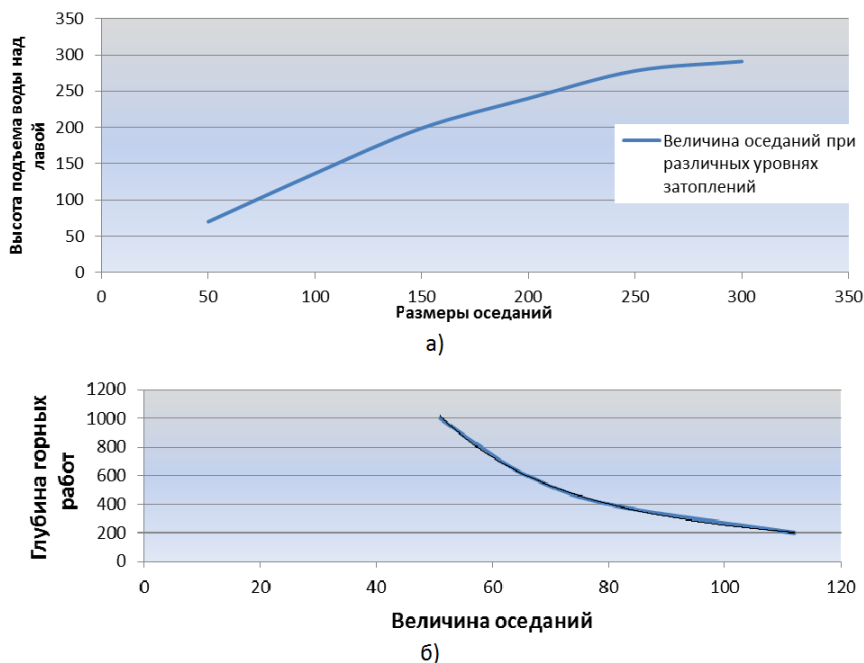


Рис. 4. – Зависимости оседаний от: а) высоты подъема воды при полной подработке земной поверхности; б) глубины выработанного пространства.

Анализ таких зависимостей, позволил определить новые закономерности развития максимальных оседаний, вызванных затоплением горных выработок. Из зависимостей видно что, активизация оседаний, вызванных полной подработкой, при подъеме воды в массиве над лавой носит нелинейный, затухающий характер.

На основании приведенных зависимостей можно вывести общую формулу расчета максимальных оседаний, вызванных активизацией геомеханических процессов при затоплении ликвидируемых шахт.

$$\eta_m = (-0.0012l_{zem}^2 + 0.7l_{zem} + 0.97) \times \lg(H) - (-0.005l_{zem}^2 + 2.79l_{zem} + 22.2) \times m \times CoSa \quad (7)$$

где:  $l_{zem}$  – высота распространения крупных водопрводящих трещин, которые образуются в результате деформации горного массива при его подработке;  
 $H$  – глубина отработки затапливаемых очистных выработок;  
 $m$  – вынимаемая мощность пласта;  
 $\alpha$  – угол падения пласта.



**Выводы.** Полученная в результате проведенной работы формула позволяет осуществлять расчет максимальных оседаний с учетом таких факторов как высота зоны водопроводящих трещин, тип горных пород залегающих в кровле пласта, глубина отработки ликвидируемых горных выработок, угол падения, мощность пласта. Полученные результаты позволяют получать более объективные показатели вертикальных деформаций и учитывать влияние глубоких горных выработок.

1. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004 - 98: Утв. Министерством угольной промышленности Украины 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.
2. ГСТУ 101.00159226.001-2003 Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом / Введ. 01.01.04. – К.: Мінпаливенерго України, 2004. – 127 с.
3. Алексеев А.Д. Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений / А.Д. Алексеев, В.Н. Ревва, Н.А. Рязанцев; под общ. ред. В.М. Чиркова. – К.:Наук. думка, 1989. – 168 с.
4. Геомеханические, гидрогеологические и геологические процессы в горных массивах при консервации горнодобывающих предприятий / Отчет о научно-исследовательской работе / РАНИМИ. – Донецк, 2016.– 445 с.
5. Мохов А.В. Морфология зон водопроводящих трещин сдвижения на участках подземных разработок каменноугольных залежей / А.В. Мохов – М., "Неделя горняка-2007". – С. 273 – 280.
6. Иконников М.Ю. Математическое моделирование в задачах оценки эффективности и безопасности горных работ / М.Ю. Иконников, Ю.Р. Иконников, Е.А. Слащева, И.Н. Слащев, А.А. Яланский. – М-во образования и науки Украины, Нац. горн. ун-т. – Днепропетровск: НГУ, 2015. – 215 с.

**P.M. Golubev**

### **Method for Predicting Ground Subsidence in Case of Flooding with Water Production Workings in Abandoned Coal Mines.**

This article describes the mechanism of deformation processes that occur in the ground being getting wet using experimental and laboratory studies. The disadvantages of the existing methods are identified and solutions for their elimination are proposed. An innovative approach for simulation of geomechanical processes associated with abandonment of coal producers is described. Based on the FEM models, the dependences of the amount of subsidence on the height of mine water rise above longwall face and the depth of the flooded mine workings are derived. The general formula for calculating ground subsidence is given.

**Keywords:** *ground movement, flooding mine workings with water, mine abandonment, FEM models..*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк [ranimi@ranimi.org](mailto:ranimi@ranimi.org)

Получено 06.11.2019