

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 2 (71)**

**2020**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** В.И. Сторожев

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** С.А. Калоеров

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** Пачева М.Н.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*Анциферов А.В.*

**Белоусов В.В.**

*Болнокин В.Е.*

*Болонов Н.И.*

*Ватulyян А.О.*

*Вовк Л.П.*

*Глазунов В.А.*

*Глухов А.А.*

*Гольцев А.С.*

*Горр Г.В.*

*Губанов В.В.*

*Дрибан В.А.*

*Ковалев А.М.*

*Коносевиц Б.И.*

*Левин В.М.*

*Муцанов В.Ф.*

**Недопекин Ф.В.**

*Петраков А.А.*

*Судаков С.Н.*

*Улитин Г.М.*

*Шалдырван В.А.*

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Тел. 302 92 71  
E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 2 (71) / 2020

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### Механика твердого тела

*Мазнев А.В., Горбунова Ю.С.* О регулярных прецессиях гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил..... 3

### Механика деформируемого твердого тела

*Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.* Анализ термоупругого состояния изотропных пластин с теплоизолированным разрезом на базе обобщенной теории..... 15

*Глушанков Е.С.* Действие линейного потока тепла в бесконечной многосвязной полосе из пьезоматериала ..... 26

### Строительная механика

*Муцанов В.Ф., Цепляев М.Н., Зубенко А.В.* Конечно-элементное моделирование элементов вертикальных цилиндрических резервуаров..... 37

*Муцанов В.Ф., Оржеховский А.Н., Цепляев М.Н.* Особенности реализации метода конечных элементов в геометрически нелинейной постановке..... 49

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

*Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Нечетко-множественное моделирование эффектов неопределенности для скоростей нормальных волн деформаций в прямоугольном монокристаллическом волноводе кубической системы с мембранными покрытиями граней..... 56

### Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

*Канин В.А.* Изменение несущей способности элементов бетонной крепи под влиянием шахтных вод различной агрессивности ..... 68



## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39

©2020. А.В. Мазнев, Ю.С. Горбунова

## О РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЯХ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

В статье рассматривается задача о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Исследованы условия существования регулярных прецессий относительно оси симметрии силовых полей. Найдено множество осей, образующих постоянный угол с вертикалью в главной системе координат.

**Ключевые слова:** гириостат, потенциальные и гироскопические силы, регулярные прецессии.

**Введение.** Разработка методов исследования прецессионных движений тела связана с тем, что прецессии твердых тел находят широкое применение в прикладных задачах динамики твердого тела [1-6]. В динамике тяжелого твердого тела наряду с регулярной прецессией гироскопа Лагранжа имеет место и прецессия Гриоли [7]. Прецессионные движения общего вида в задаче о движении тяжелого гиростата рассмотрены Г.В. Горром [8]. Обзор результатов, полученных в исследовании прецессий в динамике твердого тела и в динамике связанных твердых тел, приведен в [9]. В последние годы анализ условий существования прецессий различных классов проводится в задаче о движении гиростата с переменным гириостатическим моментом [10-12]. Общий метод исследования инвариантных соотношений уравнений движения гириостата с переменным гириостатическим моментом разработан в [13].

Основные результаты по интегрированию уравнений движения гириостата с постоянным и переменным гириостатическим моментом установлены в прецессионной системе координат – подвижной системе, одна из осей которой образует постоянный угол с вектором, фиксированным в неподвижном пространстве [9,13,14]. Такой подход позволяет в случае регулярных прецессий получить наглядное представление о движении гириостата в неподвижном пространстве, так как одна из осей в подвижной системе координат образует постоянный угол с неподвижной в пространстве осью. Однако установить геометрическое место этой оси в главной системе координат затруднительно. Кроме этого, как отмечено в работе [15], представляет большой интерес исследование движений главных осей эллипсоида инерции гириостата в неподвижном пространстве. В связи с этим в данной работе изучены условия существования регулярных прецессий гири-

стата в случае, когда подвижная система координат является главной системой координат.

Условия существования прецессионных движений найдены в виде алгебраических уравнений на параметры задачи. Проведено полное исследование данной системы и установлено геометрическое место осей, образующих постоянный угол с вертикалью.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями [14,16,17]

$$A\dot{\bar{\omega}} = (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \times \bar{\omega} + \bar{\omega} \times B\bar{\nu} + \bar{\nu} \times (C\bar{\nu} - \bar{s}), \quad (1)$$

$$\dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu} \times \bar{\omega}, \quad (2)$$

где введены обозначения:  $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости тела-носителя;  $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор оси симметрии силовых полей;  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – гиростатический момент;  $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор обобщенного центра масс;  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции гиростата;  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$  – матрица, характеризующая гироскопические силы;  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  – матрица, характеризующая потенциальные силы; точка над переменными  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\nu}$  обозначает дифференцирование по времени.

Уравнения (1),(2) имеют первые интегралы

$$\bar{\nu} \cdot \bar{\nu} = 1, \quad (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\nu} - \frac{1}{2}(B\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) = k, \quad (3)$$

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2(\bar{s} \cdot \bar{\nu}) + (C\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) = 2E, \quad (4)$$

где  $k$ ,  $E$  – произвольные постоянные.

Опишем инвариантные соотношения, которые характеризуют регулярные прецессии гиростата относительно вектора  $\bar{\nu}$ . Пусть  $\bar{a}$  – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем. Тогда для регулярных прецессий тела-носителя имеют место равенства

$$\bar{a} \cdot \bar{\nu} = a_0, \quad \bar{\omega} = n\bar{a} + m\bar{\nu}, \quad (5)$$

где  $a_0 = \cos\theta_0$  ( $\theta_0 = \angle(\bar{a}, \bar{\nu})$ ),  $n$  и  $m$  – постоянные. Их можно интерпретировать в прецессионной системе координат, как скорости собственного вращения и прецессии гиростата. К настоящему времени для уравнений (1),(2) изучены условия существования не только регулярных прецессий гиростата [9], но и другие классы прецессионных движений[14]

$$\bar{a} \cdot \bar{\nu} = a_0, \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{a} + \dot{\psi}\bar{\nu}. \quad (6)$$

Здесь  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$  – функции времени  $t$ . Отметим, что в силу (5),(6) прецессия гиростата – движение, для которого постоянен угол между двумя осями  $l_1$  и  $l_2$ ,

проходящими через неподвижную точку, из которых ось  $l_1$ , содержит вектор  $\bar{a}$ , ось  $l_2$  – неподвижна в пространстве.

Г.В. Горр показал [8], что задача исследования условий существования прецессий для уравнений (1),(2) с первыми интегралами (3),(4) сводится к нахождению решений уравнений

$$\dot{\bar{v}} = \dot{\varphi} (\bar{v} \times \bar{a}), \quad (7)$$

$$\dot{\varphi} (A\bar{a} \cdot \bar{v}) + \dot{\psi} (A\bar{v} \cdot \bar{v}) = k - (\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) + \frac{1}{2} (B\bar{v} \cdot \bar{v}), \quad (8)$$

$$\dot{\varphi}^2 (A\bar{a} \cdot \bar{a}) + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} (A\bar{a} \cdot \bar{v}) + \dot{\psi}^2 (A\bar{v} \cdot \bar{v}) = 2E + 2(\bar{s} \cdot \bar{v}) - (C\bar{v} \cdot \bar{v}), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} [A\bar{a} \cdot (\bar{v} \times \bar{a})] + \ddot{\psi} [A\bar{v} \cdot (\bar{v} \times \bar{a})] + \dot{\varphi}\dot{\psi} [a_0'^2 Sp(A) - 2(A\bar{v} \cdot \bar{v}) + 2a_0(A\bar{a} \cdot \bar{v})] - \\ & - \dot{\varphi}^2 [(A\bar{a} \cdot \bar{v}) - a_0(A\bar{a} \cdot \bar{a})] - \dot{\psi}^2 [a_0(A\bar{v} \cdot \bar{v}) - (A\bar{a} \cdot \bar{v})] - \\ & - \dot{\varphi} [(\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) - a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] - \dot{\psi} [a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) - (\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] + \dot{\varphi} [(B\bar{v} \cdot \bar{v}) - a_0(B\bar{a} \cdot \bar{v})] + \\ & + \dot{\psi} [a_0(B\bar{v} \cdot \bar{v}) - (B\bar{a} \cdot \bar{v})] + a_0(C\bar{v} \cdot \bar{v}) - (C\bar{a} \cdot \bar{v}) - a_0(\bar{s} \cdot \bar{v}) + (\bar{s} \cdot \bar{a}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (7)-(10) изучались в прецессионной системе координат:  $\bar{a} = (0, 0, 1)$ . Тогда из уравнения (7) в силу первого равенства системы (6) следует

$$\nu_1 = a_0' \sin \varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0. \quad (11)$$

Как показано в статье [15], для изучения движения главных осей координат необходимо выполнить преобразования переменных и параметров уравнений (1),(2), значения которых получены в прецессионной системе координат. В данной статье использован другой метод, который основан на получении решения уравнений (1),(2) для регулярных прецессий (5) в главной системе координат. Этот подход не требует сложных вычислительных операций и дает возможность получить результат в главной системе координат в переменных и параметрах, описанных после формул (1),(2).

**2. Исследование регулярных прецессий в главной системе координат.** Пусть  $Oxyz$  – главная система координат с единичными векторами  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ . С помощью параметров  $\mu_0, \sigma_0$  зададим положение вектора  $\bar{a}$  в этой системе

$$\bar{a} = a_1 \bar{i}_1 + a_2 \bar{i}_2 + a_3 \bar{i}_3, \quad (12)$$

где

$$a_1 = \sin \mu_0 \cos \sigma_0, \quad a_2 = \sin \mu_0 \sin \sigma_0, \quad a_3 = \cos \mu_0. \quad (13)$$

Отметим, что при  $\mu_0 = 0$  (вектор  $\bar{a}$  направлен по главной оси инерции) для исследования равенств (13) следует полагать  $\sigma_0 = 0$ .

При задании  $\bar{a}$  в виде (13) решение уравнения (7) таково

$$\begin{aligned} \nu_1 &= a_0 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 - a_0' \sin \sigma_0 \cos \varphi + a_0' \cos \sigma_0 \cos \mu_0 \sin \varphi, \\ \nu_2 &= a_0 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + a_0' \cos \sigma_0 \cos \varphi + a_0' \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin \varphi, \\ \nu_3 &= a_0 \cos \mu_0 - a_0' \sin \mu_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Функции  $\nu_1(\varphi)$ ,  $\nu_2(\varphi)$ ,  $\nu_3(\varphi)$  найдены с учетом первого равенства системы (6).

Для регулярных прецессий (5) выполняется условие:  $\varphi = nt + \varphi_0$ , где  $\varphi_0 = 0$ . Запишем уравнения (8)-(10) в случае (5)

$$\bar{\nu} \cdot (nA\bar{a} + \bar{\lambda}) + \bar{\nu} \cdot \left( mA\bar{\nu} - \frac{1}{2}B\bar{\nu} \right) = k, \quad (15)$$

$$2\bar{\nu} \cdot (nmA\bar{a} - \bar{s}) + \bar{\nu} \cdot (m^2A\bar{\nu} + C\bar{\nu}) = 2E - n^2(A\bar{a} \cdot \bar{a}), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & nm [a_0'^2 Sp(A) - 2(A\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) + 2a_0(A\bar{a} \cdot \bar{\nu})] - n^2[(A\bar{a} \cdot \bar{\nu}) - a_0(A\bar{a} \cdot \bar{a})] - \\ & - m^2[a_0(A\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - (A\bar{a} \cdot \bar{\nu})] - n[(\bar{\lambda} \cdot \bar{\nu}) - a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] - m[a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{\nu}) - (\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] + \\ & + n[(B\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - a_0(B\bar{a} \cdot \bar{\nu})] + m[a_0(B\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - (B\bar{a} \cdot \bar{\nu})] + \\ & + a_0(C\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - (C\bar{a} \cdot \bar{\nu}) - a_0(\bar{s} \cdot \bar{\nu}) + (\bar{s} \cdot \bar{a}) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для анализа уравнений (15)-(17) введем обозначения

$$\begin{aligned} A\bar{a} \cdot \bar{\nu} &= p_1 \cos \varphi + p_1' \sin \varphi + p_0, & B\bar{a} \cdot \bar{\nu} &= b_1 \cos \varphi + b_1' \sin \varphi + b_0, \\ C\bar{a} \cdot \bar{\nu} &= c_1 \cos \varphi + c_1' \sin \varphi + c_0, & \bar{s} \cdot \bar{\nu} &= q_1 \cos \varphi + q_1' \sin \varphi + q_0, \\ \bar{\lambda} \cdot \bar{\nu} &= l_1 \cos \varphi + l_1' \sin \varphi + l_0. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}a_0'(A_2 - A_1) \sin \mu_0 \sin 2\sigma_0, \\ p_1' &= \frac{1}{2}a_0'(A_1 \cos^2 \sigma_0 + A_2 \sin^2 \sigma_0 - A_3) \sin 2\mu_0, \\ p_0 &= a_0 [(A_1 \cos^2 \sigma_0 + A_2 \sin^2 \sigma_0) \sin^2 \mu_0 + A_3 \cos^2 \mu_0], \\ b_1 &= \frac{1}{2}a_0'(B_2 - B_1) \sin \mu_0 \sin 2\sigma_0, \\ b_1' &= \frac{1}{2}a_0'(B_1 \cos^2 \sigma_0 + B_2 \sin^2 \sigma_0 - B_3) \sin 2\mu_0, \\ b_0 &= a_0 [(B_1 \cos^2 \sigma_0 + B_2 \sin^2 \sigma_0) \sin^2 \mu_0 + B_3 \cos^2 \mu_0], \\ c_1 &= \frac{1}{2}a_0'(C_2 - C_1) \sin \mu_0 \sin 2\sigma_0, \\ c_1' &= \frac{1}{2}a_0'(C_1 \cos^2 \sigma_0 + C_2 \sin^2 \sigma_0 - C_3) \sin 2\mu_0, \\ c_0 &= a_0 [(C_1 \cos^2 \sigma_0 + C_2 \sin^2 \sigma_0) \sin^2 \mu_0 + C_3 \cos^2 \mu_0], \\ q_1 &= a_0'(s_2 \cos \sigma_0 - s_1 \sin \sigma_0), \\ q_1' &= a_0'(s_1 \cos \sigma_0 \cos \mu_0 + s_2 \sin \sigma_0 \cos \mu_0 - s_3 \sin \mu_0), \\ q_0 &= a_0 (s_1 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 + s_2 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + s_3 \cos \mu_0), \\ l_1 &= a_0'(\lambda_2 \cos \sigma_0 - \lambda_1 \sin \sigma_0), \\ \lambda_1' &= a_0'(\lambda_1 \cos \sigma_0 \cos \mu_0 + \lambda_2 \sin \sigma_0 \cos \mu_0 - \lambda_3 \sin \mu_0), \\ \lambda_0 &= a_0 (\lambda_1 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 + \lambda_2 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + \lambda_3 \cos \mu_0). \end{aligned} \quad (19)$$



Распишем функции  $(A\vec{\nu} \cdot \vec{\nu})$ ,  $(B\vec{\nu} \cdot \vec{\nu})$  и  $(C\vec{\nu} \cdot \vec{\nu})$  с учетом (14),(19)

$$\begin{aligned} (A\vec{\nu} \cdot \vec{\nu}) &= \alpha_2 \cos 2\varphi + \alpha'_2 \sin 2\varphi + \alpha_1 \cos \varphi + \alpha'_1 \sin \varphi + \alpha_0, \\ (B\vec{\nu} \cdot \vec{\nu}) &= \beta_2 \cos 2\varphi + \beta'_2 \sin 2\varphi + \beta_1 \cos \varphi + \beta'_1 \sin \varphi + \beta_0, \\ (C\vec{\nu} \cdot \vec{\nu}) &= \gamma_2 \cos 2\varphi + \gamma'_2 \sin 2\varphi + \gamma_1 \cos \varphi + \gamma'_1 \sin \varphi + \gamma_0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{2} a_0'^2 [A_1 (\sin^2 \sigma_0 - \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + A_2 (\cos^2 \sigma_0 - \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) - \\ &\quad - A_3 \sin^2 \mu_0], \\ \alpha'_2 &= \frac{1}{2} a_0'^2 (A_2 - A_1) \cos \mu_0 \sin 2\sigma_0, \quad \alpha_1 = a_0 a_0' (A_2 - A_1) \sin \mu_0 \sin 2\sigma_0 = 2a_0 p_1, \\ \alpha'_1 &= a_0 a_0' (A_1 \cos^2 \sigma_0 + A_2 \sin^2 \sigma_0 - A_3) \sin 2\mu_0 = 2a_0 p_1', \\ \alpha_0 &= \frac{1}{2} \{ A_1 [2a_0^2 \sin^2 \mu_0 \cos^2 \sigma_0 + a_0'^2 (\sin^2 \sigma_0 + \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0)] + \\ &\quad + A_2 [2a_0^2 \sin^2 \mu_0 \sin^2 \sigma_0 + a_0'^2 (\cos^2 \sigma_0 + \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0)] + \\ &\quad + A_3 (2a_0^2 \cos^2 \mu_0 + a_0'^2 \sin^2 \mu_0) \}, \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} a_0'^2 [B_1 (\sin^2 \sigma_0 - \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + B_2 (\cos^2 \sigma_0 - \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) - \\ &\quad - B_3 \sin^2 \mu_0], \\ \beta'_2 &= \frac{1}{2} a_0'^2 (B_2 - B_1) \cos \mu_0 \sin 2\sigma_0, \quad \beta_1 = a_0 a_0' (B_2 - B_1) \sin \mu_0 \sin 2\sigma_0 = 2a_0 b_1, \\ \beta'_1 &= a_0 a_0' (B_1 \cos^2 \sigma_0 + B_2 \sin^2 \sigma_0 - B_3) \sin 2\mu_0 = 2a_0 b_1', \\ \beta_0 &= \frac{1}{2} \{ B_1 [2a_0^2 \sin^2 \mu_0 \cos^2 \sigma_0 + a_0'^2 (\sin^2 \sigma_0 + \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0)] + \\ &\quad + B_2 [2a_0^2 \sin^2 \mu_0 \sin^2 \sigma_0 + a_0'^2 (\cos^2 \sigma_0 + \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0)] + \\ &\quad + B_3 (2a_0^2 \cos^2 \mu_0 + a_0'^2 \sin^2 \mu_0) \}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} a_0'^2 [C_1 (\sin^2 \sigma_0 - \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + C_2 (\cos^2 \sigma_0 - \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) - \\ &\quad - C_3 \sin^2 \mu_0], \\ \gamma'_2 &= \frac{1}{2} a_0'^2 (C_2 - C_1) \cos \mu_0 \sin 2\sigma_0, \quad \gamma_1 = a_0 a_0' (C_2 - C_1) \sin \mu_0 \sin 2\sigma_0 = 2a_0 c_1, \\ \gamma'_1 &= a_0 a_0' (C_1 \cos^2 \sigma_0 + C_2 \sin^2 \sigma_0 - C_3) \sin 2\mu_0 = 2a_0 c_1', \\ \gamma_0 &= \frac{1}{2} \{ C_1 [2a_0^2 \sin^2 \mu_0 \cos^2 \sigma_0 + a_0'^2 (\sin^2 \sigma_0 + \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0)] + \\ &\quad + C_2 [2a_0^2 \sin^2 \mu_0 \sin^2 \sigma_0 + a_0'^2 (\cos^2 \sigma_0 + \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0)] + \\ &\quad + C_3 (2a_0^2 \cos^2 \mu_0 + a_0'^2 \sin^2 \mu_0) \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Вычислим на основании (14),(18)-(21) значения множителей при  $nm$ ,  $n^2$ ,  $m^2$ ,

$m, n$  и свободный от них член

$$\begin{aligned} & a_0'^2 Sp(A) - 2(A\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) + 2a_0(A\bar{a} \cdot \bar{\nu}) = \\ & = -2\alpha_2 \cos 2\varphi - 2\alpha_2' \sin 2\varphi - a_0 p_1 \cos \varphi - a_0 p_1' \sin \varphi + \alpha_0^*, \\ & \alpha_0^* = a_0'^2 [(A_1 \cos^2 \sigma_0 + A_2 \sin^2 \sigma_0) \sin^2 \mu_0 + A_3 \cos^2 \mu_0]. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (B\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - a_0(B\bar{a} \cdot \bar{\nu}) &= \beta_2 \cos 2\varphi + \beta_2' \sin 2\varphi + a_0 \beta_1 \cos \varphi + a_0 \beta_1' \sin \varphi + \beta^*, \\ \beta^* &= \frac{1}{2} a_0'^2 [B_1 (\sin^2 \sigma_0 + \cos^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + B_2 (\cos^2 \sigma_0 + \sin^2 \sigma_0 \cos^2 \mu_0) + \\ & \quad + B_3 \sin^2 \mu_0]. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_0(C\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - (C\bar{a} \cdot \bar{\nu}) &= a_0 \gamma_2 \cos 2\varphi + a_0 \gamma_2' \sin 2\varphi + c_1 (a_0^2 - a_0'^2) \cos \varphi + \\ & \quad + c_1' (a_0^2 - a_0'^2) \sin \varphi + c_*. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} c_* &= \frac{1}{2} a_0 a_0'^2 [C_1 (1 - 3 \sin^2 \mu_0 \cos^2 \sigma_0) + C_2 (1 - 3 \sin^2 \mu_0 \sin^2 \sigma_0) + \\ & \quad + C_3 (3 \sin^2 \mu_0 - 2)]. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} a_0(B\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - (B\bar{a} \cdot \bar{\nu}) &= a_0 \beta_2 \cos 2\varphi + a_0 \beta_2' \sin 2\varphi + b_1 (a_0^2 - a_0'^2) \cos \varphi + \\ & \quad + b_1' (a_0^2 - a_0'^2) \sin \varphi + b_*. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \beta_* &= \frac{1}{2} a_0 a_0'^2 [B_1 (1 - 3 \sin^2 \mu_0 \cos^2 \sigma_0) + B_2 (1 - 3 \sin^2 \mu_0 \sin^2 \sigma_0) + \\ & \quad + B_3 (3 \sin^2 \mu_0 - 2)]. \end{aligned} \quad (27)$$

$$(A\bar{a} \cdot \bar{\nu}) - a_0(A\bar{a} \cdot \bar{a}) = p_1 \cos \varphi + p_1' \sin \varphi. \quad (28)$$

$$(\bar{\lambda} \cdot \bar{\nu}) - a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{a}) = l_1 \cos \varphi + l_1' \sin \varphi. \quad (29)$$

$$\begin{aligned} a_0(A\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) - (A\bar{a} \cdot \bar{\nu}) &= a_0 \alpha_2 \cos 2\varphi + a_0 \alpha_2' \sin 2\varphi + p_1 (a_0^2 - a_0'^2) \cos \varphi + \\ & \quad + p_1' (a_0^2 - a_0'^2) \sin \varphi + \alpha_*. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \alpha_* &= \frac{1}{2} a_0 a_0'^2 [A_1 (1 - 3 \sin^2 \mu_0 \cos^2 \sigma_0) + A_2 (1 - 3 \sin^2 \mu_0 \sin^2 \sigma_0) + \\ & \quad + A_3 (3 \sin^2 \mu_0 - 2)]. \end{aligned} \quad (31)$$

$$a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{\nu}) - (\bar{\lambda} \cdot \bar{a}) = a_0 l_1 \cos \varphi + a_0 l_1' \sin \varphi + l_0^*. \quad (32)$$

$$l_0^* = -a_0'^2 (\lambda_1 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 + \lambda_2 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + \lambda_3 \cos \mu_0). \quad (33)$$

О регулярных прецессиях гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

$$-a_0(\bar{s} \cdot \bar{v}) + (\bar{s} \cdot \bar{a}) = -a_0 q_1 \cos \varphi - a_0 q_1' \sin \varphi + q_0^*. \quad (34)$$

$$q_0^* = a_0'^2 (s_1 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 + s_2 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + s_3 \cos \mu_0). \quad (35)$$

Рассмотрим уравнения (15),(16) при наличии соотношений (14). Потребуем, чтобы (15),(16) становились тождествами при подстановке в них величин (14). Тогда в силу (18)-(21) получим следующие равенства

$$\beta_2 = 2m\alpha_2, \quad \beta_2' = 2m\alpha_2', \quad (36)$$

$$l_1 = a_0 b_1 - (n + 2a_0 m) p_1, \quad l_1' = a_0 b_1' - (n + 2a_0 m) p_1', \quad (37)$$

$$\gamma_2 = -m^2 \alpha_2, \quad \gamma_2' = -m^2 \alpha_2', \quad (38)$$

$$q_1 = m(a_0 m + n) p_1 + a_0 c_1, \quad q_1' = m(a_0 m + n) p_1' + a_0 c_1'. \quad (39)$$

Значения постоянных  $k$  и  $E$  выписывать не будем, так как они не влияют на условия существования прецессий для основных параметров. При рассмотрении уравнения (16) предполагалось, что выполняется условие  $\bar{s} \nparallel \bar{a}$ . Поэтому в (39) появились значения  $q_1, q_1'$ .

Рассмотрим уравнение (17), в котором все слагаемые, содержащие множители  $nm, n^2, m^2, m, n$  и свободный член выписаны в формулах (22)-(35). Запишем вначале общий вид уравнения (17)

$$D_2 \cos 2\varphi + D_2' \sin 2\varphi + D_1 \cos \varphi + D_1' \sin \varphi + D_0 = 0. \quad (40)$$

Из (40) следуют равенства

$$D_2 = 0, \quad D_2' = 0, \quad D_1 = 0, \quad D_1' = 0, \quad D_0 = 0. \quad (41)$$

Первые два уравнения из системы (41) являются тождествами при выполнении условий (36),(39). Рассмотрим третье и четвертое равенства из (41). На основании принятых ранее обозначений и соотношений (37) получим

$$m(m + 2a_0 n) p_1 - a_0'^2 m b_1 + 2a_0 c_1 (a_0^2 - a_0'^2) - a_0 q_1' = 0, \quad (42)$$

$$m(m + 2a_0 n) p_1' - a_0'^2 m b_1' + 2a_0 c_1' (a_0^2 - a_0'^2) - a_0 q_1 = 0. \quad (43)$$

Пусть  $a_0 \neq 0$ . Подставим  $q_1$  и  $q_1'$  из (39) в равенства (42),(43)

$$m p_1 (a_0'^2 m + a_0 n) - a_0'^2 m b_1 - a_0'^2 c_1 = 0, \quad (44)$$

$$m p_1' (a_0'^2 m + a_0 n) - a_0'^2 m b_1' - a_0'^2 c_1' = 0. \quad (45)$$

Равномерные вращения относительно наклонной оси можно получить, как частный случай регулярных прецессий, положив во втором равенстве из (5)  $m = 0$ . Тогда из (44),(45) следует  $c_1 = 0, c_1' = 0$ , а из (39)  $q_1 = 0$  и  $q_1' = 0$ . Из формул (19) определим, что вектор  $\bar{s} \parallel \bar{a}$ . Следовательно, равномерное вращение гиростата происходит вокруг барицентрической оси гиростата. Этот случай в дальнейшем исключаем, поскольку он рассмотрен в статье [15].

Распишем равенство  $D_0 = 0$

$$nm\alpha_0^* - m^2\alpha_* - ml_0^* + n\beta^* + m\beta_* + c_* + q_0^* = 0, \quad (46)$$

где значения  $\alpha_0^*$ ,  $\alpha_*$ ,  $l_0^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\beta_*$ ,  $c_*$ ,  $q_0^*$  указаны в (22),(31),(27),(25),(35).

Итак, условиями существования регулярных прецессий (5) у уравнений (1),(2) являются равенства (36)-(39),(44)-(46).

### 3. Анализ условий существования решений уравнений (36)-(39),(42)-(46).

*Первый случай.* Пусть вектор  $\bar{a}$  принадлежит главной оси инерции гиростата, то есть в силу (11),(13) имеем условия  $\mu_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 0$ , для которых

$$\bar{a} = (0, 0, 1), \quad \nu_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad (47)$$

где  $\varphi = nt$ . Тогда изучение условий (36)-(39),(42)-(46) приводит к следующему результату

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0. \quad (48)$$

$$B_1 - B_2 = 2m(A_1 - A_2), \quad C_1 - C_2 = m^2(A_2 - A_1), \quad (49)$$

$$mB_1 - nm(A_1 - A_2 - A_3) + a_0 [C_1 - C_3 + m(B_1 - B_3) - m^2(A_1 - A_3)] + s_3 + m\lambda_3 = 0. \quad (50)$$

Условия (48)-(50) совпадают с условиями (6.127) (по книге [14]). Из равенств (49) следует

$$m = \frac{B_1 - B_2}{2(A_1 - A_2)}, \quad 4(A_1 - A_2)(C_1 - C_2) + (B_1 - B_2)^2 = 0. \quad (51)$$

При подстановке значения параметра  $m$  из первого соотношения системы (51) в равенство (50) определяют значение параметра  $n$ . Равенства (48) означают, что векторы  $\bar{s}$  и  $\bar{\lambda}$  коллинеарны вектору  $\bar{a}$ . Второе условие из (51) дает возможность указать ограничения на составляющие матриц  $A, B, C$ . Отметим, что при  $A_1 = A_2$  выполняются условия  $B_1 = B_2$ ,  $C_1 = C_2$ , которые характеризуют частный случай П.В. Харламова [18].

*Второй случай.* Предположим, что в равенствах (13),(14) параметр  $\sigma_0 = 0$ , то есть вектор  $\bar{a}$  лежит в главной плоскости эллипсоида инерции:

$$\bar{a} = (\sin \mu_0, 0, \cos \mu_0). \quad (52)$$

Тогда из системы (14) следует

$$\begin{aligned} \nu_1 &= a_0 \sin \mu_0 + a'_0 \cos \mu_0 \sin \varphi, & \nu_2 &= a'_0 \cos \varphi, \\ \nu_3 &= a_0 \cos \mu_0 - a'_0 \sin \mu_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (53)$$

Результат анализа системы (36)-(39),(42)-(46) таков

$$s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \operatorname{tg}^2 \mu_0 = \frac{B_2 - B_1 + 2m(A_1 - A_2)}{B_3 - B_2 + 2m(A_2 - A_3)}. \quad (54)$$

$$C_1 - C_2 + m(B_1 - B_2) - m^2(A_1 - A_2) = 0, \quad (55)$$

$$C_2 - C_3 + m(B_2 - B_3) - m^2(A_2 - A_3) = 0, \quad (56)$$

$$\{n(A_1 - A_3) - a_0[B_1 - B_3 + 2m(A_1 - A_3)]\} \sin 2\mu_0 + 2(\lambda_1 \cos \mu_0 - \lambda_3 \sin \mu_0) = 0. \quad (57)$$

$$s_1 \sin \mu_0 + s_2 \cos \mu_0 + n[B_2 - m(A_2 - A_3 - A_1)] = 0. \quad (58)$$

Первые два условия из (54) означают, что векторы  $\bar{s}$  и  $\bar{\lambda}$  лежат в той же главной плоскости эллипсоида инерции, что и вектор  $\bar{a}$ . Исключая случай равенства главных моментов инерции гиростата, из (55),(56) получим

$$m = -\frac{D_1^*}{D_2^*}, \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} D_1^* &= C_1(A_3 - A_2) + C_2(A_1 - A_3) + C_3(A_2 - A_1), \\ D_2^* &= B_1(A_3 - A_2) + B_2(A_1 - A_3) + B_3(A_2 - A_1). \end{aligned} \quad (60)$$

Отметим, что при  $D_1^* = 0$ ,  $D_2^* = 0$  уравнение (59) становится тождеством (условие на  $m$  отсутствует). Тогда значение параметра  $m$  можно найти из уравнения

$$m^2(A_1 - A_2) - m(B_1 - B_2) + C_2 - C_1 = 0, \quad (61)$$

положив

$$\Delta = (B_1 - B_2)^2 - 4(A_1 - A_2)(C_2 - C_1) \geq 0, \quad (62)$$

что будет иметь место, например, при  $A_1 > A_2$ ,  $C_1 > C_2$ .

Если выполнены условия  $D_1^* \neq 0$ ,  $D_2^* \neq 0$ , то из (55),(59) найдем условие на параметры  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ )

$$(C_2 - C_1)(D_2^*)^2 - (B_1 - B_2)D_1^*D_2^* - (A_1 - A_2)(D_1^*)^2 = 0. \quad (63)$$

При указанных выше преобразованиях параметр  $\mu_0$  определяется из третьего равенства системы (54). Учет в уравнениях (57),(58) проведенного выше анализа позволяет установить значение параметра  $n$  и условия на другие параметры задачи. Отметим, что полученный выше результат установить на основании вывод книги [14, стр.268] не представляется возможным.

**Третий случай.** Рассмотрим общий случай положения вектора  $\bar{a}$ , то есть выполняются условия

$$\sin\mu_0\cos\sigma_0 \neq 0, \quad \sin\mu_0\sin\sigma_0 \neq 0, \quad \cos\mu_0 \neq 0. \quad (64)$$

Учитывая (64) в исследовании равенств (36)-(39),(42)-(46) получим равенства

$$m = \frac{B_1 - B_2}{2(A_1 - A_2)}, \quad (B_1 - B_2)^2 = 4(A_1 - A_2)(C_2 - C_1). \quad (65)$$

$$C_1(A_2 - A_3) + C_2(A_3 - A_1) + C_3(A_1 - A_2) = 0, \quad (66)$$

$$B_1(A_2 - A_3) + B_2(A_3 - A_1) + B_3(A_1 - A_2) = 0, \quad (67)$$

$$n(A_2 - A_1)\sin\mu_0\sin 2\sigma_0 + 2(\lambda_2\cos\sigma_0 - \lambda_1\sin\sigma_0) = 0, \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & n(A_1\cos^2\sigma_0 + A_2\sin^2\sigma_0 - A_3)\sin 2\mu_0 + \\ & + 2(\lambda_1\sin\mu_0\cos\sigma_0 + \lambda_2\sin\mu_0\sin\sigma_0 - \lambda_3\sin\mu_0) = 0, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & n[B_1 - m(A_1 - A_2 - A_3)] + s_1\sin\mu_0\cos\sigma_0 + s_2\sin\mu_0\sin\sigma_0 + s_3\cos\mu_0 + \\ & + m(\lambda_1\sin\mu_0\cos\sigma_0 + \lambda_2\sin\mu_0\sin\sigma_0 + \lambda_3\cos\mu_0) = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Таким образом, при заданных  $A_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) параметры  $C_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) определяются из равенства (66), а параметры  $B_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – из равенства (67). Учет этих параметров во втором равенстве (65) приводит к дополнительному условию на параметры задачи. Например, если выполнены условия

$$A_3 = A_1, \quad B_3 = B_1, \quad C_3 = C_1, \quad (71)$$

то в силу (71) равенства (66),(67) являются тождествами. Тогда необходимо лишь потребовать ограничения  $A_1 > A_2$ ,  $C_2 > C_1$ , при котором второе уравнение из (65) дает действительное значение для  $B_1 - B_2$ .

Для нахождения параметров  $\mu_0$ ,  $\sigma_0$  обратимся к равенствам (68),(69) и для получения наглядного результата положим  $\lambda_3 = 0$ . Следовательно, условия на параметры  $\mu_0$ ,  $\sigma_0$  таковы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\sigma_0 &= \frac{\lambda_2(A_1 - A_3)}{\lambda_1(A_2 - A_3)}, \\ \sin\mu_0 &= \frac{\lambda_1\sin\sigma_0 - \lambda_2\cos\sigma_0}{n(A_2 - A_1)\sin\sigma_0\cos\sigma_0}. \end{aligned} \quad (72)$$

Отметим, что в общем случае для нахождения условий на параметры  $\mu_0$ ,  $\sigma_0$  из (68),(69) можно найти соотношения

$$\begin{aligned} \sin\mu_0 &= \frac{\lambda_1\sin\sigma_0 - \lambda_2\cos\sigma_0}{n(A_2 - A_1)\sin\sigma_0\cos\sigma_0}, \\ \cos\mu_0 &= \frac{\lambda_3(\lambda_1\sin\sigma_0 - \lambda_2\cos\sigma_0)}{(A_2 - A_3)\lambda_1\sin\sigma_0 + (A_3 - A_1)\cos\sigma_0}, \end{aligned}$$

и воспользоваться равенством  $\sin^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_0 = 1$ . После указанных выше преобразований значение параметра  $n$  находится подстановкой величины  $m$  из первого уравнения системы (65), величин  $\sigma_0$  и  $\mu_0$  из (72) в соотношение (70). Отличительным свойством полученных выше результатов является свойство, что векторы  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{\nu}$  не коллинеарны вектору  $\bar{a}$ .

**Выводы.** Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены условия существования регулярных прецессий в случае, когда подвижная система координат является главной системой координат. Эти условия найдены в виде системы алгебраических уравнений на параметры задачи. Проведено полное исследование данной системы и установлено геометрическое место осей, образующих постоянный угол с вертикалью.

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
2. *Klein F.* The Theory of the top. Volume III / F. Klein, A. Sommerfeld. – New York: Springer Siens Business Media, 2012. – 297 p.
3. *Kane T.R.* Equivalence of two gyrostatic stability problems / T.R. Kane, R.C. Fowler // Journal of Applied Mechanics, 37(4). – 1970. – pp. 1146-1147.
4. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats / R.E. Roberson // Journal of Applied Mechanics. – 1971. – No 37(3). – P. 707–708.
5. *Асланов В.С.* Движение системы соосных тел переменной массы / В.С. Асланов, А.В. Дорошин // Прикл. математика и механика. – 2004. – Т. 68, вып. 6. – С. 999–1009.
6. *Асланов В.С.* О двух случаях движения неуравновешенного гиростата / В.С. Асланов, А.В. Дорошин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 42–55.
7. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – 26, f. 3– 4. – P. 271–281.
8. *Горп Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горп // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 4. – С. 573–587.
9. *Горп Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горп, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
10. *Мазнев А.В.* Один класс прецессионно-изокопических движений неавтономного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Мазнев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 143–152.
11. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
12. *Мазнев А.В.* Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Мазнев // Доклады Национальной академии наук Украины. – 2011. – № 8. – С. 66–72.
13. *Горп Г.В.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горп, А.В. Мазнев, Г.А. Котов. – Донецк: ГУ «ИПММ», 2017. – 265 с.
14. *Горп Г.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горп, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
15. *Горп Г.В.* О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали / Г.В. Горп, Т.В. Балаклицкая // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 55–65.

16. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – 5, №5. – P. 747–754.
17. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H.M. Yehia // J. theoretical and applied machanics. – 1986. – 5, № 5. – P. 755–762.
18. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П.В. Харламов // Журнал прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.

**A.V. Maznev, Yu.S. Gorbunova**

**On regular gyrostat precessions under the action of potential and gyroscopic forces.**

The article deals with the problem of the motion of a gyrostat with a fixed point under the action of potential and gyroscopic forces. The conditions for the existence of regular precessions about the symmetry axis of the force fields are investigated. Found a set of axes forming a constant angle with the vertical in the main coordinate system.

**Keywords:** *gyrostat, potential and gyroscopic forces, regular precessions.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
ГОУ ВПО “Академия гражданской защиты” МЧС ДНР, Донецк  
*aleksandr\_maznev@rambler.ru*

*Получено 02.09.2019*



## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2020. Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев

## АНАЛИЗ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ НА БАЗЕ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРИИ

На базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации решена задача термоупругости для изотропной пластины с теплоизолированным разрезом. Рассмотрен случай произвольного теплообмена с внешней средой и действия комплексной температурной нагрузки, сочетающей однородный тепловой поток и поток температурного момента. Приведены результаты численных исследований влияния характеристик разреза и теплообмена на коэффициенты интенсивности напряжений.

**Ключевые слова:** обобщённая теория, полиномы Лежандра, изотропная пластина, теплоизолированный разрез, комплексная температурная нагрузка, коэффициенты интенсивности напряжений

**Введение.** В настоящее время есть насущная необходимость в разработке и построении теорий, учитывающих явления, обусловленные поперечными сдвигами и обжатием. Необходимо, чтобы эти теории можно было использовать для получения аналитического решения задач статики и термоупругости с произвольной, наперёд заданной точностью. Этими качествами обладают обобщённые теории, основанные на представлении компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС) в виде бесконечных рядов от поперечной координаты. Эти теории, в отличие от классической теории Кирхгоффа-Лява, лишены физико-геометрических предположений.

В рамках обобщённых теорий искомые функции могут быть разложены в различные ряды, например, в степенной ряд, в ряд по полиномам Лежандра и т. д. Трёхмерные задачи могут быть сведены к двумерным операционным, вариационным и другими способами. Различные обобщённые теории позволяют получать решения задач с разной точностью в зависимости от метода сведения трёхмерных задач к двумерным и способа представления НДС в виде рядов. По мере увеличения количества членов в рядах порядок систем уравнений и сложность их решения возрастает, но и точность решения увеличивается.

Во многих случаях потеря несущей способности конструктивных элементов является следствием наличия в них концентраторов напряжений. При проведении прочностных расчётов тонкостенных элементов конструкций необходим как

учёт дефектов (например, трещин) так и учёт анизотропии упругих и теплофизических свойств материала.

В ряде случаев конструктивные элементы изготавливаются из композитных материалов, которые можно рассматривать «в целом» как анизотропные. Так, композитные материалы используются практически во всех областях производства, например, в строительстве, в самолёто-, авто-, судо- и ракетостроении. Часто такие материалы применяются для изготовления элементов приборов и оборудования, эксплуатирующихся в агрессивных средах и при высоких температурах.

Широкое внедрение композитных материалов, обладающих анизотропией упругих свойств, обуславливает актуальность построения обобщённых теорий пластин и оболочек, учитывающих явления, связанные с поперечными сдвигами и обжатием. Исходя из потребностей внутреннего развития термомеханики разрушения, актуальной является разработка эффективных методов расчёта температурных полей в анизотропных телах с трещинами (математическими разрезами) произвольной формы.

В статье [1] построена система дифференциальных уравнений, предназначенная для описания упругих деформаций тонких анизотропных оболочек вращения и решаемая относительно частных производных первого порядка по меридиональной координате. Эти уравнения получены методом  $\{m, n\}$ -приближения.

В статье [2] определены частные решения задач изгиба нетонких трансверсально-изотропных пластин с кососимметричной локальной нагрузкой относительно срединной плоскости. Метод интегрирования систем уравнений равновесия высокого порядка в математической теории толстых плит при непрерывных нагрузках рассмотрен в публикации [3]. В работе [4] изучен метод последовательных приближений в математической теории оболочек произвольной толщины. В работах [2–4] трёхмерные задачи сводятся к двумерным путём разложения всех составляющих НДС в ряды по поперечной координате с использованием полиномов Лежандра и вариационного принципа Рейснера.

В настоящей работе для сведения трёхмерной задачи термоупругости для пластины к двумерной используется обобщённая теория в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации. Данный подход является наиболее приемлемым для решения поставленной задачи, поскольку он использует метод И.Н. Векуа разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра [5]. К преимуществам использования обобщённой теории  $\{m,n\}$ -аппроксимации относятся:

- возможность рассматривать не только тонкие пластины, но пластины средней и большой толщины;
- возможность получения решений с произвольной, наперёд заданной точностью, в зависимости от числа удерживаемых слагаемых в разложениях заданных и искомых функций.

Из последних публикаций, в которых используется обобщённая теория в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации при определении коэффициентов интенсивности

напряжений (КИН), следует отметить статьи [6–8]. В этих работах на базе обобщённой теории решена задача термоупругости для изотропной пластины, содержащей теплоизолированный разрез. Интегральные представления внутренних силовых факторов и разрешающие системы сингулярных интегральных уравнений получены с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и теории обобщённых функций. Численные исследования, проведённые в [6–8], позволили выявить характер изменения КИН для поперечного и продольного сдвига в зависимости от характеристик разреза и теплообмена с внешней средой. При этом температурная нагрузка бралась в виде однородного теплового потока или потока температурного момента.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщиной  $2h$ , находящуюся в тепловом контакте с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона. Пластина содержит теплоизолированный разрез  $L$ , удалённый от краёв пластины на расстояние, значительно превышающее его длину.

В рамках обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации компоненты термоупругого состояния представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты  $P_k = P_k(z/h)$ . Представления компонент вектора перемещений и тензора напряжений приведены в монографии [5]. Температура имеет вид:  $T = T_0 P_0 + T_1 P_1$ , где  $T_0$ ,

$T_1$  – средняя температура и температурный момент соответственно.

Разрешающая система уравнений термоупругости  $\{1,0\}$ -аппроксимации, записанная в безразмерной системе координат  $x_1, x_2$ , определённой с точностью до полутолщины пластины  $h$ , включает в себя:

- уравнения теплопроводности

$$\Delta T_k + A_{k0}T_0 + A_{k1}T_1 = 0 \quad (k = 0, 1), \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad A_{00} = -\frac{6}{\Delta_1} \{Bi^+ Bi^- + 3(Bi^+ + Bi^-)\};$$

$$A_{01} = \frac{A_{10}}{3} = -\frac{15}{\Delta_1} (Bi^+ - Bi^-);$$

$$A_{11} = -\frac{30}{\Delta_1} \{Bi^+ Bi^- + 2(Bi^+ + Bi^-) + 3\};$$

$$\Delta_1 = 2Bi^+ Bi^- + 9(Bi^+ + Bi^-) + 36;$$

$Bi^+$  и  $Bi^-$  – критерий Био на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины;

- уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$N_1 = B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\};$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\}; \\
 S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \\
 M_1 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}; \\
 M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}; \\
 H &= \frac{1 - \nu}{2} D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); \\
 Q_{k0} &= \Lambda_0 \left( \gamma_k + \frac{\partial w_0}{\partial x_k} \right) \quad (k = 1, 2), \tag{2}
 \end{aligned}$$

где  $u, v, w_0, \gamma_1, \gamma_2$  – обобщённые перемещения;  $N_1, N_2, S, Q_{10}, Q_{20}, M_1, M_2, H$  – обобщённые усилия и моменты;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1 - \nu^2}; \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1 + \nu)};$$

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} = 0; \\
 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_{20} = 0; \quad \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} = 0. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (2), (3) определены с точностью до значения  $Eh$  ( $E$  – модуль Юнга), а моменты – с точностью до  $Eh^2$ .

Термоупругое состояние в пластине с разрезом представим в виде:

$$G^* = G^o + G,$$

где  $G^o$  – компоненты термоупругого состояния в сплошной пластине (основное термоупругое состояние);  $G$  – компоненты возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием разреза. Основное термоупругое состояние будем считать известным.

Для определения возмущённого термоупругого состояния используем систему уравнений термоупругости (1)–(3) с граничными условиями, сформулированными для случая свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними [9].

- для задачи теплопроводности (1):

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = 0, 1); \quad (4)$$

- для задачи термоупругости (2), (3):

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^o|_L; & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^o|_L; \\ M_n|_L &= -M_n^o|_L; & H_{nt}|_L &= -H_{nt}^o|_L; & Q_n|_L &= -Q_n^o|_L. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $N_n$ ,  $S_{nt}$ ,  $M_n$ ,  $H_{nt}$ ,  $Q_n$  – усилия и моменты на элементе длины разреза с нормалью  $\vec{n}$  и касательной  $\vec{t}$ .

Предполагаем, что разрез удалён на значительное расстояние от линии внешней границы пластины. Поэтому возмущённое термоупругое состояние носит локальный характер и его компоненты равны нулю на внешнем граничном контуре. Достоверность такого предположения проверяется после решения задачи.

**2. Методика решения задачи.** Методика решения основана на применении к разрешающей системе уравнений (1)–(3) двумерного интегрального преобразования Фурье, учитывающего разрывный характер искомых функций на линии разреза  $L$ . В этом случае трансформанты частных производных искомых функций находятся по формуле [10]:

$$F \left[ \frac{\partial G}{\partial x_k} \right] = (-i\xi_k) \tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_k [G] \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}') \right\} dL \quad (k = 1, 2),$$

где  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – координаты текущей точки в пространстве трансформант;  $[G] = G^+ - G^-$  – скачок функции  $G$  при переходе через линию разреза  $L$ , причём  $G^+$  и  $G^-$  – это граничные значения функции  $G$  в соответствии с выбранным направлением нормали  $\vec{n}$ ;  $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$  – координаты точки на линии  $L$ . Направление интегрирования образует прямой угол с нормалью при вращении против часовой стрелки.

В качестве примера рассмотрим прямолинейный теплоизолированный разрез длиной  $2l$ , расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Интегральные представления внутренних силовых факторов в этом случае примут вид

$$P_j^q = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\kappa} \int_{-1}^1 K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q ds \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 5}). \quad (6)$$

где  $P_j^0 = N_j$ ,  $P_j^1 = M_j$ ,  $P_{j+3}^0 = Q_{j0}$  ( $j = 1, 2$ );  $P_3^0 = S$ ,  $P_3^1 = H$ ;  $\kappa = 4$  для  $P_1^0$ – $P_3^0$ ;  $\kappa = 7$  для  $P_1^1$ – $P_3^1$ ;  $\kappa = 5$  для  $P_4^0$ ,  $P_5^0$ .

В интегральных представлениях (6) неизвестные функции  $\psi_k^q = \psi_k^q(s)$ , где  $s$  – координата точки на линии разреза  $L$ , определяются так:

$$\begin{aligned} \psi_1^0 &= \frac{d[u]}{ds}; & \psi_2^0 &= \frac{d[v]}{ds}; & \psi_1^1 &= \frac{d[\gamma_1]}{ds}; & \psi_2^1 &= \frac{d[\gamma_2]}{ds}; & \psi_3^1 &= \frac{d[w_0]}{ds}; \\ \psi_4^1 &= [\gamma_1]; & \psi_5^1 &= [\gamma_2]; & \psi_3^0 &= \psi_6^1 = [T_0]; & \psi_4^0 &= \psi_7^1 = [T_1]. \end{aligned}$$

Ядра интегральных представлений (6) представляют собой линейные комбинации специальных  $G$ -функций, например,

$$\begin{aligned} K_{35}^1(x_1 - ls, x_2) &= -\Lambda_0 \left\{ \frac{n_1}{4} \left[ G_{0,0}(\sqrt{2,5}r) - \cos 4\varphi G_{2,2}(\sqrt{2,5}r) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{n_2 \sin 2\varphi}{2} \left[ G_{1,1}(\sqrt{2,5}r) - \cos 2\varphi G_{2,2}(\sqrt{2,5}r) \right] + n_1 G_{0,0}(\sqrt{2,5}r) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x_1 - ls}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{r};$$

$G_{n,\nu}(z)$  – специальная  $G$ -функция, определяемая выражением [11]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left( \frac{r}{2} \right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho;$$

$$r > 0; \quad \operatorname{Re} z > 0; \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < n + 1,5,$$

где  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ;

Системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) для определения неизвестных функций  $\psi_k^q$  получены с использованием интегральных представлений (6) и граничных условий для задачи термоупругости (5). Функции  $\psi_3^0, \psi_4^0, \psi_6^1, \psi_7^1$  находятся при решении задачи теплопроводности (1), (4).

Имеют место две независимых системы СИУ, описывающие:

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s) ds}{s - \zeta} = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2; |\zeta| \leq 1);$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = \overline{1, 3}; |\zeta| \leq 1).$$

(7)

Выражения разностных ядер системы (7)  $E_{jk}^1(\zeta - s)$  содержат специальные G-функции и их первообразные, например,

$$E_{13}^1(\zeta - s) = 3\Lambda_0 l G_{1,1} \left( \sqrt{2,5} l |\zeta - s| \right).$$

КИН для поперечного ( $K_{II}$ ) и продольного ( $K_{III}$ ) сдвига имеют вид:

$$K_{II}^{\pm} = \mp 0,25 \sqrt{\pi l h E} \left\{ P_0 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^0(s) \sqrt{1 - s^2} \right] + P_1 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^1(s) \sqrt{1 - s^2} \right] \right\};$$

$$K_{III}^{\pm} = \mp 0,25 \sqrt{\pi l h E} \Lambda_0 (P_0 - P_2) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_3^1(s) \sqrt{1 - s^2} \right]. \quad (8)$$

Выражения (8) получены путём сравнения коэффициентов при особенности  $r^{-1/2}$  в ненулевых компонентах тензора напряжений с известными асимптотическими представлениями напряжений. При этом использовались интегральные представления для обобщённых усилий и моментов (6).

Максимальные по модулю значения КИН (8) есть:

$$K_{II}^{\max} = 0,25 \sqrt{\pi l h E} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \left[ |\psi_1^0(s)| + |\psi_1^1(s)| \right] \sqrt{1 - s^2} \right\};$$

$$K_{III}^{\max} = 0,375 \sqrt{\pi l h E} \Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1 - s^2} \right\}. \quad (9)$$

**3. Анализ результатов численных исследований.** Целью численных исследований было выявление эффектов комплексной температурной нагрузки, включающей поток средней температуры ( $q_0$ ) и поток температурного момента ( $q_1$ ), по сравнению с однородной температурной нагрузкой, состоящей только из одного температурного потока. Расчёты проведены для разреза длиной  $2l$ , расположенного на оси  $Ox_1$  с центром в начале координат, в широком диапазоне величины теплообмена с окружающей средой:  $Bi = 0,01$  – слабый теплообмен;  $Bi = 0,1$  – теплообмен среднего уровня;  $Bi = 1$  – сильный теплообмен. Рассматривались случаи симметричного теплообмена, когда его величина одинакова на лицевых поверхностях пластины ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ ), и верхнего одностороннего теплообмена, когда теплообмен осуществляется лишь на верхней лицевой поверхности пластины ( $Bi^+ = Bi$ ;  $Bi^- = 0$ ). Значение коэффициента Пуассона принималось равным  $\nu = 0,3$ .

Основное температурное поле предполагалось таким, что на линии разреза одновременно действуют потоки средней температуры и температурного момента одинаковой интенсивности:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_1; \quad q_0 = q_1 = \text{const} \neq 0.$$

Результаты численных исследований представлены на рис. 1 и 2 в виде графиков зависимостей максимальных относительных значений КИН поперечного сдвига  $K_2^* = K_{II}^{\max}/K^*$  и продольного сдвига  $K_3^* = K_{III}^{\max}/K^*$  от полудлины

разреза  $l$ . Значения КИН соотносятся с величиной  $K^* = 0,25\alpha q E \sqrt{lh}$ , которая соответствует значению КИН в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности  $q$  перпендикулярно линии разреза [12].

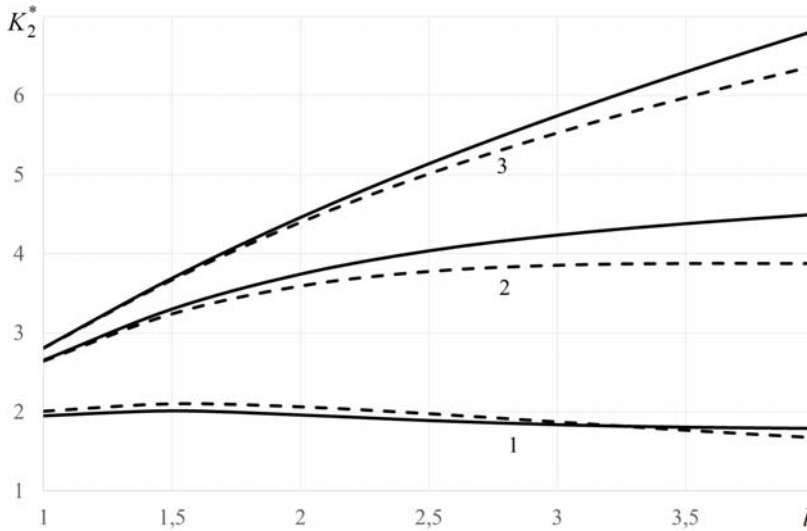


Рис. 1. КИН для поперечного сдвига.

Сплошными кривыми показаны зависимости в случае одностороннего теплообмена, пунктирными – в случае симметричного теплообмена. Цифрами 1, 2, 3 обозначены графики, отвечающие значениям критерия Био ( $Bi$ ) 1; 0,1; 0,01 соответственно.

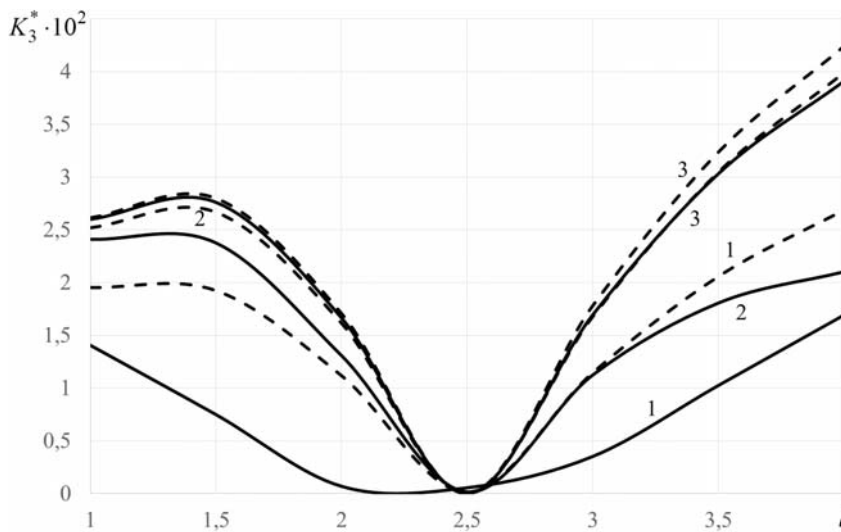


Рис. 2. КИН для продольного сдвига.



Детальный анализ этих графиков позволяет выявить такие особенности комплексной температурной нагрузки в отличие от однородной.

1. При действии лишь одного температурного градиента ( $q_0$  или  $q_1$ ) относительные максимальные значения КИН поперечного сдвига ( $K_2^*$ ) возрастают при любом уровне теплообмена [6–8]. При одновременном действии градиентов температуры  $q_0$  и  $q_1$  в случае слабого теплообмена ( $Bi = 0,01$ )  $K_2^*$  увеличивается при любом виде теплообмена; в случае среднего теплообмена ( $Bi = 0,1$ )  $K_2^*$  увеличивается при одностороннем теплообмене и уменьшается при симметричном теплообмене, когда  $l > 2,5$ ; в случае сильного теплообмена ( $Bi = 1$ )  $K_2^*$  уменьшается при любом виде теплообмена, когда  $l > 1,5$ .

2. Когда действует лишь один температурный градиент ( $q_0$  или  $q_1$ ) значения  $K_2^*$  при одностороннем теплообмене всегда больше, чем при симметричном теплообмене [6, 8]. При одновременном действии градиентов температуры ( $q_0$  и  $q_1$ ) в случае сильного теплообмена ( $Bi = 1$ )  $K_2^*$  при одностороннем теплообмене становится меньше, чем при симметричном теплообмене в диапазоне малых и средних длин трещин  $1 < l < 3$ .

3. Разница значений  $K_2^*$  для случаев одностороннего и симметричного теплообменов при одновременном действии градиентов температуры ( $q_0$  и  $q_1$ ) (рис. 1) намного меньше, чем при действии только градиента средней температуры ( $q_0$ ) [6]. Так, для разреза длиной  $l = 3$  в случае среднего уровня теплообмена ( $Bi = 0,1$ ) эти значения различаются более, чем в два раза.

4. Из рис. 2 следует, что при одновременном действии температурных градиентов ( $q_0$  и  $q_1$ ) значения  $K_3^*$  в случае симметричного теплообмена всегда больше, чем в случае одностороннего теплообмена. Обратная картина имеет место при действии лишь градиента температурного момента ( $q_1$ ) [8].

5. При одновременном действии температурных градиентов ( $q_0$  и  $q_1$ ) резко меняется характер зависимости  $K_3^*$  от длины разреза (рис. 2) в отличие от случая действия лишь градиента температурного момента ( $q_1$ ) [7, 8]. Резкое уменьшение значений  $K_3^*$  до нулевой отметки при длине разреза  $l = 2,5$  является следствием достижения максимума этой величины при однородной температурной нагрузке  $q_1$  для данной длины разреза. Поведение  $K_3^*$  на рис. 2 является следствием сочетания характеров зависимостей данной величины при действии лишь градиента  $q_0$  [6] и при действии лишь градиента  $q_1$  [7, 8]. При этом необходимо учитывать тот факт, что максимальные значения  $K_{III}^{\max}$  достигаются в середине толщины пластины и обусловлены для рассматриваемых случаев касательными напряжениями противоположных направлений. В случае градиента средней температуры  $q_0$  – это локальные касательные напряжения, появляющиеся в результате температурного сжатия, а при действии градиента температурного момента  $q_1$  – это касательные напряжения в результате температурного расширения. Поскольку они имеют противоположные направления, то обусловленные ими значения КИН должны учитываться с разными знаками.

6. Эффект комплексной температурной нагрузки проявляется также в том, что в рассматриваемом диапазоне длин трещин максимальные значения  $K_3^*$  на

рис. 2 меньше чем в два раза по сравнению со случаем однородной нагрузки [7, 8]. При этом максимальные значения  $K_2^*$  на рис. 1 существенно больше по сравнению с аналогичными величинами при однородной нагрузке [6–8].

**Выводы.** Проведённые численные расчёты показали, что на максимальные по модулю значения КИН существенное влияние оказывает как длина разреза, так и характер и интенсивность теплообмена с внешней средой. Поэтому при проведении прочностных расчётов тонкостенных элементов конструкций в случае действия комплексных температурных нагрузок необходимо учитывать размеры возможных дефектов и теплообмен с окружающей средой.

1. *Tuchapsky R.I.* Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the  $\{m, n\}$ -approximation method / R.I. Tuchapsky // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2017. – 226, No. 1. – P. 52–68.
2. *Зеленський А.Г.* Фундаментальні розв'язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин / А.Г. Зеленський // *Вісник Запорізького національного університету*. – 2018. – № 1. – С. 13–29.
3. *Zelensky A.* The method of integrating systems of high-order equilibrium equations of the mathematical theory of thick plates under intermittent loads (part 1) / A. Zelensky, A. Privarnikov // *Innovative scientific researches : European development trends and regional aspect. Collective monograph*. – 4th ed. – Riga, Latvia : «Baltija Publishing», 2020. – P. 221–255.
4. *Zelensky A. G.* The method of successive approximations in the mathematical theory of shallow shells of arbitrary thickness / A. G. Zelensky // *World Science*. – 2019. – Vol. 1, No. 11 (51). – P. 31–39.
5. *Пелех Б.Л.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев : Наукова думка, 1982. – 296 с.
6. *Бондаренко Н.С.* Исследование влияния длины разреза на коэффициенты интенсивности напряжений в изотропной пластине на базе обобщённой теории / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Труды института прикладной математики и механики*. – 2015. – Т. 29. – С. 20–28.
7. *Бондаренко Н.С.* Исследование влияния длины теплоизолированного разреза при термоупругом изгибе изотропных пластин / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Вестник ДонНУ. Сер. А : Естественные науки*. – 2018. – № 2. – С. 3–11.
8. *Бондаренко Н.С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае произвольного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Журнал теоретической и прикладной механики*. – 2018. – № 1–2 (62–63). – С. 35–44.
9. *Кит Г.С.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – Киев : Наукова думка, 1984. – 280 с.
10. *Шевченко В.П.* Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – Киев : УМК ВО, 1988. – 84 с.
11. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.
12. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 444 с.

**N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev**

**Analysis of thermoelastic state of isotropic plates with a heat-insulated cut based on the generalized theory.**

*Анализ термоупругого состояния пластины с разрезом*

The thermoelastic problem for an isotropic plate with a heat-insulated cut is solved on the basis of the generalized theory in the variant  $\{1,0\}$ -approximation. The case of arbitrary heat exchange with the external environment and the action of a complex temperature load, combining a uniform heat flow and a temperature moment flow, are considered. The results of numerical investigations for the influence of the characteristics of the cut and heat exchange on the stress intensity factors are presented.

**Keywords:** *generalized theory, Legendre polynomials, isotropic plate, heat-insulated cut, complex temperature load, stress intensity factors.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
*Bondarenko.Natalya.Sergeevna@gmail.com*  
*a.goltsev@donnu.ru*

*Получено 03.07.2020*

УДК 539.3

©2020. Е.С. Глушанков

## ДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛОСЕ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА

В данной работе с использованием конформных отображений и комплексных потенциалов решена задача определения термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной многосвязной полосы из пьезоматериала, находящейся под действием линейного потока тепла. Определение неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы, проводилось из граничных условий с использованием метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлены закономерности влияния геометрических характеристик полосы и свойств ее материала на концентрацию напряжений в полосе.

**Ключевые слова:** линейный поток тепла, термоэлектромагнитоупругое состояние, бесконечная полоса, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**1. Введение.** К настоящему времени разработаны методы и решены различные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред при действии разности температур на контурах [1] или линейного (однородного) потока тепла [2]. Среди прочих, решены задачи и для полуплоскости [3, 4]. В данной работе на основе подхода, описанного в работе [4], решена задача о действии линейного потока тепла в бесконечной многосвязной полосе из пьезоматериала.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим находящуюся в условиях плоской задачи полосу из пьезоматериала, отнесенную к декартовой системе координат  $Oxy$ , занимающую многосвязную область  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) и прямолинейными границами  $L_p^+$  ( $p = \overline{1, 2}$ ), параллельными между собой (рис. 1). Обозначим центры эллиптических контуров через  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуоси эллипсов —  $a_l$ ,  $b_l$ , углы поворота эллипсов —  $\varphi_l$ , углы поворота прямолинейных границ —  $\varphi_p^+$  (для удобства, вместо равенства углов поворота положим  $\varphi_2^+ = \varphi_1^+ + \pi$ ).

Контурные пластинки могут располагаться произвольно относительно друг друга (в том числе, касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы). Контурные криволинейных отверстий можно представить как совокупности дуг эллипсов и берегов прямолинейных разрезов. На контурах полосы заданы значения температуры  $T_l$  либо плотности потока тепла  $q_{ln}$  ( $l = \overline{1; \mathcal{L} + 2}$ ). Значения при  $l = \mathcal{L} + p$  ( $p = \overline{1, 2}$ ) относятся к прямолинейным границам. Контурные по-

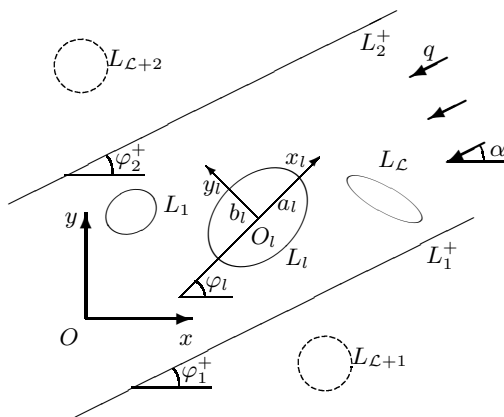


Рис. 1

лосы не подкреплены либо жестко подкреплены. На бесконечности под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  действует линейный поток тепла плотности  $q$  (причем  $\alpha = \varphi_1^+$ ), а напряжения и индукции электромагнитного поля равны нулю.

Как и в случае других областей [1, 2], задача определения термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) многосвязной полосы, сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$  и комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ). Эти функции определяются из соответствующих граничных условий. После этого становится возможным вычислять значения основных характеристик ТЭМУС в точках пластинки (температура  $T$ , плотности потока тепла  $q_x, q_y$ , напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , индукции  $D_x, D_y, B_x, B_y$  и напряженности  $E_x, E_y, H_x, H_y$  электромагнитного поля, перемещения  $u, v$ , потенциалы  $\varphi, \psi$  электромагнитного поля) по формулам [1, 2]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) - 2 \operatorname{Re} i \varkappa_T(\mu_5, 1) F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T^* &= q(t_x x + t_y y), \\ t_x &= \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad \varkappa_T^2 = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}; \\ q_x^* &= -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha; \end{aligned}$$

$\mu_5$  и  $\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — корни характеристических уравнений теплопроводности и электромагнитоупругости [1, 2]

$$k_{22} \mu^2 + 2k_{12} \mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

$$\Delta(\mu) = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) &= l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] - \\ &\quad - l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)], \end{aligned}$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \quad l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2, \quad l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{22} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1}{r_5};$$

$$(E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) = (t_1, t_2, m_1, m_2)T^*;$$

$$u^* = \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y x y,$$

$$v^* = \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x x y,$$

$$\varphi^* = -\frac{t_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{t_2 q t_y}{2} y^2 - t_1 q t_x x y,$$

$$\psi^* = -\frac{m_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{m_2 q t_y}{2} y^2 - m_1 q t_x x y;$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластинки,  $s_{ij}$  — коэффициенты деформации,  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей,  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости,  $\alpha_i$  — коэффициенты теплового расширения,  $t_i$  и  $m_i$  — пирозлектрические и пиромагнитные модули;  $\delta_j^i$  — символ Кронекера.

**3. Решение задачи.** Комплексные потенциалы  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1,4}$ ) определены в многосвязных полосах  $S_5$ ,  $S_k$ , получаемых из полосы  $S$  аффинными преобразованиями [1, 2]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

Будем рассматривать полосу как пересечение двух полуплоскостей, тогда в общем случае эти функции примут вид [2, 4]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5) + \sum_{p=1}^2 F_{5p}^+(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) + \sum_{p=1}^2 \Phi_{kp}^+(z_k). \quad (12)$$

Здесь  $c_5$  — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки;  $D_l = -q_l/4\pi \kappa_T$ ;  $q_l$  — суммарный поток тепла через контур  $L_l$  в область  $S$ ;  $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри эллиптических контуров  $L_{5l}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (9);  $c_{5ln}$  — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;  $\zeta_{5l}$  — переменные;  $F_{5p}^+(z_5)$  — функции, голоморфные в сплошных полуплоскостях  $S_{5p}^+$ , ограниченных линиями  $L_{5p}^+$ , которые получаются из полуплоскостей  $S_p^+$ , ограниченных прямолинейными границами  $L_p^+$ , аффинными преобразованиями (9);  $\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (15)$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$ ;  $A_{5l} = r_5 D_l$ ;  $B_{5l} = r_5 (b_{5l} - D_l z_{5l})$ ;  $b_{5l}$  — вычет функции  $F_5(z_5)$  в точке  $z_{5l}$ ;  $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров  $L_{kl}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (10);  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ ;  $\zeta_{kl}$  — переменные;  $\Phi_{kp}^+(z_k)$  — функции, голоморфные в сплошных полуплоскостях  $S_{kp}^+$ , ограниченных линиями  $L_{kp}^+$ , которые получаются из полуплоскостей  $S_p^+$ , ограниченных прямолинейными границами  $L_p^+$ , аффинными преобразованиями (10).

Следуя [2], выберем вне каждой полуплоскости  $S_p^+$  ( $p = \overline{1, 2}$ ) эллиптические контуры  $L_{\mathcal{L}+p}$  (рис. 1). Обозначим их центры как  $O_{\mathcal{L}+p}(x_{0,\mathcal{L}+p}, y_{0,\mathcal{L}+p})$ , полуоси —  $a_{\mathcal{L}+p}$ ,  $b_{\mathcal{L}+p}$ , углы поворота —  $\varphi_{\mathcal{L}+p}$ . Обозначим через  $L_{5,\mathcal{L}+p}$ ,  $L_{k,\mathcal{L}+p}$  ( $p = \overline{1, 2}$ ) эллиптические контуры, получаемые из  $L_{\mathcal{L}+p}$  аффинными преобразованиями (9), (10).

В качестве функций  $F_{5p}^+(z_5)$ ,  $\Phi_{kp}^+(z_k)$  ( $p = \overline{1, 2}$ ), голоморфных в соответствующих полуплоскостях, выберем функции, голоморфные вне контуров  $L_{5,\mathcal{L}+p}$ ,  $L_{k,\mathcal{L}+p}$ , кроме, быть может, бесконечно удаленной точки. Тогда их можно представить в виде [4]

$$F_{5p}^+(z_5) = D_{\mathcal{L}+p} \ln(z_5 - z_{5,\mathcal{L}+p}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{5,\mathcal{L}+p,n} \varphi_{5,\mathcal{L}+p,n}(z_5),$$

$$\Phi_{kp}^+(z_k) = (A_{k,\mathcal{L}+p} z_k + B_{k,\mathcal{L}+p}) \ln(z_k - z_{k,\mathcal{L}+p}) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,\mathcal{L}+p,n} \varphi_{k,\mathcal{L}+p,n}(z_k).$$

Таким образом, функции  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  примут такой вид:

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} D_l w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (16)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (17)$$

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}+2}$ ) параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [1, 2]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе  $Oxy$  координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где  $\theta$  — параметр параметрического задания эллипса ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).



Переменные  $\zeta_{kl}$  ( $k = \overline{1, 5}$ ) определяются из конформных отображений [1, 2]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (18)$$

внешностей единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ . Здесь

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_k + \mu_k \sin \varphi_k) - ib_l(\sin \varphi_k - \mu_k \cos \varphi_k)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция  $F_5(z_5)$  должна удовлетворять граничному условию [1, 2]

$$2 \operatorname{Re} d_l F_5(t_5) = f_l(t), \quad (19)$$

в котором в случае задания значений температуры  $T_l$

$$d_l = 1, \quad f_l = T_l,$$

а в случае задания плотности потока тепла  $q_{ln}$

$$d_l = i\chi_T, \quad f_l = \int_0^s (q_n^* - q_{ln}) ds + c_l$$

Функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) должны удовлетворять граничным условиям [1, 2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \Phi_k(t_k) = (f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)), \quad (20)$$

где для неподкрепленных контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) &= (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}), \end{aligned}$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) &= (-u^*, -v^*, c_{l3}, c_{l4}). \end{aligned}$$

В общем случае многосвязной полосы (рис. 1) неизвестные постоянные  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$  определяются из граничных условий (19) и (20) с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Для этого на контурах  $\overline{L_i}$  выбирается система точек  $M_{im}$  ( $m = \overline{1, M_i}$ ,  $i = \overline{1, \mathcal{L} + 2}$ , где  $i = \mathcal{L} + p$  ( $p = \overline{1, 2}$ ) относятся

к прямолинейным границам), в которых удовлетворяются граничные условия соответствующих задач.

В задаче теплопроводности, при подстановке функции (16) в граничное условие (19), для определения неизвестных постоянных  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений [1, 2]

$$2 \operatorname{Re} d_i c_5 + 2 \operatorname{Re} d_i w_{5l}(t_{5im}) D_l + 2 \operatorname{Re} d_i \varphi_{5ln}(t_{5im}) c_{5ln} = f_i(t_{im}) \quad (21)$$

$$(i = \overline{1, \mathcal{L} + 2}, m = \overline{1, M_i}),$$

где  $t_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$ ,  $t_{im} = t_{im}(x_{im}, y_{im})$ . Систему (21) решаем с использованием метода сингулярных разложений [5, 6]. После этого становятся известными постоянные  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$  и, как следствие, комплексный потенциал теплопроводности (16). По известной функции (16) можно вычислять температуру и плотности потока тепла в любой точке полосы по формулам (1), (2) [1, 2].

В задаче термоэлектромагнитоупругости, граничным условиям (20) удовлетворить в дифференциальной форме [1, 2]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kl\alpha} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{l\alpha}}{ds} - 2 \operatorname{Re} d_{5l\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_5) \quad (\alpha = \overline{1, 4}), \quad (22)$$

где

$$\delta_{k,s} = dt_k/ds,$$

$$\Phi'_k(z_k) = N'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \quad (23)$$

$$N'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \left[ A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right],$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = - \frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}.$$

При подстановке функций (16) и (23) в условия (22) для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получается следующая система линейных алгебраических уравнений [1, 2]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} d_{ki\alpha} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kim}) a_{kln} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{ki\alpha} \delta_{k,s} N'_k(t_{kim}) -$$

$$-2 \operatorname{Re} d_{5i\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{5im}) + \frac{df_{i\alpha}}{ds}(t_{im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L} + 2}, m = \overline{1, M_i}, \alpha = \overline{1, 4}), \quad (24)$$

где  $t_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$ .

Систему (24) решаем с использованием метода сингулярных разложений [5, 6]. После этого становятся известными постоянные  $a_{kln}$  и, как следствие, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (17). По известным

функциям (17) можно вычислять основные характеристики ТЭМУС в любой точке полосы по формулам (3)–(6) [1, 2].

**4. Численные исследования.** Были проведены численные исследования для полосы, изготовленной из композита на основе титаната бария-феррита (II) кобальта  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  [7]. Его физико-механические и теплофизические постоянные приведены в табл. 1.

Таблица 1. Постоянные материала

Величина	Значение	Величина	Значение
$s_{11}/s_0$	7,165	$\beta_{22}/\beta_0$	0,137
$s_{22}/s_0$	6,797	$\nu_{11}/\nu_0$	-0,190
$s_{66}/s_0$	19,912	$\nu_{22}/\nu_0$	-0,185
$s_{12}/s_0$	-2,337	$\chi_{11}/\chi_0$	0,336
$g_{16}/g_0$	2,028	$\chi_{22}/\chi_0$	0,119
$g_{21}/g_0$	-0,496	$\alpha_1/\alpha_0$	8,530
$g_{22}/g_0$	1,157	$\alpha_2/\alpha_0$	1,990
$p_{16}/p_0$	1,850	$t_2^{\sigma}/t_0$	133,000
$p_{21}/p_0$	0,576	$m_2^{\sigma}/m_0$	133,000
$p_{22}/p_0$	1,186	$k_{11}/k_0$	2,500
$\beta_{11}/\beta_0$	0,156	$k_{22}/k_0$	2,500

Здесь приняты обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^2, p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКл}^{-2}, \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА},$$

$$\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТл}^{-1}, \alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{ МКл} \cdot \text{ К})^{-1},$$

$$m_0 = 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}, k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}.$$

Этот материал относится к кристаллографическому классу  $6mm$ .

При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (16) и (17) и точек  $M_i$  на контурах  $L_i$ , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (21) и (24), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических характеристик пластинок необходимо было в указанных рядах оставлять от 20 до 120 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 2000 «коллокационных точек». Длина участков прямолинейных границ, на которых выбирались «коллокационные точки», составляла от 40 до 60 радиусов отверстий. Как показали исследования, для оптимальной сходимости численных результатов вспомогательные контуры  $L_{\mathcal{L}+p}$  ( $p = \overline{1, 2}$ ) можно положить круговыми и размещенным на расстоянии 4–6 радиусов от соответствующих прямолинейных границ.

При проведении численных исследований решались задачи термоупругости (ТУ), когда не учитывались электромагнитные свойства материала, и термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитывались все свойства материала.

Рассматривался случай вертикальной полосы с одним круговым отверстием ( $a_1 = b_1 = a$ ) (рис. 2). Прямолинейные границы полосы считались теплоизолированными ( $q_{2n} = q_{3n} = 0$ ). Линейный поток тепла направлялся вдоль полосы, т.е. под углом  $\alpha = \pi/2$  рад. [8, 9].

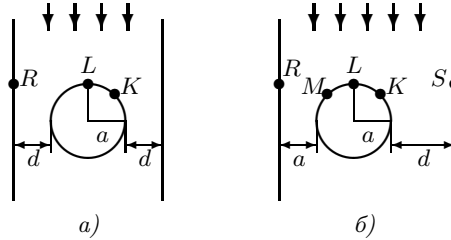


Рис. 2

В табл. 2 для случая, когда круговое отверстие равноудалено от прямолинейных границ полосы (рис. 2, а), когда на контуре отверстия заданы значения температуры  $T_1 = 0$  либо он теплоизолирован ( $q_{1n} = 0$ ), с точностью до плотности линейного потока тепла  $q$  как множителя, приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых точках контура отверстия и прямолинейной границы на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения отношения  $d/a$  расстояния между отверстием и прямолинейными границами  $d$  к радиусу отверстия  $a$ .

Таблица 2. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках полосы (рис. 2, а)

Тип задачи	Точка	Значения $d/a$					
		0,5	1	2	10	100	$\infty$
$T_1 = 0$							
ТЭМУ	K	-0,035	-0,178	-0,283	-0,433	-0,448	-0,448
	L	0,212	0,274	0,356	0,465	0,476	0,476
	R	-0,094	-0,091	-0,111	-0,032	0,000	0,000
ТУ	K	0,130	0,249	0,216	0,210	0,204	0,204
	L	0,147	0,199	0,330	0,460	0,476	0,476
	R	-0,150	-0,198	-0,163	-0,030	-0,004	0,000
$q_{1n} = 0$							
ТЭМУ	K	0,094	0,262	0,335	0,438	0,448	0,448
	L	-0,412	-0,396	-0,420	-0,470	-0,476	-0,476
	R	0,179	0,136	0,132	0,032	0,000	0,000
ТУ	K	-0,279	-0,352	-0,255	-0,212	-0,204	-0,204
	L	-0,323	-0,299	-0,391	-0,465	-0,476	-0,476
	R	0,328	0,280	0,186	0,028	0,004	0,000

Из результатов, приведенных в табл. 2, следует, что расстояние между отверстием и прямолинейными границами существенно влияет на значения напряжений в пластинке. Если на контуре отверстия заданы значения температуры, то наибольшая концентрация напряжений в полосе наблюдается, когда расстояние между отверстием и прямолинейными границами соизмеримо с радиусом отверстия ( $1 \leq d/a \leq 2$ ). При приближении прямолинейных границ к контуру отверстия значения напряжений в зоне-перемычке и около контура

отверстия убывают. Если расстояние возрастает, то значения напряжений около контура отверстия возрастают, а около прямолинейных границ концентрация напряжений убывает. Если же контур отверстия теплоизолирован, то значения напряжений в перемычке и около отверстия сначала убывают, однако при расстоянии  $d/a < 0,5$  концентрация напряжений в перемычке начинает возрастать. Это связано с тем, что сужение перемычек с теплоизолированными краями вызывает рост плотности потоков тепла в перемычках. Если  $d/a > 10$ , то в обоих случаях взаимовлияние прямолинейных границ и отверстия становится незначительным и им можно пренебречь. При дальнейшем увеличении расстояния между отверстием и прямолинейными границами значения напряжений около отверстия стремятся к значениям для случая бесконечной пластинки с одним отверстием [9], а около прямолинейных границ они стремятся к нулю. Из других полученных результатов следует, что для всех случаев концентрация напряжений в полосе на большом расстоянии от отверстия снижается.

В табл. 3 для случая, когда расстояние от кругового отверстия до левой прямолинейной границы равно  $a$ , до правой —  $d$  (рис. 2, б), когда на контуре отверстия заданы значения температуры  $T_1 = 0$  либо он теплоизолирован ( $q_{1n} = 0$ ), с точностью до плотности линейного потока тепла  $q$  как множителя, приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых точках контура отверстия и прямолинейных границ, в зависимости от значения отношения  $d/a$ .

Таблица 3. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках полосы (рис. 2, б)

Тип задачи	Точка	Значения $d/a$				
		1	2	10	100	$\infty$
$T_1 = 0$						
ТЭМУ	$K$	-0,178	-0,271	-0,484	-0,535	-0,538
	$L$	0,274	0,320	0,407	0,413	0,414
	$M$	-0,178	-0,187	-0,137	-0,118	-0,114
	$R$	-0,091	-0,093	-0,141	-0,162	-0,165
	$S$	-0,091	-0,118	-0,048	-0,001	0,000
ТУ	$K$	0,249	0,131	0,024	-0,003	-0,004
	$L$	0,199	0,282	0,303	0,311	0,311
	$M$	0,249	0,311	0,351	0,354	0,355
	$R$	-0,198	-0,261	-0,270	-0,267	-0,269
	$S$	-0,198	-0,148	-0,014	-0,003	0,000
$q_{1n} = 0$						
ТЭМУ	$K$	0,262	0,349	0,552	0,604	0,605
	$L$	-0,396	-0,413	-0,462	-0,464	-0,464
	$M$	0,262	0,245	0,156	0,129	0,127
	$R$	0,136	0,126	0,168	0,191	0,193
	$S$	0,136	0,153	0,055	0,001	0,000
ТУ	$K$	-0,352	-0,169	-0,027	0,003	0,014
	$L$	-0,299	-0,365	-0,348	-0,342	-0,340
	$M$	-0,352	-0,400	-0,400	-0,447	-0,455
	$R$	0,280	0,330	0,306	0,317	0,318
	$S$	0,280	0,180	0,015	0,003	0,000

Из результатов, приведенных в табл. 3, следует, что при увеличении отношения  $d/a$  напряжения около отверстия и в зоне-перемычке с левой прямолинейной границей стремятся к значениям для случая полуплоскости с отверстием [4], а около правой прямолинейной границы напряжения стремятся к нулевым значениям. Из других полученных результатов следует, что на большом удалении от отверстия концентрация напряжений полосе снижается.

**Выводы.** В результате исследований установлено, что пренебрежение электромагнитными свойствами материала приводит к большому искажению результатов. Для получения корректных оценок напряженного состояния эти свойства следует учитывать в расчетах по разработанной в статье методике.

1. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
2. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
3. Калоеров С.А. Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – Вып. 1 (47). – С. 45–61.
4. Глушанков Е.С. Действие линейного потока тепла в многосвязной полуплоскости из пьезоматериала / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикл. мех. – 2020. – №. 1. – С. 16–27.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
6. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
7. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
8. Калоеров С.А. Потенциальные электромагнитные поля в пьезопластиках при механических, электромагнитных и тепловых воздействиях / С.А. Калоеров // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 19–34.
9. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластиках / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 12–25.

**E.S. Glushankov**

**The linear heat flux action in infinite multiply connected piezoelectric strip.**

With using the conformal mapping and the complex potentials the problem of determining the thermo-electro-magneto-elastic state of infinite multiply connected piezoelectric strip under linear heat flux action is solved. The evaluation of the unknown coefficients of complex potentials is carried out using the boundary conditions and the least squares. The regularities of effect of strip's geometric characteristics and the properties of its material on the stress concentration in the strip are set with the numerical studies.

**Keywords:** *linear heat flux, thermo-electro-magneto-elastic state, infinite strip, thermal stresses, complex potentials.*

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 624.042.1:624.048

©2020. В.Ф. Муцанов, М.Н. Цепляев, А.В. Зубенко

## ВАРИАНТЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРОВ

В работе рассматривается один из этапов решения задачи получения адекватной конечно-элементной модели вертикального цилиндрического резервуара. В частности, выполняется сравнение напряжённо-деформированного состояния цилиндрической стенки резервуара при различных вариантах моделирования конструктивных элементов. Модель выполняется в расчётном комплексе ЛИРА-САПР 2015 R4, в качестве расчётного сочетания нагрузки учитывается фактическая форма распределения ветрового потока и вакуума. В результате определены величины и расхождения в значениях компонентов напряжённого состояния при различных способах моделирования. Выявлены допустимые упрощения конечно-элементной модели, которые приводят к незначительному изменению результирующих напряжений. Полученные результаты позволяют определить способы моделирования для дальнейшей верификации численной модели.

*Ключевые слова:* Вертикальный цилиндрический резервуар; напряжения; метод конечных элементов; цилиндрическая оболочка; напряжения; кольца жёсткости.

**Введение.** Стальные вертикальные цилиндрические резервуары (ВЦР) – это надземные сооружения, предназначенные для приёма, хранения, подготовки и выдачи жидких продуктов. Чаще всего такие конструкции применяются для хранения нефти и нефтепродуктов, пожарной или питьевой воды, минеральных удобрений. Часто резервуары располагаются группами, образуя "резервуарные парки". Поскольку в случае аварии на таких объектах окружающей среде, имуществу и здоровью людей может быть нанесён значительный ущерб, резервуары относятся к сооружениям с высоким уровнем ответственности.

Основным элементом ВЦР является цилиндрическая стенка, как правило, состоящая из поясов различной толщины. По своим параметрам стенку относят к тонкостенным безмоментным оболочкам при конструктивных расчётах. Несмотря на почти полуторавековую историю применения ВЦР, до сих пор на практике имеют место случаи общей и местной потери устойчивости цилиндрической стенки. В частности, такие повреждения бывают вызваны действием ветровой нагрузки и составляют около 10% всех случаев аварийного отказа конструкции [1]. Повреждённые таким образом конструкции восстановлению, как правило, не подлежат. Актуальным также является вопрос наличия большого количества резервуаров, нормативный срок эксплуатации которых подходит к

концу либо завершился. И хотя их техническое состояние иногда позволяет продолжать эксплуатацию, возросшие требования к восприятию нагрузок не позволяют продлить эксплуатацию данных конструкций без усиления. Таким образом задача совершенствования способов усиления стенок ВЦР является актуальной.

Существуют различные варианты внешнего усиления. Так, в работе [2] рассматривается использование технологической лестничной клетки для обслуживания кровли. Однако чаще других в качестве усиливающих элементов стенок вертикальных цилиндрических резервуаров применяются кольца жёсткости (рис. 1).



а) ВЦР с понтоном



б) ВЦР со стационарной кровлей

Рис. 1. Резервуары с ветровыми кольцами жёсткости.

Анализ работы стенки резервуара, усиленной кольцами жесткости (КЖ), встречается во многих литературных источниках и публикациях. Все авторы отмечают эффективность применения горизонтальных колец жёсткости для повышения устойчивости стенки, находящейся под внешним давлением. Современные нормативные документы также оговаривают возможность усиления стенок ВЦР кольцевыми рёбрами жёсткости. Таким образом, сам вопрос целесообразности и эффективности метода обеспечения устойчивости постановкой кольцевых рёбер жесткости не вызывает сомнения. Однако имеющиеся нормативные требования могут быть дополнены в части требований к расположению и конструкции колец, о чём говорится в работах различных авторов [3, 4, 5]. Для анализа устойчивости стенок ВЦР от действия ветровой нагрузки необходима разработка адекватной конечно-элементной модели соответствующей реальной работе конструкции.

Таким образом целью данного исследования является анализ напряжённо-деформированного состояния оболочки при различных вариантах конечно-элементного моделирования конструктивных элементов.

**1. Вариантное формирование конечно-элементной модели ВЦР.** Для достижения поставленной цели, учитывая опыт создания КЭ моделей ВЦР другими авторами [6, 7, 8], определены варьируемые конструктивные варианты модели. Рассматривались различные способы моделирования следующих кон-



структивных элементов: узел стыка стенки и днища; узел стыка стенки и покрытия (верхнее опорное кольцо); промежуточные кольца жёсткости.

Решение данного этапа разработки адекватной конечно-элементной модели ВЦР будет выполняться в расчётном комплексе ЛИРА-САПР 2015 г4.

### 1.1. Расчётная нагрузка и габариты резервуара.

В качестве расчётной нагрузки принято сочетание ветра и вакуума. Расчётное ветровое давления равно 500 Па, величина вакуума 250 Па, коэффициенты сочетания и надёжности в исследовательских целях не учитывались. В конечно-элементной модели учтено фактическое распределение ветрового потока согласно СП 131.13330.2018 "Строительная климатология" (рис. 2). Ветровая нагрузка в пределах конечного элемента считалась постоянной. Моделирование ветровой нагрузки выполнялось через текстовый файл, по алгоритму, приведенному в работе [9].

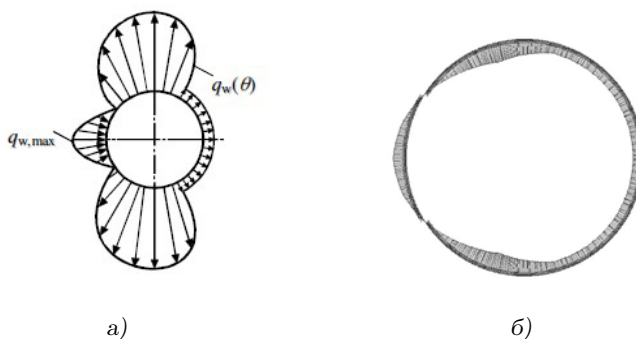


Рис. 2. Эпюра ветрового давления на стенку резервуара: а – нормативное распределение ветрового потока; б – смоделированная ветровая нагрузка в комплексе ЛИРА-САПР 2015 г4.

Обзор статистических данных [10] показывает на территории РФ, наиболее распространены ВЦР объёмом от 5000 до 20000 м<sup>3</sup>. Для целей данного исследования будет взят резервуар объёмом 20000 м<sup>3</sup> с параметрами согласно типовому проекту, поскольку для ВЦР меньших объёмов кольцевое усиление применяется достаточно редко. Схематическое изображение и габаритные размеры рассматриваемого резервуара представлены на рисунке 3.

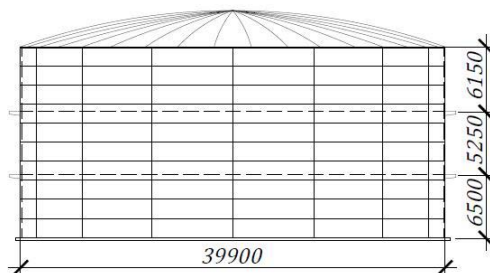


Рис. 3. Общий вид исследуемого резервуара.

Для данного резервуара предусмотрено два промежуточных усиливающих КЖ (расположенных на уровне +6,500 и +12,250), а также опорное кольцо кровли, которое также является и кольцом жёсткости.

### 1.2. Моделирование конструктивных элементов.

На первом этапе создаётся каждый отдельный элемент модели ВЦР: днище, окрайка днища, стенка, ребристо-кольцевого купол, покрытие кровли, опорное кольцо, промежуточные КЖ. Затем, используя режим сборки, формируется модель резервуара в целом. Ниже более подробно описан указанный алгоритм.

#### 1.2.1. Моделирование стенки и покрытия кровли.

Для создания цилиндрической стенки и покрытия кровли используется функция создания поверхностей вращения в программе ЛИРА-САПР 2015 r4. Моделирование выполнялось элементом № 44 (прямоугольный конечный элемент оболочки). Основным варьируемым параметром является шаг сетки конечных элементов (КЭ), а именно количество элементов по длине окружности. Рассмотрены варианты от 160 до 600 КЭ по длине окружности. По высоте количество элементов определялось требованием соблюдения отношения между сторонами КЭ. Размеры КЭ стенки назначались из условия сходимости напряжений. Сравнивались аналитические и численные значения кольцевых напряжений от действия гидростатической нагрузки. При формировании покрытия кровли в верхней её части формируются КЭ с отношением сторон, при котором возможны ошибки при вычислении напряжений. Поскольку НДС кровли не является предметом исследования, наиболее целесообразно удалить данную часть (рис. 5б).

#### 1.2.2. Моделирование нижнего уторного узла.

Днище резервуара создано путём автоматической триангуляции с заданными параметрами области внутри окрайки днища - рисунок 4. Для днища и окрайки применялись прямоугольные КЭ №44, за исключением мест стыка днища со стенкой, где использовались треугольные КЭ №42.



Рис. 4. Фрагмент днища КЭ модели ВЦР.

В зависимости от того как смоделирован узел примыкания стенки к днищу, существенно может отличаться НДС в зоне влияния этого стыка. Для данного исследования принято классическое решение - уторный узел (стык стенки днища) принято считать жёстким. Учёт податливости основания может внести

существенные коррективы в НДС оболочки в зоне стыка днища и стенки [11]. Однако наибольшее влияние этот эффект имеет от действия гидростатической нагрузки при расчётах на прочность. В то же время, при проверке устойчивости стенки расчётным является сочетание нагрузок ветра и вакуума. Также в реальной конструкции при наличии вакуума осевое давление на стенку от днища не оказывается. В месте стыка днища и стенки варьируемыми параметрами будут различные связи в узлах и их количество по контуру днища.

### 1.2.3. Моделирование несущей части кровли.

Рибристо-кольцевой купол (РКК) сферического покрытия (рис. 5а) моделируется созданием поверхности вращения состоящей из стержневых и затем удалением ненужных элементов.

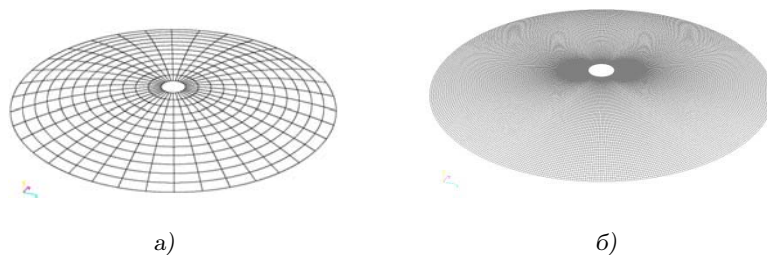


Рис. 5. а – рибристо-кольцевой купол, смоделированный стержневыми КЭ; б – покрытие из пластинчатых КЭ.

Для получения полноценной работы конструкции РКК моделировался в виде стержневых элементов, поверх которых выполнялась сетка конечных элементов - покрытие. Отверстие на верхней части модели выполнено для исключения ошибок расчёта, поскольку КЭ элементы в указанной области имеют недопустимое соотношение сторон.

Варируемыми параметрами в узлах стыка несущих рёбер сферического купола с опорным кольцом являются: объединение перемещений узлов (рис. 6); шарнирное соединение узлов; стык без дополнительных связей (жёсткий).

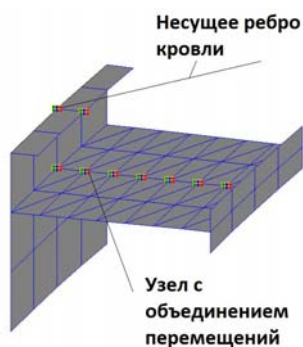


Рис. 6. Узлы с объединением перемещений для случая моделирования верхнего опорного кольца пластинчатыми элементами.

Объединение перемещений рассматривалось как в случае полноразмерного моделирования опорного кольца, так и в случае задание его параметрическим стержневым элементом.

#### 1.2.4 Моделирование опорного кольца.

Опорное кольцо – обязательный конструктивный элемент ВЦР со стационарными крышами. Оно необходимо для восприятия распора возникающего в сферических и конических кровлях резервуаров и передачи вертикальной составляющей нагрузки на стенку резервуара. Поперечное сечение опорного кольца подбирается в первую очередь при расчёте кровли, в данном исследовании, размеры опорного кольца приняты согласно типовому проекту – рисунок 7.

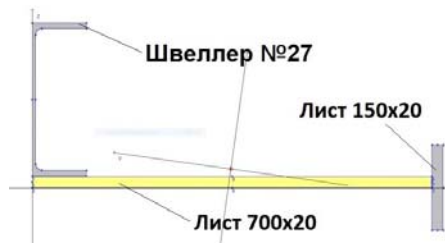


Рис. 7. Поперечное сечение опорного кольца.

Для моделирования опорного кольца в расчётном комплексе ЛИРА-САПР можно воспользоваться стержневыми элементами с необходимыми геометрическими характеристиками либо пластинчатыми элементами с фактическими размерами реальных конструкций. Альтернативой является полный запрет горизонтальных перемещений в узлах крепления кольца. Указанные способы моделирования опорного кольца будут является варьируемыми параметрами.

В случае задания опорного кольца пластинчатыми элементами его моделирование выполнялось последовательным созданием каждой составляющей части и затем их последовательной сборкой программными средствами комплекса ЛИРА-САПР. Для правильной работы узла стыка кровли и стенки были добавлены вертикальные ребра в местах стыка опорного кольца с балками кровли. Итоговый вид полученного опорного кольца, пристыкованного к стенке ВЦР, изображен на рисунке 8а. Для большей наглядности на рисунке 8б приведено



а) смоделированное в ЛИРА-САПР



б) в реальной конструкции

Рис. 8. Опорное кольцо.

фото опорного кольца реальной конструкции, сделанное при проведении ремонтных работ.

### 1.2.5 Моделирование промежуточных КЖ.

Промежуточные кольца жёсткости моделируются аналогично опорным кольцам, их расположение на стенке ВЦР принимается согласно типовому проекту. Поперечное сечение КЖ сплошное и состоит из полки и стенки. Общий вид поперечного сечения кольца жёсткости приведён на рисунке 9б. Варьируемыми параметром будет способ моделирования КЖ.

В случае задания пластинчатыми элементами применялся КЭ №44, с учётом жёсткого соединения со стенкой ВЦР. Через каждые 500 мм по длине КЖ устанавливаются подкрепляющие опорные рёбра, для которых применялся КЭ №42 – рисунок 9а.

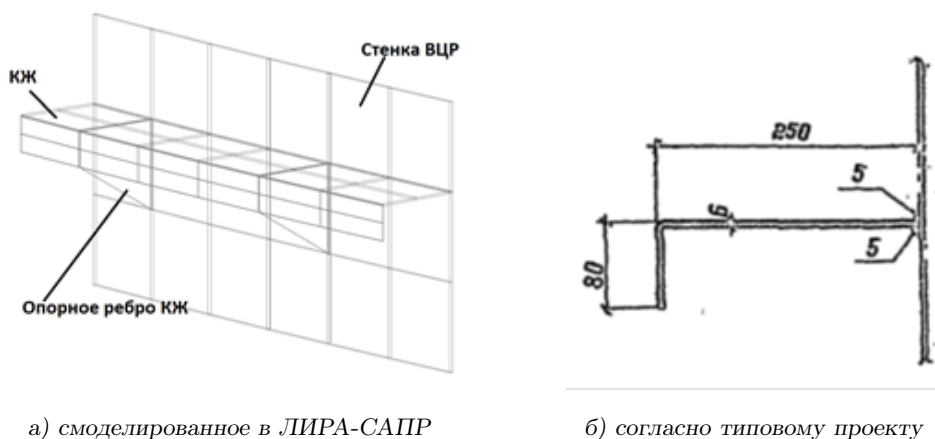


Рис. 9. Конструкция промежуточного КЖ.

Исследование возникающих напряжений в стенке резервуара в зависимости от жёсткости промежуточных усиливающих колец отдельно рассматривается в работе [12].

**2. Результаты расчёта НДС.** Значение нагрузки прикладывалось к расчётной модели и в программном комплексе ЛИРА-САПР 2015 г4 выполнялись расчёты напряжений для различных вариаций краевых условий, шага разбиения сетки КЭ и других. В результате определялись параметры НДС стенки, наиболее репрезентативными из которых являются значения кольцевых, а в отдельных случаях меридиональных напряжений. Общий вид деформированной схемы и распределения напряжений для одного из рассматриваемых вариантов приведён на рисунке 10. Полученные значения напряжений позволяют сделать вывод о величине влияния того или иного способа моделирования конструкций на НДС резервуара в целом. Поскольку все варьируемые параметры, за исключением шага сетки КЭ, имеют локальный характер, сравнивались пиковые значения напряжений в зоне их влияния.

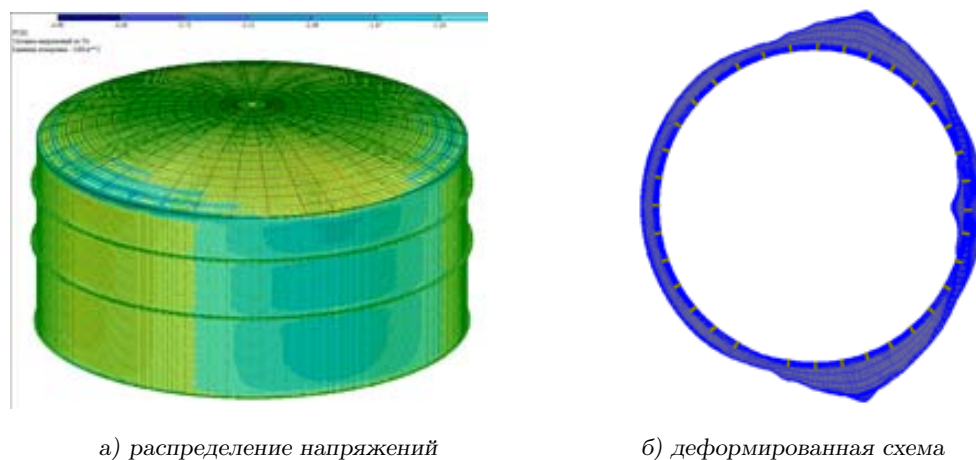


Рис. 10. НДС резервуара от действия ветровой нагрузки.

### 2.1. Напряжения в стенке резервуара в зависимости от способа моделирования нижнего уторного узла.

Рассматриваемые варианты численной модели и величины значений кольцевых напряжений  $\sigma_x$  для них приведены в таблице 1. Базирование выбора параметров конечно-элементной модели на основе результатов для кольцевых напряжений основано на их определяющем воздействии в дальнейших численных исследованиях рационального расположения колец жесткости.

При сравнении с аналитическими значениями кольцевых напряжений от действия гидростатической нагрузки наименьшее расхождение обеспечивает вариант № 4 при количестве элементов не менее 480 по длине окружности. Дальнейшее уменьшение шага сетки КЭ не приводит к существенному уточнению результирующих напряжений, однако повышает сложность расчётной схемы. Для обеспечения минимальных затрат времени компьютерного расчёта дальнейшее уменьшение сетки КЭ нецелесообразно, и указанный вариант принят в качестве расчётного.

Из таблицы 1 отмечены варианты моделирования нижнего уторного узла которые приводят к значительному расхождению результатов. Таковыми являются варианты 1, 3, 4. При этом варианты 1 и 2 по своим значениям близки и расхождения не превышает 11%.

### 2.2. Напряжения в стенке резервуара в зависимости от способа моделирования верхнего уторного узла.

Исходя из результатов, приведенных в таблице 1, при последующих расчётах количество конечных элементов принималось равным не менее 480 по длине окружности оболочки. По результатам расчёта величин кольцевых напряжений в зависимости от варианта моделирования верхнего уторного узла сформирована таблица 2. В указанной таблице также учитываются различные способы задания опорного кольца сферической кровли.

Таблица 1.

Величина напряжений в зависимости от способа моделирования нижнего уторного узла

№	Варианты численного моделирования компонентов ВЦР в комплексе ЛИРА-САПР 2015 r4	Величина значений $\sigma_x$ при количестве элементов по длине окружности									
		160		300		400		480		600	
		МПа	%	МПа	%	МПа	%	МПа	%	МПа	%
1	Жёсткое закрепление по контуру в каждом узле стыка стенки и днища	9,2	100	6,2	67	4,9	53	4,2	46	4,1	45
2	Жесткий стык стенки с днищем с запретом перемещений в вертикальном и горизонтальном направлениях в каждом узле стыка днища и стенки	10,2	111	8,4	91	8	87	7,7	84	7,8	85
3	Жесткий стык стенки с днищем с запретом перемещений в вертикальном и горизонтальном направлениях в четырёх крайних узлах	4,5	49	2,8	30	2	22	1,6	17	1,6	17
4	Жесткий стык стенки с днищем с запретом перемещений в вертикальном и горизонтальном направлениях в трёх крайних узлах	6	65	4,7	51	3,4	37	2,5	27	2,5	27

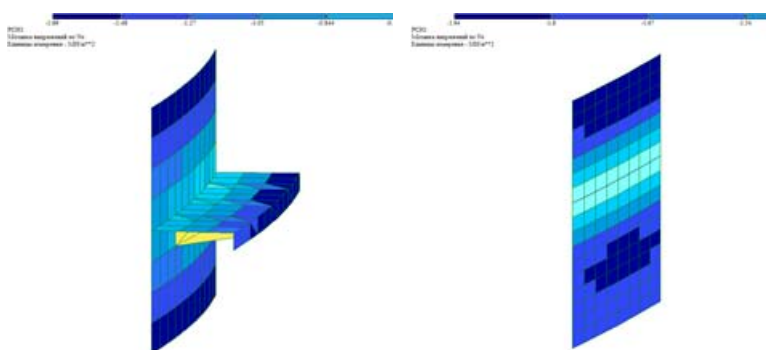
### 2.3. Напряжения в стенке резервуара в зависимости от способов моделирования КЖ.

Возможные варианты определены из практических соображений различных случаев моделирования опорного и промежуточных колец жёсткости ВЦР в других исследованиях [13, 14]. Фрагменты расчётных схем резервуаров с полученным распределением кольцевых напряжений в зоне расположения верхнего КЖ для двух вариантов моделирования приведены на рисунке 11. По результатам (табл. 3) определено, что моделирование геометрии и жёсткости кольцевого ребра вызывает существенное отличие НДС пояса стенки - около 20%. При этом задание КЖ путём запрета перемещений не приводит к значительным отклонениям по напряжениям по сравнению с заданием КЖ стержневым элементом.

Таблица 2.

Величина напряжений в верхнем поясе ВЦР в зависимости от способа моделирования верхнего уторного узла

№	Варианты численного моделирования компонентов ВЦР в комплексе ЛИРА-САПР 2015 r4	Величина значений $\sigma_x$ в % при моделировании опорного кольца:		
		Пластинчатыми элементами	Стержневыми элементами	Запретом перемещений в узлах
1	Жесткое закрепление рёбер РКК к стенке	100	108	126
2	Шарнирное закрепление рёбер РКК к стенке	84	89	96
3	Использования объединения перемещений	96	104	117



а) при объёмном моделировании КЖ

б) при моделировании КЖ стержнями

Рис. 11. Напряжённое состояние стенки в зоне промежуточного КЖ.

Таблица 3.

Значения кольцевых напряжений при различных вариантах моделирования КЖ

№	Варианты численного моделирования КЖ	Значение $\sigma_x$ , МПа	Значение $\sigma_x$ , %
1	Стержень с заданной жёсткостью	21,1	100
2	Запрет горизонтальных перемещений в узлах его стыка со стенкой	20,06	95
3	КЖ моделируется пластинчатыми элементами в полную величину.	24,8	118



### Выводы.

1. На основе анализа имеющегося опыта расчёта и проектирования ВЦР определён перечень варьируемых параметров конечно-элементной модели резервуара.

2. Для каждого из определённых вариантов моделирования создана расчётная схема и выполнен расчёт НДС цилиндрической стенки от действия ветра и вакуума. Зафиксированы компоненты напряженного состояния всех испытанных моделей оболочек и определены параметры модели, которые существенно либо незначительно меняют картину НДС оболочки.

3. Для рассматриваемого резервуара высокая сходимость численных и аналитическими значений напряжений наблюдается при количестве КЭ не менее 480 по длине окружности.

4. Моделирования опорного и промежуточного КЖ в объёмной постановке приводит к снижению результирующих напряжений на 6-10% по сравнению с использованием стреевых элементов.

5. В целом определены параметры и характеристики численной модели резервуара, требующие экспериментальной либо аналитической верификации для дальнейшей разработки адекватной конечно-элементной модели ВЦР.

1. Ханухов Х.М. Нормативно-техническое и организационное обеспечение безопасной эксплуатации резервуарных конструкций / Х.М. Ханухов, А.В. Алипов // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2011. – № 10. – С. 1–40.
2. Shokrzadeh A. Strengthening effects of spiral stairway on the buckling behavior of metal tanks under wind and vacuum pressures / A. Shokrzadeh, M. Sohrabi // Thin-Walled Structures. – 2016. – Vol. 106. – P. 437–447.
3. Егоров Е.А. Устойчивость вертикальных стальных резервуаров с кольцевыми ребрами жесткости / Е.А. Егоров, К.И. Дмитренко // Строительство. Материаловедение. Машиностроение. Серия : Инновационные технологии жизненного цикла объектов жилищно-гражданского, промышленного и транспортного назначения. – 2013. – № 69. – С. 182–186.
4. Bu F. A rational design approach of intermediate wind girders on large storage tanks / F. Bu, C. Qian // Thin-Walled Structures. – 2015. – Vol. 92, No. 1. – P. 76–81.
5. Муцанов В.Ф. Обеспечение устойчивости стенок резервуаров на основе рационального расположения колец жёсткости / В.Ф. Муцанов, М.Н. Цепляев // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2018. – № 9(72). – С. 58–73.
6. Тарасенко А.А. Численное моделирование подъема резервуара при ремонте кольцевого фундамента / А.А. Тарасенко, С.В. Чирков // Технические науки. – 2014. – Вып. 8. – С. 155–158.
7. Jahangiri Me. Computational Buckling Analysis of Wind Loaded Cylindrical Storage Tanks / Me. Jahangiri, M.H. Fakhrabadi, Mi. Jahangiri // Majlesi Journal of Energy Management. – 2012. – No. 4(1). – P. 23–31.
8. Samigullin G.H. Evaluation of stress-strain state of steel cylindrical tank with dent defect / G.H. Samigullin, A.A. Lyagova, A.S. Dmitriyeva // International Journal of Applied Engineering Research. – 2017. – Vol. 12, No. 5. – P. 761–764.
9. Цепляев М.Н. Моделирование реальной эпоры ветрового давления на цилиндрический резервуар в среде SCAD / М.Н. Цепляев // Металлические конструкции. – 2016. – Т. 22, № 4. – С. 183–192.
10. Аммосов Г.С. Особенности коррозионного истощения ресурса резервуаров и оценка интенсивности возрастания напряженного состояния в сварных швах / Г.С. Аммосов, Д.С. Иванов, А.П. Аммосов // Наука и образование. – 2017. – № 1. – С. 75–80.

11. *Мущанов В.Ф.* Исследования напряженно-деформированного состояния уторного узла в вертикальных цилиндрических резервуарах объемом 10000 и 50000 м<sup>3</sup> / В.Ф. Мущанов, Д.И. Роменский // Металлические конструкции – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 61–71.
12. *Мущанов В.Ф.* Уточнение НДС стенки резервуара при объёмном моделировании колец жесткости / В.Ф. Мущанов, М.Н. Цепляев // Материалы международной научно-практической конференции "Архитектура и искусство: от теории к практике" (Ростов-на-Дону, 24-27 апреля 2018 г.). – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2018. – Т. 1. – С. 76–88.
13. *Burgos C.A.* Buckling estimates for oil storage tanks: Effect of simplified modeling of the roof and wind girder / C.A. Burgos, J.C. Batista-Abreu, H.D. Calabr, R.C. Jaca, L.A. Godoy // Thin-Walled Structures. – 2015. – Vol. 91. – P. 29–37.
14. *Azzuni E.* Stability of open top cylindrical steel storage tanks: Design of top wind girder / E. Azzuni, S. Guzey // Journal of Pressure Vessel Technology. – 2017. – Vol. 139, No 3. – P. 639–649.

#### **V. Mushchanov, M. Tseplyaev, A. Zubenko**

##### **Finite element modeling options for vertical cylindrical tanks.**

The article describes the stage of solving the problem of obtaining numerical model of a vertical cylindrical tank. In particular, made a comparison of the stress-strain state of the cylindrical wall of the tank for different variants of modeling structural elements. The model is made in the LIRA-SAPR 2015 R4 calculation complex, the actual form of the wind flow and vacuum distribution is taken into account as the calculated load combination. As a result, the values and discrepancies in the values of the stress state components were determined for various modeling methods. Revealed admissible simplifications of the finite element model, which lead to a slight change in the resulting stresses. The obtained results make it possible to determine modeling methods for further verification of the numerical model.

**Keywords:** *vertical cylindrical tank; stress; finite element method; cylindrical shell; stresses; stiffening rings.*

ГОУ ВПО "Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры", Макеевка  
*mvf@donnasa.ru*  
*m.n.tseplyaev@donnasa.ru*  
*a.v.zubenko@donnasa.ru*

*Получено 17.08.2020*

УДК 624.047.2

©2020. В.Ф. Муцанов, А.Н. Оржиховский, М.Н. Цепляев

## ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В статье рассматривается методика расчета стержневых конструкций в геометрически нелинейной постановке. В качестве основного метода расчета принят метод конечных элементов. Так как в большинстве своем современные строительные конструкции представляют собой пространственные системы, то метод конечных элементов реализован в пространственной постановке. Приведена методика формирования матрицы жесткости конечного элемента, жестко закрепленного в крайних точках. Рассматривается методика корректировки матрицы жесткости конечного элемента с учетом расстановки шарнирных связей. Приведена методика формирования матрицы направляющих косинусов. Рассматриваются основополагающие принципы геометрически нелинейного расчета стержневых конструкций. Предложены поправочные функции позволяющие учитывать дополнительные напряжения в системе от деформаций, приобретенных на предыдущих этапах расчета.

**Ключевые слова:** стержни, метод конечных элементов, геометрическая нелинейность, матрица жесткости, матрица направляющих косинусов.

Наиболее точные сведения о напряженно-деформируемом состоянии системы возможно получить только при комплексном расчете всех элементов конструкции в целом. Большинство современных строительных конструкций представляют собой сложные многоэлементные статически неопределимые системы. К сожалению, применение аналитических методов расчета к таким конструкциям практически невозможно. В таких случаях используют численные методы расчета. Данные методы получили широкое распространение благодаря возможности алгоритмизации вычислений и используются в таких программных комплексах как: "ЛИРА-САПР", "ЛИРА SCAD Office", "ANSYS" а так же рядом других.

Подавляющее большинство современных систем автоматического проектирования и расчета строительных конструкций основываются на методе конечных элементов (МКЭ). МКЭ - это вариационный метод. Функционал энергии для всей рассматриваемой области здесь представляется в виде суммы функционалов отдельных ее частей - конечных элементов. По области каждого элемента, независимо от других, задается свой закон распределения искомым функций. Такую кусочно-непрерывную аппроксимацию выполняют благодаря использованию заранее определенных аппроксимирующих функций, называемых также координатными или интерполирующими. С помощью функций рассматриваемые непрерывные величины (перемещения, напряжения и т.д.) в пределах каждого конечного элемента (КЭ) выражаются через значения этих величин в узловых точках, а произвольная заданная нагрузка заменяется системой эк-

вивалентных узловых сил. У ряда строительных конструкций, испытывающих значительные деформации, наблюдается нелинейная связь между перемещениями и деформациями. Данную нелинейность работы системы следует учитывать при реализации МКЭ.

Наибольшее распространение в строительстве получили пространственные стержневые конструкции. Пространственный стержневой конечный элемент, в общем виде, имеет двенадцать степеней свободы. Шесть из которых - линейные перемещения, а оставшиеся - угловые. При этом, начальный и конечный узел элемента имеют по шесть степеней свободы (рис. 1).

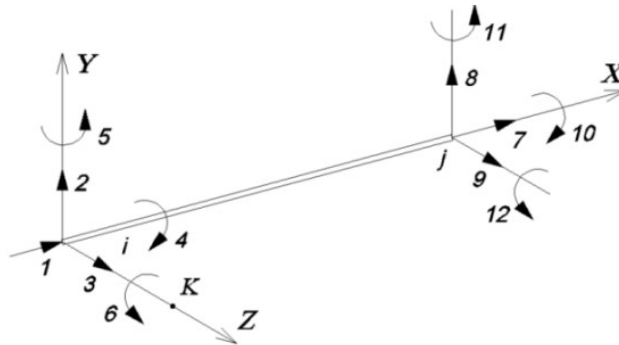


Рис. 1. – Стержневой конечный элемент с двенадцатью степенями свободы.

Матрица жесткости пространственного стержневого элемента с двенадцатью степенями свободы приведена на рисунке 2.

$\frac{EA}{L}$					$-\frac{EA}{L}$						
	$\frac{12EI_x}{L^3}$				$\frac{6EI_x}{L^2}$	$\frac{12EI_x}{L^3}$					$\frac{6EI_x}{L^2}$
		$\frac{12EI_y}{L^3}$			$\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{12EI_y}{L^3}$				$-\frac{6EI_y}{L^2}$
			$\frac{GI_{\text{кр}}}{L}$					$-\frac{GI_{\text{кр}}}{L}$			
				$\frac{4EI_y}{L}$			$\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{2EI_y}{L}$		
					$\frac{4EI_x}{L}$		$\frac{6EI_x}{L^2}$			$\frac{2EI_x}{L}$	
					$\frac{EA}{L}$						
						$\frac{12EI_x}{L^3}$				$\frac{6EI_x}{L^2}$	
							$\frac{12EI_y}{L^3}$			$\frac{6EI_y}{L^2}$	
								$\frac{GI_{\text{кр}}}{L}$			
									$\frac{4EI_y}{L}$		
										$\frac{4EI_x}{L}$	
											$\frac{4EI_x}{L}$

Рис. 2. – Матрица жесткости пространственного стержневого конечного элемента с двумя жесткими узлами, где:  $E$  – модуль Юнга;  $I_x$ ,  $I_y$  – осевые моменты инерции;  $L$  – длина стержня;  $G$  – модуль упругости второго рода;  $A$  – площадь сечения элемента.

Матрица симметрична относительно главной диагонали. При изменении системы локальных координат, матрица жесткости элемента будет иметь другой вид и использование указанных зависимостей приведет к ошибкам в расчете. При установке шарнирных связей по направлению возможных перемещений матрица, изображенная на рисунке два, уже не может быть применена. Как правило, для учета шарниров используют два способа. Первый заключается в использовании уже насчитанных локальных матриц жесткости с учетом шарниров. Следовательно, заранее предусматриваются все возможные варианты расположения шарнирных связей. Данный способ применяется редко и в основном при решении плоских задач. Недостатками способа является значительное увеличение объема программного кода и применение процесса учета шарниров исключительно при формировании локальных матриц жесткости. Второй способ основывается на корректировке матрицы жесткости с двумя жесткими узлами. В основе его лежит метод конденсации. Основное уравнение МКЭ для стержня приведенного на рисунке один имеет вид:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Z_A \\ Z_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Блочная форма данного уравнения:

$$\begin{aligned} \{Z_A\} + [K_{AB}]\{Z_B\} &= \{P_A\}; \\ [K_{BA}]\{Z_A\} + [K_{BB}]\{Z_B\} &= \{P_B\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если по направлению перемещения  $Z_A$  введен шарнир, то усилия от данного перемещения равны нулю ( $P_A = 0$ ). Тогда выделим  $Z_A$ :

$$\begin{aligned} \{Z_A\} &= -[K_{AB}]\{Z_B\}; \\ \{Z_A\} &= -[K_{AA}]^{-1}[K_{AB}]\{Z_B\} \end{aligned} \quad (3)$$

и подставим в выражение 2:

$$\left( [K_{BB}] - [K_{BA}][K_{AA}]^{-1}[K_{AB}] \right) \{Z_B\} = \{P_B\} \quad (4)$$

Таким образом, матрица жесткости примет вид:

$$[K_r^m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_m \end{bmatrix}; \quad (5)$$

где действительные члены определяются выражением:

$$[K_m] = [K_{BB}] - [K_{BA}][K_{AA}]^{-1}[K_{AB}]; \quad (6)$$

Матрица направляющих косинусов стержневого элемента имеет размерность 12x12 и в блочном виде приведена ниже:

$$[t] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}; \quad [Tr] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad (7)$$

где расчет основного блока «λ» производится в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1.

Блок матрицы направляющих косинусов пространственного конечного элемента

$\cos \beta * \cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta * \sin \alpha$
$\sin \alpha * \sin \gamma -$ $-\cos \alpha * \cos \gamma * \sin \beta$	$\cos \gamma * \cos \beta$	$\cos \alpha * \sin \gamma -$ $-\cos \gamma * \sin \beta * \sin \alpha$
$\sin \alpha * \cos \gamma -$ $-\sin \beta * \sin \gamma * \cos \alpha$	$\sin \gamma * \cos \beta$	$\cos \gamma * \cos \alpha -$ $-\sin \beta * \sin \gamma * \sin \alpha$

Составляющими матрицы выступают косинусы углов между глобальными и локальными координатами. Основываясь на координатах крайних узлов элемента, производятся вычисление углов направляющих косинусов по средствам векторной алгебры. Для программ производящих линейные расчеты этот подход допустим, но для конструктивно-нелинейных расчетов он не приемлем. Не учитывается история развития деформаций конструкции от предыдущих этапов расчета. Для таких случаев матрица направляющих косинусов формируется с помощью дополнительной точки «k» (рис. 3). Её координаты получают добавлением приращения равным единице для координаты «y» начального узла «A» в глобальной системе координат, эти координаты остаются неизменными в течение всего расчета. Тогда направляющие косинусы оси X:

$$V_x = \left\{ \frac{x_2 - x_1}{L}, \frac{z_2 - z_1}{L}, \frac{y_2 - y_1}{L} \right\} \quad (8)$$

где:  $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  – длина стержня;  $(x_1, y_1, z_1)$  – координаты начального узла «А»;  $(x_2, y_2, z_2)$  – координаты конечного узла «Б». Направляющие косинусы оси Y:

$$V_y = \left\{ \frac{x_k - x_1}{r}, \frac{z_k - z_1}{r}, \frac{y_k - y_1}{r} \right\} \quad (9)$$

где:  $r = \sqrt{(x_k - x_1)^2 + (y_k - y_1)^2 + (z_k - z_1)^2}$ .

Тогда направляющие косинусы оси Z это векторное произведение:

$$V_z = V_y \times V_x. \quad (10)$$

Блок матрицы направляющих косинусов принимает вид:

$$\lambda = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_z \\ V_y \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Геометрическая нелинейность учитывается за счет поэтапного приложения проектной нагрузки и реализации МКЭ в линейной постановке на каждом этапе. На каждом последующем этапе учитываются перемещения, приобретённые на предыдущем. Расчет ведется по деформированной схеме. Дополнительные напряжения, возникающие от перемещений полученных на предыдущем этапе приложения нагрузки, учитываются при формировании локальной матрицы жесткости конечного элемента. Для этого насчитывается корректирующая матрица (рисунок 3). Элементы корректирующей матрицы вычисляются по формулам приведенным в таблице 2.

s5e					s5e				
	s1e			s2e		s1e			s2e
		sz1e		sz2e			sz1e		sz2e
				sz3e			sz2e		sz4e
				s3e		s2e			s4e
					s5e				
						s1e			s2e
	Симметрично						sz1e		sz2e
								sz3e	
									s3e

Рис. 3. – Корректирующая матрица поправочных функций для учета дополнительных напряжений в пространственном стержневом элементе при геометрически нелинейном расчете методом конечных элементов.

Предложенные поправочные выражения получены на основании зависимостей рассмотренных в работах Корноухова Н.В. [2] и Новожилова В.В. [4], при этом применение гиперболических функций позволяет значительно ускорить сходимость системы. Подобные функции используются в некоторых расчетах

вантово-балочных мостов. Матрицы жесткости и корректирующая матрица поэлементно перемножаются, таким образом, определяется исправленная матрица жесткости конечного элемента в локальной системе координат.

Таблица 2. Поправочные функции

Растянутые стержни	Сжатые стержни
$s1e = \frac{\phi^3 \cdot \sin(h)}{12 \cdot rt}$	$s1e = \frac{\phi^3 \cdot \sin(\phi)}{12 \cdot rc}$
$s2e = \frac{\phi^2 \cdot (\cos(h) - 1)}{6 \cdot rt}$	$s2e = \frac{\phi^2 \cdot (1 - \cos(\phi))}{6 \cdot rc}$
$s3e = \frac{\phi \cdot (\phi \cdot \cos(h) - \sin(h))}{4 \cdot rt}$	$s3e = \frac{\phi \cdot (\sin(\phi) - \phi \cdot \cos(\phi))}{4 \cdot rc}$
$s4e = \frac{\phi \cdot (\sin(h) - \phi)}{2 \cdot rt}$	$s4e = \frac{\phi \cdot (\phi - \sin(\phi))}{2 \cdot rc}$
$s5e = \frac{1}{1 - \frac{EF \cdot rtm}{4 \cdot \rho axl^3 \cdot l^2}}$	$s5e = \frac{1}{1 + \frac{EF \cdot rcn}{4 \cdot (-\rho axl)^3 \cdot l^2}}$
$\rho axl = \frac{N_{\text{кон}} - N_{\text{нач}}}{2}$ ; $\phi = \sqrt{\frac{ \rho axl }{EI}} \cdot l$ ; $rt = 2 - 2 \cdot \cos(h) + \phi \cdot \sin(h)$ ; где: N- продольное усилие в стержне; EI-жесткость при изгибе в рассматриваемой плоскости	

**Выводы.** Метод конечных элементов лежит в основе практически всех автоматических систем проектирования и расчета строительных конструкций, что свидетельствует о его актуальности. Предложенная методика расчета легла в основу программного комплекса позволяющего более корректно вычислять теоретические усилия и напряжения в элементах системы, а также перемещения узлов конструкции. Рассмотренная методика расчета применима для конструкций имеющих значительные перемещения в узлах, но при этом незначительные деформации отдельно взятых элементов.

1. *Гаранжа И.М.* Экспериментальные исследования многогранных композитных конструкций на основе самоуплотняющегося бетона при осевом сжатии / И.М. Гаранжа, А.В. Танасогло, А.А. Ягмур, С.А. Фоменко, А.Н. Оржеховский // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2015. – Т. 11, № 2. – С. 45–55.
2. *Корноухов Н.В.* Прочность и устойчивость стержневых систем. Упругие рамы, фермы и комбинированные системы / Н.В. Корноухов. – М.: Москва, 1949. – 376 с.
3. *Муцанов В.Ф.* Численное определение вероятности отказа изгибаемого стального стержня



- ня / В.Ф. Муцанов, А.Н. Оржеховский // Металлические конструкции. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 15–23.
4. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Современные проблемы механики / В.В. Новожилов; под общ. ред. А.И. Лурье и Л.Г. Лойцянского. – Ленинград-Москва: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1948. – 214 с.
  5. *Mushchanov V.* Accounting for the probabilistic nature of geometric imperfections form spatial coatings on the stands braced-cantilever type / V. Mushchanov, A. Annenkov, A. Orzhekovskiy // Металлические конструкции. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 169-178.

**V.P. Mushchanov, A.N. Orzhehovskiy, M.T. Tseplyaev**

**Features of the finite element method implementation in a geometrically nonlinear statement.**

The article discusses a method for calculating bar structures in a geometrically nonlinear setting. The finite element method is adopted as the main calculation method. Since modern building structures are spatial systems, the finite element method is implemented in a spatial setting. The technique of forming the stiffness matrix of a finite element rigidly fixed at the extreme points is presented. A technique for adjusting the stiffness matrix of a finite element is considered, taking into account the arrangement of hinge links. The technique of forming the matrix of direction cosines is presented. The fundamental principles of geometrically nonlinear analysis of bar structures are considered. Correction functions are proposed to take into account additional stresses in the system from deformations acquired at the previous stages of the calculation.

**Keywords:** *bars, finite element method, geometric nonlinearity, stiffness matrix, the matrix of direction cosines.*

ГОУ ВПО "Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры", Макеевка  
*mailbox@donnasa.org*

*Получено 17.08.2020*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 519:534.1:539.3

©2020. С.В. Сторожев, С.Б. Номбре

### НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ СКОРОСТЕЙ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МЕМБРАННЫМИ ПОКРЫТИЯМИ ГРАНЕЙ

Излагается численно-аналитическая нечетко-множественная методика синтеза оценок влияния факторов неопределенности в виде разбросов исходных физико-механических и геометрических параметров протяженного, имеющего на граничных поверхностях тонкие безинерционные абсолютно гибкие нерастяжимые покрытия волновода призматической геометрии из анизотропного монокристаллического материала кубической системы на частотные распределения фазовых скоростей бегущих нормальных волн при варьировании показателей изменчивости форм волновых упругих перемещений. Методика базируется на описании параметров с разбросами в виде нечетко-интервальных величин и переходе к нечетко-множественным аргументам в аналитических представлениях волновых чисел для различных ветвей рассматриваемого дисперсионного спектра, реализуемом с применением альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения. Приведены примеры нечетко-множественного описания ряда характеристик частотных распределений фазовых скоростей бегущих нормальных волн для волновода из монокристалла кремния.

*Ключевые слова:* нечетко-множественное математическое моделирование, эвристический принцип обобщения, анизотропные призматические волноводы, материалы кубической системы, прямоугольные сечения, гибкие нерастяжимые покрытия граней, нормальные упругие волны, частотные зависимости фазовых скоростей, влияние разбросов исходных параметров.

**Введение и постановка задачи.** Существование разбросов в экспериментальных и технологических данных о геометрических параметрах и значениях физико-механических постоянных используемых в конструкциях машин, приборов, сооружений и акустоэлектронных устройств материалов, порождает весьма актуальную задачу корректного учета степени влияния факторов неопределенности экзогенных параметров на эндогенные характеристики соответствующих прикладных расчетных математических моделей волновой механики деформируемого твердого тела [1 – 6]. Опыт применения к решению данной проблемы методов теории вероятностей и математической статистики описан, в частности, в работах [7, 8], однако во многих случаях он сталкивается с тем, что природа информации о характере и величинах подлежащих учету разбросов во многих

случаях формируется на основе экспертных заключений и опытных оценок, основывается на маломощных экспериментальных выборках и, как следствие, не является информацией имеет корректного статистического типа. Возможное в подобных случаях применение альтернативного подхода, базирующегося на методах теории нечетких множеств и открывающего возможности непосредственного оперирования с неопределенными параметрами моделей без перехода к их усредненным интегральным характеристикам, излагается в публикациях [9 – 19].

Представленное в настоящей работе исследование, являющееся развитием результатов, представленных в работах [20, 21], имеет своей целью решение открытой для анализа проблемы нечетко-множественного математического моделирования эффектов неопределенности для величин фазовых скоростей бегущих нормальных упругих волн, распространяющихся вдоль имеющего прямоугольное сечение призматического волновода пространственного геометрического строения из анизотропного монокристаллического материала кубической системы, на гранях которого имеются тонкие абсолютно гибкие нерастяжимые безинерционные покрытия [22].

Исследование базируется на использовании прикладной  $\alpha$  - уровневой схемы эвристического принципа обобщения [9 – 11] для расширения областей определения классических функциональных отображений на нечеткие подмножества универсального множества, также на гипотезе об описании экспериментальных значений модулей упругости для материала волновода разнотипными нечетко-множественными величинами, в том числе нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами [16, 18].

Рассматривается протяженный призматический волновод [22] прямоугольного сечения из анизотропного материала кубической системы с упругими постоянными  $c_{jp}$  и плотность  $\rho$ , занимающий в координатном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  область  $V = \{|x_1| \leq a, |x_3| \leq b, -\infty < x_2 < \infty\}$ . Полагается, что координатные направления  $Ox_j$  ориентированы вдоль упруго-эквивалентных направлений материала волновода, а на его плоских граничных поверхностях имеются тонкие безинерционные абсолютно гибкие нерастяжимые покрытия. Уравнения мод нормальных упругих волн круговой частоты  $\omega$  в рассматриваемом волноводе, получаемые в рамках классической четкой постановки проблемы с использованием модели линейного динамического деформирования идеально упругих анизотропных сред, являются результатом анализа краевых задач относительно комплексных амплитудных функций волновых упругих перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3)$ , включающих волновые уравнения

$$\begin{aligned} L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 &= 0, \\ L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 &= 0, \\ L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в которых

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 + \Omega^2, & L_{22} &= c_{44}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 + \Omega^2, \\ L_{33} &= c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{11}\partial_3^2 + \Omega^2, & L_{12} &= L_{21} = (c_{12} + c_{44})\partial_1\partial_2, \\ L_{13} &= L_{31} = (c_{12} + c_{44})\partial_1\partial_3, & L_{23} &= L_{32} = (c_{12} + c_{44})\partial_2\partial_3, \Omega^2 = \rho\omega^2 R_*^2 c_*^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$R_*$ ,  $c_*$  – соответственно нормирующие параметры для величин с размерностями упругих перемещений и механических напряжений, а также краевые условия вида

$$\begin{aligned} (u_2)_{x_1=\pm a} &= (u_3)_{x_1=\pm a} = (c_{11}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{12}\partial_3 u_3)_{x_1=\pm a} = 0, \\ (u_1)_{x_3=\pm b} &= (u_2)_{x_3=\pm b} = (c_{12}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{11}\partial_3 u_3)_{x_3=\pm b} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

**1. Получение представлений для ветвей дисперсионного спектра и фазовых скоростей нормальных волн.** В процессе решения проблемы получения аналитических представлений для ветвей анализируемого дисперсионного спектра [22] вводятся исходные представления комплексные амплитудных функций рассматриваемых нормальных волн со следующей общей структурой

$$u_j(x_1, x_2, x_3) = g_j(x_1, x_3) \exp(ikx_2) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (4)$$

и четырьмя вариантами задания подмножеств функций  $g_j(x_1, x_3)$ , отражающими комбинированную симметрию форм волновых колебаний относительно вертикальной и горизонтальной срединных линий сечения:

$$\begin{aligned} g_{1mn}^{(1)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(1)} \sin \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, \\ g_{2mn}^{(1)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(1)} \cos \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, \\ g_{3mn}^{(1)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(1)} \cos \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g_{1mn}^{(2)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(2)} \sin \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, \\ g_{2mn}^{(2)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(2)} \cos \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, \\ g_{3mn}^{(2)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(2)} \cos \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g_{1mn}^{(3)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(3)} \cos \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, \\ g_{2mn}^{(3)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(3)} \sin \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, \\ g_{3mn}^{(3)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(3)} \sin \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} g_{1mn}^{(4)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(4)} \cos \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, \\ g_{2mn}^{(4)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(4)} \sin \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, \\ g_{3mn}^{(4)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(4)} \sin \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Параметры  $\lambda_m$ ,  $\delta_n$  в представлениях (5) – (8) имеют вид

$$\lambda_m = (2m - 1)\pi R_*/(2a), \quad \delta_n = (2n - 1)\pi R_*/(2b). \quad (9)$$

Введенные таким образом комплексные амплитудные функции обеспечивают выполнение краевых условий (4) на граничных поверхностях волновода.

Уравнения для мод исследуемых волн в рассматриваемом случае соответственно описываются равенствами нулю функциональных определителей

$$F_{mn}^{(j)}(k, \Omega) = \det \left\| \Delta_{pqmn}^{(j)} \right\| = 0 \quad (j, p, q, m, n = \overline{1, 3}), \quad (10)$$

в которых

$$\begin{aligned} \Delta_{11mn}^{(j)} &= \Omega^2 - (c_{11}\lambda_m^2 + c_{44}k^2 + c_{44}\delta_n^2), \Delta_{22mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{11}k^2 + c_{44}\delta_n^2), \\ \Delta_{33mn}^{(j)} &= \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{44}k^2 + c_{11}\delta_n^2), \\ \Delta_{12mn}^{(1)} &= -\Delta_{21mn}^{(1)} = \Delta_{12mn}^{(2)} = -\Delta_{21mn}^{(2)} = \\ &= -\Delta_{12mn}^{(3)} = \Delta_{21mn}^{(3)} = -\Delta_{12mn}^{(4)} = \Delta_{21mn}^{(4)} = -ik(c_{12} + c_{44})\lambda_m, \\ \Delta_{13mn}^{(1)} &= \Delta_{31mn}^{(1)} = -\Delta_{13mn}^{(2)} = -\Delta_{31mn}^{(2)} = \\ &= -\Delta_{13mn}^{(3)} = -\Delta_{31mn}^{(3)} = \Delta_{13mn}^{(4)} = \Delta_{31mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\lambda_m\delta_n, \\ \Delta_{23mn}^{(1)} &= -\Delta_{32mn}^{(1)} = -\Delta_{23mn}^{(2)} = \Delta_{32mn}^{(2)} = \\ &= \Delta_{23mn}^{(3)} = -\Delta_{32mn}^{(3)} = -\Delta_{23mn}^{(4)} = \Delta_{32mn}^{(4)} = ik(c_{12} + c_{44})\delta_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Приведенные критические частоты мод бегущих нормальных волн являются элементами трех подмножеств  $\{\Omega_{mn}^{(j)}\}$  ( $j, m, n = \overline{1, 3}$ ), и имеют представления

$$\begin{aligned} \Omega_{mn}^{(1)} &= [c_{44}(\lambda_m^2 + \delta_n^2)]^{1/2}, \\ \Omega_{mn}^{(j)} &= [((-1)^j(\vartheta_{mn}^2 - 4\varsigma_{mn})^{1/2} - \vartheta_{mn})/2]^{1/2} \quad (j = \overline{2, 3}), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_{mn} &= -(A_{44}\lambda_m^2 + c_{11}(\lambda_m^2 + \delta_n^2) + c_{44}\delta_n^2), \\ \varsigma_{mn} &= (c_{11}\lambda_m^2 + c_{44}\delta_n^2)(c_{44}\lambda_m^2 + c_{11}\delta_n^2) - (c_{12} + c_{44})^2\lambda_m^2\delta_n^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Ветви дисперсионных спектров для нормальных волн с различными формами волновых перемещений в сечении волновода, определяемые из (10), имеют форму

$$k = \Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) \quad (s = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 4}), \quad (14)$$

и соответствующие параметрические зависимости описываются положительными ветвями решений бикубических уравнений

$$\tau_{1mn}^{(j)}k^6 + \tau_{2mn}^{(j)}k^4 + \tau_{3mn}^{(j)}k^2 + \tau_{4mn}^{(j)} = 0 \quad (j = \overline{1, 4}); \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
 \tau_{1mn}^{(j)} &= -A_{11}A_{44}^2, \\
 \tau_{2mn}^{(j)} &= A_{11}A_{44}(\eta_{11mn}^{(j)} + \eta_{33mn}^{(j)}) + c_{44}^2\eta_{22mn}^{(j)} + A_{44}((\eta_{12mn}^{(j)})^2 + (\eta_{23mn}^{(j)})^2), \\
 \tau_{3mn}^{(j)} &= -A_{44}\eta_{11mn}^{(j)}\eta_{22mn}^{(j)} - A_{44}\eta_{22mn}^{(j)}\eta_{33mn}^{(j)} - A_{11}\eta_{11mn}^{(j)}\eta_{33mn}^{(j)} + \\
 &+ 2\chi_{12mn}^{(j)}\chi_{13mn}^{(j)}\chi_{23mn}^{(j)} - (\chi_{23mn}^{(j)})^2\eta_{11mn}^{(j)} - (\chi_{12mn}^{(j)})^2\eta_{33mn}^{(j)} + c_{11}(\chi_{13mn}^{(j)})^2, \\
 \tau_{4mn}^{(j)} &= \eta_{11mn}^{(j)}\eta_{22mn}^{(j)}\eta_{33mn}^{(j)} - \eta_{22mn}^{(j)}(\chi_{13mn}^{(j)})^2;
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{11mn}^{(j)} &= \Omega^2 - (c_{11}\lambda_m^2 + c_{44}\delta_n^2), \quad \eta_{22mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{44}\delta_n^2), \\
 \eta_{33mn}^{(j)} &= \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{11}\delta_n^2), \\
 \chi_{12mn}^{(1)} &= \chi_{12mn}^{(2)} = -\chi_{12mn}^{(3)} = -\chi_{12mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\lambda_m, \\
 \chi_{13mn}^{(1)} &= -\chi_{13mn}^{(2)} = -\chi_{13mn}^{(3)} = \chi_{13mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\lambda_m\delta_n, \\
 \chi_{23mn}^{(1)} &= -\chi_{23mn}^{(2)} = \chi_{23mn}^{(3)} = -\chi_{23mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\delta_n.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, представления для  $F_j(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n)$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1j}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) &= \\
 &= [\varphi_{1jmn} - 2^{1/3}\varphi_{3jmn}/(3\varphi_{2jmn}\tau_{1mn}^{(j)}) + \varphi_{2jmn}/(3 \cdot 2^{1/3}\tau_{1mn}^{(j)})]^{1/2};
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{2j}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) &= \\
 &= [\varphi_{1jmn} - (1 + 3^{1/2}i)\varphi_{3jmn}/(3 \cdot 2^{2/3}\varphi_{2jmn}\tau_{1mn}^{(j)}) - \\
 &\quad - (1 + 3^{1/2}i)\varphi_{2jmn}/(6 \cdot 2^{1/3}\tau_{1mn}^{(j)})]^{1/2};
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{3j}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) &= \\
 &= [\varphi_{1jmn} - (1 - 3^{1/2}i)\varphi_{3jmn}/(3 \cdot 2^{2/3}\varphi_{2jmn}\tau_{1mn}^{(j)}) - \\
 &\quad - (1 - 3^{1/2}i)\varphi_{2jmn}/(6 \cdot 2^{1/3}\tau_{1mn}^{(j)})]^{1/2};
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\varphi_{1jmn} = \varphi_{1jmn}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = -\tau_{2mn}^{(j)}/(3\tau_{1mn}^{(j)}); \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2jmn} &= \varphi_{2jmn}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = \\
 &= [-2(\tau_{2mn}^{(j)})^3 + 9\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{2mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)} - 27(\tau_{1mn}^{(j)})^2\tau_{4mn}^{(j)} + \\
 &\quad + (4(-\tau_{2mn}^{(j)})^2 + 3\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)})^3 + \\
 &\quad + (-2(\tau_{2mn}^{(j)}) + 9\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{2mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)} - 27(\tau_{1mn}^{(j)})^2(\tau_{4mn}^{(j)})^2)^{1/2}]^{1/3};
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\varphi_{3jmn} = \varphi_{3jmn}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = -(\tau_{2mn}^{(j)})^2 + 3\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)}. \quad (23)$$

Соответственно, подлежащие анализу частотные зависимости для фазовых скоростей бегущих нормальных волн с различными определяемыми параметрами  $(j, m, n)$  формами волновых упругих перемещений описываются соотношениями

$$v_s^{(j,m,n)}(\omega) = \omega/\Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n)(s = \overline{1, 3}). \quad (24)$$

**2. Получение нечетко-множественных оценок для параметрических частотных распределений фазовых скоростей нормальных волн.** Получение нечетко-множественных оценок для частотных параметрических распределений фазовых скоростей нормальных волн базируется на использовании представлений (24) и переходе в них к аргументами, представляющим собой нечеткие величины. Согласно предположениям о существовании разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров волновода рассматриваемого типа вносится гипотеза о возможности эффективного описания неопределенных экзогенных параметров рассматриваемой модели  $c_{11}, c_{12}, c_{44}, \rho, a, b$  нечеткими нормальными трапецеидальными интервалами  $\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{44}, \tilde{\rho}, \tilde{a}, \tilde{b}$  [16, 18, 20, 21], задаваемыми кортежами реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= (c_{111}, c_{112}, c_{113}, c_{114}), & \tilde{A}_{12} &= (c_{121}, c_{122}, c_{123}, c_{124}), \\ \tilde{A}_{44} &= (c_{441}, c_{442}, c_{443}, c_{444}), \\ \tilde{\rho} &= (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), & \tilde{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4), & \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4) \end{aligned} \quad (25)$$

и разложениями по множествам  $\alpha$  – уровня

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}], & \tilde{c}_{12} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}], & \tilde{c}_{44} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}], \\ \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], & \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], & \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \end{aligned} \quad (26)$$

в которых

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11\alpha} &= (1 - \alpha)A_{111} + \alpha A_{112}, & \bar{A}_{11\alpha} &= \alpha A_{113} + (1 - \alpha)A_{114}; \\ \underline{A}_{12\alpha} &= (1 - \alpha)A_{121} + \alpha A_{122}, & \bar{A}_{12\alpha} &= \alpha A_{123} + (1 - \alpha)A_{124}; \\ \underline{A}_{44\alpha} &= (1 - \alpha)A_{441} + \alpha A_{442}, & \bar{A}_{44\alpha} &= \alpha A_{443} + (1 - \alpha)A_{444}; \\ \underline{\rho}_\alpha &= (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, & \bar{\rho}_\alpha &= \alpha\rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4; \\ \underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \bar{a}_\alpha &= \alpha a_3 + (1 - \alpha)a_4; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= \alpha b_3 + (1 - \alpha)b_4. \end{aligned} \quad (27)$$

С использованием представлений (26), (27) получение параметрических нечетких оценок  $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$  ( $s = \overline{1, 3}$ ) реализуется путем перехода в функциональных зависимостях (24) к нечетко-интервальным аргументам с применением  $\alpha$ -уровневой формы эвристического принципа обобщения [9 – 11]. В результате для нечетко-множественных характеристик  $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$  ( $s = \overline{1, 3}$ ) записываются представления вида

$$\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega), \overline{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega)], \quad (28)$$

где

$$\underline{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega) = \inf_{\substack{c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \overline{c}_{11\alpha}] \\ c_{12} \in [\underline{c}_{12\alpha}, \overline{c}_{12\alpha}] \\ c_{44} \in [\underline{c}_{44\alpha}, \overline{c}_{44\alpha}] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]}} \{\omega / \Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n)\}, \quad (29)$$

$$\overline{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega) = \sup_{\substack{c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \overline{c}_{11\alpha}] \\ c_{12} \in [\underline{c}_{12\alpha}, \overline{c}_{12\alpha}] \\ c_{44} \in [\underline{c}_{44\alpha}, \overline{c}_{44\alpha}] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]}} \{\omega / \Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n)\}.$$

**3. Результаты численных исследований.** Примеры реализации разрабатываемой методики нечетко-множественного описания частотных распределений фазовых скоростей бегущих нормальных волн в прямоугольном монокристаллическом волноводе кубической системы с мембранными покрытиями граней относятся к случаю волновода из монокристалла кремния с заданием следующих нечетко-интервальных параметров:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= (164c_*, 166c_*, 167c_*, 169c_*), & \tilde{A}_{12} &= (63c_*, 65c_*, 66c_*, 67c_*), \\ \tilde{A}_{44} &= (77c_*, 79c_*, 80c_*, 82c_*), & \tilde{\rho} &= (2.30\rho_*, 2.32\rho_*, 2.33\rho_*, 2.34\rho_*), \\ c_* &= 10^9 [\text{Па}], & \rho_* &= 10^3 [\text{кг/м}^3]. \end{aligned} \quad (30)$$

Для каждого сочетания значений параметров  $(j, m, n)$  анализу подлежат три зависимости  $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$  ( $s = \overline{1, 3}$ ). Результаты расчетов представлены частотными параметрическими распределениями для характеристик нечетко-множественных описаний фазовых скоростей нормальных волн с различными типами симметрии и различными показателями изменчивости форм волновых перемещений в сечении волновода, а также описаниями вида функций принадлежности для нечетко-множественных величин  $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$  ( $s = \overline{1, 3}$ ) при некоторых фиксированных значениях параметра круговой частоты  $\omega$  [рад/с]. Параметры



размеров сечения  $a$ ,  $b$  в расчетах рассматривались как четкие величины без разбросов значений и принимались равными

$$a = 2l_*, \quad b = 3l_*, \quad b = l_* = 1[\text{м}].$$

Рисунки 1 – 4 характеризуют результаты расчетов для случая волн из моды ( $s = 1$ ) с типом симметрии ( $j = 1$ ) и показателями изменчивости поля перемещений в сечении ( $m = 1, n = 21$ ). Внешние линии на рисунке 1 соответствуют уровням  $\mu = 0$  принадлежности соответствующей характеристики  $v_s^{(j,m,n)}(\omega)$  к нечеткому множеству ее ожидаемых значений  $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$ , то есть ограничивают носители  $\tilde{v}_1^{(1,1,1)}(\omega)$ , а внутренние отвечают уровням  $\mu = 1$  и ограничивают диапазоны наиболее достоверных значений  $v_1^{(1,1,1)}(\omega)$  при рассматриваемых разбросах исходных параметров. Аналогичную структуру имеют распределения  $v_s^{(j,m,n)}(\omega) \in \tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$  на других нижеприводимых рисунках.

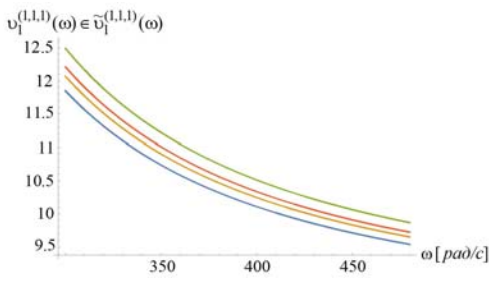


Рис. 1. Распределения  $v_1^{(1,1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_1^{(1,1,1)}(\omega)$  с показателями  $\mu_{\tilde{v}_1^{(1,1,1)}(\omega)}(v_1^{(1,1,1)}(\omega))$ .

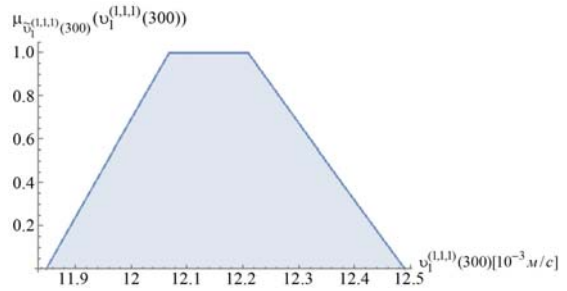


Рис. 2. Функция принадлежности  $\mu_{\tilde{v}_1^{(1,1,1)}(300)}(v_1^{(1,1,1)}(300))$ .

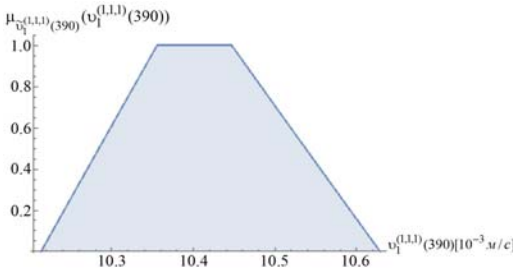


Рис. 3. Функция принадлежности  $\mu_{\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(390)}(v_s^{(j,m,n)}(390))$ .

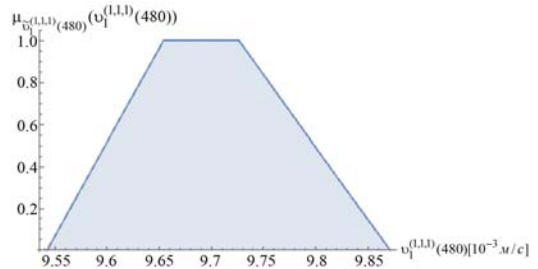


Рис. 4. Функция принадлежности  $\mu_{\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(480)}(v_s^{(j,m,n)}(480))$ .

Результаты расчетов для случая волн из мод ( $s = 2, s = 3$ ) с типом симметрии ( $j = 1$ ) и показателями изменчивости поля перемещений в сечении ( $m = 1, n = 21$ ) представлены соответственно на рисунках 5 – 12. Эти ветви отвечают квазипоперечным нормальным волнам. Уровни скоростей волн этого типа ниже относящихся к моде ( $s = 1$ )

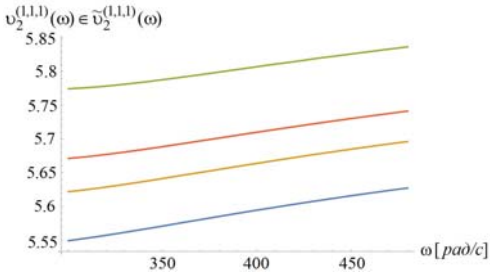


Рис. 5. Распределения  $v_2^{(1,1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_2^{(1,1,1)}(\omega)$  с показателями  $\mu_{\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(\omega)}(v_2^{(1,1,1)}(\omega))$ .

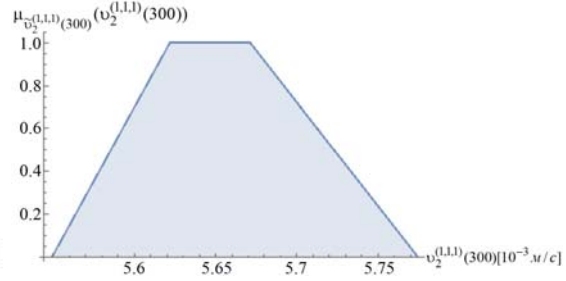


Рис. 6. Функция принадлежности  $\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(300)$ .

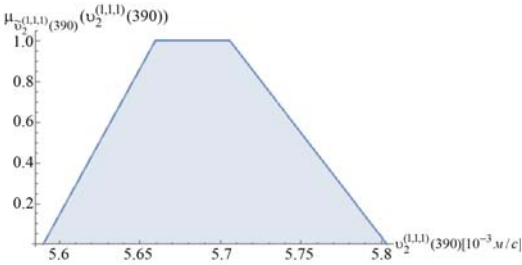


Рис. 7. Функция принадлежности  $\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(390)$ .

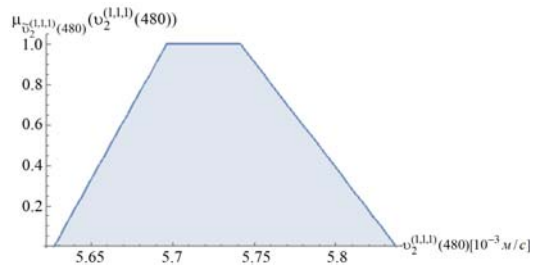


Рис. 8. Функция принадлежности  $\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(480)$ .

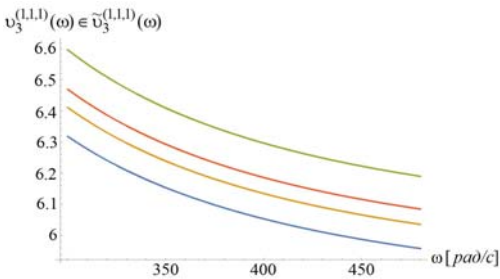


Рис. 9. Распределения  $v_3^{(1,1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_3^{(1,1,1)}(\omega)$  с показателями  $\mu_{\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(\omega)}(v_3^{(1,1,1)}(\omega))$ .

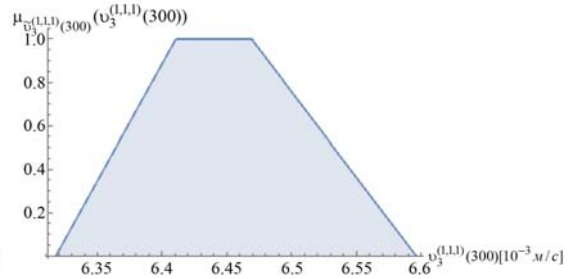


Рис. 10. Функция принадлежности  $\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(300)$ .

Анализ представленных на рисунках 1 – 12 результатов моделирования разбросов для значений исследуемых скоростей в волнах с показателем симметрии ( $j = 1$ ) позволяет заключить, что границы интервалов носителей для нечетких множеств, описывающих неопределенные фазовые скорости, имеют отклонения, не превышающие 2 – 3 % от значений параметров дефазсификации соответствующих нечетких множеств по методу медиан. Таким образом, разбросы экзогенных и эндогенных параметров в рассматриваемых моделях являются величи-

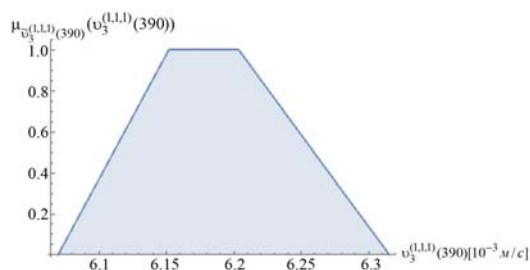


Рис. 11. Функция принадлежности  $\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(390)$ .

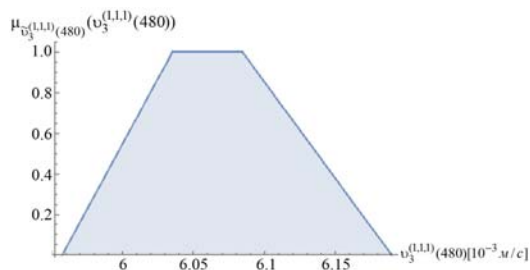


Рис. 12. Функция принадлежности  $\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(480)$ .

нами одного порядка. Также можно отметить слабо выраженную тенденцию к уменьшению уровня неопределенности анализируемых фазовых скоростей с ростом частоты рассматриваемых волн.

**Выводы.** Результатом описанных в работе исследований является разработка нечетко-множественной численно-аналитической методики моделирования эффектов влияния разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров на частотные распределения фазовых скоростей бегущих нормальных волн в протяженном волноводе призматической геометрии из анизотропного монокристаллического материала кубической системы с тонкими безинерционными абсолютно гибкими нерастяжимыми покрытиями на граничных поверхностях. Предлагаемый подход основывается на описании параметров с разбросами в виде нечетко-интервальных величин и применении альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения при переходе к нечетко-множественным аргументам в аналитических представлениях волновых чисел для различных ветвей рассматриваемого дисперсионного спектра. С применением программного приложения, разработанного для численной реализации предложенной методики моделирования, рассмотрены примеры нечетко-множественного описания фазовых скоростей бегущих нормальных волн для волновода из монокристалла кремния с разбросом значений физико-механических параметров. Расчетные результаты получены для различных мод дисперсионного спектра с идентичным показателем изменчивости формы волновых упругих перемещений. Получаемые в результате применения предложенной методики оценки дают возможность установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях анализируемых скоростей при заданных разбросах исходных физико-механических и геометрических параметров, а также определить границы возможных разбросов для значений анализируемых характеристик на минимальном уровне уверенности.

1. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука. – 1982. – 424 с.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides / J. Miklowitz. – North-Holland, 1984. – 618 p.
3. Мелешко В.В. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бон-

- даренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
4. *Datta S.K.* Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
  5. *Бобровницкий Ю.И.* Акустический метаматериал с необычными волновыми свойствами / Ю.И. Бобровницкий // Акустический журнал. – 2014. – Т. 60, № 4. – С. 347 – 355.
  6. *Бобровницкий Ю.И.* Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред / Ю.И. Бобровницкий // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61, № 3. – С. 283 – 294.
  7. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
  8. *Ларин В.Б.* Статистические задачи виброзащиты / В.Б. Ларин. – Киев: Наукова думка, 1974. – 128 с.
  9. *Диллигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Диллигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. – М.: Издательство Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
  10. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
  11. *Алтунин А.Е.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2002. – 352 с.
  12. *Kaufmann A.* Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications / A. Kaufmann, M. Gupta. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.
  13. *Anastassiou G.A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
  14. *Kandasamy W.B.V.* Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Planthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
  15. *Sonbol A.H.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42. – P. 702-712.
  16. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.
  17. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
  18. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
  19. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
  20. *Сторожев В.И.* Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103 – 111.
  21. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 38 – 43.
  22. *Бутко С.Б.* Нормальные волны в ортотропных пластинах и призматических телах с тонкими нерастяжимыми покрытиями граней / С.Б. Бутко, Т.В. Волобуева, В.И. Сторожев // Теоретическая и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 90 – 97.

S.V. Storozhev, S.B. Nombre

**Fuzzy-set modeling of uncertainty effects for velocity of normal deformation waves in a cubic system crystal rectangular waveguide with membrane coatings of faces.**

Are presented a numerical-analytical fuzzy-set method for synthesizing estimates of the influence of uncertainty factors in the form of scatter of the initial physical-mechanical and geometric parameters of an long waveguide of prismatic geometry from anisotropic single-crystal material of a cubic system on the phase velocities of traveling normal waves with varying of variability of forms of elastic displacements. Waveguide have absolutely flexible inextensible thin inertialess coatings of a faces. The technique is based on the description of parameters with scatter errors in the form of fuzzy-intervals quantities and on the transition to fuzzy-set arguments in the analytical representations of wave numbers for various branches of the dispersion spectrum. The alpha-level form of the heuristic generalization principle is used. Examples of a fuzzy-set description of a series of frequency distributions characteristics of phase velocities of traveling normal waves for a waveguide from a silicon single crystal are given.

**Keywords:** *fuzzy-set mathematical modeling, heuristic generalization principle, anisotropic prismatic waveguides, materials of a cubic system, rectangular sections, flexible inextensible face coatings, normal elastic waves, frequency dependences of phase velocities, influence of scatter errors of initial parameters.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры”, Макеевка  
*s.storozhev@donnasa.ru*

Получено 08.07.2020

## ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК 622.831.24

©2020. В.А. Канин

### ИЗМЕНЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ БЕТОННОЙ КРЕПИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ШАХТНЫХ ВОД РАЗЛИЧНОЙ АГРЕССИВНОСТИ

В настоящей статье представлены результаты исследований по изменению несущей способности газобетонной шахтной крепи под влиянием шахтных вод различной степени агрессивности. Приведены зависимости изменения прочности газобетона и несущей способности крепежных конструкций от степени их влажности.

*Ключевые слова:* бетон, газобетон, агрессивность шахтной воды, коррозия бетона, несущая способность влажной газобетонной крепи.

**Введение.** На современных угольных шахтах для поддержания всех видов горных выработок, включая стволы, шурфы, квершлагги, штреки и т. д. в качестве крепежного материала широко применяются монолитный бетон и конструкции из сборного бетона (железобетона). Этот материал в силу своих физико-химических особенностей при длительном взаимодействии с водой может подвергаться коррозии, которая приводит к ухудшению его технологических свойств.

Наиболее распространенной коррозией бетона является вымывание водой гидрата окиси кальция. Все бетоны, имея основные свойства, корродируют также под влиянием кислых вод. Из растворимых в воде солей наиболее разрушительно на бетон действуют сернокислые соли, способствующие образованию гидросульфаломината кальция ("цементной бациллы"), который, увеличиваясь в объеме в 2-3 раза.

Шахтные воды Донбасса имеют весьма разнообразный состав, но из всех закономерностей формирования их химического состава наибольший интерес для нас представляет их агрессивность к бетону. Анализ результатов гидрохимических исследований в Донбассе [1] позволил сделать следующие выводы:

1. При разработке угольных пластов на малых глубинах шахтные воды являются агрессивными к бетону по содержанию сульфатов, в отдельных случаях – и по содержанию углекислоты. Кроме того шахтные воды часто являются агрессивными одновременно по нескольким показателям, например по общей жесткости, содержанию сульфатов и агрессивной углекислоты.

2. При разработке пластов на глубоких горизонтах в хлоридно-натриевой, хлоридно-гидрокарбонатно-натриевой и хлоридно-сульфатно-натриевой зонах шахтные воды агрессивны к бетону по бикарбонатной щелочности.

3. Наиболее агрессивные для бетона кислые шахтные воды на средних и глубоких горизонтах шахт Донецкого бассейна образовываться не могут, но на малых глубинах они присутствуют.

**1. Постановка задачи.** Из всего разнообразия марочного состава бетонов, применяемых в угольной промышленности, при выполнении настоящих исследований нами был взят газобетон марки В 3,5 ( $\gamma = 700 \text{ кг/м}^3$ ). Этот материал, также, как и другие разновидности бетонов, изготавливается на основе портландцемента, который, как раз, и подвергается коррозии, и этот же материал, изготавливаемый в виде блоков, является весьма перспективным для возведения крепежных конструкций с целью охраны пластовых выемочных выработок от вредного влияния очистных работ [2]. Характер изменения несущей способности газобетона при увлажнении устанавливался по деформационно-нагрузочным характеристикам кубических образцов. Пробы шахтной воды были отобраны в водосборниках и стволах пяти шахт. Результаты анализа агрессивности этой воды по отношению к бетону представлены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристика агрессивности проб шахтной воды по отношению к бетону

Шахта	Формула вещественного состава воды	Агрессивность воды по отношению к бетону
им. А.М. Горького	слабощелочная	не агрессивная
"Запореваляная"	слабощелочная	слабо агрессивная по $SO_4^{2-}$
"Моспинская"	почти нейтральная	сильно агрессивная по $SO_4^{2-}$
"Тернопольская"	кислая	сильно агрессивная по pH и $SO_4^{2-}$
"Московская"	кислая	сильно агрессивная по pH и $SO_4^{2-}$

Перед испытаниями 14 одинаковых кубических образцов газобетона были условно разделены на три серии А, В и С. Серия А была представлена шестью образцами. Один из них испытывался в воздушно-сухом состоянии, второй образец погружался в чистую воду, а остальные образцы погружались в шахтную воду различной агрессивности – не агрессивную, слабо агрессивную по  $SO_4^{2-}$ , сильно агрессивную по  $SO_4^{2-}$  и сильно агрессивную по pH и  $SO_4^{2-}$ . Через определенные промежутки времени образцы извлекались из воды, весовым методом определялась их влажность и они снова погружались в воду. Общая продолжительность пребывания в воде образцов серии А до проведения механических испытаний составила 91 ч. Полученные за этот период времени значения влажности представлены в таблице 2.

Серия В была представлена четырьмя образцами. Один из них испытывался в воздушно-сухом состоянии, второй образец погружался в чистую воду, а третий и четвертый погружались соответственно в не агрессивную шахтную воду и слабо агрессивную по  $SO_4^{2-}$ .

Все образцы погружались в воду на 91 ч. без промежуточной оценки влаж-

ности. Конечная влажность этих образцов приведена в таблице 3.

Таблица 2. Результаты определения влажности газобетонных образцов серии А

Место отбора пробы шахтной воды	Влажность образца (%) при длительности увлажнения, ч:						
	0,5	1,0	2,0	3,0	19,0	25,0	91,0
Водопродная	19,6	22,8	26,1	28,4	29,8	30,6	32,2
Шахта им. А.М. Горького	17,7	21,1	24,2	25,7	27,3	28,4	29,7
Шахта "Заперевальная"	16,8	19,6	22,1	24,0	26,4	27,4	32,7
Шахта "Моспинская"	14,9	17,1	19,9	21,7	26,5	26,8	27,6
Шахта "Тернопольская"	15,2	17,6	20,1	22,0	24,7	25,0	26,6

Таблица 3. Результаты определения влажности газобетонных образцов серий В и С

Место отбора пробы шахтной воды	Влажность (% по массе) образцов серии В	Влажность (% по массе) образцов серии С
Водопродная	38,7	–
Ш-та им. Горького	42,0	50,9
Ш-та "Заперевальная"	31,3	–
Ш-та "Моспинская"	–	56,1
Ш-та "Тернопольская"	–	55,6
Ш-та "Московская"	–	56,7

В этой же таблице приведены и значения влажности четырех образцов серии С, которые перед испытаниями находились в не агрессивной шахтной воде и в воде сильно агрессивной по  $SO_4^{2-}$  и по  $pH$  и  $SO_4^{2-}$  в течение 45 суток.

**2. Результаты исследований.** Полученные при механических испытаниях образцов газобетона серий А, В и С параметры  $P_{max}$  (максимальная несущая способность образца в области упругопластического деформирования),  $P_{min}$  (минимальная несущая способность образца) и  $P^{cp}_{const}$  (средняя несущая способность образца на стадии условно постоянного сопротивления), а также вычисленные значения кубиковой прочности газобетона ( $R_c$ ), коэффициента размаха сопротивления деформированию  $k_c = P_{min}/P_{max}$  и удельной работы сопротивления деформированию (работа, совершаемая единицей деформируемого объема, равного произведению рабочей площади  $F$  образца на величину полной деформации в направлении приложения нагрузки,  $\Delta h$ )  $a_c = A_c / \Delta h \cdot F$  и представлены в таблице 4 в порядке возрастания влажности образцов, а диаграммы нагружения этих образцов показаны на рисунке 1.

При рассмотрении диаграмм на рисунке 1 невозможно сделать однозначные выводы об изменении механических характеристик газобетона при увлажнении шахтной водой различной агрессивности. Поэтому в дальнейшем параметры диаграмм нагружения газобетонных образцов, численные значения которых приведены в таблице 4, были проанализированы с учетом их систематизации по степени влажности и агрессивности шахтной воды.

На первом этапе анализа по степени влажности образцов и характеру агрессивности шахтной воды были систематизированы значения параметра  $P_{max}$ . Как



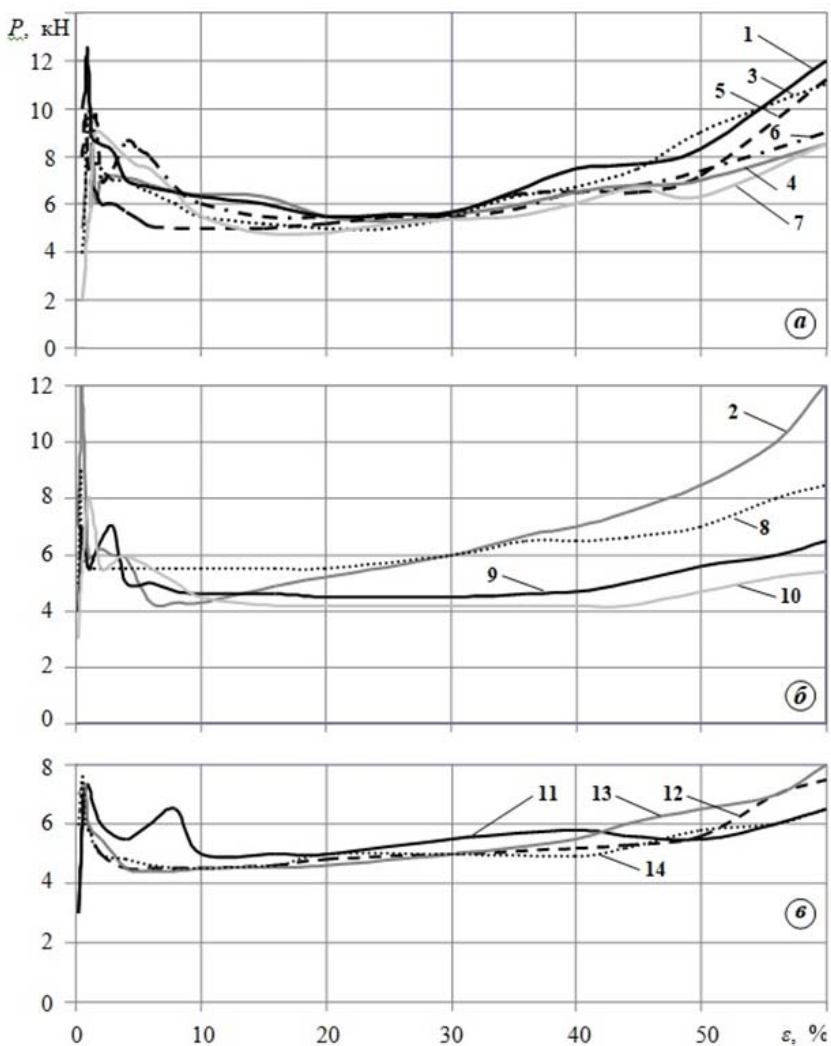


Рис. 1. Диаграммы нагружения воздушно-сухих и влажных образцов газобетона серий А(а) и В(б) и С(в) (номера диаграмм соответствуют номерам образцов в табл. 4).

видно из диаграммы, представленной на рисунке 2, значения  $P_{max}$  газобетонных образцов при длительности их увлажнения до 45 суток практически не зависят от типа шахтной воды. После 91 ч. пребывания образцов в чистой воде и слабо агрессивной по  $SO_4^{2-}$  шахтной воде их конечная влажность составляла соответственно 32,2 и 39,2 %, а значения  $P_{max}$  – 8,5 и 8,25 кН. При длительности водонасыщения 45 суток у образца, находившегося в слабощелочной воде  $P_{max} = 7,3$  кН, а у образцов, находившихся в сильно агрессивной по  $SO_4^{2-}$  и  $pH$  кислой воде,  $P_{max} = 7,5 - 7,7$  кН. Однако, у образцов, увлажненных одной и той же по химическому составу водой, значения  $P_{max}$  заметно уменьшаются с увеличением степени их влажности.

Таблица 4. Результаты механических испытаний влажных образцов газобетона

№п/п	w, %	R, МПа	Параметры диаграммы нагружения			
			$P_{max}$ , кН	$P^{cp}_{const}$ , кН	$k_c$	$a_c$ , МДж/м <sup>3</sup>
1	5,0*	5,0	12,5	6,5	0,44	2,7
2	5,0*	4,9	11,9	6,1	0,36	2,5
<b>в среднем</b>		<b>4,95</b>	<b>12,2</b>	<b>6,3</b>	<b>0,40</b>	<b>2,6</b>
3	26,6	4,0	10,0	5,3	0,50	2,54
4	27,6	4,1	9,8	5,3	0,51	2,35
5	29,7	4,0	9,8	5,9	0,56	2,70
6	32,2	3,6	8,2	5,8	0,63	2,31
7	32,7	3,6	9,0	5,2	0,53	2,34
8	38,7	3,5	9,0	5,5	0,56	2,38
9	39,2	3,2	7,7	4,8	0,58	2,00
10	42,0	3,1	8,0	4,6	0,52	1,93
11	50,9	3,0	7,3	5,3	0,68	2,22
12	55,6	3,1	7,4	4,8	0,61	2,02
13	56,1	2,9	7,2	4,6	0,61	2,04
14	56,7	3,0	7,6	4,7	0,59	2,02
<b>в среднем</b>		<b>3,42</b>	<b>8,4</b>	<b>5,15</b>	<b>0,57</b>	<b>2,07</b>

\* Влажность этих образцов рассчитывалась по влажности воздуха в лабораторном помещении.

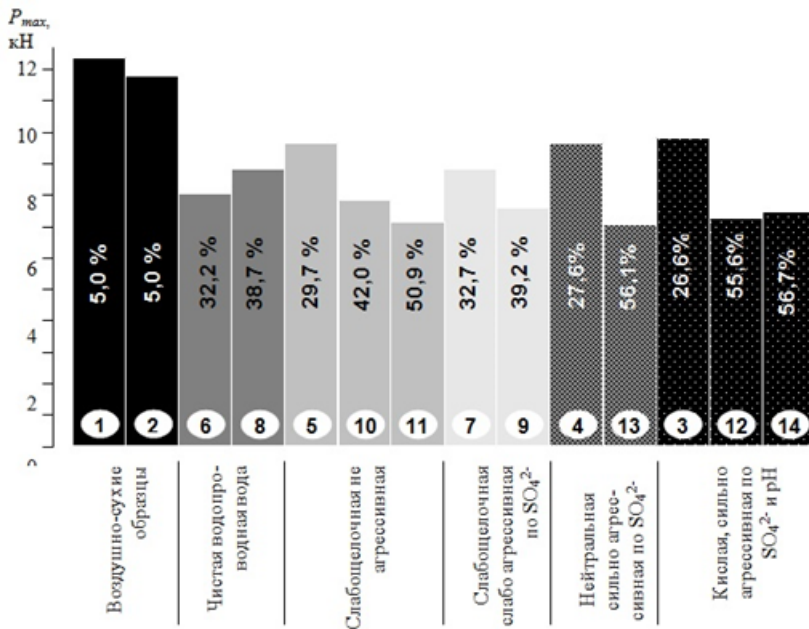


Рис. 2. Диаграмма распределения значений  $P_{max}$  воздушносухих образцов газобетона и образцов, увлажненных различной шахтной водой.

Результаты систематизации параметра  $P^{cp}_{const}$  и показателей  $k_c$  и  $a_c$  по степени влажности газобетонных образцов и характеру агрессивности шахтной

воды представлены в виде диаграмм на рисунке 3. Даже при беглом осмотре этой диаграммы видно, что значения  $P_{const}^{cp}$ ,  $k_c$  и  $a_c$  не связаны с агрессивностью шахтной воды. Поэтому **первый аналитический вывод** по результатам выполненных исследований заключается в том, что при контакте газобетона с шахтной водой в течение 45 суток химические процессы не успевают вызвать его коррозию, а изменения показателей связаны с эффектом адсорбционного понижения прочности твердых тел. Независимо от состава воды и степени влажности образцов, диаграммы их нагружения качественно не отличаются от диаграмм воздушно-сухих образцов. Разница заключается в количественных выражениях показателей. Значения  $P_{max}$  и  $R_c$  с увеличением влажности от 5,0 до 56,7 % в среднем уменьшаются на 31 %,  $P_{const}^{cp}$  – на 18 %,  $a_c$  – на 20,4 %, а  $k_c$  увеличивается на 42 %.

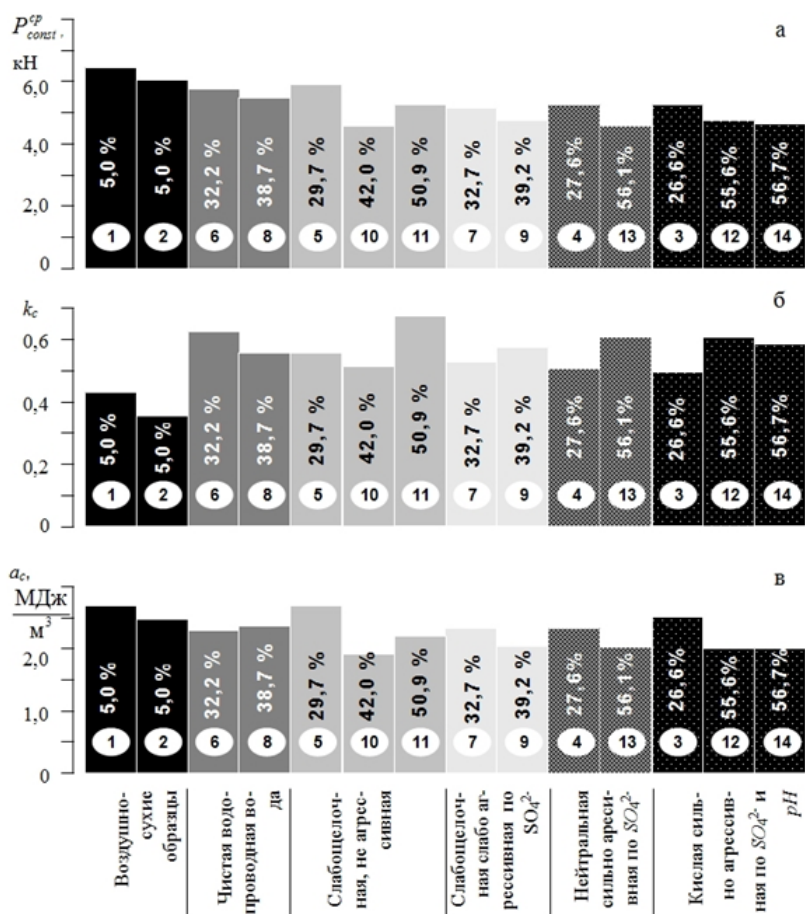


Рис. 3. Диаграммы распределения значений  $P_{const}^{cp}$ (а),  $k_c$ (б) и  $a_c$ (в) воздушно-сухих и увлажненных шахтной водой образцов газобетона.

Из этого следует **второй вывод**, что эффект адсорбционного понижения прочности определяет предел прочности материала, а несущая способность ма-

териала за пределом прочности формируется на макроуровне. **Третий вывод** заключается в том, что при увлажнении газобетона удельная работа сопротивления деформированию снижается меньше, чем максимальная несущая способность. Поэтому фактическая несущая способность влажного газобетона всегда будет выше расчетной величины.

При количественном анализе результатов испытаний кубических образцов зависимости показателей  $P_{max}$ ,  $k_c$  и  $a_c$  от степени влажности газобетона были аппроксимированы несколькими функциями, представленными в таблице 5.

Таблица 5.

Аппроксимация зависимости показателей  $P_{max}$ ,  $k_c$  и  $a_c$  от влажности газобетона

Вид аппроксимации зависимости $y = f(w)$		Величина достоверности ( $r^2$ ) аппроксимации зависимости $y = f(w)$ для показателя:		
		$P_{max}$	$k_c$	$a_c$
Полиномиальная второй степени	$y = aw^2 + bw + c$	0,9328	0,7457	0,6506
Полиномиальная третьей степени	$y = aw^3 + bw^2 + cw + d$	-	0,7469	0,7156
Экспоненциальная	$y = ae^{-bw}$	0,9110	0,7104	0,6340
Степенная	$y = aw^{-c}$	0,8416	0,7744	0,4740
Линейная	$y = -bw + c$	0,9070	0,7025	0,6381

Как видно из таблицы, в диапазоне влажности от 5,0 до 56,7 % зависимость  $P_{max} = f(w)$  с наибольшей достоверностью аппроксимируется полиномом второй степени, зависимость  $a_c = f(w)$  – полиномом третьей степени, а  $k_c = f(w)$  – степенной функцией. В графическом виде эти зависимости показаны на рисунках 4–6.

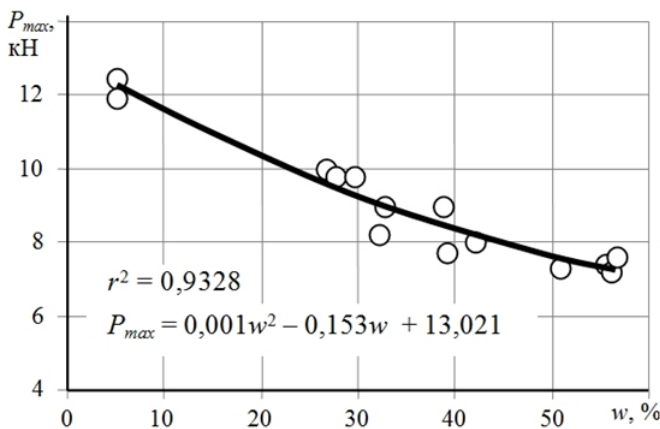


Рис. 4. Зависимость  $P_{max}$  кубических образцов газобетона от  $w$ .

Изменение несущей способности элементов бетонной крепи под влиянием шахтных вод

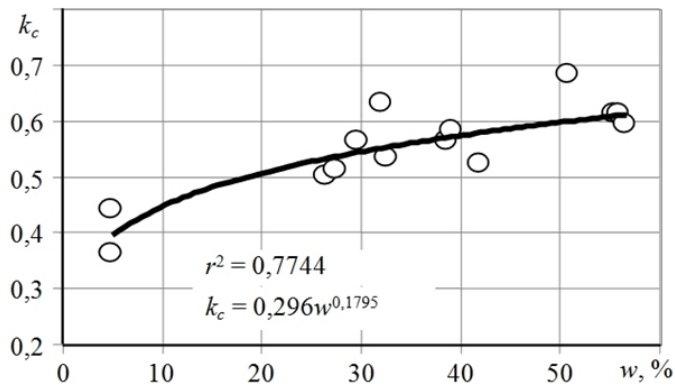


Рис. 5. Зависимость показателя  $k_c$  кубических образцов газобетона от  $w$ .

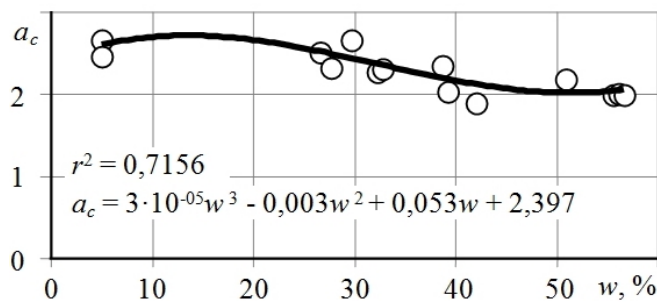


Рис. 6. Зависимость показателя  $a_c$  кубических образцов газобетона от  $w$ .

Наилучшей аппроксимацией зависимости  $R_w/R_c = f(w)$  является полином второй степени с достоверностью  $r^2 = 0,9557$  (рис. 7)

$$R_w = R_c(6 \cdot 10^{-5}w^2 - 0,012w + 1,0569).$$

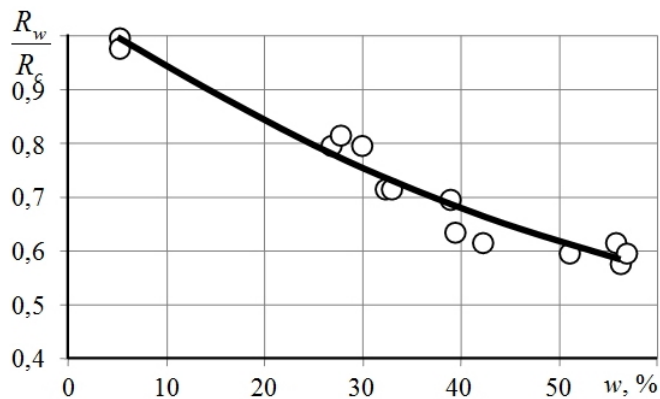


Рис. 7. Зависимость относительного изменения кубиковой прочности ( $R_w/R_c$ ) газобетона марки В3,5 от степени его влажности  $w$ .

Зависимость показателя  $a_c$  кубических образцов от степени их влажности

$$a_c = 3 \cdot 10^{-5} w^3 - 0,003 w^2 + 0,053 w + 2,397$$

показывает, что в процессе увлажнения газобетона снижение удельной работы сопротивления деформированию начинается с  $w = 23\%$ .

Это еще раз подтверждает, что при увлажнении газобетона его несущая способность за пределом прочности снижается меньше, чем максимальная несущая способность.

**Закключение.** В процессе увлажнения образцов газобетона эффект адсорбционного понижения прочности определяет их сопротивление сжатию на стадии упруго-пластического деформирования, а несущая способность образцов за пределом прочности определяется условиями вторичного уплотнения газобетона. Поэтому при повышении влажности образцов от 5,0 до 56,7 % их максимальная несущая способность ( $P_{max}$ ) уменьшается на 31 %, средняя несущая способность в области условно постоянного сопротивления – на 18 %, а удельная работа сопротивления деформированию – на 20,4 %, причем последний показатель начинает уменьшаться только при  $w > 23\%$  [2, 3].

Практические рекомендации по эксплуатации газобетонных опор в обводненных условиях:

– при контакте газобетонных блоков с агрессивной шахтной водой в течение 45 суток химические процессы не успевают вызвать коррозию газобетона, и все изменения его деформационно-нагрузочных характеристик связаны с эффектом адсорбционного понижения прочности;

– поддерживающие опоры по техническим условиям не должны подвергаться затоплению. Поэтому в нормальных условиях эксплуатации основным источником увлажнения газобетона является шахтная атмосфера, из которой он может адсорбировать при относительной влажности воздуха 100 % не более 18 % влаги. В этом случае получаем  $R_w = 0,86R_c$ ;

– при затоплении охраняемой выработки любым типом шахтной воды на срок до трех суток дополнительная корректировка эксплуатационной прочности газобетона не требуется и можно принимать равной  $R_w = 0,86R_c$ . При затоплении выработки на срок до 20 суток следует принимать  $R_w = 0,62R_c$ ;

– при возможности затопления выработки агрессивной шахтной водой на 20 и более суток, использование газобетонных опор является нецелесообразным.

1. Гідрогеологія та інженерна геологія глибоких горизонтів Донбасу / під ред. В.С. Панова та І.А. Скабаллановича. – Київ: Наук. думка, 1974. – 160 с.
2. Канин В.А. Охрана горных выработок газобетонной крепью / В.А. Канин, А.В. Анцифоров. – Донецк: ООО "АЛЛАН", 2004. – 396 с.
3. Канин В.А. Разработка новых средств охраны пластовых выемочных выработок в условиях неустойчивых легко обрушающихся пород / В.А. Канин // Зб. наук. пр. ДонНТУ: "Проблеми гірського тиску". – Донецьк: ДонНТУ, 2004. – Вип.12. – С. 174-199.

**V.A. Kanin**

**Changes in the bearing capacity of concrete support elements under the influence of mine waters of various aggressiveness.**

This article presents the results of research on changes in the bearing capacity of aerated concrete mine support under the influence of mine waters of various degrees of aggressiveness. The dependences of changes in the strength of aerated concrete and the load-bearing capacity of fastening structures on the degree of their humidity are given.

**Keywords:** *concrete, aerated concrete, mine water aggressiveness, concrete corrosion, bearing capacity of wet aerated concrete support.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк  
*ranimi@ranimi.org*

*Получено 28.08.2020*