ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1997 году

Серия А
Естественные науки

2/ 2020

Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки

Главный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**
Зам. главного редактора — д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**
Ответственный секретарь: канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**
Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Трой-ский университет, США); д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

The Editorial Board of the journal "Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences"

The Editor-in-Chief — Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**
The Deputy of the Editor-in-Chief — Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**
Executive Secretary: Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**
The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA; Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001
Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** http://donnu.ru/vestnikA

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 — Математика; 01.02.00 — Механика; 01.04.00 — Физика; 02.00.00 — Химические науки; 03.02.00 — Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет». Протокол № 7 от 30.09.2020 г.

©ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2020

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки **№ 2** Донецк **2020**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Агибалова А. В., Лунев А. А. О разности резольвент некоторых дифференциальных операторов . . . 3

Волчков В. В., Волчков Вит. В. Единственность решений уравнений искаженной свертки на комплексных евклидовых пространствах . . . 10

Волчкова Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А. Об устранении особенностей функций с нулевыми интегралами по кругам . . . 41

Заставный В. П. Неравенства для положительно определенных функций на группе . 51

Иванов А. Ю., Мельник А.-В. В. О построении Магических квадратов . . . 61

Калоеров С. А. Точные аналитические решения краевых задач теории упругости и электромагнитоупругости о сосредоточенных воздействиях в пластинке с эллиптическим отверстием . . . 68

Лиманский Д. В. О нулях слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева неквазиэллиптических систем дифференциальных операторов . . . 76

Манов А. Д. О некоторых неравенствах для вполне монотонных функций . . . 86

Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для куба в многомерном пространстве . . . 92

Шаташвили А. Д., Фомина Т. А., Ивахненко Н. Н., Папазова Е. Н. О плотностях вероятностных мер, порожденных решениями нелинейных уравнений с неограниченными операторами и со случайным параметром, возмущенных гауссовскими процессами в гильбертовом пространстве . . . 104

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

***Series A.* Natural Sciences** **№ 2** Donetsk **2020**

CONTENTS

Mathematics

Agibalova A. V., Lunyov A. A. On resolvent difference of differential operators 3

Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Uniqueness of solutions of twisted convolution equations on complex Euclidean spaces 10

Volchkova N. P., Volchkov Vit. V., Ishchenko N. A. On elimination of singularities of functions with zero integrals over disks 41

Zastavnyi V. P. Inequalities for positive definite functions on group 51

Ivanov A. Yu., Melnik A.-V. V. About Magic Squares's construction 61

Kaloerov S. A. The exact solutions of boundary value problems of elacticity and electro-magneto-elasticity on the concentrated actions in the plate with elliptic hole 68

Limanskii D. V. On zeros of weakly coercive in the anisotropic Sobolev spaces non-quasi-elliptic systems of differential operators 76

Manov A. D. On some inequalities for completely monotone functions 86

Masharov P. A. The local Pompeiu problem for the cube in the multidimensional space . . 92

Shatashvili A. D., Fomina T. A., Ivakhnenko N. N., Papazova E. N. On the densities of probability measures generated by solutions of nonlinear equations with unbounded operators and with a random parameter, perturbed by Gaussian processes in a Hilbert space 104

УДК 517.927.4

О РАЗНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2020. ***А. В. Агибалова, А. А. Лунев***

Работа посвящена изучению свойств одномерных возмущений неограниченных операторов, порожденных специальными граничными задачами для 2×2 систем дифференциальных уравнений на конечном интервале.

Также для ранга разности резольвент операторов, соответствующих граничным задачам для $n \times n$ систем, найдена простая формула в терминах коэффициентов граничных условий.

***Ключевые слова*:** система типа Дирака, резольвента, одномерное возмущение.

Введение. В течение последних двадцати лет одномерные возмущения самосопряженных операторов интенсивно изучались Саймоном, Дель Рио, Макаровым и многими другими авторами в связи с проблемой устойчивости точечного спектра и при изучении сингулярного непрерывного спектра (см. [1], [2] и обзор [3]). Некоторые недавние результаты можно найти в работах [4], [5]. Для возмущений компактных самосопряженных операторов (или самосопряженных операторов с компактной резольвентой), но возмущения которых уже не самосопряженные, спектральная структура становится неожиданно богатой и сложной, как только покинуть классы, охватываемые классическими теориями (диссипативных операторов или слабых возмущений в смысле Мацаева, см. книги [6] и [7]). Больше, чем в данной работе, результатов содержится в [8].

В последнее время появилось значительное число работ, посвящённых полноте и базисности Рисса в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$ граничных задач для общих систем дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathcal{L}y := \mathcal{L}(B,Q)y := -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_n). \tag{1}$$

Здесь B – невырожденная диагональная $n \times n$ комплекснозначная матрица:

$B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, и $Q(\cdot) =: (Q_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^n \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ – потенциальная матрица.

Чтобы получить граничную задачу, к уравнению (1) присоединим краевые условия

$$Cy(0) + Dy(1) = 0, \quad C = (c_{jk}),\ D = (d_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{2}$$

Всегда предполагаем условие максимальности $\mathrm{rank}(C\ D) = n$.

Рассмотрим операторы $L_{C,D} := L_{C,D}(B,Q)$ ассоциированные с граничной задачей (1)–(2) в общем $n \times n$ случае. Найдём явную формулу для ранга разности резольвент двух таких операторов. Напомним, что для ограниченного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, его ранг – это размерность образа: $\mathrm{rank}\, A := \dim(\mathrm{ran}\, A)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\Phi(\cdot,\lambda) \in AC\,([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ – фундаментальная матрица системы (1), т.е.

$$-iB^{-1}\Phi'(x,\lambda) + Q(x)\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda) \text{ для всех } x \in [0,1], \quad \Phi(0,\lambda) = I_n. \tag{3}$$

© Агибалова А. В., Лунев А. А., 2020

Хорошо известно, что $\Phi(x,\lambda)$ невырождена для всех $x \in [0,1]$ и, значит, абсолютно непрерывна: $\Phi^{-1}(\cdot,\lambda) \in AC\left([0,1];\mathbb{C}^{n\times n}\right)$. В дальнейшем обозначим через $R_{C,D}(\lambda) := (L_{C,D}-\lambda)^{-1}$ резольвенту оператора $L_{C,D}$, ассоциированного с граничной задачей (1)–(2). Вначале напомним простую лемму из [3].

Лемма 1 ([3, Следствие 4.2]). *Пусть $\lambda \in \rho\left(L_{C,D}\right)$. Тогда*

$$\left(R_{C,D}(\lambda)f\right)(x) = (K_\lambda f)(x) - \Phi(x,\lambda)M_{C,D}(\lambda)(K_\lambda f)(1), \tag{4}$$

где

$$M_{C,D}(\lambda) := (C + D\Phi(1,\lambda))^{-1}D, \tag{5}$$

$$(K_\lambda f)(x) := \Phi(x,\lambda)\int_0^x \Phi^{-1}(t,\lambda)iBf(t)dt. \tag{6}$$

Наряду с оператором $L_{C,D}$ рассмотрим оператор $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}} := L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(B,Q)$, ассоциированный с уравнением (1) и граничными условиями

$$\widetilde{C}y(0) + \widetilde{D}y(1) = 0, \quad \widetilde{C},\widetilde{D} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad \operatorname{rank}(\widetilde{C}\ \ \widetilde{D}) = n.$$

Следующая формула для ранга разности резольвент следует непосредственно из Леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $\lambda \in \rho(L_{C,D}) \cap \rho(L_{\widetilde{C},\widetilde{D}})$. Тогда*

$$\operatorname{rank}\big(R_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda) - R_{C,D}(\lambda)\big) = \operatorname{rank}\widehat{M}(\lambda), \tag{7}$$

где

$$\widehat{M}(\lambda) := M_{C,D}(\lambda) - M_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda). \tag{8}$$

Кроме того, если ранг разности в (7) равен 1, то $\widehat{M}(\lambda)$ допускает представление

$$\widehat{M}(\lambda) = \alpha(\lambda)\cdot\beta(\lambda)^* = \Big(\alpha_j(\lambda)\overline{\beta_k(\lambda)}\Big)_{j,k=1}^n \tag{9}$$

с некоторыми вектор-функциями $\alpha,\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$. И для любой $f \in L^2\left([0,1];\mathbb{C}^n\right)$ имеем

$$\big(R_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda) - R_{C,D}(\lambda)\big)f = \big(f, \Psi^*(\cdot,\lambda)\beta(\lambda)\big)_{L^2([0,1];\mathbb{C}^n)}\cdot\Phi(\cdot,\lambda)\alpha(\lambda),$$

где

$$\Psi(\cdot,\lambda) := i\Phi(1,\lambda)\Phi^{-1}(\cdot,\lambda)B. \tag{10}$$

Доказательство. **(i)** Из Леммы 1 (формула (4)) следует, что

$$\big(R_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda)f - R_{C,D}(\lambda)f\big)(x) = \Phi(x,\lambda)\big(M_{C,D}(\lambda) - M_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda)\big)\big[(K_\lambda f)(1)\big] \tag{11}$$

для любой $f \in \mathfrak{H} := L^2\left([0,1];\mathbb{C}^n\right)$. Из определения K_λ (формула (6)) нетрудно вывести, что

$$\{(K_\lambda f)(1) : f \in \mathfrak{H}\} = \mathbb{C}^n. \tag{12}$$

Именно, для $u \in \mathbb{C}^n$, $(K_\lambda f)(1) = u$, и достаточно положить $f(x) = \Psi^{-1}(x,\lambda)u$. Так как $\Phi(\cdot,\lambda), \Phi^{-1}(\cdot,\lambda) \in AC\left([0,1];\mathbb{C}^{n\times n}\right)$, то формула (7) непосредственно следует из равенств (11), (12) и (8).

(ii) Если ранг разности в (7) равен 1, то $\widehat{M}(\lambda)$ имеет ранг 1 и таким образом допускает представление (9). Теперь из (11) и определения K_λ и $\Psi(\cdot,\lambda)$ (формулы (6) и (10)) следует, что для любой $f \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}\big(R_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda) - R_{C,D}(\lambda)\big)f &= \Phi(\cdot,\lambda)\alpha(\lambda)\cdot\beta(\lambda)^*\cdot\int_0^1 \Psi(t,\lambda)f(t)dt = \\ &= \Phi(\cdot,\lambda)\alpha(\lambda)\cdot\int_0^1 \langle f(t), \Psi^*(t,\lambda)\beta(\lambda)\rangle_{\mathbb{C}^n}dt = \\ &= \big(f, \Psi^*(\cdot,\lambda)\beta(\lambda)\big)_{\mathfrak{H}}\cdot\Phi(\cdot,\lambda)\alpha(\lambda),\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Следующий результат даёт явную формулу ранга разности резольвент операторов $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}$ и $L_{C,D}$ в терминах матриц $C, D, \widetilde{C}, \widetilde{D}$.

Предложение 1. *Пусть* $\lambda \in \rho(L_{C,D}) \cap \rho(L_{\widetilde{C},\widetilde{D}})$. *Тогда*

$$\operatorname{rank}\Big(R_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda) - R_{C,D}(\lambda)\Big) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} C & D \\ \widetilde{C} & \widetilde{D}\end{pmatrix} - n. \tag{13}$$

Доказательство. Положим $A := A(\lambda) := C + \Phi(1,\lambda)D$ и $\widetilde{A} := \widetilde{A}(\lambda) := \widetilde{C} + \Phi(1,\lambda)\widetilde{D}$. Заметим, что матрицы A и $\widetilde{A}$ невырождены, так как $\lambda \in \rho(L_{C,D}) \cap \rho(L_{\widetilde{C},\widetilde{D}})$. Принимая это во внимание, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C & D \\ \widetilde{C} & \widetilde{D}\end{pmatrix} &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} C+\Phi(1,\lambda)D & D = \\ \widetilde{C}+\Phi(1,\lambda)\widetilde{D} & \widetilde{D}\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & D \\ \widetilde{A} & \widetilde{D}\end{pmatrix} = \\ &= \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \widetilde{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}D \\ I_n & \widetilde{A}^{-1}\widetilde{D}\end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}D = \\ I_n & \widetilde{A}^{-1}\widetilde{D}\end{pmatrix} = \\ &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & A^{-1}D - \widetilde{A}^{-1}\widetilde{D} = \\ I_n & \widetilde{A}^{-1}\widetilde{D}\end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}\left(A^{-1}D - \widetilde{A}^{-1}\widetilde{D}\right) = \\ &= n + \operatorname{rank}\left(\big(C+\Phi(1,\lambda)D\big)^{-1}D - \big(\widetilde{C}+\Phi(1,\lambda)\widetilde{D}\big)^{-1}\widetilde{D}\right) = \\ &= n + \operatorname{rank}\Big(M_{C,D}(\lambda) - M_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\lambda)\Big) = n + \operatorname{rank}\widehat{M}(\lambda).\end{aligned} \tag{14}$$

Теперь формула (13) следует из равенств (7) и (14). □

Рассмотрим случай $n = 2$. Имеем систему

$$-iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \qquad y = \operatorname{col}(y_1, y_2), \qquad x \in [0,1], \tag{15}$$

с невырожденной матрицей B и комплекснозначной потенциальной матрицей Q:

$$B = \operatorname{diag}(b_1, b_2) \quad \text{и} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0\end{pmatrix} \in L^1\left([0,1]; \mathbb{C}^{2\times 2}\right). \tag{16}$$

В этом случае условия (2) удобнее переписать в виде

$$U_j(y) := a_{j1}y_1(0) + a_{j2}y_2(0) + a_{j3}y_1(1) + a_{j4}y_2(1) = 0, \quad j \in \{1,2\}, \tag{17}$$

предполагая, что линейные формы $\{U_j\}_{j=1}^2$ линейно независимы. Также будем писать L_{U_1,U_2} вместо $L_{C,D}$.

Пусть $\Phi(x,\lambda)$ – фундаментальная матрица системы (15)

$$\Phi(x,\lambda) := \begin{pmatrix}\Phi_1(x,\lambda) & \Phi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, \quad \Phi_j(x,\lambda) := \begin{pmatrix}\varphi_{1j}(x,\lambda)\\ \varphi_{2j}(x,\lambda)\end{pmatrix}, \quad j\in\{1,2\}.$$

Собственные значения задачи (15)–(17) есть корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) := \det U(\lambda) = 0$, где

$$U(\lambda) := \begin{pmatrix}U_1(\Phi_1(x,\lambda)) & U_1(\Phi_2(x,\lambda))\\ U_2(\Phi_1(x,\lambda)) & U_2(\Phi_2(x,\lambda))\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}u_{11}(\lambda) & u_{12}(\lambda)\\ u_{21}(\lambda) & u_{22}(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Далее, обозначим

$$A_{jk} := \begin{pmatrix}a_{1j} & a_{1k}\\ a_{2j} & a_{2k}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J_{jk} := \det A_{jk}, \quad j,k\in\{1,\dots,4\}. \tag{19}$$

Заметим, что граничные условия (17) примут вид (2) если мы положим $C := A_{12}$ и $D := A_{34}$. В частности, $U(\lambda) = C + D\Phi(1,\lambda)$.

Принимая во внимание обозначения (19),приходим к следующему выражению для характеристического определителя:

$$\Delta(\lambda) = J_{12} + J_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda} + J_{32}\varphi_{11}(\lambda) + J_{13}\varphi_{12}(\lambda) + J_{42}\varphi_{21}(\lambda) + J_{14}\varphi_{22}(\lambda), \tag{20}$$

где $\varphi_{jk}(\lambda) := \varphi_{jk}(1,\lambda)$. Если $Q = 0$, то $\varphi_{12}(x,\lambda) = \varphi_{21}(x,\lambda) = 0$, и характеристический определитель $\Delta_0(\cdot)$ имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = J_{12} + J_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda} + J_{32}e^{ib_1\lambda} + J_{14}e^{ib_2\lambda}.$$

В дальнейшем обозначим через $R_{U_1,U_2}(\lambda) := (L_{U_1,U_2} - \lambda)^{-1}$ резольвенту оператора L_{U_1,U_2}, ассоциированного с граничной задачей (15)–(17). Несложные вычисления приводят к явной формуле для матрицы-функции $M_{U_1,U_2}(\lambda) := M_{C,D}(\lambda)$, заданной (5), благодаря определителям J_{jk} из (19). Наряду с оператором L_{U_1,U_2} рассмотрим оператор $L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2} := L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(B,Q)$, ассоциированный с уравнением (15) и граничными условиями

$$\widetilde{U}_j(y) := \widetilde{a}_{j1}y_1(0) + \widetilde{a}_{j2}y_2(0) + \widetilde{a}_{j3}y_1(1) + \widetilde{a}_{j4}y_2(1) = 0, \quad j\in\{1,2\}.$$

Аналогично (20) имеем следующую формулу для характеристического определителя $\widetilde{\Delta}(\cdot)$ оператора $L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}$:

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) = \widetilde{J}_{12} + \widetilde{J}_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda} + \widetilde{J}_{32}\varphi_{11}(\lambda) + \widetilde{J}_{13}\varphi_{12}(\lambda) + \widetilde{J}_{42}\varphi_{21}(\lambda) + \widetilde{J}_{14}\varphi_{22}(\lambda),$$

где

$$\widetilde{J}_{jk} := \det \widetilde{A}_{jk}, \quad \widetilde{A}_{jk} := \begin{pmatrix}\widetilde{a}_{1j} & \widetilde{a}_{1k}\\ \widetilde{a}_{2j} & \widetilde{a}_{2k}\end{pmatrix}, \quad j,k\in\{1,\dots,4\}.$$

Заметим, что $L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2} = L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}$ с $\widetilde{C} := \widetilde{A}_{12}$ и $\widetilde{D} := \widetilde{A}_{34}$. Следующий результат непосредственно следует из Предложения 1.

Следствие 1. *Пусть $L_{U_1,U_2} \neq L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}$ и $\lambda \in \rho(L_{U_1,U_2}) \cap \rho(L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2})$. Тогда разность резольвент $R_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1,U_2}(\lambda)$ одномерна тогда и только тогда, когда*

$$\det\begin{pmatrix}A_{12} & A_{34}\\ \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{34}\end{pmatrix} = 0, \tag{21}$$

что, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$J_{12}\widetilde{J}_{34} + \widetilde{J}_{12}J_{34} + J_{13}\widetilde{J}_{42} + \widetilde{J}_{13}J_{42} + J_{14}\widetilde{J}_{23} + \widetilde{J}_{14}J_{23} = 0. \tag{22}$$

Доказательство. Из равенств $\operatorname{rank}(A_{12}\ \ A_{34}) = \operatorname{rank}(\widetilde{A}_{12}\ \ \widetilde{A}_{34}) = 2$ и $L_{U_1,U_2} \neq L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}$ следует, что

$$r := \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_{12} & A_{34} \\ \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{34} \end{pmatrix} \in \{3,4\}.$$

Следовательно, $r = 3$ только в том случае, если условие (21) выполнено. В свою очередь, $r = 3$ эквивалентно тому, что разность резольвент $R_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1,U_2}(\lambda)$ одномерна согласно Предложению 1.

Наконец, применяя к определителю в (21) по первым двум строкам разложение Лапласа и принимая во внимание определения J_{jk} и $\widetilde{J}_{jk}$, приходим к эквивалентности (21) и (22). □

Теперь рассмотрим ситему (15)

$$\mathcal{L}y = -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \qquad y = \operatorname{col}(y_1, y_2), \qquad x \in [0,1]. \tag{23}$$

с граничными условиями специального вида

$$\widetilde{U}_1(y) := y_1(0) - h_1 y_2(0) = 0, \qquad \widetilde{U}_2(y) = y_1(1) - h_2 y_2(0) = 0. \tag{24}$$

Здесь Q задаётся (16) и $h_1, h_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Обозначим через $L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2} = L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(B,Q)$ оператор, ассоциированный с задачей (23)–(24) в $\mathfrak{H} = L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$.

В следующей теореме мы укажем простое алгебраическое условие на коэффициенты общей задачи (15)–(17), обеспечивающее одномерность разности резольвент операторов L_{U_1,U_2} и $L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}$. Более того, мы дадим явную форму этой разности.

Теорема 1. *Пусть $L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2} \neq L_{U_1,U_2}$ и $\lambda \in \rho(L_{U_1,U_2}) \cap \rho(L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2})$.*

(i) Тогда разность резольвент $R_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1,U_2}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$J_{34}h_2 + J_{14}h_1 = J_{42}. \tag{25}$$

(ii) Пусть условие (25) нарушено и к тому же

$$\gamma(\lambda) := J_{14} + J_{34}\varphi_{11}(\lambda) \neq 0, \tag{26}$$

Тогда разность резольвент $R_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1,U_2}(\lambda)$ допускает представление (2) с вектор-функциями $\alpha =: \operatorname{col}(\alpha_1,\alpha_2)$ и $\beta =: \operatorname{col}(\beta_1,\beta_2)$, задаваемыми равенствами

$$\alpha_1(\lambda) = h_1 - \frac{J_{34}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}, \qquad \alpha_2(\lambda) = 1, \tag{27}$$

$$\overline{\beta_1(\lambda)} = \frac{J_{13} - J_{34}\varphi_{21}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{1}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}, \qquad \overline{\beta_2(\lambda)} = \frac{\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{28}$$

Доказательство. **(i)** Из (24) следует, что $\widetilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -h_1 \\ 0 & -h_2 \end{pmatrix}$ и $\widetilde{A}_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, из определения $\widetilde{J}_{jk}$ имеем

$$\widetilde{J}_{12} = -h_2, \quad \widetilde{J}_{13} = 1, \quad \widetilde{J}_{32} = h_1, \quad \widetilde{J}_{14} = \widetilde{J}_{42} = \widetilde{J}_{34} = 0. \tag{29}$$

Т. о. условие (22) преобразуется в (25). Теперь следствие 1 заканчивает доказательство пункта (i).

(ii) Согласно пункту (i) и Лемме 2, условие (25) даёт, что $\operatorname{rank}\widehat{M}(\lambda) = 1$. Значит, $\widehat{M}(\lambda)$ допускает представление (9), которое при $n = 2$ превращается в

$$\widehat{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\lambda)\overline{\beta_1(\lambda)} & \alpha_1(\lambda)\overline{\beta_2(\lambda)} \\ \alpha_2(\lambda)\overline{\beta_1(\lambda)} & \alpha_2(\lambda)\overline{\beta_2(\lambda)} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Проверим формулы (27)–(28) для $\alpha_1(\lambda)$, $\alpha_2(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$. Из (20) и (29) следует, что

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) = -h_2 + h_1\varphi_{11}(\lambda) + \varphi_{12}(\lambda), \quad M_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(\lambda) = \frac{1}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Положим

$$M_{U_1,U_2}(\lambda) =: \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где для удобства мы опустили зависимость от λ. Из (31) и (32) следует, что

$$\widehat{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{11} - \frac{h_1}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} & m_{12} \\ m_{21} - \frac{1}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} & m_{22} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \widehat{m}_{11} & \widehat{m}_{12} \\ \widehat{m}_{21} & \widehat{m}_{22} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Если $\widehat{m}_{22} \neq 0$ и $\det\widehat{M}(\lambda) = 0$, то легко можно увидеть, что представление (30) имеет место, например, при

$$\alpha_1(\lambda) = \frac{\widehat{m}_{12}}{\widehat{m}_{22}}, \quad \alpha_2(\lambda) = 1, \quad \overline{\beta_1(\lambda)} = \widehat{m}_{21}, \quad \overline{\beta_2(\lambda)} = \widehat{m}_{22}. \tag{34}$$

Из (33) и определения (26) $\gamma(\lambda)$ следует, что

$$\widehat{m}_{12} = \frac{J_{42} - J_{34}\varphi_{12}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \widehat{m}_{21} = \frac{J_{13} - J_{34}\varphi_{21}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{1}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}, \quad \widehat{m}_{22} = \frac{\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{35}$$

Так как $\gamma(\lambda) \neq 0$, то $\widehat{m}_{22} \neq 0$. Теперь формула (28) непосредственно следует из (34) и (35). Для $\alpha_1(\lambda)$ выводим из (35), (25), (31) и (26)

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) = \frac{\widehat{m}_{12}}{\widehat{m}_{22}} &= \frac{J_{42} - J_{34}\varphi_{12}(\lambda)}{\gamma(\lambda)} = \frac{J_{14}h_1 + J_{34}(h_2 - \varphi_{12}(\lambda))}{\gamma(\lambda)} \\ &= \frac{J_{14}h_1 + J_{34}(h_1\varphi_{11}(\lambda) - \widetilde{\Delta}(\lambda))}{\gamma(\lambda)} = h_1 - \frac{J_{34}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. □

Далее покажем, что почти для каждой граничной задачи (15)–(17), существует такая граничная задача (23)–(24), что соответствующая разность резольвент одномерна.

Следствие 2. *Пусть L_{U_1,U_2} – оператор, ассоциированный с задачей (15)–(17), и пусть J_{jk} определяются (19). Предположим, что среди чисел $\{J_{14}, J_{42}, J_{34}\}$ либо по крайней мере два не равны нулю, либо все равны нулю. Тогда существует пара чисел $\{h_1, h_2\}$ с условием $h_1h_2 \neq 0$, такая что разность резольвент $R_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1,U_2}(\lambda)$ одномерна.*

В частности, последнее выполнено для любых регулярных граничных условий U_1, U_2.

Доказательство. Согласно Теореме 1, достаточно выбрать $h_1, h_2 \neq 0$ удовлетворяющие (25). Если все J_{14}, J_{42}, J_{34} нули, то подходит любая пара $\{h_1, h_2\}$ с $h_1 h_2 \neq 0$. Если хотя бы два из этих чисел ненулевые, то существование требуемых чисел $\{h_1, h_2\}$ непосредственно следует из (25). Теперь предположим, что граничные условия регулярны. В обоих случаях $b_1/b_2 \in \mathbb{R}$ и $b_1/b_2 \notin \mathbb{R}$ это означает, что $J_{14}J_{32} \neq 0$. В этом случае J_{34} и J_{42} не могут одновременно равняться нулю, так как в противной случае J_{32} будет нулём. Таким образом, среди чисел J_{14}, J_{42}, J_{34} как минимум два ненулевые. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Del Rio R. Operators with singular continuous spectrum. II. Rank one operators / R. Del Rio, N. Makarov, B. Simon // Comm. Math. Phys. –1994. – V. 165, №1. – P. 59—67.
2. Simon B. Spectral analysis of rank one perturbations and applications / B. Simon // CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – V. 8. – P. 109-–149.
3. Lunyov A. A. On spectral synthesis for dissipative Dirac type operators / A. A. Lunyov, M. M Malamud // Integr. Equations and Oper. Theory. – 2014. – V. 80, №1. – P. 78–106.
4. Liaw C. Rank one perturbations and singular integral operators / C. Liaw, S. Treil // J. Funct. Anal. – 2009. – V. 257, №6. – P. 1947—1975.
5. Albeverio S. Decompositions of singular continuous spectra of H.2-class rank one perturbations / S. Albeverio, A. Konstantinov, V. Koshmanenko // Integral Equations Operator Theory. – 2005. – V. 52, №4. – P. 455—464.
6. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965. — с. 448.
7. Гохберг И. Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. — с. 508.
8. Agibalova A. V. Completeness Property of One-Dimensional Perturbations of Normal and Spectral Operators Generated by First Order Systems / A. V. Agibalova, A. A. Lunyov, M. M. Malamud, L. L. Oridoroga // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2019. – V. 91, №37 https://doi.org/10.1007/s00020-019-2535-1

Поступила в редакцию 14.05.2020 г.

ON RESOLVENT DIFFERENCE OF DIFFERENTIAL OPERATORS

A. V. Agibalova, A. A. Lunyov

The paper is concerned with property of rank one perturbations of unperturbed operators generated by special boundary value problems (BVP) for the 2×2 system on a finite interval assuming that a potential matrix is summable.

We find a simple formula for the rank of the resolvent difference for operators corresponding to two BVPs for $n \times n$ system in terms of the coefficients of boundary linear forms.

Keywords: Dirac-type system, resolvent operator, one-dimensional perturbation.

Агибалова Анна Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
g.agibalova@donnu.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
+38-062-3029255

Agibalova Anna Vladimirovna
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National University, Donetsk

Лунев Антон Андреевич
Facebook, Inc., MPK 12
12 Hacker Way
Menlo Park, California, 94025
United States of America
A.A.Lunyov@gmail.com

Lunyov Anton
Facebook, Inc., California, United States of America

УДК 517.444

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ИСКАЖЕННОЙ СВЕРТКИ НА КОМПЛЕКСНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2020. ***В. В. Волчков, Вит. В. Волчков***

Пусть $\mathbb{C}^n$ – комплексное евклидово пространство размерности n, $\langle z, w\rangle$ – эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, dm_n – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. В работе изучаются операторы искаженной свертки вида

$$f \to (f \star T)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z-w)T(w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle}dm_n(w),$$

где T – радиальная функция (распределение) с компактным носителем на $\mathbb{C}^n$. Приводится построение трансмутационных преобразований операторов искаженной свертки в оператор свертки на вещественной оси. Показано применение таких преобразований к различным задачам интегральной геометрии и теории периодических в среднем функций.

***Ключевые слова*:** операторы преобразования, преобразование Фурье, сферические гармоники, вырожденные гипергеометрические функции, сферические средние, группа Гейзенберга

1. Введение.

Пусть $\mathbb{R}^m$ – вещественное евклидово пространство размерности m с евклидовой нормой $|\cdot|$. Предположим, что $m \geqslant 2$, $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ и выполнено равенство

$$\int_{|x|\leq r} f(x+y)dx = 0 \tag{1}$$

при некотором фиксированном $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^m$. Верно ли, что $f = 0$? Этот вопрос был рассмотрен в 1929 году известным румынским математиком Д. Помпейю, который утверждал, что при $m = 2$ ответ является положительным [1]. Однако, спустя пятнадцать лет Л. Чакалов обнаружил (см. [2]), что доказательство Д. Помпейю содержит ошибку. Более того, он показал, что функция $f(x_1, x_2) = \sin(\lambda x_1)$ имеет нулевые интегралы по всем единичным кругам в $\mathbb{R}^2$, если число λ является нулём функции Бесселя J_1. Впоследствии выяснилось, что аналогичные примеры ненулевых функций с условием (1) можно построить, используя метод, предложенный И. Радоном ещё в 1917 году [3]. Этот метод основан на теореме о среднем для собственных функций оператора Лапласа и может быть распространён на произвольное двухточечно-однородное пространство X (см. [4, часть 2, п. 2.4]). Кроме того, он позволяет строить ненулевые функции на X, имеющие нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса.

Обозначим через $V_r(\mathbb{R}^m)$ множество функций $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющих (1) при всех $y \in \mathbb{R}^m$. Данный класс функций, а также различные его аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К.А. Беренстейна и других авторов (см. обзоры [5]– [7] и монографии [4], [8], [9], содержащие обширную библиографию). Перечислим основные направления в этих исследованиях.

1. Изучение нулевых множеств и соответствующие теоремы единственности для класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ [4], [8]– [11]. Данное направление восходит к теореме единственности Ф. Йона [10, гл. 6] для функций с нулевыми сферическими средними.

 © Волчков В. В., Волчков Вит. В., 2020

2. Исследование допустимых ограничений на рост ненулевых функций класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ и его аналогов на неограниченных областях (теоремы типа Лиувилля [4], [8]– [13]).

3. Изучение функций с условиями типа (1), в которых r принадлежит заданному двухэлементному множеству [4]– [9], [11], [14], [15] (теоремы о двух радиусах). Первым результатом в этом направлении является классическая теорема Д. Дельсарта [16], [17] о характеризации гармонических функций посредством уравнения средних значений, выполненного только для двух радиусов.

4. Описание функций класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ в виде рядов по сферическим гармоникам [4], [8], [9], [11] (аналоги разложений Тейлора и Лорана из теории аналитических функций).

5. Проблема продолжения [4], [8], [9].

6. Теоремы о стирании особенностей [4], [8], [9], [11], [19].

7. Задачи интегральной геометрии о восстановлении функций из заданных классов по известным шаровым средним [4], [9], [20]– [23].

8. Аппроксимация функций с нулевыми шаровыми средними линейными комбинациями специальных функций [4], [8], [9].

9. Изучение аналогов и обобщений класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ на различных однородных пространствах и группах (например, на римановых симметрических пространствах) [4]– [9], [13]– [15], [21]– [23].

В частности, важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение подобных задач на группах Гейзенберга, которые широко используются в современных исследованиях по гармоническому анализу и уравнениям в частных производных (см., например, [24], [25]). Вещественная $(2n+1)$-мерная группа Гейзенберга H^n представляет собой множество $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^1$ с законом умножения

$$(z,t)(w,s) = \left(z+w, t+s+\frac{1}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle\right), \quad z,w \in \mathbb{C}^n,\ t,s \in \mathbb{R}^1,$$

где $\langle z,w\rangle$ – эрмитово скалярное произведение в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Факторизация H^n по подгруппе $\mathbf{\Gamma} = \{(0,2\pi k)\colon k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ порождает редуцированную группу Гейзенберга H^n_{red}, функции на которой отождествляются с 2π-периодическими по t функциями на H^n (см. [25, § 1.2]). Исследование аналогов уравнения (1) на H^n интересно, по меньшей мере, в силу того, что H^n является модельным представителем такого важного класса групп Ли, как нильпотентные, и результаты, полученные на H^n, могут приводить к интересным задачам и гипотезам в общем случае.

Используя подходящий вариант преобразования Фурье, уравнения типа (1) на группе H^n(соответственно, H^n_{red}) можно свести к искаженным уравнениям свертки на $\mathbb{C}^n$ вида

$$\int_{|w|\le r} f(z-w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle}dm_n(w) = 0, \tag{2}$$

где dm_n – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Для изучения (2) ранее применялись методы теории идеалов, преобразование Вейля, а также спектральная теория лапласиана Гейзенберга-Кона и оператора $i\frac{\partial}{\partial t}$, развитая Р. Стрихарцем (см. [13], [26] и имеющиеся там ссылки). Однако, полученные при этом результаты были далеки от завершения. В частности, они содержали существенные ограничения на рост рассматриваемых функций. Кроме того, системы искаженных уравнений свертки на ограниченных областях в $\mathbb{C}^n$ исследованию не поддавались.

В работах авторов [27], [28] был предложен принципиально новый подход к задачам указанного типа, который позволил преодолеть перечисленные выше трудности и

состоит в следующем. Для изучения (2) вводятся и исследуются операторы, заданные на основных инвариантных подпространствах решений (2), которые устанавливают гомеоморфизмы между этими подпространствами и пространствами решений специальных одномерных систем уравнений свертки. Их определение существенно опирается на аналоги сферического преобразования для искаженной свертки. Построенные гомеоморфизмы в некотором обобщенном смысле коммутируют с оператором искаженной свертки, что позволяет свести ряд проблем, связанных с (2), к одномерному случаю.

Настоящая статья содержит описание основных идей и конструкций теории трансмутационных преобразований операторов искаженной свертки (§§ 3–8), а также краткий обзор полученных с их помощью результатов в интегральной геометрии и теории периодических в среднем функций (§§ 9–12). При ее написании частично использованы сведения из статей [27]– [31]. Отдельные аспекты теории детально рассмотрены в монографиях [4], [9], в которых можно найти дополнительные сведения и литературные указания.

2. Основные обозначения.

Как обычно, обозначим через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ соответственно множества целых, целых неотрицательных и натуральных чисел; $\binom{j}{k}$ – биномиальные коэффициенты; Γ – гамма функция; $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера.

Ниже будут встречаться следующие пространства функций и распределений на открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ (в дальнейшем, как правило, $m = 2n$, $n \geqslant 1$):

$C^s(\mathcal{O})$ ($s \in \mathbb{Z}_+$ или $s = \infty$) – пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций;

$C(\mathcal{O}) = C^0(\mathcal{O})$, $\mathcal{E}(\mathcal{O}) = C^\infty(\mathcal{O})$;

$C_c(\mathcal{O})$ – функции из $C(\mathcal{O})$ с компактным носителем;

$C_c^s(\mathcal{O}) = (C^s \cap C_c)(\mathcal{O})$, $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = C_c^\infty(\mathcal{O})$;

$\mathrm{RA}\,(\mathcal{O})$ – класс вещественно-аналитических функций;

$L^p(\mathcal{O})$ и $L^{p,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ ($p \in [1, +\infty)$) – класс p-интегрируемых и соответственно p-локально интегрируемых на $\mathcal{O}$ функций по мере Лебега dx;

$\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ – пространство распределений на $\mathcal{O}$;

$\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ – пространство распределений на $\mathcal{O}$ с компактным носителем.

Как обычно, пространство $L^{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ посредством сопоставления функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ распределения

$$\psi \to \int_{\mathcal{O}} f\psi dx, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Для носителя распределения T используется символ $\operatorname{supp} T$. Определим $r(T)$ равенством

$$r(T) = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} T \subset B_r\},$$

где $B_r = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < r\}$ – открытый шар радиуса r с центром в нуле в $\mathbb{R}^m$. Например, если δ_0 – дельта-функция Дирака в точке 0, то $r(\delta_0) = 0$.

Пусть $\mathcal{P}(-r, r)$ ($0 < r \leq +\infty$) – некоторое пространство функций или распределений на интервале $(-r, r)$. Символом $\mathcal{P}_\natural(-r, r)$ будем обозначать множество всех четных элементов из $\mathcal{P}(-r, r)$.

Аналогично, если $m \geqslant 2$ и $\mathcal{P}(B_r)$ – некоторое пространство функций или распределений в шаре B_r, то $\mathcal{P}_\natural(B_r)$ – совокупность всех элементов из $\mathcal{P}(B_r)$, инвариантных относительно ортогональной группы $\mathrm{O}(m)$ в $\mathbb{R}^m$.

Преобразование Фурье $\widehat{T}$ распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ определяется равенством

$$\widehat{T}(\zeta) = \langle T(x), e^{-i(x_1\zeta_1+\dots+x_m\zeta_m)}\rangle, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m.$$

Если $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель, то определена свертка $T_1 * T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, действующая по правилу

$$\langle T_1 * T_2, \varphi\rangle = \langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m).$$

Пусть также

$$\mathcal{Z}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$$

для функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

3. Искаженная свертка распределений на $\mathbb{C}^n$

Пусть $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ и пусть $T_1 \otimes T_2$ – тензорное произведение распределений T_1 и T_2 (см. [32, гл. 5.2]). Напомним, что $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^{2n})$ и

$$\operatorname{supp}\,(T_1 \otimes T_2) = \operatorname{supp}\, T_1 \times \operatorname{supp}\, T_2, \tag{3}$$

где $\times$ в правой части (3) обозначает декартово произведение. Если T_1 или T_2 принадлежат $\mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$, положим

$$\langle T_1 \star T_2, \psi\rangle = \langle T_1(z) \otimes T_2(w), \psi(z+w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle}\rangle \tag{4}$$

для всех $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, $z, w \in \mathbb{C}^n$. Тогда $T_1 \star T_2$ корректно определено равенством (4) как распределение в $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$. Это распределение называется искаженной сверткой T_1 с T_2 (см., например, [25, гл. 1]). Поскольку тензорное произведение обладает правилом Фубини,

$$\langle T_1 \star T_2, \psi\rangle = \langle T_1(z), \langle T_2(w), \psi(z+w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle}\rangle\rangle = \langle T_2(w), \langle T_1(z), \psi(z+w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle}\rangle\rangle. \tag{5}$$

Соотношение (5) влечет, что $T_1 \star T_2 \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, если T_1 или T_2 принадлежат $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. При этом

$$(T_1 \star T_2)(z) = \langle T_2(w), T_1(z-w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle}\rangle \tag{6}$$

для $T_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, и

$$(T_1 \star T_2)(w) = \langle T_1(z), T_2(w-z)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle}\rangle \tag{7}$$

для $T_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. В силу (5)–(7) равенство (4) можно переписать в виде

$$\langle T_1 \star T_2, \psi\rangle = \langle T_1, \check{T}_2 \star \psi\rangle = \langle T_2, \psi \star \check{T}_1\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n), \tag{8}$$

где $\check{T}_i(z) = T_i(-z)$, $i = 1, 2$. С помощью (8) видно, что (6) (соответственно (7)) остается справедливым для $T_1 \in C^\infty(\mathbb{C}^n), T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ (соответственно $T_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n), T_2 \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$). Кроме того,

$$(T_1 \star T_2)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} T_1(z-w)T_2(w)e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle}dm_n(w),$$

если $T_1 \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n)$, $T_2 \in (L^{1,\mathrm{loc}} \cap \mathcal{E}')(\mathbb{C}^n)$.

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathbb{C}^n$. Введем специальный оператор Эрмита (искаженный лапласиан)

$$\mathfrak{L} = \frac{|z|^2}{4}\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^n \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - 4\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} \right), \tag{9}$$

где Id – тождественный оператор. Оператор $\mathfrak{L}$ инвариантен относительно искаженных сдвигов $\tau(w)h(z) = h(z+w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle}$, т.е.,

$$\mathfrak{L}\left(\tau(w)h(z)\right) = \tau(w)(\mathfrak{L}h)(z). \tag{10}$$

Предложение 1. *Предположим $T_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, $i = 1, 2, 3$, и хотя бы два из распределений T_i имеют компактный носитель. Тогда:*

(i) $(\lambda T_1 + \mu T_2) \star T_3 = \lambda(T_1 \star T_3) + \mu(T_2 \star T_3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

(ii) $(T_1 \star T_2)\check{} = \check{T}_1 \star \check{T}_2$;

(iii) $\mathrm{supp}\ (T_1 \star T_2) \subset \mathrm{supp}\ T_1 + \mathrm{supp}\ T_2$;

(iv) $\overline{T_1 \star T_2} = \overline{T_2} \star \overline{T_1}$;

(v) $(T_1 \star T_2)(\overline{z}) = (T_2 \star T_1)(z)$, *если* $T_i(z) = T_i(\overline{z})$, $i = 1, 2$. *В частности,*

$$T_1 \star T_2 = T_2 \star T_1$$

для T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'_\natural(\mathbb{C}^n)$;

(vi) $(T_1 \star T_2) \star T_3 = T_1 \star (T_2 \star T_3)$;

(vii) $T_1 \star \delta_0 = \delta_0 \star T_1 = T_1$;

(viii) $(\tau(w)T_1) \star T_2 = \tau(w)(T_1 \star T_2)$;

(ix) $\mathfrak{L}(T_1 \star T_2) = T_1 \star \mathfrak{L}T_2$, $\mathfrak{L}^*(T_1 \star T_2) = (\mathfrak{L}^*T_1) \star T_2$, $(\mathfrak{L}T_1) \star T_2 = T_1 \star \mathfrak{L}^*T_2$, *где* $\mathfrak{L}^*$ – *сопряженный к оператору* $\mathfrak{L}$.

Доказательство. Соотношения (i)–(viii) следуют из (3)–(8) с помощью простых преобразований. Для доказательства (ix) достаточно использовать (6), (8), (9) и (10). □

Замечание 1. Оператор $\mathfrak{L}^*$ удовлетворяет соотношению $\mathfrak{L}^*(\overline{T}) = \overline{\mathfrak{L}T}$. Далее,

$$\mathfrak{L}^*T = \mathfrak{L}T$$

для любого радиального распределения $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$.

Предложение 2. *Пусть $T, T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Допустим $T_k \to 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ и выполнено по крайней мере одно из следующих условий :*

1) $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$;

2) существует $R > 0$ такое, что $\mathrm{supp}\ T_k \subset B_R$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *где* $B_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$.

Тогда $T_k \star T \to 0$ *в* $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Аналогично доказательству подобного утверждения для обычной свертки (см., например, [33, гл. 1, § 5]). □

Если $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ – непустые открытые подмножества $\mathbb{C}^n$, $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$, $T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{O}_2$ – $\mathrm{supp}\ T_2 \subset \mathcal{O}_1$, то свертка $T_1 \star T_2$ корректно определена равенством (4) как распределение в $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$. При этом отображение $T_1 \to T_1 \star T_2$ непрерывно из $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$.

4. Разложения по биградуированным сферическим гармоникам

Пусть $m \geqslant 2$, $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$,

$$\omega_{m-1} = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2) - \text{мера} \quad \mathbb{S}^{m-1},$$

индуцированная мерой Лебега в $\mathbb{R}^m$, ρ и σ – полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^m$ ($\rho = |x|$, а если $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, то $\sigma = x/\rho$). Обозначим через $\mathcal{H}^{m,k}$ пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{m-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ (см. [34, гл. 4]). При отождествлении $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ имеет место равенство

$$\mathcal{H}^{2n,k} = \sum \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{n,p,q},$$

где $\mathcal{H}^{n,p,q}$ – пространство сферических гармоник бистепени (p,q) на $\mathbb{S}^{2n-1}$ [35, гл. 12]. Как известно [35, теоремы 12.2.7, 12.2.8], квазирегулярное представление $T^n(\tau)f(\sigma) = f(\tau^{-1}\sigma)$ унитарной группы $\mathrm{U}(n)$ в $L^2(\mathbb{S}^{2n-1})$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $T^{n,p,q}(\tau)$, действующих на $\mathcal{H}^{n,p,q}$. При $n \geqslant 2$ размерность $d(n,p,q)$ пространства $\mathcal{H}^{n,p,q}$ вычисляется по формуле

$$d(n,p,q) = \frac{(p+n-2)!\,(q+n-2)!\,(p+q+n-1)}{p!\,q!\,(n-1)!\,(n-2)!}$$

(см. [9, гл. 12, § 12.2]). Обозначим через $\{S_l^{p,q}\}$, $l \in \{1,\dots,d(n,p,q)\}$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Будем считать, что $S_1^{0,0} = 1/\sqrt{\omega_{2n-1}}$. Функции $S_l^{p,q}$ можно продолжить до многочленов на $\mathbb{C}^n$, используя соотношение $S_l^{p,q}(z) = \rho^{p+q}S_l^{p,q}(\sigma)$, $z = \rho\sigma$.

Пусть $\mathcal{O}$ – непустое открытое $\mathrm{U}(n)$-инвариантное подмножество $\mathbb{C}^n$. Каждая функция $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ имеет разложение Фурье вида

$$f(z) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f_{p,q,l}(\varrho)S_l^{p,q}(\sigma), \quad z = \varrho\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}, \tag{11}$$

где

$$f_{p,q,l}(\varrho) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\varrho\sigma)\overline{S_l^{p,q}(\sigma)}d\omega(\sigma),$$

$d\omega$ – поверхностная мера. По теореме Фубини функция $f_{p,q,l}$ является локально суммируемой на множестве $\{r > 0 : S_r \subset \mathcal{O}\}$, где $S_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = r\}$. Аналогично, функция

$$f^{p,q,l}(z) = f_{p,q,l}(\varrho)S_l^{p,q}(\sigma)$$

принадлежит классу $L^{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$.

Пусть $\{t_{k,l}^{p,q}(\tau)\}$ $(k,l \in \{1,\dots,d(n,p,q)\}, \tau \in \mathrm{U}(n))$ – матрица представления $T^{n,p,q}(\tau)$ в базисе $\{S_l^{p,q}\}$, то есть,

$$T_2^{n,p,q}(\tau)S_l^{p,q} = \sum_{k=1}^{d(n,p,q)} t_{k,l}^{p,q}(\tau)S_k^{p,q}. \tag{12}$$

Ввиду ортогональности $\{S_l^{p,q}\}$ имеем

$$t_{k,l}^{p,q}(\tau) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} S_l^{p,q}(\tau^{-1}\sigma)\overline{S_k^{p,q}(\sigma)}d\omega(\sigma).$$

Предложение 3. *Пусть $d\tau$ – нормированная мера Хаара на группе $\mathrm{U}(n)$. Тогда для почти всех $\varrho \in \{r > 0 : S_r \subset \mathcal{O}\}$ и всех $\sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}$ имеет место равенство*

$$f_{p,q,l}(\varrho)S_k^{p,q}(\sigma) = d(n,p,q)\int_{\mathrm{U}(n)} f(\tau^{-1}z)\overline{t_{k,l}^{p,q}(\tau)}d\tau. \tag{13}$$

Доказательство. Мы можем считать, без ограничения общности, что $f \in L^{2,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$. При этом ряд (11) сходится к $f(\varrho\sigma)$ в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{2n-1})$ для почти всех $\varrho \in \{r > 0 : S_r \subset \mathcal{O}\}$. Поэтому непрерывность оператора представления и соотношение (12) влекут равенство

$$f(\tau^{-1}z) = \sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{k,l=1}^{d(n,p,q)} f_{p,q,l}(\varrho)t_{k,l}^{p,q}(\tau)S_k^{p,q}(\sigma). \tag{14}$$

Используя (14) и соотношения ортогональности для матричных элементов (см. [36, гл. 1, § 4]), получаем (13). □ Формула (13) показывает, что если $f \in C^s(\mathcal{O})$ при некотором $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, то функция

$$f^{p,q,k,l}(z) = f_{p,q,l}(\varrho) S_k^{p,q}(\sigma)$$

совпадает почти всюду с функцией класса $C^s(\mathcal{O})$. Далее, для каждой $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ имеем

$$\int_{\mathcal{O}} f^{p,q,k,l}(z)\psi(z)dm_n(z) = d(n,p,q)\int_{\mathcal{O}} f(z)\int_{\mathrm{U}(n)} \psi(\tau^{-1}z)t_{l,k}^{p,q}(\tau)d\tau dm_n(z) =$$

$$= \int_{\mathcal{O}} f(z)\overline{(\overline{\psi})_{p,q,k}(\varrho)}\ \overline{S_l^{p,q}(\sigma)}dm_n(z).$$

Теперь мы можем продолжить отображение $f \to f^{p,q,k,l}$ и разложение (11) на распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ следующим образом:

$$\langle f^{p,q,k,l}, \psi\rangle = \left\langle f, d(n,p,q)\int_{\mathrm{U}(n)} \psi(\tau^{-1}z)t_{l,k}^{p,q}(\tau)d\tau\right\rangle = \left\langle f, \overline{(\overline{\psi})_{p,q,k}(\varrho)}\,\overline{S_l^{p,q}(\sigma)}\right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \tag{15}$$

$$f \sim \sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f^{p,q,l}, \tag{16}$$

где $f^{p,q,l} = f^{p,q,l,l}$. Ряд (16) сходится в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно $\mathcal{E}(\mathcal{O})$) для $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно $f \in \mathcal{E}(\mathcal{O})$). В силу (15) отображение $f \to f^{p,q,k,l}$ является непрерывным оператором из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Предложение 4. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и T – радиальное распределение из $\mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$. Предположим, что множество $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}^n : z - \operatorname{supp} T \subset \mathcal{O}\}$ является непустым. Тогда*

$$(f \star T)^{p,q,k,l} = f^{p,q,k,l} \star T \quad \text{в} \quad \mathcal{U}. \tag{17}$$

В частности,

$$(P(\mathfrak{L})f)^{p,q,k,l} = P(\mathfrak{L})f^{p,q,k,l} \tag{18}$$

для любого полинома $P : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Из (5) и (15) получаем

$$\left\langle (f \star T)^{p,q,k,l}, \psi\right\rangle = \left\langle f(z), \left\langle T(w), d(n,p,q)\int_{\mathrm{U}(n)} \psi(\tau^{-1}z + \tau^{-1}w)t_{l,k}^{p,q}(\tau)d\tau\ e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle}\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \left\langle f(z), d(n,p,q)\int_{\mathrm{U}(n)} \left\langle T(w), \psi(\tau^{-1}z + w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle \tau^{-1}z,w\rangle}\right\rangle t_{l,k}^{p,q}(\tau)d\tau\right\rangle =$$

$$= \left\langle f^{p,q,k,l}(z), \left\langle T(w), \psi(z+w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle}\right\rangle\right\rangle = \left\langle f^{p,q,k,l} \star T, \psi\right\rangle.$$

Это доказывает (17). Подставляя $T = P(\mathfrak{L})\delta_0$ в (17) и применяя предложение 1 (ix), мы приходим к (18). □ Для заданного класса $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$ распределений на $\mathcal{O}$ определим класс $\mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O})$ равенством

$$\mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{p,q,l}\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{W}_{0,0,1}(\mathcal{O}) = \mathfrak{W}_\natural(\mathcal{O})$, где $\mathfrak{W}_\natural(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : \langle f, \psi\rangle = \langle f, \psi\circ\tau\rangle$ для всех $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \tau \in \mathrm{U}(n)\}$. Положим также $\mathrm{conj}\,(\mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O})) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}) : \overline{f} \in \mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O})\}$.

В завершение этого пункта приведем некоторые формулы, связанные с действием оператора $\mathfrak{L}$ на пространстве $C^2_{p,q,l}(\mathcal{O})$. Пусть E – непустое открытое подмножество из $(0;+\infty)$. Для любого $s \in \mathbb{Z}$ рассмотрим дифференциальный оператор $D_i(s), i = 1, 2$, определенный на $C^1(E)$ следующим образом:

$$(D_i(s)\varphi)(\varrho) = \varrho^s e^{(-1)^{i+1}\frac{\varrho^2}{4}} \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-s} e^{(-1)^i\frac{\varrho^2}{4}}\varphi(\varrho)\right), \quad \varphi \in C^1(E). \tag{19}$$

Предложение 5. *Пусть* $f \in C^2_{p,q,l}(\mathcal{O})$. *Тогда*
(i) $(\mathfrak{L} + (n+2q)\mathrm{Id})f(z) = -(D_2(1-2n-p-q)D_1(p+q)f_{p,q,l})(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma)$;
(ii) $(\mathfrak{L} - (n+2p)\mathrm{Id})f(z) = -(D_1(1-2n-p-q)D_2(p+q)f_{p,q,l})(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma)$;
(iii) $(\mathfrak{L} + (n+2q-2)\mathrm{Id})f(z) = -(D_1(p+q-1)D_2(2-2n-p-q)f_{p,q,l})(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma)$;
(iv) $(\mathfrak{L} - (n+2p-2)\mathrm{Id})f(z) = -(D_2(p+q-1)D_1(2-2n-p-q)f_{p,q,l})(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma)$.

Доказательство. Прямым вычислением с использованием (9) находим

$$(\mathfrak{L}f)(z) = (\mathfrak{L}_{p,q}f_{p,q,l})\,(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma), \tag{20}$$

где

$$\mathfrak{L}_{p,q} = -\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{2n-1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} + \left(\frac{(p+q)(2n+p+q-2)}{\varrho^2} + \frac{1}{4}\varrho^2 + p - q\right)\mathrm{Id}.$$

Теперь требуемые формулы следуют из (19). □

5. Вырожденные гипергеометрические функции

Пусть ${}_1F_1(a;b;\zeta)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера (см. [37, гл. 6]). Функция

$$M_{\alpha,\beta}(\zeta) = \zeta^{\beta+1/2}e^{-\zeta/2}{}_1F_1(1/2-\alpha+\beta;1+2\beta;\zeta)$$

называется вырожденной гипергеометрической функцией Уиттекера (см. [37, гл. 6]). Функция ${}_1F_1(a;b;\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta u''(\zeta) + (b-\zeta)u'(\zeta) - au(\zeta) = 0.$$

Аналогично, функция $M_{\alpha,\beta}(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$v''(\zeta) + \left(-1/4 + \frac{\alpha}{\zeta} + \frac{1/4-\beta^2}{\zeta^2}\right)v(\zeta) = 0. \tag{21}$$

Подставляя в (21) $v = v_{\alpha,\beta}$, где $v_{\alpha,\beta}$ – функция Уиттекера с параметрами α, β, и полагая $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$, находим

$$\frac{d}{d\zeta}(v_{\alpha_1,\beta}(\zeta)v'_{\alpha_2,\beta}(\zeta) - v'_{\alpha_1,\beta}(\zeta)v_{\alpha_2,\beta}(\zeta)) = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\zeta}v_{\alpha_1,\beta}(\zeta)v_{\alpha_2,\beta}(\zeta).$$

Отсюда

$$u_{a_2,b}(\zeta)\frac{d^2}{d\zeta^2}(\zeta^{b/2}e^{-\zeta/2}u_{a_1,b}(\zeta)) - u_{a_1,b}(\zeta)\frac{d^2}{d\zeta^2}(\zeta^{b/2}e^{-\zeta/2}u_{a_2,b}(\zeta)) =$$
$$= \frac{(a_1-a_2)\zeta^{b/2-1}u_{a_1,b}(\zeta)u_{a_2,b}(\zeta)}{e^{\zeta/2}},$$

где $u_{a,b}(\zeta) = {}_1F_1(a;b;\zeta)$. Следуя [37, гл. 6, § 6.4], положим

$$A_k(\mu,\lambda) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^k \left(e^{2\mu\zeta}(1-\zeta)^{\mu-\lambda}(1+\zeta)^{-\mu-\lambda}\right)\Big|_{\zeta=0}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции $A_k(\mu,\lambda)$ обладают следующими свойствами (см. [37, гл. 6, § 6.4]):

(1) $A_0(\mu,\lambda) = 1$, $A_1(\mu,\lambda) = 0$, $A_2(\mu,\lambda) = \lambda$ и

$$(k+1)A_{k+1}(\mu,\lambda) = (k+2\lambda-1)A_{k-1}(\mu,\lambda) - 2\mu A_{k-2}(\mu,\lambda) \text{ при } k \geqslant 2;$$

(2) $A_k(\mu,\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{[k/3]} a_{m,k}(\lambda)\mu^m$, где $a_{m,k}(\lambda) = \frac{1}{m!}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^m (A_k(\mu,\lambda))|_{\mu=0}$;

(3) $A_k(-\mu,\lambda) = (-1)^k A_k(\mu,\lambda)$.

Кроме того, согласно разложению Трикоми

$$e^{-\zeta/2}{}_1F_1(a;b;\zeta) = \Gamma(b)(c\zeta)^{(1-b)/2}\sum_{k=0}^{\infty} A_k(c,b/2)\left(\frac{\zeta}{4c}\right)^{k/2} J_{k+b-1}(2\sqrt{c\zeta}),$$

где J_ν – функция Бесселя с индексом ν,

$$c = b/2 - a. \tag{22}$$

Используя это разложение, можно получить следующий результат (см. [27]).

Предложение 6. *Пусть* $\operatorname{Re} b > 1/2$ *и* $x > 0$. *Тогда*

$$x^{b-1}e^{-x/2}{}_1F_1(a;b;x) = \int_0^{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{c}\,t)k_b(x,t)dt,$$

где c *задается равенством* (22) *и*

$$k_b(x,t) = \frac{\Gamma(b)}{\sqrt{\pi}\,2^{2b-3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(b+k-1/2)8^k}\sum_{m=0}^{[k/3]}(-1)^m a_{m,k}(b/2)\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\left((4x-t^2)^{k-3/2+b}\right). \tag{23}$$

При этом функция $k_b(x,t)(4x-t^2)^{3/2-b}$ *является бесконечно дифференцируемой для* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Указанное представление функции ${}_1F_1(a;b;x)$ в виде преобразования Фурье позволяет найти ее асимптотическое поведение.

Предложение 7. *Пусть* $b \in \mathbb{C}$ *фиксировано и* $0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,\pi)$ *при* $c \to \infty$, $|\arg\sqrt{cx}| \leqslant \pi - \varepsilon$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\frac{\sqrt{\pi}e^{-x/2}{}_1F_1(a;b;x)}{\Gamma(b)} = \frac{\cos(2\sqrt{cx} - \frac{\pi}{4}(2b-1))}{(\sqrt{cx})^{b-1/2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{(2b-3)(2b-1)}{4}\right)\cdot$$
$$\frac{\sin(2\sqrt{cx} - \frac{\pi}{4}(2b-1))}{(\sqrt{cx})^{b+1/2}} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}(2\sqrt{cx})|}}{(\sqrt{cx})^{b+3/2}}\right) \tag{24}$$

где константа в знаке O *зависит только от* b, x_1, x_2, ε.

Доказательство. При $\operatorname{Re} b > 1/2$ соотношение (24) следует из предложения 6 и асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [38, гл. 2, доказательство теоремы 10.2]). Используя теперь [37, 6.4 (3)], мы получаем (24) в общем случае. □

6. Функции $\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}$

Пусть $\eta, p, q \in \mathbb{Z}_+$, $\zeta \in \mathbb{C}$ и $\varrho \in (0, +\infty)$. Положим

$$a = p + \frac{n-\zeta^2}{2}, \quad b = n+p+q, \quad x = \frac{\varrho^2}{2}, \quad y = \varrho^{p+q} e^{-\frac{\varrho^2}{4}}. \tag{25}$$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $l \in \{1, ..., d(n,p,q)\}$ и $z = \varrho\sigma \in \mathbb{C}^n$ определим

$$\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}(z) = \begin{cases} \sqrt{\omega_{2n-1}}\, \phi_{\lambda,\eta,p,q}(\varrho) S_l^{p,q}(\sigma), & \text{если } z = \varrho\sigma \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \\ \delta_{0,\eta}\delta_{0,p+q}, & \text{если } z = 0, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$\phi_{\lambda,\eta,p,q}(\varrho) = \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{\varkappa} (y\ {}_1F_1(a;b;x))\Big|_{\zeta=\lambda}, \tag{27}$$

$\varkappa = \eta$, если $\lambda \neq 0$, $\varkappa = 2\eta$, если $\lambda = 0$. Нетрудно видеть, что $\phi_{\lambda,\eta,p,q,l} \in \mathrm{RA}\,(\mathbb{C}^n)$.

Рассмотрим основные свойства функций (26), (27).

Предложение 8. *Пусть $D_i(s)$, $i = 1, 2$ – дифференциальные операторы, определенные равенством* (19). *Тогда при $s = p + q$ справедливы соотношения:*

$$D_1(s)\phi_{\lambda,0,p,q} = -\frac{(n+2q+\lambda^2)}{2(n+s)}\phi_{\lambda,0,p,q+1}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+; \tag{28}$$

$$D_2(s)\phi_{\lambda,0,p,q} = \frac{(n+2p-\lambda^2)}{2(n+s)}\phi_{\lambda,0,p+1,q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+; \tag{29}$$

$$D_1(2-s-2n)\phi_{\lambda,0,p,q} = 2(n+s-1)\phi_{\lambda,0,p-1,q}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{Z}_+; \tag{30}$$

$$D_2(2-s-2n)\phi_{\lambda,0,p,q} = 2(n+s-1)\phi_{\lambda,0,p,q-1}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Доказательство. Применим формулу дифференцирования для функции ${}_1F_1$ (см. [37, 6.4 (8)]. Учитывая связь между смежными вырожденными гипергеометрическими функциями (см. [37, 6.4 (4) и 6.4 (5)]), приходим к (28)–(31). □

Предложение 9. *Если $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, то в $\mathbb{C}^n$ справедливы следующие соотношения:*

$$\mathfrak{L}^k \phi_{0,\eta,p,q,l} = \begin{cases} (-2\eta)_{2k}\phi_{0,\eta-k,p,q,l}, & \textit{если } k \leqslant \eta \\ 0, & \textit{если } k > \eta, \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}^k \phi_{\mu,\eta,p,q,l} = \sum_{\nu=\max\{0,\eta-2k\}}^{\eta} \binom{\eta}{\nu} \frac{(2k)!\mu^{2k-\eta+\nu}}{(2k-\eta+\nu)!}\phi_{\mu,\nu,p,q,l},$$

$$(\mathfrak{L}-\mu^2)^k \phi_{\mu,\eta,p,q,l} = \sum_{\nu=\max\{0,\eta-2k\}}^{\eta} (-1)^{\nu-\eta} \frac{\eta! 2^{2k-\eta+\nu}(-k)_{2k-\eta+\nu}}{\nu!(2k-\eta+\nu)!}\mu^{2k-\eta+\nu}\phi_{\mu,\nu,p,q,l}.$$

В частности, для $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\mathfrak{L}-\lambda^2)^{\eta+1}\phi_{\lambda,\eta,p,q,l} = 0. \tag{32}$$

Доказательство. В силу (20) уравнение $(\mathfrak{L}-\zeta^2)(f(\varrho)S_l^{p,q}(\sigma))=0$ можно переписать в виде

$$f''(\varrho)+\frac{f'(\varrho)}{\varrho}(2n-1)-\frac{f(\varrho)}{\varrho^2}\left((p+q)(2n+p+q-2)+(p-q-\zeta^2)\varrho^2+\frac{1}{4}\varrho^4\right)=0. \quad (33)$$

Подстановка $f(\varrho)=y\,u(x)$ (см. (25)) сводит (33) к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции. Отсюда следует (32) при $\eta=0$. Доказательство остальных формул из предложения 9 содержится в [9, глава 12]. □

Предложение 10. *Справедливо интегральное представление*

$$\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho)=\frac{1}{\sqrt{\omega_{2n-1}}}\int_0^{\varrho}\cos(\lambda t)\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,t)dt, \quad (34)$$

где $\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,\cdot)\in L^1[0,\varrho]$. *При этом*

$$\mathfrak{K}_{n,p,p}(\varrho,t)=4^{n+2p-1}\sqrt{\omega_{2n-1}}\frac{(\varrho^2-t^2)^{n+2p-3/2}}{\varrho^{2n+2p-2}}\left(k_{n+2p}(u,v)(4u-v^2)^{3/2-n-2p}\right)\Big|_{u=\varrho^2/2,\ v=\sqrt{2}t},$$

где $k_{n+2p}(u,v)$ *определяется равенством* (23).

Доказательство. В соответствии с предложением 6

$$\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho)=\frac{1}{\varrho^{n+b-2}}\int_0^{\varrho}\cos(\sqrt{\lambda^2+q-p}\ t)(\varrho^2-t^2)^{b-3/2}\mathcal{K}_{n,p,q}(\varrho,t)dt, \quad (35)$$

где

$$\mathcal{K}_{n,p,q}(\varrho,t)=4^{b-1}k_b(u,v)(4u-v^2)^{3/2-b}\Big|_{u=\varrho^2/2,\ v=\sqrt{2}t}.$$

Осталось использовать (35), (24) и теорему Винера-Пэли для косинус-преобразования Фурье. □

Замечание 2. Доказательство предложения 10 показывает, что функция $\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,\cdot)$ принадлежит $L^2[0,\varrho]$ при $b>1$.

Используя (24) и [37, 6.13 (15),(26)], можно получить следующие оценки функций $\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}$ и их производных (см. [9, глава 12]).

Предложение 11. *Пусть* $0<r<R<\infty$ *и* $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$. *Тогда при* $\lambda\to\infty$ *имеют место следующие оценки*

$$\sup_{|z|<r}\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}(z)\right|=O\left(|\lambda|^{|\alpha|+|\beta|-p-q}e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}\right), \quad (36)$$

$$\sup_{r<|z|<R}\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}(z)\right|=O\left(|\lambda|^{|\alpha|+|\beta|+1/2-b}e^{R|\mathrm{Im}\lambda|}\right),$$

где константы в O *не зависят от* λ.

Приведем теперь некоторые важные свойства нулей функций $\phi_{\lambda,0,p,q}(r)$ [9, глава 12].

Предложение 12. *Для фиксированных* $p,q\in\mathbb{Z}_+$ *и* $r\in(0,+\infty)$ *справедливы следующие утверждения.*

(i) Функция $\phi_{\lambda,0,p,q}(r)$ *имеет бесконечно много нулей* λ.

(ii) Все нули $\phi_{\lambda,0,p,q}(r)$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$.

(iii) Пусть $\lambda_l = \lambda_l(p,q,r,n)$, $l \in \mathbb{N}$ – последовательность всех положительных нулей функции $\phi_{\lambda,0,p,q}(r)$, занумерованная в порядке возрастания, и пусть $0 < a \leqslant r \leqslant b < +\infty$. Тогда

$$r\lambda_l = \pi\left(\frac{2b+1}{4} + l + j(p,q,r,n)\right) + \left(\frac{r^3}{12} + (p-q)r - \frac{(2b-3)(2b-1)}{4r}\right)\frac{1}{2\lambda_l} + O\left(\frac{1}{\lambda_l^3}\right),$$

где $j(p,q,r,n) \in \mathbb{Z}$ не зависит от l, а константы в O зависят только от p,q,n,a,b.

Обозначим $N_{p,q}(r) = \{\lambda > 0 : \phi_{\lambda,0,p,q}(r) = 0\}$. Для $\lambda, \mu \in N_{p,q}(r)$ определим

$$\eta(\lambda,\mu) = \int_0^r \varrho^{2n-1}\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho)\phi_{\mu,0,p,q}(\varrho)d\varrho.$$

Лемма 1. *Пусть $\lambda, \mu \in N_{p,q}(r)$. Тогда $\eta(\lambda,\mu) = 0$, если $\lambda \neq \mu$, и*

$$\eta(\lambda,\lambda)\lambda^{2(n+p+q)} > c,$$

где $c > 0$ не зависит от λ.

Лемма 2. *Пусть $v \in L[0,r]$ и*

$$\int_0^r \varrho^{2n-1}v(\varrho)\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho)d\varrho = 0$$

для всех $\lambda \in N_{p,q}(r)$. Тогда $f = 0$.

Далее, если $u \in L[0,r]$, $\lambda \in N_{p,q}(r)$, положим

$$c_\lambda(u) = (\eta(\lambda,\lambda))^{-1}\int_0^r \varrho^{2n-1}u(\varrho)\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho)d\varrho.$$

Пусть также $\mathfrak{L}_{p,q}$ – дифференциальный оператор, заданный равенством (20).

Предложение 13. *Предположим, что при некотором $\zeta > \frac{1}{2}(p+q+1)+n$ функция u удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathfrak{L}_{p,q}^s u \in C^2[0,r]$, если $s = 0,1,\ldots,\zeta-1$, и $\mathfrak{L}_{p,q}^\zeta u \in C[0,r]$;

2) $\left(\mathfrak{L}_{p,q}^s u\right)(r) = 0$, $s = 0,1,\ldots,\zeta-1$.

Тогда $c_\lambda(u) = O\left(\lambda^{-2\zeta+2n+p+q}\right)$ при $\lambda \to +\infty$ и справедливо разложение

$$u(\varrho) = \sum_{\lambda\in N_{p,q}(r)} c_\lambda(u)\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho), \quad \varrho \in [0,r],$$

в котором ряд сходится в $C^s[0,r]$ при $s < \zeta - n - \frac{1}{2}(p+q+1)$.

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\lambda_j = \sqrt{2p+n+2j}, \tag{37}$$

$$\mu_j = \frac{2^{1-n-p-q}}{\omega_{2n-1}(n+p+q-1)!}\binom{n+p+q+j-1}{n+p+q-1}. \tag{38}$$

В терминах многочленов Лагерра L_j^α (см. [37, 6.9 (36)]) имеем

$$\binom{n+p+q+j-1}{n+p+q-1}\phi_{\lambda_j,0,p,q}(\varrho) = \varrho^{p+q}e^{-\varrho^2/4}L_j^{n+p+q-1}(\varrho^2/2).$$

Предложение 14. *Система функций* $\{\phi_{\lambda_j,0,p,q,l}\}_{j=0}^{\infty}$ *образует ортогональный базис в* $L^2_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$. *Кроме того,*

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\phi_{\lambda_j,0,p,q,l}(z)|^2 dm_n(z) = \frac{1}{\mu_j}.$$

Доказательство. Пусть $g \in L^2((0,+\infty), t^{n+p+q-1}e^{-t}dt)$ и $G(z) = \varrho^{p+q}e^{-\varrho^2/4}g(\varrho^2/2)S_l^{p,q}(\sigma)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{C}^n} |G(z)|^2 dm_n(z) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \varrho^{2(n+p+q)-1}e^{-\varrho^2/2}|g(\varrho^2/2)|^2 \cdot$$

$$|S_l^{p,q}(\sigma)|^2 d\varrho d\omega(\sigma) = 2^{n+p+q-1}\int_0^\infty t^{n+p+q-1}e^{-t}|g(t)|^2 dt.$$

Поэтому отображение $g \to G$ является изоморфизмом $L^2((0,+\infty),(2t)^{n+p+q-1}e^{-t}dt)$ на пространство $L^2_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$. Так как полиномы L_j^α $(j \in \mathbb{Z}_+)$ образуют ортогональный базис в $L^2((0,+\infty), t^\alpha e^{-t}dt)$ и

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}(L_j^\alpha(t))^2 dt = \frac{\Gamma(\alpha+j+1)}{j!}$$

(см. [37, 10.12 (2)]), получаем требуемое. □

7. Преобразование $\mathcal{F}_l^{p,q}$

Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, ..., d(n,p,q)\}$. Для любого $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ положим

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = \langle f, \overline{\phi_{\overline{\lambda},0,p,q,l}}\rangle = \sqrt{\omega_{2n-1}}\ \langle f, \phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho)\overline{S_l^{p,q}(\sigma)}\,\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{39}$$

Согласно (27), $\mathcal{F}_l^{p,q}(f)$ является четной целой функцией по λ. Если $f \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$, то будем писать $\widetilde{f}(\lambda)$ вместо $\mathcal{F}_1^{0,0}(f)(\lambda)$, т.е.,

$$\widetilde{f}(\lambda) = \langle f, \phi_{\lambda,0,0,0,1}\rangle.$$

Перечислим основные свойства преобразования $\mathcal{F}_l^{p,q}$ (см. [27], [28]).

Предложение 15. *Пусть* $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$. *Предположим, что* $R \in (r(T), +\infty]$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ *и* $\mathfrak{L}f = \lambda^2 f$ *при некотором* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$f \star T = \widetilde{T}(\lambda)f \quad \textit{в шаре} \quad B_{R-r(T)}. \tag{40}$$

Предложение 16. *Если* $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ *и* $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$, *то*

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f \star T)(\lambda) = \mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)\widetilde{T}(\lambda). \tag{41}$$

Доказательство. Из (32) и (40) имеем

$$\left\langle f \star T, \overline{\phi_{\overline{\lambda},0,p,q,l}}\right\rangle = \left\langle f, \overline{\phi_{\overline{\lambda},0,p,q,l} \star \overline{T}}\right\rangle = \left\langle f, \overline{\widetilde{\overline{T}}\,(\overline{\lambda})\phi_{\overline{\lambda},0,p,q,l}}\right\rangle = \widetilde{T}(\lambda)\left\langle f, \overline{\phi_{\overline{\lambda},0,p,q,l}}\right\rangle,$$

что доказывает (41) (см. (39)). □

Предложение 17. *Преобразование* $\mathcal{F}_l^{p,q}$ *является инъективным на* $\mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$.

Предложение 18. *(i) Пусть $f \in (C^s \cap \mathcal{E}'_{p,q,l})(\mathbb{C}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leqslant c\frac{e^{r(f)|\mathrm{Im}\lambda|}}{(1+|\lambda|)^{s+p+q}}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где константа c не зависит от λ.

(ii) Пусть $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что $\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda_j) = O(j^{-n-\frac{p+q+s}{2}-1})$ при $j \to +\infty$, где λ_j определяется равенством (37). Тогда $f \in C^s(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. (i) Согласно (39),

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = \sqrt{\omega_{2n-1}} \int_0^\infty \varrho^{2n-1} f_{p,q,l}(\varrho)\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho)d\varrho. \tag{42}$$

Для функции $\phi_{\lambda,0,p,q}$ мы имеем формулы дифференцирования (28)–(31). Поэтому повторное интегрирование по частям в (42) дает

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = \kappa \int_0^{r(f)} \varrho^{2n-1} \left(d_2^{s-2[s/2]}(d_1d_2)^{[s/2]} f_{p,q,l}\right)(\varrho)\phi_{\lambda,0,p+s-2[s/2],q}(\varrho)d\varrho,$$

где $d_1 = D_1(1-2n-p-q), d_2 = D_2(p+q), \kappa = \sqrt{\omega_{2n-1}}(2p+n-\lambda^2)^{-[s/2]}(-2(n+p+q))^{-s+2[s/2]}$. Теперь (i) следует из (36). Утверждение (ii) доказывается непосредственно с помощью предложения 14, (39) и (36). □

Для $r \in [0,+\infty)$ положим $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq r\}$. Следующее утверждение является аналогом теоремы Винера-Пэли для $\mathcal{F}_l^{p,q}$.

Теорема 1. *(i) Пусть $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathrm{supp}\ f \subset \overline{B}_r$. Тогда*

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leqslant c_1(1+|\lambda|)^{c_2}e^{r|\mathrm{Im}\lambda|} \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{43}$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ. Обратно, для каждой четной целой функции $w(\lambda)$, удовлетворяющей оценке вида (43), существует распределение $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, такое что

$$\mathrm{supp}\ f \subset \overline{B}_r \ \text{ и } \ \mathcal{F}_l^{p,q}(f) = w. \tag{44}$$

(ii) Если $f \in \mathcal{D}_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathrm{supp}\ f \subset \overline{B}_r$, то для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существует константа $c_N > 0$, такая что

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leqslant c_N(1+|\lambda|)^{-N}e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{45}$$

Обратно, для каждой четной целой функции $w(\lambda)$, удовлетворяющей оценке вида (45) для всех $N \in \mathbb{Z}_+$, существует функция $f \in \mathcal{D}_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, такая что выполнены условия (44).

Следствие 1. *Пусть $r > 0$, $u \in L[0,r]$ и*

$$\int_0^\varrho u(t)\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,t)dt = 0$$

для почти всех $\varrho \in (0,r)$, где $\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,t)$ определено в (34). Тогда $u = 0$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathcal{D}_\natural(-r,r)$. По теореме Винера-Пэли и теореме 1 существует функция $h \in \mathcal{D}_{p,q,1}(\mathbb{C}^n)$ с носителем в B_r, такая что $\widehat{\psi} = \mathcal{F}_1^{p,q}(h)$. Используя (34) и (39), из этого равенства находим

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\int_t^r \varrho^{2n-1} h_{p,q,1}(\varrho)\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,t)d\varrho, \quad t \in (0,r).$$

Тогда по условию получаем

$$\int_0^r u(t)\psi(t)dt = 0.$$

Поскольку функция ψ выше выбиралась произвольно, u является нулевой на $[0,r]$. □

Замечание 3. Из теоремы 1 (i) и предложений 18 и 16 имеем:

(i) если $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, то

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = O\big((1+|\lambda|)^{\operatorname{ord} f - p - q} e^{r(f)|\operatorname{Im}\lambda|}\big), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\operatorname{ord} f$ – порядок распределения f;

(ii) для распределения $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющего (43), выполнена оценка

$$\operatorname{ord} f \leqslant \max\left\{0, 2\left[\frac{c_2 + 2n + p + q + 4}{2}\right]\right\}.$$

Используя теорему 1 и теорему Винера-Пэли для $\mathbb{R}^1$ заключаем, что отображение $\Lambda^{p,q,l} : \operatorname{conj}(\mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)) \to \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^1)$, заданное равенствами

$$\widehat{\Lambda^{p,q,l}(T)}(\lambda) = \overline{\mathcal{F}_l^{p,q}(\overline{T})(\overline{\lambda})} = \langle T, \phi_{\lambda,0,p,q,l}\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

является биекцией и $r(\Lambda^{p,q,l}(T)) = r(T)$. Кроме того, $\operatorname{ord}\Lambda^{p,q,l}(T) \leqslant \max\{0, \operatorname{ord} T - p - q + 2\}$. В случае $p = q = 0$, $l = 1$ будем писать Λ вместо $\Lambda^{0,0,1}$.

Предложение 19. *Пусть $f \in (\mathcal{E}'_{p,q,l} \cap C^s)(\mathbb{C}^n)$ при некотором $s \geqslant 2n+2$. Тогда*

$$\mu_j \mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda_j) = O\left(j^{\frac{1}{2}(2n+p+q-2-s)}\right) \quad \textit{при} \quad j \to +\infty \tag{46}$$

и

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda_j)\, \phi_{\lambda_j,0,p,q,l}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{47}$$

где λ_j и μ_j определены в (37), (38).

Доказательство. Оценка (46) следует из предложения 18 (i). Соотношение (47) является частным случаем разложения по многочленам Лагерра (см. предложения 11 и 14). □

8. Трансмутационные отображения, связанные с разложением по многочленам Лагерра

Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1,\dots,d(n,p,q)\}$, $R \in (0,+\infty]$, $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(B_R)$. Для $\psi \in \mathcal{D}(-R,R)$ выберем $\eta \in \mathcal{D}_\natural(B_R)$ так, что $\eta = 1$ в $B_{r(\psi)+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r(\psi))$. Положим

$$\langle \mathfrak{A}_{p,q,l}(f), \psi\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \left(\mathcal{F}_l^{p,q}(f\eta)\right)(\lambda_j) \int_{-R}^{R} \psi(t)\cos(\lambda_j t)dt \tag{48}$$

(см. (37) и (38)). Можно показать, что $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)$ корректно определено с помощью (48) как распределение в $\mathcal{D}'_\natural(-R,R)$ и $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f|_{B_r}) = \mathfrak{A}_{p,q,l}(f)|_{(-r,r)}$ для любого $r \in (0,R]$. Кроме того, имеет место следующий результат (см. [9, глава 12]).

Теорема 2. *При $R \in (0,+\infty]$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu = 2+2n+p+q+N$ справедливы следующие утверждения.*

(i) Пусть $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(B_R)$, $r \in (0,R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f) = 0$ на $(-r,r)$.

(ii) Если $f \in C^\nu_{p,q,l}(B_R)$, то $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f) \in C^N_\natural(-R,R)$. Кроме того,

$$f_{p,q,l}(\varrho) = \int_0^\varrho (\mathfrak{A}_{p,q,l}f)(t)\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,t)dt, \quad 0<\varrho<R,$$

где $\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho,t)$ задается равенством (34), и

$$\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{2n-1}}}\lim_{\varrho\to 0} f_{p,q,l}(\varrho)\varrho^{-p-q}.$$

(iii) Отображение $\mathfrak{A}_{p,q,l}$ является непрерывным из $\mathcal{D}'_{p,q,l}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_\natural(-R,R)$ и из $C^\nu_{p,q,l}(B_R)$ в $C^N_\natural(-R,R)$.

(iv) Пусть f – распределение в $\mathcal{D}'_{p,q,l}(B_R)$ порядка N. Тогда $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)$ имеет порядок не выше ν.

(v) Предположим, что у функции $f \in C^\nu_{p,q,l}(B_R)$ все производные порядка не выше ν в нуле равны нулю. Тогда

$$\frac{d^s}{dt^s}(\mathfrak{A}_{p,q,l}f)|_{t=0} = 0$$

для $s = 0,\dots,N$.

(vi) При $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\mathfrak{A}_{p,q,l}(\phi_{\lambda,\mu,p,q,l}) = u_{\lambda,\mu}, \quad \text{где} \quad u_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \frac{(it)^\mu e^{i\lambda t}+(-it)^\mu e^{-i\lambda t}}{2}, & \lambda \neq 0 \\ (-1)^\mu t^{2\mu}, & \lambda = 0. \end{cases}$$

(vii) Пусть $T \in \operatorname{conj}(\mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n))$, $r(T) < R$ и $F \in C^s_{p,q,l}(B_R)$ при $s = \max\{2n+p+q+2,$
$\operatorname{ord} T + 2n + 4\}$. Тогда $\langle T, f\rangle = \langle \Lambda^{p,q,l}(T), \mathfrak{A}_{p,q,l}(f)\rangle$.

(viii) Пусть $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(B_R)$, $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$ и $r(T) < R$. Тогда на $(r(T)-R, R-r(T))$ выполнено соотношение

$$\mathfrak{A}_{p,q,l}(f \star T) = \mathfrak{A}_{p,q,l}(f) * \Lambda(T).$$

Замечание 4. Если $f \in C^\nu_{p,q,l}(B_R)$, $r \in (0,+\infty)$, положим $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f) = \mathfrak{A}_{(p,q),l}(f_1)|_{[-r,r]}$, где f_1 – продолжение f на $\mathbb{C}^n$, принадлежащее $C^\nu_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$. В силу теоремы 3 (i) (ii) $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)$ не зависит от выбора f_1 и $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f) \in C^N_\natural[-r,r]$.

Теорема 3. *Пусть $r \in (0,+\infty)$. Тогда существует константа $c > 0$, такая что*

$$\int_{-r}^r \left|(\mathfrak{A}_{p,q,l}(f))^{(M)}(t)\right| dt \leqslant c \sum_{i=0}^{n+2+[\frac{p+q}{2}]} \int_{B_R} \left|\mathfrak{L}^{[\frac{M+1}{2}]+i} f(z)\right| dm_n(z)$$

для всех $M \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in C^s_{p,q,l}(B_R)$, где $s = 2\big(M - [M/2] + 2n + 4 + [\frac{p+q}{2}]\big)$.

Относительно других аспектов теории трансмутационных операторов см. [4], [9], [39] и библиографию к этим работам.

9. Сферические средние на группах Гейзенберга

Пусть, как и выше, $H^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ – группа Гейзенберга, $\mathbf{\Gamma} = \{(0, 2\pi k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$, $H^n_{\rm red} = H^n/\mathbf{\Gamma}$ – редуцированная группа Гейзенберга. Обозначим через μ_r нормированную поверхностную меру на сфере $\{(w, 0)\colon |w| = r\}$. В работе [13] был получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть f – непрерывная функция на $H^n_{\rm red}$ медленного роста и*

$$f \star \mu_{r_1} = f \star \mu_{r_2} = 0 \tag{49}$$

для некоторых фиксированных r_1, $r_2 > 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $(r_1/r_2)^2$ не является отношением нулей многочленов Лагерра $L^{n-1}_k(x)$ для любого k;

(ii) r_1/r_2 не является отношением нулей функции Бесселя $J_{n-1}(x)$.

Тогда $f = 0$.

Подобный результат для ограниченных непрерывных функций на группе H^n содержится в [40]. Отметим, что методы из [13] основаны на спектральной теории лапласиана Гейзенберга-Кона и оператора $i\frac{\partial}{\partial t}$, развитой Р. Стрихарцем. В работе [40] применяются теоремы тауберова типа. Используя свойства трансмутационных операторов $\mathfrak{A}_{p,q,l}$, можно снять условие на рост функции f в теореме 4, и, более того, получить локальный аналог сформулированного результата (см. [29], [30] и теорему 7 ниже).

Для $R > 0$ положим

$$C_R = \{\{(z, t + 2\pi k)\colon k \in \mathbb{Z}\} \in H^n_{\rm red}\colon z \in B_R, 0 \leqslant t < 2\pi\},$$

где $B_R = \left\{z \in \mathbb{C}^n\colon |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle} < R\right\}$. Отождествим функции на C_R с 2π – периодическими по переменной t функциями на $B_R \times \mathbb{R}$. Будем писать $f \in L^{1,\rm loc}(C_R)$, если при любом $r \in (0, R)$

$$\int_0^{2\pi} \int_{B_r} |f(z, t)| dm(z) dt < \infty.$$

Сферическое среднее функции $f \in L^{1,\rm loc}(C_R)$ определяется равенством

$$(f * \mu_r)(z, t) = \int_{|w|=r} f\left(z - w, t - \frac{1}{2}{\rm Im}\langle z, w\rangle\right) d\mu_r(w).$$

Отметим, что эта свертка существует при почти всех $(z, t) \in B_{R-r} \times \mathbb{R}$ и для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f * \mu_r)(z, t) e^{-ikt} dt = \int_{|w|=r} f_k(z - w) e^{-\frac{ik}{2}{\rm Im}\langle z,w\rangle} d\mu_r(w), \quad z \in B_{R-r}, \tag{50}$$

где

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z, t) e^{-ikt} dt, \quad z \in B_R.$$

Обозначим $\mathfrak{H}_r(C_R)$, $0 < r < R$, – множество функций $f \in L^{1,\rm loc}(C_R)$, удовлетворяющих уравнению

$$(f * \mu_r)(z, t) = 0, \quad (z, t) \in B_{R-r} \times \mathbb{R}.$$

Для целого $s \geqslant 0$ (или для $s = \infty$) положим

$$\mathfrak{H}_r^s(C_R) = \mathfrak{H}_r(C_R) \cap C^s(C_R), \quad \mathfrak{H}_{r_1,r_2}^s(C_R) = \mathfrak{H}_{r_1,r_2}(C_R) \cap C^s(C_R),$$

где $\mathfrak{H}_{r_1,r_2}(C_R) = \mathfrak{H}_{r_1}(C_R) \cap \mathfrak{H}_{r_2}(C_R)$.

Пусть Υ – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя J_{n-1}, занумерованная в порядке возрастания, E – множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta \in \Upsilon$. Число $\tau > 0$ хорошо приближается элементами E, если для любого $c > 0$ существуют $\alpha, \beta \in \Upsilon$, такие что

$$|\tau - \alpha/\beta| < (1+\beta)^{-c}.$$

Положим

$$\mathcal{N}_0 = \{(r_1, r_2) \colon r_1/r_2 \notin E\}, \quad \Omega_0 = \{(r_1, r_2) \colon r_1/r_2 \in A\},$$

где A – множество чисел, которые хорошо приближаются элементами E. Пусть $r > 0$ – фиксировано, $N(r)$ – возрастающая последовательность всех положительных корней λ уравнения ${}_1F_1\left(-\lambda; n; r^2/2\right) = 0$ (см. предложение 12). Для $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\mathcal{N}_k = \left\{(r_1, r_2) \colon N(\sqrt{k} r_1) \cap N(\sqrt{k} r_2) = \varnothing\right\}.$$

Обозначим Ω_k – множество пар (r_1, r_2), для которых выполнено следующее условие: при любом $c > 0$ существует $\lambda \in N(\sqrt{k} r_1)$, такое что

$$|{}_1F_1\left(-\lambda; n; k r_2^2/2\right)| < (1+\lambda)^{-c}.$$

Теорема 5. *Пусть $0 < r < R$. Тогда:*

1) если $f \in \mathfrak{H}_r^s(C_R)$ и $f = 0$ в C_r, то $(f_k)_{p,q,l}(\rho) = 0$ в B_R при любых $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant p + q \leqslant s + 3$ и $1 \leqslant l \leqslant d(n, p, q)$;

2) если $f \in \mathfrak{H}_r^\infty(C_R)$ и $f = 0$ в C_r, то $f = 0$ в C_R;

3) для любого целого $s \geqslant 0$ существует ненулевая $f \in \mathfrak{H}_r^s(C_R)$ такая, что $f = 0$ в C_r;

4) для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{H}_r^\infty(C_R)$ такая, что $f = 0$ в $C_{r-\varepsilon}$.

Доказательство. При $k > 0$ равенство

$$\int_{|w|=r} f_k(z-w) e^{-\frac{ik}{2}\operatorname{Im}\langle z,w\rangle} d\mu_r(w) = 0, \quad z \in B_{R-r} \tag{51}$$

означает, что

$$\overline{f_k}\left(\frac{z}{\sqrt{k}}\right) \star \mu_{\sqrt{k}r} = 0$$

в $B_{\sqrt{k}R - \sqrt{k}r}$. При $k < 0$ равенство (51) означает, что

$$f_k\left(\frac{z}{\sqrt{-k}}\right) \star \mu_{\sqrt{-k}r} = 0$$

в $B_{\sqrt{-k}R - \sqrt{-k}r}$. Наконец, при $k = 0$ соотношение (51) равносильно обычному уравнению свертки в $\mathbb{C}^n$. Используя теперь (50), теорему 2 (i) (viii) и теорему единственности для уравнения свертки в $\mathbb{R}^m$ (см. [8, часть 3, теоремы 1.1, 2.1]), получаем второе утверждение в теореме 5. Доказательства остальных утверждений содержатся в [9, глава 17]. □

Используя свойство волнового уравнения, М. Аграновский и Е. Нараянан [41] получили другое доказательство второго утверждения теоремы 5. Однако их подход, в отличие от приведенного выше, не работает в случае общего искаженного уравнения свертки.

Отметим также, что аналог второго утверждения теоремы 5 для функций класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ с нулевыми интегралами по всем сферам фиксированного радиуса получен Ф. Йоном (см. [10]). Ряд далеко идущих обобщений и уточнений теоремы Йона содержатся в [4] и [9].

В следующей теореме ${}_kf = f_k$, если $k \leqslant 0$ и ${}_kf = \overline{f_k}$, если $k > 0$.

Теорема 6. *Пусть $f \in C^\infty(C_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \mathfrak{H}_r(C_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}$, $p, q \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant d(n,p,q)$ имели место равенства*

$$\frac{({}_kf)_{p,q,l}(\rho)}{\rho^{p+q}} e^{\frac{\rho^2|k|}{4}} = \sum_{\lambda \in N\left(\sqrt{|k|}r\right)} c_{\lambda,k,p,q,l}\, {}_1F_1\left(p-\lambda; n+p+q; \frac{\rho^2|k|}{2}\right), \quad k \neq 0,$$

$$(f_0)_{p,q,l}(\rho) = \rho^{1-n} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda,0,p,q,l} J_{n+p+q-1}\left(\frac{\lambda\rho}{r}\right), \quad k = 0,$$

где $c_{\lambda,k,p,q,l} \in \mathbb{C}$ и $c_{\lambda,k,p,q,l} = O\left(\lambda^{-c}\right)$ при $\lambda \to +\infty$ для любого фиксированного $c > 0$.

Доказательство. Достаточно применить рассуждения из предыдущей теоремы и описание функций с нулевыми сферическими средними в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. [8, часть 2, лемма 1.21]). □ Положим $\mathcal{N} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{N}_k$, $\Omega = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \Omega_k$.

Теорема 7. *Пусть $0 < r_1 < r_2 < R$. Тогда:*

1) если $r_1 + r_2 < R$, $(r_1, r_2) \in \mathcal{N}$ и $f \in \mathfrak{H}_{r_1,r_2}(C_R)$, то $f = 0$;

2) если $r_1 + r_2 = R$, $(r_1, r_2) \in \mathcal{N}$ и $f \in \mathfrak{H}^\infty_{r_1,r_2}(C_R)$, то $f = 0$;

3) если $r_1 + r_2 = R$, $(r_1, r_2) \in \mathcal{N} \cap \Omega$ и $f \in \mathfrak{H}_{r_1,r_2}(C_R)$, то $f = 0$;

4) если $r_1 + r_2 = R$, $(r_1, r_2) \notin \Omega$, то для любого целого $s \geqslant 0$ существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{H}^s_{r_1,r_2}(C_R)$;

5) если $r_1 + r_2 > R$, то существует ненулевая функция $f \in \mathfrak{H}^\infty_{r_1,r_2}(C_R)$;

6) если $(r_1, r_2) \notin \mathcal{N}$, то существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in \mathfrak{H}_{r_1,r_2}\left(H^n_{\mathrm{red}}\right)$.

Доказательство. Как и выше, доказательство теоремы сводится к доказательству подобного результата для искаженной свертки на $\mathbb{C}^n$ и функций с нулевыми сферическими средними в $\mathbb{R}^{2n}$. Используя [8, часть 3, раделы 1.6, 1.7, 4.2], теорему 2 и рассуждения из теоремы 5, мы приходим к требуемому результату. □

10. Характеризация голоморфных функций в терминах искаженных сферических средних

Характеризация голоморфных функций в терминах различных интегральных условий изучалась многими авторами. В ряде работ последних десятилетий рассматривался случай, когда контуры интегрирования в интегральном условии конгруэнтны (относительно некоторой группы) одному или нескольким фиксированным контурам. Классическая формула Грина показывает, что указанные варианты теоремы Мореры тесно связаны с известным преобразованием Помпейю, которое было предметом активных исследований, начиная с семидесятых годов двадцатого века (см. [4]– [9] и имеющуюся там библиографию).

Здесь мы рассмотрим свойства функций, удовлетворяющих взвешенным условиям типа Мореры вида

$$\int_{|w|=r} f(z-w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}(z\overline{w})}dw = 0, \tag{52}$$

где r является фиксированным числом или принадлежит заданному двухэлементному множеству. Интерес к уравнению (52) обусловлен тем, что оно тесно связано с CR-функциями на группе Гейзенберга H^1. Напомним, что последние определяются как решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}} - i\frac{z}{4}\frac{\partial}{\partial t}\right) f(z,t) = 0.$$

Ряд теорем типа Мореры для CR-функций на H^1 был установлен в [13], [42]. Наличие экспоненты в (52) препятствует простой связи между Помпейю и Морера свойствами на H^1, которая существует в обычной евклидовой ситуации. В связи с этим, доказательство теорем типа Мореры на H^1 требует значительных усилий. Доказательства в [13] опираются на спектральную теорию, развитую Стрихарцем. В [42] авторы существенно используют тауберову теорему для подалгебры радиальных функций из $L^1(H^1)$, принадлежащую Хуланики и Риччи. Соответственно, все результаты в [13], [42] носят глобальный характер и включают ограничения на рост функции на бесконечности.

Используя технику трансмутационных операторов, развитую выше, можно изучить уравнение (52) локально, а именно для $f \in C(B_R)$, где $B_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R \in (r, \infty)$. Здесь мы приведем для этого случая описание функций с условием (52), теорему единственности, а также характеризацию решений уравнения

$$Df(z) := \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z) - \frac{z}{4}f(z) = 0 \tag{53}$$

в терминах указанных интегральных средних (см. теоремы 8–11 ниже). Эти результаты позволяют получить также локальную теорему типа Мореры для CR-функций на группе Гейзенберга (см. теорему 12).

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, $t \geqslant 0$ положим

$$\phi_{\lambda,m}(t) = t^{|m|}e^{-t^2/4}\,{}_1F_1\left(\frac{m+|m|+1-\lambda^2}{2}; |m|+1; \frac{t^2}{2}\right).$$

Отметим, что функции $\Phi_{\lambda,m}(z) = \phi_{\lambda,m}(\rho)e^{im\varphi}$, где ρ, φ – полярные координаты точки $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяют уравнению

$$\mathfrak{L}\Phi_{\lambda,m} = \lambda^2\Phi_{\lambda,m},$$

где

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4}|z|^2\mathrm{Id} + \left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right) - \Delta.$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что $\mathfrak{L}f = -f$, если f принадлежит ядру оператора D.

Предложение 20. *Пусть $f \in C(B_R)$, $\mathfrak{L}f = \lambda^2 f$ в B_R и $r \in (0, R)$. Тогда в круге B_{R-r} имеет место равенство*

$$\int_{|w|=r} f(z-w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}(z\overline{w})}dw = -2\pi r i\phi_{\lambda,-1}(r)(Df)(z). \tag{54}$$

Пусть $M_r(B_R)$ – множество функций $f \in C(B_R)$, удовлетворяющих уравнению (52) при $|z| < R - r$. Равенство (54) показывает, что важную роль в структуре класса $M_r(B_R)$ играют нули λ целой функции $\phi_{\lambda,-1}(r)$ (см. предложение 12).

Приведем описание гладких функций класса $M_r(B_R)$. Представим функцию $f \in C^\infty(B_R)$ в виде ряда Фурье

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(z),$$

где

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta \, e^{im\varphi}.$$

Теорема 8. *Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in M_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $m \in \mathbb{Z}$ имели место равенства*

$$f_m(z) = c_m z^m e^{|z|^2/4} + \sum_{\lambda \in N(r)} d_\lambda \Phi_{\lambda,m}(z), \tag{55}$$

где c_m, d_λ – константы, удовлетворяющие условиям: 1) $c_m = 0$ при $m < 0$; 2) $d_\lambda = O(\lambda^{-c})$ при $\lambda \to +\infty$ для любого фиксированного $c > 0$.

Указанное условие на d_λ влечет сходимость ряда (55) в пространстве $C^\infty(B_R)$. Можно показать, что аналогичное разложение справедливо для всех функций класса $M_r(B_R)$. При этом коэффициенты d_λ растут не быстрее фиксированной степени λ, а ряд (55) сходится в смысле распределений.

Доказательство теоремы 8 существенно опирается на следующую теорему единственности для класса $M_r(B_R)$.

Теорема 9. *(i) Пусть $f \in M_r(B_R)$ и $f = 0$ в $B_{r+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $f = 0$ в B_R.*

(ii) Если $f \in (M_r \cap C^\infty)(B_R)$ и $f = 0$ в B_r, то $f = 0$ в B_R.

(iii) Для любого $s \in \mathbb{N}$ существует ненулевая функция $f \in (M_r \cap C^s)(B_R)$, такая, что $f = 0$ в B_r.

(iv) Для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует ненулевая функция $f \in (M_r \cap C^\infty)(B_R)$, такая, что $f = 0$ в $B_{r-\varepsilon}$.

Теорема 8 позволяет получить характеризацию решений уравнения $Df = 0$ в терминах интегральных средних (52) по окружностям двух фиксированных радиусов.

Пусть $r_1, r_2 \in (0, R)$, $r_1 \neq r_2$. Определим $M_{r_1,r_2}(B_R) = M_{r_1}(B_R) \cap M_{r_2}(B_R)$. Для целого $s \geqslant 0$ (или для $s = \infty$) положим $M^s_{r_1,r_2}(B_R) = M_{r_1,r_2}(B_R) \cap C^s(B_R)$. Свойства $M_{r_1,r_2}(B_R)$ существенно зависят от наличия общих элементов у множеств $N(r_1)$ и $N(r_2)$, а также от скорости сближения элементов этих множеств на бесконечности. Обозначим $N(r_1, r_2) = N(r_1) \cap N(r_2)$ и пусть Ω – множество пар (r_1, r_2), для которых выполнено следующее условие: при любом $c > 0$ существует $\lambda \in N(r_1)$ такое, что $|\phi_{\lambda,-1}(r_2)| < (1+\lambda)^{-c}$. Очевидно, что $(r_1, r_2) \in \Omega$, если $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$. Перечислим некоторые свойства множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω.

Предложение 21. *(i) При любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0 : N(r_1, r_2) \neq \varnothing\}$ является счетным и всюду плотным на $(0, \infty)$.*

(ii) При любом $r_1 > 0$ пересечение множества $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ с любым интервалом $(a, b) \subset (0, \infty)$ является несчетным.

(iii) При любом $r_1 > 0$ *множество* $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ *имеет нулевую лебегову меру на* $(0, \infty)$.

(iv) Если $(r_1, r_2) \in \Omega$ *и* $N(r_1, r_2) = \varnothing$, *то число* r_1/r_2 *иррационально.*

Обозначим через $\mathfrak{A}(B_R)$ совокупность локально интегрируемых в B_R функций, удовлетворяющих уравнению (53) (в смысле обобщенных функций). Следующий результат является локальной теоремой типа Мореры для функций класса $\mathfrak{A}(B_R)$.

Теорема 10. *(i) Если* $r_1 + r_2 < R$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$ *и* $f \in M_{r_1,r_2}(B_R)$, *то* $Df = 0$.

(ii) Если $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$ *и* $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R)$, *то* $Df = 0$.

(iii) Если $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$, $(r_1, r_2) \in \Omega$ *и* $f \in M_{r_1,r_2}(B_R)$, *то* $Df = 0$.

(iv) Если $r_1 + r_2 = R$, $(r_1, r_2) \notin \Omega$, *то для любого целого* $s \geqslant 0$ *существует функция* $f \in M^{s}_{r_1,r_2}(B_R) \backslash \mathfrak{A}(B_R)$.

(v) Если $r_1 + r_2 > R$, *то существует функция* $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R) \backslash \mathfrak{A}(B_R)$.

(vi) Если $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$, *то существует вещественно-аналитическая функция* $f \in M_{r_1,r_2}(B_R) \backslash \mathfrak{A}(B_R)$.

Предложение 21 показывает, что все ситуации, описанные в теореме 10, реализуются при подходящих r_1, r_2.

Утверждения (iv), (ii) и (vi) теоремы 10 позволяют сделать вывод о характере допустимой гладкости функций класса $M_{r_1,r_2}(B_R) \backslash \mathfrak{A}(B_R)$. В частности, максимальная гладкость (вещественная аналитичность) у таких функций возможна в случае $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$. При условиях утверждения (iv) возможна любая конечная гладкость и этот результат не может быть улучшен (см. утверждение (ii)). В остальных случаях (то есть, когда $N(r_1, r_2) = \varnothing$ и $r_1 + r_2 > R$), вопрос о точной характеристике максимальной гладкости функций класса $M_{r_1,r_2}(B_R) \backslash \mathfrak{A}(B_R)$ решается в терминах теории квазианалитических классов функций.

Теорема 11. *Пусть* $R > r_2 > r_1 > 0$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Если* $N(r_1, r_2) = \varnothing$, $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R)$ *и существует последовательность* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *положительных чисел, такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geqslant j} M_q^{1/q} \right)^{-1} = \infty \tag{56}$$

и

$$\sup_{z \in B_{r_1}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)^{\alpha_2} f \right| \leqslant M_{\alpha_1+\alpha_2} \tag{57}$$

для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$, *то* $Df = 0$.

(ii) *Если* $r_1 + r_2 > R$, *то для любой последовательности* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *положительных чисел, такой, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geqslant j} M_q^{1/q} \right)^{-1} < \infty,$$

существует функция $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R) \backslash \mathfrak{A}(B_R)$, *удовлетворяющая условию*

$$\sup_{z \in B_R} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)^{\alpha_2} f \right| \leqslant M_{\alpha_1+\alpha_2}$$

для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Согласно известной теореме Данжуа-Карлемана, условия (56) и (57) означают, что f принадлежит квазианалитическому классу функций в круге B_{r_1}. При $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$ первое утверждение теоремы 11 неверно (см. утверждение (vi) теоремы 10).

Метод доказательства теорем 8–10 позволяет получить их аналоги для группы Гейзенберга. В качестве примера приведем аналог утверждения (ii) теоремы 10.

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ введем функции

$$\phi^s_{\lambda,m}(t) = t^{|m|}e^{-st^2/4}\,{}_1F_1\left(\frac{m+|m|+1-\lambda^2}{2}; |m|+1; \frac{st^2}{2}\right), \quad t \geqslant 0.$$

Положим

$$N_s(r) = \left\{\lambda > 0 : \phi^s_{\lambda,-1}(r) = 0\right\},$$

если $s > 0$, и

$$N_s(r) = \left\{\lambda > 0 : \phi^s_{i\lambda,-1}(r) = 0\right\},$$

если $s < 0$.

Теорема 12. *Пусть $f \in C^\infty(C_R)$ и*

$$\int_{|w|=r_j} f\Big(z-w, t-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(z\overline{w})\Big)dw = 0 \quad \textit{при} \quad |z| < R - r_j,\ 0 \leqslant t < 2\pi,\ j = 1, 2.$$

Тогда, если $R \geqslant r_1 + r_2$, $N_s(r_1) \cap N_s(r_2) = \varnothing$ при любом $s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и

$$r_1/r_2 \notin \Big\{\alpha/\beta : J_1(\alpha) = J_1(\beta) = 0, \alpha > 0, \beta > 0\Big\},$$

то f является CR-функцией в C_R.

Относительно других локальных теорем типа Мореры см. [4], [8] и имеющиеся там ссылки.

11. Структура пространств, инвариантных относительно искаженных сдвигов

Функция вида

$$x \to P(x)e^{\langle\lambda,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^n$ и P – многочлен, называется экспоненциальным полиномом на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что подпространство $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ инвариантно относительно сдвигов, т.е. для любой функции $f \in \mathcal{U}$ и для любого $h \in \mathbb{R}^n$ функция $x \to f(x+h)$ также принадлежит $\mathcal{U}$. Говорят, что подпространство $\mathcal{U}$ допускает спектральный синтез, если $\mathcal{U}$ совпадает с замыканием линейной оболочки экспоненциальных полиномов, содержащихся в $\mathcal{U}$. Отсюда следует, в частности, что $\mathcal{U}$ допускает спектральный анализ, т.е. существует $\lambda \in \mathbb{C}^n$ такое, что $e^{\langle\lambda,x\rangle} \in \mathcal{U}$.

В 1947 г. Л. Шварц [43, § 7] установил, что всякое инвариантное относительно сдвигов подпространство в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ допускает спектральный синтез. Кроме того, в той же работе он высказал гипотезу, что подобный результат справедлив и в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$. Однако в 1975 г. Д. И. Гуревич [44] опроверг указанную гипотезу Шварца даже относительно спектрального анализа в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$. Вопрос о том, когда справедливы аналоги теоремы Шварца для $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и пространств гладких функций на других многообразиях привлекает значительное внимание. В 1973 г. Л. Браун, Б. М. Шрейбер и Б. А. Тейлор [45] доказали, что любое подпространство в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, инвариантное относительно сдвигов и вращений, порождается содержащимися в нем экспоненциальными полиномами. Различные теоремы о возможности и невозможности спектрального синтеза на симметрических

пространствах и пространствах Деймека-Риччи получены в работах [46]– [52]. Структура подпространств, инвариантных относительно двусторонних сдвигов на различных группах изучалась в [53]– [56].

Используя свойства операторов $\mathfrak{A}_{p,q,l}$, можно получить теорему о спектральном синтезе для подпространств в $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$, инвариантных относительно унитарной группы $\mathrm{U}(n)$ и искаженных сдвигов, а также ее аналог для редуцированной группы Гейзенберга H^n_{red}. Сформулируем соответствующие результаты.

Символом $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}} M$ будем обозначать замыкание множества M в топологическом векторном пространстве $\mathcal{X}$. Пусть также $\mathcal{L}in\, E$ – линейная оболочка заданного множества $E \subset \mathcal{X}$.

Определим функции $\Phi^s_{\lambda,\mu,p,q,l}$ $(s \in \mathbb{Z})$ с помощью соотношения

$$\Phi^s_{\lambda,\mu,p,q,l}(z) = \begin{cases} \phi_{\lambda,\mu,p,q,l}(\sqrt{-s}\, z), & s < 0 \\ \overline{\phi_{\lambda,\mu,p,q,l}}(\sqrt{s}\, z), & s > 0 \\ \Phi_{\lambda,\mu,p,q,l}(z), & s = 0, \end{cases}$$

где

$$\Phi_{\lambda,\mu,p,q,l}(z) = 2^{n-1}\,\Gamma(n)\,\sqrt{\omega_{2n-1}}\; S^{p,q}_l(\sigma)\,\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{\varkappa}\left(\varrho^{p+q}\,\mathbf{I}_{n+p+q-1}(\zeta\rho)\right)\Big|_{\zeta=\lambda},$$

$$\mathbf{I}_\nu(\zeta) = \frac{J_\nu(\zeta)}{\zeta^\nu}, \quad \varkappa = \begin{cases} \mu, & \lambda \neq 0 \\ 2\mu, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Теорема 13. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$, V – ненулевое подпространство в $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$, инвариантное относительно унитарной группы $U(n)$ и сдвигов*

$$f(z) \to f(z+w)\, e^{\frac{i}{2}\, s\, \mathrm{Im}\,\langle z,w\rangle}, \quad w \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда

$$V = \mathrm{cl}_{\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)}\, \mathcal{L}in\, \left\{\Phi^s_{\lambda,\mu,p,q,l} \in V : \lambda \in \mathbb{C},\ \mu,p,q \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le l \le d(n,p,q)\right\}.$$

Теорема 14. *Пусть $\mathcal{U}$ – ненулевое подпространство в $\mathcal{E}(H^n_{\mathrm{red}})$, инвариантное относительно сдвигов*

$$f(z,t) \to f((z,t)(w,\alpha)), \quad (w,\alpha) \in H^n_{\mathrm{red}}$$

и преобразований

$$f(z,t) \to f(\tau z, t), \quad \tau \in U(n).$$

Тогда

$$\mathcal{U} = \mathrm{cl}_{\mathcal{E}(H^n_{\mathrm{red}})}\, \mathcal{L}in\, \left\{\Phi^s_{\lambda,\mu,p,q,l}(z)\, e^{ist} \in \mathcal{U} : \lambda \in \mathbb{C},\ \mu,p,q \in \mathbb{Z}_+,\ s \in \mathbb{Z},\ 1 \le l \le d(n,p,q)\right\}.$$

Частные случаи теорем 13, 14 (теоремы о спектральном анализе) были получены авторами в работе [27]. Там же приводятся некоторые более слабые результаты предшественников.

12. Поведение на бесконечности решений искаженного уравнения свертки

Пусть $\mathcal{O}$ – непустое открытое множество в $\mathbb{C}^n$. Для $r \geqslant 0$ символ $\mathcal{O}_r$ обозначает множество центров всех замкнутых шаров радиуса r, содержащихся в $\mathcal{O}$.

Множество $\mathcal{O}$ называется *δ-областью*, если выполнены следующие условия: (i) каждая точка из $\mathcal{O}$ лежит в некотором замкнутом шаре радиуса δ, содержащемся в $\mathcal{O}$; (ii) множество $\mathcal{O}_\delta$ является связным.

Из определения видно, что при $\delta = 0$ понятия δ-области и обычной области в $\mathbb{C}^n$ совпадают.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$. Предположим, что $\mathcal{O}$ – открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, для которого $\mathcal{O}_{r(T)} \neq \varnothing$. Рассмотрим искаженное уравнение свертки

$$f \star T = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{O}_{r(T)} \tag{58}$$

с неизвестным f. Обозначим через $\mathcal{D}'_T(\mathcal{O})$ множество всех $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$, удовлетворяющих (58).

В работе [31] исследуется следующая

Проблема 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$, $T \neq 0$ и пусть $\mathcal{O}$ – неограниченная δ-область в $\mathbb{C}^n$ при $\delta = r(T)$. Предположим, что $f \in (L^{1,\mathrm{loc}} \cap \mathcal{D}'_T)(\mathcal{O})$. При каких ограничениях на рост f на бесконечности отсюда следует, что $f = 0$?

Отметим, что условие на $\mathcal{O}$ в проблеме 1 является естественным, поскольку для произвольных областей $\mathcal{O}$, для которых $\mathcal{O}_{r(T)} \neq \varnothing$, уравнение (58) может не содержать каких-либо ограничений на f в некотором открытом подмножестве $\mathcal{O}$.

Аналоги проблемы 1 для уравнений с обычной сверткой на областях в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ изучаются более семидесяти лет, начиная с классического результата Ф. Йона о сферических средних (см. [10, гл. 6]). Однако, несмотря на активную работу в этой области, полученных точных результатов относительно немного. Все они касаются случаев, когда $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ – внешность компакта, $\mathcal{O}$ – некоторый класс областей, содержащих полупространство (см. [4], [9]).

В отличие от случая уравнений с обычной сверткой, проблема 1 представляется гораздо более трудной. В значительной мере это объясняется существенным нарушением групповой структуры сдвигов, играющей важную роль при изучении оператора свертки и, соответственно, невозможностью применения методов, связанных с преобразованием Фурье.

В работе [26] С. Сангавелу получил следующий результат: если $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$ является мерой и сферическое преобразование $\widetilde{T}$ не имеет нулей λ, удовлетворяющих условию

$$\frac{n - \lambda^2}{2} \in \{0, -1, -2, \ldots\}, \tag{59}$$

то всякое непрерывное решение уравнения (58) на $\mathbb{C}^n$ умеренного роста равно нулю тождественно. Условие (59) в теореме С. Сангавелу убрать нельзя. Доказательство теоремы С. Сангавелу основано на применении преобразования Вейля, которое является аналогом преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$ на пространстве распределений умеренного роста (см. [24]–[26]).

В работе [31] на основе техники трансмутационных операторов получено существенное уточнение и обобщение указанного результата С. Сангавелу. В частности, условие умеренного роста для решений уравнения (58) из этой теоремы ослаблено до экспоненциального роста с квадратичным полиномом в показателе экспоненты. Приведем точные формулировки основных результатов из [31].

Положим

$$E(R,r)=\{z\in\mathbb{C}^n : R-r<|z|<R+r\},\quad \text{где}\quad 0<r<R.$$

Для распределения $T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$ обозначим через N_T множество нулей λ функции $\widetilde{T}$, удовлетворяющих (59). Пусть также

$$\mathrm{RA}_T(\mathcal{O})=(\mathcal{D}'_T\cap\mathrm{RA})(\mathcal{O}).$$

Теорема 15. *Пусть $T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$, $T\neq 0$ и $f\in(L^{1,\mathrm{loc}}\cap\mathcal{D}'_T)(\mathbb{C}^n)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если $N_T=\varnothing$ и для некоторых $\gamma>r(T)$, $\eta<\frac{1}{2}(\gamma-r(T))$*

$$\varliminf_{R\to+\infty} e^{-\frac{R^2}{4}-\eta R}\int_{E(R,\gamma)}|f(z)|dm_n(z)=0, \tag{60}$$

то $f=0$.

(ii) *Если $N_T\neq\varnothing$ и для некоторых $\gamma>r(T)$, $\eta<\frac{1}{2}(\gamma-r(T))$*

$$\varliminf_{R\to+\infty} e^{\frac{R^2}{4}-\eta R}\int_{E(R,\gamma)}|f(z)|dm_n(z)=0, \tag{61}$$

то $f=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{O}$ – внешность компакта.

Теорема 16. *Пусть $T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$, $T\neq 0$ и пусть $\mathcal{O}$ – δ-область в $\mathbb{C}^n$, где $\delta=r(T)$, которая является внешностью некоторого компакта в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что $f\in(L^{1,\mathrm{loc}}\cap\mathcal{D}'_T)(\mathcal{O})$ и для некоторых $\gamma>r(T)$, $\eta<\frac{1}{2}(\gamma-r(T))$ выполнено условие (61). Тогда $f=0$.*

Отметим, что второе утверждение теоремы 15 следует из теоремы 16, если положить в ней $\mathcal{O}=\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$.

Следующий результат показывает, что теоремы 15 и 16 носят окончательный характер.

Теорема 17. *Пусть $T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Для любых $\gamma>0$, $\eta>\gamma/2$ существует ненулевая функция $f\in\mathrm{RA}_T(\mathbb{C}^n)$, для которой*

$$\int_{E(R,\gamma)}|f(z)|dm_n(z)=O\left(e^{\frac{R^2}{4}+\eta R}\right)\quad \textit{при}\quad R\to+\infty.$$

(ii) *Если $N_T\neq\varnothing$, то для любых $\gamma>0$, $\eta>\gamma/2$ существует ненулевая функция $f\in\mathrm{RA}_T(\mathbb{C}^n)$, такая, что*

$$\int_{E(R,\gamma)}|f(z)|dm_n(z)=O\left(e^{-\frac{R^2}{4}+\eta R}\right)\quad \textit{при}\quad R\to+\infty. \tag{62}$$

(iii) *Для любых* $\gamma > 0$, $\eta > \gamma/2$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathrm{RA}_T(\mathbb{C}^n \backslash \{0\})$, *удовлетворяющая условию* (62).

Сравнение теорем 15, 16 и 17 показывает, что главные члены в показателях экспоненты в условиях (60) и (61) являются точными.

Положим $B_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}^n \colon a < |z| < b\}$. Теоремы 15 и 16 допускают следующее обобщение [31].

Теорема 18. *Пусть* $\{T_j\}_{j=1}^m$ *– семейство ненулевых распределений из* $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C}^n)$ *и пусть* $T = T_1 \star \ldots \star T_m$. *Предположим, что множество* $\{1, \ldots, m\}$ *является объединением попарно непересекающихся множеств* $A_1, \ldots, A_l$, *таких, что множества* $\bigcup\limits_{j \in A_s} \mathcal{Z}(\widetilde{T_j})$, $s = 1, \ldots, l$ *попарно не пересекаются. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) Пусть $N_T = \varnothing$, $f_j \in \mathcal{D}'_{T_j}(\mathbb{C}^n)$ *при всех* $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$f = \sum_{j=1}^m f_j \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n)$$

и для некоторых $\gamma > r(T)$, $\eta < \frac{1}{2}(\gamma - r(T))$ *условие* (60) *выполнено для данных* f *и* T. *Тогда* $\sum\limits_{j \in A_s} f_j = 0$ *для всех* $s \in \{1, \ldots, l\}$. *Аналогичный результат имеет место и при* $N_T \neq \varnothing$, *если вместо* (60) *выполнено* (61).

(ii) Пусть $r_j \geqslant 0$, $r = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} r_j$, $G_s = \bigcap\limits_{j \in A_s} B_{r_j, +\infty}$. *Предположим, что* $f_j \in \mathcal{D}'_{T_j}\left(B_{r_j, +\infty}\right)$,

$$f = \sum_{j=1}^m f_j \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_{r, +\infty})$$

и для некоторых $\gamma > r(T)$, $\eta < \frac{1}{2}(\gamma - r(T))$ *условие* (61) *выполнено для данных* f *и* T. *Тогда* $\sum\limits_{j \in A_s} f_j = 0$ *в* G_s *для всех* $s \in \{1, \ldots, l\}$.

Нетрудно видеть, что без предположения о том, что множества $\bigcup\limits_{j \in A_s} \mathcal{Z}(\widetilde{T_j})$, $s = 1, \ldots, l$ попарно не пересекаются, утверждения теоремы 18 вообще говоря, неверны. Теорема 17 показывает также, что условия на рост f в утверждениях (i) и (ii) теоремы 18 дают точную информацию о поведении главного члена в показателе экспоненты на бесконечности.

Рассмотрим теперь некоторые следствия теоремы 18. Обозначим через $K(r_1, r_2)$ множество решений $a \in \mathbb{R}$ системы

$${}_1F_1\left(a; n; r_1^2/2\right) =_1 F_1\left(a; n; r_2^2/2\right) = 0.$$

Пусть также $\mathbf{N}(r)$ – множество корней λ уравнения

$${}_1F_1\left(\frac{n - \lambda^2}{2}; n; r^2/2\right) = 0,$$

удовлетворяющих условию (59). Положим $\mathbf{N}(r_1, r_2) = \mathbf{N}(r_1) \cup \mathbf{N}(r_2)$.

Следствие 2. *Пусть* $r_1, r_2 > 0$ *и* $K(r_1, r_2) = \varnothing$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) Пусть $f_1, f_2 \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n)$ *и*

$$f_1 \star \mu_{r_1} = f_2 \star \mu_{r_2} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^n.$$

Предположим, что $\mathbf{N}(r_1, r_2) = \varnothing$ *и функция* $f = f_1 - f_2$ *удовлетворяет условию* (60) *при некоторых* $\gamma > r_1 + r_2$, $\eta < \frac{1}{2}(\gamma - r_1 - r_2)$. *Тогда* $f_1 = f_2 = 0$. *Аналогичный результат имеет место и при* $\mathbf{N}(r_1, r_2) \neq \varnothing$, *если вместо* (60) *выполнено* (61).

(ii) Пусть $R \geqslant 0$, $f_1, f_2 \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_{R,+\infty})$ *и*

$$f_j \star \mu_{r_j} = 0 \quad \text{в} \quad B_{R+r_j,+\infty}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть также функция $f = f_1 - f_2$ *удовлетворяет* (61) *при некоторых* $\gamma > r_1 + r_2$, $\eta < \frac{1}{2}(\gamma - r_1 - r_2)$. *Тогда* $f_1 = f_2 = 0$.

Доказательство следует из теоремы 18 , если положить в ней $m = 2$, $T_1 = \mu_{r_1}$, $T_2 = \mu_{r_2}$. Отметим также, что при $K(r_1, r_2) \neq \varnothing$ из условий следствия 2 и теоремы 18 вытекает, что $f_1 = f_2$. В этом случае существуют ненулевые f_1, f_2, удовлетворяющие (49).

Следующий результат касается случаев, когда условие (49) для одного из радиусов можно заменить верхней оценкой искаженного сферического среднего, но, тем не менее, утверждение теоремы о двух радиусах сохраняется.

Следствие 3. *Пусть* $r_1, r_2 > 0$ *и* $K(r_1, r_2) = \varnothing$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) Пусть $N(r_1) = \varnothing$, $g \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n)$, $g \star \mu_{r_1} = 0$ *в* $\mathbb{C}^n$ *и функция* $f(z) = (g \star \mu_{r_2})(z)$ *удовлетворяет условию* (60) *при некоторых* $\gamma > r_1$, $\eta < \frac{1}{2}(\gamma - r_1)$. *Тогда* $g = 0$. *Аналогичный результат имеет место и при* $N(r_1) \neq \varnothing$, *если вместо* (60) *выполнено* (61).

(ii) Пусть $R \geqslant 0$, $g \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_{R,+\infty})$, $g \star \mu_{r_1} = 0$ *в* $B_{R+r_1,+\infty}$ *и функция* $f(z) = (g \star \mu_{r_2})(z)$ *удовлетворяет условию* (61) *при некоторых* $\gamma > r_1$, $\eta < \frac{1}{2}(\gamma - r_1)$. *Тогда* $g = 0$.

Относительно других результатов, касающихся структуры решений искаженных уравнений свертки на $\mathbb{C}^n$, см. [9, глава 17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réeles / D. Pompeiu. – Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5). – 1929. – V. 15. – P. 265–269.
2. Chakalov L. Sur un problème de D. Pompeiu / L. Chakalov. – Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. – 1944. – V. 40. – P. 1–14, (Bulgarian; French summary).
3. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon. – Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. – 1917. – V. 69. – P. 262–277.
4. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 pp.
5. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / L. Zalcman. – Approximation by solutions of partial differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
6. Беренстейн К. А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках / К. А. Беренстейн, Д. Струппа. – Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. –ВИНИТИ. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111.
7. Zalcman L. Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"/ L. Zalcman. – Contemp. Math. Radon Transform and Tomography. – 2001. – V. 278. – P. 69–74.
8. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.

9. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 672 pp.
10. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – М.: ИЛ, 1958. – 158 с.
11. Smith J.D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J. D. Smith. – Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416.
12. Rawat R. The injectivity of the Pompeiu transform and L^p-analogues of the Wiener Tauberian theorem / R. Rawat, A. Sitaram. – Israel J. Math. – 1995. – V. 91. – P. 307–316.
13. Thangavelu S. Spherical means and CR functions on the Heisenberg group / S. Thangavelu. – J. Analyse Math. – 1994. – V. 63. – P. 255–286.
14. Ungar P. Freak theorem about functions on a sphere / P. Ungar. – J. London Math. Soc. (2). – 1954. – V. 29. – P. 100–103.
15. Schneider R. Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres / R. Schneider. – J. Math. Anal. Appl. – 1969. – V. 26. – P. 381–384.
16. Delsarte J. Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques / J. Delsarte. – C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. – 1958. – V. 246. – P. 1358–1360.
17. Netuka I. Mean value property and harmonic functions / I. Netuka, J. Vesely. – Classical and Modern potential Theory and Applications / Comri Sankaran et al., ed. Kluwer Acad. Publ. – 1994. – P. 359–398.
18. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций / В. В. Волчков. – Мат. сб. – 1997. – Т. 188, № 9. – С. 13–30.
19. Волчков Вит. В. Проблема устранимости для функций с нулевыми шаровыми средними / Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова. – Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58, № 3. – С. 543–552.
20. Berenstein C.A. Inversion of the local Pompeiu transform / C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger. – J. Analyse Math. – 1990. – Vol. 54. – P. 259–287.
21. Berkani M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique - Cas des deux boules / M. Berkani, M. El Harchaoui, R. Gay. – J. Complex Variables. – 2000. – Vol. 43. – P. 29–57.
22. Волчков Вит. В. Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве / Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова. – Докл. РАН. – 2001. – Т. 379, № 5. – С. 587–590.
23. Волчков Вит. В. Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве / Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова. – Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, Вып.5. – С. 169–197.
24. Folland G. Harmonic Analysis in phase space / G. Folland. – Princeton Univ. Press: Princeton, 1989. – 288 pp.
25. Thangavelu S. Lectures on Hermite and Laguerre Expansions / S. Thangavelu. – Princeton Univ. Press: Princeton, 1993. – 195 pp.
26. Thangavelu S. Mean periodic functions on phase space and the Pompeiu problem with a twist / S. Thangavelu. – Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 1995. – V. 45. – P. 1007–1035.
27. Волчков В. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 8. – С. 29–60.
28. Volchkov V. V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on the phase space associated to the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – D'Analyse Math. – 2008. – T. 105. – P. 43–123.
29. Volchkov V. V. New results in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Contemp. Math. – 2005. – Vol. 382. – P. 417–432.
30. Волчков Вит. В. Сферические средние на группе Гейзенберга и симметрических пространствах / Вит. В. Волчков. – Доп. НАН України. – 2005. – № 3. – С. 7–11.
31. Волчков В. В. Поведение на бесконечности решений искаженного уравнения свертки / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Известия РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76, № 1. – P. 85–100.
32. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. / Л. Хермандер. – Мир. – М., 1986, 1988. – Т.1: Теория распределений и анализ Фурье. – 462 с. / Т.2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – 455 с.
33. Гельфанд И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: Физматлит, 1959. – 470 с.
34. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
35. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ / У. Рудин. – М.: Мир, 1984. – 456 с.
36. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука,

1991. – 576 с.
37. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973, 1974. – Т.1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 296 с. / Т.2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
38. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов: В 3 т. / Э. Я. Риекстыньш. – Рига: Зинатне, 1974. – Т. 1. – 390 с.
39. Ситник С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 224 с.
40. Agranovsky M. Injectivity of the Pompeiu transform in the Heisenberg group / M. Agranovsky, C. Berenstein, D. C. Chang, D. Pascuas. – J. Analyse Math. – 1994. – V. 63. – P. 131–173.
41. Agranovsky M. L. A local two radii theorem for the twisted spherical means on $\mathbb{C}^n$ / M. L. Agranovsky, E. K. Narayanan. – Contemp. Math. – 2005. – V. 382. – P. 13–27.
42. Agranovsky M. Morera theorem for holomorphic H^p spaces in the Heisenberg group / M. Agranovsky, C. Berenstein, D. C. Chang. – J. Reine Angew. Math. – 1993. – V. 443. – P. 49–89.
43. Schwartz L. Theorie générale des functions moyenne-periodiquẽ. / L. Schwartz. – Ann. Math. – 1947. – V. 48. – P. 857–928.
44. Гуревич Д. И. Контрпримеры к проблеме Л. Шварца / Д. И. Гуревич. – Функц. анализ и его прил. – 1975. – V. 9. – № 2. – P. 29–35.
45. Brown L. Spectral synthesis and the Pompeiu problem / L. Brown, B. M. Schreiber, B.A. Taylor. – Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 1973. – V. 23. – № 3. – P. 125–154.
46. Bagchi S. C. Spherical mean periodic functions on semisimple Lie groups / S. C. Bagchi, A. Sitaram. – Pacific J. Math. – 1979. – V. 84. – P. 241–250.
47. Berenstein C. A. Sur la sythése spectrale dans les espaces symmetriques / C. A. Berenstein, R. Gay. – J. Math. Pure et Appl. – 1986. – V. 65. – P. 323–334.
48. Berenstein C. A. Spectral synthesis on symmetric spaces / C. A. Berenstein. – Contemp. Math. – 1987. – V. 63. – P. 1–25.
49. Wawrzyñczyk A. Spectral analysis and synthesis on symmetric spaces / A. Wawrzyñczyk. – J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – V.127. – P. 1–17.
50. Платонов С. С. О спектральном синтезе на симметрических пространствах ранга 1 / С. С. Платонов. – Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4. – № 4. – P. 174–187.
51. Narayanan E. K. Analogues of the Wiener-Tauberian and Schwartz theorems for radial functions on symmetric spaces / E. K. Narayanan, A. Sitaram. – Pacific J. Math. – 2011. – V. 249. – № 1. – P. 199–210.
52. Peyerimhoff N. Spherical spectral synthesis and two-radius theorems on Damek-Ricci spaces / N. Peyerimhoff, E. Samiou. – Ark. Mat. – 2010. – V. 48. – P. 131–147.
53. Ehrenpreis L. Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups II / L. Ehrenpreis, F. Mautner. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – V. 84. – P. 1–55.
54. Weit Y. On Schwartz's theorem for the motion group / Y. Weit. – Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 1980. – V. 30. – № 1. – P. 91–107.
55. Рашевский П. К. Описание замкнутых инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах / П. К. Рашевский. – Тр. ММО. – 1979. – Т. 38. – С. 139–185.
56. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе движений евклидовой плоскости / С. С. Платонов. – Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31. – № 3. – С. 135–146.

Поступила в редакцию 22.04.2020 г.

UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF TWISTED CONVOLUTION EQUATIONS ON COMPLEX EUCLIDEAN SPACES

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Let $\mathbb{C}^n$ be the complex Euclidean space of dimension n, let $\langle z, w\rangle$ be the Hermitian inner product in $\mathbb{C}^n$, and let dm_n be the Lebesgue measure in $\mathbb{C}^n$. We study twisted convolution operators of the form

$$f \to (f \star T)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z-w)T(w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle z,w\rangle}dm_n(w),$$

where T is a radial function (distribution) with a compact support in $\mathbb{C}^n$. We present the construction of transmutation transformations of twisted convolution operators to a convolution operator on the real axis. The

application of such transformations to various problems of integral geometry and the theory of mean periodic functions is shown.

Keywords: transmutation operators, Fourier transform, spherical harmonics, confluent hypergeometric functions, spherical means, Heisenberg group.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
valeriyvolchkov@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Valery Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Full Professor, Donetsk National University, Donetsk

Волчков Виталий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
volna936@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Vitaly Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Full Professor, Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.444

ОБ УСТРАНЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО КРУГАМ

© 2020. *Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков, Н. А. Ищенко*

Изучается локальное преобразование Помпейю, ассоциированное с единичным кругом на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со сферической метрикой. Найдено точное условие, при котором функции из ядра указанного преобразования принадлежат ядру соответствующего глобального преобразования Помпейю на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Ключевые слова: преобразование Помпейю, сферические средние, сферические гармоники, функции Лежандра.

1. Введение. Одной из интересных проблем теории отображений, привлекающей внимание широкого круга специалистов, является проблема устранимости, которая состоит в следующем. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – многообразия, $\mathcal{D}$ – область в $\mathcal{M}$ и $E \subset \mathcal{D}$ – замкнутое относительно $\mathcal{D}$ множество. Спрашивается, в каком случае любое отображение $f : \mathcal{D} \setminus E \to \mathcal{N}$ из заданного класса можно продолжить до отображения $\mathbf{f} : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ с сохранением класса? Если указанное продолжение существует, то множество E называют устранимым множеством в рассматриваемом классе отображений.

Проблема устранимости исследовалась многими авторами в различных постановках. Например, хорошо известны соответствующие результаты в многомерном комплексном анализе, теории квазиконформных отображений и их обобщений, теории гармонических функций и других областях (см. [1] – [6]). Приведем формулировки некоторых из них.

1. Пусть $\mathcal{E}_n$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad n = 2,$$

$$\mathcal{E}_n(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad n \geq 3,$$

где Γ – гамма-функция, $|x|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Если функция u является гармонической в области $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ из $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$u(x) = o(|\mathcal{E}_n(x)|), \quad x \to 0,$$

то она гармонически продолжается в точку $\{0\}$ [2, гл. 5, § 24.6].

2. Пусть γ – спрямляемая жорданова кривая, лежащая в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. Если функция f непрерывна в $\mathcal{D}$ и голоморфна в $\mathcal{D} \setminus \{\gamma\}$, то f голоморфна и во всей области $\mathcal{D}$ [5, гл. 1, § I.3].

3. Если функция f голоморфна всюду в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ за исключением, быть может, множества $K \Subset \mathcal{D}$, не разбивающего область (т.е. такого, что $\mathcal{D} \setminus K$ связно), то f голоморфно продолжается на всю область $\mathcal{D}$ [1, гл. 3, § 11, теорема 3].

4. Пусть $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая множество E, являющееся NED-множеством (см. [3, гл. 4, § 3]). Тогда всякое квазиконформное отображение $f : \mathcal{D} \setminus E \to \mathbb{R}^n$ можно продолжить до квазиконформного отображения $\mathbf{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ [3, теорема 6.17].

© Волчкова Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А., 2020

В последние годы активно развиваются геометрические аспекты теории периодичности в среднем на однородных пространствах (см. [7] – [10]). Однако, результатов по проблеме устранимости здесь получено мало. Все известные случаи относятся, в основном, к евклидову пространству и касаются лишь функций специального вида (радиальные функции и их обобщения) (см. [8, гл. 3.2], [11, теорема 4]). В частности, в работе [11] был установлен следующий результат.

5. Пусть B_R – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) радиуса R с центром в нуле, $V_r(B_R)$ – класс локально суммируемых в B_R функций, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам фиксированного радиуса r, лежащим в B_R ($0 < r < R$). Отметим, что класс $V_r(B_R)$ совпадает с ядром локального преобразования Помпейю, ассоциированным с шаром B_r и группой движений $M(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [8, часть 4, гл. 7]). Если $R > 2r$, $s > n+1$ ($s \in \mathbb{N}$), $f \in V_r(B_R) \cap C^s(B_R \setminus \{0\})$ и f радиальна, то существует функция $g \in C^{s-n-1}(B_R)$, равная f в $B_R \setminus \{0\}$ [11, теорема 4].

В данной работе изучается локальное преобразование Помпейю, ассоциированное с единичным кругом на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со сферической метрикой. Аналогом группы движений $M(n)$ в этом случае является группа дробно-линейных преобразований $\mathrm{PSU}(2)$ (см. [12, лекция 27]). Найдено точное условие, при котором функции из ядра указанного преобразования принадлежат ядру соответствующего глобального преобразования Помпейю на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

2. Формулировки основных результатов

Как обычно, множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел $z = x + iy$ отождествляется с множеством пар (x, y) вещественных чисел, т.е. с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$.

Пусть $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ – замкнутый единичный круг на $\mathbb{C}$ с центом в нуле.

Обозначим через $\mathrm{PSU}(2)$ группу дробно-линейных преобразований вида

$$\tau^*(z) = \frac{az - \overline{c}}{cz + \overline{a}}, \quad \text{где} \quad a, c \in \mathbb{C} \quad \text{и} \quad |a|^2 + |c|^2 = 1.$$

Элементы группы $\mathrm{PSU}(2)$ являются преобразованиями расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{C}$,*

$$f(z) = o\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \textit{при} \quad z \to \infty, \tag{1}$$

и

$$\iint_{\tau^*(B)} f(z)dxdy = 0 \quad \textit{для любого} \quad \tau^* \in \mathrm{PSU}(2) : \tau^*(B) \subset \mathbb{C}. \tag{2}$$

Тогда

$$\iint_{\tau^*(B)} f(z)dxdy = 0 \quad \textit{для всех} \quad \tau^* \in \mathrm{PSU}(2).$$

Теорема 2. *Существует функция $f \in C(\mathbb{C})$ со следующими свойствами:*

1) функция f удовлетворяет условию (2);

2) при $z \to \infty$

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right);$$

3) для любого $\tau^* \in \mathrm{PSU}(2)$, *такого что* $\infty \in \tau^*(B)$ *интеграл*

$$\iint_{\tau^*(B)} f(z)dxdy$$

расходится.

Отметим, что утверждение теоремы 2 показывает, что условие (1) в теореме 1 близко к окончательному.

3. Обозначения и вспомогательные конструкции

Будем использовать следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ – множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел соответственно,

$$(z)_j = \frac{\Gamma(z+j)}{\Gamma(z)} \text{ – символ Похгаммера, } j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

$F(a,\, b;\, c;\, z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, т.е.

$$F(a,\, b;\, c;\, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j\,(b)_j}{(c)_j\;j!}\; z^j, \quad |z|<1, \quad c \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}, \tag{4}$$

P_ν^μ – функция Лежандра первого рода на $(-1, 1)$.

Функции P_ν^μ определены при любых $\nu, \mu \in \mathbb{C}$ равенством

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{\sqrt{\pi}\;2^\mu}{(1-x^2)^{\mu/2}} \left(\frac{F\Big(-\dfrac{\nu+\mu}{2},\; \dfrac{1+\nu-\mu}{2};\; \dfrac{1}{2};\; x^2\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{1-\nu-\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(1+\dfrac{\nu-\mu}{2}\Big)} - \right.$$
$$\left. - \frac{2x\;F\Big(\dfrac{1-\nu-\mu}{2},\; 1+\dfrac{\nu-\mu}{2};\; \dfrac{3}{2};\; x^2\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(-\dfrac{\nu+\mu}{2}\Big)} \right) \tag{5}$$

(см. [13, гл. 3, формула 3.4 (11)]). Отметим, что при $\mu \notin \mathbb{N}$

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu,\; \nu+1;\; 1-\mu;\; \frac{1-x}{2}\right) \tag{6}$$

(см. [13, гл. 3, формула 3.4 (6)]).

Функции P_ν^μ имеют следующее асимптотическое поведение вблизи особых точек (см. [13, гл. 3, формулы 3.9.2 (8) и 3.9.2 (14)]):

$$P_\nu^\mu(x) \sim \frac{2^{\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)}\,(1-x)^{-\mu/2}, \quad x \to 1-0, \quad \mu \notin \mathbb{N}, \tag{7}$$

$$P_\nu^\mu(x) \sim 2^{-\mu/2}\,\frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)\,\Gamma(-\nu-\mu)}\,(1+x)^{\mu/2}, \quad x \to -1+0, \quad \operatorname{Re}\mu < 0. \tag{8}$$

Пусть $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле, ξ_1, ξ_2, ξ_3 – декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$. Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \xi_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \xi_3 = \cos\theta, \quad \varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in (0, \pi).$$

При указанной параметризации сферы элемент площади на $\mathbb{S}^2$ равен

$$d\sigma = \sin\theta d\varphi d\theta.$$

Таким образом, интеграл по поверхностной мере $d\sigma$ на $\mathbb{S}^2$ записывается в виде

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(\xi) d\sigma(\xi) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)\sin\theta d\varphi d\theta. \tag{9}$$

Для любой точки $\xi \in \mathbb{S}^2 \setminus (0,0,1)$ обозначим через $\pi(\xi)$ точку пересечения прямой, проходящей через ξ и $(0,0,1)$, с плоскостью, порожденной векторами $(1,0,0)$ и $(0,1,0)$. Отображение π (стереографическая проекция) является биекцией проколотой сферы $\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,1)$ на плоскость $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. При этом полагают $\pi(0,0,1) = \infty$. Хорошо известны следующие формулы перехода от прямоугольных координат к стереографическим координатам:

$$\pi(\xi) = \left(\frac{\xi_1}{1-\xi_3}, \frac{\xi_2}{1-\xi_3}\right), \tag{10}$$

$$\pi^{-1}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right), \tag{11}$$

где π^{-1} – отображение, обратное к π (см., например, [12, лекция 27]). В сферических координатах отображение π определяется равенством

$$\pi(\xi) = (x,y) = \left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin\varphi, \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cos\varphi\right). \tag{12}$$

Вычислим якобиан J отображения (12). Поскольку

$$x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\varphi,$$

$$y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\varphi,$$

имеем

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}\sin\varphi & \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\varphi \\ -\frac{1}{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}\cos\varphi & -\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Далее,

$$(1+x^2+y^2)^2 = \left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}},$$

значит

$$\frac{4dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = 4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\varphi d\theta = \sin\theta d\varphi d\theta.$$

Отсюда и из (9) получаем

$$4\iint_D f(x,y)\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \iint_{\pi^{-1}(D)} f\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi\right)\sin\theta d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_{\pi^{-1}(D)} (f\circ\pi)(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)\sin\theta d\varphi d\theta =$$

$$= \int_{\pi^{-1}(D)} (f\circ\pi)(\xi)d\sigma(\xi). \tag{13}$$

Пусть $\mathrm{SO}(3)$ – группа вращений пространства $\mathbb{R}^3$. Группа $\mathrm{SO}(3)$ состоит из линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$, не меняющих его ориентации и оставляющих инвариантным расстояние точек от начала координат:

$$|\tau(\eta)| = |\eta|, \quad \eta\in\mathbb{R}^3, \quad \tau\in\mathrm{SO}(3).$$

Эта группа изоморфна группе дробно-линейных преобразований $\mathrm{PSU}(2)$. Изоморфизм между $\mathrm{PSU}(2)$ и $\mathrm{SO}(3)$ определяется равенством:

$$\pi(\tau(\xi)) = \tau^*(\pi(\xi)), \quad \tau\in\mathrm{SO}(3), \quad \tau^*\in\mathrm{PSU}(2), \quad \xi\in\mathbb{S}^2. \tag{14}$$

Положим

$$S^* = \mathbb{S}^2\backslash(0,0,-1), \quad S^{**} = S^*\backslash(0,0,1),$$
$$H = \{\xi\in\mathbb{S}^2 : \xi_3\geq 0\}, \quad H^* = \{\xi\in\mathbb{S}^2 : \xi_3\leq 0\}.$$

Множество H (соответственно, H^*) является верхней (соответственно, нижней) полусферой на $\mathbb{S}^2$.

Лемма 1. *Пусть* $f\in C(S^*)$,

$$f(\xi) = o\left(\frac{1}{(1+\xi_3)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \textit{при} \quad \xi\to(0,0,-1),$$

и

$$\int_{\tau(H)} f(\xi)d\sigma(\xi) = 0 \quad \textit{для любого} \quad \tau\in\mathrm{SO}(3) : \tau(H)\subset S^*. \tag{15}$$

Тогда функция f *является чётной на* S^{**}.

Доказательство леммы 1 содержится в работе [14].

Нам потребуется незначительная модификация этого утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $f\in C(\mathbb{S}^2\backslash(0,0,1))$,

$$f(\xi) = o\left(\frac{1}{(1-\xi_3)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \textit{при} \quad \xi\to(0,0,1),$$

и

$$\int_{\tau(H^*)} f(\xi)d\sigma(\xi) = 0 \quad \textit{для любого} \quad \tau\in\mathrm{SO}(3) : \tau(H^*)\subset\mathbb{S}^2\backslash(0,0,1).$$

Тогда функция f *является чётной на* S^{**}.

Доказательство. Определим функцию g на S^* равенством

$$g(\xi) = f(-\xi), \quad \xi \in S^*.$$

Тогда $g \in C(S^*)$ и

$$g(\xi) = o\left(\frac{1}{(1+\xi_3)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \text{при} \quad \xi \to (0,0,-1).$$

Кроме того, для любой полусферы H_1 из S^* имеем

$$\int_{H_1} g(\xi)d\sigma(\xi) = \int_{H_1} f(-\xi)d\sigma(\xi) =$$

$$= \int_{-H_1} f(\eta)d\sigma(\eta) = 0,$$

поскольку полусфера $-H_1$ лежит в $\mathbb{S}^2\backslash(0,0,1)$. Значит, по лемме 1 функция g является чётной на S^{**}. Отсюда следует требуемое утверждение. □

Поставим в соответствие функции $f \in C(S^*)$ ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\xi),$$

где

$$f^k(\xi) = f_k(\theta)e^{ik\varphi},$$

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

Лемма 3. *Пусть $f \in C(S^*)$. Тогда для того чтобы функция f удовлетворяла условию (15), необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \in \mathbb{Z}$ имело место равенство*

$$f^k(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k}P_{2n}^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}, \quad c_{n,k} \in \mathbb{C}, \tag{16}$$

где ряд (16) сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'(S^*)$.

Доказательство. Из [8, теорема 2.3.3] следует, что f удовлетворяет условию (15) в том и только том случае, когда для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$f^k(\xi) = \sum_{\nu\in\mathcal{Z}} c_{\nu,k}P_{\nu}^{-|k|}(\cos\theta)e^{ik\varphi}, \quad c_{n,k} \in \mathbb{C}, \tag{17}$$

где $\mathcal{Z} = \{\nu > 1 : P_\nu^{-1}(0) = 0\}$ и ряд (17) сходится в $\mathcal{D}'(S^*)$. Учитывая, что

$$P_\nu^{-1}(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}$$

(см. [13, гл. 3, п. 3.4 (20)]), получаем требуемое. □

Относительно других результатов, связанных с интегрированием по полусферам, см. [15]– [17].

4. Доказательство теорем 1, 2

Доказательство теоремы 1. Из определения стереографической проекции и (14) следует, что

$$\pi(H^*) = B, \quad \tau^* = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1},$$
$$\tau^*(B) = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1}(B) = \pi \circ \tau(H^*).$$

Далее,

$$\tau^*(B) \subset \mathbb{C} \quad \text{в том и только том случае, если} \quad \tau(H^*) \subset \mathbb{S}^2 \backslash (0,0,1),$$

поскольку $\pi(0,0,1) = \infty$. Обозначим

$$\varphi(z) = f(z)(1+|z|^2)^2.$$

Тогда

$$\varphi \in C(\mathbb{C}) \quad \text{и} \quad \varphi(z) = o(|z|^3) \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{18}$$

По условию теоремы 1 имеем

$$\iint_{\tau^*(B)} \frac{\varphi(z)dxdy}{(1+|z|^2)^2} = 0 \quad \text{для любого} \quad \tau^* \in \mathrm{PSU}(2) : \tau^*(B) \subset \mathbb{C}.$$

Интеграл слева преобразуется следующим образом:

$$4\iint_{\tau^*(B)} \frac{\varphi(z)dxdy}{(1+|z|^2)^2} = 4\iint_{\pi(\tau(H^*))} \frac{\varphi(z)dxdy}{(1+|z|^2)^2} =$$
$$= \int_{\tau(H^*)} \varphi(\pi(\xi))d\sigma(\xi) \tag{19}$$

(см. (13)). Поэтому

$$\int_{\tau(H^*)} \varphi(\pi(\xi))d\sigma(\xi) = 0 \quad \text{для любого} \quad \tau \in \mathrm{SO}(3) : \tau(H^*) \subset \mathbb{S}^2 \backslash (0,0,1).$$

При этом $\varphi \circ \pi \in C(\mathbb{S}^2 \backslash (0,0,1))$.

Проверим, что

$$\varphi(\pi(\xi)) = o\left(\frac{1}{(1-\xi_3)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \text{при} \quad \xi \to (0,0,1). \tag{20}$$

В силу (10) это равенство равносильно соотношению

$$\varphi\left(\frac{\xi_1}{1-\xi_3}, \frac{\xi_2}{1-\xi_3}\right) = o\left(\frac{1}{(1-\xi_3)^{\frac{3}{2}}}\right), \quad \xi \to (0,0,1).$$

Теперь на основании (11) равенство (20) можно записать в виде

$$\varphi(x,y) = o\left(\frac{1}{\left(1-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)^{\frac{3}{2}}}\right), \quad (x,y) \to \infty.$$

Последнее соотношение эквивалентно второму условию в (18):

$$\varphi(z) = o\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{1+|z|^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = o((1+|z|^2)^{\frac{3}{2}}) = o(|z|^3), \quad z \to \infty.$$

Отсюда и из леммы 2 получаем

$$\int_{\tau(H^*)} \varphi(\pi(\xi))d\sigma(\xi) = 0 \quad \text{для любого} \quad \tau \in \mathrm{SO}(3).$$

Значит,

$$\iint_{\tau^*(B)} \frac{\varphi(z)dxdy}{(1+|z|^2)^2} = 0 \quad \text{для любого} \quad \tau^* \in \mathrm{PSU}(2),$$

что завершает доказательство теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2. Введем функции h и f следующим образом (см. (7)):

$$h(z) = P_2^{-3}\left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)\left(\frac{\overline{z}}{|z|}\right)^3, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad h(0) = 0;$$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(1+|z|^2)^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Покажем, что функция f удовлетворяет всем требованиям в теореме 2. Из (19) имеем

$$4\iint_{\tau^*(B)} f(z)dxdy = \int_{\tau(H^*)} h(\pi(\xi))d\sigma(\xi). \tag{21}$$

Вычислим $h(\pi(\xi))$. Используя (10), получаем

$$z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1-\xi_3}, \quad |z|^2 = \frac{1+\xi_3}{1-\xi_3},$$

$$\frac{\overline{z}}{|z|} = \frac{\xi_2 + i\xi_1}{i\sqrt{1-\xi_3^2}}, \quad \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} = -\xi_3.$$

Поэтому

$$h(\pi(\xi)) = iP_2^{-3}(-\xi_3)\left(\frac{\xi_2 + i\xi_1}{\sqrt{1-\xi_3^2}}\right)^3, \quad \xi \in \mathbb{S}^2\backslash(0,0,1),$$

$$h(\pi(-\xi)) = -iP_2^{-3}(\xi_3)\left(\frac{\xi_2 + i\xi_1}{\sqrt{1-\xi_3^2}}\right)^3.$$

В сферических координатах функция $h(\pi(-\xi))$ записывается в виде

$$h(\pi(-\xi)) = -iP_2^{-3}(\cos\theta)e^{3i\varphi}. \tag{22}$$

Равенство (22), лемма 3 и рассуждение в лемме 2 показывают, что функция $h(\pi(\xi))$ имеет нулевые интегралы по всем полусферам, лежащим в $\mathbb{S}^2\backslash(0,0,1)$. Отсюда и из (21) видно, что f удовлетворяет первому требованию в теореме 2.

Далее, при $z \to \infty$

$$P_2^{-3}\left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right) \sim \frac{\sqrt{2}}{30}\left(1+\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)^{-3/2} = \frac{(1+|z|^2)^{3/2}}{60} \tag{23}$$

(см. (8)). Следовательно,

$$|h(z)| \sim \frac{|z|^3}{60}, \quad z \to \infty,$$

$$|f(z)| \sim \frac{1}{60|z|}, \quad z \to \infty.$$

Значит, функция f удовлетворяет второму требованию в теореме 2. Наконец, если $\infty \in \tau^*(B)$, то $\tau^*(B) \cap \mathbb{C}$ является внешностью круга на $\mathbb{C}$ или поворотом вокруг нуля верхней полуплоскости. Поскольку

$$\int_0^\infty \left|P_2^{-3}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right| \frac{dt}{(1+t)^2} = +\infty$$

(см. (23)), функция f удовлетворяет и третьему требованию в теореме 2. Таким образом, теорема 2 полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1985. – Т. 2. – 464 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
3. Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения / А. В. Сычев. – Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.
4. Axler S. Harmonic function theory / S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey. – New York: Springer-Verlag, 1992. – 234 pp.
5. Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
6. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности / Ю. Ю. Трохимчук. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.
7. Helgason S. Integral geometry and Radon transforms / S. Helgason. – New York: Springer, 2010. – 301 pp.
8. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
9. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 672 pp.
10. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 pp.
11. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций / В. В. Волчков. – Мат. сб. – 1997. – Т. 188, № 9. – С. 13–30.
12. Постников М. М. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
13. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973, 1974. – Т.1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 296 с.
14. Волчков Вит. В. О стирании особенностей функций с нулевыми интегралами по шарам на сфере / Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова. – Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 1. – С. 272–278.
15. Funk P. Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung / P. Funk. – Math. Annal. – 1916. – V. 77. – P. 129–135.
16. Rubin B. Inversion and characterization of the hemispherical transform / B. Rubin. – J. D'Analyse Math. – 1999. – V. 77. – P. 105–128.
17. Campi S. On the reconstruction of a star-shaped body from its "half-volumes-/ S. Campi. – J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). – 1984. – V. 37. – P. 243–257.

Поступила в редакцию 22.02.2020 г.

ON ELIMINATION OF SINGULARITIES OF FUNCTIONS WITH ZERO INTEGRALS OVER DISKS

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov, N. A. Ishchenko

We study the local Pompeiu transform associated with the unit disk on the copmlex plane $\mathbb{C}$ with a spherical metric. An exact condition is found under which the functions from the kernel of the indicated transformation belong to the kernel of the corresponding global Pompeiu transform on the extended copmlex plane $\overline{\mathbb{C}}$.

Keywords: Pompeiu transform, spherical means, spherical harmonics, Legendre functions

Волчкова Наталья Петровна
кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
volna936@gmail.com

Volchkova Natalia Petrovna
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National Technical University, Donetsk

Волчков Виталий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
volna936@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Vitaly Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Full Professor, Donetsk National University, Donetsk

Ищенко Наталья Александровна
аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
nataandRap@mail.ru

Ishchenko Natalia Alexandrovna
Postgraduate student of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Donetsk National University

УДК 517.5+519.213

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ГРУППЕ

© 2020. *В. П. Заставный*

Рассматриваются положительно определенные функции на абелевой группе. Ключевым объектом в работе является известное основное неравенство для положительно определенных функций – неравенство Коши-Буняковского для специального полускалярного произведения, порожденного заданной положительно определенной функцией. С помощью основного неравенства доказаны новые неравенства типа наравенств Крейна-Горина и Ингама.

Ключевые слова: положительно определенные функции, неравенство Крейна, неравенство Вейля, неравенство Горина.

1. Введение. Пусть G абелева группа с групповой операцией $+$. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется *положительно определённой* на G, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, для каждого набора точек $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$ и чисел $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,p=1}^{n} c_k \overline{c_p} f(x_k - x_p) \geqslant 0\,. \tag{1}$$

Множество всех таких функций обозначим символом $\Phi(G)$. Функция $f \in \Phi(G)$ называется *строго положительно определённой* на G, если неравенство (1) строгое при условии, что все точки $\{x_k\}_{k=1}^n$ попарно различны (т.е. $x_k \neq x_p$ при $k \neq p$) и не все числа $\{c_k\}_{k=1}^n$ равны нулю (т.е. $|c_1| + \ldots + |c_n| > 0$).

При $n = 2$, $x_1 = x$ и $x_2 = 0$ неравенство (1) для $f \in \Phi(G)$ имеет вид

$$a_{1,1}|c_1|^2 + a_{1,2}c_1\overline{c_2} + a_{2,1}c_2\overline{c_1} + a_{2,2}|c_2|^2 \geqslant 0,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\,, \tag{2}$$

где $a_{1,1} = f(0)$, $a_{1,2} = f(x)$, $a_{2,1} = f(-x)$, $a_{2,2} = f(0)$. В (2) берем $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Тогда $a_{1,1} \geqslant 0$. Аналогично $a_{2,2} \geqslant 0$. Следовательно $a_{1,2}c_1\overline{c_2} + a_{2,1}c_2\overline{c_1} \in \mathbb{R}$ для любых $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. В частности при $c_1\overline{c_2} = 1$ и $c_1\overline{c_2} = i$ соответственно получаем, что $2a := a_{1,2} + a_{2,1} \in \mathbb{R}$ и $2b := (a_{1,2} - a_{2,1})i \in \mathbb{R}$. Поэтому $a_{1,2} = a - bi$ и $a_{2,1} = a + bi = \overline{a_{1,2}}$. Пусть $a_{1,2} = |a_{1,2}|e^{i\phi}$, где $\phi \in \mathbb{R}$. По доказанному $a_{2,1} = |a_{1,2}|e^{-i\phi}$. В (2) берем $c_1 = t \in \mathbb{R}$, $c_2 = e^{i\phi}$. Тогда при любом $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $a_{1,1}t^2 + 2|a_{1,2}|t + a_{2,2} \geqslant 0$. Следовательно $|a_{1,2}|^2 \leqslant a_{1,1}a_{2,2}$.

Таким образом из неравенства (2) сразу получаются следующие простые и хорошо известные свойства положительно определенных функций: *если* $f \in \Phi(G)$, *то* $f(0) \geqslant 0$, $f(-x) = \overline{f(x)}$ *и* $|f(x)| \leqslant f(0)$ *при всех* $x \in G$. В теории положительно определенных функций важную роль играет следующее неравенство М.Г. Крейна (см., например, [1], [2, Глава IV,§ 1]): *если* $f \in \Phi(G)$, *то* $|f(x) - f(y)|^2 \leqslant 2f(0)\,\mathrm{Re}\big(f(0) - f(x-y)\big)$ *при всех* $x, y \in G$. В 2015 Е.А. Горин [3], используя теорему Бохнера и принцип максимума для субгармонических функций, получил обобщение неравенства Крейна. Для $G = \mathbb{R}$ см. также работу А.Б. Певный, С.М. Ситник [4].

© Заставный В. П., 2020

Целью данной работы является доказательство новых более общих неравенств типа неравенств Крейна-Горина. Приведенные доказательства не используют теорему Бохнера и принцип максимума для субгармонических функций. Ключевым объектом в работе является известное основное неравенство для положительно определенных функций – неравенство Коши-Буняковского для специального полускалярного произведения, порожденного заданной положительно определенной функцией.

В пункте 2 данной работы приведено простое доказательство хорошо известного неравенства (4) – основного, по нашему мнению, неравенства для положительно определенных функций. При подходящем выборе системы точек и коэффициентов в основном неравенстве получаются новые неравенства и хорошо известные неравенства Крейна, Вейля и Горина (см. следствие 6). В пунктах 3 и 4 с помощью основного неравенства доказаны новые неравенства типа неравенств Крейна-Горина и Ингама.

2. Основное неравенство и следствия из него. Пусть $\mathfrak{L}$ – линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Функция $(h,g):\mathfrak{L}\times\mathfrak{L}\to\mathbb{C}$ называется *полускалярным произведением* на $\mathfrak{L}$, если для любых $h,g,u\in\mathfrak{L}$ и $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ выполняются условия: 1) $(\lambda h+\mu u,g)=\lambda(h,g)+\mu(u,g)$, 2) $(h,g)=\overline{(g,h)}$, 3) $(h,h)\geqslant 0$. Если дополнительно $(h,h)>0$ для $h\in\mathfrak{L}\setminus\{0\}$, то эта функция называется *скалярным произведением* на $\mathfrak{L}$. Из свойств полускалярного произведения вытекает, что для любых $h,g\in\mathfrak{L}$ и $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ выполняется неравенство $(c_1h+c_2g,c_1h+c_2g)=(h,h)|c_1|^2+(h,g)c_1\overline{c_2}+(g,h)c_2\overline{c_1}+(g,g)|c_2|^2\geqslant 0$. Отсюда следует, что если $(g,g)=0$, то $(h,g)=0$ для всех $h\in G$ (надо взять $c_1=t\in\mathbb{R}$ и $c_2=(h,g)$). Из соотношения $(u,u)=(g,g)\left((h,h)(g,g)-|(h,g)|^2\right)\geqslant 0$, где $u:=(g,g)h-(h,g)g$, получаем неравенство Коши-Буняковского для полускалярного произведения:

$$|(h,g)|^2\leqslant(h,h)(g,g),\ \ h,g\in\mathfrak{L}. \tag{3}$$

Кроме того, равенство в (3) имеет место тогда и только тогда, когда $(u,u)=0$, где $u=(g,g)h-(h,g)g$. Если функция $(\cdot,\cdot)$ является скалярным произведением на $\mathfrak{L}$, то равенство в (3) имеет место тогда и только тогда, когда $(g,g)h-(h,g)g=0$, что эквивалентно линейной зависимости h и g.

Доказательство следующей хорошо известной теоремы 1 (см., например, монографии Сасвари [2, Теорема 1.4.1(v)] и [6, Теорема 1.4.12(v)]) сводится к неравенству Коши-Буняковского (3) для специального полускалярного произведения, порожденного заданной положительно определенной функцией f.

Теорема 1 (Основное неравенство). *Пусть G – абелева группа и $f\in\Phi(G)$. Тогда для любых натуральных $n,m\in\mathbb{N}$, для произвольных наборов точек $\{x_k\}_{k=1}^n$, $\{y_p\}_{p=1}^m\subset G$, $x\in G$, и $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_p\}_{p=1}^m\subset\mathbb{C}$ выполняются неравенства*

$$\left|\sum_{k=1}^n\sum_{p=1}^m f(x+x_k-y_p)a_k\overline{b_p}\right|^2\leqslant\sum_{k,p=1}^n f(x_k-x_p)a_k\overline{a_p}\ \sum_{k,p=1}^m f(y_k-y_p)b_k\overline{b_p}\ , \tag{4}$$

$$\left|\sum_{k=1}^n a_kf(x+x_k)\right|^2\leqslant f(0)\sum_{k,p=1}^n f(x_k-x_p)a_k\overline{a_p}\ . \tag{5}$$

Приведем доказательство более прозрачное, чем в [2, Теорема 1.4.1(v)] и более подробное (аккуратное), чем в [6, Теорема 1.4.12(v)].

Доказательство. Сначала докажем неравенство (4) при $x=0$. Пусть $\mathfrak{L}$ – множество функций $h:G\to\mathbb{C}$, которые равны нулю всюду на G, кроме может быть конечного

числа точек. Очевидно $\mathfrak{L}$ – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ с нулевым элементом $h \equiv 0$ на G. Не трудно проверить, что следующая функция $(h, g) : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathbb{C}$ корректно определена и является полускалярным произведением на $\mathfrak{L}$:

$$(h, g) := \sum_{x,y \in G} f(x-y)h(x)\overline{g(y)}\ ,\ h, g \in \mathfrak{L}\ . \tag{6}$$

Очевидно, что $h \in \mathfrak{L} \iff$ существует конечная система попарно различных точек $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$ такая, что $h(x) = 0$ при $x \in G \setminus \{x_k\}_{k=1}^n$. Если $\{y_p\}_{p=1}^m$ – аналогичная система попарно различных точек из G для функции $g \in \mathfrak{L}$, то

$$(h, g) = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m f(x_k - y_p)h(x_k)\overline{g(y_p)},\ (h, h) = \sum_{k,p=1}^n f(x_k - x_p)h(x_k)\overline{h(x_p)} \geqslant 0.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского (3), получаем справедливость неравенства (4) при $x = 0$, но при дополнительном условии: $x_k \neq x_p$ и $y_k \neq y_p$ при $k \neq p$. Отсюда уже вытекает справедливость неравенства (4) при $x = 0$ и без этого дополнительного условия. Действительно, пусть $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_s^*\}_{s=1}^{n^*} \subset G$, где $x_s^* \neq x_j^*$ при $s \neq j$ (в исходной системе точек оставили только попарно различные). Для системы чисел $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ определим систему $\{a_s^*\}_{s=1}^{n^*} \subset \mathbb{C}$ по формуле

$$a_s^* := \sum_{k \in \{1,\ldots,n\}:\, x_k = x_s^*} a_k,\ s = 1, \ldots, n^*\ .$$

Для системы точек $\{y_1, \ldots, y_m\} = \{y_q^*\}_{q=1}^{m^*} \subset G$, где $y_q^* \neq y_j^*$ при $q \neq j$, и для системы чисел $\{b_p\}_{p=1}^m \subset \mathbb{C}$ аналогично определим систему $\{b_q^*\}_{q=1}^{m^*} \subset \mathbb{C}$. Тогда очевидно

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m f(x_k - y_p)a_k\overline{b_p} = \sum_{s=1}^{n^*} \sum_{q=1}^{m^*} f(x_s^* - y_q^*)a_s^*\overline{b_q^*}\,,$$

$$\sum_{k,p=1}^n f(x_k - x_p)a_k\overline{a_p} = \sum_{s,q=1}^{n^*} f(x_s^* - x_q^*)a_s^*\overline{a_q^*}\,,\quad \sum_{k,p=1}^m f(y_k - y_p)b_k\overline{b_p} = \sum_{s,q=1}^{m^*} f(y_s^* - y_q^*)b_s^*\overline{b_q^*}\,.$$

Неравенство (4) при $x = 0$ доказано. Общий случай вытекает из случая $x = 0$ заменой системы точек $\{x_k\}_{k=1}^n$ на систему точек $\{x + x_k\}_{k=1}^n$.

Неравенство (5) вытекает из неравенства (4) при $m = 1$, $y_1 = 0$, $b_1 = 1$. □

Замечание 1. Не трудно показать, что полускалярное произведение (6) является скалярным произведением на $\mathfrak{L} \iff$ функция f является строго положительно определённой на G.

Следствие 1. *Пусть $f \in \Phi(G)$. Тогда f не является строго положительно определённой на $G \iff$ существуют $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$, $x_k \neq x_p$, $k \neq p$, такие, что система функций $\{f(x + x_k)\}_{k=1}^n$ линейно зависима на G.*

Доказательство.

$$\sum_{k,p=1}^n f(x_k - x_p)a_k\overline{a_p} = 0 \iff \sum_{k=1}^n a_k f(x + x_k) = 0,\ x \in G\,.$$

Отсюда и следует утверждение следствия. □

Следствие 2. *Пусть* $f \in \Phi(\mathbb{R}^d)$ *и* $f(x) = 0$ *для всех* $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. *Пусть* $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $Y = \{y_p\}_{p=1}^{\infty}$ *– две системы, каждая из которых состоит из счетного числа попарно различных точек из* $\mathbb{Z}^d$. *Тогда для любых* $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, *и для любых наборов чисел* $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\{b_p\}_{p=1}^{m}$ *из* $\mathbb{C}$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} f(x + x_k - y_p) a_k \overline{b_p}\right| \leqslant f(0) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{m} |b_p|^2}\,. \tag{7}$$

В частности, если $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $Y = \{y_p\}_{p=1}^{\infty}$ *– две системы, каждая из которых состоит из счетного числа попарно различных точек из* $\mathbb{Z}$, *то для любых* $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, *и для любых наборов чисел* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, $\{\beta_p\}_{p=1}^{m}$ *из* $\mathbb{C}$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} \frac{\sin(\pi x)\alpha_k\beta_p}{x + x_k - y_p}\right| \leqslant \pi \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{m} |\beta_p|^2}\,. \tag{8}$$

Доказательство. Неравенство (7) очевидно вытекает из неравенства (4) для $G = \mathbb{R}^d$. Неравенство (8) получается из неравенства (7) при $d = 1$, если взять положительно определенную на $\mathbb{R}$ функцию $f(x) = \sin(\pi x)/x$, $a_k := (-1)^{x_k}\alpha_k$, $b_p := (-1)^{y_p}\overline{\beta_p}$. □

Замечание 2. Если в неравенстве (8) взять $X = \mathbb{Z}_+$, $Y = -\mathbb{Z}_+$, $x > 0$, $\alpha_k, \beta_p \geqslant 0$, $p, k \in \mathbb{Z}_+$, и $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}, \{\beta_p\}_{p=0}^{\infty} \in l_2$, то предельным переходом получим следующее неравенство Ингама (см., например, [7] или [8, Дополнение 42])

$$\sum_{k,p=0}^{\infty} \frac{\alpha_k\beta_p}{x + k + p} \leqslant M(x) \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{p=0}^{\infty} \beta_p^2}\,, \tag{9}$$

где $M(x) = \pi/\sin(\pi x)$ и $M(x) = \pi$ соответственно при $0 < x \leqslant 1/2$ и при $x \geqslant 1/2$. Константа $M(x)$ в неравенстве (9) точная. Если обе последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\beta_p\}_{p=0}^{\infty}$ не нулевые, то при $x \geqslant 1/2$ неравенство (9) строгое, а при $0 < x < 1/2$ равенство достигается при

$$\alpha_k = \beta_k = \frac{\Gamma(k + x)}{\Gamma(k + 1)},\ k \in \mathbb{Z}_+\,.$$

Более подробно см. [7], а также § 8.8 при $p = q = 2$ и Дополнение 42 из монографии [8]. Отметим, что при $x = 1/2$ получается хорошо известное неравенство Гильберта.

Следствие 3. *Пусть* $f : G \to \mathbb{C}$. *Тогда* $f \in \Phi(G) \iff f(0) \geqslant 0$ *и для любых натуральных* $n, m \in \mathbb{N}$, *для произвольных наборов точек* $\{x_k\}_{k=1}^{n}, \{y_p\}_{p=1}^{m} \subset G$ *и* $x \in G$, $\{a_k\}_{k=1}^{n}, \{b_p\}_{p=1}^{m} \subset \mathbb{C}$ *выполняется неравенство* (4).

Доказательство. Необходимость уже доказана. Докажем достаточность. Из неравенства (4) при $n = m = 1$, $x_1 = y_1 = 0$, $a_1 = b_1 = 1$, и условия $f(0) \geqslant 0$ вытекает неравенство $|f(x)| \leqslant f(0)$, $x \in G$. Поэтому, если $f(0) = 0$, то $f \equiv 0$, и значит $f \in \Phi(G)$. Если $f(0) > 0$, то из неравенства (5), которое следует из (4), получаем неравенство (1). Поэтому и в этом случае $f \in \Phi(G)$. □

Замечание 3. Следствие 3 очевидно останется в силе, если вместо выполнения неравенства (4) потребовать выполнение неравенства (5). Оба эти факта отмечаются в [2, Замечания, стр. 25], где пропущено условие $f(0) \geqslant 0$.

Из неравенства (4) при $n = 2$, $m = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = y - x$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = -\beta$, $y_1 = 0$, $b_1 = 1$, сразу получается неравенство (10), которое при $\alpha = \beta = 1$ является неравенством М.Г. Крейна [1].

Следствие 4. *Пусть G – абелева группа и $f \in \Phi(G)$. Тогда для любых точек $x, y \in G$, и для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*

$$|\alpha f(x) - \beta f(y)|^2 \leqslant f(0)\,\mathrm{Re}\left(f(0)(|\alpha|^2 + |\beta|^2) - 2\alpha\overline{\beta} f(x-y)\right) . \tag{10}$$

Следствие 5. *Пусть G – абелева группа и $f \in \Phi(G)$. Тогда для любых точек $x, y \in G$ выполняется неравенство Вейля* [9, § 14]

$$|f(0)f(x+y) - f(x)f(y)|^2 \leqslant \left(f^2(0) - |f(x)|^2\right)\left(f^2(0) - |f(y)|^2\right) . \tag{11}$$

Доказательство. Запишем (4) при $n = m = 2$, $x_1 = -x$, $x_2 = 0$, $a_1 = f(x)$, $a_2 = -f(0)$, $y_1 = 0$, $y_2 = -y$, $b_1 = f(-y)$, $b_2 = -f(0)$. Получим неравенство

$$f^2(0)\,|f(0)f(x+y) - f(x)f(y)|^2 \leqslant f^2(0)\left(f^2(0) - |f(x)|^2\right)\left(f^2(0) - |f(y)|^2\right) ,$$

которое при $f(0) > 0$ эквивалентно неравенству (11). Если $f(0) = 0$, то $f \equiv 0$ (т.к. $|f(x)| \leqslant f(0)$, $x \in G$) и неравенство (11) тривиально. □

Следствие 6. *Пусть G – абелева группа, $f \in \Phi(G)$ и $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Тогда для любых $n, m \in \mathbb{N}$, для любых точек $\{x_k\}_{k=1}^n, \{y_p\}_{p=1}^m \subset G$, $x, y \in G$, и для любых чисел $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_p\}_{p=1}^m \subset \mathbb{D}$, $\alpha, \beta, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{D}$ выполняются неравенства*

$$\begin{gathered}\left|\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m f(x + x_k - y_p) a_k \overline{b_p}\right|^2 \leqslant \\ \mathrm{Re}\left(nf(0) + 2\sum_{1\leqslant k<p\leqslant n} f(x_k - x_p) a_k \overline{a_p}\right) \mathrm{Re}\left(mf(0) + 2\sum_{1\leqslant k<p\leqslant m} f(y_k - y_p) b_k \overline{b_p}\right) ,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k f(x + x_k)\right|^2 \leqslant f(0)\,\mathrm{Re}\left(nf(0) + 2\sum_{1\leqslant k<p\leqslant n} f(x_k - x_p) a_k \overline{a_p}\right) , \tag{13}$$

$$|\alpha f(x) - \beta f(y)|^2 \leqslant 2f(0)\,\mathrm{Re}\left(f(0) - \alpha\overline{\beta} f(x-y)\right) , \tag{14}$$

$$\begin{gathered}|f(0) + \xi_1\xi_2 f(x+y) - \xi_1 f(x) - \xi_2 f(y)|^2 \leqslant \\ 4\,\mathrm{Re}\left(f(0) - \xi_1 f(x)\right)\mathrm{Re}\left(f(0) - \xi_2 f(y)\right) ,\end{gathered} \tag{15}$$

Замечание 4. Неравенство (14) – это неравенство Е.А. Горина [3] (для $G = \mathbb{R}$ см. также работу А.Б. Певный, С.М. Ситник [4]) и оно является одним из обобщений неравенства (10).

Доказательство. Неравенство (12) вытекает из неравенства (4) и следующих неравенств, которые справедливы для любых $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_p\}_{p=1}^m \subset \mathbb{D}$:

$$0 \leqslant \sum_{k,p=1}^n f(x_k - x_p) a_k \overline{a_p} = \sum_{k=1}^n f(0)|a_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{1\leqslant k<p\leqslant n} f(x_k - x_p) a_k \overline{a_p} \leqslant$$
$$nf(0) + 2\,\mathrm{Re}\sum_{1\leqslant k<p\leqslant n} f(x_k - x_p) a_k \overline{a_p} ,$$

$$0 \leqslant \sum_{k,p=1}^{m} K(y_k, y_p) b_k \overline{b_p} \leqslant m f(0) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{1 \leqslant k < p \leqslant m} f(y_k - y_p) b_k \overline{b_p}\,.$$

Неравенство (13) вытекает из неравенства (12) при $m = 1$, $y_1 = 0$, $b_1 = 1$.
Неравенство (14) для $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, вытекает из неравенства (13) при $n = 2$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = -\beta$, $x_1 = 0$, $x_2 = y - x$.
Неравенство (15) при $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{D}$ вытекает из (12) при $n = m = 2$, $x_1 = -x$, $x_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -\xi_1$, $y_1 = 0$, $y_2 = -y$, $b_1 = 1$, $b_2 = -\overline{\xi_2}$. Следует учесть, что $f(-y) = \overline{f(y)}$ и $f(0) \in \mathbb{R}$. □

3. Неравенства типа неравенства Крейна-Горина.

Теорема 2. *Пусть G – абелева группа и $f \in \Phi(G)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, для произвольных наборов точек $\{x_k\}_{k=1}^n, \{y_k\}_{k=1}^n \subset G$, и для любых чисел $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{C}$, $|\xi_k| \leqslant 1$, $|\eta_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$, выполняются неравенства*

$$\sqrt{\Big| f(0) - \xi_1 \ldots \xi_n f\big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big) \Big|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{|f(0) - \xi_k f(x_k)|}\,, \tag{16}$$

$$\sqrt{\mathrm{Re}\Big(f(0) - \xi_1 \ldots \xi_n f\big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big) \Big)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mathrm{Re}(f(0) - \xi_k f(x_k))}\,, \tag{17}$$

$$\Big| \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n f\big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big) - \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_n f\big(\sum_{k=1}^{n} y_k\big) \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2 f(0)\,\mathrm{Re}(f(0) - \xi_k \overline{\eta_k} f(x_k - y_k))}\,. \tag{18}$$

$$\Big| \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n f\big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big) - \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_n f\big(\sum_{k=1}^{n} y_k\big) \Big|^2 \leqslant 2 f(0) n \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(f(0) - \xi_k \overline{\eta_k} f(x_k - y_k))\,. \tag{19}$$

Замечание 5. Неравенства (16) и (17) следуют из неравенства (15), а неравенство (18) получается из неравенств (14) и (17). Неравенство (19) следует из неравенства (18). Неравенство (19) при $\xi_k = \xi$, $\eta_k = \eta$, $k = 1, \ldots, n$, $|\xi| \leqslant 1$, $|\eta| \leqslant 1$, в 2015 доказал Е. А. Горин [3]. Случай $\xi = \eta = 1$ им был получен ранее в [10], [11] (см. также работу А.Б. Певный, С.М. Ситник [4], в которой для $G = \mathbb{R}$ рассмотрен этот случай и случай $\xi = 1$, $\eta = -1$). В указанных работах, в отличие от нашего метода, использовалась теорема Бохнера.

Доказательство. Неравенства (16) и (17) очевидно достаточно доказать для $n = 2$. Пусть $|\xi_1| \leqslant 1$, $|\xi_2| \leqslant 1$, $x, y \in G$. Применяя неравенство треугольника и неравенство (15) и учитывая, что $0 \leqslant \mathrm{Re}(f(0) - \xi f(u)) \leqslant |f(0) - \xi f(u)|$ при всех $|\xi| \leqslant 1$ и $u \in G$, получаем

$$\begin{aligned}
&|f(0) - \xi_1 \xi_2 f(x+y)| \leqslant \\
&|f(0) - \xi_1 f(x)| + |f(0) - \xi_2 f(y)| + |-f(0) - \xi_1 \xi_2 f(x+y) + \xi_1 f(x) + \xi_2 f(y)| \leqslant \\
&|f(0) - \xi_1 f(x)| + |f(0) - \xi_2 f(y)| + 2\sqrt{\mathrm{Re}(f(0) - \xi_1 f(x))}\sqrt{\mathrm{Re}(f(0) - \xi_2 f(y))} \leqslant \\
&|f(0) - \xi_1 f(x)| + |f(0) - \xi_2 f(y)| + 2\sqrt{|f(0) - \xi_1 f(x)|}\sqrt{|f(0) - \xi_2 f(y)|} = \\
&\big(\sqrt{|f(0) - \xi_1 f(x)|} + \sqrt{|f(0) - \xi_2 f(y)|}\big)^2\,.
\end{aligned}$$

Неравенство (16) доказано. Аналогично доказывается неравенство (17):

$$|\operatorname{Re}(f(0)-\xi_1\xi_2 f(x+y))| \leqslant |\operatorname{Re}(f(0)-\xi_1 f(x))| + |\operatorname{Re}(f(0)-\xi_2 f(y))| +$$
$$|\operatorname{Re}(-f(0)-\xi_1\xi_2 f(x+y)+\xi_1 f(x)+\xi_2 f(y))| \leqslant$$
$$\operatorname{Re}(f(0)-\xi_1 f(x)) + \operatorname{Re}(f(0)-\xi_2 f(y)) + 2\sqrt{\operatorname{Re}(f(0)-\xi_1 f(x))}\sqrt{\operatorname{Re}(f(0)-\xi_2 f(y))} =$$
$$\left(\sqrt{\operatorname{Re}(f(0)-\xi_1 f(x))} + \sqrt{\operatorname{Re}(f(0)-\xi_2 f(y))}\right)^2 .$$

Неравенство (17) тоже доказано.

Применяя последовательно неравенства (14), (17) и неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\left|\xi_1\cdot\ldots\cdot\xi_n f\Big(\sum_{k=1}^n x_k\Big) - \eta_1\cdot\ldots\cdot\eta_n f\Big(\sum_{k=1}^n y_k\Big)\right|^2 \leqslant$$
$$2f(0)\operatorname{Re}\left(f(0)-\xi_1\overline{\eta_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n\overline{\eta_n} f\Big(\sum_{k=1}^n (x_k-y_k)\Big)\right) \leqslant$$
$$2f(0)\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{\operatorname{Re}(f(0)-\xi_k\overline{\eta_k} f(x_k-y_k))}\right)^2 \leqslant 2f(0)n\sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(f(0)-\xi_k\overline{\eta_k} f(x_k-y_k)) .$$

Неравенства (18) и (19) доказаны. Теорема доказана. □

4. Неравенства типа неравенства Ингама. Пусть G – абелева группа. Разность Минковского двух не пустых множеств $X, Y \subset G$ определяется по формуле $X - Y := \{x - y : x \in X, y \in Y\}$. Пусть $\Lambda(X) := X - X$. Очевидно множество $\Lambda(X)$ симметрично относительно нуля и $0 \in \Lambda(X)$.

Теорема 3. *Пусть $f \in \Phi(G)$, $n, m \in \mathbb{N}$, и $X = \{x_k\}_{k=1}^n$, $Y = \{y_p\}_{p=1}^m$ – две системы, каждая из которых состоит из конечного числа попарно различных точек из G. Тогда для любого $x \in G$ и для любых наборов чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_p\}_{p=1}^m$ из $\mathbb{C}$ выполняются неравенства*

$$\left|\sum_{k=1}^n\sum_{p=1}^m f(x+x_k-y_p)a_k\overline{b_p}\right|^2 \leqslant \sum_{u\in\Lambda(X)}|f(u)|\cdot\sum_{v\in\Lambda(Y)}|f(v)|\cdot\sum_{k=1}^n|a_k|^2\cdot\sum_{p=1}^m|b_p|^2 , \tag{20}$$

$$\sum_{p=1}^m\left|\sum_{k=1}^n f(x+x_k-y_p)a_k\right|^2 \leqslant \sum_{u\in\Lambda(X)}|f(u)|\cdot\sum_{v\in\Lambda(Y)}|f(v)|\cdot\sum_{k=1}^n|a_k|^2 . \tag{21}$$

Замечание 6. Неравенство (20) является обобщением неравенства (7), из которого в свою очередь вытекает неравенство Ингама (9). Поэтому неравенство (20) мы называем неравенством типа Ингама.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $X = \{x_k\}_{k=1}^n$ – конечная система попарно различных точек из G. Тогда для любого набора чисел $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k,p=1}^n f(x_k-x_p)a_k\overline{a_p}\right| \leqslant \sum_{u\in\Lambda(X)}|f(u)|\cdot\sum_{k=1}^n|a_k|^2 . \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\Lambda(X) = \{u_1, \ldots, u_q\}$, где $u_s \neq u_p$ при $s \neq p$ и $q := |\Lambda(X)|$ – количество элементов в $\Lambda(X)$. При любых фиксированных $k \in \{1, \ldots, n\}$ и $s \in \{1, \ldots, q\}$ уравнение $x_k - x_p = u_s$ если имеет решение при $p \in \{1, \ldots, n\}$, то оно одно. Аналогично, при любых фиксированных $p \in \{1, \ldots, n\}$ и $s \in \{1, \ldots, q\}$ уравнение $x_k - x_p = u_s$ если имеет решение при $k \in \{1, \ldots, n\}$, то оно одно. Поэтому каждое множество $\Lambda_s := \big\{(k,p) : x_k - x_p = u_s,\ k,p \in \{1, \ldots, n\}\big\}$, $s \in \{1, \ldots, q\}$, можно представить в виде $\Lambda_s = \{(k(s,j), p(s,j))\}_{j=1}^{m(s)}$, где $m(s) = |\Lambda_s| \in \{1, \ldots, n\}$, $k(s,j) \neq k(s,l)$ и $p(s,j) \neq p(s,l)$ при $j \neq l$. Тогда

$$\left|\sum_{k,p=1}^{n} f(x_k - x_p) a_k \overline{a_p}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{q} |f(u_s)| \sum_{(k,p)\in\Lambda_s} |a_k|\,|a_p| = \sum_{s=1}^{q} |f(u_s)| \sum_{j=1}^{m(s)} |a_{k(s,j)}|\,|a_{p(s,j)}| \leqslant$$

$$\sum_{s=1}^{q} |f(u_s)| \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{m(s)} |a_{k(s,j)}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{m(s)} |a_{p(s,j)}|^2} \leqslant \sum_{s=1}^{q} |f(u_s)| \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 .$$

□

Доказательство теоремы 3. Неравенство (20) вытекает из неравенств (4) и (22). Неравенство (21) следует из неравенства (20). □

Теорема 4. *Пусть $f \in \Phi(G)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $X = \{x_k\}_{k=1}^{n}$ – конечная или счётная система попарно различных точек из G, т.е. $x_k \in G$ и $x_k \neq x_p$ при $k \neq p$. Тогда для любого $x \in G$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x + x_k)|^2 \leqslant f(0) \sum_{u\in\Lambda(X)} |f(u)| . \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $f \in \Phi(G)$ и $n \in \mathbb{N}$. Применяя неравенство (5) и лемму 1, получаем, что для любого $x \in G$ и для любого набора чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k f(x + x_k)\right|^2 \leqslant f(0) \sum_{k,p=1}^{n} f(x_k - x_p) a_k \overline{a_p} \leqslant f(0) \sum_{u\in\Lambda(X)} |f(u)| \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 .$$

В силу произвольности чисел a_k получаем справедливость неравенства (23).

Случай $n = \infty$ получается из доказанного случая предельным переходом в неравенстве (23) при $n \to \infty$. Следует учесть, что если $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – счетная система попарно различных точек и $X_n := \{x_k\}_{k=1}^{n}$, то $\Lambda(X_n) \subset \Lambda(X)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. □

5. Заключение. В заключении отметим, что результаты этой работы естественным образом переносятся на положительно определенные ядра. Пусть G – некоторое множество. Функция $K : G \times G \to \mathbb{C}$ называется *положительно определенным ядром* на $G \times G$, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, для каждого набора точек $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset G$ и чисел $\{c_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k,p=1}^{n} c_k \overline{c_p} K(x_k, x_p) \geqslant 0$. Множество всех таких ядер обозначим символом $\Phi(G \times G)$.

Теорема 5 (Основное неравенство для ядер)**.** *Пусть $K \in \Phi(G \times G)$. Тогда для любых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, для произвольных наборов точек $\{x_k\}_{k=1}^{n}$, $\{y_p\}_{p=1}^{m} \subset G$,*

$x \in G$, и $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_p\}_{p=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} K(x_k, y_p) a_k \overline{b_p}\right|^2 \leqslant \sum_{k,p=1}^{n} K(x_k, x_p) a_k \overline{a_p} \sum_{k,p=1}^{m} K(y_k, y_p) b_k \overline{b_p}\ , \tag{24}$$

Неравенство (24) обращается в равенство для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^n$, $\{y_p\}_{p=1}^m \subset G$, и $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_p\}_{p=1}^m \subset \mathbb{C}$, тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m} K(y_k, y_p) b_k \overline{b_p} \sum_{k=1}^{n} a_k K(x_k, t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} K(x_k, y_p) a_k \overline{b_p} \sum_{p=1}^{m} b_p K(y_p, t)\ , t \in G.$$

В частности неравенство $|K(x,y)|^2 \leqslant K(x,x)K(y,y)$ обращается в равенство при некоторых $x, y \in G$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство $K(y,y)K(x,t) = K(x,y)K(y,t)$.

Доказательство последней теоремы и других неравенств для положительно определенных ядер представлены в другой журнал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М. Г. О представлении функций интегралами Фурье-Стилтьеса / М. Г. Крейн // Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та. – 1943. – № 7. – С. 123–148; Крейн М. Г. Избранные труды. Т. 1 / М. Г. Крейн. – Киев: 1993. – С. 16–48.
2. Вахания Н.Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н.Н. Вахания, В.И. Тариеладзе, С.А. Чобанян. – Москва: Наука, 1985.
3. Горин Е. А. Некоторые неравенства для положительно определенных функций / Е. А. Горин // Функц. анализ и его прил. – 2015. – Т. 49, № 4. – С. 76–78.
4. Певный А. Б. Обобщения неравенств М. Г. Крейна, Е. А. Горина и Ю. В. Линника для положительно определенных функций на многоточечный случай / А. Б. Певный, С. М. Ситник // Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 263–270.
5. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions / Z. Sasvári. – Berlin: Akademie Verlag, 1994.
6. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / Z. Sasvári. – Berlin: De Gruyter, 2013. – 366 p.
7. Ingham A. E. A note on Hilbert's inequality / A. E. Ingham // Journ. London Math. Soc. – 1936. – V. 11, № 3. – P. 237–240.
8. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М.: Ин. Лит., 1948. – 456 с.
9. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения / А. Вейль. – М.: Ин. Лит., 1950. – 224 с.
10. Gorin E. A. Universal symbols on locally compact Abelian groups / E. A. Gorin // Bull. Polish Acad. Sci. – 2003. – V. 51, № 2. – P. 199–204.
11. Горин Е. А. Положительно определённые функции как инструмент математического анализа / Е. А. Горин // Фундамент. и прикл. матем. – 2012. – Т. 17, № 7. – С. 67–95.

Поступила в редакцию 01.06.2020 г.

INEQUALITIES FOR POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS ON GROUP

V. P. Zastavnyi

Positive definite functions on an abelian group are considered. The key object in this work is the well-known basic inequality for positive definite functions — the Cauchy-Bunyakovsky inequality for a special semi-inner product generated by a given positive definite function. Using the basic inequality, new inequalities of the Krein-Gorin and Ingham type are proven.

Keywords: positive definite functions, Krein inequality, Weyl inequality, Gorin inequality.

Заставный Виктор Петрович
доктор физико-математических наук, доцент, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
zastavn@rambler.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
+38-095-5657264

Zastavnyi Viktor Petrovych
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor, Donetsk National University, Donetsk

УДК 51.8,519.66

О ПОСТРОЕНИИ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

© 2020. *А. Ю. Иванов, А.-В. В. Мельник*

В статье автор кратко рассматривает историю развития математической теории магических квадратов и строит новый метод построения полумагических квадратов произвольного нечетного порядка.

***Ключевые слова*:** Магический квадрат, полумагический квадрат, перестановка, магическое число.

Введение. Классическим магическим квадратом порядка n, где n - некоторое натуральное число, называют матрицу $n \times n$, заполненную числами от 1 до n^2 так, что их суммы в каждой строке, столбце, а также по главной и побочной диагоналям равны некоторому числу $\Sigma(n)$. Число $\Sigma(n)$ называют магическим числом [1].

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Рис. 1: Ло-Шу

Первые упоминания о магических квадратах относят еще к 2200 ВС, когда, согласно сказаниям, на берег реки Ло в Китае вынесло черепаху, на панцире которой был вырезан магический квадрат порядка 3 (Рис. 1), известный сейчас как квадрат Ло-Шу. На найденной в индийском городе Кхаджурахо в 1904 г. Джайнайской надписи XII или XIII века изображен квадрат 4×4 (Рис. 2). Данная матрица является магическим квадратом, обладающим дополнительными свойствами – ее "ломаные диагонали"(2 12 5 15, 1 11 6 16, 7 6 10 11, 14 2 3 5, 4 16 13 1 и 9 12 8 5) также равны магическому числу $\Sigma(4) = 34$. Матрицы, обладающие подобным свойством, выделяют в отдельный подтип магических квадратов и называют пандиагональными [2].

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Рис. 2

В XVI-XVIII веках наблюдается расцвет интереса к данной тематике. Магические квадраты можно встретить в произведениях искусств (например, известная гравюра Альбрехта Дюрера "Меланхолия 1514г. [2]), их используют в астрологии (магические квадраты А. Кирхера и т.п.), также в этот период ведется активное развитие математической теории магических квадратов. Первые результаты в этом направлении носят разрозненный характер и концентрируются, прежде всего, на вопросе построения новых квадратов различных порядков.

Постепенно увеличивающийся объем фактов ставил новые вопросы в рамках данной проблематики. Так, установив, что из каждого магического квадрата можно получить еще 7 при помощи поворотов на $90°$ и отражений [3] (обычно эту восьмерку магических квадратов не различают, воспринимая их как один и тот же), а также показав при помощи полного перебора, что квадрат Ло-Шу является единственным (с точностью до поворотов и отражений) магическим квадратом порядка 3, была поставлена задача о вычислении количества различных квадратов данного порядка. Вплоть до второй половины XVII века считалось, что существует лишь 16 магических квадратов порядка 4, однако затем Бернард Френикл де Бюсси нашел 880 различных магических квадратов данного порядка [4]. Френикл применил известный метод исчерпаний, основанный во многом на прямом переборе всех возможных вариантов,это позволило ему не только составить список из 880 различных магических квадратов, но и показать, что других магических квадратов порядка 4 не существует. Тем не менее, ввиду сложности проверки результатов Б. Френикла

© Иванов А. Ю., Мельник А.-В. В., 2020

многие авторы не стали доверять им – первое аналитическое доказательство того, что существует ровно 880 различных магических квадратов порядка 4 получено только в 1982 г. К. Оллереншоу и Г. Бонди [2].

Таким образом, уже к концу XVII века была получена исчерпывающая информацию о магических квадратах порядка 3 и 4, однако при вычислении общего количества различных квадратов более старших порядков исследователи столкнулись с непреодолимыми трудностями вычислительного характера. Так, если в 1976 г. В. Бенсон совместно с О. Якоби запрограммировали метод исчерпаний Б. Френикла и получили при помощи вычислительной машины IBM 1130 полный список магических квадратов 4 на 4 [5], аналогичным образом Р. Шроппель вычислил количество различных магических квадратов 5 на 5, установив, что их 275 305 224 [6], но подобный подход преодолеть $36!$ вариантов полного перебора квадратов порядка 6 не может и по сей день.

В 1998 г. К. Пинн и Ц.Вейцерковски применили радикально отличный подход к вычислению количества магических квадратов порядка 6 [7]. Данный метод основан на применении метода Монте Карло, и, как результат, дает статистическую оценку количества различных магических квадратов – $(0.17745 \pm 0.00016) \times 10^{20}$. На данный момент аналогичным образом получены оценки количества различных магических квадратов вплоть до 10 порядка.

В свете выше означенных сложностей с вычислением количества различных магических квадратов старших порядков, значительное место в развитии математической теории магических квадратов заняли алгоритмы построения магических квадратов заданного порядка. С широким набором подобных методов можно ознакомиться, например, в книге М. М. Постникова "Магические квадраты- [3]. В целом можно выделить 3 основных типа алгоритмов конструирования: методы окаймления, при которых к уже заданному магическому квадрату по некоторому правилу добавляют дополнительные строки и столбцы так, чтобы получить новый магический квадрат большего порядка; методы составления магического квадрата и методы, использующие один или два вспомогательных квадрата. Следует отметить, что все известные алгоритмы построения позволяют конструировать лишь незначительное число (относительно общего числа квадратов заданного порядка) различных магических квадратов, так индийский метод и метод альфила позволяют получить лишь 1 магический квадрат заданного порядка; обобщенный индийский метод – n различных квадратов; метод Москопула – n^2; самым эффективным в этом плане методом, по видимому, является метод Делаира, позволяющий построить довольно много различных магических квадратов нечетного порядка [3].

В данной статье автор строит и обосновывает новый алгоритм построения полумагических квадратов произвольного нечетного порядка.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Прежде всего введем используемые далее обозначения и понятия. Множество квадратных матриц $n \times n$ элементами которых являются числа от 1 до n^2 без повторений будем обозначать $\mathbf{M}(n)$.

Определение 1. Матрицу $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{M}(n)$ такую, что $b_{i,j} = n(i-1) + j$ будем называть базовой, $i, j = \overline{1, n}$.

Определение 2. Набор $\alpha = \{b_{1,j_1}\, b_{2,j_2} \ldots b_{n,j_n}\}$ из n элементов базовой матрицы B_n, где $(j_1\, j_2 \ldots j_n)$ является перестановкой $(1\, 2 \ldots n)$, будем называть подходящим набором.

Заметим, что всего существует $n!$ различных подходящих наборов. Действительно, каждый подходящий набор однозначно определяется соответствующей ему перестановкой $(j_1\, j_2 \ldots j_n)$.

Лемма 1. *Набор* $\alpha = \{b_{j_1,1}\, b_{j_2,2} \ldots b_{j_n,n}\}$ *из* n *элементов базовой матрицы* B_n, *где* $(j_1\, j_2 \ldots j_n)$ *некоторая перестановка* $(1\ 2 \ldots n)$, *является подходящим набором.*

Доказательство. Так как $(j_1\, j_2 \ldots j_n)$ это некоторая перестановка $(1\ 2 \ldots n)$, то можно переобозначить элементы набора α таким образом, что $b_{k,i_k} := b_{j_i,i}$, если $j_i = k$. Следовательно, получим, что $\alpha = \{b_{1,i_1}\, b_{2,i_2} \ldots b_{i,i_n}\}$, где $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$ некоторая перестановка набора $(1\ 2 \ldots n)$, но это и означает, что α является подходящим набором. □

Определение 3. Совокупность Ω из n подходящих наборов $\alpha_1 = \{b_{1,j_1^1}\, b_{2,j_2^1} \ldots b_{n,j_n^1}\}$, $\alpha_2 = \{b_{1,j_1^2}\, b_{2,j_2^2} \ldots b_{n,j_n^2}\}$,..., $\alpha_n = \{b_{1,j_1^n}\, b_{2,j_2^n} \ldots b_{n,j_n^n}\}$ называется покрывающей, если не существует элемента $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n принадлежащего сразу двум различным подходящим наборам данной совокупности.

Заметим, что так как покрывающая совокупность состоит из n подходящих наборов по n элементов, то данное определение можно трактовать как распределение всех элементов базовой матрицы B_n по наборам так, что в каждой строке и столбце будет лишь один элемент из каждого набора совокупности Ω.

Определение 4. Матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbf{M}(n)$ называется полумагическим квадратом, если $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{j,i} = \Sigma(n)$ для всех $i = \overline{1,n}$.

Утверждение 1. *Магическое число удовлетворяет следующему соотношению* $\Sigma(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$

Доказательство. Так как по определению магического числа суммы элементов каждой строки магического квадрата равны $\Sigma(n)$, а значит и между собой, то для определения его значения достаточно сложить все элементы данной матрицы и разделить на количество строк в матрице:

$$\Sigma(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n^2} j = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

□

Лемма 2. *Матрица* $A \in \mathbf{M}(n)$, *каждая строка и каждый столбец которой состоит из элементов подходящих наборов базовой матрицы* B_n, *является полумагическим квадратом.*

Доказательство. Возьмем произвольную строку данной матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ и рассмотрим сумму ее элементов $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$. Так как совокупность элементов данной строки $\{a_{i,1}\, a_{i,2} \ldots a_{i,n}\}$ является некоторым подходящим набором базовой матрицы B_n, то существует перестановка $(j_1\, j_2 \ldots j_n)$ набора $(1\ 2 \ldots n)$ такая, что $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n b_{i,j_i}$.

Учитывая, что $b_{i,j_i} = n(i-1) + j_i$, получаем $\sum_{i=1}^n b_{i,j_i} = \sum_{i=1}^n [n(i-1) + j_i] = n\sum_{i=1}^n (i-1) + \sum_{i=1}^n j_i = n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}[n^2 - n + n + 1] = \frac{n(n^2+1)}{2} = \Sigma(n)$.

Аналогично для столбцов. Таким образом, сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы A равна магическому числу $\Sigma(n)$, откуда и следует, что искомый результат. □

Определение 5. Две покрывающие совокупности Ω и Π называются совместимыми, если для каждой пары подходящих наборов $\alpha \in \Omega, \beta \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n такой, что $\alpha \cap \beta = b_{i,j}$.

Утверждение 2. *Пусть $n = 2k+1$, где k — некоторое натуральное число, тогда для базовой матрицы B_n справедливо следующие соотношение:* $\sum_{j=1}^{2k+1} b_{k+1,j} = \sum_{i=1}^{2k+1} b_{i,k+1} = \Sigma(n)$

Доказательство. Рассмотрим центральную строку базовой матрицы B_n: $\sum_{j=1}^{2k+1} b_{k+1,j} = \sum_{j=1}^{2k+1}[(2k+1)(k+1-1)+j] = (2k+1)^2k + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1) \times (2k^2+k+k+1) = (2k+1)\frac{4k^2+4k+1+1}{2} = \{n = 2k+1\} = n\frac{n^2+1}{2} = \Sigma(n)$.

Рассмотрим центральный столбец базовой матрицы B_n: $\sum_{i=1}^{2k+1} b_{i,k+1} = \sum_{i=1}^{2k+1}[(2k+1)(i-1)+k+1] = (2k+1)[\frac{(2k+1)2k}{2}+k+1] = (2k+1)[2k^2]+k+k+1 = \frac{2k+1}{2}[(2k+1)^2+1] = \{n = 2k+1\} = n\frac{n^2+1}{2} = \Sigma(n)$.

□

Алгоритм построения полумагического квадрата. Приведенный ниже алгоритм построения полумагических квадратов произвольного нечетного порядка основывается на результатах, приведенных в предыдущем параграфе, и позволяет легко выделить в полученном наборе квадратов магические.

Алгоритм. *Для построения матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbf{M}(n)$, являющейся полумагическим квадратом нечетного порядка n, достаточно выполнить следующую последовательность действий:*

(i) Построить две совместимые покрывающие совокупности Ω и Π.

(ii) Пронумеровать подходящие наборы каждой из покрывающих совокупностей от 1 до n: $\alpha_i \in \Omega, i = \overline{1,n}$, $\beta_j \in \Pi, j = \overline{1,n}$.

(iii) Взять две произвольные перестановки $(j_1\ j_2\ \dots\ j_n)$ и $(i_1\ i_2\ \dots\ i_n)$ набора $(1\ 2\ \dots\ n)$ (для удобства их можно записать напротив строк и столбцов конструируемой матрицы).

(iv) Заполнить ячейки конструируемой матрицы так, что каждый ее элемент $a_{t,p}$ определяется следующим соотношением: $a_{t,p} = \alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$.

Доказательство. Для доказательства справедливости данного алгоритма, то есть того, что он выполним и приводит к получению матрицы, являющейся полумагическим квадратом, необходимо показать возможность выполнения каждого из пунктов алгоритма и показать, что матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ удовлетворяет определению 4.

1) Покажем, что для любого нечетного натурального n существует две совместимые покрывающие совокупности Ω и Π. Для построения подобного примера достаточно применить схему построения вспомогательных квадратов Делаира [3]. Каждый из полученных, согласно данной схемы, двух вспомогательных квадратов, заполненных в каждой строчке числами из полной системы наименьших неотрицательных вычетов по модулю n, необходимо сопоставить с базовой матрицей B_n, следующим образом: в набор α_k совокупности Ω входят такие элементы $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n, что в соответствующей ячейки первого вспомогательного квадрата находится число k. Аналогично строятся наборы совокупности Π по второму вспомогательному квадрату. Из свойств вспомогательных квадратов Делаира следует, что наборы совокупностей Ω и Π являются подходящими, а сами совокупности — совместимыми покрывающими.

2-3) Пункты два и три, очевидно, выполнимы всегда.

4) Так как совокупности Ω и Π являются совместимыми покрывающими, то, согласно определению 5, для любых подходящих наборов $\alpha_{i_t} \in \Omega, \beta_{j_p} \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{i,j} = \alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$. Присвоим его значение элементу $a_{t,p}$ искомой матрицы A. Выполнив данную процедуру для каждой пары подходящих наборов совокупностей Ω и Π получим n^2 различных элементов базовой матрицы B_n, полностью заполняющих матрицу A. Таким образом, $A \in \mathbf{M}(n)$.

Рассмотрим произвольную строку t полученной выше матрицы A. Все элементы данной строки находятся из соотношений $\alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$. Отсюда следует, что каждый элемент строки t матрицы A принадлежит подходящему набору α_{i_t}, при этом все они различны и всего их n. Значит, элементы строки t матрицы A образуют подходящий набор α_{i_t}. Таким образом, получили, что строки матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Ω. Аналогично получаем, что столбцы матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Π. Тогда из леммы 2 непосредственно следует, что построенная выше матрица A является полумагическим квадратом.

□

Замечание 1. Следует отметить, что ограничение в условиях применимости алгоритма на четность n связано лишь с возможностью построения совместимых покрывающих совокупностей в общем виде. Так, если для нечетного n построенные вспомогательные квадраты в рамках метода Делаира можно трансформировать в искомые покрывающие совокупности подходящих наборов, то для четного n математическая теория магических квадратов подобных результатов не содержит, автору же, на данный момент, построить искомые совокупности в общем виде не удалось.

Замечание 2. Легко видно, что для каждой пары совместимых покрывающих совокупностей построенный алгоритм дает $(n!)^2$ различных (с точностью до поворотов и отражений) полумагических квадратов. При этом важно отметить, что, вообще говоря, подобных совместимых покрывающих совокупностей при $n > 3$ существует более одной (вычисление точного количества таких пар должно будет входить в дальнейшие исследования автора данной статьи).

Так как магический квадрат отличается от полумагического дополнительными условиями на сумму элементов по главной и побочной диагоналям, то конструкция алгоритма, построенного в данном параграфе, позволяет рассчитывать на получение нового метода конструирования магических квадратов при дальнейших исследований в данной тематике. Тем не менее, уже на данном этапе используя лишь две дополнительные проверки на сумму элементов по диагоналям можно легко получить значительное количество магических квадратов произвольного порядка. Ниже приведены примеры построения магических квадратов порядка 4, а также дополнительные соображения используемые при построении магических квадратов как четного, так и нечетного порядков.

Примеры применения алгоритма к построению магических квадратов. Структура построенного нами алгоритма позволяет успешно использовать вычислительную технику для получения искомых результатов. Рассмотрим для начала матрицы порядка 4. Как было замечено ранее, для квадратов порядка 4 существует $4! = 24$ различных подходящих наборов. Путем направленного перебора нами установлено, что из них можно составить всего 12 различных пар совместимых покрывающих совокупностей. Таким образом, построенный нами алгоритм дает $12 \cdot (4!)^2 = 6912$ полумагических квадрата (среди которых 864 различных, учитывая повороты и отражения). Проверяя сумму элементов на диагоналях построенных матриц, при помощи вычислительной техники, нами установлено, что

среди построенных полумагических квадратов 192 магических. На рисунке 3 приведен базовый квадрат B_4, на рисунке 4 — пара совместимых покрывающих совокупностей Ω_4 и Π_4 и, наконец, на рисунке 5 приведен пример одного из магических квадратов соответствующего Ω_4 и Π_4.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 3: базовый квадрат B_4

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Рис. 4: совместимые покрывающие совокупности Ω_4 и Π_4

На рисунке 4 цифрами обозначены номера подходящих наборов совокупностей Ω_4 и Π_4. Таким образом, сопоставляя рисунки 3–4 получаем следующий список подходящих наборов:

Ω_4: $\alpha_1 = (1\ 6\ 11\ 16)$, $\alpha_2 = (2\ 5\ 12\ 15)$, $\alpha_3 = (3\ 8\ 9\ 14)$ и $\alpha_4 = (4\ 7\ 10\ 13)$.

Π_4: $\beta_1 = (1\ 8\ 10\ 15)$, $\beta_2 = (2\ 7\ 9\ 16)$, $\beta_3 = (3\ 6\ 12\ 13)$ и $\beta_4 = (4\ 5\ 11\ 14)$.

На рисунке 5 по кромке построенного магического квадрата записан порядок номеров подходящих наборов совокупностей Ω_4 и Π_4.

4	2	1	3	
11	16	1	6	1
5	2	15	12	2
14	9	8	3	3
4	7	10	13	4

Рис. 5: магический квадрат

Таким образом, не взирая на то, что в общем случае сконструированный алгоритм обоснован только для нечетного n, в случае, если мы смогли построить пару совместимых покрывающих совокупностей, то пункты алгоритма (ii)-(iv) приводят к полумагическим квадратам соответствующего порядка. При этом для нахождения магического квадрата четного порядка придется перебрать некоторое количество вариантов, зависящих от порядка расположения подходящих наборов в строках и столбцах таблицы.

При построении магических квадратов нечетного порядка $n = 2k + 1$ можно существенно уменьшить вариативную часть. Построив пару совместимых покрывающих совокупностей Ω_{2k+1} и Π_{2k+1}, вместо перебора перестановок порядка подходящих наборов в строках и столбцах (до такого варианта при котором главная и побочная диагонали будут равны $\Sigma(n)$), можно расставить по одной из диагоналей элементы $k + 1$ строки (или $k + 1$ столбца) базовой матрицы B_{2k+1}, так как согласно утверждению 2 сумма элементов данной строки (столбца) равны магическому числу $\Sigma(n)$. Следовательно, для того чтобы проверить является ли построенный полумагический квадрат магическим достаточно сравнить сумму элементов второй диагонали с $\Sigma(n)$. Перебор при помощи вычислительных средств построенных таким образом полумагических квадратов порядка 13 показал, что из 1 325 381 659 сконструированных матриц 506 938 769 оказалась магическими квадратами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гутерман А. Э. Алгебра полумагических матриц и ее длина/ А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, С. Д. Сочнев// Зап.научн.сем.ПОМИ. – 2013 – Т. 419 – С. 52–76
2. Ollerenshaw K. Magic Squares of Order Four/ K. Ollerenshaw, H. Bondi// Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Mathematical and Physical Sciences. Royal Society – 1982 – V. 306 № 1495 – pp. 443–532
3. Постников М. М. Магические квадраты/ М. М. Постников. – Москва: издательство "Наука математическая библиотечка, 1964 – 84 с.
4. B. F. de Bessey. Des quarrez ou tables magiques/ Bernard Frenicle de Bessey. – Imp.Royale, 1693
5. Benson W. H. New Recreations With Magic Squares/ W. H. Benson, O. Jacoby// Dover Pubns – 1976 – 198 pp.
6. Gardner M. Mathematical Games/ M. Gardner// Scientific American – January 1976 – V. 234 – p. 118–122
7. Pinn K. Number of magic squares from paralel tempering Monte Carlo/ K. Pinn, C. Wieczerkowski// International Journal of Modern Physics C. – 1998 – V. 09№ 04 – p. 541–546

Поступила в редакцию 14.05.2020 г.

ABOUT MAGIC SQUARES'S CONSTRUCTION

A. Yu. Ivanov, A.-V. V. Melnik

In the article, the author consider the history of mathematical investigations the theory of magic squares, and create new method of the semimagic squares construction an arbitrary odd order.

Keywords: Magic square, semimagic square,permutation, magic constant.

Иванов Александр Юрьевич
кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
Ivanov.Alexander.Iurievich@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
+38-071-3735144

Ivanov Alexandr Jurievich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National University, Donetsk

Мельник Анна-Валентина Валентиновна
кандидат технических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
Anna-Valentina@yandex.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра прикладной математики и теории систем управления
+38-071-3735145

Melnik Anna-Valentina Valentinovna
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Donetsk National University, Donetsk

УДК 539.3

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ О СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ В ПЛАСТИНКЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

© 2020. ***С. А. Калоеров***

Приведены точные аналитические решения задач для пластинки с эллиптическим отверстием для случая сосредоточенных воздействий во внутренних точках. При этом после преобразований граничные условия записываются в одной из плоскостей обобщенных комплексных переменных и к ним применяются методы интегралов типа Коши. Впервые рассмотрен и случай, когда сосредоточенное воздействие приложено к точкам контура отверстия, а также а также переход отверстия в прямолинейный разрез-трещину.

Ключевые слова: анизотропная или электромагнитоупругая пластинка с отверстием или трещиной, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши.

Введение. К настоящему времени разработаны различные методы определения напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин и электроупругого состояния пластин из пьезоматериалов. Поэтому актуальна задача исследования достоверности получаемых различными методами значений характерных величин, в частности напряжений и деформаций. Следовательно, нужно иметь точные решения задач, с которыми могут сравниваться получаемые новыми методами значения величин. Но точные аналитические решения для многосвязных сред получить невозможно, а для односвязных областей они получены лишь для случая действия простейших нагрузок на бесконечности или на контуре отверстия, для анизотропной пластинки в работе [1], для пьезопластинки в работах [2, 3]. Для наиболее же реального сосредоточенного воздействия точные решения отсутствуют.

В данной статье построены решения задач для анизотропной пластинки с отверстием под действием сосредоточенных сил в произвольных внутренних точках области или точках контура отверстия, включая случай, когда это отверстие переходит в прямолинейную трещину. Решении основано на записи граничных условиях в каждой из двух плоскостей обобщенных комплексных переменных и применении к ним вычислении интегралов типа Коши для точек вне контура. Аналогичные точные решения получены для случаев задачи электромагнитоупругости.

Решение для анизотропной пластинки. Рассмотрим анизотропную пластинку, занимающую бесконечную односвязную область S, ограниченную эллиптическим контуром L_1 с полуосями a_1 и b_1. На бесконечности и по контуру отверстия пластинка не загружена, во внутренней точке $z_1^0(x_1^0, y_1^0)$ области S действует сосредоточенная сила $P_1^0(X_1^0, Y_1^0)$.

Решение задачи по исследованию напряженно-деформированного состояния пластинки будем проводить с использованием комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости анизотропного тела. В этом случае рассматриваемая задача сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$ $(k = \overline{1, 2})$ обобщенных комплексных переменных [1]

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{1}$$

где μ_k — корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu_3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \tag{2}$$

 © Калоеров С. А., 2020

a_{ij} — коэффициенты деформаций материала пластинки, из граничных условий

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2} g_{ik1}\Phi_k(t_k) = 0, \tag{3}$$

в которых

$$(g_{1k1}, g_{2k1}) = (1, -\mu_k)$$

в случае неподкрепленного контура отверстия L_1 и

$$(g_{1k1}, g_{2k1}) = (p_k, q_k),$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu + a_{12}, \quad q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k},$$

если контур L_1 жестко подкреплен.

Функции $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (1) и ограниченных контурами L_{k1}, соответствующими контуру L_k при этих преобразованиях. Исходя из общего вида этих функций [4, 5], для них в данном случае получаем

$$\Phi_k(z_k) = A_{k1}^0 \ln\left(z_k - z_{k1}^0\right) + \Phi_{0k}(z_k), \tag{4}$$

где A_{k1}^0 — известные постоянные, получаемые из решения системы

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}(1,\ \mu_k,\ p_k,\ q_k)iA_{k1}^0 = \left(\frac{Y_1^0}{2\pi}, -\frac{X_1^0}{2\pi}, 0, 0\right); \tag{5}$$

$\Phi_{0k}(z_k)$ — функции, голоморфные вне контуров L_{k1}, и для их определения используем метод интегралов типа Коши.

Граничные условия (3) в силу симметричности относительно функций перепишем в виде

$$g_{1k1}\Phi_k(t_k) + g_{1k+1,1}\Phi_{k+1}(t_{k+1}) = -\overline{g}_{1k1}\overline{\Phi_k(t_k)} - \overline{g}_{1k+1,1}\overline{\Phi_{k+1}(t_{k+1})},$$

$$g_{2k1}\Phi_k(t_k) + g_{2k+1,1}\Phi_{k+1}(t_{k+1}) = -\overline{g}_{2k1}\overline{\Phi_k(t_k)} - \overline{g}_{2k+1,1}\overline{\Phi_{k+1}(t_{k+1})},$$

в котором k — индекс, принимающий значения 1 и 2, причем значение индекса $k+1$ при $k = 2$ нужно формально считать равным 1. Решая эту систему относительно функций $\Phi_k(t_k)$, получаем

$$\Phi_k(t_k) = -\overline{r}_{1k}\overline{\Phi_k(t_k)} - \overline{r}_{2k+1}\overline{\Phi_{k+1}(t_{k+1})}, \tag{6}$$

где

$$\overline{r}_{1k} = \frac{\overline{g}_{1k1}g_{2k+1,1} - \overline{g}_{2k1}g_{1k+1,1}}{g_{1k1}g_{2k+1,1} - g_{2k1}g_{1k+1,1}}, \quad \overline{r}_{2k+1} = \frac{\overline{g}_{1k+1,1}g_{2k+1,1} - \overline{g}_{2k+1,1}g_{1k+1,1}}{g_{1k1}g_{2k+1,1} - g_{2k1}g_{1k+1,1}} \tag{7}$$

Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geqslant 1$ на внешности контуров L_{k1} [4, 5]:

$$z_k = R_{k1}\left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}}\right), \tag{8}$$

где

$$R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{2R_{k1}}.$$

Тогда функции $\Phi_{0k}(z_k)$, голоморфные вне L_{k1}, как сложные функции от ζ_{k1}, будут голоморфными вне единичного круга $|\zeta_{k1}| \geqslant 1$, включая бесконечно удаленную точку. В отображенной области функции (4) принимают вид

$$\Phi_k(z_k) = A^0_{k1} \ln\left(\zeta_{k1} - \zeta^0_{k1}\right) + \Phi_{0k}(\zeta_{k1}), \tag{9}$$

в котором ζ^0_{k1} — точки, соответствующие z^0_{k1} при конформных отображениях (8); $\Phi_{0k}(\zeta_{k1})$ — функции, голоморфные в отображенных областях вне единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geqslant 1$. На контурах этих кругов $\zeta_{k1} = \sigma = e^{i\theta}$, где θ — параметр параметрического задания эллипса. Учитывая это и подставляя функции (9) в граничные условия (6), получаем

$$A^0_{k1} \ln\left(\sigma - \zeta^0_{k1}\right) + \Phi_{0k}(\sigma) = -\sum_{j=1}^{2} \overline{r}_{j,k+j-1} \left(\overline{A}^0_{k+j-1,1} \ln\left(\frac{1}{\sigma} - \overline{\zeta}^0_{k+j-1,1}\right) + \overline{\Phi_{0k+j-1}(\sigma)} \right). \tag{10}$$

Вычислив интегралы типа Коши от обеих частей последних равенств [6], с точностью до постоянных слагаемых найдем

$$\Phi_{0k}(\zeta_{k1}) = -\sum_{j=1}^{2} \overline{r}_{jk+j-1} \overline{A}^0_{k+j-1,1} \ln\left(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \overline{\zeta}^0_{k+j-1,1}\right). \tag{11}$$

Окончательно для комплексных потенциалов и их производных находим

$$\Phi_k(z_k) = A^0_{k1} \ln\left(\zeta_{k1} - \zeta^0_{k1}\right) - \overline{r}_{1k} \overline{A}^0_{k1} \ln\left(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \overline{\zeta}^0_{k1}\right) - \overline{r}_{2k+1} \overline{A}^0_{k+1,1} \ln\left(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \overline{\zeta}^0_{k+1,1}\right); \tag{12}$$

$$\Phi'_k(z_k) = \left(\frac{A^0_{k1}}{\zeta_{k1} - \zeta^0_{k1}} + \frac{\overline{r}_{1k} \overline{A}^0_{k1}}{\zeta_{k1}\left(1 - \overline{\zeta}^0_{k1}\zeta_{k1}\right)} + \frac{\overline{r}_{2k+1} \overline{A}^0_{k+1,1}}{\zeta_{k1}\left(1 - \overline{\zeta}^0_{k+1,1}\zeta_{k1}\right)} \right) \frac{\zeta^2_{k1}}{R_{k1}\left(\zeta^2_{k1} - m_{k1}\right)}. \tag{13}$$

Если сила приложена в точке контура, то $\zeta^0_{k1} = \zeta^0_{k+j-1,1} = \sigma^0_1 = e^{i\theta_1}$, $\overline{\sigma}^0_1 = e^{-i\theta_1} = \frac{1}{\sigma^0_1}$. Тогда

$$\Phi_k(z_k) = A^0_{k1} \ln\left(\zeta_{k1} - \sigma^0_1\right) - \overline{r}_{1k} \overline{A}^0_{k1} \ln\left(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \frac{1}{\sigma^0_1}\right) - \overline{r}_{2k+1} \overline{A}^0_{k+1,1} \ln\left(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \frac{1}{\sigma^0_1}\right), \tag{14}$$

$$\Phi'_k(z_k) = \left(\frac{A^0_{k1}}{\zeta_{k1} - \sigma^0_1} + \frac{\overline{r}_{1k} \overline{A}^0_{k1} \sigma^0_1}{\zeta_{k1}\left(\sigma^0_1 - \zeta_{k1}\right)} + \frac{\overline{r}_{2k+1} \overline{A}^0_{k+1,1} \sigma^0_1}{\zeta_{k1}\left(\sigma^0_1 - \zeta_{k1}\right)} \right) \frac{\zeta^2_{k1}}{R_{k1}\left(\zeta^2_{k1} - m_{k1}\right)}. \tag{15}$$

При этом в точках контура $\zeta_{k1} = \sigma = e^{i\theta}$.

По известным функциям и их производным можно найти значения напряжений и перемещений:

$$(\sigma_x,\, \sigma_y,\, \tau_{xy}) = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} (\mu^2_k,\, 1,\, -\mu_k) \Phi'_k(z_k), \tag{16}$$

$$(u,\, v) = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{2} (p_k,\, q_k) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0,\, \omega_3 x + v_0), \tag{17}$$

а в случае перехода эллипса в прямолинейную трещину — также КИН (коэффициенты интенсивности напряжений).

Решение задачи электромагнитоупругости. Пусть теперь незагруженная на бесконечности и по контуру отверстия пластинка изготовлена из пьезоматериала и во внутренней точке $z_1^0(x_1^0, y_1^0)$ приложено сосредоточенное воздействие в виде сосредоточенных силы $P_1^0(X_1^0, Y_1^0)$, электрического заряда Q_{g1}^0 и магнитного диполя Q_{p1}^0. В этом случае комплексные потенциалы имеют вид (4), а после преобразований — вид (8), где теперь A_{k1}^0 — известные постоянные, определяемые решением системы

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(1,\ \mu_k,\ \nu_k,\ \rho_k,\ p_k,\ q_k,\ r_k,\ h_k)\,iA_{k1}^0 = \left(\frac{Y_1^0}{2\pi},\ -\frac{X_1^0}{2\pi},\ -\frac{Q_{g1}^0}{2\pi},\ -\frac{Q_{p1}^0}{2\pi},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right), \quad (18)$$

ν_k, ρ_k, p_k, q_k, r_k, h_k — известные постоянные [5]; μ_k $(k = \overline{1,4})$ — корни характеристического уравнения 8-го порядка

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\
l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\
l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\
l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \\
l_{2\nu}(\mu) &= -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22}, \\
l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}.
\end{aligned}$$

s_{ij} — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ij} и p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij}, ν_{ij}, χ_{ij} — соответственно коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемостей, измеренные при постоянных напряжениях; $\Phi_{0k}(z_k)$ — как и раньше, функции, голоморфные вне эллиптических контуров L_{k1}.

Как и выше, граничные условия (3) (но теперь их уже 4 равенства) приведем к системе

$$g_{1k1}\Phi_k(t_k) + g_{1k+1,1}\Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{1k+2,1}\Phi_{k+2}(t_{k+2}) + g_{1k+3,1}\Phi_{k+3}(t_{k+3}) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{4}\overline{g}_{1,k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})},$$

$$g_{2k1}\Phi_k(t_k) + g_{2k+1,1}\Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{2k+2,1}\Phi_{k+2}(t_{k+2}) + g_{2k+3,1}\Phi_{k+3}(t_{k+3}) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{4}\overline{g}_{2,k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})},$$

$$g_{3k1}\Phi_k(t_k) + g_{3k+1,1}\Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{3k+2,1}\Phi_{k+2}(t_{k+2}) + g_{3k+3,1}\Phi_{k+3}(t_{k+3}) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{4}\overline{g}_{3,k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})},$$

$$g_{4k1}\Phi_k(t_k) + g_{4k+1,1}\Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{4k+2,1}\Phi_{k+2}(t_{k+2}) + g_{4k+3,1}\Phi_{k+3}(t_{k+3}) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{4} \overline{g}_{4k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})} \tag{20}$$

с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{1k1} & g_{1k+1,1} & g_{1k+2,1} & g_{1k+3,1} \\ g_{2k1} & g_{2k+1,1} & g_{2k+2,1} & g_{2k+3,1} \\ g_{3k1} & g_{3k+1,1} & g_{3k+2,1} & g_{3k+3,1} \\ g_{4k1} & g_{4k+1,1} & g_{4k+2,1} & g_{4k+3,1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{4} g_{ik1}M_{ik}$$

в котором M_{ik} — алгебраические дополнения элементов первого столбца g_jk1.

Решая систему (20), найдем

$$\Phi_k(t_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{4} \overline{g}_{1k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})} & g_{1k+1,1} & g_{1k+2,1} & g_{1k+3,1} \\ -\sum\limits_{j=1}^{4} \overline{g}_{2k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})} & g_{2k+1,1} & g_{2k+2,1} & g_{2k+3,1} \\ -\sum\limits_{j=1}^{4} \overline{g}_{3k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})} & g_{3k+1,1} & g_{3k+2,1} & g_{3k+3,1} \\ -\sum\limits_{j=1}^{4} \overline{g}_{4k+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})} & g_{4k+1,1} & g_{4k+2,1} & g_{4k+3,1} \end{vmatrix}$$

или

$$\Phi_k(t_k) = -\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{4} M_{ik}g_{ik1}}\left(\sum_{i=1}^{4} M_{ik}\overline{g}_{ik1}\overline{\Phi_k(t_k)} + \sum_{i=1}^{4} M_{ik}\overline{g}_{ik+1,1}\overline{\Phi_{k+1}(t_{k+1})} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{4} M_{ik}\overline{g}_{ik+2,1}\overline{\Phi_{k+2}(t_{k+2})} + \sum_{i=1}^{4} M_{ik}\overline{g}_{ik+3,1}\overline{\Phi_{k+3}(t_{k+3})}\right) =$$

$$= -\frac{\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{4} M_{ik}\overline{g}_{ik+j-1,1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})}}{\sum\limits_{i=1}^{4} M_{ik}g_{ik1}}. \tag{21}$$

Окончательно имеем

$$\Phi_k(t_k) = -\sum_{j=1}^{4} \overline{r}_{jk+j-1}\overline{\Phi_{k+j-1}(t_{k+j-1})}, \tag{22}$$

где

$$\overline{r}_{jk+j-1} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{4} M_{ik}\overline{g}_{ik+j-1,1}}{\sum\limits_{i=1}^{4} M_{ik}g_{ik1}}. \tag{23}$$

Подставляя комплексные потенциалы (9) в граничные условия (21) и применяя метод интегралов типа Коши [6], получим

$$\Phi_k(z_k) = A^0_{k1}\ln(\zeta_{k1} - \zeta^0_{k1}) - \sum_{j=1}^{4}\overline{r}_{jk+j-1}\overline{A}^0_{k+j-1,1}\ln(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \overline{\zeta}^0_{k+j-1,1}); \tag{24}$$

$$\Phi'_k(z_k) = \left(\frac{A^0_{k1}}{\zeta_{k1} - \zeta^0_{k1}} + \sum_{j=1}^{4}\frac{\overline{r}_{jk+j-1}\overline{A}^0_{k+j-1,1}}{\zeta_{k1}\left(1 - \overline{\zeta}^0_{k+j-1,1}\zeta_{k1}\right)}\right)\frac{\zeta^2_{k1}}{R_{k1}\left(\zeta^2_{k1} - m_{k1}\right)}. \tag{25}$$

Если точка приложения внешнего воздействия расположена на контуре, то

$$\Phi_k(z_k) = A^0_{k1}\ln(\zeta_{k1} - \sigma^0_1) - \sum_{j=1}^{4}\overline{r}_{jk+j-1}\overline{A}^0_{k+j-1,1}\ln(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \frac{1}{\sigma^0_1}); \tag{26}$$

$$\Phi'_k(z_k) = \left(\frac{A^0_{k1}}{\zeta_{k1} - \sigma^0_1} + \sum_{j=1}^{4}\frac{\overline{r}_{jk+j-1}\overline{A}^0_{k+j-1,1}\sigma^0_1}{\zeta_{k1}\left(\sigma^0_1 - \zeta_{k1}\right)}\right)\frac{\zeta^2_{k1}}{R_{k1}\left(\zeta^2_{k1} - m_{k1}\right)}. \tag{27}$$

По известным функциям и их производным можно найти значения всех ос-новных характеристик электромагнитоупругого состояния, а в случае пе-рехода эллипса в прямолинейную трещину — также КИНИН (коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей поля) (в частном случае КИН), используя известные формулы [7]. Для КИНИН можно найти выражения, также исследуя особенности функций в концах трещины. Пусть $b_l = 0$. Тогда

$$R_{k1} = \frac{a_1}{2}, \quad m_{k1} = 1, \quad \frac{1}{\zeta_{k1}} = \frac{z_k \mp \sqrt{z_k^2 - 4R^2_{k1}m_{k1}}}{2R_{k1}m_{k1}},$$

где знак перед корнем выбирается из условия, что $|\zeta_{k1}| \geqslant 1$. Тогда

$$\frac{1}{R_{k1}\left(\zeta^2_{k1} - m_{k1}\right)} = \pm\frac{z_k \mp \sqrt{z_k^2 - a_1^2}}{a_1\sqrt{z_k^2 - a_1^2}} + O(1) =$$
$$\pm\frac{a_1 \pm z_k^*}{a_1\sqrt{2a_1 z_k^*}} + O(1) = \pm\frac{1}{\sqrt{2a_1 z_k^*}} + O(1).$$

Следовательно,

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{M_{k1}}{\sqrt{2z_k^*}},$$

где

$$M_{k1} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \left(\frac{A^0_{k1}}{\pm 1 - \sigma^0_1} \pm \sum_{j=1}^{4} \frac{\overline{r}_{jk+j-1} \overline{A}^0_{k+j-1,1} \sigma^0_1}{\sigma^0_1 \mp 1} \right),$$

и получим значения КИНИН, например, $k_1^{\pm}$ и $k_2^{\pm}$ найдем

$$k_1^{\pm} = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} M_{k1}, \quad k_2^{\pm} = -2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \mu_k M_{k1}.$$

Знаки $+$ и $-$ относятся к правому и левому концам разреза соответственно. Если сосредоточенное воздействие приложено в центре трещины, то $\zeta^0_{k1} = i$, $\overline{\zeta}^0_{k1} = \overline{\zeta}^0_{k+j-1,1} = -i$. Тогда

$$M_{k1} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \left(\frac{A^0_{k1}}{\pm 1 - i} + \sum_{j=1}^{4} \frac{\overline{r}_{jk+j-1} \overline{A}^0_{k+j-1,1}}{1 + i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a_1}} \left(A^0_{k1} (\pm 1 + i) + (\pm 1 - i) \sum_{j=1}^{4} \overline{r}_{jk+j-1} \overline{A}^0_{k+j-1,1} \right).$$

и с использованием соотношений (18) находятся значения КИНИН. Так, если в центре трещины приложена сосредоточенная вертикальная сила, то $P^0_1(0, Y^0_1)$ и для КИН $k_1^{\pm}$ получаем известное значение $Y^0_1/2\pi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго–Восток, 2007. – 268 с.
3. Калоеров С. А., Петренко А. В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго–Восток, 2011. – 232 с.
4. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45-56.
5. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – 1998. – С. 8–26. – (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
7. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

Поступила в редакцию 03.06.2020 г.

THE EXACT SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ELACTICITY AND ELECTRO-MAGNETO-ELASTICITY ON THE CONCENTRATED ACTIONS IN THE PLATE WITH ELLIPTIC HOLE

S. A. Kaloerov

The exact analytical solution to the problems for a plate with elliptic hole under concentrated action in the interior point are given. After the transformations the boundary conditions are given in one of the domains of generalized complex variables and are applied with Cauchy-type integral method. For the first time the case is

considered when the concentrated action is applied in the point of the hole's contour along with transformation of the hole into the rectilinear cut (crack).

Keywords: anisotropic or electro-magneto-elastic plate with a hole or a crack, complex potentials, Cauchy-type integrals.

Калоеров Стефан Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
kaloerov@mail.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра теории упругости и вычислительной математики имени академика А. С. Космодамианского

Kaloerov Stefan Alekseevich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Full Professor
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.983.36

О НУЛЯХ СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫХ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА НЕКВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2020. ***Д. В. Лиманский***

Получены свойства множества нулей символов неквазиэллиптической системы минимальных дифференциальных полиномов, слабо коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$.

***Ключевые слова*:** дифференциальный оператор, априорная оценка, квазиэллиптичность, слабая коэрцитивность, пространство Соболева.

Введение.

Пусть $l := (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$. Рассмотрим в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ систему дифференциальных полиномов вида

$$P_j(D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha} D^\alpha, \qquad j \in \{1, \dots, N\}, \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{j\alpha} \in \mathbb{C}$. Пусть, далее, $P^l_j(D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha} D^\alpha$ — l-главная часть оператора $P_j(D)$, а $P^l_j(\xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}\xi^\alpha$ — его главный l-квазиоднородный символ.

Напомним следующие определения.

Определение 1. [1, 2] Систему дифференциальных операторов вида (1) называют *l-квазиэллиптической*, если

$$(P^l_1(\xi), \dots, P^l_N(\xi)) \neq (0, \dots, 0), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

и, в частности, *эллиптической* порядка l, если $l_1 = \dots = l_n = l$.

Определение 2. [1] Система дифференциальных полиномов вида (1) называется *коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\mathring{W}^l_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W^l_p(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2}$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$.

Хорошо известно [1] – [4], что система (1) l-квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в $\mathring{W}^l_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка (2) для l-квазиэллиптической системы утрачивает силу (см. [5, 6]). Тем не менее для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(D)\}^N_1$ верна более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

при $p \in (1, \infty)$ вытекающая из оценки (2), а при $p = \infty$ доказанная в [5].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [7] определение.

 © Лиманский Д. В., 2020

Определение 3. [7] Систему дифференциальных полиномов вида (1) называют *слабо коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\mathring{W}^l_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка (3), в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

В случае изотропного пространства Соболева $\mathring{W}^l_p(\mathbb{R}^n)$, т. е. при $l_1 = \cdots = l_n = l$, неравенство $|\alpha : l| < 1$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая одного оператора еще ранее де Лю и Миркил [6] показали, что при $n \geqslant 3$ эллиптичность оператора $P(D) = P_1(D)$ порядка $l \geqslant 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в изотропном пространстве Соболева $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$. Ряд критериев, обобщающих теорему де Лю и Миркила, для систем операторов, слабо коэрцитивных в изотропном пространстве $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$, был получен автором и М. М. Маламудом в [7].

Обратимся теперь к анизотропному случаю. В работе автора [8] рассматривался случай одного оператора $P(D_1, D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух переменных с l-квазиоднородной главной частью, $l = (l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$. Для такого оператора был доказан аналог теоремы де Лю и Миркила в случае, когда l_1 не делится на l_2. В случае же, когда l_1 кратно l_2, в [8] был построен пример широкого класса слабо коэрцитивных в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, но не l-квазиэллиптических операторов. Там же попутно было доказано следующее важное свойство множества нулей символа слабо коэрцитивного в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$ неквазиэллиптического оператора.

Предложение 1. [8, 9] *Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$ и оператор $P(D)$ вида*

$$P(D) = \sum_{|\alpha : l| \leqslant 1} a_\alpha D^\alpha \tag{4}$$

слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда:

(i) $a_{l_1,0} \neq 0$, *т. е.* $P^l(1, 0) \neq 0$;

(ii) *если к тому же l_2 не является делителем l_1, то $a_{0,l_2} \neq 0$, т. е.* $P^l(0, 1) \neq 0$.

Для вектора $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, не нарушая общности, можно считать, что $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n$. Разобьем числа $l_1, \ldots, l_n$ на m групп, отнеся в k-ю группу все равные между собой числа. Пусть в k-й группе n_k чисел, $\sum\limits_{j=1}^{m} n_j = n$. Обозначим также $u_0 := 0$, $u_k := \sum\limits_{j=1}^{k} n_j$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, так что в k-ю группу входят числа $l_{u_{k-1}+1}, \ldots, l_{u_k}$. Тогда $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму координатных подпространств

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_m, \qquad \text{где} \quad E_k := \operatorname{span}\{\xi_{u_{k-1}+1}, \ldots, \xi_{u_k}\}. \tag{5}$$

В работах автора [10, 11] были получены критерии слабой коэрцитивности системы операторов вида (1) в анизотропном пространстве $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ в терминах ее l-квазиэллиптичности, используя сужения этих операторов $\{P_j \lceil E_k\}_1^N$ на координатные подпространства $\{E_k\}_1^m$ вида (5).

Основными результатами настоящей работы являются следующие две теоремы, описывающие свойства множества нулей полных и l-главных символов слабо коэрцитивных в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ систем дифференциальных полиномов.

Теорема 1. *Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, причем $l_j \geqslant 2$ для всех $j \in \{1, \ldots, n\}$, и система $\{P_j(D)\}_1^N$ дифференциальных операторов вида (1) с постоянными коэффициентами слабо коэрцитивна в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Тогда множество совместных нулей

$$\mathcal{N} := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ P_j(\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad j \in \{1, \dots, n\}\} \tag{6}$$

ее полных символов компактно.

Теорема 2. *Пусть* $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $l_1 \geqslant \dots \geqslant l_n$ *и* $l_1 > l_n$; *числа* $\{n_j\}_1^m$, $\{u_k\}_0^m$ *и координатные подпространства* $\{E_k\}_1^m$ *те же, что и выше. Пусть также оператор* $P(D)$ *вида* (4) *слабо коэрцитивен в* $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$, *но не* l*-квазиэллиптичен.*

Тогда его l*-главный символ* $P^l(\xi)$ *может обращаться в нуль лишь в точках* n_m*-мерного подпространства* $E_m = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \xi_1 = \dots = \xi_{u_{m-1}} = 0\}$. *Другими словами, множество нулей* l*-главного символа* $P^l(\xi)$ *содержится в* E_m.

Отметим, что теорема 2 является обобщением предложения 1.

Обозначения и вспомогательные утверждения.

Обозначения. Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно действительных, целых, натуральных и комплексных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $D := (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагают $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, то $|\alpha : l| := \dfrac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \dfrac{\alpha_n}{l_n}$. Пусть также $\langle x, y\rangle := \sum\limits_{k=1}^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Для вектора $r = (r_1, \dots, r_n)$ через $r\lceil E$ обозначим его сужение на координатное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$. Для натуральных чисел $m, n, \dots, p$ обозначим через $[m, n, \dots, p]$ их наименьшее общее кратное.

Далее, через $\|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ обозначим $n \times n$-матрицу с элементами a_{jk}, через $\det \|a_{jk}\|$ — ее определитель; $C_n^m := \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент. Для чисел $m_1, \dots, m_n$ их определитель Вандермонда будет обозначаться через $W(m_1, \dots, m_n)$.

Для дифференциального полинома $P(D) = \sum\limits_{|\alpha:l| \leqslant 1} a_\alpha D^\alpha$ обозначим через $P(\xi) = \sum\limits_{|\alpha:l| \leqslant 1} a_\alpha \xi^\alpha$ его символ, через $P^l(\xi) = \sum\limits_{|\alpha:l| = 1} a_\alpha \xi^\alpha$ — его l-главный (главный l-квазиоднородный) символ. Для координатного подпространства $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $(P\lceil E)(\xi)$ сужение на E символа $P(\xi)$ оператора $P(D)$, а сужение на E самого оператора обозначим $(P\lceil E)(D)$. Через $\operatorname{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ будет обозначаться линейная оболочка, натянутая на единичные орты координатных осей $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Через $\mathscr{M}_p = \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ будет обозначаться алгебра мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$; через $\mathscr{F} f = \widehat{f}$ — преобразование Фурье (Фурье – Стилтьеса) функции (меры) f. Замыкание множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в норме $\|f\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)} := \sum\limits_{|\alpha:l| \leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ пространства Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ обозначается как $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$. Символ $\rightrightarrows$ обозначает равномерную сходимость.

Определение 4. [12] Пусть $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки

$$f \mapsto T_\Phi f =: \mathscr{F}^{-1} \Phi \mathscr{F} f$$

отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathscr{M}_p = \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Известно полное описание этой алгебры при $p = 1, 2, \infty$ (см. [12]). Нас интересует описание алгебры $\mathscr{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее просто $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathscr{M}$.

Предложение 2. [12] *Алгебра $\mathscr{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье – Стилтьеса:*

$$\Phi \in \mathscr{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(\xi) = \widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\mu(x), \qquad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty, \tag{7}$$

т. е. каждый мультипликатор $\Phi \in \mathscr{M}$ порождается некоторой конечной мерой μ.

Следствие 1. *Функции $\Phi \in \mathscr{M}$ ограничены и равномерно непрерывны.*

Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $P(\xi) = \sum\limits_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_\alpha \xi^\alpha$ — полином от n переменных с l-квазиоднородной главной частью $P^l(\xi) = \sum\limits_{|\alpha:l|=1} a_\alpha \xi^\alpha$. Пусть $d := [l_1, \ldots, l_n]$ — наименьшее общее кратное чисел $l_1, \ldots, l_n$. Обозначим также

$$m_k := \frac{d}{l_k}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}; \qquad m := (m_1, \ldots, m_n).$$

Ясно, что натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ взаимно просты.

Соотношение $|\alpha : l| = \dfrac{\alpha_1}{l_1} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{l_n} = 1$, определяющее l-главную часть $P^l(\xi)$, можно переписать в виде $\langle \alpha, m\rangle := \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n = d$. Для всех остальных мономов ξ^α, входящих в $P(\xi)$, справедливо соотношение $\langle \alpha, m\rangle < d$.

Приведем две теоретико-числовые леммы, нужные для дальнейшего.

Лемма 1. [10] *Пусть $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}$ и $l_1 \geqslant \cdots \geqslant l_n$. Если $d = [l_1, \ldots, l_n] > l_1$, то*

$$d_1 > d - m_k, \qquad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{8}$$

где $d_1 := \max\limits_{\langle\alpha,m\rangle<d} \langle \alpha, m\rangle$.

Лемма 2. [11] *Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — произвольные натуральные числа. Тогда определитель биномиальной $n \times n$-матрицы $\mathcal{M} := \|C^j_{jm_k}\|^n_{j,k=1}$ равен*

$$\Delta := \det \mathcal{M} = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}\right] m_1 \ldots m_n\, W(m_1, \ldots, m_n), \tag{9}$$

где $W(m_1, \ldots, m_n) := \prod\limits_{j>k}(m_j - m_k)$ — определитель Вандермонда.

Приведем несколько утверждений, касающихся априорных оценок в L^∞.

Лемма 3 (Эберлейна). [6] *Пусть μ — конечная мера в $\mathbb{R}^n$ и $c = \mu(0)$. Тогда функция, тождественно равная c, равномерно приближается выпуклыми комбинациями сдвигов функции $M(\xi) := \widehat{\mu}(\xi)$, порождаемой мерой μ, т. е.*

$$\sum_{k=1}^{q} c_k M(\xi - \xi^k) \rightrightarrows c, \qquad \text{где} \quad c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{q} c_k = 1, \quad \xi^1, \ldots, \xi^q \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 3. [6] *Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные полиномы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда априорная оценка*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{10}$$

эквивалентна тождеству для их символов

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^{N} M_j(\xi)P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

где $\{M_j(\xi)\}_1^{N+1}$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 4. [5, 6] *Из справедливости априорной оценки (10) для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ вида (1) вытекает тождество*

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j P_j^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

для символов их l-главных частей $Q^l(\xi)$ и $P_j^l(\xi)$. При этом $\lambda_j = \mu_j(0)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, где μ_j — конечные борелевские меры, порождающие мультипликаторы $M_j(\xi)$, $j \in \{1, \dots, N\}$ из тождества (11), справедливого в силу предложения 3.

Определение 5. *Координатным подпространством* в $\mathbb{R}^n$ размерности $k \in \{1, \dots, n\}$ называется линейное подпространство, натянутое на единичные орты координатных осей $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant n$, т. е. подпространство вида

$$E_k = \operatorname{span}\{\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}\} = \{c_1\xi_{j_1} + \dots + c_k\xi_{j_k}, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}. \tag{13}$$

Отметим, что подпространства E_k изоморфны $\mathbb{R}^k$, поэтому вместо пространства $\mathring{W}_\infty^l(E_k)$ мы будем писать $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^k)$.

Определение 6. Пусть E_k — координатное подпространство вида (13). *Сужением вектора* $r = (r_1, \dots, r_n)$ на E_k будем называть вектор $\widetilde{r} := r\lceil E_k := (r_{j_1}, \dots, r_{j_k})$.

Сужением полинома $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ на E_k будем называть полином

$$\widetilde{P}(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}) := P(0, \dots, 0, \xi_{j_1}, 0, \dots, 0, \xi_{j_k}, 0, \dots, 0), \tag{14}$$

зависящий только от k переменных $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}$, и обозначать $\widetilde{P}(\xi) = (P\lceil E_k)(\xi)$.

Дифференциальный оператор, символом которого является полином (14), будем называть *сужением оператора* $P(D)$ на E_k и обозначать $(P\lceil E_k)(D)$.

Предложение 5. [6] *Для произвольного координатного подпространства $E_k \subset \mathbb{R}^n$ вида (13) априорная оценка (10) сохраняется при сужении всех операторов на это подпространство.*

Из предложений 3 и 5 вытекает следующее важное утверждение.

Предложение 6. *Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, то после сужения на произвольное координатное подпространство $E_k \subset \mathbb{R}^n$ вида (13) система $\{(P_j\lceil E_k)(D)\}_1^N$ остается слабо коэрцитивной в $\mathring{W}_\infty^{l'}(\mathbb{R}^k)$, где $l' = l\lceil E_k$.*

Доказательство теоремы 1.

Очевидно, множество $\mathcal{N}$ вида (6) замкнуто как прообраз нуля $0 = (0, \dots, 0)$ при непрерывном отображении $P = (P_1, \dots, P_N) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^N$. Докажем его ограниченность.

Предположим противное, т. е. что множество $\mathcal{N}$ не ограничено. Тогда найдется неограниченная последовательность точек $\xi^{(m)} = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}) \in \mathcal{N}$, $m = 1, 2, \dots$ Следовательно, найдется номер $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ такой, что последовательность $\{\xi_{j_0}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ также не ограничена.

Согласно предложению 3 и определению слабой коэрцитивности, априорная оценка вида (10), справедливая для любого дифференциального монома $Q(D) = D^\alpha$ при $|\alpha : l| < 1$, влечет тождество (11), в котором мультипликаторы $M_j(\cdot) \in \mathscr{M}$, $j \in \{1, \dots, N+1\}$ зависят от выбора α.

Выберем $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где единица стоит на j_0-й позиции, т. е. $Q(\xi) = \xi_{j_0}$ (это можно сделать, поскольку $1 < l_{j_0}$ по условию, и неравенство $|\alpha : l| = 1/l_{j_0} < 1$ выполняется). Так как функции $M_j(\cdot)$ ограничены, $|M_j(\xi)| \leqslant C$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $j \in \{1, \dots, N+1\}$, из тождества (11) при нашем выборе $Q(\xi)$ вытекает неравенство

$$|\xi_{j_0}| \leqslant C \left[\sum_{j=1}^{N} |P_j(\xi)| + 1 \right], \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Тогда, подставляя $\xi := \xi^{(m)}$ в обе части неравенства (15), в силу того, что $P_j(\xi^{(m)}) = 0$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$ и $m = 1, 2, \dots$, получим:

$$\left|\xi_{j_0}^{(m)}\right| \leqslant C, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

что противоречит неограниченности последовательности $\left\{\xi_{j_0}^{(m)}\right\}_1^{\infty}$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1, вообще говоря, перестает быть справедливой, если хотя бы одна из компонент вектора $l = (l_1, \dots, l_n)$ равна 1. В самом деле, при $N = 2$ и $n = 3$ рассмотрим систему операторов

$$P_1(D) := D_1^2, \qquad P_2(D) := D_2 + D_3. \tag{16}$$

Множество $\mathcal{N} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \ \xi_1^2 = \xi_2 + \xi_3 = 0\}$ совместных нулей ее символов представляет собой прямую и, следовательно, не ограничено. Тем не менее система (16) слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^3)$ при $l = (2, 1, 1)$. В самом деле, для мультииндекса α, удовлетворяющего неравенству $|\alpha : l| < 1$, возможны лишь два варианта: $\alpha^1 := (0, 0, 0)$ или $\alpha^2 := (1, 0, 0)$. А оба дифференциальных монома $D^{\alpha^1} = I$ и $D^{\alpha^2} = D_1$ оцениваются уже первым оператором системы D_1^2 в норме пространства L^∞.

Доказательство теоремы 2.

Поскольку оператор $P(D)$ не является l-квазиэллиптическим, существует вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такой, что $P^l(\alpha) = 0$. Ортогональными преобразованиями в пределах каждого подпространства E_k можно добиться, чтобы сужения вектора α на E_k имели вид $\alpha \lceil E_k = (0, \dots, 0, \gamma_k)$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что при таких преобразованиях слабая коэрцитивность оператора $P(D)$ в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ сохранится.

Пусть $i_1, \dots, i_s$ — индексы, для которых $\gamma_{i_j} \neq 0$ (заметим, что $s \geqslant 1$). Сузим оператор $P(D)$ на подпространство $E := \operatorname{span}\{\xi_{n_{i_1}}, \dots, \xi_{n_{i_s}}\}$. При этом суженный оператор

$(P\lceil E)(D)$ будет слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^{l'}_{\infty}(\mathbb{R}^s)$, где $l' := l\lceil E$ (см. предложение 6), а вектор $\alpha\lceil E = (\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_s})$ с ненулевыми компонентами будет нетривиальным нулем l'-главного символа $(P\lceil E)^{l'}(\xi)$.

1. Предположим, что $s \geqslant 2$. Не нарушая общности, можно считать, что для векторов $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие условия: (a) $n \geqslant 2$ и $l_1 > l_2 > \dots > l_n$; (b) $\alpha_j \neq 0$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$.

Далее, положим

$$d := [l_1, \dots, l_n], \quad m_k := \frac{d}{l_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad m := (m_1, \dots, m_n), \quad d_1 := \max_{\langle \beta, m\rangle < d} \langle \beta, m\rangle;$$

$$P^{l-1}(\xi) := \sum_{\langle \beta, m\rangle = d_1} a_\beta \xi^\beta, \quad \text{если} \quad P(\xi) = \sum_{\langle \beta, m\rangle < d} a_\beta \xi^\beta.$$

Обозначим также

$$u_k := \frac{\partial P^l}{\partial x^k}(\alpha), \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Разложим символ $P(\xi)$ в сумму

$$P(\xi) = P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots, \qquad j \in \{1, \dots, N\},$$

где многоточие соответствует сумме мономов $a_\beta \xi^\beta$, для которых $\langle \beta, m\rangle < d_1$.

Выберем дифференциальный моном $Q(D) := D^\nu = D_1^{\nu_1} \dots D_n^{\nu_n}$ с символом

$$Q(\xi) := \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\xi_k}{\alpha_k}\right)^{\nu_k}, \quad \text{где} \quad \langle \nu, m\rangle = d_1.$$

Он обладает очевидными свойствами: $Q(\alpha) = 1$ и $Q(t\xi) \equiv t^{d_1} Q(\xi)$, где $t > 0$.

В силу слабой коэрцитивности оператора $P(D)$ в $\mathring{W}^{l}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, справедлива априорная оценка (10), которая, ввиду предложения 3, равносильна тождеству

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi) = M(\xi)\left[P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots\right] + N(\xi), \tag{17}$$

где $M(\xi)$ и $N(\xi)$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Покажем сначала, что $P^{l-1}(\alpha) \neq 0$. В самом деле, предполагая противное, подставим $\xi := t\alpha$ в (17). Так как $P^l(t\alpha) = t^d P^l(\alpha) = 0$ и $P^{l-1}(t\alpha) = t^{d_1} P^{l-1}(\alpha) = 0$, после указанной подстановки в левой части (17) получим t^{d_1}, а в правой — величину $o(t^{d_1})$ (при $t \to +\infty$), так как функции $M(\xi)$ и $N(\xi)$ ограничены. Получили противоречие. Значит, без ограничения общности можно считать, что $P^{l-1}(\alpha) = 1$.

1.1. Предположим, что $d = [l_1, \dots, l_n] > l_1$. Рассмотрим семейство $\mathscr{N}$ кривых $x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$ в $\mathbb{R}^n$ вида

$$x_k(t) := \alpha_k t^{m_k} + a_k, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \tag{18}$$

где a_k — произвольные числа, $t > 0$. Обозначим

$$\alpha t^m := (\alpha_1 t^{m_1}, \dots, \alpha_n t^{m_n}), \qquad a := (a_1, \dots, a_n).$$

В тождестве (17) сделаем подстановку $\xi_k := x_k(t)$, где $x_k(t)$ — функции (18), применяя к каждому из полиномов формулу Тейлора в точке αt^m с приращением a. Так как

$$P^l(\alpha t^m + a) = t^d P^l(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} u_k a_k t^{d-m_k} + o(t^{d-m_1}) = o(t^{d_1}), \quad t \to +\infty$$

в силу предположения $P^l(\alpha) = 0$ и неравенств $d_1 > d - m_k$ (см. лемму 1), а также

$$P^{l-1}(\alpha t^m + a) = t^{d_1} P^{l-1}(\alpha) + o(t^{d_1}) = t^{d_1}\left[1 + o(1)\right], \quad t \to +\infty,$$
$$Q(\alpha t^m + a) = t^{d_1} Q(\alpha) + o(t^{d_1}) = t^{d_1}\left[1 + o(1)\right], \quad t \to +\infty,$$

то после упомянутой выше подстановки получим:

$$t^{d_1}\left[1 + o(1)\right] = t^{d_1} M(x(t)) + o(t^{d_1}), \quad t \to +\infty. \tag{19}$$

Деля обе части (19) на t^{d_1} и затем переходя к пределу при $t \to +\infty$, будем иметь:

$$\lim_{t\to+\infty} M(x(t)) = 1 \qquad \text{для всех} \quad x(t) \in \mathscr{N}, \tag{20}$$

где $\mathscr{N}$ — семейство кривых (18).

1.2. Предположим теперь, что $d = [l_1, \ldots, l_n] = l_1$. Рассмотрим другое семейство $\mathscr{N}$ кривых $x(t) := (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ в $\mathbb{R}^n$ вида

$$x_k(t) := \alpha_k t^{m_k} + a_k t^{m_k - 1} + \ldots, \qquad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{21}$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ — произвольные числа, $t > 0$. В тождестве (17) сделаем подстановку $\xi_k := x_k(t)$, где $x_k(t)$ — функции (21), применяя к каждому из полиномов формулу Тейлора в точке $(\alpha_1 t^{m_1}, \ldots, \alpha_n t^{m_n})$. Имеем

$$t^{d-1} = M(x(t))\left[\sum_{k=1}^{n} u_k a_k + 1\right] t^{d-1} + o(t^{d-1}). \tag{22}$$

Деля обе части (22) на t^{d-1} и затем переходя к пределу при $t \to +\infty$, получим:

$$\lim_{t\to+\infty} M(x(t))\left[\sum_{k=1}^{n} u_k a_k + 1\right] = 1. \tag{23}$$

Далее, будем последовательно подставлять в (17) функции

$$\xi = x((t+\tau)^k), \qquad k \in \{1, \ldots, n\},$$

где $\tau \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная, а $x(t) \in \mathscr{N}$. Учитывая соотношение (23), получим, что числа

$$v_k := \alpha_k u_k \lim_{t\to+\infty} M(x(t)), \qquad k \in \{1, \ldots, n\}$$

удовлетворяют системе n однородных линейных уравнений с биномиальной матрицей $\mathcal{M} := \|C^j_{jm_k}\|^n_{j,k=1}$. Так как $m_1, \ldots, m_n$ различны, то матрица $\mathcal{M}$ невырождена (см. лемму 2). Отсюда $v_k = 0$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, и из условия $\alpha_k \neq 0$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, следует, что

$$u_k \lim_{t\to+\infty} M(x(t)) = 0, \qquad k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{24}$$

Из равенств (23) и (24) следует, что снова справедливо соотношение (20) (для множества $\mathscr{N}$ кривых вида (21)).

1.3. Покажем, что в случаях пунктов **1.1** и **1.2** соотношение (20) невозможно. В самом деле, так как $Q^l(\xi) \equiv 0$ и справедливо тождество (12) (см. предложение 4), то

$$Q^l(\xi) \equiv \lambda P^l(\xi) \equiv 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

откуда $\lambda = 0$. Значит, ввиду того же предложения 4, $\lambda = \mu(0) = 0$, где μ — конечная борелевская мера, порождающая мультипликатор $M(\xi)$. Тогда в силу леммы 3 выпуклые комбинации сдвигов функции $M(\xi)$ равномерно стремятся к $\mu(0) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдутся числа $c_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{q} c_k = 1$ и векторы $\xi^1, \ldots, \xi^q \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\left|\sum_{k=1}^{q} c_k M_1(\xi - \xi^k)\right| < \varepsilon \qquad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Подставляя в это неравенство функции $\xi_k = x_k(t)$ вида (18) или (21) и затем переходя к пределу при $t \to +\infty$, с учетом (20) имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{q} c_k\right| < \varepsilon < 1$, что неверно.

Таким образом, в случае $s \geqslant 2$ мы пришли к противоречию.

2. Значит, $s = 1$. Если $i_1 < n$, то, сужая полином $P(\xi)$ на двумерное подпространство $E' := \operatorname{span}\{\xi_{i_1}, \xi_n\}$, получим, что оператор $(P\lceil E')(D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^{\tilde{l}}_{\infty}(\mathbb{R}^2)$, где $\tilde{l} := (l_{i_1}, l_n)$, для которого $(P\lceil E')^{\tilde{l}}(\gamma_{i_1}, 0) = 0$ при $l_{i_1} > l_n$, что противоречит п. (i) предложения 1.

Таким образом, $s = 1$ и $i_1 = n$, т. е. нули l'-главного символа находятся в подпространстве E_m. Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
2. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. Бесов О. В. О коэрцитивности в анизотропном пространстве С. Л. Соболева / О. В. Бесов // Мат. сборник. – 1967. – Т. 73 (115), № 4. – С. 585–599.
4. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
5. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М. М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т. 56. – С. 206–261.
6. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. – 1964. – Vol. 8. – P. 112–124.
7. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75–112.
8. Лиманский Д. В. О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. – 2016. – Т. 30. – С. 109–119.
9. Лиманский Д. В. Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в $W^l_p(\mathbb{R}^n)$ / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 415, № 5. – С. 583–588.
10. Лиманский Д. В. Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 68–76.
11. Лиманский Д. В. Априорные оценки для слабо коэрцитивной системы минимальных дифференциальных полиномов в анизотропном пространстве Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. – 2019. – Т. 33. – С. 61–70.
12. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

Поступила в редакцию 20.08.2020 г.

ON ZEROS OF WEAKLY COERCIVE IN THE ANISOTROPIC SOBOLEV SPACES NON-QUASI-ELLIPTIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

D. V. Limanskii

Properties of the zero set of symbols of a non-quasi-elliptic system of minimal differential polynomial weakly coercive in the anisotropic Sobolev space $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ are obtained.

Keywords: differential operator, a priori estimate, quasi-ellipticity, weak coercivity, Sobolev space

Лиманский Дмитрий Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент
Донецкий национальный университет, г. Донецк
d.limanskiy@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
+38-071-3058827

Limanskii Dmitrii Vladimirovich
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.988.28

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ВПОЛНЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2020. *А. Д. Манов*

В данной работе доказаны два неравенства для вполне монотонных на $(0, +\infty)$ функций, которые являются естественными аналогами неравенства Вейля для положительно определённых функций на группе.

Ключевые слова: положительно определённые ядра, вполне монотонные функции, положительно определённые функции, неравенство Вейля.

1. Введение. Пусть X – некоторое множество. Функция $k : X \times X \to \mathbb{C}$ называется положительно определённым ядром на $X \times X$, если для любого $n \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$, а также для любого набора комплексных чисел $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} k(x_i, x_j) \geqslant 0. \tag{1}$$

Пусть G группа. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на G ($f \in \Phi(G)$), если функция $f(x^{-1}y)$ является положительно определённым ядром на $G \times G$. В своей монографии 1940 года (см. [1, с. 69]) А. Вейль доказал следующее неравенство для положительно определённых функций (см. также [2, Theorem 1.4.1] и [3, Теорема 32.4]).

Теорема A. *Пусть $f \in \Phi(G)$. Тогда справедливо неравенство*

$$|f(e)f(xy) - f(x)f(y)|^2 \leqslant (f(e)^2 - |f(x)|^2)(f(e)^2 - |f(y)|^2),\ x, y \in G.$$

Подобного рода неравенства имеют различные приложения в теории положительно определённых функций. В частности, из теоремы A сразу следует, что *если $f \in \Phi(G)$ и $H_1 := \{x \in G : f(x) = f(e)\}$, $H_2 = \{x \in G : |f(x)| = f(e)\}$, то H_1 и H_2 подгруппы группы G и выполняются следующие равенства:*

$$f(e)f(xy) = f(e)f(yx) = f(x)f(y),\ x \in H_2,\ y \in G.$$

В частности, H_1 является множеством периодов функции f.

Недавно автор узнал, что для положительно определённых ядер существует следующее неравенство, которое является обобщением неравенства Вейля (см. *доказательство* следствия 5 в работе В. П. Заставного [4], а также теорему 5 там же).

Теорема B. *Пусть k положительно определённое ядро на $X \times X$. Тогда для всех $x, y, z \in X$ выполняется неравенство*

$$|k(z,z)k(x,y) - k(x,z)k(z,y)|^2 \leqslant (k(z,z)k(x,x) - |k(x,z)|^2)(k(z,z)k(y,y) - |k(y,z)|^2).$$

Теорема B позволяет доказать неравенства для вполне монотонных функций, которые является аналогами неравенства Вейля.

 © Манов А. Д., 2020

Напомним, что функция $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ называется вполне монотонной на $(0,+\infty)$ ($f\in\mathcal{CM}$), если $f\in C^\infty(0,+\infty)$ и для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ и $x\in(0,+\infty)$ выполняется неравенство $(-1)^n f^{(n)}(x)\geqslant 0$. Нетривиальным примером вполне монотонной функции является, например, функция $f(x)=e^{-\lambda x}$, $x>0$ при $\lambda>0$.

Отметим, что из определения вытекает, что вполне монотонные функции неотрицательны, убывают и выпуклы вниз на промежутке $(0,+\infty)$.

В данной работе мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f\in\mathcal{CM}$. Тогда для всех $x,y,z>0$ выполняется неравенство*

$$|f(2z)f(x+y)-f(x+z)f(y+z)|^2\leqslant(f(2z)f(2x)-f^2(x+z))(f(2z)f(2y)-f^2(y+z)). \quad (2)$$

Кроме того, если для некоторых $x_0,z_0>0$ ($x_0\neq z_0$) правая часть неравенства обращается в ноль, т. е. выполнено равенство $f(2z_0)f(2x_0)=f^2(x_0+z_0)$, то $f(x)=Ce^{-\lambda x}$, $x>0$, где $C,\lambda\geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть $f\in\mathcal{CM}$. Тогда для всех $x>0$ и всех $i,j,p\in\mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство*

$$|f^{(2p)}(x)f^{(i+j)}(x)-f^{(i+p)}(x)f^{(j+p)}(x)|^2\leqslant$$
$$\leqslant(f^{(2p)}(x)f^{(2i)}(x)-[f^{(i+p)}(x)]^2)(f^{(2p)}(x)f^{(2j)}(x)-[f^{(j+p)}(x)]^2). \quad (3)$$

Кроме того, если для некоторого $x_0>0$ при $p=1$ и $i=0$ правая часть неравенства обращается в ноль, т. е. выполнено равенство $f''(x_0)f(x_0)=[f'(x_0)]^2$, то $f(x)=Ce^{-\lambda x}$, $x>0$, где $C,\lambda\geqslant 0$.

Работа организована следующим образом. В пункте 2 приведены вспомогательные факты и утверждения. В пунктах 3 и 4 мы докажем теорему 1 и теорему 2, соответственно.

Вспомогательные факты и утверждения. Для доказательства теоремы 1 и теоремы 2 нам потребуется следующее, хорошо известное, интегральное представление для вполне монотонных функций, доказательство которого можно найти, например, в [5, 6].

Теорема 3 (Хаусдорф-Бернштейн-Уиддер)**.** *Функция $f\in\mathcal{CM}$ тогда и только тогда, когда*

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-tx}d\mu(t),\ x>0, \quad (4)$$

где μ – неотрицательная борелевская мера такая, что интеграл (4) сходится при всех $x>0$. При этом мера μ является конечной тогда и только тогда, когда $f(+0)<+\infty$, причем $\mu([0,+\infty))=f(+0)$.

Из интегрального представления (4) сразу вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть $f\in\mathcal{CM}$. Тогда функция f аналитически продолжается в правую полуплоскость $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ и справедливо неравенство*

$$|f(x+iy)|\leqslant f(x),\ x>0,\ y\in\mathbb{R}.$$

В частности, если $f(x_0)=0$ для некоторой точки $x_0>0$, то $f\equiv 0$.

Также нам потребуется следующая теорема об аналитических и ограниченных функциях в полуплоскости (см. [7, Corollary, p. 102]).

Теорема 4. *Пусть f – аналитическая и ограниченная в верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ функция. Если f обращается в ноль на некоторой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что при некотором $\delta > 0$ следующий ряд расходится*

$$\sum_{|a_n| \geqslant \delta} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_n} \right|,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $f \in \mathcal{CM}$ и $k(x, y) := f(x+y)$, $x, y > 0$. Из теоремы 3 вытекает, что любого $n \in \mathbb{N}$, для любых точек $x_1, \ldots, x_n > 0$ и для любой системы комплексных чисел $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} k(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \int_0^{\infty} e^{-t(x_i+x_j)} d\mu(t)$$
$$= \int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} e^{-tx_i} e^{-tx_j} d\mu(t) = \int_0^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-tx_i} \right|^2 d\mu(t) \geqslant 0.$$

Таким образом, функция $k(x, y)$ является положительно определённым ядром на $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ и неравенство (1) вытекает из теоремы B.

Если $f(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 > 0$, то обе части неравенства (2) тождественно равны нулю (см. следствие 1). И в этом случае, $f(x) = 0$ при $x > 0$.

Пусть теперь $f(x) > 0$ при $x > 0$ и для некоторых $z_0 > x_0 > 0$ выполняется равенство $f(2z_0)f(2x_0) = f^2(x_0 + z_0)$. Из неравенства (2) следует, что

$$f(y + z_0) = \frac{f(2z_0)}{f(x_0 + z_0)} f(y + x_0), \ y > 0. \tag{5}$$

Сделаем замену $t = y + x_0$, $y > 0$, а также введём следующие обозначения:

$$h := z_0 - x_0, \qquad a := \frac{f(2z_0)}{f(x_0 + z_0)}$$

Очевидно, что $h > 0$. Кроме того, так как f убывает (не обязательно строго) и положительна на $(0, +\infty)$, то $a \in (0, 1]$. Теперь (5) можно переписать, как

$$f(t + h) = af(t), \ t > x_0. \tag{6}$$

Из (6) по индукции вытекает, что

$$f(t + nh) = a^n f(t), \ t > x_0, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Фиксируем некоторую точку $t_0 > x_0$ и рассмотрим следующую функцию:

$$g(t) := f(t_0) e^{\lambda(t-t_0)}, \ t > 0, \text{ где } \lambda := \frac{\ln a}{h}.$$

Очевидно, что $\lambda \leqslant 0$, и значит, $g \in \mathcal{CM}$. Кроме того, из (7) следует, что

$$g(t_0 + nh) = f(t_0 + nh), \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Из следствия 1 вытекает, что функции f и g аналитические и ограниченные в некоторой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \varepsilon_0\}$, где $\varepsilon_0 \in (0, x_0)$. Рассмотрим следующую функцию:

$$F(z) := f(-iz + \varepsilon_0) - g(-iz + \varepsilon_0),\ z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0.$$

Очевидно, что F ограниченная и аналитическая в верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ функция. Из (8) вытекает, что $F(i(t_0 - \varepsilon_0 + nh)) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как следующий ряд расходится

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t_0 - \varepsilon_0 + nh},$$

то из теоремы 4 вытекает, что $F(z) \equiv 0$. Таким образом, $f(z) = g(z)$ в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \varepsilon_0\}$, а значит и в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Таким образом, $f(x) = Ce^{-\lambda x}$, $x > 0$, где $C > 0$, $\lambda \geqslant 0$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2.

Для удобства при доказательстве теоремы 2 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть $k : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$. Тогда k положительно определённое ядро на $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ и для любого набора комплексных чисел $\xi_0, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{p,l=0}^{m} \xi_p \overline{\xi_l} k(p, l) \geqslant 0. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_+$, и $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Покажем, что выполняется неравенство (1). Отметим, что достаточно доказать неравенство (1) в предположении, что все числа $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны.

Пусть $S := \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $m := \max S$. Выберем комплексные числа $\xi_0, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}$ следующим образом: $\xi_p = c_i$, если $p = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\xi_p = 0$ в противном случае. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} k(x_i, x_j) = \sum_{p,l \in S} \xi_p \overline{\xi_l} k(p, l) = \sum_{p,l=0}^{m} \xi_p \overline{\xi_l} k(p, l) \geqslant 0.$$

□

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in \mathcal{CM}$ и $x > 0$. Рассмотрим функцию $k(i, j) := (-1)^{i+j} f^{(i+j)}(x)$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Из теоремы 3 вытекает, что любого $m \in \mathbb{Z}_+$ и для любого набора комплексных чисел $\xi_0, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=0}^{m} \xi_i \overline{\xi_j} k(i, j) = \sum_{i,j=0}^{m} \xi_i \overline{\xi_j} (-1)^{i+j} f^{(i+j)}(x) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{m} \xi_i \overline{\xi_j} \int_0^{\infty} t^{i+j} e^{-tx} d\mu(t) = \int_0^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{m} \xi_j t^j \right|^2 e^{-tx} d\mu(t) \geqslant 0.$$

Из леммы 1 следует, что функция $k(i, j)$ является положительно определённым ядром на $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, и значит, удовлетворяет условиям теоремы B. Неравенство (3) доказано.

Пусть $f'(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 > 0$. Так как $-f' \in \mathcal{CM}$, то из следствия 1 вытекает, что $f'(x) \equiv 0$, и значит, $f(x) \equiv C$, где $C \geqslant 0$. В этом случае, при $p = 1$ обе части неравенства (3) тождественно равны нулю.

Пусть теперь $f'(x) < 0$, $x > 0$ и для некоторого $x_0 > 0$ при $p = 1$ и $i = 0$ правая часть неравенства (3) обращается в ноль:

$$f''(x_0)f(x_0) = [f'(x_0)]^2. \tag{10}$$

Из неравенства (3) следует, что

$$f^{(j+1)}(x_0) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} f^{(j)}(x_0), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Учитывая (10), по индукции получаем, что

$$f^{(n)}(x_0) = \left(\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right)^n f(x_0), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как f аналитична в правой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, то f представима рядом Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n, \quad |z - x_0| < x_0.$$

Отсюда получаем, что $f(z) = Ce^{-\lambda z}$ при $\operatorname{Re} z > 0$, где

$$\lambda = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}, \qquad C = e^{\lambda x_0} f(x_0).$$

Из предполагаемых условий на f следует, что $\lambda, C > 0$. Теорема 2 доказана.

□

Заключение. В заключении отметим, что по мнению автора, представляет интерес следующая задача: *для заданных $x_0 > 0$ и $i, j \in \mathbb{Z}_+$ найти все вполне монотонные функции $f \in \mathcal{CM}$ такие, что выполнено равенство*

$$[f^{(i+j)}(x_0)]^2 = f^{(2i)}(x_0) f^{(2j)}(x_0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения / А. Вейль. – М.: Изд-во иностр. лит., 1950. – 223 с.
2. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions / Z. Sasvári. – Berlin: Akad. Verl., 1994. – 208 p.
3. Хьюитт Э. Абстрактный гармонический анализ. Том 2. / Э. Хьюитт, К. Росс. – Москва: Мир, 1975. – 900 с.
4. Заставный В. П. Неравенства для положительно определённых функций на группе / В. П. Заставный // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2020. № 2. – С. 1–1.
5. Schilling R. L. Bernstein functions/ R. L. Shilling, R. Song, Z. Vondraček. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2010. – 410 p.
6. Widder D. V. The Laplace Transform / D. V. Widder. – Princeton: Princeton University Press, 1946. – 425p.
7. Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions / B. Ya. Levin. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1996. – 248 p.

Поступила в редакцию 10.06.2020 г.

ON SOME INEQUALITIES FOR COMPLETELY MONOTONE FUNCTIONS

A. D. Manov

In this paper we prove two inequalities for completely monotone functions on $(0, +\infty)$ which are analogues of Weil's inequality for positive definite functions on a group.

Keywords: positive definite kernels, completely monotone functions, positive definite functions, Weil's inequality.

Манов Анатолий Дмитриевич
аспирант
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
manov.ad@ro.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Manov Anatoliy Dmitrievych
postgraduate student, Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.988.28

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ КУБА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2020. ***П. А. Машаров***

Получено значение наименьшего радиуса шара, в котором из равенства нулю интегралов следует равенство нулю функции. Рассматриваются кратные интегралы по трехмерным кубам в многомерном пространстве.

***Ключевые слова*:** проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю, свойства функции с нулевыми интегралами по кубам, локальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю для куба.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathrm{M}(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

при всех $\lambda \in \mathrm{M}(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A. В этой постановке указанная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получили румынский математик Помпейю в 1929 году [1, 2] и другие [3–5].

Легко видеть, что даже на плоскости $\mathbb{R}^2$ не каждое множество имеет свойство Помпейю. В самом деле, пусть $\mathbb{B}^n_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$, $R > 0$ — фиксировано и $f(x_1, x_2) = e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)}$. Тогда, поскольку $\lambda\mathbb{B}^2_R$ является кругом радиуса R с центром в точке $y \in \mathbb{R}^2$, координаты которой зависят только от $\lambda \in \mathrm{M}(2)$, интеграл (1) сводится к

$$\int_{|x-y|\leqslant R} e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)}\,dx = \frac{2\pi R}{|\alpha|} J_1(R|\alpha|) e^{i(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2)},$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Отсюда делаем вывод, что круг не является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^2$, поскольку всякий раз, когда $R|\alpha|$ — нуль функции Бесселя J_1, получаем, что существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая (1) для любого $\lambda \in \mathrm{M}(n)$.

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, имеет ли множество A свойство Помпейю или нет [6–9]. Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [10]:

Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\overline{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно–аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Этот результат, в частности, показывает, что многие множества A с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. В случае множества A с вещественно–аналитической границей ситуация сложнее. Примерами множеств $A \in$

 © Машаров П. А., 2020

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ для любого $n \geqslant 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [11].

Относительно недавно были получены примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева [12]. Одним из таких множеств является «снежинка Кох».

В случае, когда некоторое множество не обладает свойством Помпейю, наличие ненулевой функции с условием (1) дает возможность получить нетривальные оценки плотности укладки произвольного компакта в $\mathbb{R}^n$ множествами вида λA, $\lambda \in \mathbf{M}(n)$. Такие оценки получил Б. Д. Котляр [13]. Если же A имеет свойство Помпейю, то в силу теоремы Винера возможна аппроксимация в $L_1(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов множеств вида λA, $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ [14].

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n,\ \mathbf{M}(n),\ dx)$ тройкой $(X,\ \mathcal{Z},\ d\mu)$, где X — многообразие, $\mathcal{Z}$ — группа Ли, действующая транзитивно на X, $d\mu$ — инвариантная относительно $\mathcal{Z}$ мера на X. Одним из наиболее интересных примеров является случай, когда X — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathcal{Z}$ — группа конформных автоморфизмов X [15, 16].

Другие обобщения проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Упоминая о методике решения указанных задач, следует отметить, что наиболее сильные результаты из цитированных выше работ получены с помощью аппарата преобразования Фурье и других элементов гармонического анализа. Несмотря на достигнутые успехи, в ряде случаев такой подход является либо неприменимым, либо недостаточно тонким (например, при изучении локальных вариантов проблемы Помпейю). Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы.

Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}^n_R$ и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ таких, что $\lambda A \subset \mathbb{B}^n_R$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}^n_R$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}^n_R$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (по сравнению с размерами множества A) выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$ [17–19].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf\bigl\{R > 0\colon\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)\bigr\},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A.

В [19] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.

Если точное значение $\mathcal{R}(A)$ найти не удаётся, то возникает

Проблема 2. Для данного компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ получить оценки величины $\mathcal{R}(A)$, уточняющие известные ранее.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренстейном и Р. Гэем [17, 18], а также В. В. Волчковым [19, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [19–24].

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество A имеет такую же размерность, что и пространство. Пусть теперь размерность множества A равна $m \leqslant n$,

интеграл в (1) понимается как m-кратный. Чтобы выделить такие интегралы, вместо dx будем писать $d\mu_m$. В определении множества Помпейю в $\mathbb{B}^n_R$ для множества положительной коразмерности (если $m < n$) локальную суммируемость функции f заменим на непрерывность. Это обусловлено тем, что даже равная нулю почти всюду (по n-мерной мере Лебега μ_n) функция может иметь не все равные нулю интегралы, поскольку если множество A имеет размерность $m < n$, то $\mu_n(A) = 0$. Будем рассматривать совокупность $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}^n_R)$ всех m-мерных множеств Помпейю в $\mathbb{B}^n_R$ и величину

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0\colon A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}^n_R)\}.$$

Аналогично проблеме 1, в [25] поставлена следующая

Проблема 3. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^m$ найти значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$.

Локальный вариант проблемы Помпейю для множеств положительной коразмерности напоминает теорему Мореры, в которой из нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции. В [26] рассмотрена проблема Помпейю для шаров и сфер положительной коразмерности.

Рассмотрим некоторые примеры множеств A, для которых известно точное значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$.

1. Пусть A — правильный треугольник со стороной a. Тогда $\mathcal{R}_{2,2}(A) = a\sqrt{3}/2$ (В. В. Волчков, 1996, [27]).

2. Пусть A — правильный s-угольник со стороной длины l. Тогда

$$\mathcal{R}_{n,n}(A) = \begin{cases} l\,\mathrm{ctg}(\pi/2s)/2, & \text{если } s \text{ — нечетно;} \\ l\sqrt{1 + 4\mathrm{ctg}^2(\pi/s)}/2 & \text{если } s \text{ — четно} \end{cases}$$

(В. В. Волчков, 2000–2003, [19]).

3. Пусть A — треугольник Рело ширины 1 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathcal{R}_{2,2}(A) = 1$ (П. А. Машаров, 2001, [28]).

4. Пусть A — куб в $\mathbb{R}^n$ с ребром длины 1. Тогда $\mathcal{R}_{n,n}(A) = \sqrt{n+3}/2$ (В. В. Волчков, 1996, [29]).

5. Пусть A — полушар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1. Тогда $\mathcal{R}_{n,n}(A) = \sqrt{5}/2$ (В. В. Волчков, 1996, [19]).

6. Пусть $A(h)$ — сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{R}_{n,n}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h - 3h^2}\,/2, & 1 < h \leqslant 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

(П. А. Машаров, 2011, [30]).

7. Пусть $A(h)$ — невыпуклый четырёхугольник с вершинами в точках $(0;0)$, $(\sqrt{3}/2; -1/2)$, $(\sqrt{3}/2 - h; 0)$, $(\sqrt{3}/2; 1/2)$, $h \in (0; \sqrt{3}/2)$. Тогда

$$\mathcal{R}_{2,2}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0; \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2) \end{cases}$$

(Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров, 2014, [31]).

8. Пусть $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ — плоский квадрат со стороной 2. Тогда $\mathcal{R}_{2,3}(K) = \sqrt{41}/4$ (П. А. Машаров, 2017, [25]).

9. Пусть $l_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leqslant x_1 \leqslant 1; x_j = 0, j = 2, 3, \ldots, n\}$ — отрезок длины 1. Если вместо (1) рассматривать соответственно криволинейные интегралы первого и второго рода, то $\mathcal{R}^1_{1,n}(l_0) = 5/8$, $\mathcal{R}^2_{1,2}(l_0) = 1$ (П. А. Машаров, 2019, [32]).

Известны также значения величины $\mathcal{R}_{n,n}(A)$ для случаев, когда A — плоский круговой сектор (П. А. Машаров, 2000, [33]), параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ (В. В. Волчков, 1998–2000, [29]), эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ (В. В. Волчков, 2001, [19]), половина кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ (Л. В. Елец, П. А. Машаров, 2009, [34]), замыкание разности двух плоских квадратов (П. А. Машаров, 2016, [35]).

В данной работе в качестве множества, для которого изучаются аналоги проблемы Помпейю, рассмотрен $K = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x_j| \leqslant 1, j \in \{1, 2, 3\}, x_k = 0, k \in \{4, \ldots, n\}\big\}$ — трехмерный куб со стороной 2. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 4$ имеет место равенство $\mathcal{R}_{3,n}(K) = \sqrt{57}/4$.*

Заметим, что $\mathcal{R}_{3,3}(K) = \sqrt{6} \approx 2{,}45$, минимальный радиус $r^*(K)$ замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$), содержащего K, равен $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, а для любого $n \geqslant 4$ полученное в данной работе значение $\mathcal{R}_{3,n}(K) \approx 1{,}89$.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее будем рассматривать действительное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 4$ со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $\mathbf{M}(n)$ — группу движений $\mathbb{R}^n$. Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим $\mathrm{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) \colon \lambda A \subset B\}$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим множества $\mathbb{B}^n_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$, $\mathbb{S}^{n-1}_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = R\}$ — шар и сфера соответственно в $\mathbb{R}^n$ радиуса R; $\mathbb{B}^n_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon r < |x| < R\}$ — шаровой слой, если $r \geqslant 0$, или шар в $\mathbb{R}^n$, если $r < 0$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ под ∂A будем понимать множество граничных точек A, а под $\overline{A} = A \cup \partial A$ — замыкание A.

Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B функций, то есть таких функций $f \colon B \to \mathbb{C}$, для которых интеграл по любому компактному подмножеству из B конечен. Так как интегрирование часто будет вестись по множествам вида λA, где множество A рассматривается m-мерным, то здесь и далее под dx в случаях $m \leqslant n$ понимается m-мерная мера Лебега μ_m. Если $p \in [1, +\infty)$, обозначение $L_p(B)$ будем использовать для функций, для которых $\|f\|_{L_p(B)} = \left(\int_B |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < +\infty$. Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества B под $C^k(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в B, $C(B)$ — класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(B)$.

Далее, под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}^\infty_0(A, B)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$, то есть таких, что для любых $x, y \in B$, для которых $|x| = |y|$, выполняется $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частной производной функции $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по переменной x_j будем использовать запись $\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Заметим, что из линейности пространств гладких и интегрируемых функций следует линейность пространств $\mathfrak{P}^k(A, B)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Для произвольного непустого $B \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t \in \mathbb{R}^n$ положим $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| < \varepsilon, y \in B\}$, $B + t = \{x + t \in \mathbb{R}^n \colon x \in B\}$.

Лемма 1. *Пусть A — компакт, B — область в $\mathbb{R}^n$, числа $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы, функция $\varphi_\varepsilon \in C^k(B_\varepsilon)$ имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}^n_\varepsilon$, а функция $f \in \mathfrak{P}(A, B_\varepsilon)$. Тогда свёртка $f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{P}^k(A, B)$.*

Доказательство. По определению свёртки, имеем $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$. При этом функция $\psi(x)$ определена корректно в области B. Так как $\varphi_\varepsilon \in C^k(B)$, то для любого набора $\{j_1, \dots j_n\}$, $j_\nu \in \{0, 1, \dots, k\}$, $j_1 + \dots + j_n \leqslant k$ существует

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}\psi(x)}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}\varphi_\varepsilon(x-y)}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\,dy.$$

Таким образом, $\psi \in C^k(B)$. Осталось доказать, что эта функция имеет нулевые интегралы по всем множествам $\lambda A \subset B$.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in \operatorname{Mot}(A, B)$ и рассмотрим

$$I = \int_{\lambda A} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda A} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Сделав замену $t = x - y$, имеем $I = \int_{\lambda A} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\,dt \int_{\lambda A} f(x-t)\,dx$. После замены $z = x - t$, $I = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\,dt \int_{\lambda A - t} f(z)\,dz$. Так как $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}^n_\varepsilon$, то во внешнем интеграле интегрирование на самом деле ведется по $\mathbb{B}^n_\varepsilon$, то есть $t \in \mathbb{B}^n_\varepsilon$. Отсюда следует, что $\lambda A - t \subset B$, и, значит, внутренний интеграл по условию леммы равен нулю. Следовательно, и весь интеграл равен нулю, что завершает доказательство леммы. □

Лемма 2. *Пусть A — компакт с внутренними точками в $\mathbb{R}^m$ $(m \leqslant n)$, для произвольного фиксированного значения $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ дифференциальный оператор $\mathfrak{d} = \partial/\partial x_j$. Пусть также для некоторого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\operatorname{Mot}(A, B) \neq \varnothing$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если $\nu \in \mathbb{N}$, то в условиях леммы из $f \in \mathfrak{P}^\nu(A, B)$ следует $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^{\nu-1}(A, B)$.

Уменьшение гладкости функции $\mathfrak{d}f$ по сравнению с f на единицу связано с тем, что $\mathfrak{d}$ является дифференциальным оператором первого порядка. Докажем теперь, что если функция f имеет нулевые интегралы, то и $\mathfrak{d}f$ также имеет нулевые интегралы по соответствующим множествам.

Так как $\operatorname{Mot}(A, B) \neq \varnothing$ и $f \in \mathfrak{P}^\nu(A, B)$, то найдется $\lambda \in \operatorname{Mot}(A, B)$, для которого верно (1). Тогда для $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ с достаточно малым значением $|\zeta|$, множество $\lambda A + \zeta \subset B$. Поэтому имеет место равенство

$$0 = \int_{\lambda A + \zeta} f(x)\,d\mu_m = \int_{\lambda A} f(x+\zeta)\,d\mu_m.$$

Дифференцируя его по ζ_j, получаем $\int_{\lambda A} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x+\zeta)\,d\mu_m = 0$. Полагая в этом равенстве $\zeta_1 = \dots = \zeta_n = 0$, получаем $\partial f/\partial x_j \in \mathfrak{P}^{\nu-1}(A, B)$.

Учитывая определение класса $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$, получаем утверждение леммы. □

Для произвольного непустого компакта или ограниченной области A из $\mathbb{R}^n$ через $r^*(A)$ обозначим радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего $\overline{A}$. Таким образом, $r^*(A) = \inf\{R > 0\colon \exists\lambda \in \operatorname{Mot}(\overline{A}, \mathbb{B}^n_R)\}$. Отметим, что из определений $r^*(A)$ и $\operatorname{Mot}(A, B)$ следует, что для произвольного компакта A множество $\operatorname{Mot}(A, \mathbb{B}^n_R) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $R > r^*(A)$, а для открытого ограниченного множества — когда $R \geqslant r^*(A)$.

Для рассматриваемого в настоящей работе множества K значение $r^*(K)$ равно радиусу описанной окружности, $r^*(K) = \sqrt{3} \approx 1{,}73$. Отсюда следует тривиальная оценка снизу радиуса Помпейю: $\mathcal{R}_{3,n}(K) \geqslant \sqrt{3}$ для любого $n \geqslant 3$. С другой стороны, учитывая $\mathcal{R}_{3,3}(K) = \sqrt{6}$, вполне естественно считать, что $\mathcal{R}_{3,n}(K) \leqslant \sqrt{6}$ для $n \geqslant 3$.

Координаты точки в $\mathbb{R}^n$, начиная с некоторой, если они нули, будем обозначать одним символом $\vec{0}$. Если $\mathfrak{E}$ — элемент куба K (вершина, ребро, грань), то, когда будет рассматриваться куб λK ($\lambda \in \mathbf{M}(n)$), его соответствующий элемент будем обозначать $\lambda\mathfrak{E}$. Например, «верхняя» грань с вершинами в точках $(\pm 1; \pm 1; 1; \vec{0})$ трансформируется в $\lambda\{(\pm 1; \pm 1; 1; \vec{0})\}$.

Лемма 3. *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $f \in C^3(K_\varepsilon)$. Тогда имеют место равенства*

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_1}\, d\mu_3 = \int_{-1}^{1} dx_3 \int_{-1}^{1} \big(f(1; x_2; x_3; \vec{0}) - f(-1; x_2; x_3; \vec{0})\big)\, dx_2; \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\int_K \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\, d\mu_3 = \int_{-1}^{1} \big(&f(1; 1; x_3; \vec{0}) - f(1; -1; x_3; \vec{0}) - f(-1; 1; x_3; \vec{0}) + \\ &+ f(-1; -1; x_3; \vec{0})\big)\, dx_3;\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\int_K \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\, d\mu_3 = {}& f(1; 1; 1; \vec{0}) - f(1; 1; -1; \vec{0}) - f(1; -1; 1; \vec{0}) + f(1; -1; -1; \vec{0}) - \\ &- f(-1; 1; 1; \vec{0}) + f(-1; 1; -1; \vec{0}) + f(-1; -1; 1; \vec{0}) - f(-1; -1; -1; \vec{0}).\end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Путём перехода к повторному интегралу и применения формулы Ньютона–Лейбница, сначала непосредственно доказывается (2). Заменив в полученном равенстве f на $\partial f/\partial x_2$, приходим к (3). Заменив здесь f на $\partial f/\partial x_3$, получаем (4). □

Для доказательства основного результата воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в [19]. Перед его формулировкой введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu,\varepsilon} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\big\}$, $\nu = 1, \ldots, k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в $\mathcal{U}$ распределений. $\vec{\partial} = \big(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\big)$.

Утверждение 1 (Теорема 3.2 из [19, Глава 4]). *Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0\big(\Omega_{\nu,\varepsilon}\big)$ для $\nu = 1, \ldots, k$ и существуют многочлены $P_\nu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}^n_\varepsilon$ выполняется $\sum_{\nu=1}^k \big(P_\nu(\vec{\partial}) F_\nu\big)(x + v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta) F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$.*

Для $R > \sqrt{3}$ будем рассматривать различные положения куба λK внутри шара $\mathbb{B}^4_R$. Обозначим ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3 — расстояния от начала координат до вершины $\lambda(1, 1, 1, \vec{0})$, до ребра $\lambda\{(\pm 1, 1, 1, \vec{0})\}$, до грани $\lambda\{(\pm 1; \pm 1; 1; \vec{0})\}$ и до гиперплоскости куба λK соответственно. Для каждого $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ положим $\min_j = \inf\{\rho_j \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}^4_R)\}$ и $\max_j = \sup\{\rho_j \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}^4_R)\}$, для $0 < a < b$ шаровой слой в $\mathbb{R}^4$ обозначим $\mathbb{B}(a; b) = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon a < |x| < b\}$.

Лемма 4. *Пусть* $R \in \left(\sqrt{3}; \sqrt{6}\right)$. *Тогда имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \max_0 &= R, & \min_0 &= 2\sqrt{3} - R; \\ \max_1 &= \sqrt{R^2-1}, & \min_1 &= 2\sqrt{2} - \sqrt{R^2-1}; \\ \max_2 &= \sqrt{R^2-2}, & \min_2 &= 2 - \sqrt{R^2-2}; \\ \max_3 &= \sqrt{R^2-3}, & \min_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Для удобства будем рассматривать $\lambda \in \mathrm{Mot}(K, \overline{\mathbb{B}^4_R})$. Учитывая содержащиеся в Mot сдвиги и вращения, не важно, каких именно представителей вершин, ребер, граней куба выбирать для доказательства необходимых равенств.

Пусть F и B — противоположные вершины куба λK, $O(0;0;0;\vec{0})$ — начало координат. Максимальное расстояние от O до F не превосходит радиус шара. По неравенству треугольника $FB \leqslant FO + OB$, то есть $OB \geqslant 2\sqrt{3} - OF$.

Рассмотрим λ_0, при котором параллельным переносом центр куба (пересечение диагоналей) перемещается в точку $M\left(1 - \frac{R}{\sqrt{3}}; 1 - \frac{R}{\sqrt{3}}; 1 - \frac{R}{\sqrt{3}}; \vec{0}\right)$. Расстояния от O до вершин куба $V_\alpha\left(1 - \frac{R}{\sqrt{3}} \pm 1; 1 - \frac{R}{\sqrt{3}} \pm 1; 1 - \frac{R}{\sqrt{3}} \pm 1; \vec{0}\right)$ по неравенству треугольника $OV_\alpha \leqslant OM + MV_\alpha = R - \sqrt{3} + \sqrt{3} = R$. То есть $\lambda_0 \in \mathrm{Mot}(K, \overline{\mathbb{B}^4_R})$. Наибольшее и наименьшее расстояния достигаются для тех вершин, которые с точками O и M лежат на одной прямой. Таковыми являются $F\left(-\frac{R}{\sqrt{3}}; -\frac{R}{\sqrt{3}}; -\frac{R}{\sqrt{3}}; \vec{0}\right)$ и $B\left(2 - \frac{R}{\sqrt{3}}; 2 - \frac{R}{\sqrt{3}}; 2 - \frac{R}{\sqrt{3}}; \vec{0}\right)$. Все указанные четыре точки лежат на прямой, параметрическим уравнением которой является $x_1 = x_2 = x_3 = t$, $x_4 = \ldots = x_n = 0$, $t \in \mathbb{R}$. При этом достигаются $OF = R$, $OB = 2\sqrt{3} - R$.

Пусть f и b — противоположные ребра (параллельные и не лежащие в одной грани) куба λK, F и B — основания перпендикуляров, опущенных с O на соответствующие ребра. Тогда расстояния от O до ребер — это расстояния OF и OB. По неравенству треугольника, $FB \leqslant FO + OB$, откуда $OB \geqslant 2\sqrt{2} - OF$. То есть снова: чем больше OF, тем меньше может стать OB.

Рассмотрим λ_1, при котором параллельным переносом центр куба перемещается в точку $M\left(0; 1 - \sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; \vec{0}\right)$. Тогда вершины куба оказываются в точках $V_\alpha\left(\pm 1; 1 - \sqrt{\frac{R^2-1}{2}} \pm 1; 1 - \sqrt{\frac{R^2-1}{2}} \pm 1; \vec{0}\right)$. Рассмотрим четыре пары вершин, отличающихся первыми координатами и соединяющие их параллельные ребра. Основания перпендикуляров, опущенных из O на эти ребра, являются серединами ребер и лежат в точках $F\left(0; -\sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; -\sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; \vec{0}\right)$, $B\left(0; 2-\sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; 2-\sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; \vec{0}\right)$, $T\left(0; -\sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; 2-\sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; \vec{0}\right)$, $W\left(0; 2 - \sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; -\sqrt{\frac{R^2-1}{2}}; \vec{0}\right)$. По теореме Пифагора, различные квадраты расстояний от O до вершин куба равны R^2, $R^2 + 8 - 4\sqrt{2(R^2-1)}$, $R^2 + 4 - 2\sqrt{2(R^2-1)}$. Так как при $R > \sqrt{3}$ все они больше R^2, то $\lambda_1 \in \mathrm{Mot}(K, \overline{\mathbb{B}^4_R})$. Наибольшее расстояние до ребер достигается на $OF = \sqrt{R^2-1}$, так как обе вершины ребра f в этом случае лежат на сфере, наименьшее — на $OB = 2\sqrt{2} - \sqrt{R^2-1}$.

Пусть ϕ и β — противоположные грани куба λK, F и B — основания перпендикуляров, опущенных на них из O. Тогда расстояния от O до граней — это длины OF и OB. Так как в данном случае точки F, O, B лежат на одной прямой, а радиус $R < \sqrt{6}$, то $FB = FO + OB$, $OB = 2 - FO$, и снова: чем больше OF, тем меньше OB.

Рассмотрим λ_2, при котором параллельным переносом центр куба перемещается в точку $M\big(0;0;1-\sqrt{R^2-2};\vec{0}\big)$. Тогда вершины куба $V_\alpha\big(\pm1;\pm1;1-\sqrt{R^2-2}\pm1;\vec{0}\big)$. Разобьем их на две четверки, имеющие одинаковые третьи координаты и рассмотрим грани с вершинами в них. Основания перпендикуляров, опущенных из O, являются центрами этих граней и лежат в точках $F\big(0;0;-\sqrt{R^2-2};\vec{0}\big)$ и $B\big(0;0;2-\sqrt{R^2-2};\vec{0}\big)$. По теореме Пифагора, различные квадраты расстояний до вершин равны R^2 и $R^2+4-4\sqrt{R^2-2}$. При $R>\sqrt{3}$ все они больше R^2, значит $\lambda_2\in\mathrm{Mot}(K,\overline{\mathbb{B}}^4_R)$. Наибольшее расстояние до граней достигается на $OF=\sqrt{R^2-2}$, так как все четыре вершины грани ϕ в этом случае лежат на сфере, наименьшее — на $OB=2-\sqrt{R^2-2}$.

Рассмотрим λ_3, при котором параллельным переносом центр куба перемещается в точку $M\big(0;0;0;\sqrt{R^2-3};\vec{0}\big)$. Тогда вершины куба $V_\alpha\big(\pm1;\pm1;\pm1;\sqrt{R^2-3};\vec{0}\big)$, расстояния от O до них равны R. Значит это наиболее удаленное расположение куба. Расстояние от O до его гиперплоскости равно длине перпендикуляра. В данном случае это $OM=\sqrt{R^2-3}$. При уменьшении четвертой координаты точки M до нуля, расстояние также уменьшится до нуля, что завершает доказательство леммы. □

Решим несколько неравенств с найденными выражениями. Рассмотрим $\min_0<\max_1$. Учитывая неотрицательность обеих частей неравенства, имеем $2\sqrt{3}-R<\sqrt{R^2-1}$; $13<4\sqrt{3}R$; $R>\frac{13}{4\sqrt{3}}$. Заметим, что $\frac{13}{4\sqrt{3}}\approx1{,}876$. Теперь рассмотрим $\min_1<\max_2$. Имеем $2\sqrt{2}-\sqrt{R^2-1}<\sqrt{R^2-2}$; $9-4\sqrt{2}\sqrt{R^2-1}<0$; $R^2>\frac{113}{32}$; $|R|>\frac{\sqrt{113}}{4\sqrt{2}}$. При этом $\frac{\sqrt{113}}{4\sqrt{2}}\approx1{,}879$. И, наконец, рассмотрим $\min_2<\max_3$. Имеем $2-\sqrt{R^2-2}<\sqrt{R^2-3}$; $5-4\sqrt{R^2-2}<0$; $R^2>\frac{57}{16}$; $|R|>\frac{\sqrt{57}}{4}$. Здесь $\frac{\sqrt{57}}{4}\approx1{,}887$. Из этих рассуждений получаем

Замечание 1. Для $R\in\big(\sqrt{3};\sqrt{6}\big)$, в обозначениях (5), решением системы неравенств $\min_0<\max_1$; $\min_1<\max_2$; $\min_2<\max_3$ является $\sqrt{57}/4<R<\sqrt{6}$.

Лемма 5. *Пусть $R>\sqrt{3}$ и $f\in\mathfrak{P}^\infty_0(K,\mathbb{B}^4_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f=0$ в $\mathbb{B}\big(2\sqrt{3}-R;R\big)$.*

Доказательство. Применив утверждение 1 к $f\in\mathfrak{P}^\infty_0(K,\mathbb{B}^4_R)\subset\mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu,\varepsilon})$ для набора точек v_ν — вершин куба K. Учитывая равенство (4), левая часть которого в данном случае по лемме 2 обратится в нуль, получаем, что существует нетривиальный многочлен $q\colon\mathbb{R}^1\to\mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f=0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$. Так как функция f общая для всех точек v_ν, то $\Omega_{\nu,\varepsilon}$ представляет из себя множество точек из $\mathbb{B}^4_R$, в которые можно попасть вершинами куба λK, $\lambda\in\mathrm{Mot}(K,\mathbb{B}^4_R)$. Таким образом, $\Omega_{\nu,\varepsilon}=\mathbb{B}(\min_0;\max_0)$, что, с учетом леммы 4, завершает доказательство. □

Для формулировки следующего утверждения рассмотрим преобразование Радона. Пусть $n\geqslant2$; $\xi(\omega,d)$ — гиперплоскость с расстоянием d до начала координат, нормалью которой является вектор $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$. Преобразование Радона вводится для $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\mathbf{R}f(\omega,d)=\int_{\xi(\omega,d)}f(x)\,dx,$$

где в данном случае dx — $(n-1)$-мерная мера.

Утверждение 2 (Следствие 8.4 из [19, Глава 1]). *Пусть $r\geqslant0$, $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет $\mathbf{R}f(\omega,d)=0$ для всех $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$ и почти всех $d\in(r,+\infty)$. Если существует множество $\Omega\subset(r,+\infty)$ положительной меры такое, что $f(x)=0$ в $\{x\in\mathbb{R}^n\colon|x|\in\Omega\}$, тогда $f=0$ в $\mathbb{B}(r;+\infty)$.*

Лемма 6. *Пусть* $R > \sqrt{57}/4$ *и* $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^4)$. *Тогда существует ненулевой многочлен* $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такой, что* $q(\Delta)f = 0$ *в* $\mathbb{B}_R^4$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен q из леммы 5, для которого выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\min_0; \max_0)$, и функцию $F = q(\Delta)f$. По лемме 2, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^4)$. Применив лемму 2 к функции F, получаем (3), то есть некоторая линейная комбинация интегралов от F по четырем параллельным ребрам любого куба $\lambda K \subset \mathbb{B}_R^4$ равна нулю.

Расположим куб так, чтобы эти четыре ребра оказались в области нулей функции F (например, для движения, близкого к λ_3 из доказательства леммы 4 и с учетом $\max_1 > \min_0$, это выполняется). Поворачивая куб вокруг одного из ребер, получаем нулевые интегралы от F по всем отрезкам, расстояние от которых до начала координат лежит в пределах от $\min_1$ до $\max_1$. Доопределив F нулем вне $\mathbb{B}_R^3$, имеем нулевые интегралы от F по всем прямым, расстояние от которых до начала координат больше $\min_1$. Отсюда интегралы по всем плоскостям, а значит и по гиперплоскостям, расстояние до которых от начала координат больше $\min_1$, равны нулю, что по утверждению 2 означает $F = 0$ в $\mathbb{B}(\min_1, R)$.

Аналогичными рассуждениями, используя (2), учитывая выполнение $\max_2 > \min_1$, получаем $F = 0$ в $\mathbb{B}(\min_2, R)$.

По определению класса $\mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^n)$, учитывая $\max_3 > \min_2$ и $\min_3 = 0$, имеем нулевые интегралы от F по всем гиперплоскостям, откуда по утверждению 2 получаем $F = 0$ в $\mathbb{B}_R^4$. □

Приведём одно довольно общее утверждение, доказательство которого можно найти в [19], предварительно пояснив смысл входящих в него обозначений.

Пусть $\mathcal{U}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Под $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ понимается класс функций из $C^\infty(\mathcal{U})$ с компактным носителем в $\mathcal{U}$; $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ — пространство распределений на $\mathcal{U}$; $SO(n)$ — группа евклидовых вращений пространства $\mathbb{R}^n$; для распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ и $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ распределение $\lambda\varphi$ определяется на $\mathcal{D}'(\lambda^{-1}\mathcal{U})$ формулой $\langle \lambda\varphi, f(x)\rangle = \langle \varphi, f(\lambda^{-1}x)\rangle$, где $f \in \mathcal{D}(\lambda^{-1}\mathcal{U})$, $\langle \varphi, f\rangle$ обозначает значение φ на элементе f; $\mathcal{D}'_\varphi(\mathcal{U}) = \big\{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})\colon f * \varphi = 0 \text{ в области определения}\big\}$; $C_\varphi^m(\mathcal{U}) = \big(\mathcal{D}'_\varphi \cap C^m\big)(\mathcal{U})$, где $m \in \mathbb{Z}_+$ или $m = \infty$; $A_\varphi^m(\mathcal{U}) = \bigcap_{\tau \in SO(n)} C_{\tau\varphi}^m(\mathcal{U})$.

Утверждение 3 (Предложение 5.9 из [19, Глава 1]). *Пусть* $\mathcal{U} = \mathbb{B}_R^n$ *и* $A_\varphi^\infty(\mathcal{U}) \neq \{0\}$. *Тогда* $A_\varphi^\infty(\mathcal{U})$ *содержит радиальную функцию, отличную от нуля.*

Взяв $\varphi = \chi_K$ — индикатор множества K, получаем

Следствие 1. *Пусть для некоторого* $R > 0$ *выполняется* $\mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^4) = \{0\}$. *Тогда* $\mathfrak{P}^\infty(K, \mathbb{B}_R^4) = \{0\}$.

Лемма 7. *Пусть* $R > \sqrt{3}$, *для некоторой функции* $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^4)$ *и для некоторого многочлена* $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *выполняется* $q(\Delta)f = 0$ *в* $\mathbb{B}_R^4$. *Тогда* $f = 0$ *в* $\mathbb{B}_R^4$.

Доказательство. Пусть разложение на линейные множители многочлена $q(b)$ имеет вид $q(b) = b_0(b - b_1) \cdot \ldots \cdot (b - b_m)$. Рассмотрим $g = (\Delta - b_2) \cdot \ldots \cdot (\Delta - b_m)f$, $g \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^4)$. Для неё имеем дифференциальное уравнение $(\Delta - b_1)g = 0$ в $\mathbb{B}_R^4$, общим решением которого при $b_1 \neq 0$ является $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho) + C_2 N_0(\sqrt{b_1}\rho)$, при $b_1 = 0$ $g(\rho) = C_3 + C_4 \ln\rho$, где J_0, N_0 — функции Бесселя и Неймана соответственно. Учитывая, что $N_0(\sqrt{b_1}\rho)$ и $\ln|\rho|$ имеют особенности в нуле, а $g(\rho)$ непрерывна, то $C_2 = C_4 = 0$. Значит $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho)$ или $g(\rho) = C_3$ в $\mathbb{B}_R^4$. Продолжая её в $\mathbb{R}^4$ этими же функциями, получаем, что вещественно-аналитическая $g \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{R}^4)$. А так как K

является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^3$, то $g = 0$. Рассуждая аналогично для $(\Delta - b_3) \cdot \ldots \cdot (\Delta - b_m) f, \ldots, f$, приходим к утверждению леммы. $\square$

Приведём ещё одно утверждение, которое необходимо будет для доказательства основного утверждения.

Утверждение 4 (Следствие 8.2 из [19, Глава 1]). *Пусть чётная функция $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Тогда существует $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, что $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^1$.*

Построение решения задачи.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай $R \in \left(\sqrt{3}; \sqrt{57}/4\right)$. Исходя из леммы 4 и замечания 1, для указанного R выполняется неравенство $\max_3 < \min_2$. Рассмотрим функцию

$$g(d) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant |d| \leqslant \max_3; \\ e^{1/\left((|d| - \max_3)(\min_2 - |d|)\right)}, & \max_3 < |d| < \min_2; \\ 0, & |d| \geqslant \min_2 . \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условиям утверждения 4, поэтому существует такая $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, что $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^1$. Это означает, что интегралы от f по всем гиперплоскостям, расстояние от которых до начала координат меньше $\max_3$ или больше $\min_2$ равны нулю. Исходя из утверждение 2, $f(\rho) = 0$, если $\rho \geqslant \min_2$, причем не верно, что $f = 0$ п.в., поскольку иначе выполнялось бы $\mathbf{R}f(\omega, d) = 0$ всюду.

По определению величин $\max_3$ и $\min_2$, для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}^n_R)$ гиперплоскость куба λK удалена от начала координат не дальше, чем на $\max_3$, при этом $\lambda K \cap \mathbb{B}^n_{\min_2} \subset \lambda K$, поскольку грани находится на расстоянии большем, чем $\min_2$. Следовательно, ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}(K, \mathbb{B}^n_R)$, что доказывает оценку $\mathcal{R}_{3,n}(K) > R$, откуда $\mathcal{R}_{3,n}(K) \geqslant \sqrt{57}/4$.

Пусть теперь $R > \sqrt{57}/4$, $f\colon \mathbb{B}^4_R \to \mathbb{C}$, $f \in C(\mathbb{B}^4_R)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}^4_R)$. Для $r \in \left(\sqrt{57}/4; R\right)$ рассмотрим $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$: $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{B}^n_{R-r}$. Тогда по лемме 1 функция $\tilde{f} = \varphi * f \in C^\infty(\mathbb{B}^4_r)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}^4_r)$, то есть $\tilde{f} \in \mathfrak{P}^\infty_0\left(K, \mathbb{B}^4_r\right)$. По лемме 6 существует ненулевой многочлен $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}^4_r$. Отсюда по лемме 7 $\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}^4_r$, что означает $\mathfrak{P}^\infty_0\left(K, \mathbb{B}^4_r\right) = \{0\}$. Применив следствие 1, получаем $\mathfrak{P}^\infty\left(K, \mathbb{B}^4_r\right) = \{0\}$. Устремив $r \to R - 0$, приходим к $f = 0$ в $\mathbb{B}^4_R$, что означает $\mathcal{P}_{3,4} = \sqrt{57}/4$.

Рассмотрим произвольной точку $y \in \mathbb{B}^n_R$, где размерность $n \geqslant 4$ и $R > \sqrt{57}/4$. Сечение $\mathbb{B}^n_R$ четырехмерной гиперплоскостью, проходящей через y и начало координат O, является, если там ввести свою систему координат, шаром $\mathbb{B}^4_R$. Если некоторая функция имеет нулевые интегралы по кубам в $\mathbb{B}^n_R$, то и в полученном $\mathbb{B}^4_R$, откуда, учитывая непрерывность f, из доказанного выше следует, что $f \equiv 0$ в $\mathbb{B}^4_R$, значит и в точке y. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. – 1929. – V. 188. – P. 1138–1139.
2. Pompeiu D. Sur une propriete de fonctions continues depended de deux variables realles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1929. – V. 15, № 5. – P. 265–269.
3. Nicolesco M. Sur un theoreme de Pompeiu / M. Nicolesco // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1930. – V. 16, № 5. – P. 817–822.
4. Ilieff L. Sur un probleme de Pompeiu / L. Ilieff // Ann. Univ. Sofia Fac. Phys., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 111–114.

5. Christov C. Sur laquation integrale generalisee de Pompeiu / C. Christov // Ann. Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 167–178.
6. Произволов В. В. Об интегралах, постоянных на конгруентных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21, №2. – С. 183–186.
7. Заставный В. П. Теорема о нулях преобразования Фурье индикатора и ее применение / В. П. Заставный // Новосибирск: Ред. «Сиб. мат. журн.». – 1986. – 18 с. Деп. в ВИНИТИ 29.10.87: № 701-в. 87.
8. Ebenfalt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfalt // Ann. Acad. Sci. Ser. A. J. Math. – 1993. – V. 24. – P. 16–31.
9. Garofalo N. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. – 1991. – v. 56. – p. 1–28.
10. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183-190.
11. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723-–2736.
12. Volchkov V. V. New result in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // IMCP. – 2003. – V. 16.
13. Котляр Б. Д. Плотности укладок ограниченных множеств / Б. Д. Котляр // Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР. – 1987. – Т. 126, №3. – С. 469–472.
14. Sitaram A. On an analogue of the Wiener Tauberian theorem for symmetric spaces of the non-compact type / A. Sitaram // Pacific J. Math. – 1988. – V. 133. – P. 197–208.
15. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SV(1,1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourirer (Grenoble). – 1992. – V. 42. – P. 671–694.
16. Agranovsky M. L. Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – V. 19. – P. 1522–1525.
17. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
18. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
19. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
20. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185-194.
21. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
22. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
23. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
24. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
25. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
26. Chang D. C. The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group / D. C. Chang, W. Eby // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2008. – V. 12. – pp. 2619–2640.
27. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры / В. В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.
28. Машаров П. А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело / П. А. Машаров // Вісник дніпропетровського університету. Математика. – 2001. – вип. 6. – С. 72–81.
29. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю / В. В. Волчков // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 3–22.
30. Машаров П. А. Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 163–171.
31. Иванисенко Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника / Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 76–83.

32. Машаров П. А. О функциях с нулевыми интегралами по отрезкам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 82–90.
33. Машаров П. А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю / П. А. Машаров // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
34. Елец Л. В. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю / Л. В. Елец, П. А. Машаров // Украинский математический журнал. – 2009. – Т. 61. – С. 61–72.
35. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.
36. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции : Пер. с англ. П.А. Кучмента. - М. : Мир, 1987 с.

Поступила в редакцию 25.06.2020 г.

THE LOCAL POMPEIU PROBLEM FOR THE CUBE IN THE MULTIDIMENSIONAL SPACE

P. A. Masharov

The value of the smallest radius of the ball is obtained, in which zero of the integrals is equal to zero of the function. Integrals on tree-dimensional cube in the multidimensional space are considered.

Keywords: the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius, the properties of functions with vanishing integrals by cubes, the local Pompeiu problem, the Pompeiu radius for the cube.

Машаров Павел Анатольевич
кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
pavelmasharov@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
+38-050-5653907

Masharov Pavlo Anatoliyovych
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National University, Donetsk

УДК 519.21

О ПЛОТНОСТЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, ПОРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И СО СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ, ВОЗМУЩЕННЫХ ГАУССОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2020. ***А. Д. Шаташвили, Т. А. Фомина, Н. Н. Ивахненко, Е. Н. Папазова***

В предлагаемой работе продолжаются исследования, начатые нами в работах [1, 2], об абсолютной непрерывности и эквивалентности гауссовских мер, при их нелинейных преобразованных (отображениях), содержащих случайный параметр *T(x,z)*, в абстрактном гильбертовом пространстве *H* где *z*- случайный параметр из пространства элементарных событий $\Omega, z \in \Omega$, рассматриваются нелинейные уравнения с неограниченными линейными операторами представленными в виде «R-корреляционного преобразования». Причем для получения основных результатов, будут использованы уже доказанные теоремы в работах [1, 2] и некоторые утверждения и формул из работ [3, 5–7]. Этому вопросу будет посвящён весь второй параграф, который состоит из двух пунктов. В првом пункте: в абстрактном гильбертовом пространстве рассматриваются некоторые трансцендентные нелинейные уавнения с неограниченными линейными операторами и со случайным параметром, возбуждённым гауссовским случайным элементом, а во втором: пункте в функциональном гильбертоврм пространстве функции,определённых на некотором отрезке,принимающих свои значения из *H* и интегрируемые со своим квадратом по норме *H*, рассматриваются эволюционные нелинейные дифференциальные уравнения,возбуждённые гауссовским случайным процессом

***Ключевые слова*:** оснащенное гильбертово пространство, расширенный стохастический интеграл, абсолютная непрерывность и эквивалентность мер, плотность Радона-Никодима, ортонормированный базис, Гильберто- Шмидтовские операторы, нелинейные дифференциальные уравнения, обобщённая случайная величина - «белый шум», случайные помехи, «R-корреляционные преобразования».

Для конкретной постановки задачи и полноценного изложения результатов придется из работ [1, 2] и [3, 5–7] повторить некоторые факты в виде утверждений и некоторые формулы, ранее доказанные в указанных работах.

§1 Итак, допустим, что *H* -сепарабельное, вещественное, абстрактное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$, θ_H - σ-алгебра борелевских подмножеств пространства *H*, а μ-гауссовская мера на θ_H с ядерным корреляционным оператором R^2. Таким образом, имеем вероятностное пространство $\{H,\,\theta_H,\,\mu\}$. Далее, обозначим через Ω - пространство элементарных событий и построим фиксированное вероятностное пространство $\{\Omega,\,\theta_\Omega,\,\nu\}$, где θ_Ω -σ-алгебра измеримых подмножеств Ω, а ν - вероятностная мера на θ_Ω. Аналогично тому, как в работах [1, 3], вводим аналог «расширенного стохастического интеграла» в следующем виде:

$$\mathbf{l_A^{(R)}(f)(x,y) = (f(x,z), Ax) - SpA^*f'_x(x,z)R^2, x \in H, z \in \Omega} \tag{1}$$

при этом простроим оснащение, порожденное оператором *R* в виде:

$$\mathbf{H_+ = RH = H_0 \subset H \subset H_- = R^{-1}H} \tag{2}$$

а также пространство гильбертово-шмидтовских операторов $\mathbf{H_2(H_0, H_-)}$, отображающих $\mathbf{H_+}$ в $\mathbf{H_-(H_+ = H_-^*)}$, где знак * - означает операцию сопряжения, т.е., например, оператор

 © Шаташвили А. Д., Фомина Т. А., Ивахненко Н. Н., Папазова Е. Н., 2020

$\mathbf{A}^*$ является оператором сопряженным к оператору $\mathbf{A}$ и т.д. Соответственно, определяются скалярные произведения:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})_+ = (\mathbf{R^{-1}x},\mathbf{R^{-1}y})_{\mathbf{H}}\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{H} \text{ в } H^+$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})_- = (\mathbf{R^{-1}x},\mathbf{R^{-1}y})_{\mathbf{H}}\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{H} \text{ в } H^-$$

Очевидно, что формула (1) имеет смысл, если оператор $\mathbf{A}\in\mathbf{H_2}(\mathbf{H_0},\mathbf{H}_-)$,и, как это было показано в [3], функционал l_A^R составляет квазиядерную структуру и распространяется на такие операторы $\mathbf{A}$, чтобы оператор $\mathbf{ARA}^*$ был ограниченным оператором в H,оператор $\mathbf{RA}^*$ является гильберто-шмидтовским оператором в H а оператор $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ при каждом фиксированном $z\in\Omega$, является линейным ограниченным оператором по $\mathbf{x}$, действующим в H. Далее, составим декартовое произведение двух пространств H и Ω, $H\times\Omega$, и построим вероятностное пространство по этому произведению $L_{H,\Omega}$:

$$L_{H,\Omega} = \{H\times\Omega, \sigma\left(\theta_H\times\theta_\Omega\right), \mu\otimes\nu\} \tag{3}$$

где $\sigma\left(\theta_H\times\theta_\Omega\right)$ обозначает σ - алгебру борелевских подмножеств пространства $H\times\Omega$, а $\mu\otimes\nu$ - вероятностная мера, определенная на ней. Рассмотрим теперь некоторую измеримую нелинейную функцию, определенную на пространстве $L_{H,\Omega}$, $T(x,z)$,$x\in H$, $z\in\Omega$ и со значениями из H и с ее помощью построим вероятностную меру λ в следующем виде

$$\lambda\left(A\right) = \mu\otimes\nu\left(T^{-1}(A)\right), A\in H \tag{4}$$

и предположим, что это нелинейное преобразование имеет вид R - корреляционного преобразования:

$$T(x,z) = x + R\varphi\left(x,z\right), x\in H, z\in\Omega \tag{5}$$

и допустим, пока, что оно обратимо, т.е., существует его обратное преобразование $S=T^{-1}$, и оно также «R - корреляционно» и имеет вид

$$S(x,z) = T^{-1}(x,z) = x + R\psi\left(x,z\right), x\in H, z\in\Omega \tag{6}$$

Ясно, что мы должны найти условие обратимости T, чтобы доказать справедливость формулы (6). Корреляционный оператор $\mathbf{R^2}$, как симметричное ядро, обладает собственными числами и собственными векторами. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ и $\{\mathbf{e}_k\}$ - последовательности собственных чисел и собственных векторов соответственно оператора $\mathbf{R^2}$. В работах [5–7] было показано, что если преобразование $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ при каждом z голоморфно и взаимооднозначно и если оно обратимо, т.е. существует $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{T^{-1}}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ при каждом фиксированном $z\in\Omega$, то между функциями $\varphi\left(x,z\right)$ и $\psi\left(x,z\right)$ существует такая связь:

$$\psi\left(x,z\right) = -\varphi\left(\mathbf{S}x,z\right), x\in H, z\in\Omega \tag{7}$$

и если $\varphi\left(x,z\right)$ дифференцируемо по x, то и $\psi\left(x,z\right)$ также дифференцируемо по x. Предположим,что функция $\varphi\left(x,z\right)$ при каждом z дифференцируемо по x и введем обобщенную величину ξ следующим образом

$$\xi = \mathbf{R}^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x,\mathbf{e}_k)}{\lambda_k}\mathbf{e}_k \tag{8}$$

Очевидно, что элемент ξ в пространстве $H_0 = \mathbf{R}H$ имеет единичную корреляцию и как показано в работе [7] по этому элементу ξ можно построить расширенный стохастический интеграл

$$\langle \varphi(x,z), \xi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} [(\varphi(x,z), \mathbf{e}_k)(\xi, \mathbf{e}_k) - (\varphi'_x(x,z)\mathbf{R}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k)] \tag{9}$$

при условии, что существуют

$$\int_H \mathrm{Sp}(\psi'_x(x,z)\mathbf{R}_x^2\psi'^*_x(x,z))\mu(dx) < \infty \tag{10}$$

и

$$\int_H \mathrm{Sp}(\psi'_x(x,z)\mathbf{R}^2\psi'^*_x(x,z))\mu(dx) < \infty \tag{11}$$

и в этом случае выражение (9) имеет смысл, а это означает, учитывая соотношения (7), что можно построить расширенный стохастический интеграл и по функции $\psi(x,z) : \langle \psi(x,z), \xi \rangle$ (см. [7]). Поэтому как в той же работе [7] было показано,для того чтоб «расширенные стохастические интегралы» $\langle \varphi(x,z), \xi \rangle$ и $\langle \psi(x,z), \xi \rangle$ при любом фиксированном $z \in \Omega$ существовали, надо наряду с условиями (10) и (11) чтобы выполнить еще и такие условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi'_x(x,z)\mathbf{R}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k) = \mathrm{Sp}\varphi'_x(x,z)\mathbf{R} < \infty \tag{12}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi'_x(x,z)\mathbf{R}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k) = \mathrm{Sp}\psi'_x(x,z)\mathbf{R} < \infty \tag{13}$$

Тогда меры λ и μ эквивалентны и плотность Радона-Никодима, например, $\frac{d\lambda}{d\mu}(x)_z = \rho_z(x)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \rho_z(x) = \tfrac{d\lambda}{d\mu}(x)_z = |\det S'_x(x,z)| \exp\{-\langle \psi(x,z), \xi \rangle - \\ -\mathrm{Sp}\psi'_x(x,z)R - \tfrac{1}{2}\|\psi(x,z)\|_H^2\} \end{aligned} \tag{14}$$

Но для того, чтобы воспользоваться формулой (14) мы должны получить условие обратимости преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ при каждом $z \in \Omega$, т.е. условие существования обратного преобразования $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{z})$, его голоморфности и однозначности. Тогда мы сможем утверждать, что при выполнении этих условий, преобразования $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ существует и функция $\psi(x,z)$ определяется из соотношения (7). Такие же распределения имеет место для существования $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и его обратимости. Введем последовательность векторов в H, $\{\alpha_\mathbf{k}\}$ следующим образом:

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k}\mathbf{e}_k, \ (k = 1, 2, ...) \tag{15}$$

и по ним построим другую последовательность при каждом и z чисел

$$\varphi_k^{(z)}(x) = (\mathbf{R}\varphi(x,z), \alpha_k)_H \tag{16}$$

В работе [7] доказано, чтоб существовала функция $\varphi(x,z)$, представленная в формуле (5), надо чтобы сходился по $x \in H$ и по $z \in \Omega$ следующий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\mathbf{R}\varphi(x,z), \alpha_k \right)_H \right]^2 < \infty \tag{17}$$

и тогда функция $\varphi(x,z)$ представляется в виде сходящего ряда Фурье (см. [10])

$$\varphi(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(z)}(x) e_k \tag{18}$$

Тогда, в силу формулы (7) по функции $\varphi(x,z)$ строится и функция $\psi(x,z)$, и поэтому доказывается построение обратного преобразования $\mathbf{S}_{(\mathbf{x},\mathbf{z})} = \mathbf{T}^{-1}_{(\mathbf{x},\mathbf{z})}$ и одновременно голоморфность и взаимнооднозначность. При этом, если они еще непрерывны и дифференцируемы по x, там же в той работе [7] доказывается, что чтобы их производные по x при каждом $z \in \Omega$ были обратимы достаточно, чтоб сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \mathbf{R}\varphi'_x(x,z), \alpha_k \right|_H^2 < \infty \tag{19}$$

где $|\cdot|_H$ означает норму оператора в пространстве L_2, а сам оператор $\varphi'_x(x,z)$, примененный, например, к вектору $\mathbf{u} \in H$, определяется как

$$\mathbf{R}\varphi'_x(x,z) \cdot \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{R}\varphi'_x(x,z) \cdot \mathbf{u}, \alpha_k \right) \mathbf{e}_k \tag{20}$$

Кроме того, там же в работе [7] доказывается, что оператор $\mathbf{R}\varphi'_x(x,z)$ ограничен по норме при каждом $z \in \Omega$ и если

$$|\mathbf{R}\varphi'_x(x,z)| < K = const \tag{21}$$

то производные преобразований $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ существуют и взаимно обратимы и ограничены, т.е.

$$\left| \left(\mathbf{T}'_x(x,z) \right)^{-1} \right|_H = |\mathbf{S}'_x(x,z)|_H < \infty \tag{22}$$

Рассмотрим далее два симметричных оператора $\mathbf{C}(x,z)$ и $\bar{\mathbf{C}}(x,z)$, которые при каждом фиксированном $z \in \Omega$ действует в пространстве H:

$$\bar{\mathbf{C}}(x,z) = \mathbf{R}\psi'_x(x,z) + \psi'(x,z)^*\mathbf{R} + \mathbf{R}\psi'_x(x,z)\psi'_x(x,z)^*\mathbf{R} \tag{23}$$

и

$$\mathbf{C}(x,z) = \mathbf{R}\varphi'_y(y,z) + \varphi'(y,z)^*\mathbf{R} + \mathbf{R}\varphi'_y(y,z)\varphi'_y(y,z)^*\mathbf{R} \tag{24}$$

и которые порождают собственные числа $\{c_k(x,z)\}$ и $\{\bar{c}_k(x,z)\}$ соответственно. Здесь сразу надо оговорить, что учитывая формулу (7), все условия, которые накладываются на функцию $\varphi(x,z)$, автоматически этим же условиям будет удовлетворять функция $\psi(x,z)$, поэтому ниже мы их не будем повторять. Далее, так как корреляционный оператор $\mathbf{R}^2$ является ядерным, он допускает факторизацию.

$$\mathbf{R^2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^* \tag{25}$$

где оператор $\mathbf{R}$ является оператором Гильберта-Шмидта, поэтому

$$|\mathbf{R}|_H^2 < \infty \tag{26}$$

Рассмотрим так же оператор

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \varphi'_x(x, z)\mathbf{R} \tag{27}$$

Очевидно, что в силу условия (19) и (26) операторы $\mathbf{C^2}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ и $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ при любом фиксированном $z \in \Omega$ ограничены и имеют ограниченный след

$$\mathrm{Sp}\mathbf{N}(x, z) < \infty \tag{28}$$

и

$$\mathrm{Sp}\mathbf{C}^2(x, z) < \infty \tag{29}$$

Аналогично к (27), если мы введем функцию $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

$$\bar{\mathbf{N}}(x, z) = \psi'_x(x, z)\mathbf{R} \tag{30}$$

убеждаемся, что также

$$\mathrm{Sp}\bar{\mathbf{N}}(x, z) < \infty \tag{31}$$

и

$$\mathrm{Sp}\bar{\mathbf{C}}^2(x, z) < \infty \tag{32}$$

Далее, объединим условия (27) и (30) и то, что функция $\varphi'_x(x, z)$ (а значит и функция $\psi'_x(x, z)$ в силу (27)) при любом фиксированном $z \in \Omega$ в силу условий (19) - (21), существует и непрерывно ограничена, мы получаем еще одно общее условие: при любом фиксированном $z \in \Omega$ (см. [7])

$$\int\limits_H \mathrm{Sp}\left[\varphi'(x, z)\mathbf{R}^2\varphi'^*(x, z) + \psi'(x, z)\mathbf{R}^2\psi'^*(x, z)\right]\mu(dx) < \infty \tag{33}$$

Так как преобразование $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ дифференцируемы по x, $\mathbf{T}'_x(x, z)$ и $\mathbf{S}'_x(x, z)$, они существуют, взаимнообратимы и ограничены, как это все было выше показано и, учитывая формулы (28), (29), (31) и (32), мы можем вычислить в явном виде их детерминанты по определению (см. например [8], [9]) в таком виде

$$|\det T'_x(x, z)| = D(x, z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + c_k(x, z))^{-c_k(x,z)} \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\mathbf{C}^2(x, z)\right\} \tag{34}$$

и

$$|\det S'_y(y,z)| = \bar{D}(y,z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\bar{c}_k(y,z))^{-\bar{c}_k(y,z)} \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\bar{\mathbf{C}}^2(y,z)\right\} \tag{35}$$

где $\{\bar{c}_k(x,z)\}$ - последовательность собственных чисел оператора $\bar{\mathbf{C}}$ Теперь у нас определились все достаточные условия для того, чтобы сформулировать новую теорему, которая доказывается аналогично как в работе [7] и которые обеспечивают эквивалентность мер μ и ν . Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть на вероятном пространстве $L_{H,\Omega}$ определены два нелинейных «R - корреляционных» преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ со значениями из $\mathbf{RH}$*

$$\mathcal{T}(x,z) = x + R\varphi(x,z) = y,\ x,y \in H,\ z \in \Omega \tag{36}$$

и

$$\mathcal{S}(y,z) = y + R\psi(y,z) = x,\ x,y \in H,\ z \in \Omega \tag{37}$$

и которые удовлетворяют следующим условиям:

1. *При каждом фиксированном $z \in \Omega$ они взаимообратимы, $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{z})$, голоморфны, взаимнооднозначны и непрерывны, причем*

$$\psi(y,z) = -\varphi(Sy,z) \tag{38}$$

2. *Элемент $x \in H$ имеет гауссову меру μ с нулевым математическим ожиданием и с ядерным корреляционным оператором $\mathbf{R^2}$, который допускает факторизацию (25), (26) в связи с чем симметричный оператор $\mathbf{R}$ является оператором Гильберта-Шмидта со спектром $\{\mathbf{e}_k\}$ собственных векторов и $\{\lambda_k\}$ собственных чисел.*

3. *Преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы и выполняются условия (10), (11), (17), (19), (21), (29), (32) и (33), где последовательность $\{\lambda_k\}$ и операторы $\mathbf{C}$ и $\bar{\mathbf{C}}$ определены из (15), (23) и (24) соответственно.*
   Тогда существует «расширенный стохастический интеграл» (19), существует производные по x и y $\mathbf{T}'_x(x,z)$ и $\mathbf{S}'_y(y,z)$, они взаимно обратимы и ограничены, имеет место (22), в явном виде вычисляются определители $D(x,z)$ $\bar{D}(y,z)$ по формулам (34) и (35) и преобразованная мера λ_z и исходная гауссовская мера μ при каждом фиксированном $z \in \Omega$, эквивалентны между собой $\left(\mu \sim \lambda^{(z)}\right)$ и соответствующие плотности Радона-Никодима вычисляется по формулам

$$\frac{d\lambda_z}{d\mu}(x) = \rho_z(x) = \bar{D}(x,z)\cdot\exp\left\{-\langle\psi(x,z),\xi\rangle - \frac{1}{2}\|\psi(x,z)\|_H^2\right\} \tag{39}$$

$$\frac{d\mu}{d\lambda^{(z)}}(y) = \bar{\rho}_{(z)}(y) = D(y,z)\cdot\exp\left\{-\langle\varphi(y,z),\xi\rangle - \frac{1}{2}\|\varphi(y,z)\|_H^2\right\} \tag{40}$$

где обобщённая величина ξ определяется из (8), или в прежних обозначениях «расширенного стохастического интеграла» в виде $\ell_A^{(R)}(f)$ из формулы (1), имеем

$$\frac{d\lambda^{(z)}}{d\mu}(x) = \rho_{(z)}(x) = \bar{D}(x,z) \cdot \exp\left\{-\ell_{R^{-1}}^{(R)}(\psi)(x,z) - \frac{1}{2}\|\psi(x,z)\|_H^2\right\} \tag{41}$$

$$\frac{d\mu}{d\lambda^{(z)}}(y) = \bar{\rho}_{(z)}(y) = D(y,z) \cdot \exp\left\{-\ell_{R^{-1}}^{(R)}(\varphi)(y,z) - \frac{1}{2}\|\varphi(y,z)\|_H^2\right\} \tag{42}$$

Замечание 1. Если, например, при каждом фиксированном $z \in \Omega$ существует $|\det S'_x(x,z)$ и $\mathrm{Sp}\psi'(x,z)\,R$, т.е. $\left|\bar{D}(x,z)\right| < \infty$ в (34) и имеет место (31), то тогда плотность Радона-Никодима $\rho_z(x) = \frac{d\lambda_z}{d\mu_z}(x)$ можно вычислить по формуле

$$\rho_z(x) = |\det S'_x(x,z)| \cdot \exp\left\{-\langle\psi(x,z),\xi\rangle - \mathrm{Sp}\psi'_x(x,z)\mathbf{R} - \frac{1}{2}\|\psi(x,z)\|_H^2\right\} \tag{43}$$

Аналогично можно вычислить и $\bar{\rho}_z(y)$, если $|D(x,z)| < \infty$ и $\mathrm{Sp}\varphi'_y(y,z) = \mathrm{Sp}N(y,z) < \infty$, т.е. имеет место (28).

Тогда $\bar{\rho}_{(z)}(y) = \frac{d\mu}{d\lambda_{(z)}}(y)$ можно вычислить так:

$$\bar{\rho}_{(z)}(y) = |\det T'_y(y,z)| \cdot \exp\left\{-\langle\varphi(y,z),\xi\rangle - \mathrm{Sp}\varphi'_y(y,z)\mathbf{R} - \frac{1}{2}\|\varphi(y,z)\|_H^2\right\} \tag{44}$$

где обобщенная величина ξ определяется из (8).

Далее, предположим, что Теорема 1 имеет место не только для одного фиксированного $z = z_0$, а таких параметров z много, при которых условия, перечисленные в Теореме 1 с участием параметра z сохраняют результаты самой теоремы. Обозначим через $A \subset \Theta_\Omega$ множество таких $z \in A$, для которых справедлива Теорема 1 (кстати, очевидно, что все пространство Ω также может совпадать с множеством A, т.к. $\Omega \in \Theta_\Omega$).Тогда на основании Теоремы 3 и Теоремы 4, доказанной в работе [2], или Теоремы 1 доказанной в [1] имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для нелинейных «R - корреляционных» преобразований $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y},\mathbf{z})$, представленных в виде (36) и (37), выполняются все условия Теоремы 1 . для всех $z \in A$. Тогда вероятностная мера λ, определенная на σ-алгебре $\sigma(\Theta_H \times \Theta_\Omega)$ и гауссовская мера μ определенная на σ-алгебре Θ_H эквивалентны $(\lambda \sim \mu)$ или $(\lambda << \mu; \mu << \lambda)$ и соответствующие плотности Радона-Никодима вычисляются по формулам*

$$\rho(x) = \frac{d\lambda}{d\mu}(x) = \int\limits_A \rho_{(z)}(x)\nu(dz) \tag{45}$$

и

$$\bar{\rho}(y) = \frac{d\mu}{d\lambda}(y) = \int\limits_A \bar{\rho}_{(z)}(y)\nu(dz),\ x,y \in \mathbf{R}H \tag{46}$$

где подынтегральные функции $\rho_z(x)$ и $\bar{\rho}_z(y)$ вычисляются по формулам (39) и (40) или (43) или (44) соответственно.

§1 В настоящем параграфе мы будем рассматривать случаи, когда нелинейные «R -корреляционные» преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{y},\mathbf{z})$, заданные формулами (36) и (37) являются некоторыми нелинейными уравнения в абстрактном и функциональном гильбертовых пространствах, возбужденные гауссовскими элементами и гауссовскими процессами, и используя результаты Теоремы 1 и Теоремы 2, докажем эквивалентность мер, порожденных решениями этих уравнений относительно исходной гауссовской меры и в явном виде выпишем соответствующие плотности Радона-Никодима.

П 2.1 В этом пункте мы в абстрактном гильбертовом пространстве H, которое было задано в §1 будем рассматривать некоторое нелинейное уравнение

$$\mathbf{A}y + g\left(y,z\right) = \xi \tag{47}$$

для которого предположим, что выполняются следующие условия:

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ может быть неограниченным оператором с плотной в H областью определения $D(\mathbf{A}) \subset H$ и существует обратный к нему ограниченный оператор $\mathbf{A^{-1}}$

2. ξ-гауссовский случайный элемент с математическим ожиданием равны нулю, $\mathbf{M}\xi = \mathbf{0}$, и с ядерным корреляционным оператором $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}_{\xi}$. Через $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}_{\xi}$ обозначим гильберто-шмидтовский оператор, удовлетворяющий следующую факторизацию:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{2}}_{\xi} = \mathbf{R}_{\xi} \cdot \mathbf{R}^{*}_{\xi} \tag{48}$$

   а через μ_{ξ} обозначим меру, порожденной элементом ξ на σ -алгебре Θ_H

3. z-случайный параметр (элемент) из измеримого пространства $(\Omega, \theta_{\Omega})$, независимый от ξ и порождающую меру ν на θ_{Ω}

4. $g(y,z)$ — нелинейная функция определенная на декартовом произведении $H \times \Omega$, со значениями в пространстве $R_{\xi}H$ и имеющую ограниченную производную $g'_y(y,z)$ для всех $z \in \Omega$

Предполагаем, что уравнение (47) однозначно разрешимо относительно его решения y и обозначим через μ_y меру, порожденную случайным элементом y (этим мы предполагаем обратимость и однозначность преобразования (47)). Наряду с уравнением (47) рассмотрим уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \xi \tag{49}$$

где линейный оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию 1). Ставится вопрос об абсолютной непрерывности и эквивалентности меры μ_y, соответствующей решению уравнения (47) у, относительно меры μ_x, соответствующей решению уравнения (49), элементу x. Ясно, что в связи с тем, что уравнение (49) является линейным, элемент является гауссовским случайным элементом и из того же уравнения (49) имеем,$\mathbf{M}x = 0$, а его корреляционный оператор $\mathbf{R}^2_x$ определяется так

$$\mathbf{R}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathbf{-1}}\mathbf{R}^{\mathbf{2}}_{\xi}\mathbf{A}^{\mathbf{-1}*} \tag{50}$$

и из (48) и (50) легко определяется, что

$$\mathbf{R_x} = \mathbf{A^{-1}R_\xi} \tag{51}$$

где оператор R_x удовлетворяет факторизационному уравнению

$$\mathbf{R_x^2} = \mathbf{R_x R_x^*} \tag{52}$$

Разрешив уравнение (47) относительно, мы получим

$$y + \mathbf{A}^{-1} g(y, z) = \mathbf{A^{-1}}\xi$$

или сравнив с уравнением (49) последнее, окончательно имеем

$$y + \mathbf{A}^{-1} g(y, z) = x \tag{53}$$

т.е. мы получили нелинейное преобразование гауссовского случайного элемента x в элемент y . Теперь очевидно, можно построить на σ-алгебре $\sigma\left(\theta_H \times \theta_\Omega\right)$ пространство $L_{H,\Omega}$ меру λ, которая зависит от двух компонент $y \in H$ и $z \in \Omega$, и поэтому при каждом фиксированном $z \in \Omega$, эта мера совпадает с мерой μ_y, порожденной случайным элементом y на σ-алгебре θ_H. В этом случае мы будем обозначать

$$\lambda^{(z)} = \mu^{(z)} \tag{54}$$

Теперь, для того, чтобы применить доказанную Теорему 1 к преобразованию (53) мы должны показать, что уравнение (53) можно привести к виду

$$y + \mathbf{R}_x \varphi\left(y, z\right) = x \tag{55}$$

а это возможно тогда, когда разрешимо уравнение

$$\mathbf{A}^{-1} g(y, z) = \mathbf{R}_x \varphi(y, z) \tag{56}$$

относительно к функции $\varphi(y, z)$. Но в силу (51) это возможно, когда уравнение

$$g(y, z) = \mathbf{R}_x \varphi(y, z) \tag{57}$$

разрешимо относительно функции $\varphi(y, z)$, т.е.

$$y(y, z) = \mathbf{R}_x^{-1} g(y, z) \tag{58}$$

но в силу условия 4), которое приведено выше при постановке задачи, оно всегда разрешимо и имеет место соотношение (58).Следовательно, применив Теорему 1 к поставленной задаче, имеем следующую теорему:

Теорема 3. *Если для каждого фиксированного $z \in \Omega$ уравнения (47) и (49) выполняются все условия Теоремы 1 и условий 1), 2), 3), 4), то меры $\mu_y^{(z)}$ и μ_x, порожденные решением нелинейного уравнения (47) и гауссовским случайным элементом соответственно эквивалентны, $\left(\mu_y^{(z)} \sim \mu_x\right)$ и, например, плотность Радона-Никодима вычисляется в явном виде*

$$\rho_{(z)}\left(u\right) = \frac{d\mu^{(z)}}{d\mu_x}\left(u\right) = \left|\det\left(I + \varphi'_u\left(u, z\right)\right)\right| \cdot \exp\left\{-\ell_{R_x^{-1}}^{(R_x)}\left(\varphi\right)\left(u, z\right) - \frac{1}{2}\left\|\varphi\left(u, z\right)\right\|_H^2\right\} \tag{59}$$

А если кроме того известно, что $g(u,z) \in R_\xi H$, то

$$\rho_{(z)}(u) = \frac{d\mu^{(z)}}{d\mu_x}(u) = |\det(I + \varphi'_u(u,z))| \times \\ \times \exp\left\{-\langle \varphi(u,z), \alpha\rangle - Sp\left[g'_u(u,z)\cdot A^{-1}\right] - \frac{1}{2}\|\varphi(u,z)\|_H^2\right\} \tag{60}$$

где обобщенный элемент α определяется из

$$\alpha = \mathbf{R}_x^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x,\mathbf{e}_k)_H}{\lambda_k}\mathbf{e}_k \tag{61}$$

а $\{\lambda_k\}$ и $\{e_k\}$ - последовательность собственных чисел и собственных векторов корреляционного оператора $\mathbf{R_x}$,а символ $\langle ...\rangle$ обозначает стохастический интеграл. Предположим, далее,что Теорема 1 и Теорема 3 справедливы не только для одного фиксированного $z \in \Omega$ а для целого множества таких элементов из пространства Ω. Обозначим такое множество через $B \in \Theta_\Omega$, т.е. имеем, что для любого элемента $z \in B$ справедлива Теорема 3 Тогда на основании Теоремы 2,доказанной высше, в первом параграффе, имеет место и следующая теорема

Теорема 4. *Предположим, что для любого $z \in B$ где B множество $B \in \theta_\Omega$ (множество $\mathbf{B}$ может совпадать со всем пространством Ω) справедлива Теорема 3 со всеми перечисленными условиями. Тогда мера μ_y, порожденная решениями нелинейного уравнения (47) и гауссовская мера μ_x порожденная гауссовским элементом x, решения уравнения (49) эквивалентны и, например, плотность Радона-Никодима $\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(u) = \rho(u)$ вычисляется в явном виде*

$$\rho(u) = \int_B \rho_z(u)\nu(dz) \tag{62}$$

где функция $\rho_z(u)$ определяется из формулы (59), а в том случае, когда $g(u,z) \in R_\xi H$, из формулы (60)

П. 2.2. Обозначим через $L_2 = L_2\{[0,a], H\}$ гильбертово пространство функций, определенных на интервале $[0,a]$, принимающих свои значения из гильбертового пространства H и интегрируемых со своим квадратом по норме H, со скалярным произведением и нормой

$$(f,g)_{L_2} = \int_0^a (f(t),g(t))_H dt, \|f\|_{L_2}^2 = \int_0^a \|f(t)\|_H^2 dt < \infty, f,g \in L_2, \\ f(t),g(t) \in L_2\{[0,a], H\} \tag{63}$$

Пусть далее $\mathbf{B(t,s)}$ обозначает операторную функцию при каждом $t,s \in [0,a]$, действующую в пространстве H. Через $|B(t,s)|_H$, будем обозначать его норму в пространстве H. Известно, что операторная функция $\mathbf{B(t,s)}$, как ядро, в пространстве L_2 порождает интегральный оператор $\mathbf{B}$ по слудующему принципу:

$$(B\varphi)_t = \int_0^a B(t,s)\varphi(s)ds, \varphi \in L_2, \varphi(t) = L_2\{[0,a], H\} \tag{64}$$

Обозначим норму в пространстве L_2 следующим образом

$$|\mathbf{B}|_{L_2}^2 = \int_0^a \int_0^a |\mathbf{B}(\mathbf{t},\mathbf{s})|^2 dtds < \infty \tag{65}$$

Такая норма, введенная по формуле (65) называется гильберто-шмидтовской нормой, а оператор $\mathbf{B}$ с такой нормой-оператором Гильберта-Шмидта.

Замечание 2. Ясно, что, гильбертово пространство $L_2\{[0,a],H\}$ является той частью основного абстрактного гильбетрового пространства H, элементы которого являются функциями, отвечающими определению самого пространства $L_2\{[0,a],H\}$, поэтому в нем скалярное произведение и норма, определенная по формуле (63) также как определяются скалярное произведение и норма пространства H, $(\cdot,\cdot)_H$,$\|\cdot\|_H$

В гильбертовом пространстве $L_2\{[0,a],H\}$ рассмотрим теперь систему из двух эволюционных дифференциальных уравнений: одно нелинейное

$$\begin{gathered}\frac{dy(t)}{dt} - A(t)y(t) + f(t,y(t),z(\cdot)) = \xi(t), 0 \leqslant t \leqslant a, \\ y(0) = 0, \xi(0) = 0 \,(\mathrm{mod}\, P)\end{gathered} \tag{66}$$

а второе уравнение такое же, что и первое, но без нелинейного слагаемого, т.е. линейная часть уравнения (66)

$$\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) = \xi(t), 0 \leqslant t \leqslant a, x(0) = \xi(0) = 0 \,(\mathrm{mod}\, P) \tag{67}$$

и для которых ниже будем предполагать следующие условия:

1. операторы $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ являются семейством линейных, вообще говоря, неограниченных операторов с плотной независящей от t областью определения $D(\mathbf{A}) \subseteq H$, кроме того, операторное семейство $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ являются производящим операторами эволюционного семейства $\mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s})$ ограниченных операторов при $0 \leqslant t, s \leqslant a$ действующих в H, сильно непрерывно зависящих от t и s и удовлетворяющих условию

$$\int_0^a \int_0^a |U(t,s)|_H^2 \, dtds < \infty \tag{68}$$

   Отсюда видно, что по определению (64) и (65) интегральный оператор $\mathbf{U}$, действующий в гильбертовом пространстве L_2, порожденный ядром $U(t,s)$ является оператором Гильберта-Шмидта.

2. $\xi(t)$-гауссовский случайный процесс, определенный на отрезке $[0,]$, со значениями из H, нулевым математическим ожиданием, $\mathbf{M}\xi(t) = 0, (\mathrm{mod}\, P)$ и с корреляционной операторной функцией $\mathbf{R}_\xi^2(t,s), t,s \in [0,a]$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^a \mathbf{R}_\xi^2(t,t)\, dt < \infty \tag{69}$$

   Иначе говоря, операторная функция $\mathbf{R}_\xi^2(t,s)$, действующая в H как ядро, в пространстве L_2 по принципу (65) порождает ядерный корреляционный оператор $\mathbf{R}_\xi^2$

гауссовского случайного элемента $\xi \in L_2$ Кроме того, $\mathbf{R}_\xi^2(t,s)$ допускает следующую факторизацию

$$\mathbf{R}_\xi^2(t,s) = \int_0^a \mathbf{R}_\xi(t,u)\,\mathbf{R}_\xi^*(u,s)\,du \tag{70}$$

где операторная функция $\mathbf{R}_\xi(t,s)$, удовлетворяет условию

$$\int_0^a \int_0^a |\mathbf{R}_\xi(t,s)|_H^2 dtds < \infty \tag{71}$$

т.е. соответствующий интегральный оператор $\mathbf{R}_\xi$ в пространстве L_2 является оператором Гильберта-Шмидта.

3. $\mathbf{z}(\cdot)$-случайный элемент со значениями из Ω, или θ_Ω, не зависящий от гауссовского процесса, $\xi(t)$, в частности, он может быть также случайным процессом.

4. Функция $f(t,y,z)$ определена на $[0,a] \times H \times \Omega$, принимает свои значения из H, при всех фиксированных y и z интегрируема со своим квадратом по норме H в интервале $[0,a]$ по переменной t, дифференцируема по y, $f'_y(t,y,z)$ и оператор $f'_y(t,y,z)$ для всех $z \in \Omega$ является оператором Гильберта-Шмидта.

Как известно из теории эволюционных дифференциальных уравнений [9], дифференциальные уравнение (66) и (67) с помощью семейства эволюционных операторов $\mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s})$ могут быть представлены в следующем виде

$$y(t) + \int_0^a \mathbf{U}(\mathbf{s},\mathbf{t}) f(s,y(s),z(\cdot))ds = \int_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s})\xi(s)ds \tag{72}$$

и

$$x(t) = \int_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s})\xi(s)ds \tag{73}$$

Рассматривая эти два уравнения как одну систему, мы можем записать

$$u(t) = -\int_0^a \mathbf{U}(\mathbf{s},\mathbf{t}) f(s,y(s),z(\cdot))ds \tag{74}$$

где $u(t) = y(t) - x(t)$.

Окончательно, имеем

$$y(t) + \int_0^a \mathbf{U}(\mathbf{s},\mathbf{t}) f(s,y(s),z(\cdot))ds = \int_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s})\xi(s)ds = x(t) \tag{75}$$

где, очевидно, что $x(t)$-гауссовский случайный процесс, так как он является решением линейного дифференциального уравнения (67), где в правой части стоит $\xi(t)$-гауссовский

случайный процесс. Таким образом, нам удалось заданную систему эволюционных дифференциальных уравнений (66) и (67) в пространстве $L_2\left\{[0,a],H\right\}=L_2$ привести к некоторому нелинейному преобразованию гауссовского процесса $x(t)$ в виде формулы (70). Но это преобразование не является « R-корреляционным». Поэтому для того, чтобы оно стало « R-корреляционным» надо, чтобы существовала такая функция,$g\left(s,y(s),z\left(\cdot\right)\right)\in L_2\left\{[0,a],H\right\}$ для которого выполнялось следующие условие:

$$\int\limits_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s})f(s,y(s))z(\cdot)ds=\int\limits_0^a \mathbf{R}_x(t,s)g(s,y(s),z(\cdot))ds \tag{76}$$

где $\mathbf{R}_x^2(t,s)$ является корреляционной операторной функцией гауссовского процесса $x(t)$ и, очевидно, определяется из следующего соотношения, учитывая (73)

$$\mathbf{R}_x^2(t,s)=\int\limits_0^a\int\limits_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{u})\mathbf{R}_\xi^2(u,v)\mathbf{U}^*(\mathbf{u},\mathbf{s})dudv \tag{77}$$

а так как $\mathbf{R}_\mathbf{x}^\mathbf{2}(\mathbf{t},\mathbf{s})$ допускает следующую факторизацию

$$\mathbf{R}_x^2(t,s)=\int\limits_0^a \mathbf{R}_\mathbf{x}(t,u)\mathbf{R}_x^*(u,s)du, \tag{78}$$

поэтому из (77) и (78) следует, что

$$\begin{cases}\mathbf{R}_x(t,s)=\int\limits_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{u})\mathbf{R}_\xi(u,s)du\\ \mathbf{R}_x^*(t,s)=\int\limits_0^a \mathbf{R}_\xi^x(u,s)\mathbf{U}^*(t,u)du\end{cases} \tag{79}$$

Следовательно, если выполняется условие (76) преобразования (75) окончательно принимает вид « R-корреляционного преобразования», и обозначим его через $\mathbf{T}(\mathbf{x})\in L_2=L_2\left\{[0,a],H\right\}$ в виде

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})|_t: y(t)+\int\limits_0^a \mathbf{R}_x(t,s)g(s,y(s),z(\cdot))ds=x(t) \tag{80}$$

где функция $g(s,y(s),z(\cdot))$ определяется из соотношения (76), т.е., чтобы найти функцию $g(s,y(s),z(\cdot))$, надо выражение (76) разрешить относительно нее. Для этого, пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\varphi_k(t)\}$, $(k=1,2,....)$ - это последовательности собственных чисел и собственных векторов корреляционной операторной функции $\mathbf{R}_x\left(t,\xi\right)$ соответственно и с их помощью построим еще одну последовательность векторов в $L_2\left\{[0,a],H\right\}$ вида

$$\alpha_k(t)=\frac{1}{\lambda_k}\cdot\varphi_k\left(t\right) \tag{81}$$

и обозначим через $g_k\left(y(\cdot),z\left(\cdot\right)\right)$, коэффициенты Фурье

$$g_k\left(y(\cdot),z\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_0^a \left(g\left(s,y(s),z(\cdot)\right),\varphi_k(s)\right)_H ds \tag{82}$$

функции $g\left(y(\cdot), z\left(\cdot\right)\right)$.

Известно, что корреляционная операторная функция $\mathbf{R}_x^2\left(t,s\right)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным числам и собственным функциям в виде (см. например, [10])

$$\mathbf{R}_x^2(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k(t)(\varphi_k(s), \cdot)_H \tag{83}$$

И действует по принципу

$$\begin{gathered} \mathbf{R}_x^2(t,s)\beta\left(s\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k(t)(\varphi_k(s), \beta\left(s\right))_H \\ \beta\left(s\right) \in L_2\left\{\left[0,a\right], H\right\} \end{gathered} \tag{84}$$

Очевидно, что тогда $\mathbf{R}_x(t,s)$, как «корень квадратный» из $\mathbf{R}_x^2(t,s)$ будет иметь такой вид (см. там же [10])

$$\mathbf{R}_x(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t)(\varphi_k(s), \cdot)_H \tag{85}$$

Поэтому, в силу (82), (83) (84), и (85) правую часть формулы (76) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \int\limits_0^a \mathbf{R}_x(t,s) g(s, y(s), z(\cdot)) = \\ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t) \int\limits_0^a \left(\varphi_k\left(s\right), g\left(s, y(s), z(\cdot)\right) ds\right)_H = \\ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k\left(t\right) g_k\left(y(\cdot), z\left(\cdot\right)\right) \end{gathered} \tag{86}$$

Если же теперь обе части равенства (76) скалярно умножим на $\varphi_k(t)$ и результат проинтегрируем от нуля до a получим, учитывая (86)

$$\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s}) f(s, y(s), z(\cdot)) ds, \varphi_k(t) \right)_H dt = \lambda_k g_k(y(\cdot), z(\cdot)) \tag{87}$$

Далее, обозначим известное выражение через $b\left(t, y(\cdot), z(\cdot)\right)$

$$\int\limits_0^a \mathbf{U}(\mathbf{t},\mathbf{s}) f(s, y(s), z(\cdot)) ds = b(t, y(\cdot), z(\cdot)) \tag{88}$$

а через $b_k\left(y(\cdot), z\left(\cdot\right)\right)$ выражение

$$b_k\left(y(\cdot), z(\cdot)\right) = \left(\int\limits_0^a b\left(t, y(\cdot), z(\cdot)\right), \varphi_k(t) \right) dt \tag{89}$$

Тогда выражение (87) принимает вид

$$b_k\left(y(\cdot), z(\cdot)\right) = \lambda_k g_k\left(y(\cdot), z(\cdot)\right) \tag{90}$$

Отсюда, учитывая (89) и (81), имеем

$$g_k(y(\cdot),z(\cdot)) = \tfrac{1}{\lambda_k} b_k\left(y(\cdot),z(\cdot)\right) = \int\limits_0^a \left(b(t,y(\cdot),z(\cdot)), \tfrac{1}{\lambda_k}\varphi_k(t)_H\right)dt = \\ = \int\limits_0^a \left(b(t,y(\cdot),z(\cdot)),\alpha_k\left(t\right)\right)_H dt \tag{91}$$

или

$$g_k^2\left(y(\cdot),z(\cdot)\right) = \left(\int\limits_0^a \left(b\left(t,y\left(\cdot\right),z\left(\cdot\right)\right),\alpha_k\left(t\right)\right)_H dt\right)^2 \tag{92}$$

Ясно, что мы здесь получаем первую оценку вида

$$g_k^2\left(y(\cdot),z(\cdot)\right) = \left(\int\limits_0^a \left(b\left(t,y\left(\cdot\right),z\left(\cdot\right)\right),\alpha_k\left(t\right)\right)_H dt\right)^2 < \infty \tag{93}$$

Понятно, далее, что последовательность$g_k(y(\cdot),z(\cdot))$, $(k=1,2,....)$ являются коэффициентами Фурье, разложены в ряд Фурье функции $g(t,y(\cdot),z(\cdot))$ с одной стороны

$$g\left(t,y(\cdot),z(\cdot)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k\left(y\left(\cdot\right),z\left(\cdot\right)\right)\varphi_k\left(t\right) \tag{94}$$

а с другой стороны эти коэффициенты $g_k(y(\cdot),z(\cdot))$ определяются из (91) с оценкой (93). Поэтому, учитывая эти условия, чтобы ряд (2.2.37) сходился равномерно, достаточно,чтобы выполнялось следующее условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^a \left(b\left(t,y(\cdot),z(\cdot)\right),\alpha_k(t)\right)^2 dt < +\infty \tag{95}$$

Таким образом. Мы показали, что для того, чтобы существовала такая функция $g(t,y(t),z(\cdot))$, которая приводит нелинейное преобразование $T(x,z)|_t$ к виду, представленную по формуле (80), достаточно, чтобы ряд (95) сходился равномерно относительно y и z, где функция $b\left(t,y(\cdot),z(\cdot)\right)$ определяется по формуле (88). Теперь для того. чтобы преобразование (80) привести к условиям Теоремы 1, надо доказать, что нелинейное преобразование $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ обратимо т.е. существует обратное также «R-корреляционное» нелинейное преобразование $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ Для этого, сначала формально запишем такое нелинейное преобразование $S(x)$ в $L_2\left\{[0,a],H\right\}$ в виде

$$S\left(y,z\right)|_t : x(t) + \int\limits_0^a \mathbf{R}_x(t,s)\bar{g}\left(s,x(s),z(\cdot)\right)ds = y(t) \tag{96}$$

и предположим, что в формуле (96) имеет место

$$\bar{g}\left(s,x(x),z(\cdot)\right) = -g\left(s,\,\mathbf{T}\left(x,z\right)|_{S'},z(\cdot)\right) \tag{97}$$

где функция $g\left(s,\,T\left(x,z\right)|_S,z(\cdot)\right)$ определяется из соотношения (76). А это доказывает, как было показано в работах [7] и [8], что нелинейное преобразование $S(y(\times),z(\times))$ является обратным преобразованием к $T(y(\times),z(\times))$, т.е. S(y($\times$),z($\times$)) $= T^{-1}(y(\cdot),z(\cdot))$ и оно

существует, так как имеет место условия (88), (94), (85) и (97). Отсюда следует, что нелинейные преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ взаимообратимы, $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{T^{-1}}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ взаимооднозначны, голоморфны, непрерывны и дифференцируемы, а функция $y(t) \in L_2\left\{[0,a]\,,H\right\}$ является единственным решением нелинейной системы эволюционных дифференциальных уравнений (66) и (67) при фиксированном $z = z_0 \in \Omega$ Кроме того, используя метод, предложенный в работе [7] и условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^a b'_x\left(s,y(s),z(\cdot)\right)\alpha_k(s)\right|_H^2 ds < +\infty \tag{98}$$

где функция $b(s,y(s),z(\cdot))$ определенная из формулы (88), легко доказывается, что всегда существует обратное преобразование $\mathbf{S'_y}(s,y(\cdot),z(\cdot))$ к преобразованию $\mathbf{T'_y}(\mathbf{s},\mathbf{y}(\cdot),\mathbf{z}(\cdot))$ при любом фиксированном, $z \in \Omega$ $\mathbf{S'_y}(\mathbf{s},\mathbf{y}(\cdot),\mathbf{z}(\cdot)) = \mathbf{T'^{-1}_y}(\mathbf{s},\mathbf{y}(\cdot),\mathbf{z}(\cdot))$ и оба они ограничены

$$|T'_x(s,x(\cdot),z(\cdot))|_H < k_1 = const, |S'_y(s,y(\cdot),z(\cdot))|_H < k_2 = const \tag{99}$$

Перепишем условия (10), (11), (17), (76), (21), (86), (32) и (37) из первого параграфа в терминах функции $\varphi\left(...\right)$ и $\psi\left(...\right)$ на функции $g\left(...\right)$ $\bar{g}\left(...\right)$ соответственно пока формально получим при фиксированном $z = z_0 \in \Omega$ условия

$$\int_H \mathrm{Sp}g'_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)R_x^2 g_x^{'*}\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)\mu\left(dx\right) < +\infty \tag{100}$$

$$\int_H \mathrm{Sp}g'_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)R_x^2 \bar{g}'^*_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)\mu\left(dx\right) < +\infty \tag{101}$$

Далее в место (17), имеем (95), где $g_k\left(y(\cdot),z\left(\cdot\right)\right)$ определяется из (91); вместо (19), имеем (98); в место (21), имеем (99); в место (28) и (29) имеем

$$\mathrm{Sp}N\left(x(\cdot),z\left(\cdot\right)\right) < \infty \tag{102}$$

и

$$SC^2\left(x(\cdot),z\left(\cdot\right)\right) < \infty \tag{103}$$

где в данном случае $N(x(\cdot),z(\cdot))$ и $C(x(\cdot),z(\cdot))$ определяется так

$$N(x(\cdot),z(\cdot)) = g'_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)\mathbf{R}_x \tag{104}$$

и

$$\begin{gathered} C(x(\cdot),z(\cdot)) = R_x g'_x(x(\cdot),y(\cdot)) + g_x^{'*}(x(\cdot),y(\cdot))R_x^* + \\ + R_x g'_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)g_x^{'*}\left(x(\cdot)z(\cdot)\right)R_x \end{gathered} \tag{105}$$

Аналогично вместо (31) и (32)

$$Sp\bar{N}\left(x(\cdot),z(\cdot)\right) < \infty \tag{106}$$

и

$$\mathrm{Sp}\bar{C}^2\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)<\infty \tag{107}$$

где также в данном случае $\bar{N}(x(\cdot),z(\cdot))$ и $C\left(x(\cdot),z\left(\cdot\right)\right)$ определяется в L_2

$$\bar{N}\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)=\bar{g}'_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)R_x \tag{108}$$

и

$$\bar{C}\left(x\left(\cdot\right),z\left(\cdot\right)\right)=R_x\bar{g}'_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)+\bar{g}_x^{'*}\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)R_x^*+R_x\bar{g}'\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)\bar{g}'_x(x,z)R_x^* \tag{109}$$

и, далее окончательно вместо (33) в L_2 для любого фиксированного $z=z_0\in\Omega$ имеем

$$\int\limits_H \mathrm{Sp}\left[g'_x\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)R^2g_x^{'*}\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)+\bar{g}'\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)R_x^2g^{'*}\left(x(\cdot),z(\cdot)\right)\right]\mu\left(dx\right) \tag{110}$$

Так как мы показали выше, что нелинейное преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ дифференцируемы по x, $\mathbf{T}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\mathbf{S}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ существуют и ограничены мы можем вычислить их определители (34) и (35) для нашего случая в явном виде как (см. [5] и [7])

$$D(x,z)=|\det T'_x(x,z)|=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+c_k(x,z)\right)^{-c_k(x,z)}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}SpC^2(x,z)\right\}<\infty \tag{111}$$

и

$$\bar{D}(x,z)=|\det S'_x(x,z)|=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\bar{c}_k(x,z)\right)^{-\bar{c}_k(x,z)}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}Sp\bar{C}^2(x,z)\right\}<\infty \tag{112}$$

где последовательности $\{c_k\}$ и$\{\bar{c}_k\}$, являются собственными числами симметричных операторов $\mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ соответственно определенных по формулам (105) и (109) Предположим, что решения нелинейного эволюционного уравнения (66) $y_z\left(t\right)$ и линейного дифференциального уравнения гауссовского случайного процесса (67) $x(t)$ на σ - алгебре Θ_H порождает меры $\mu_y^{(z)}$ и μ_x соответственно. Поскольку систему (66) и (67) мы свели к системе нелинейных преобразований (80) и (96), учитывая (97), они также являются мерами, порожденными преобразованным процессом $y_z\left(t\right)$ и исходным гауссовским процессом $x(t)$ соответственно $\mu_y^{(z)}$ и μ_x. Индекс «z» при $y(t)$ и μ_y здесь обозначает содержание в них случайного параметра z. Таким образом, применяя доказанную теорему в первом параграфе Теорему 1., здесь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть задана система нелинейного и линейного эволюционных дифференциальных уравнений* (66) *и* (67)*, которая равносильна системе нелинейного преобразования* $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})|_{t'}$ (80) *и к обратному преобразованию к нему* $S(x,z)|_t=T^{-1}(x,z)|_{t'}$ (96) *и выполняются для них все условия, перечисленные в Теореме 1, а также выполняются условия А), Б), В), Г), и* (94)*,* (95)*,* (97)*,* (98)*,* (99)*,* (100)*,* (101)*,* (113)*,* (107)*,* (110)*,* (111) *и* (112)*, где функция* $b(y,z)$ *и операторы* $\mathbf{C}$ *и* $\bar{\mathbf{C}}$ *определяются из формул* (88)*,* (105) *и* (109) *соответственно.*

Тогда при каждом фиксированном $z = z_0 \in \Omega$

1. Существует «расширенный стохастический интеграл» (9)
2. Существуют производные по x $\mathbf{T'_x(x,z)}$ и $\mathbf{S'_x(x,z)}$ и они взаимообратимы, голоморфны, непрерывны и ограничены;
3. В явном виде вычисляются определители $D(x,z)$ и $\bar{D}(x,z)$ формулам (111) и (112);
4. Преобразованная мера $\mu_y^{(z)}$ и гауссовская мера μ_x эквивалентны между собой $\left(\mu_y^{(z)} \sim \mu_x\right)$;
5. В явном виде выписываются соответствующие плотности Радона-Никодима:

$$\beta_{(z)}(x) = \frac{d\mu_y^{(z)}}{d\mu_x}(x) = \bar{D}(x,z) \cdot \exp\left\{\ell_{R_x^{-1}}^{(R_x)}(\bar{g})(x,z) - \frac{1}{2}\|\bar{g}(x,z)\|_H^2\right\} \tag{113}$$

и

$$\bar{\beta}_{(z)}(x) = \frac{d\mu_x}{d\mu_y^{(z)}}(x) = |D(y,z)| \cdot \exp\left\{-\ell_{R_x^{-1}}^{(R_x)}(g)(y,z) - \frac{1}{2}\|g(y,z)\|_H^2\right\} \tag{114}$$

где «расширенный интеграл $\ell_{R_x^{-1}}^{(R_x)}(\cdot)$» определяется по формуле (9), учитывая формулу (8)

Замечание 3. Если выполняются условия Теорем 5 и кроме того известно, что имеют место (102) и (106), где функции $N(x,z)$ и $\bar{N}(x,z)$ определяется из формул (104) и (108), то тогда плотности Радона-Никодима в Теореме 5 вычисляются проще:

$$\bar{\beta}_{(z)}(x) = \frac{d\mu_x}{d\mu_y^{(z)}}(x) = |D(y,z)| \cdot \exp\left\{-\ell_{R_x^{-1}}^{(R_x)}(g)(y,z) - \frac{1}{2}\|g(y,z)\|_H^2\right\} \tag{115}$$

и

$$\begin{gathered}\bar{\beta}_{(z)}(x) = \tfrac{d\mu_x}{d\mu_y}(y) = |D(x,z)| \times \\ \times \exp\left\{-\langle \bar{g}(y,z), \xi\rangle - \mathrm{Sp} g_y^{-1}(y,z) R_x - \tfrac{1}{2}\|g(y,z)\|_{L_2}^2\right\}\end{gathered} \tag{116}$$

где символ $< \cdot, \cdot >$ - обозначает стохастический интеграл,а обобщенная величина ξ определяется из соотношения (8)

Замечание 4. Формулы (113), (114) и (116) записаны в терминах, обозначенных в пространстве L_2. В том случае, когда эти же формулы нужно записать в функциональном пространстве $L_2 = L_2\{[0,a], H\}$ нужно воспользоваться принципами перехода, определенными по формулам (63), (64) и (65).

Далее, как и выше предположим, что Теорема 5 справедлива не только для одного фиксированного $z = z_0 \in \Omega$ а таких z, для которых сохраняются условия Теоремы (65) и при которых она справедлива множество. Обозначим это множество значений через $B \in \Theta_\Omega$ (как и выше было отмечено все пространство Ω, в частности, также $\Omega \in \Theta_\Omega$).Тогда вероятностная мера λ,определенная по формуле (4) в нашем случае будет, представляется как

$$\lambda\left(B\right)=\mu_y^{(z\in B)} \tag{117}$$

На основании Теоремы 1, доказанной нами в работе [1] в этом случае имеет место еще такая теорема

Теорема 6. *Пусть для системы нелинейного и линейного дифференциальных уравнений* (66) *и* (67) *или что тоже для нелинейных « R-корреляционных преобразований»* $\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ *и* $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z})$, *определенных соответственно формулами* (80) *и* (96) *справедлива Теорема 5 для всех* $z\in B\subset\Theta_H$. *Тогда вероятностная мера* μ_y *порожденная решением эволюционного дифференциального уравнения* $y_z(t)$, *для всех* $z\in B$ *эквивалентна гауссовской мере* μ_x, *порожденной гауссовским случайным процессом* $x(t)$, $(\mu_y\sim\mu_x)$ *при всех* $z\in B$ *и плотности Радона-Никодима вычисляются по формулам*

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(x)=\beta(x)=\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(x)=\int\limits_B\beta_{(z)}\left(x\right)v\left(dz\right) \tag{118}$$

и

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(y)=\bar{\beta}(y)=\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(y)=\int\limits_{SB}\bar{\beta}_{(z)}\left(y\right)v\left(dz\right) \tag{119}$$

где подинтегральные функции $\beta_{(z)}\left(x\right)$ *и* $\bar{\beta}_{(z)}\left(y\right)$ *вычисляются по формулам* (113) *и* (114).

Замечание 5. В частности, если все условия, перечисленные в Теореме 5 и Теореме 6 выполняются и дополнительно известно, что имеют место неравенства (102) и (106), то все результаты Теоремы 6 сохраняются, плотности Радона-Никодима вычисляются по формулам (118) и (119), но в этом случае подинтегральные функции $\beta_z(x)$ и $\bar{\beta}_z(y)$ вычисляются по формулам (115) и (116)

Список литературы необходимо оформить в соответствии с правилами. Насколько я понял, правила такие, как в [1] и [2] источниках, остальные — образцы. Если максимальный номер однозначный — в скобках пишем 9, если двузначный — 99

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаташвили А.Д. О плотностях Радона-Никодима для вероятностных мер, порожденных нелинейными отображениями со случайными параметрами гауссовских мер в абстрактных гильбертовых пространствах / Шаташвили А.Д., Фомина Т.А., Ивахненко Н.Н., Папазова Е.Н. // Вестник Луганского национального университета имени Владимира Даля. – 2020. – Т. 2, № 32. – С. 223–228
2. Шаташвили А.Д. Некоторые достаточные условия, обеспечивающие абсолютную непрерывность и эквивалентность гауссовских мер, при их нелинейных преобразованиях со случайным параметром в гильбертовом пространстве / Шаташвили А.Д., Фомина Т.А., Ивахненко Н.Н., Папазова Е.Н. // Вестник Луганского национального университета имени Владимира Даля. – 2020. – Т. 3, № 33. – С. 154–168
3. Далецкий Ю.Л. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах / Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. – Москва: Наука, 1983. – 384 с.
4. Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
5. Фомин-Шаташвили А.А. Об эквивалентности вероятностных мер, порождённых решениями нелинейных дифференциальных уравнении в гильбертовом пространстве, возмущённых гауссовскими процессами. Часть 1 / Фомин-Шаташвили А.А.,Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 89–101
6. Фомин-Шаташвили А.А. Об эквивалентности вероятностных мер, порождённых решениями нелинейных дифференциальных уравнении в гильбертовом пространстве, возмущённых гауссовскими процессами.

Часть 2 / Фомин-Шаташвили А.А.,Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 49–61
7. Скороход А.В. Об абсолютной непрерывности гауссовской меры при нелинейном преобразовании / Скороход А.В., Шаташвили А.Д. // Межвед. сб. Теория вероятн. и математич. стат. КГУ. – 1975. – Т. , № 15. – С. 139–150
8. Гихман И.И. Теория случайных процессов, т.1 / Гихман И.И., Скороход А.В. – Москва: Наука, 1971. – 664 с.
9. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / Крейн С.Г. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
10. Лоэв М. В. Теория вероятностей / Лоэв М. В. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. – 711 с.

Поступила в редакцию 01.09.2020 г.

ON THE DENSITIES OF PROBABILITY MEASURES GENERATED BY SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS WITH UNBOUNDED OPERATORS AND WITH A RANDOM PARAMETER, PERTURBED BY GAUSSIAN PROCESSES IN A HILBERT SPACE

A. D. Shatashvili, T. A. Fomina, N. N. Ivakhnenko, E. N. Papazova

In this paper, we continue the research that we started in [1, 2] on the absolute continuity and equivalence of Gaussian measures, with their nonlinear transformed (mappings) containing the random parameter *T (x, z)*, in an abstract Hilbert space *H* where z is a random parameter from the space of elementary events $\Omega, z \in \Omega$, nonlinear equations with unbounded linear operators are considered, represented in the form of "R-correlation transformation". Moreover, to obtain the main results, we will use the theorems already proved in the papers [1, 2] and some statements and formulas from the papers [3, 5–7]. The entire second paragraph will be devoted to this issue, which consists of two points. In the first subsection: in an abstract Hilbert space, we consider some transcendental nonlinear equations with unbounded linear operators and with a random parameter excited by a Gaussian random element, and in the second: a subsection in the functional Hilbert space of functions defined on a certain interval, taking their values from *H* and integrable with its square in the norm *H*, we consider evolutionary nonlinear differential equations excited by a Gaussian random process

Keywords: equipped Hilbert space, extended stochastic integral, absolute continuity and equivalence of measures, Radon-Nikodym density, orthonormal basis, Hilbert-Schmidt operators, nonlinear differential equations, generalized random variable - "white noise random noise, "R-correlation transformations".

Шаташвили Альберт Даниелович
Доктор физико-математических наук, профессор, профессор
ГОУ ВПО «Донецкая академия управления и государственной службы при главе Донецкой Народной Республики», г. Донецк
shatal@bk.ru

Фомина Тамара Александровна
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент
ГО ВПО «Донецкий национальный университет экономики и торговли имени Михаила Туган-Барановского», г. Донецк
83050 г. Донецк, ул. Щорса, д. 31, кафедра высшей и прикладной математики

Shatashvili Albert Danielovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Full professor,
Organization of Higher Professional Education of the Donetsk Academy of Management and Public Administration under the Head of the Donetsk People's Republic, Donetsk

Fomina Tamara Alexandrovna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor,
SO HPE "Donetsk National University of Economics and Trade named after Mikhail Tugan-Baranovsky Donetsk
83050 Donetsk, st. Shchorsa, 31, Department of Higher and Applied Mathematics

Ивахненко Наталья Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент
ГО ВПО «Донецкий национальный университет экономики и торговли имени Михаила Туган-Барановского», г. Донецк
83050 г. Донецк, ул. Щорса, д. 31, кафедра высшей и прикладной математики

Папазова Елена Николаевна
кандидат экономических наук, доцент, доцент
ГО ВПО «Донецкая академия управления и государственной службы при Главе Донецкой народной республики», г. Донецк
Донецк, просп. Богдана Хмельницкого, 108, кафедра высшей математики

Ivakhnenko Natalya Nikolaevna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor,
SO HPE "Donetsk National University of Economics and Trade named after Mikhail Tugan-Baranovsky Donetsk
83050 Donetsk, st. Shchorsa, 31, Department of Higher and Applied Mathematics

Papazova Elena Nikolaevna
Candidate of Economic Sciences, Docent, Associate Professor,
SO HPE "Donetsk Academy of Management and Civil Service under the Head of the Donetsk People's Republic Donetsk
Donetsk, ave. Bohdan Khmelnitsky, 108, Department of Higher Mathematics

Научное издание

Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки

2020. – № 2

Технические редакторы: *М. В. Фоменко, П. А. Машаров*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24,
83001, г. Донецк
Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: http://donnu.ru//vestnikA

Подписано к печати 30.09.2020 г.
Формат $60 \times 84/8$. Бумага офсетная.
Печать — цифровая. Усл. печ. л. 14,8
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24,
Тел: (062) 302-92-27.
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.