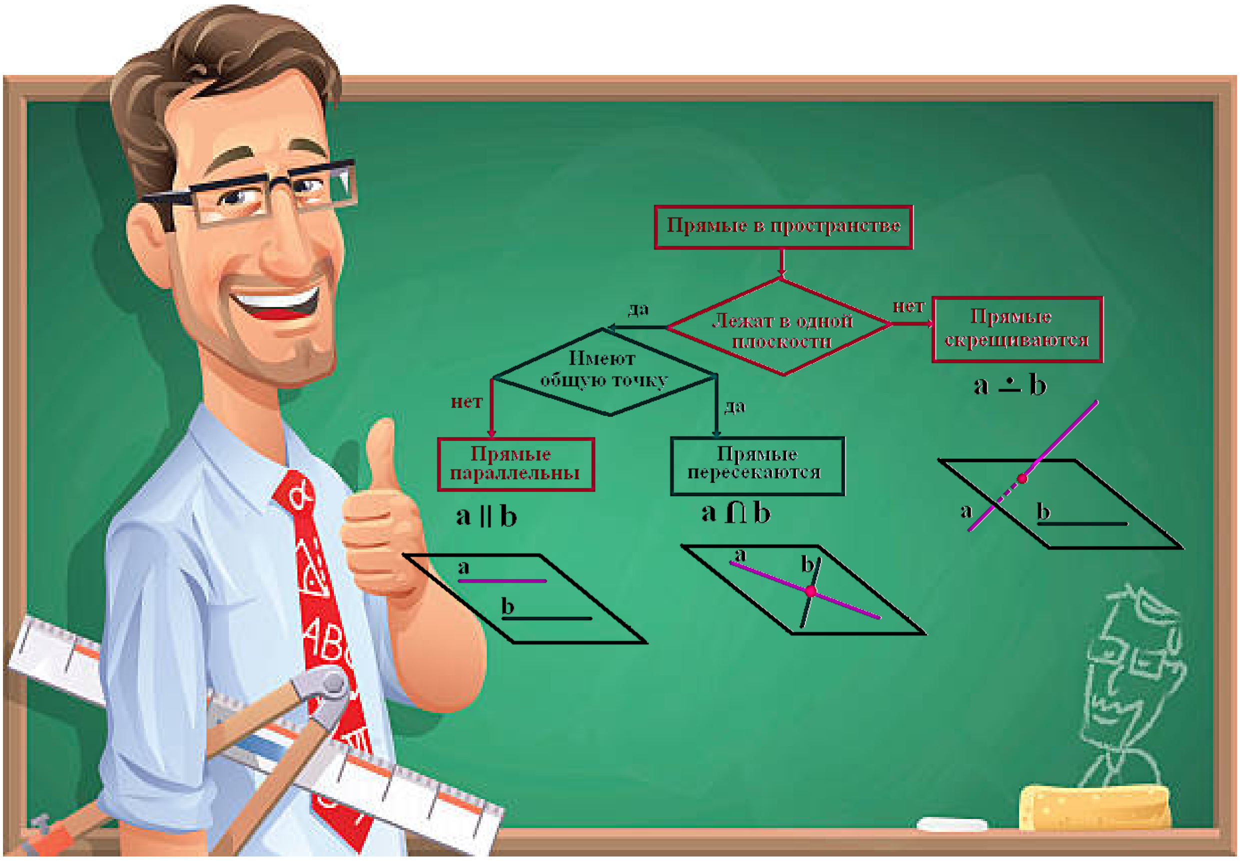
Донецкий национальный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Бродский Я. С., Павлов А. Л.

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве



Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов. − Донецк, 2023. – 114 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 10 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом *ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017)*. Ее цель — развитие у обучающихся умений учиться, самостоятельно приобретать знания, умений и навыков применять математику для решения математических и жизненных задач.

Настоящее пособие ориентировано на развитие у обучающихся умений исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, изображать пространственные конструкции и выполнять на них простейшие построения, моделировать пространственные формы и отношения.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части представлен материал для обучения. В этой части содержатся краткие теоретические сведения, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля.

Во второй части пособия содержатся три варианта тренажёра с подсказками ко всем заданиям.

В третьей части пособия приведены задания для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части.

Пособие предназначено для обучающихся открытого математического колледжа факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета. Может быть использовано при проведении факультативных занятий, курсов по выбору.

Содержание

Дорогой друг!

Настоящее пособие предназначено для развития умений исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, изображать пространственные конструкции и выполнять на них простейшие построения, моделировать пространственные формы и отношения.

Пособие состоит из трёх частей: обучающей, тренировочной и контролирующей. В первой части представлен материал для повторения и обучения. Он содержит краткие теоретические сведения, применимые при решении представленных задач, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля с ответами на них. Первая часть пособия завершается задачами для самостоятельного решения. К этим задачам приведены указания и ответы.

Вторая часть пособия состоит из тестов для тренировки, к заданиям которых приведены указания, ответы. Они структурированы в соответствии с частями, на который разделён весь материал. Тренажёр состоит из заданий с выбором ответа.

Задания для тренировки представлены тремя однотипными вариантами теста. Тренировку начинайте с первого варианта теста. Попробуйте выполнить самостоятельно его задания, не используя учебные пособия и микрокалькулятор. Выбор правильных ответов и необходимые записи делайте в отдельной тетради. После завершения работы над тестом сверьте свои ответы с ответами, приведенными в пособии. **Не пользуйтесь ответами, пока не дадите ответы самостоятельно!**

Каждое задание, по которому Ваш ответ не совпал с приведенным, тщательно проанализируйте, пользуясь подсказками. Такую работу полезно выполнить по всем заданиям теста. Наверное, некоторые ответы Вы угадали или «почувствовали», не зная полного решения. Кроме подсказок, целесообразно пользоваться теоретическими сведениями и примерами с решениями, содержащимися в первой части пособия.

В третьей части пособия приведено контрольное задание, состоящее из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям тестов для тренировки;

- ***основного задания***, содержащего задания, подобные рассмотренным в первой части пособия;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные задачи по сравнению с основным заданием.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут для Вас полезными и интересными.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит в освоении идей, методов, использованных в приведенных решениях типовых задач, самостоятельном решении подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно:

- сначала проанализировать её условие и вытекающие из него следствия;

- уяснить требование задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требования задачи.

2. Приступая к выполнению заданий тренажёра, повторите приведенный теоретический материал.

Надо сначала попробовать выполнить самостоятельно задания первого варианта первого блока тренажёра. Выбранные ответы записывайте на отдельном листочке.

Пользоваться учебником и калькулятором не рекомендуется.

3. После завершения работы над первым вариантом первого блока тренажёра необходимо сверить свои ответы с приведенными в пособии.

Нельзя обращаться к приведенным ответам, пока не получены самостоятельно ответы ко всем заданиям.

4. Каждое задание, по которому ответ не совпал с приведенным, нужно тщательно проанализировать, пользуясь при необходимости приведенными в пособии указаниями.

Такую работу полезно проделать со всеми заданиями первого варианта блока. Наверное, некоторые ответы угаданы или «почувствованы».

5. Когда появится уверенность в том, что неясных вопросов не осталось, можно проверить надёжность своей уверенности с помощью второго варианта первого блока тренажёра.

Если же при выполнении второго варианта первого блока осталось ощущение, что не всё усвоено, то нужно продолжать работу по исправлению ошибок, выполнить задания третьего варианта, записывая при этом все проделанные шаги.

Если до конца выполнены данные выше рекомендации, то результаты при выполнении следующего варианта теста будут значительно выше первоначальных.

6. Если уверенность подтвердилась при выполнении второго варианта теста, то можно перейти к работе над первым вариантом второго блока. Методика работы над ним остаётся такой же. И так далее.

Ни в коем случае не бросайте работу!

Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части раздела.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели,

учитывая свою готовность, опыт и способности.

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Возникнув из потребностей практики, постоянно развиваясь, геометрия является одной из важнейших математических наук для описания окружающего мира. Знание планиметрии, то есть геометрии плоскости, недостаточно для моделирования реальных объектов. Вместе с тем, при изучении стереометрии мы будем опираться на планиметрию, использовать ее понятия, факты, методы. Так, метод построения стереометрии — аксиоматический — уже использовался в планиметрии. Как и в планиметрии, основными объектами изучения будут геометрические фигуры, идеализирующие образы реальных физических объектов. Некоторые из этих фигур (такие, как точка, прямая, треугольник и т. п.) уже изучались в геометрии, хотя раньше они рассматривались на плоскости. С другими «неплоскими» фигурами, такими как куб, параллелепипед, шар — мы встречались и в математике, и в других науках, и в практической деятельности. Стереометрия изучает свойства пространственных фигур и отношения между ними.

В настоящем пособии мы рассмотрим всевозможные варианты взаимного расположения прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Особое внимание будет уделено отношению параллельности между прямыми и плоскостями, которое имеет важное теоретическое и прикладное значение.

1. Основные понятия и аксиомы стереометрии

Повторяем теорию

Аксиоматическое построение теории осуществляется по такой схеме:

- перечисляются неопределяемые понятия;
- формулируются аксиомы;
- определяются новые понятия с помощью неопределяемых и ранее определённых;
- доказываются утверждения на основе аксиом и ранее доказанных утверждений.

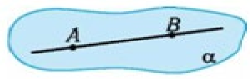
Основными неопределяемыми понятиями стереометрии являются ***точка, прямая, плоскость.***

Наряду с основными неопределяемыми понятиями стереометрии, будем считать известным из планиметрии содержание таких понятий, как ***отрезок и его длина, луч, угол и его величина*** и т.п., а также некоторых понятий, характеризующих взаимное расположение точек, прямых и плоскостей: ***точка A принадлежит прямой l и плоскости*** β, ***прямая l лежит в плоскости*** α, ***плоскость*** α ***проходит через точку A*** и др.

Если различные фигуры имеют общие точки, то говорят, что они ***пересекаются.*** Поэтому выражение «плоскости пересекаются» означает, что у этих плоскостей есть общие точки. Пересечение, то есть общую часть фигур, обозначают знаком $\cap$: $l \cap \alpha, \alpha \cap \beta$.

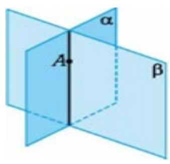
Пространство в стереометрии содержит бесконечное множество плоскостей. То есть вне каждой плоскости существует бесконечное множество плоскостей, а вместе с этим и точек, и прямых.

Рассмотрим основные свойства, которые характеризуют неопределяемое понятие плоскости и его связи с другими основными понятиями.

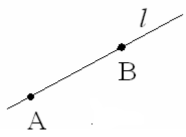


C_1. Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она полностью лежит в этой плоскости.

C_2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.



C_3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечением является прямая, проходящая через эту точку.



C_4. Через две произвольные точки пространства можно провести одну и только одну прямую.

Свойство **C_2** используется для задания плоскости в пространстве. Обосновать другие способы можно на основе приведенных свойств.

Стереометрия имеет много аналогий в планиметрии. В частности, подобно тому, как прямая на плоскости разбивает ее на две полуплоскости, **про-**

странство разбивается каждой плоскостью на два полупространства, причем точки *A, B* принадлежат одному полупространству тогда и только тогда, когда отрезок *AB* не пересекает данную плоскость. Будем считать также, что на каждой плоскости пространства можно пользоваться известными понятиями и фактами планиметрии.

Главной целью стереометрии является изучение свойств пространственных фигур. При изучении прямых и плоскостей в пространстве полезно использовать простейшие геометрические тела — куб, тетраэдр.

Куб — это многогранник, имеющий 6 граней, которые являются квадратами. У него 8 вершин и 12 ребер (рис. 1).

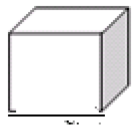


Рис. 1

Параллелепипед — это многогранник, имеющий 6 граней, которые являются параллелограммами, и такое же количество вершин и ребер, как куб (рис. 2, а). Параллелепипед, все грани которого являются прямоугольниками, называется ***прямоугольным*** параллелепипедом (рис. 2, б).

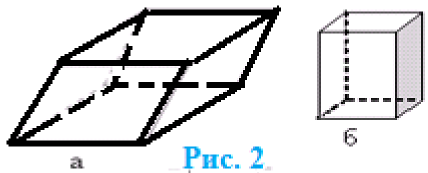


Рис. 2

Куб является частным случаем прямоугольного параллелепипеда. Его грани не только прямоугольники, но даже квадраты.

Тетраэдр — это многогранник, имеющий 4 грани, являющиеся треугольниками (рис. 3). Если все грани тетраэдра — правильные треугольники, то тетраэдр называется ***правильным*** тетраэдром.

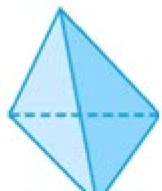


Рис. 3

Пирамида — это многогранник, у которого одна грань — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной (рис. 4). Первая грань называется ***основанием,*** а остальные — ***боковыми*** гранями, их общая вершина — ***вершиной*** пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называют ***боковыми.*** Тетраэдр является частным случаем пирамиды. Каждая его грань может служить основанием.

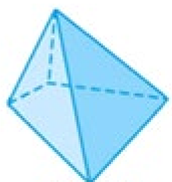


Рис. 4

Шар с центром в точке O радиуса R — это множество точек пространства, находящихся от точки O на расстоянии, не превышающим $\boldsymbol{R}$ (рис. 5).

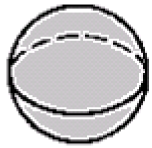


Рис. 5

Следующие утверждения равнозначны по содержанию аксиоме $\mathbf{C_2}$.

Теорема 1. (о плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые)

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

Доказательство. Пусть прямые a и b имеют одну общую точку O. Возьмём на этих прямых произвольные точки A и B, отличные от O (см. рис. 6). Точки A, O, B не лежат на одной прямой, поэтому существует плоскость α, содержащая эти точки (аксиома $\boldsymbol{C_2}$). Плоскость α содержит прямые a и b (аксиома $\boldsymbol{C_1}$). Следовательно, через данные прямые проходит плоскость.

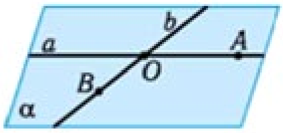


Рис. 6

Каждая иная плоскость β, проходящая через прямые a и b, содержит точки A, O, B, и, согласно аксиоме $\boldsymbol{C_2}$, должна совпадать с плоскостью α, поскольку эти точки не лежат на одной прямой. ■

Теорема 2. (о плоскости, проходящей через прямую и точку)

Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит плоскость и к тому же только одна.

Доказательство этой теоремы может быть проведено по такой же схеме, как и предыдущей (проведите доказательство!)

Решаем

Следующие задачи содержат утверждения, которые будут широко использоваться при последующем изучении стереометрии.

Задача 1. Доказать, что для каждой плоскости найдется прямая, не принадлежащая этой плоскости.

Решение. Пусть A — некоторая точка плоскости α (рис. 7 а).

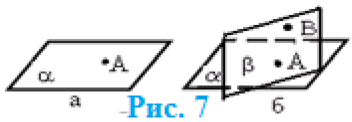


Рис. 7

Поскольку пространство содержит бесконечное количество плоскостей, то в произвольной плоскости β, отличной от α, выберем точку *B*, которая не принадлежит плоскости α (рис. 7 б). Такая точка существует, в противном случае выбранная плоскость совпадала бы с плоскостью α. Прямая *AB* не лежит в плоскости α, ведь $B \notin \alpha$.■

Задача 2. Доказать, что в пространстве существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Решение. Необходимо доказать существование четырех точек, которые нельзя поместить в одну плоскость, то есть, что не существует плоскости, проходящей через эти четыре точки.

Возьмем произвольную плоскость α и в ней выберем три точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой (рис. 8а). Поскольку вне плоскости α существуют точки пространства, то выберем из них произвольную точку *O* (рис. 8б). Не существует плоскости β, которая содержала бы точки *A, B, C, O.* В противном случае плоскости α и β совпадали бы (по аксиоме C_2), и точка *O* принадлежала бы плоскости α. ■

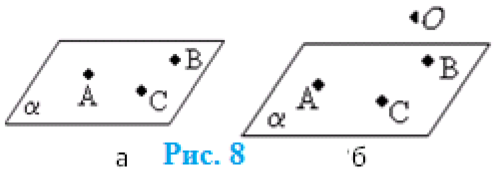


Рис. 8

В стереометрии под построением понимают доказательство возможности всех шагов процесса построения. При этом считается, что плоскость построена, если определены три точки, не лежащие на одной прямой, или прямая и точка вне прямой, или две пересекающиеся прямые, или же другие элементы, определяющие плоскость. Для построения прямой достаточно иметь две ее точки.

Естественно считать, что ***на каждой плоскости возможны все построения, известные из планиметрии.***

Пример 1. Сторона *AB* треугольника *ABC* лежит в плоскости α, а вершина *C* — вне её. Точка *M* делит отрезок *CB* в отношении 3 : 4, а точка *N* делит отрезок *CA* в отношении 1 : 4, считая от *C*. Построить точку пересечения прямой *MN* с плоскостью α.

Решение. Условиям примера соответствует рис. 9 а. Прямая MN лежит в плоскости ABC. Пересечением этой плоскости с плоскостью α является прямая AB. Поэтому искомая точка пересечения расположена на прямой AB.

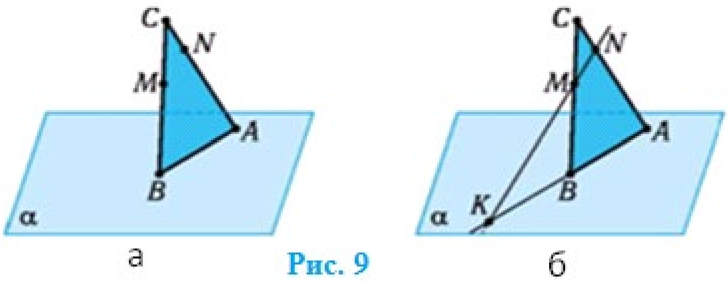


Рис. 9

Прямые AB и MN лежат в плоскости ABC и, как это вытекает из условия, пересекаются. Найдем их точку пересечения, продлив отрезки AB и MN до пересечения в точке K (рис. 9 б). Она и является искомой точкой пересечения прямой MN и плоскости α. ■

Чтобы построить точку пересечения прямой с плоскостью, необходимо построить точку пересечения данной прямой и прямой, являюшейся линией пересечения данной плоскости и плоскости, проходящей через данную прямую.

Пример 2. Построить линию пересечения плоскости, проходящей через вершины A_1, C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и середину K ребра BB_1, с плоскостью грани $ABCD$.

Решение. Чтобы построить искомую прямую пересечения, достаточно найти две ее точки. Для нахождения этих точек воспользуемся решением примера 1. Поскольку прямая C_1K лежит в плоскости грани BCC_1B_1, то точка M пересечения прямых C_1K и CB является одной из точек искомой прямой пересечения (рис. 10), а вторая точка N является точкой пересечения прямых AB и A_1K в плоскости грани ABB_1A_1. Прямая MN является искомой. ■

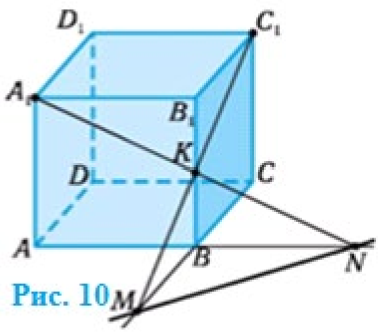


Рис. 10

Чтобы построить линию пересечения двух плоскостей, нужно построить точки пересечения двух прямых одной плоскости с другой и через них провести прямую.

Вопросы для самоконтроля

1. Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Обязательно ли принадлежит ей третья вершина?

2. Всегда ли через три точки можно провести единственную плоскость?

3. Можно ли утверждать, что один из диаметров окружности принадлежит плоскости, если две точки этой окружности принадлежат этой плоскости?

4. Всегда ли через четыре точки можно провести плоскость?

5. На сколько частей делят пространство три плоскости, если они имеют ровно одну общую точку?

6. Можно ли торт разрезать на восемь частей, проведя лишь три сечения?

7. Можно ли три точки разместить так, чтобы через них можно было бы провести две различные плоскости?

8. Чтобы придать устойчивости геодезическим инструментам (теодолитам, нивелирам и т. п.), их обычно закрепляют на треногах. Почему?

9. Почему трёхколёсный велосипед в неподвижном состоянии устойчив, а двухколёсный — неустойчив?

Задачи для самостоятельного решения

1. Две вершины и точка пересечения медиан треугольника лежат в плоскости α. Докажите, что и третья вершина треугольника лежит в плоскости α.

2. Точки M и N не лежат на прямой AB. Плоскости MAB и NAB не совпадают. Докажите, что прямые MN и AB не пересекаются.

3. Докажите, что если четыре точки не лежат в одной плоскости, то никакие три из них не лежат на одной прямой.

4. Точка D расположена вне плоскости треугольника ABC, N — середина отрезка DC. Докажите, что прямые BN и AC не имеют общих точек.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M на ребре BB_1, не совпадающая с его концами. На какой прямой лежит точка пересечения прямой:

1°) MC с плоскостью $A_1B_1D_1$; 2°) AM с плоскостью $B_1C_1D_1$;

3°) MA_1 с плоскостью ABD; 4°) A_1M с плоскостью BCD;

5) MD_1 *с* плоскостью ABC; 6) DM с плоскостью $A_1C_1D_1$?

6. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Отрезок AB лежит в плоскости α и не параллелен прямой c. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью β.

7. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Точки A и C лежат в плоскости α, причем прямая AC не параллельна прямой l, а точка B лежит в плоскости β. Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β.

8. Две плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая a лежит в плоскости α, прямая b — в плоскости β. Эти прямые пересекаются в точке A. Докажите, что точка A лежит на прямой m.

9. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым *a и b* соответственно. Докажите, что если прямые *a и b* пересекаются, то точка их пересечения лежит на линии пересечения плоскостей α и β.

10. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через:

1°) прямую A_1C_1 и точку B; 2°) точки B, D, C_1;

3°) прямые A_1K и BK, где K — середина ребра B_1C_1;

4) через точки A_1, D и центр грани DCC_1D_1;

5) через точку A и центры граней ABB_1A_1 и ADD_1A_1.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Докажите предварительно, что плоскости треугольника и α совпадают.

2. Воспользуйтесь методом от противного.

3. Воспользуйтесь методом от противного.

4. Воспользуйтесь методом от противного.

5. Можно найти линию пересечения плоскости, содержащей данную прямую с указанной плоскостью.

6. Найдите точку пересечения прямых AB и c.

7. Найдите точку пересечения прямых AC и l.

8. Воспользуйтесь тем, что точка A принадлежит плоскостям α и β.

9. Воспользуйтесь тем, что точка пересечения прямых *a и b* лежит на плоскостях α и β.

10. Постройте линии пересечения прямых, лежащих в указанной плоскости и плоскости сечения, с плоскостями граней куба, с которыми они пересекаются.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Нет. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** Нет. **5.** На 8. **6.** Можно. **7.** Можно. **8.** Концы трёх ножек треноги всегда размещаются в одной плоскости (аксиома $\boldsymbol{C_2}$). **9.** Точки касания трёх колёс с землёй всегда размещаются в одной плоскости (аксиома $\boldsymbol{C_2}$).

Ответы к задачам для самостоятельного решения

5. 1) B_1C_1; 2) A_1B_1; 3) AB; 4) BD; 5) BD; 6) B_1D_1.

2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Повторяем теорию

Прямые в пространстве могут:

1) ***совпадать***, если они имеют, по крайней мере, две общие точки;

2) ***пересекаться***, если они имеют только одну общую точку;

3) ***быть параллельными,*** если они не имеют общих точек и лежат в одной плоскости;

4) ***быть скрещивающимися***, если не существует плоскости, их содержащей.

Две прямые пространства называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Две прямые пространства называются скрещивающимися, если не существует плоскости, их содержащей.

Скрещиваемость прямых a и b обозначается так: $a \mathbin{\dot{-}} b$.

В дальнейшем, говоря, что *«фигуры не лежат в одной плоскости», мы будем понимать под этим, что не существует такой плоскости, в которой находятся данные фигуры (точки, прямые и др.).*

Понятие параллельности прямых переносится и на отрезки и лучи: *параллельными считают такие два отрезка, луча, которые лежат на параллельных прямых.* Аналогичные договоренности касаются и скрещиваемости отрезков, лучей.

С помощью определений установить, являются ли прямые параллельными или скрещивающимися, невозможно. Для этого используют признаки.

Признаки скрещивающихся прямых

Теорема 1. **Если две прямые содержат четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то они — скрещивающиеся.**

Теорема 2. Если существует плоскость, содержащая прямую *a* и пересекающая прямую *b* в точке, не принадлежащей прямой *a*, то прямые *a* и *b* скрещивающиеся.

Теорема 3 (признак параллельности прямых).

Если две прямые пространства параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Теорема 4 (существование и единственность прямой, параллельной данной).

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Теорема 5 (о пересечении плоскости параллельными прямыми).

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.

Решаем

Для решения следующего примера применяются признаки параллельности и скрещиваемости прямых.

Пример 1. На рис. 11 параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Установить взаимное расположение прямых, определяемых вершинами этих параллелограммов.

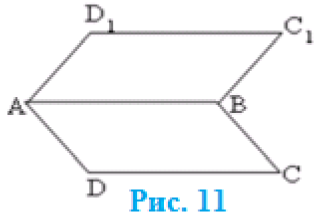


Рис. 11

Решение. Нахождение взаимного расположения двух прямых, определяемых вершинами одного из параллелограммов, не вызывает трудностей. Это чисто планиметрическая задача. На основе приведенного признака скрещивающихся прямых можно утверждать, что скрещивающимися являются, например, прямые D_1C и BD, D_1C и AB, D_1C и AD, C_1D и AC (сколько еще таких пар?).

Параллельными являются прямые DC и D_1C_1 (на основании теоремы 3), C_1C и D_1D, поскольку четырёхугольник DD_1C_1C является параллелограммом вследствие параллельности и равенства противоположных сторон D_1C_1 и DC.■

Теоремой 3 можно воспользоваться для задания плоскости с помощью двух параллельных прямых.

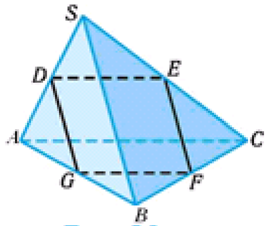


Рис. 12

Пример 2. На рис. 12 точки D, E, F, G — середины соответственно ребер AS, SC, BC, AB тетраэдра $ABCS$.

1) Установить взаимное расположение прямых AS и GE, DE и GF, DG и EF.

2) Найти периметр четырехугольника $DEFG$, если $BS = 8$ см, $AC = 16$ см.

Решение.1) Прямые AS и GE — скрещивающиеся, по признаку скрещивающихся прямых (теорема 1), поскольку точки A, S, E, G не лежат в одной плоскости. Если бы это было не так, то и точки A, B, C, S должны были лежать в одной плоскости, ведь точка B принадлежит прямой AG, а точка C — прямой SE.

Прямые DE и GF — параллельны, по признаку параллельности прямых (теорема 3). Действительно, отрезки DE и GF параллельны отрезку AC, как средние линии треугольников ASC и ABC. Аналогично устанавливается параллельность прямых DG и EF.

2) Из параллельности отрезков DG и EF, DE и GF вытекает, что четырехугольник $DEFG$ — параллелограмм. Длины его сторон можно найти, пользуясь тем, что его стороны — средние линии соответствующих треугольников. Имеем: $DG = \frac{1}{2}SB = 4$ (см), $DE = \frac{1}{2}AC = 8$ (см). Искомый периметр равен $2DE + 2DG = 8 + 16 = 24$ (см).

Ответ. 1) $AS \dot{-} GE$, $DE \parallel GF$, $DG \parallel EF$; 2) 24 см.

Следующая задача позволяет представить конкретную плоскость в виде параллельных прямых, удовлетворяющих определенному условию. Это понадобится при решении многих задач стереометрии.

Задача 1. Прямые a и b пересекаются. Доказать, что все прямые, параллельные прямой a и пересекающие прямую b, вместе с прямой a образуют плоскость.

Решение. Пусть прямые a и b пересекаются в точке A. Они однозначно определяют плоскость α, содержащую их (рис. 13 а). Через произвольную точку B прямой b, отличную от A, можно провести прямую c, параллельную прямой a (рис. 13 б). Понятно, что все эти прямые вместе с прямой a образуют плоскость α.

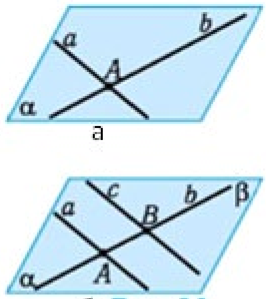


Рис. 13

Каждая прямая c, параллельная прямой a и пересекающая прямую b, принадлежит плоскости α. Действительно, через параллельные прямые a и c можно провести плоскость β. Тогда плоскости α и β содержат прямую a и точку B, не лежащую на этой прямой. Поэтому плоскости α и β совпадают и прямая b принадлежит плоскости α. ■

В следующих примерах продолжается установление взаимного расположения двух прямых.

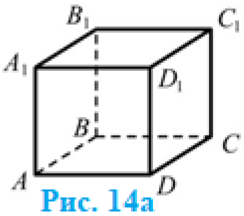


Рис. 14а

Пример 3. На рисунке 14а изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установить взаимное расположение прямых: 1) AB_1 и DC_1; 2) AB_1 и CD_1.

Решение. Установление взаимного расположения прямых будет состоять из формулировки гипотезы об их расположении, на основе анализа рисунка, и ее обоснования с помощью определений, свойств и признаков.

1) Прямые AB_1 и DC_1 — параллельны. Это вытекает из того, что четырехугольник AB_1C_1D является параллелограммом. Действительно, по признаку параллельности прямых $AD \parallel B_1C_1$, поскольку $AD \parallel BC$, $BC \parallel B_1C_1$. Кроме того, $AD = B_1C_1$, так как $AD = BC$, $B_1C_1 = DC$ (противоположные стороны прямоугольника равны!).

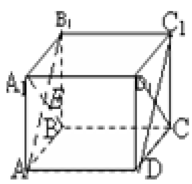


Рис. 14б

2) Прямые AB_1 и CD_1 — скрещивающиеся, по признаку скрещивающихся прямых, поскольку существует плоскость

A_1BCD_1, содержащая прямую CD_1 и пересекающая прямую AB_1 в точке E, не принадлежащей прямой CD_1 (см. рис. 14б).

Ответ. 1) $AB_1 \parallel DC_1$; 2) $AB_1 \dot{-} CD_1$.

Пример 4. На рис. 15 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки O, O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, K — середина ребра AB. Установить взаимное расположение прямых: 1) AB и D_1C_1; 2) AD_1 и BC_1; 3) AA_1 и OO_1; 4) AD_1 и KC_1; 5) AD и KC_1; 6) AD_1 и KO_1.

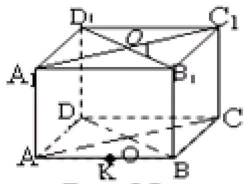


Рис. 15

Решение. Установление взаимного расположения прямых, как и в предыдущем примере, будет состоять из формулировки гипотезы об их расположении, на основе анализа рисунка, и ее обоснования с помощью определений, свойств и признаков.

1) Прямые AB и D_1C_1 — параллельны, по признаку параллельности прямых (теорема 3), поскольку $AB \parallel DC$ и $D_1C_1 \parallel DC$ (грани параллелепипеда — прямоугольники!).

2) Прямые AD_1 и BC_1 — параллельны. Это вытекает из того, что четырехугольник AD_1C_1B является параллелограммом. Действительно, по доказанному в 1), $AB \parallel D_1C_1$. Кроме того, $AB = D_1C_1$, так как $AB = DC$, $D_1C_1 = DC$ (противоположные стороны прямоугольника равны!).

3) Прямые AA_1 и OO_1 — параллельны, так как, применив предыдущие рассуждения, можно доказать, что четырехугольник AA_1C_1C является параллелограммом. Точки O, O_1 — середины противоположных сторон параллелограмма. Поэтому прямая, проходящая через них, параллельна сторонам AA_1 и CC_1.

4) Прямые AD_1 и KC_1 пересекаются. В самом деле, четырёхугольник AD_1C_1K является трапецией с основаниями AK и D_1C_1 (рис. 16), поскольку $AK \parallel D_1C_1$, $AK \neq D_1C_1$. А в трапеции прямые, содержащие боковые стороны AD_1 и KC_1, пересекаются.

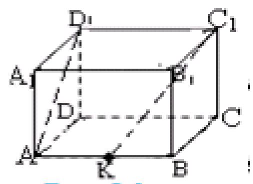


Рис. 16

5) Прямые AD и KC_1 — скрещивающиеся, по признаку скрещивающихся

прямых (теорема 1), поскольку точки A, B, C_1, K не лежат в одной плоскости.

6) Прямые AD_1 и KO_1 скрещивающиеся по признаку скрещивающихся прямых (теорема 2). Действительно, прямая AD_1 лежит в плоскости AD_1C_1, которая содержит диагональ BC_1 ($AB \parallel D_1C_1$!). Очевидно, что точка O_1 лежит вне этой плоскости, но тогда прямая KO_1 пересекает плоскость AD_1C_1 в точке K, которая не принадлежит прямой AD_1 (рис. 17).

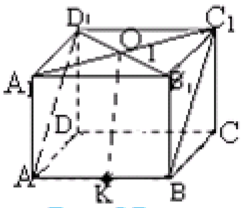


Рис. 17

Ответ. 1) $AB \parallel D_1C_1$; 2) $AD_1 \parallel BC_1$; 3) $AA_1 \parallel OO_1$; 4) $AD_1 \times KC_1$;

5) $AD \;\dot{-}\; KC_1$; 6) $AD_1 \;\dot{-}\; KO_1$.

В следующем примере рассматриваются задания на построения в стереометрии.

Пример 5. Отрезок AB точкой пересечения O с плоскостью α разделяется в отношении 5:3, считая от точки A. Точка D плоскости α удалена от точки O на 10 см.

1) Провести через точку B прямую a, параллельную прямой AD, и найти ее точку пересечения C с плоскостью α, если такая точка существует.

2) Найти длину отрезка CD.

Решение. 1) Условию задачи соответствует рис. 18. Здесь $AO:OB$ = 5:3. В первую очередь, необходимо доказать существование точки пересечения искомой прямой a с плоскостью α. Поскольку $a \parallel AD$ и прямая AD пересекает плоскость α, то и прямая a тоже пересекает эту плоскость по свойству параллельных прямых (теорема 5).

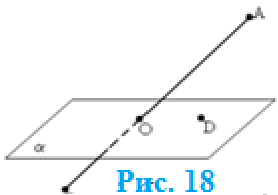


Рис. 18

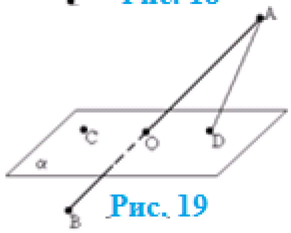


Рис. 19

Пусть точка C — точка пересечения прямой a с плоскостью α (черт. 19). По условию, $BC \parallel AD$. Поэтому точки A, B, C, D, O лежат в одной плоскости. И в этой плоскости точка C является точкой пересечения прямых a и OD ($a \parallel AD$, OD — секущая). Обоснование положения точки C позволяет ее построить.

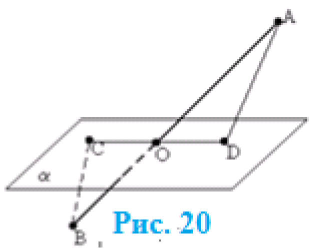


Рис. 20

Построение. В плоскости AOD строим прямую a, проходящую через точку B параллельно AD и находим точку пересечения C ее с прямой OD (рис. 20).

2) Для нахождения длины отрезка CD рассмотрим треугольники COB и AOD (рис 20). Они подобны по признаку подобия треугольников (углы COB и DOA — вертикальные, а углы BCO и ODA — накрест лежащие при параллельных прямых BC и DA и секущей CD). Поэтому $\frac{CO}{OB}=\frac{OD}{AO}$ или $\frac{CO}{OD}=\frac{OB}{AO}$. По условию, $\frac{OB}{AO}=\frac{3}{5}$ или $CO=\frac{3}{5}OD=\frac{3}{5}\cdot 10=6$ (см). Длина отрезка CD равняется $CO + OD = 6 + 10 = 16$ см.

Ответ: 2) 16 см.

Задачи на построение в курсе планиметрии важны. Это объясняется в первую очередь их прикладной направленностью. С помощью рисунков на листе бумаги можно достаточно точно отобразить отношения между геометрическими объектами. Поэтому плоские фигуры иногда просто отождествляют с их изображениями, как и построение на рисунках с построениями на абстрактных фигурах геометрии.

Не менее важную роль рисунки фигур играют в стереометрии, хотя, конечно, они не могут адекватно отображать все их свойства, отношения между их элементами. Поэтому нельзя полностью отождествлять пространственные фигуры с их изображениями, и ***решение задач на построение в стереометрии сводится к доказательству возможности построения, опираясь на аксиомы и уже доказанные теоремы.***

Решение задач на построение в стереометрии связано с доказательством определенных утверждений, в частности таких, в которых плоскости определяются с помощью прямых, удовлетворяющих определенным условиям. Примером такого утверждения является задача 1. Рассмотрим ей аналогичную.

Задача 2. Прямые a и b — скрещивающиеся. Доказать, что все прямые, параллельные прямой a и пересекающие прямую b, лежат в одной плоскости и даже образуют эту плоскость.

Решение. Пусть данные прямые a и b — скрещивающиеся. Проведем через произвольную точку B прямой b прямую a_1, параллельную a (рис. 21). Согласно теореме 4, это построение выполняется однозначно. Прямые a_1 и b пересекаются (почему?). Поэтому они однозначно определяют плоскость β, содержащую их (теорема 2 предыдущего пункта).

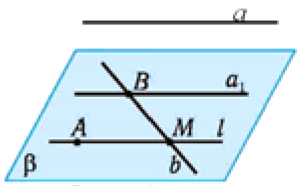


Рис. 21

Проведем в плоскости β через произвольную точку M прямой b, отличную от B, прямую l, параллельную прямой a_1. Эта прямая, согласно признаку параллельности прямых (теорема 3), параллельна прямой a. Поскольку через данную точку пространства можно провести лишь одну прямую, параллельную данной, то множество всех прямых, параллельных прямой a и пересекающих прямую b, лежит в плоскости β и даже образует ее, поскольку через произвольную точку A плоскости β проходит прямая l, пересекающая b и параллельная a_1 (а потому и a) или совпадающая с ней.

Задача 2 отличается от задачи 1 тем, что в случае, когда прямые a и b пересекаются, построенные прямые заполняют не всю плоскость β. Но, если к ним добавить прямую a, то получим плоскость β. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Всегда ли можно провести плоскость через четыре точки?

2. Существуют ли две прямые в пространстве, через которые нельзя провести плоскость?

3. Как расположены прямые AB и CD, если прямые AC и BD скрещивающиеся?

4. Принадлежит ли окружность плоскости, если две хорды окружности принадлежат этой плоскости?

5. Всегда ли прямая пространства, пересекающая каждую из двух пересекающихся прямых, лежит с ними в одной плоскости?

6. Могут ли две прямые , лежащие в разных плоскостях, быть параллельными?

7. Как могут быть расположены две прямые, если одна из них лежит в некоторой плоскости, а вторая пересекает эту плоскость?

8. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Можно ли их попарно соединить параллельными отрезками?

9. Может ли плоскость пересекать лишь одну сторону параллелограмма?

10. Как могут быть расположены две прямые, каждая из которых скрещивается с третьей?

11. По каждой из двух скрещивающихся нитей ползет по два паука. Могут ли они оказаться в одной плоскости?

12. Могут ли две прямые быть параллельными, если каждая из них скрещивается с третьей прямой?

Задачи для самостоятельного решения

1°. Две трапеции $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют общее основание AB и лежат в разных плоскостях. Установите взаимное расположение прямых:

1) DC и D_1C_1; 2) AD и BC;

3) D_1C_1 и проходящей через среднюю линию трапеции $ABCD$;

4) AD_1 и DC; 5) D_1C и C_1D.

2. Треугольники ABC и ABD лежат в разных плоскостях; K, L, M, N — середины сторон AC, CB, BD, DA соответственно. Определите взаимное расположение прямых: 1°) KL и MN; 2°) NL и KM; 3) AC и BD.

3. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, а M, N, P, Q — середины отрезков AB, BC, AD, DC, соответственно. Определите взаимное расположение прямых: 1°) PQ и MN; 2°) QM и PN; 3) AD и BC.

4. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α, а через конец B — прямая, пересекающая плоскость α в точке B_1. Точка C лежит между точками A и B на отрезке AB.

1°) Постройте точку пересечения C_1 плоскости α с прямой, проходящей через точку C параллельно прямой BB_1.

2) Найдите длину отрезка BB_1, если $AB = 6$ см; $AC:CC_1 = 2 : 5$.

5. Плоскость α не совпадает с плоскостью треугольника ABC и проходит через сторону AB. На продолжении стороны AC взяли точку C_1 так, что C лежит меж ду A и C_1.

1°) Постройте точку пересечения B_1 плоскости α с прямой, проходящей через точку C_1 параллельно прямой CB.

2) Найдите длину отрезка BB_1, если $AC:AB = 3:2$ и $CC_1 = 9$ см.

6. Пусть точка D не лежит в плоскости треугольника ABC; M и N, соответственно, — точки пересечения медиан треугольников ABC и DBC.

1°) Определите взаимное расположение прямых AD и BC, DM и AN, AD и MN.

2) Постройте точку пересечения прямой DM с плоскостью, проходящей через прямую AB и середину отрезка CD.

3*) В каком отношении прямая AM делит отрезок DM?

7. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая a пересекает эти плоскости в точках A и B, а прямая b проходит через точку C плоскости α и параллельна прямой a. Постройте точку пересечения прямой b с плоскостью β.

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через:

1°) вершины A_1, B_1, D; 2°) ребра A_1B_1 и CD;

3) вершины A, A_1 и центр грани DD_1C_1C;

4) вершины D_1, C_1 и центр грани A_1D_1DA;

5) прямые BD_1 и D_1C_1;

6) прямые A_1C и CD_1;

7*) центры граней A_1D_1DA, DD_1C_1C, $A_1B_1C_1D_1$;

8*) центры граней DD_1C_1C, C_1CBB_1; A_1B_1BA.

9. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через:

1°) ребро SA и точку M на ребре BC;

2°) вершину S и точки M и N, лежащие на ребрах AB и BC соответственно;

3°) точки на ребрах SA, SB, SC;

4) вершину C и точки M и N, лежащие, соответственно, на гранях ABC и ASC;

5) вершину A, точку M на ребре SB и точку K в плоскости ABC;

6*) точки M, N и P, лежащие, соответственно, на прямых SA, SC, и BC.

7*) точки M, N и P, лежащие, соответственно, на ребре SA, и в плоскостях ASC, ABC.

10. Пусть A, B, C — точки окружности, лежащей в плоскости α, а точка D находится вне плоскости. Докажите, что прямые DA, DB, DC не лежат в одной плоскости.

11. Пусть трапеция $ABCD$ лежит в плоскости α, а точка S находится вне плоскости. Докажите, что никакие три из четырех прямых SA, SB, SC, SD не лежат в одной плоскости.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь: 1) признаком параллельности прямых в пространстве; 2) определением трапеции; 3) признаком параллельности прямых в пространстве; 4) признаком скрещиваемости прямых; 5) признаком параллелограмма.

2. Воспользуйтесь: 1) признаком параллельности прямых в пространстве; 2) признаком параллелограмма; 3) признаком скрещиваемости прямых.

3. Воспользуйтесь: 1), 2) свойством средней линии треугольника; 3) признаком скрещиваемости прямых.

4. 1) Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку C параллельно прямой BB_1, с прямой AB_1; 2) воспользуйтесь подобием треугольников.

5. 1) Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку C_1 параллельно прямой CB, с прямой AB; 2) воспользуйтесь теоремой Фалеса.

6. 1) Воспользуйтесь признаком скрещиваемости прямых, а также тем, что отрезки DM и AN лежат в плоскости ADK, где K — середина BC; 2) постройте точку пересечения прямой DM с прямой BN; 3) дважды воспользуйтесь обобщённой теоремой Фалеса.

7. Рассмотрите два случая: $CA \parallel m$ и $CA \mathbin{\dot{-}} m$.

8. 1) Соедините попарно указанные вершины; 2) обратите внимание на то, что указанные рёбра параллельны; 3) проведите через центр грани DD_1C_1C прямую, параллельную AA_1; 4) обратите внимание на то, что центр грани A_1D_1DA лежит на одной прямой с точками A и D_1; 5) воспользуйтесь тем, что четырёхугольник ABC_1D_1 — параллелограмм; 6) воспользуйтесь тем, что четырёхугольник A_1BCD_1 — параллелограмм; 7), 8) постройте сначала пересечение секущей плоскости с плоскостью одной из граней.

9. 1) Соедините концы ребра *SA* с точкой *M*; 2) соедините попарно вершину *S* и точки *M* и *N*; 3) соедините попарно указанные точки; 4) постройте последовательно линии пересечения секущей плоскости с плоскостями граней *ABC*, *ASC*, *ASB*, *CSB*. 5) постройте последовательно линии пересечения секущей плоскости с плоскостями граней *ABC*, *ASB*; *CSB*; 6), 7) рассмотрите отдельно случаи, когда прямая *MN* пересекает плоскость *ABC* и когда не пересекает.

10. Обратите внимание на то, что точки *A*, *B*, *C* не лежат на одной прямой.

11. Обратите внимание на то, что три произвольные вершины трапеции не лежат на одной прямой.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Нет. **2.** Да. **3.** Скрещиваются. **4.** Да. **5.** Да. **6.** Нет. **7.** Пересекаться или скрещиваться. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** Быть параллельными, пересекающимися, скрещивающимися. **11.** Нет. **12.** Могут.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1) $DC \parallel D_1C_1$; 2) $AD \times BC$; 3) параллельны; 4) $AD_1 \mathbin{\dot{-}} DC$; 5) $D_1C \times C_1D$. **2.** 1°) $KL \parallel MN$; 2°) $NL \times KM$; 3) $AC \mathbin{\dot{-}} BD$. **3.** 1) $PQ \parallel MN$; 2) $QM \times PN$; 3) $AD \mathbin{\dot{-}} BC$. **4.** 2) 15 см. **5.** 2) 6 см. **6. 1)** $AD \mathbin{\dot{-}} BC$, $DM \times AN$, $AD \parallel MN$; 3) 3:1.

3. Параллельное проектирование

Повторяем теорию

При изучении стереометрии одним из важнейших является вопрос об изображении пространственных фигур на плоскости. Речь идет о построении таких ***изображений, которые бы отображали свойства оригинала и давали возможность достаточно просто, наглядно и полно ознакомиться с ним.***

Возможны два случая. В первом из них лучи исходят из точечного источника света (лампы, фонаря), размещенного вблизи модели. Этой ситуации отвечает ***центральное проектирование.*** По его законам формируется изображение предметов на сетчатке глаза. Однако центральное проектирование искажает одно из основных отношений геометрии — параллельность (например, нам кажется, что параллельные железнодорожные пути сливаются на горизонте). Кроме того, создание такого изображения является достаточно сложным делом.

Другой способ изображения пространственных фигур связан с освещением модели параллельными лучами. Соответствующий метод изображения называется методом ***параллельного проектирования.*** Он в достаточной степени удовлетворяет упомянутым условиям. Метод параллельного проектирования широко используется не только в геометрии, но и в черчении. В сущности, мы уже пользовались им при построении рисунков. Опишем этот способ изображения.

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая а. Возьмем произвольную точку пространства М, не принадлежащую им. Проведем через точку М прямую т, параллельную прямой а (см. рис. 22). Прямая т пересечет плоскость α в некоторой точке M_1 (почему?). Эта точка называется параллельной проекцией точки М на плоскость α при проектировании параллельно прямой а. Параллельными проекциями точек прямой а служит точка ее пересечения с плоскостью α, а проекциями точек плоскости α являются сами эти точки.

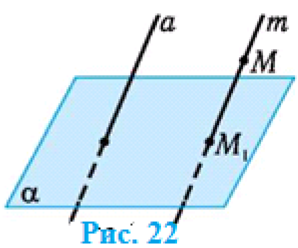


Рис. 22

Плоскость α называется ***плоскостью проекций.*** При замене прямой a на произвольную параллельную ей прямую проекции точек пространства не меняются. Это вытекает из транзитивности отношения параллельности прямых (признак параллельности прямых). Поэтому говорят, что прямая a определяет ***направление проектирования.*** Все прямые, параллельные прямой a, определяют одно и то же направление проектирования и вместе с прямой a называются ***проектирующими прямыми.***

Параллельной проекцией фигуры называется фигура, составленная из параллельных проекций всех точек данной фигуры.

Проекцией каждой проектирующей прямой является точка.

В теоремах 1 − 3, речь будет идти о *проектировании прямых и отрезков, не лежащих на проектирующих прямых.*

Свойства параллельного проектирования.

Теорема 1 (свойство параллельной проекции прямой и отрезка).

Параллельной проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка — отрезок.

Плоскость, образованную совокупностью проектирующих прямых, пересекающих данную прямую l, будем называть ***проектирующей плоскостью*** для прямой l. Проекция прямой l является пересечением плоскости проекций с проектирующей плоскостью для этой прямой.

Теорема 2 (свойство проекции параллельных прямых).

Проекции параллельных прямых — параллельны или совпадают.

Теорема 3 (об отношении длин проекций параллельных отрезков).

Отношение длин проекций двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин этих отрезков.

Проекции простейших геометрических фигур. Рассматривается случай, когда проектирующая прямая пересекает фигуру не более чем в одной точке.

Теорема 4 (свойства параллельных проекций плоских фигур).

1.Проекцией угла является угол.

2. Проекцией треугольника является треугольник.

3. Проекцией параллелограмма является параллелограмм.

4.Проекцией трапеции является трапеция.

5.Проекцией *n*-угольника является *n*-угольник.

Если же проектирующая прямая пересекает плоскую фигуру более чем в одной точке, то проекцией фигуры является отрезок или другое множество точек прямой.

Решаем

Пример 1. Дана параллельная проекция равнобедренного треугольника. Построить проекцию:

1) медианы, проведенной к одной из боковых сторон;

2) высоты, опущенной на основание треугольника.

Решение. Пусть даны равнобедренный треугольник ABC с основанием BC (рис. 23, а) и его параллельная проекция — треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 23, б).

1) Если CM — медиана к боковой стороне AB, то M — середина отрезка AB (рис. 23, в). Тогда проекция M_1 точки M, согласно теореме об отношении длин проекций параллельных отрезков, является серединой проекции A_1B_1 стороны AB. Поэтому отрезок C_1M_1 — проекция медианы CM.

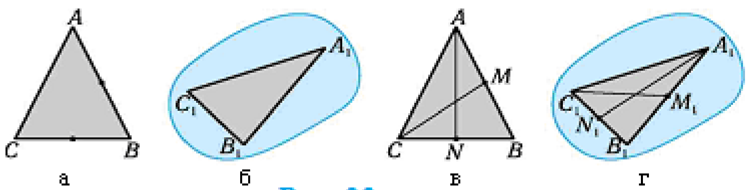


Рис. 23

Построение. Строим проекцию точки M, это середина M_1 отрезка A_1B_1 (рис. 23, г). Отрезок C_1M_1 является проекцией медианы, проведенной к одной из боковых сторон по теореме 1.

2) Учитывая, что высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является одновременно и медианой, для построения ее проекции достаточно построить проекцию медианы AN.

Построение. Строим проекцию точки N, это середина N_1 отрезка B_1C_1

(рис. 23, г). Тогда отрезок A_1N_1 является проекцией высоты, опущенной на основание треугольника. ■

Чтобы различать оригинал и его проекцию, будем изображать проекцию на изображении плоскости проекций (см. рис. 23, б, г).

Следующий пример посвящён простейшей стереометрической задаче на построение — построению точки пересечения прямой и плоскости.

Пример 2. Точки A и B находятся по одну сторону от плоскости α; A_1, B_1 — их параллельные проекции на эту плоскость, $AA_1 > BB_1$.

1) Построить точку пересечения K прямой AB с плоскостью α.

2) Найти расстояние между серединой отрезка KB и ее проекцией на плоскость α, если $KB_1:B_1A_1 = 3:1$ и $AA_1 = 8$ см.

Решение. 1) Построим рисунок, соответствующий условию примера (см. рис. 24 а), пользуясь определением параллельной проекции. Прямые AA_1 и BB_1 — параллельны, а потому лежат в плоскости AA_1B_1. Плоскость AA_1B_1 пересекает плоскость α по прямой A_1B_1. Прямая AB лежит в плоскости AA_1B_1. Поскольку $AA_1 > BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$ (четырехугольник AA_1B_1B — трапеция с основаниями AA_1 и BB_1), то прямая AB пересекает прямую A_1B_1 в некоторой точке K. Эта точка и является точкой пересечения прямой AB с плоскостью α, ведь прямая A_1B_1 лежит в плоскости α.

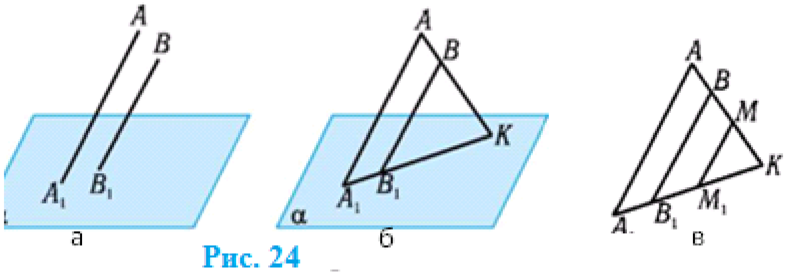


Рис. 24

Построение. Проводим прямые AB и A_1B_1, находим точку K их пересечения (рис. 24 б).

2) Из решения предыдущего задания вытекает, что данное задание сводится к планиметрической задаче. Изобразим его условие на рис. 24, в), где M — середина отрезка BK, $MM_1 \parallel BB_1$, $AA_1 = 8$ см, $KB_1 : B_1A_1 = 3 : 1$. Необходимо найти длину отрезка MM_1. По построению, треугольники MM_1K и AA_1K подобны ($AA_1 \parallel MM_1$).

Поэтому справедливо равенство: $\frac{MM_1}{AA_1}=\frac{KM_1}{KA_1}$.

Так как AA_1 = 8 см, то для нахождения MM_1 осталось найти отношение $KM_1 : KA_1$ или $KA_1 : KM_1$. По условию, $B_1A_1=\frac{1}{3}KB_1$. Поэтому

$$\frac{KA_1}{KM_1}=\frac{KB_1+B_1A_1}{KM_1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{KB_1}{KM_1}=\frac{8}{3}.$$

Таким образом, $MM_1=AA_1\cdot\frac{KM_1}{KA_1}=8\cdot\frac{3}{8}=3$ (см).

Ответ. 2) 3 см.

Параллельная проекция окружности называется эллипсом.

Пример 3. Дана параллельная проекция круга и его диаметра. Постройте проекцию диаметра, перпендикулярного данному.

Решение. Пусть рис. 25 а представляет оригинал конструкции, то есть круг с центром O, данный диаметр AB, а рис. 25 б — его проекцию. Отметим, что центр O проектируется в середину O_1 отрезка A_1B_1. Поскольку величины углов, а потому и перпендикулярность при проектировании не сохраняются, то попробуем использовать другие свойства проектирования для нахождения проекции диаметра EF, перпендикулярного AB (рис. 25 в). Этот диаметр делит произвольную хорду CD, параллельную AB, пополам. Проекцией хорды CD является хорда эллипса C_1D_1, параллельная A_1B_1, а проекцией ее середины K —

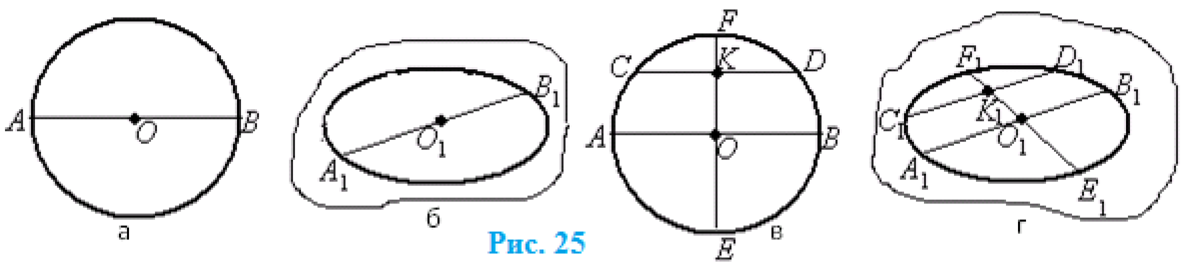


Рис. 25

середина K_1 отрезка C_1D_1 (рис. 25 г). Проекцией диаметра EF является хорда эллипса, которая проходит через точки O_1 и K_1.

Построение. Проводим в эллипсе произвольную хорду C_1D_1, параллельную A_1B_1 (она является проекцией некоторой хорды круга, параллельной AB). Через середины O_1, K_1 отрезков A_1B_1 и C_1D_1 проводим хорду эллипса F_1E_1. Она и является проекцией диаметра круга, перпендикулярного данному. ■

Задача. Даны три точки, не лежащие на одной прямой и находящиеся по одну сторону от плоскости проекций, и их параллельные проекции. Построить линию пересечения плоскости проекции с плоскостью, проходящей через данные точки.

Решение. Пусть A, B, C — данные точки, α — плоскость проекций, A_1, B_1, C_1 — проекции данных точек (рис. 26).

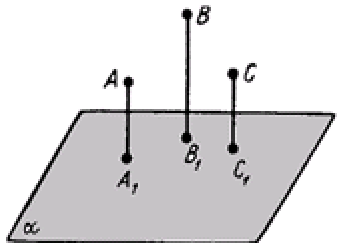


Рис. 26

Чтобы построить линию пересечения плоскостей, достаточно найти две ее точки. Искомая прямая должна содержать точки пересечения прямых AB и BC с плоскостью α (почему?). Для построения точки M пересечения прямой AB с плоскостью α проведем плоскость, проходящую через параллельные проектирующие прямые AA_1 и BB_1. Эта плоскость является проектирующей для прямой AB, и искомая точка M содержится в этой плоскости (почему?). Для построения точки M достаточно найти точку пересечения прямых AB и A_1B_1 (рис. 27). Аналогично строим точку пересечения N прямой BC с плоскостью α. Прямая MN — искомая. Эту прямую называют ***следом*** плоскости ABC на плоскости проекций α.

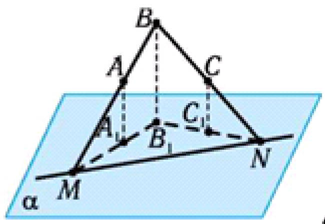


Рис. 27

Анализируя приведенное построение, можно обнаружить условия существования следа плоскости ABC на плоскости проекций α. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются тогда и только тогда, когда длины отрезков AA_1 и BB_1 различны (почему?). Аналогичный вывод можно сделать и относительно прямых BC и B_1C_1, AC и A_1C_1. Таким образом, если длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 равны, то нельзя построить след плоскости ABC на плоскости проекций α, то есть эти плоскости непересекающиеся. Если хотя бы два из этих отрезков имеют различные длины, то такое построение возможно. ■

Из приведенных соображений можно сделать вывод, полезный для построения следа плоскости ABC. Если длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1

отличаются мало, то след плоскости *ABC* на плоскости проекций α будет очень удалён от проекций точек *A*, *B*, *C*. Поэтому при выполнении построения следа на листе бумаги возникают трудности: след может не поместиться на рисунке.

Пример 4. Построить на плоскости грани *ABC* тетраэдра *ABCD* след плоскости α, делящей ребро *AD* пополам, а ребра *BD* и *CD* в отношении 2 : 1 и 1 : 2 соответственно, считая от точки *D*.

Решение. Пусть плоскость α пересекает ребра *AD*, *BD*, *CD* тетраэдра *ABCD* в точках *K*, *M*, *L* соответственно (рис. 28, а). Задача заключается в построении следа плоскости *KML* на плоскости *ABC*. Для этого достаточно построить две точки линии пересечения этих плоскостей.

Прямые *KM* и *AB* лежат в одной плоскости и пересекаются. Это вытекает из того, что точки *K* и *M* делят стороны треугольника *ABD* в разных отношениях (вспомните теорему Фалеса!). Обозначим точку пересечения прямых *KM* и *AB* через *X* (рис. 28, б)

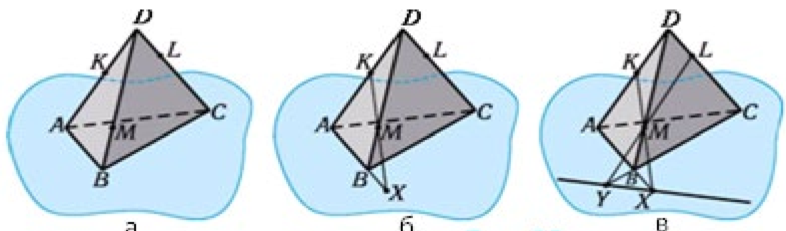


Рис. 28

Аналогично обосновывается, что прямые *LM* и *CB* пересекаются и строится вторая точка *Y* — точка пересечения прямых *LM* и *BC* (рис. 28, в). Следовательно, следом плоскости α на плоскости *ABC* является прямая *XY*. ■

Пример 5. Дана параллельная проекция прямоугольной трапеции *ABCD*, где ∠*DAB* = 90°, боковая сторона *AB* равняется меньшему основанию *BC*. Построить:

1) проекцию высоты трапеции, проведенной из вершины *C*;
2) проекции биссектрис углов *ABC* и *BAD*.

Решение. Пусть *ABCD* — данная трапеция (рис. 29 а) и $A_1B_1C_1D_1$ — ее проекция (рис. 29 б).

1) Из условия вытекает, что боковая сторона BA является высотой трапеции. Но высоты трапеции, проведенные к основанию AD, параллельны между собой. Поэтому по теореме 2 о проекциях параллельных прямых проекция C_1F_1 высоты трапеции, проведенной из вершины C, должна быть параллельна B_1A_1.

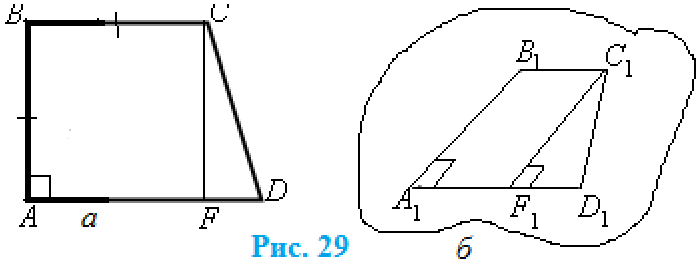


Рис. 29

2) Четырехугольник $ABCF$ является квадратом (рис. 29 а), поэтому биссектриса угла FAB содержит его диагональ AC. Следовательно, луч A_1C_1 является проекцией биссектрисы угла DAB (рис. 30).

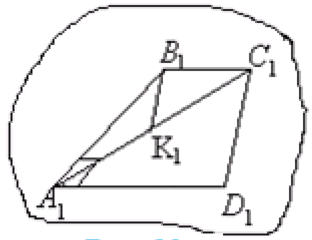


Рис. 30

Аналогично строится изображение биссектрисы угла ABC, исходя из изображения квадрата $ABCF$. Можно рассуждать и иначе.

Учитывая, что треугольник ABC является равнобедренным ($AB = BC$), медиана, проведенная из вершины B, является и биссектрисой. Проекцией этой медианы, согласно теореме 3 об отношении длин проекций параллельных отрезков, является медиана B_1K_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Потому проекцией биссектрисы угла ABC является луч B_1K_1. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Какой из рис. 1 − 4 не может быть изображением параллельных проекций прямых a и b на данную плоскость, если прямые a и b: 1) параллельны; 2) пересекаются; 3) скрещиваются?

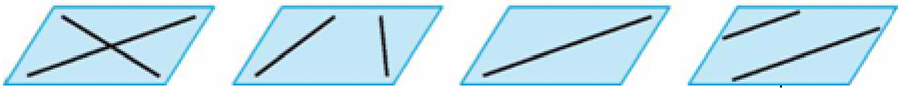


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

2. Какой из рис. 1 − 5 не может быть изображением параллельной проекции угла на плоскость, если угол: 1) острый; 2) тупой; 3) прямой?

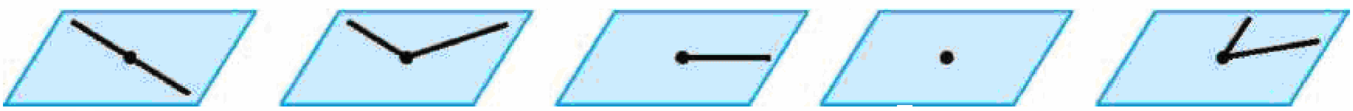


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

3. На каком из рис. 1– 5 может быть изображена параллельная проекция треугольника на данную плоскость, если он: 1) равносторонний; 2) равнобедренный; 3) прямоугольный?

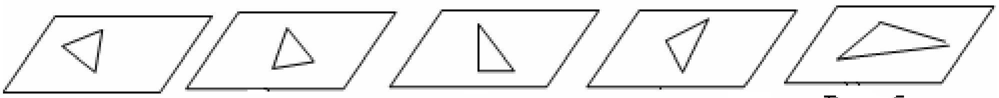


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

4. На каком из рис. 1 – 5 может быть изображена параллельная проекция четырехугольника на данную плоскость, если он: 1) параллелограмм; 2) квадрат; 3) прямоугольник; 4) трапеция; 5) равнобокая трапеция?

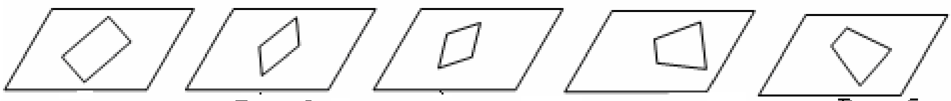


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

5. На каком из рисунков 1, 2 представлены тени от столбиков при их освещении Солнцем, а на каком – фонариком?

Рис. 1 Рис. 2

6. Может ли параллельной проекцией прямой быть луч?

7. Всегда ли параллельной проекцией прямой является прямая?

8. Могут ли проекции двух пересекающихся прямых быть параллельными?

9. Пересекаются ли прямые, если их проекции пересекаются?

10. Верно ли утверждение, что проекция середины отрезка является серединой его проекции?

11. Может ли параллелограмм быть параллельной проекцией трапеции?

12. Может ли параллельная проекция высоты треугольника быть медианой его проекции?

13. Верно ли, что фигура является отрезком, если ее параллельная проекция — отрезок?

14. Могут ли параллельные проекции скрещивающихся прямых совпадать?

15. Верно ли, что четырёхугольник является параллелограммом, если его параллельная проекция — параллелограмм?

Задачи для самостоятельного решения

1°. Даны параллельная проекция ромба *ABCD* и точки *M* на стороне *BC*. Постройте:

1) проекцию перпендикуляра, проведенного из точки *M* к диагонали *BD*;

2) проекцию точки, делящей диагональ *BD* в отношении 1:3, считая от точки *B*.

2. Дана параллельная проекция равнобокой трапеции *ABCD.* Постройте:

1°) проекцию точки *M*, делящей меньшее основание *BC* в отношении 1:3, считая от точки *B*;

2°) проекцию перпендикуляра, проведенного из точки *M* к основанию *AB*;

3°) средней линии трапеции;

4) оси симметрии трапеции;

5) высоты, проведенной из вершины тупого угла.

3. Дана параллельная проекция равностороннего треугольника *ABC.* Постройте проекцию:

1°) медианы, проведенной из вершины *B*;

2°) биссектрисы угла *A*;

3°) высоты, проведенной из вершины *C*;

4) центра окружности, вписанной в треугольник *ABC.*

4. Дан эллипс, являющийся параллельной проекцией окружности. Изобразите проекции:

1) центра окружности;

2) вписанного в окружность равнобедренного прямоугольного треугольника;

3) вписанного в окружность квадрата;

4) описанного около окружности квадрата;

5) вписанного в окружность равностороннего треугольника;

6) описанного около окружности равностороннего треугольника;

7) вписанного в окружность правильного шестиугольника;

8) описанного около окружности правильного шестиугольника.

5. Точки A и B расположены по разные стороны от плоскости β, а A_1, B_1 — их проекции на плоскость.

1°) Постройте точку пересечения K прямой AB с плоскостью β.

2) Найдите расстояние между серединой отрезка AB и ее проекцией на плоскость β, если $AK : KB = 2 : 1$, а $BB_1 = 8$ см.

6. Отрезок AB пересекает плоскость проекции в точке M, B_1 — проекция точки B.

1°) Постройте проекцию точки A.

2) Найдите длину проекции отрезка AB, если $MB_1 = 6$ см и $AM : MB = 2 : 3$.

7. Параллелограмм $ABCD$ не имеет общих точек с плоскостью α**.** Через точки A, B, C, D проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

1) Чем является четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ для параллелограмма $ABCD$?

2) Определите вид четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

3) Постройте проекцию центра симметрии параллелограмма $ABCD$ на плоскость α, если направление проектирования определяет прямая AA_1.

8. Точки A и B лежат на несмежных боковых ребрах четырехугольной пирамиды. Постройте пересечение прямой AB с плоскостью основания пирамиды.

9. Точка A лежит на боковой грани параллелепипеда, а точка B — на нижнем основании. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью верхнего основания.

10*. Точки A, B, C лежат на разных боковых гранях параллелепипеда. Постройте след плоскости ABC на плоскости основания. Пользуясь следом, постройте сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

11. Постройте проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$, если известны проекции вершин A, B, D.

12. Даны проекция пятиугольника на плоскость и положения трех его вершин. Найдите расположение остальных вершин пятиугольника.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Используйте то, что диагонали ромба перпендикулярны и что два перпендикуляра к прямой на плоскости параллельны. 2) Используйте теорему 3 об отношении длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой.

2. 1) Используйте теорему 3 об отношении длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой. 2) Используйте то, что отрезок, соединяющий середины оснований равнобокой трапеции, перпендикулярен основаниям. 3) Используйте теорему 3 об отношении длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой. 4), 5) Используйте то, что ось симметрии равнобокой трапеции и высота перпендикулярны основаниям.

3. 1) Используйте теорему 3 об отношении длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой; 2), 3) используйте свойства биссектрисы и высоты в равностороннем треугольнике; 4) попробуйте охарактеризовать центр окружности, вписанной в равносторонний треугольник, с помощью медиан.

4. 1) Охарактеризуйте центр окружности с помощью параллельных хорд; 2), 3) воспользовавшись указанием к предыдущему заданию, постройте два взаимно перпендикулярных диаметра; 4) рассмотрите стороны описанного квадрата, параллельные диагоналям вписанного квадрата; 5) постройте сначала диаметр, на котором должна лежать высота треугольника, и найдите, в каком отношении основание этой высоты делит построенный диаметр; 6) – 8) примените построение вписанного правильного треугольника.

5. 1) Используйте то, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости и то, что прямая A_1B_1 лежат в плоскости β; 2) воспользуйтесь подобием треугольников.

6. 1) Используйте то, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости и то, что прямая A_1B_1 лежат в плоскости проекций; 2) воспользуйтесь подобием треугольников.

7. Воспользуйтесь определением параллельной проекции, теоремой 2 о проекции параллельных прямых и определением параллелограмма.

8. Проанализируйте возможность построения.

9. Спроектируйте точки *A* и *B* на плоскость верхнего основания параллельно боковому ребру.

10. Используйте решение задачи и примера 4.

11. Используйте то, что проекция центра шестиугольника симметрична проекции вершины *B* относительно середины проекции отрезка *AC.*

12. Примените обратимость проектирования.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. 1) Рис. 1 и 2; 2) рис. 3 и 4; 3) рис. 3 и 4. **2.** 1) Рис. 1; 2) рис 1; 3) рис. 1. **3.** На всех. **4.** 1) На рис 1, 2, 3; 2) на рис 1, 2, 3; 3) на рис 1, 2, 3; 4) на рис. 4 и 5; 5) на рис. 4 и 5. **5.** На рис. 1 — Солнцем, на рис. 2 — фонариком. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Не обязательно. **10.** Да. **11.** Нет. **12.** Может. **13.** Нет. **14.** Нет. **15.** Да.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

5. 2) 4 см. **6.** 2) 10 см. **7.** 1) Параллельной проекцией; 2) параллелограмм; 3) центр симметрии параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$.

4. Изображение фигур в стереометрии

Повторяем теорию

При изучении вопроса об изображении фигур в стереометрии основное внимание сосредоточим на изображении плоских фигур. И это понятно, поскольку глядя на реальный физический объект (дом, игральный кубик, книгу и др.), мы видим поверхность, во многих случаях состоящую из плоских частей.

Изображением пространственной фигуры называется фигура, подобная параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость.

В определении не фиксируется ни плоскость проекций, ни направление проектирования.

Поскольку основная геометрическая фигура — это треугольник, выясним, какая фигура может быть изображением треугольника.

Изображением данного треугольника может быть произвольный треугольник.

Изображениям данного параллелограмма может быть произвольный параллелограмм.

Действительно, параллелограмм диагональю разбивается на два равных треугольника (рис. 31, а). Изображением треугольника ABD может быть произвольный треугольник $A_1B_1D_1$. Достроив треугольник $A_1B_1D_1$ до параллелограмма (рис. 31, б), который однозначно определяется этим треугольником, получим необходимый вывод.

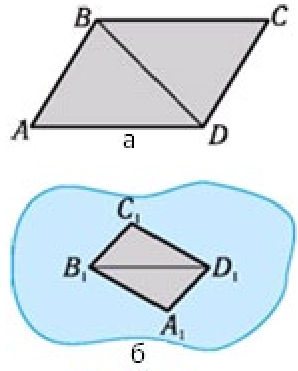


Рис. 31

Изображением данной трапеции является трапеция, но не произвольная: должно сохраняться отношение длин оснований (они лежат на параллельных прямых, см. теорему 3 из пункта «Параллельное проектирование» об отношении длин отрезков параллельных проекций).

Научившись изображать некоторые плоские фигуры, размещенные в пространстве, можем приступить к изображению простейших пространственных фигур.

В данной плоскости α построим параллелограмм $ABCD$ и через все его вершины проведем параллельные прямые, пересекающие плоскость α (рис. 32). На этих прямых по одну сторону от плоскости α отложим отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 одинаковой длины. Нетрудно доказать, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости и являются вершинами параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$. Действительно, поскольку AA_1D_1D, $ABCD$ и BB_1C_1C — параллелограммы, то $A_1D_1 \parallel AD$, $AD \parallel BC$, $BC \parallel B_1C_1$ и, согласно признаку параллельности прямых, $A_1D_1 \parallel B_1C_1$. Это, в частности, дает нам возможность утверждать, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

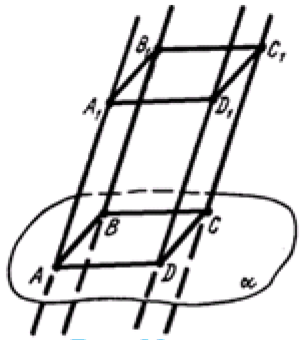


Рис. 32

Аналогично имеем, что $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, то есть четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом.

Совокупность всех точек отрезков, соединяющих точки параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, образуют фигуру, которая является ***параллелепипедом*** (рис. 33). Понятно, что при построении параллелепипедов можно обойтись параллельными отрезками, соединяющими соответствующие точки параллелограммов. Изображение выполнено, как и на рис. 32, только с учетом того, что параллелепипед «заполнен» точками, и некоторые линии невидимы для наблюдателя. Как и в черчении, их изображают штриховой линией. Обозначают параллелепипед по его вершинам: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

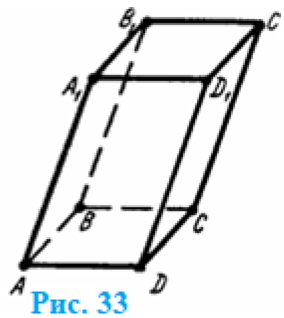


Рис. 33

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются ***смежными,*** а не имеющие общего ребра, — ***противоположными.*** Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются ***противоположными.*** Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется ***диагональю параллелепипеда.***

Рассмотрение изображений плоских и пространственных фигур позволяет *сформулировать требования к изображениям:*

1) изображение должно быть правильным, то есть удовлетворять определенным правилам;

2) изображение должно быть наглядным;

3) изображение должно быть простым для выполнения.

Правильность изображения обеспечивается соблюдением правил построения параллельных проекций. Наглядность и простота обеспечиваются выбором направления проектирования, то есть «угла зрения» на фигуру и расположением плоскости проекции.

Решаем

Рассматриваются примеры на построение изображений геометрических фигур на плоскости.

Пример 1. Построить произвольное изображение прямоугольной трапеции, у которой одно из оснований втрое больше другого.

Решение. Здесь и дальше плоскую фигуру (треугольник, трапецию и т. п.) мы отождествляем с ее «точным» изображением, когда она находится в плоскости проекций.

Сама трапеция не определена полностью (есть только условие относительно оснований), да и к изображениям не имеем никаких требований, потому эти требования определяются только свойствами параллельного проектирования и изображений. Если в данной трапеции (рис. 34) выделить три вершины A, B, D, то они определяют прямоугольный треугольник ABD, изображением которого является произвольный треугольник $A_1B_1D_1$ (рис. 35). Поскольку при проектировании параллельность прямых и отношения длин отрезков, которые лежат на параллельных прямых, сохраняются, то отрезок B_1C_1, который изображает основание BC, параллелен A_1D_1 и втрое меньший A_1D_1: $B_1C_1 \parallel A_1D_1,\ B_1C_1 = \frac{1}{3}A_1D_1$. Эти построения в планиметрии легко реализуются.

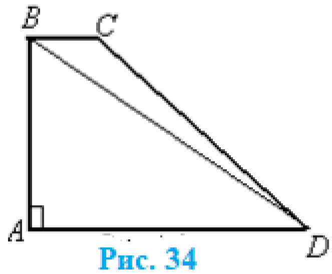


Рис. 34

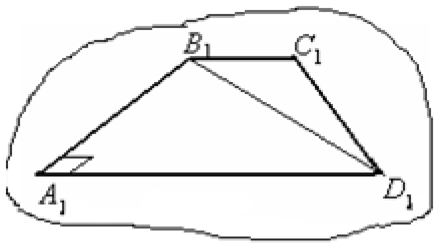


Рис. 35

Часто при решении задач необходимо выполнить определенные построения на изображении (провести медиану, указать центр вписанной окружности, построить сечение и т. п.). Эти построения обычно выполняются по свойствам параллельного проектирования. Для этого сначала выполняют построения на оригинале изображаемой фигуры. А потом определяют, какие свойства построенных элементов сохраняются при параллельном проектировании. И, наконец, выполняют построения на изображении. ■

Пример 2. На произвольном изображении прямоугольного равнобедренного треугольника ABC построить изображение:

1) центра O описанной окружности;

2) вписанного квадрата, две стороны которого лежат на катетах треугольника, а одна из вершин — на гипотенузе BA.

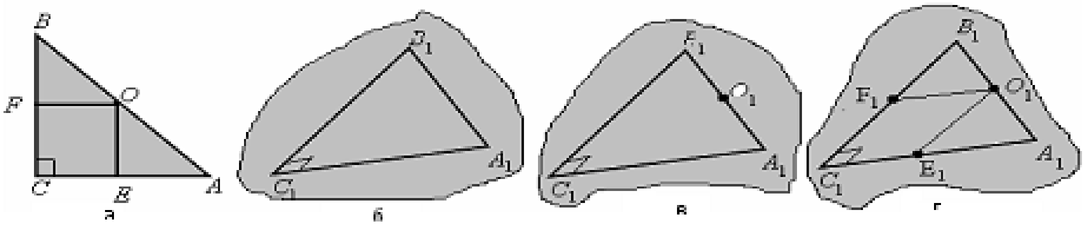


Рис. 36

Решение. Пусть изображением прямоугольного равнобедренного треугольника ABC (рис. 36 а) является треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 36 б).

1) Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности является серединой гипотенузы. Поэтому его изображение является серединой изображения гипотенузы.

Построение. Разделим отрезок A_1B_1 пополам, точка деления O_1 и является искомой (рис. 36 в).

2) Если из середины O гипотенузы AB провести перпендикуляры к катетам (см. рис. 36 а), то получим квадрат, удовлетворяющий условию задания. Проведенные перпендикуляры параллельны катетам. Именно этим воспользуемся для построения искомого изображения.

Построение. Из точки O_1 проводим отрезки O_1E_1 и O_1F_1, параллельные C_1B_1 и C_1A_1 соответственно (рис. 36 г). Четырехугольник $C_1E_1O_1F_1$ является искомым. ■

Рассматривается пример на построение сечения трёхмерного геометрического тела.

Пример 3. На изображении куба построить его сечение плоскостью, проходящей через середины трех параллельных ребер.

Решение. На рисунке 37 середины ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначены соответственно через A_2, B_2, C_2, D_2. Изображения этих точек лежат на серединах изображений соответствующих отрезков (по-

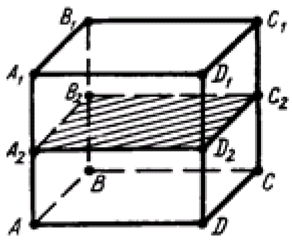


Рис. 37

чему?). Пусть секущая плоскость проходит через точки A_2, B_2, D_2. Поскольку все грани куба — квадраты, то отрезок A_2B_2, проходящий через середины противоположных сторон квадрата AA_1B_1B, равен стороне квадрата AB (или ребру куба) и параллелен этой стороне.

Аналогично $D_2C_2 \parallel DC$ и $D_2C_2 = DC$. Поскольку и $AB \parallel DC$, то, в соответствии с транзитивностью отношения параллельности, $A_2B_2 \parallel D_2C_2$. Через параллельные прямые A_2B_2, D_2C_2 проходит единственная плоскость. В этой плоскости лежат точки A_2, B_2, D_2, поэтому данная плоскость является искомой секущей. Секущая плоскость пересекает грани куба по равным отрезкам A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2 и D_2A_2. Следовательно, четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$, являющийся искомым сечением, имеет форму ромба. Нетрудно заметить, что диагонали B_2D_2 и A_2C_2 этого ромба равны между собой. То есть четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат. Мы не только построили сечение, но и установили его форму. ■

Выше были рассмотрены изображения параллелепипеда и построения на нем. Теперь рассмотрим изображение пирамид, в частности, тетраэдров. Тетраэдр проектируется в четырехугольник, который после проведения в нем диагоналей становится изображением тетраэдра. Для построения его изображения надо выбрать четыре вершины, которые не лежат в одной плоскости. Они являются вершинами какого-то тетраэдра. Потом задать произвольным образом изображение этих точек. А уже тогда достраивать изображение всей фигуры, пользуясь свойствами проектирования.

Пример 4. Построить изображение четырехугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольная трапеция, у которой одно из оснований втрое больше другого.

Решение. При построении изображения четырехугольной пирамиды $SABCD$, основанием которой является трапеция, описанная в примере 1, достаточно выделить четыре вершины S, A, B, D, произвольно для них построить изображение S_1, A_1, B_1, D_1 (рис.38 а), а дальше, как в примере 1,

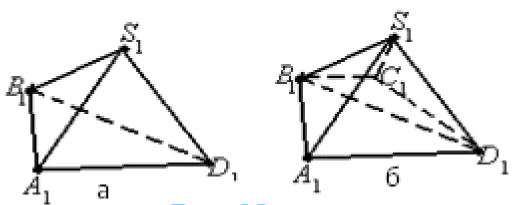


Рис. 38

построить точку C_1 — изображение вершины C, учитывая то, что $B_1C_1 = \frac{1}{3}A_1D_1$ и $B_1C_1 \parallel A_1D_1$ (рис. 38 б). ■

Пример 5. Построить изображение правильного шестиугольника.

Решение. Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 39 а). Он обладает свойствами, которые должны сохраняться в его изображениях. Стороны шестиугольника попарно параллельны ($AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$). Он имеет центр симметрии O, а отрезки, которые соединяют точку O с вершинами шестиугольника, равны между собой и равняются его стороне. Теперь нетрудно заметить, что достаточно построить изображение параллелограмма (даже ромба) $ABCO$, чтобы потом достроить к нему изображение всего шестиугольника.

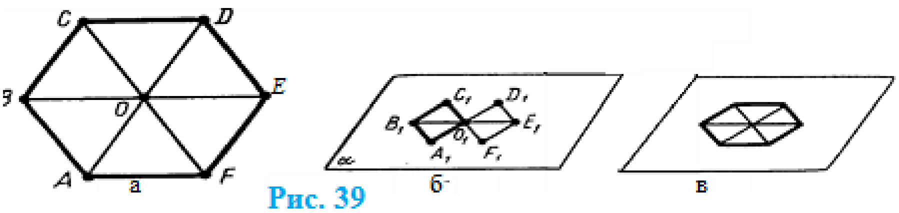


Рис. 39

Пусть параллелограмм $A_1B_1C_1O_1$ является изображением параллелограмма $ABCO$ (это может быть произвольный параллелограмм!). Продолжив A_1O_1 и C_1O_1 за точку O_1 так, чтобы $O_1D_1 = A_1O_1$, $O_1F_1 = C_1O_1$, построим параллелограмм $F_1O_1D_1E_1$ (рис. 39 б). По существу, построен параллелограмм, центрально-симметричный паралеллограмму $A_1B_1C_1O_1$ относительно его вершины O_1. Соединив точки A_1 и F_1, C_1 и D_1, получим изображение правильного шестиугольника (рис. 39 в). ■

Вопросы для самоконтроля

1. Является ли параллельная проекция фигуры ее изображением?
2. Можно ли прямоугольный треугольник считать изображением равнобедренного треугольника?
3. Верно ли, что изображением средней линии треугольника является средняя линия его изображения?
4. Может ли параллелограмм быть изображением трапеции?

5. Может ли треугольник быть изображением тетраэдра?

6. Можно ли тетраэдр изобразить так, чтобы ровно одна его грань была невидимой?

7. Какой фигурой является изображение: а) отрезка; б) треугольника; в) трапеции; г) параллелограмма; д) n-угольника?

8. Можно ли равносторонний треугольник изобразить прямоугольным треугольником, гипотенуза которого равняется стороне данного треугольника?

9. Может ли n-угольник быть изображением m -угольника при $n < m$?

10. Какими фигурами могут быть изображенные сечения тетраэдра?

Задачи для самостоятельного решения

1°. Дано изображение равнобедренного треугольника в виде разностороннего треугольника. На этом изображении постройте изображение:

1) биссектрисы угла при вершине;

2) перпендикуляра к основанию, проведенного через середину боковой стороны;

3) ромба, две смежные стороны которого совпадают с боковыми сторонами треугольника.

2. На изображении равнобедренного прямоугольного треугольника постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости треугольника, если стороной квадрата является:

1°) катет данного треугольника;

2) гипотенуза данного треугольника.

3. На произвольном изображении равностороннего треугольника ABC постройте изображение:

1°) точки пересечения высот треугольника;

2°) «описанного» прямоугольника, одна из сторон которого совпадает с некоторой стороной треугольника, а другая содержит противоположную вершину;

3) биссектрисы внешнего угла треугольника.

4. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около этого треугольника.

5. На изображении прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен 60°, постройте изображение:

1) биссектрисы этого угла;

2) высоты, проведенной к гипотенузе;

3) центра вписанной окружности.

6°. Постройте изображение ромба и его высоты, проведенной из вершины угла, величина которого составляет 120°.

7. Постройте изображение квадрата, имея изображение точки пересечения его диагоналей и двух:

1°) соседних вершин;

2*) противоположных вершин.

8. На произвольном изображении равнобокой трапеции, боковая сторона которой равна меньшему основанию, постройте изображение:

1°) оси симметрии трапеции;

2) вписанного прямоугольника, две вершины которого лежат на большем основании и одна из сторон совпадает с меньшим основанием;

3) центра окружности, касательной к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции.

9. Дано изображение равнобокой трапеции, углы при основании которой равны 45°. Постройте изображение:

1) центра окружности, описанной около трапеции;

2*) центра окружности, касательной к меньшему основанию и боковым сторонам.

10. Дано изображение окружности и одного из его диаметров. Постройте изображение радиусов окружности, перпендикулярных к этому диаметру.

11. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Постройте линию пересечения плоскостей DA_1C_1 и B_1D_1D.

2) Найдите длину отрезка этой линии, содержащегося в кубе, если ребро куба равно *a*.

3) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через центры трех попарно смежных его граней.

12. Дано изображение тетраэдра *ABCD,* точки *K*, *M* и *P* — середины рёбер *DC, AD* и *BD*, соответственно.

1°) Постройте линию пересечения плоскостей *ACP* и *BMK.*

2) Найдите длину отрезка этой линии, содержащегося в тетраэдре, если длины всех его ребер равны *a.*

3) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки пересечения медиан трех его граней.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1), 2) Используйте свойство биссектрис, проведенных из вершины равнобедренного треугольника; 3) используйте свойство параллельных проекций параллельных прямых.

2. Учтите неоднозначность решения задачи.

3. 1), 2) Используйте свойство высот равностороннего треугольника; 3) обратите внимание на взаимное расположение биссектрис внешнего угла равностороннего треугольника и его сторон.

4. Используйте то, что срединные перпендикуляры параллельны высотам.

5. 1) Обоснуйте то, что основание биссектрисы делит катет в отношении 2:1; 2), 3) подсчитайте, в каком отношении делят гипотенузу основание высоты, проведенной из вершины прямого угла, и основание биссектрисы угла в 30°.

6. Используйте то, что меньшая диагональ делит этот ромб на равносторонние треугольники.

7. 1) Используйте то, что точкой пересечения диагонали квадрата делятся пополам; 2) учтите, что задача имеет бесконечное множество решений.

8. 1) Используйте то, что отрезок, соединяющий середины оснований равнобокой трапеции, перпендикулярен основаниям; 2) установите взаимное расположение сторон прямоугольника и оси симметрии трапеции; 3) докажите, что центр окружности является пересечением оси симметрии трапеции и медианы равнобедренного треугольника, построенного на боковой стороне трапеции и меньшем основании.

9. 1) Обоснуйте, что это пересечение изображений оси симметрии трапеции и прямой, проходящей через середину боковой стороны и основание высоты, опущенной из вершины тупого угла; 2) центр окружности лежит на пересечении оси симметрии и биссектрисы тупого угла трапеции. Поскольку мы умеем строить изображение медианы к основанию (биссектрисы угла при вершине) равнобедренного треугольника, то попробуйте построить на заданном тупом угле трапеции равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны боковой стороне трапеции.

10. Изобразите хорду, параллельную данному диаметру. Как искомый диаметр делит эту хорду?

11. 1) Обратите внимание на то, что одна точка пересечения плоскостей уже известна, осталось найти еще одну; 2) воспользуйтесь теоремой Пифагора; 3) проведите диагонали указанных граней.

12. 1) Используйте то, что все данные точки находятся в двух гранях; 2) воспользуйтесь свойством медиан треугольника; 3) найдите отношение, в котором искомая плоскость пересекает три ребра пирамиды.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Не обязательно. **2.** Можно. **3.** Да. **4.** Нет. **5.** Да. **6.** Да. **7.** а) Отрезок; б) треугольник; в) трапеция; г) параллелограмм; д) п-угольник. **8.** Да. **9.** Нет. **10.** Треугольником и четырёхугольником.

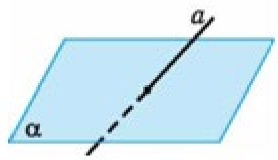
Ответы к задачам для самостоятельного решения

11. 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}a$. **12.** 2) $\frac{a}{3}$.

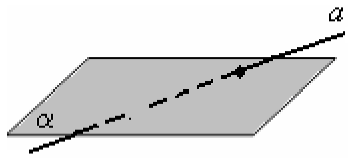
5. Параллельность прямых и плоскостей

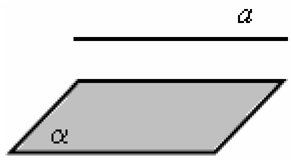
Повторяем теорию

Анализ случаев взаимного расположения прямой и плоскости дает такие варианты расположений.



1. Прямая и плоскость имеют, по крайней мере, две общие точки. Тогда, согласно аксиоме C_1, ***прямая принадлежит плоскости.***





2.Прямая и плоскость имеют единственную общую точку. Возможность такого расположения прямых и плоскостей обеспечивается тем, что вне плоскости есть точки пространства. Произвольная точка на плоскости и точка вне плоскости определяют прямую, имеющую с плоскостью одну общую точку, то есть ***пересекает*** ее.

3.Прямая и плоскость не имеют общих точек. В этом случае их называют ***параллельными.***

Прямая и плоскость, не имеющие общих точек, называются параллельными.

Под параллельностью отрезка, луча плоскости (или отрезка, луча многоугольнику и т. п.) будем понимать параллельность соответствующих прямых и плоскостей, определяемых данными фигурами.

Теорема 1 (признак параллельности прямой и плоскости).

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой плоскости, то она параллельна самой плоскости.

Теорема 2 (обратная к признаку параллельности прямой и плоскости).

Если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости существует прямая, параллельная данной прямой.

Эта теорема является свойством отношения параллельности прямой и плоскости. Наглядно правильность приведенного утверждения очевидна. Логическая ее обоснованность вытекает из следующей теоремы, которая и сама полезна при решении многих задач.

Теорема 3 (о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную второй).

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

Теорема 4 (о прямой, параллельной двум пересекающимся плоскостям).

Прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей, параллельна и линии их пересечения.

Построение сечений тел является одним из труднейших построений на изображении. Построение сечений параллелепипедов и пирамид сводится к построению линий пересечения секущей плоскости с их гранями.

Чтобы построить линию пересечения секущей плоскости с гранью параллелепипеда или пирамиды достаточно указать две точки плоскости грани, принадлежащие секущей плоскости.

Решаем

Следующий пример посвящён построению прямой, параллельной данной плоскости.

Пример 1. Через данную точку M, не лежащую в плоскости α, провести прямую, параллельную α.

Решение. Возьмем в плоскости α произвольную прямую l. Прямая l и точка M определяют некоторую плоскость β. Проведем в плоскости β через точку M прямую a, параллельную прямой l (см. рис. 40). Согласно признаку параллельности прямой и плоскости, прямая a и плоскость α — параллельны. ■

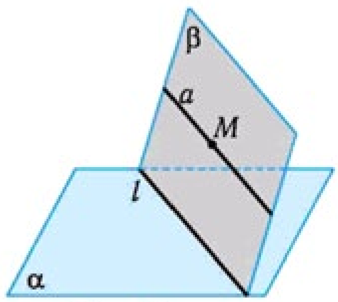


Рис. 40

Основное назначение следующего задания — установление взаимного положения прямых с плоскостями.

Пример 2. Два параллелограмма $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в различных плоскостях, N, M и K — середины сторон AB, CD и AD_1 соответственно.

1) Установить взаимное расположение прямых и плоскостей:

C_1D_1 и ABC; KN и DD_1C; D_1B и MKN.

2) Построить точку пересечения L прямой KN с плоскостью BCC_1.

3) Вычислить длину отрезка KL, если KN равняется 2 см.

Решение. Построим рисунок, соответствующий условию (рис. 41).

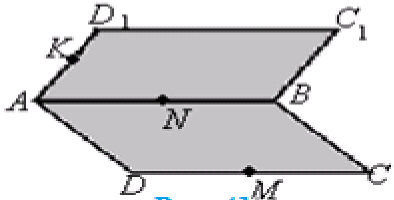


Рис. 41

1) Прямая C_1D_1 и плоскость ABC параллельны, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), ведь прямые C_1D_1 и AB параллельны, по условию, прямая AB принадлежит плоскости ABC, прямая C_1D_1 ей не принадлежит.

Прямая KN пересекает плоскость DD_1C. Действительно, прямые CD и C_1D_1 параллельны, по признаку параллельности прямых. Поэтому прямая C_1D_1 принадлежит плоскости DD_1C (почему?). В плоскости ABC_1D_1 прямые KN и C_1D_1 пересекаются. Таким образом, прямая KN имеет общую точку с плоскостью DD_1C, но не принадлежит ей.

Прямая D_1B параллельна плоскости MKN. Действительно, отрезок KN является средней линией треугольника AD_1B. Поэтому прямая KN параллельна прямой D_1B. Поскольку прямая D_1B не лежит в плоскости MKN, то, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая D_1B параллельна плоскости MKN.

2) Прямая KN лежит в плоскости ABC_1. Поэтому точка ее пересечения с плоскостью BCC_1 лежит на линии пересечения плоскостей ABC_1 и BCC_1, то есть на прямой BC_1.

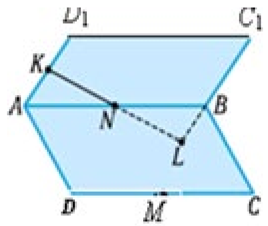


Рис. 42

Построение. Находим точку пересечения прямых KN и BC_1 в плоскости ABC_1, она и является искомой точкой L (рис. 42).

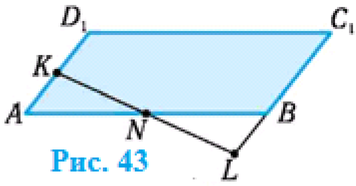


Рис. 43

3) Для вычисления длины отрезка KL изобразим построение в плоскости ABC_1D_1 (рис. 43). Рассмотрим треугольники AKN и BLN. Они равны по второму при-

знаку равенства треугольников: $AN = BN$ по условию, $\angle AKN = \angle BLN$ как внутренние разносторонние углы при параллельных AK и BL и секущей KL, $\angle KNA = \angle BNL$ как вертикальные углы. Отсюда $NL = KN = 2$ (см). Поэтому $KL = KN + NL = 4$ (см).

Ответ. 3) 4 см.

Целью следующего примера является построение сечения, параллельного данной прямой.

Пример 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку A и середину M ребра CC_1 параллельно прямой CD.

Решение. Построим изображение данного куба (рис. 44 а). Анализируя рисунок, можно прийти к заключению, что секущая плоскость проходит через точки A, B, M, то есть является плоскостью ABM. Действительно, прямые CD и BA параллельны (они содержат противоположные стороны квадрата!). Поэтому, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая CD и плоскость ABM параллельны.

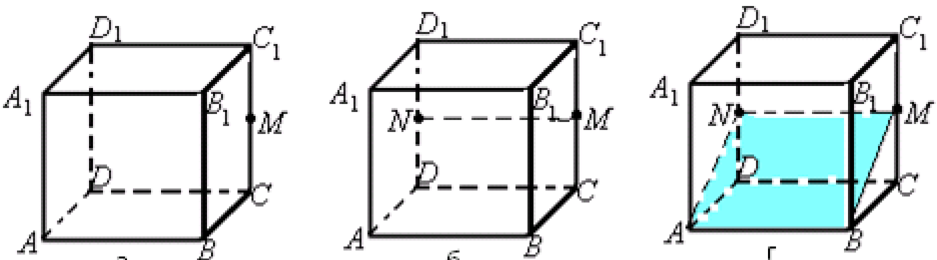


Рис. 44

Теперь понятно, как строить искомое сечение. Проведем через точку M прямую, параллельную прямой CD до пересечения с ребром DD_1 в точке N (рис. 44 б). Прямая MN лежит в плоскости ABM, поскольку она параллельна прямой AB по признаку параллельности прямых ($MN \parallel CD$, $CD \parallel BA$). Искомым сечением будет четырехугольник $ABMN$ (рис. 44 в). Нетрудно доказать, что он является параллелограммом: $MN \parallel BA$, $MN = BA$. ■

Следующий пример посвящён построению плоскости, параллельной одной из двух скрещивающихся прямых и проходящей через другую.

Пример 4. Провести через одну из двух скрещивающихся прямых плоскость, параллельную другой прямой.

Решение. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Проведем через произвольную точку B прямой b прямую a', параллельную прямой a (рис. 45). Прямые a' и b определяют плоскость α, которая, по признаку параллельности прямой и плоскости, параллельна прямой a. ■

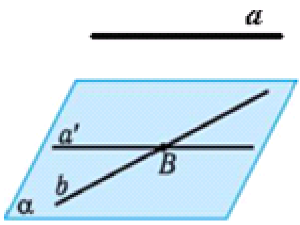


Рис. 45

В следующих примерах рассматриваются, по существу, те же задания, что и в предыдущих примерах, но связанные с правильным тетраэдром и параллелепипедом.

Пример 5. В правильном тетраэдре $DABC$, все ребра которого равны 6 см, точка K лежит на ребре DB и $DK = 2$ см. Точка M лежит на ребре BC и $BM = 4$ см. Точка P — середина AB.

1) Доказать, что прямая KM параллельна плоскости ADC.

2) Доказать, что прямая PM пересекает плоскость ADC.

3) Провести через точку P прямую, параллельную плоскости ADC, пересекающую медиану BL треугольника BDC.

4) Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и K параллельно прямой AC.

5) Провести через центр грани BDC прямую, параллельную плоскостям ABD и ACD, и найти длину наибольшего отрезка этой прямой, принадлежащего тетраэдру.

Решение. Построим рисунок, отображающий условие задания (рис. 46).

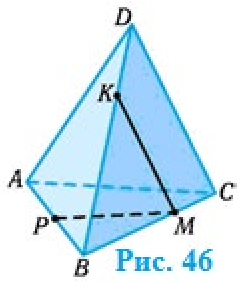


Рис. 46

1) Из условия вытекает, что точки K и M делят стороны BD и BC треугольника BDC в одинаковом отношении, считая от вершины B. По теореме, обратной теореме Фалеса, прямая KM параллельна прямой DC. Но тогда, по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая KM параллельна плоскости ADC.

2) Точки P и M делят стороны BA и BC треугольника ABC в разных отношениях, считая от вершины B. Из теоремы Фалеса вытекает, что прямая PM пересекает прямую AC. А это означает, что она пересекает и плоскость ADC.

3) Рассмотрим треугольник ABL (рис. 47), где L — середина CD. Точка P является серединой стороны AB, а точка E — серединой стороны BL, отрезок PE является средней линией треугольника ABL. Поэтому прямая PE параллельна прямой AL, лежащей в плоскости ADC. По признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1), прямая PE параллельна плоскости ADC и пересекает медиану BL треугольника BDC.

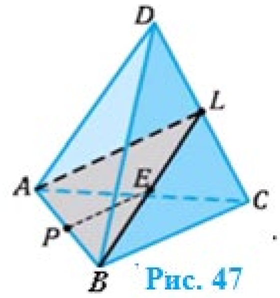


Рис. 47

4) Проведем через точку P прямую, параллельную прямой AC, и обозначим ее точку пересечения со стороной BC через F (рис. 48). Треугольник PKF является искомым сечением.

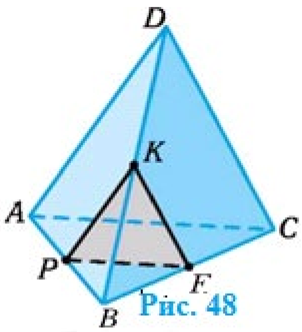


Рис. 48

5) Пусть O — центр грани BDC (рис. 49). В треугольнике ADF, где F — середина BC, проведем прямую OO_1, параллельную прямой AD. Тогда прямая OO_1, будет параллельна плоскостям ABD и ACD, по признаку параллельности прямой и плоскости. Треугольники ADF и OO_1F подобны.

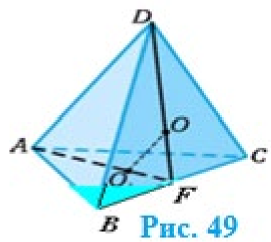


Рис. 49

Поэтому $\dfrac{OO_1}{AD} = \dfrac{OF}{FD}$. Из условия имеем: $AD = 6$ см, $DF = 3\sqrt{3}$ см, $OF = \dfrac{1}{3}DF = \sqrt{3}$ см. Отсюда: $OO_1 = 2$ см.

Ответ. 5) 2 см.

Пример 6. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки L, M — середины ребер BC, CD соответственно.

1) Доказать, что прямая LM параллельна плоскости ABD_1.

2) Провести через центр симметрии O грани $ABCD$ прямую, параллельную плоскостям AA_1D_1 и CC_1D_1.

3) Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки L, M и параллельной диагонали AC_1.

Решение. 1) Построим рисунок, который отображает условие задания (рис. 50). Чтобы воспользоваться признаком параллельности прямой и плоскости, необходимо указать прямую, принадлежащую плоскости AB_1D_1 и параллельную прямой LM. Такой прямой является прямая B_1D_1. Действительно, $LM \parallel BD$ по свойству средней линии треугольника. Поскольку грани параллелепипеда являются параллелограммами, то четырехугольник BB_1D_1D является также параллелограммом ($BB_1 = D_1D$, $BB_1 \parallel D_1D$). Тогда $BD \parallel B_1D_1$, а поэтому $LM \parallel B_1D_1$ по признаку параллельности прямых. По признаку параллельности прямой и плоскости, $LM \parallel AB_1D_1$.

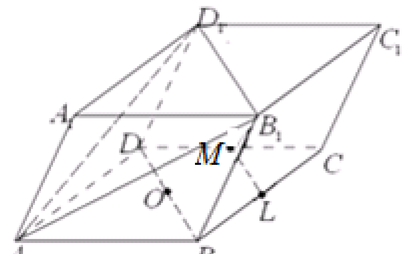


Рис. 50

2) Плоскости AA_1D_1 и CC_1D_1 пересекаются по прямой D_1D. Таким образом, достаточно через точку O провести прямую, параллельную прямой D_1D. Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1) построенная прямая будет параллельной плоскостям AA_1D_1 и CC_1D_1 одновременно. Поскольку четырехугольник BB_1D_1D является параллелограммом (см. 1)), а точка O — середина диагонали BD, то очевидно, что искомая прямая проходит через середину O_1 диагонали B_1D_1, то есть через центр симметрии верхней грани параллелепипеда (рис. 51).

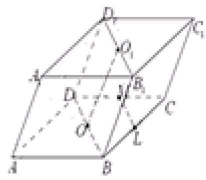


Рис. 51

3) Очевидно, что указанная в условии плоскость пересекает ребро CC_1 в некоторой точке. Для ее нахождения рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C параллелепипеда (рис. 52 а).

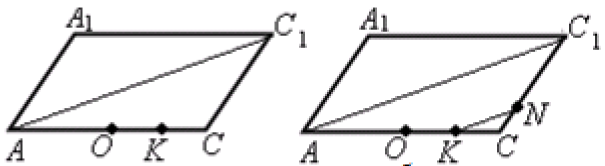


Рис. 52

Точка K является пересечением диагонали AC и средней линии LM треугольника BCD. Поэтому она является серединой отрезка OC. Проведем через точку K прямую, параллельную прямой AC_1, до пересечения с отрезком CC_1 в точке N (рис. 52 б). Эта точка делит отрезок CC_1 в отношении 1 : 3, считая от

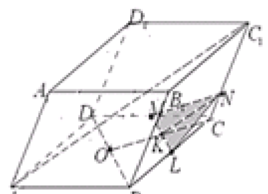


Рис. 53

точки C. Искомое сечение — треугольник LMN (рис. 53). Диагональ AC_1 параллельна плоскости этого сечения по признаку параллельности прямой и плоскости ($KN \parallel AC_1$). ■

Пример 7. Построить сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середину K ребра BC параллельно скрещивающимся ребрам BD и AC.

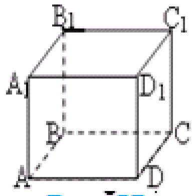


Рис. 57

Решение. Плоскость сечения пересекает грань ABC по отрезку KL, параллельному прямой AC, ведь плоскость сечения, в которой лежит KL, не имеет с прямой AC общих точек, причем $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично, плоскость сечения пересекает грань BCD по отрезку KM, параллельному прямой BD, где $KM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = KL$, ведь идет речь о средних линиях соответствующих треугольников (рис. 54). Наконец, грани ACD и ABD тоже пересекают плоскость сечения по средним линиям MP и LP. Поскольку $KL \parallel AC \parallel PM$ и $KM \parallel BD \parallel LP$, то четырехугольник $KMLP$ является параллелограммом и даже ромбом. ■

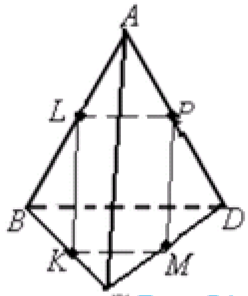


Рис. 54

Вопросы для самоконтроля

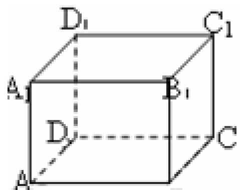


Рис. 55

1. На рис. 55 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) В плоскостях каких граней куба лежит прямая CC_1?

2) С плоскостями каких граней куба пересекается прямая A_1D?

3) Плоскостям каких граней куба параллельна прямая BC?

4) Как размещены диагонали грани $A_1B_1C_1D_1$ относительно плоскости $ABCD$?

2. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 56) и таких, которые проходят через: 1) вершину D; 2) ребро DC; 3) диагональ грани AC; 4) диагональ куба A_1C?

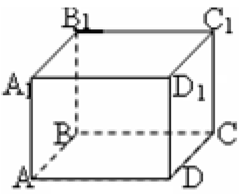


Рис. 56

3. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 57) пересекается плоскостью, которая проходит через середины M, N ребер AB и BC параллельно ребру DD_1.

1) Какой многоугольник получен в сечении?

2) Чему равняется периметр сечения, если ребро куба равняется a?

4. В правильном тетраэдре $SABC$ (рис. 58) плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой CS. Может ли сечение тетраэдра плоскостью α быть: 1) треугольником; 2) правильным треугольником; 3) четырехугольником; 4) ромбом?

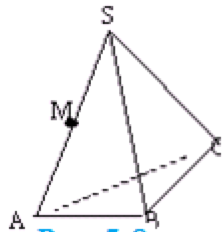


Рис. 5 8

5. Известно, что прямая параллельна плоскости. Параллельна ли она каждой прямой этой плоскости?

6. Верно ли, что диагональ грани куба параллельна плоскости противоположной грани куба?

7. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

8. Верно ли, что через точку вне плоскости можно провести лишь одну прямую, параллельную данной плоскости?

9. Прямая скрещивается с некоторой прямой, лежащей в данной плоскости. Может ли она быть параллельной этой плоскости?

10. Может ли плоскость, проходящая через середины двух сторон треугольника, пересекать его третью сторону?

11. Верно ли, что средняя линия трапеции параллельна произвольной плоскости, которая проходит через основание трапеции?

12. Может ли прямая, проходящая через середины смежных сторон параллелограмма, быть параллельной плоскости, содержащей одну из сторон параллелограмма?

13. Плоскость проходит через одну из скрещивающихся прямых. Как она может быть расположена относительно второй прямой?

14. Может ли прямая не быть параллельной плоскости, если в этой плоскости есть прямые, параллельные этой прямой?

Задачи для самостоятельного решения

1. Треугольник ABC и параллелограмм $ABFD$ лежат в разных плоскостях, M, N, K — середины сторон AC, BC, BF соответственно.

1°) Установите взаимное расположение прямых и плоскостей: DF и ABC; AB и MNK; AC и DBF; MK и BCD.

2°) Постройте точку P пересечения прямой BD с плоскостью ACF.

3) Вычислите длину отрезка PK, если $MN = 3$ см.

4) Постройте прямую, параллельную плоскостям треугольника и параллелограмма.

2. Ромб $ABCD$ и прямоугольник $DBEF$ лежат в разных плоскостях; M, N, K — середины сторон AD, AB, EF соответственно.

1°) Установите взаимное расположение прямых и плоскостей: EF и ABC; MC и DEF; MN и CFE; BE и ADF.

2°) Постройте точку P пересечения прямой MN с плоскостью BCE.

3) Вычислите длину отрезка EF, если $MN = 4$ см.

4) Постройте прямую, параллельную плоскостям ромба и прямоугольника.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Установите взаимное расположение прямой CD и плоскостей ABC, ABB_1, AA_1D.

2°) Докажите, что прямая AB_1 параллельна плоскости CDD_1.

3) Через середину ребра A_1D_1 проведите прямую, параллельную плоскостям AA_1B и CC_1B_1.

4°) Постройте прямую, пересекающую плоскости только четырёх граней куба.

5) Постройте линию пересечения плоскостей ADC_1 и A_1D_1C.

6) Найдите угол между прямыми A_1B и B_1C.

4. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$, $BC \parallel AD$.

1°) Установите взаимное расположение прямой AD и плоскости BCS.

2) Через середину ребра AS проведите прямую, параллельную плоскостям ABC и BCS.

3°) Постройте прямую, пересекающую плоскости только двух боковых граней.

4*) Постройте линию пересечения плоскостей, содержащих противоположные боковые грани, проходящие через основания трапеции.

5. Точка B лежит в плоскости α, а отрезок CD длиной 12 см параллелен этой плоскости. Точка A лежит на отрезке BC и $BA : AC = 4 : 3$.

1°) Постройте точку P пересечения прямой AD с плоскостью α.

2°) Установите взаимное расположение прямых BP и CD.

3) Найдите длину отрезка BP.

6. Трапеция $ABCD$ лежит в плоскости α. Её основание BC равно 12 см. Точка M лежит вне плоскости α, а точка K — середина отрезка BM.

1) Постройте точку N пересечения плоскости ADK и отрезка MC.

2) Установите взаимное расположение прямой KN и плоскости α.

3) Найдите длину отрезка KN.

7. Точка M не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости треугольника ABM.

8. Плоскость α параллельна стороне BC треугольника ABC и проходит через середину стороны AB. Докажите, что плоскость α проходит через середину стороны AC.

9. Докажите, что две плоскости пересекаются, если:

1) через точку, не принадлежащую этим плоскостям, можно провести лишь одну прямую, параллельную данным плоскостям;

2) одна из плоскостей пересекает прямую, параллельную второй плоскости.

10. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную двум данным пересекающимся плоскостям.

11. Проведите через данную точку пространства плоскость, параллельную двум данным скрещивающимся прямым.

12. Дана треугольная пирамида $SABC$. Постройте точку пересечения плоскости ABC с прямой MN, если:

1°) точки M и N лежат на ребрах SC и SB;

2) точка M лежит на ребре AS, а точка N — в грани BSC;

3*) точка M лежит в грани ABS, а точка N — в грани ASC.

13. Через центр грани AA_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены две прямые, параллельные прямым D_1D и B_1C соответственно.

1) Найдите угол между этими прямыми.

2) Установите взаимное расположение построенных прямых и плоскостей BB_1C_1C и DD_1C_1C.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через:

1°) вершины A, B, C_1;

2°) вершины B, D и середину ребра AA_1;

3°) середину ребра CD параллельно плоскости ADC_1;

4°) центр грани CDD_1C_1 параллельно плоскости ADD_1;

5) вершину A и середины ребер CC_1 и C_1D_1;

6*) отрезок, соединяющий середины ребер AA_1 и B_1C_1, параллельно плоскости AB_1C.

15. Даны тетраэдр $SABC$ и точка F на ребре AB, делящая отрезок AB в отношении 3:1 ($AF : FB$).

1) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через вершину C, середину ребра AS и параллельной прямой BS.

2*) В каком отношении построенное сечение делит отрезок, соединяющий точку F и середину отрезка AC?

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости; 2) постройте точку пересечения прямых BD и AF; 3) воспользуйтесь свойствами параллелограмма; 4) примените теорему 4 о прямой, параллельной двум пересекающимся плоскостям.

2. 1) Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости; 2) постройте точку пересечения прямых MN и BC; 3) воспользуйтесь свойством средней линии треугольника; 4) примените теорему 4 о прямой, параллельной двум пересекающимся плоскостям.

3. 1), 2), 3) Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости; 4) обратите внимание на то, что искомая прямая должна быть параллельна двум противоположным граням куба и только этим граням; 5) постройте точки пересечения диагоналей граней, лежащих в указанных плоскостях; 6) проведите через точку A_1 прямую, параллельную B_1C.

4. 1) Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости; 2) примените теорему 4 о прямой, параллельной двум пересекающимся плоскостям; 3) обратите внимание на то, что искомая прямая должна пересекать только плоскости граней, проходящих через боковые стороны трапеции; 4) обоснуйте, что искомая прямая параллельна основаниям.

5. 1), 2) Проведите через точку B в плоскости α прямую, параллельную CD; 3) воспользуйтесь подобием треугольников.

6. 1) Постройте линию пересечения плоскостей ADK и BMC; 2) воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости; 3) воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.

7. Воспользуйтесь тем, что противоположные стороны прямоугольника параллельны.

8. Плоскость α пересекает плоскость треугольника ABC по прямой, параллельной BC.

9. 1) Если бы таких прямых было больше, то две из них определили бы плоскость, параллельную обеим данным плоскостям, и тогда бы они были параллельны между собой; 2) вместе с прямой, параллельной второй плоскости, рассмотрите прямую, лежащую во второй плоскости и параллельную данной прямой**.**

10, 11. Учтите, что такие построения не всегда возможны. Укажите эти случаи**.** **12.** 1) — 3) постройте след плоскости *SMN* на плоскости *ABC***.**

13. Воспользуйтесь свойствами диагоналей квадрата; 2) воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости**.**

14. 1), 2) Постройте линии пересечения секущей плоскости с гранями куба; 3) обратите внимание на то, что секущая плоскость пересекает плоскость AA_1B по прямой, параллельной *MN*, где *M*, *N* — середины ребер CC_1, D_1C_1; 4), 5), 6) воспользуйтесь методом следов.

15. 1) Воспользуйтесь теоремой 3 о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости; 2) Примените теорему, обратную теореме Фалеса, проведите в плоскости *ASC* прямую *AE*, параллельную *CM* (*M* — середина *AS*) до пересечения с *FK*, докажите, что *APCE* — параллелограмм (*P* — точка пересечения построенного сечения с прямой *FK*).

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. 1) BB_1C_1C, CC_1D_1D; 2) $A_1B_1C_1D_1$; A_1ADD_1; A_1ABB_1; C_1CDD_1; ABCD. 3) A_1ADD_1; $A_1B_1C_1D_1$; 4) параллельны. **2.** 1) Бесконечно много; 2) одна; 3) одна; 4) одна. **3.** 1) Прямоугольник; 2) $\sqrt{2}a(1+\sqrt{2})$. **4.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да. **5.** Нет. **6.** Да. **7.** Да. **8.** Нет. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** Нет. **12.** Нет. **13.** Параллельно или пересекать её. **14.** Да.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $DF \parallel ABC$, $AB \parallel MNK$, $AC \times DBF$, $MK \times BCD$; 3) 3 см. **2.** 1) $EF \parallel ABC$, $MC \times DEF$, $MN \parallel CFE$, $BE \parallel ADF$; 3) 8 см. **3**. 1) $CD \subset ABC$, $CD \parallel ABB_1$, $CD \times AA_1D$; 4) например, прямая, проходящая через середины ребер AA_1 и CC_1; 6) 60°. **4.** 1) $AD \parallel BCS$. **5.** 2) параллельны; 3) 16 см. **6.** 2) параллельны; 3) 6 см. **13.** 1) 45°; 2) построенные прямые параллельны плоскости BB_1C_1C; плоскость DD_1C_1C одна из этих прямых пересекает, а вторая — параллельна ей**.** **14.** 1) Четырехугольник ABC_1D_1; 2) треугольник *BDK*, где *K* — середина AA_1; 3) четырехугольник *MFEK*, где *M*, *F*, *E*, *K* — середины ребер *AB*, BB_1, CC_1, *DC*; 4) четырехугольник *MNPK*, где N и P — середины рёбер A_1B_1 и C_1D_1; 5) пятиугольник $ALNMK$, где N — середина D_1C_1, M — середина CC_1, $K \in BC$, $BK:KC = 2:1$, $L \in A_1D_1$, $A_1L:LD_1 = 2:1$.

15. 1) Треугольник CMN, где M — середина AS, N — середина AB; 2) 1 : 1.

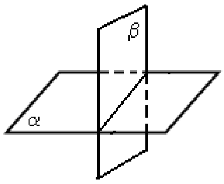
6. Параллельность плоскостей

Повторяем теорию

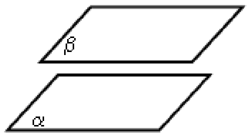
Если в основу классификации взаимного расположения двух плоскостей положить количество их общих точек, то придём к следующим вариантам.

1. Две плоскости имеют не менее трёх общих точек, не лежащих на одной прямой. Такие плоскости ***совпадают*** (аксиома $\boldsymbol{C_2}$).

2. Общие точки двух плоскостей расположены на одной прямой, которая является линией пересечения этих плоскостей (аксиома $\boldsymbol{C_3}$). Такие плоскости ***пересекаются.***



3. Две плоскости не имеют общих точек. В этом случае их называют ***параллельными.***



Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 1 (признак параллельности плоскостей).

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

Приведенный признак параллельности плоскостей иногда удобнее использовать в несколько другой форме.

Теорема 1' (признак параллельности плоскостей).

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

Теорема 2 (о пересечении двух параллельных плоскостей третьей).

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны.

Т е о р е м а 3 (о существовании плоскости, параллельной данной).

Через точку, расположенную вне данной плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной.

Отношение параллельности плоскостей обладает рядом свойств, имеющих аналоги в планиметрии.

Т е о р е м а 4 (об отрезках параллельных прямых между параллельными плоскостями).

Отрезки параллельных прямых, отсекаемые параллельными плоскостями, равны между собой.

Т е о р е м а 5 (о транзитивности отношения параллельности плоскостей).

Если каждая из двух плоскостей параллельна третьей, то данные две плоскости параллельны между собой.

Решаем

Рассматривается пример на построение плоскости, параллельной данной прямой.

П р и м е р 1. Через точку, которая содержится вне данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной.

Решение. Пусть даны плоскость β и точка M вне плоскости (рис. 59 а).

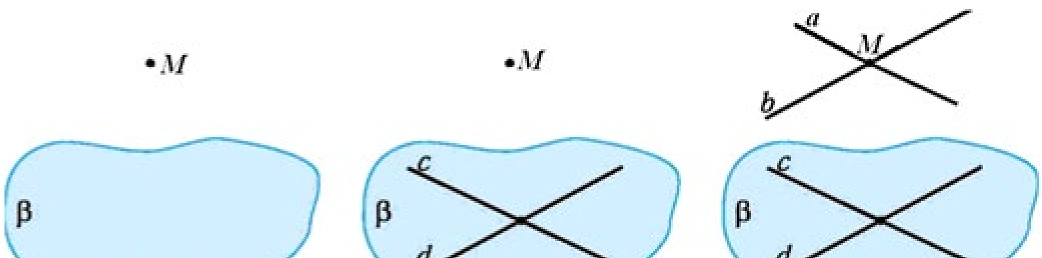


Рис. 59

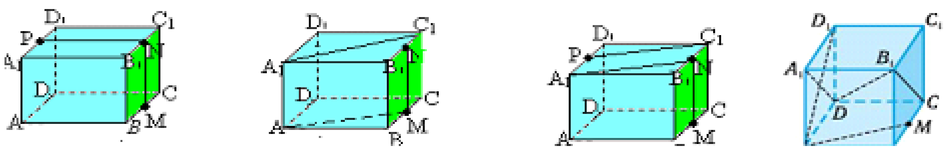
Проведем через точку M две пересекающиеся прямые a и b**,** параллельные плоскости β. Для этого нужно взять в плоскости β две пересекающиеся прямые c и d (рис. 59 б). Потом через точку M провести прямые a и b**,** параллельные прямым c и d соответственно (рис. 59 в).

Пересекающиеся прямые a и b параллельны плоскости β, по признаку параллельности прямой и плоскости. Они определяют однозначно плоскость α. Согласно теореме 1, $\alpha \parallel \beta$. ■

Следующий пример посвящён установлению взаимного расположения плоскостей в пространстве.

Пример 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M, N, P — середины ребер BC, B_1C_1, A_1D_1 соответственно. Установить взаимное расположение плоскостей: 1) ABB_1 и PNM; 2) NMA и A_1C_1C; 3) A_1NM и PC_1C; 4) MAD_1 и DB_1C.

Решение. 1) Плоскости ABB_1 и PNM (рис. 60 а) параллельны, по признаку параллельности плоскостей. Действительно, прямые PN и NM пересекаются и параллельны плоскости ABB_1, по признаку параллельности прямой и плоскости, ведь отрезки PN и NM соединяют середины противоположных сторон квадратов, поэтому они параллельны сторонам квадратов: $PN \parallel A_1B_1 \parallel AB$, $NM \parallel B_1B$.



а б **Рис. 60** в г

2) Плоскости NMA и A_1C_1C пересекаются по прямой AA_1 (рис. 60 б). Действительно, прямые AA_1 и CC_1 параллельны, по признаку параллельности прямых ($AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \parallel CC_1$). Поэтому прямая AA_1 лежит в плоскости A_1C_1C. Аналогично обосновывается принадлежность прямой AA_1 плоскости NMA.

3) Плоскости A_1NM и PC_1C (рис. 60 в) параллельны, по признаку параллельности плоскостей. Действительно, $NM \parallel C_1C$. Поэтому прямая NM параллельна плоскости PC_1C. Отрезки PC_1 и A_1N также параллельны, поскольку четырехугольник PC_1NA_1 — параллелограмм ($A_1P \parallel NC_1$, $A_1P = NC_1$). Таким образом, прямая A_1N параллельна плоскости PC_1C. Прямые A_1N и NM пересекаются.

4) Плоскости MAD_1 и DB_1C пересекаются (рис. 60 г). Хотя линию их пересечения построить непросто, но указать одну точку этой линии нетрудно. Действительно, прямые A_1D и B_1C параллельны, поскольку четырехугольник

A_1B_1CD — параллелограмм ($A_1B_1 = AB = CD$, $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \parallel CD$). Поэтому прямая A_1D принадлежит плоскости DB_1C. Прямые A_1D и AD_1 пересекаются в точке, общей для плоскостей MAD_1, и DB_1C.

Ответ. 1) $ABB_1 \parallel PNM$; 2) NMA и A_1C_1C пересекаются; 3) $A_1NM \parallel PC_1C$; 4) MAD_1 и DB_1C пересекаются.

Следующий пример иллюстрирует применение свойств параллельных плоскостей.

Пример 3. Доказать, что если прямая a пересекает плоскость α, то она пересекает также каждую плоскость, параллельную плоскости α.

Доказательство. Пусть плоскости α и β параллельны, а прямая a пересекает плоскость α в точке A. Докажем, что она пересекает и плоскость β. Допустим, что это не так. Тогда прямая a параллельна плоскости β. Проведем плоскость γ через прямую a и произвольную точку плоскости β (черт. 61).

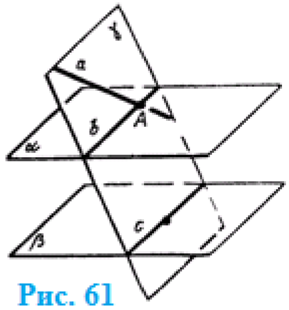


Рис. 61

Эта плоскость пересекает параллельные плоскости α и β по прямым b и c. Согласно теореме 2, $b \parallel c$, то есть в плоскости γ через точку A проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Это противоречие и доказывает утверждение. ■

В следующем примере, кроме установления взаимного расположения двух плоскостей рассматривается построение линии пересечения двух пересекающихся плоскостей.

Пример 4. В тетраэдре $ABCD$ точки K, F, E — середины ребер DA, DC, DB, а M и P — центры масс граней ABD и BCD соответственно.

1) Установить взаимное расположение плоскостей KEF и ABC; DEF и ABC.

2) Построить линию пересечения плоскостей AFB и KEC.

Решение. Построим рисунок, соответствующий условию (рис. 62 а).

1) Плоскости KEF и ABC параллельны, по признаку параллельности

плоскостей: пересекающиеся прямые KE и KF плоскости KEF параллельны пересекающимся прямым AB и AC плоскости ABC (на них лежат средние линии соответствующих треугольников).

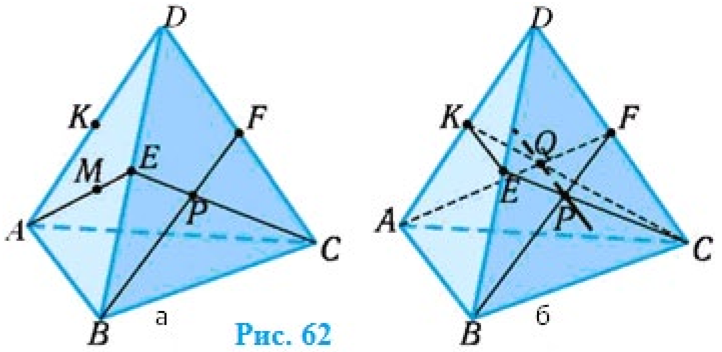


Рис. 62

Плоскости DEF и ABC пересекаются по прямой BC, так как прямая BC принадлежит обеим плоскостям, а совпадать они не могут — точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Плоскость AFB пересекается с плоскостью KEC по прямой, содержащей точку P, так как прямые CE и BF, лежащие в этих плоскостях, находятся в плоскости BCD и пересекаются в точке P. Другой точкой является точка пересечения Q прямых AF и CK в плоскости ACD (рис. 62 б). Очевидно, что эта точка является центром масс грани ACD. Искомым пересечением является прямая PQ.

Ответ.1) $KEF \parallel ABC$; DEF и ABC пересекаются.

В следующих примерах рассматривается построение сечений геометрических тел.

Пример 5. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку B параллельно плоскости AB_1D_1.

Решение. Пусть дано изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 63 а).

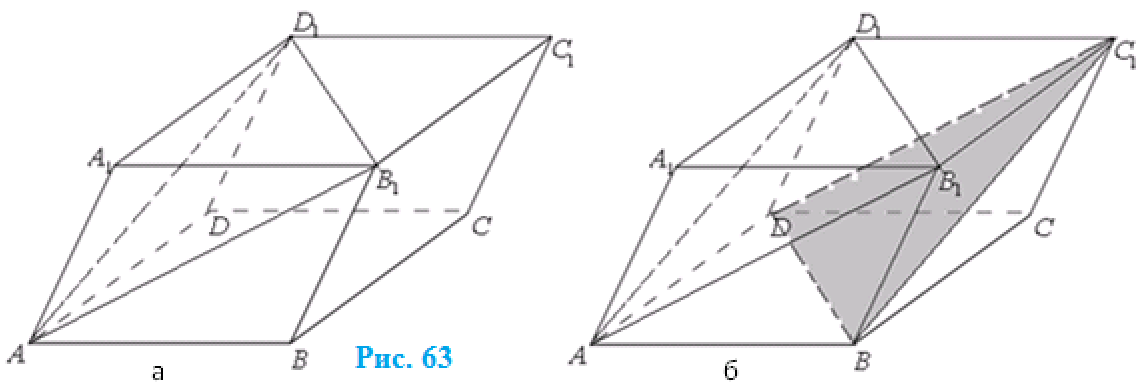


Рис. 63

Построим сечение, указанное в условии, пользуясь признаком параллельности плоскостей. Для этого через точку B проведём две прямые, параллельные прямым плоскости AB_1D_1. Одной из этих прямых будет прямая BC_1 (рис. 63 б). Действительно, четырёхугольник ABC_1D_1 является параллелограммом, поскольку $AB \parallel A_1B_1$, $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $A_1B_1 = D_1C_1$. Поэтому $BC_1 \parallel AD_1$. Аналогично устанавливается параллельность прямых BD и B_1D_1. Таким образом, плоскости BDC_1 и AB_1D_1 параллельны. Искомым сечением будет треугольник BC_1D. ■

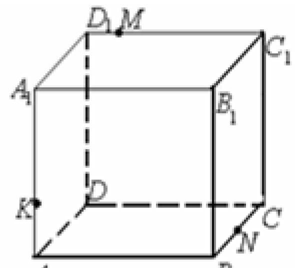


Рис. 64

Пример 6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки K, M, N на его ребрах (рис. 64). Построить сечение куба плоскостью MKN.

Решение. Построим линию пересечения секущей плоскости с плоскостью грани $ABCD$, то есть след секущей плоскости на плоскости грани. Одну точку следа N уже имеем (рис. 64). Чтобы найти вторую точку, спроектируем точки K и M параллельно ребру DD_1 на плоскость $ABCD$. Точка K проектируется в точку A, а точка M — в точку M_1 на ребре DC. Прямые KM и AM_1 лежат в одной плоскости ($MM_1 \parallel KA$) , точка P их пересечения (рис. 65) принадлежит искомому следу (почему?). Следовательно, прямая PN является следом секущей плоскости на плоскости грани $ABCD$. Пересечение R следа с ребром AB является вершиной многоугольника, который получим в сечении, как и точки K, M, N (они принадлежат сечению и лежат на ребрах). Попробуем найти другие вершины сечения, воспользовавшись следом RN.

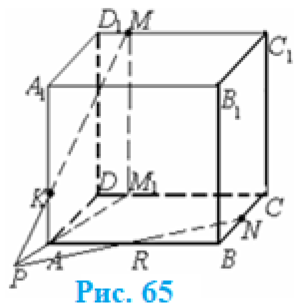


Рис. 65

Точка пересечения секущей плоскости с ребром CC_1 проектируется в точку C (рис. 66). Поэтому пересечение секущей плоскости с плоскостью грани DCC_1D_1 проектируется в прямую M_1C. Обозначим пересечение этой прямой со следом RN через X. Точка X

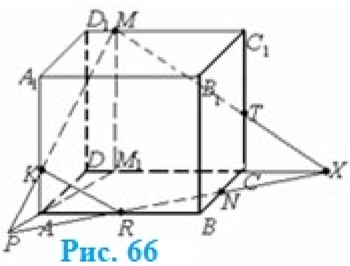


Рис. 66

принадлежит прямой пересечения секущей плоскости с плоскостью грани

DCC_1D_1. Пересечение T прямой MX с ребром CC_1 является еще одной вершиной сечения.

Еще одна вершина сечения (пересечение секущей плоскости с ребром DD_1) находится аналогично (рис. 67). Окончательно сечением куба плоскостью KMN является шестиугольник $KPNTMS$ (рис. 68). ■

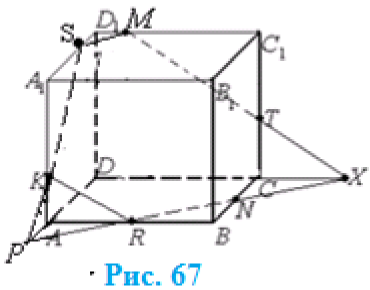


Рис. 67

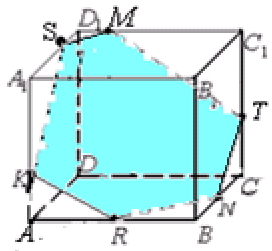


Рис. 68

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что если две плоскости параллельны, то каждая прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна второй плоскости?

2. Плоскости α и β параллельны. Существуют ли скрещивающиеся прямые, лежащие в этих плоскостях?

3. Две стороны треугольника параллельны некоторой плоскости. Параллельна ли этой плоскости третья сторона треугольника?

4. Две стороны параллелограмма параллельны некоторой плоскости. Верно ли, что плоскость параллелограмма параллельна данной плоскости?

5. Могут ли быть неравными отрезки двух параллельных прямых, отсекаемые параллельными плоскостями?

6. Верно ли, что две плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой?

7. Линии пересечения плоскостей α и β плоскостью γ параллельны между собой. Параллельны ли плоскости α и β?

8. Могут ли три грани куба быть параллельными одной плоскости?

9. Плоскости α и β параллельны. Существует ли плоскость, параллельная β и пересекающая α?

10. Параллельны ли две плоскости , если две прямые, которые лежат в одной плоскости, параллельны второй плоскости?

11. Диагональ и сторона трапеции параллельны некоторой плоскости. Верно ли, что плоскость трапеции параллельна этой плоскости?

12. Сколько пар параллельных плоскостей можно провести через две параллельные прямые?

13. Как могут быть расположены две прямые, лежащие в параллельных плоскостях?

14. Плоскость, в которой находится треугольник ABC, параллельна плоскости α. Как расположены медианы треугольника относительно плоскости α?

15. Может ли прямая пересекать одну из параллельных плоскостей, а другой быть параллельна?

Задачи для самостоятельного решения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O, O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно, M — середина ребра AB.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей MO_1O и ADD_1, ABD_1 и CO_1C_1.

2°) Постройте точку пересечения плоскости DCC_1 и прямой MO_1 и линию пересечения плоскостей MCC_1 и $A_1D_1C_1$.

3) Найдите площадь сечения куба плоскостью, параллельной плоскости AD_1C_1 и проходящей через точку O_1, если ребро куба равно a.

2. В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, P — центры масс граней ABD, BDC, ABC соответственно, а M — середина ребра AD.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей ACD и KLP; MLK и ABC.

2°) Постройте точку пересечения плоскости ABC и прямой ML и линию пересечения плоскостей MKL и ABC.

3) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, L и M параллельно прямой AD, если все ребра тетраэдра равны a.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны между собой. Точки L, M и N — середины ребер AS, BS, CS соответственно.

1°) Определите взаимное расположение: прямых LM и BC; прямой LN и плоскости ABD; плоскостей LMN и BDC.

2°) Докажите, что треугольники ABC и LMN подобны.

3) Постройте сечение пирамиды плоскостью AMN; плоскостью LMN; плоскостью LBC.

4*) Какое из сечений пирамиды, проходящих через вершину S, имеет наибольшую площадь?

4. Из вершин параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены попарно параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

1°) Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

2°) Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны между собой.

3°) Определите взаимное расположение плоскостей ABB_1 и DD_1C_1.

4) Проведите через середину отрезка AA_1 плоскость так, чтобы она пересекала данные прямые в точках, являющихся вершинами параллелограмма, равного параллелограмму $ABCD$.

5. Даны две параллельные плоскости и точка O, не принадлежащая ни одной из этих плоскостей и не лежащая между ними. Из точки O проведены три луча, пересекающие плоскости соответственно в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 и не лежащие в одной плоскости.

1°) Определите взаимное расположение данных плоскостей и плоскости, проходящей через середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

2) Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $OA = m$, $AA_1 = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

6. Треугольник $A_1B_1C_1$ является проекцией треугольника ABC на параллельную ему плоскость α. Точка M — середина стороны BC; M_1 — проекция точки M на плоскость α. Точка N делит сторону AB в отношении 1: 2.

1) Постройте точку пересечения N_1 плоскости M_1MN и прямой A_1B_1.

2) Определите вид четырехугольника M_1N_1NM.

7. Точка M лежит вне плоскости трапеции $ABCB$ с основаниями AD и BC. Постройте линию пересечения плоскостей:

1°) ABM и CDM; 2) CBM и ADM.

8. Постройте сечение тетраэдра, являющееся параллелограммом.

9. Докажите, что множество всех прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости, образует плоскость, параллельную данной.

10. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что каждая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD, BC в вершинах параллелограмма.

11. Докажите, что плоскость и прямая, не принадлежащая этой плоскости, параллельны между собой, если обе они параллельны одной и той же плоскости.

12. Через точку O пересечения диагоналей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость параллельно грани $ABCD$. Эта плоскость пересекает ребра BB_1 и CC_1 в точках M и N соответственно. Докажите, что угол MON — прямой.

13. В треугольной пирамиде $SABC$ через отрезки AD и CE, где D — середина SB, а E — середина SA, проведите сечения пирамиды, параллельные между собой.

14. Найдите геометрическое место:

1) середин всех отрезков с концами на двух данных параллельных плоскостях;

2*) середин отрезков с концами на двух данных скрещивающихся прямых.

15*. Сторона AB треугольника ABC, лежащего в плоскости α, параллельна плоскости β. Равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость β; $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 9$.

1) Установите взаимное расположение прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, A_1C_1 и AC.

2) Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей, найдите общую точку указанных плоскостей; 2) рассмотрите плоскость, содержащую прямую MO_1 и пересекающуюся с плоскостью ADD_1; найдите две общие точки указанных плоскостей; 3) определите вид указанного сечения и нвйдите его стороны.

2. 1) Воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей, найдите общую точку указанных плоскостей; 2) рассмотрите плоскость, содержащую прямую ML и пересекающуюся с плоскостью ABC; воспользуйтесь решением первой части этого задания; 3) воспользуйтесь тем, что центр масс треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан.

3. 1) Воспользуйтесь признаком скрещивающихся прямых, признаком параллельности прямой и плоскости, признаком параллельности плоскостей; 2) воспользуйтесь признаком подобия треугольников; 3) найдите линию пересечения секущей плоскости с плоскостью ABC; докажите, что плоскость сечения параллельна плоскости основания пирамиды; найдите линию пересечения секущей плоскости с плоскостью ASC; 4) сечением является треугольник, для вычисления площади которого можно воспользоваться выражением $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где α — угол при вершине S, b, c — прилежащие стороны.

4. 1), 2) Воспользуйтесь теоремой 4 об отрезках параллельных прямых между параллельными плоскостями, свойствами и признаками параллелограмма; 3) воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей; 4) воспользуйтесь тем, что искомая плоскость проходит через середины отрезков параллельных прямых, лежащих между параллельными плоскостями.

5. 1) Воспользуйтесь теоремой 2 о пересечении двух параллельных плоскостей третьей; 2) рассмотрите два случая возможного расположения точки O.

6. 1) Воспользуйтесь свойствами параллельного проектирования; 2) примените признак параллелограмма.

7. 1) Обратите внимание на то, что одна точка линии пересечения уже известна; 2) воспользуйтесь теоремой о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную второй.

8. Рассмотрите, например, сечение, проходящее через средние линии треугольников SAB и CAB, параллельные общему основанию AB.

9. Две прямые, проходящие через одну точку параллельно плоскости, определяют плоскость, параллельную данной. Нужно доказать, что эта плоскость и является искомой.

10. Воспользуйтесь тем, что эти плоскости параллельны двум плоскостям, проходящим через скрещивающиеся прямые AB и CD.

11. Воспользуйтесь свойствами прямой, пересекающей одну из параллельных плоскостей.

12. Сечением куба является квадрат с центром O и стороной MN.

13. В ΔADS проведите среднюю линию EF, а в ΔFCB — отрезок $DK \parallel FC$, $K \in BC$. Сечения EFC и ADK — искомые.

14. 1) Рассмотрите вначале случай, когда указанные отрезки параллельны между собой, а затем — когда это отрезки произвольных прямых, заключённые между данными плоскостями, и воспользуйтесь результатом рассмотрения первого случая; 2) сведите задание к предыдущему.

15. 1) Воспользуйтесь тем, что прямая AB параллельна плоскости β, а плоскости α и β не параллельны; 2) воспользуйтесь формулой площади треугольника.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Да. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Нет. **5.** Да. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** Нет. **11.** Да. **12.** Бесконечно много. **13.** Быть параллельными или скрещивающимися. **14.** Параллельно. **15.** Нет.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $MO_1O \parallel ADD_1$, $ABD_1 \times CO_1C_1$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **2.** 1) $ACD \parallel KLP$, $MLK \times ABC$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$.

3. 1) $LM \dot{-} BC$, $LN \parallel ABD$, $LMN \parallel BDC$; 4) треугольник ASC. **4.** 3) $ABB_1 \parallel DD_1C_1$.

5. 1) Параллельны. 2) $\frac{(a+b+c)(m+n)}{m}$, или $\frac{(a+b+c)(m-n)}{m}$. **6.** 2) Параллелограмм. **7.** 1) ML, где $L = AB \cap CD$; 2) прямая, параллельная AD и проходящая через M. **8.** Например, в тетраэдре $SABC$ сечение, проходящее через средние линии треугольников SAB и CAB, параллельные общему основанию AB. **14.** 1), 2) Плоскость. **15.** 1) $AB \parallel A_1B_1$; $BC \times B_1C_1$; $AC \times A_1C_1$; 2) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$.

7. Сечения многогранников

Повторяем теорию

Для изучения пространственных фигур целесообразно рассматривать пересечения этих фигур с плоскостями. Такие пересечения называются ***сечениями,*** если по обе стороны от плоскости пересечения — ***секущей плоскости*** — есть точки фигуры.

Нетрудно убедиться в том, что сечениями параллелепипеда или пирамиды являются многоугольники. Действительно, из аксиомы C_3 вытекает, что пересечением секущей плоскости и грани фигуры является отрезок.

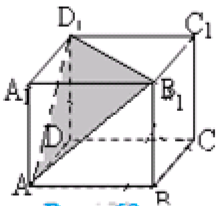


Рис. 69

Таким образом, при пересечении данных фигур с плоскостью получим ограниченные отрезками фигуры на плоскости, то есть многоугольники. Так, сечением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис.69) плоскостью, проходящей через вершины A, B_1, D_1, является треугольник AB_1D_1, а сечением пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через вершину S и диагональ основания AC является треугольник ASC (см. рис.70).

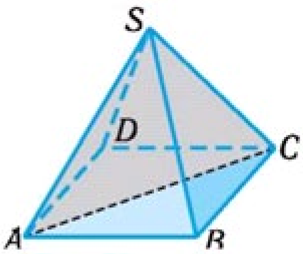


Рис. 70

Несложно строить так называемые ***диагональные сечения*** призмы или пирамиды. Это такие сечения, плоскости которых проходят через два боковых ребра, не лежащие в одной грани данного многогранника (и, значит, содержат по одной диагонали основания).

Действительно, указанными боковыми рёбрами определяется пересечение секущей плоскости с боковой поверхностью многогранника, а их концами — пересечение с основаниями.

В общем случае для построения сечения многогранника достаточно построить линии пересечения (существующие) секущей плоскости с плоскостями граней многогранника — следы секущей плоскости на плоскостях граней. Потом легко будет определить и существующие отрезки этих линий пересечения с самими гранями многогранника. Эти отрезки, собственно, и будут сторонами искомого сечения — некоторого многоугольника.

Решаем

В следующих примерах рассматривается построение сечений пространственного тела плоскостью, нахождение площади построенного сечения.

Пример 1. В правильном тетраэдре $DABC$ точка K лежит на ребре DB, точка P — середина AB. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и K параллельно прямой AC.

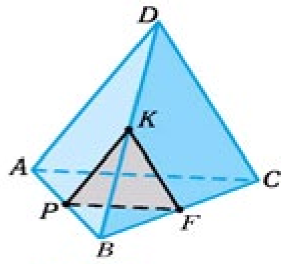


Рис. 71

Решение. Проведем через точку P прямую, параллельную прямой AC, и обозначим точку ее пересечения со стороной BC через F (см. рис. 71). Треугольник PKF является искомым сечением. ■

Пример 2. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через середины K, L ребер основания AD и AB и середину M бокового ребра SC.

Решение. Понятно, что для построения сечения, являющегося многоугольником, необходимо найти точки пересечения секущей плоскости с ребрами SB и SD (рис 72 а). Это позволит найти еще две вершины многоугольника (кроме K, L, M), являющегося сечением пирамиды плоскостью. Секущая плоскость пересекает плоскость основания по прямой KL, пересекающейся с прямой BC в некоторой точке P (рис. 72 б).

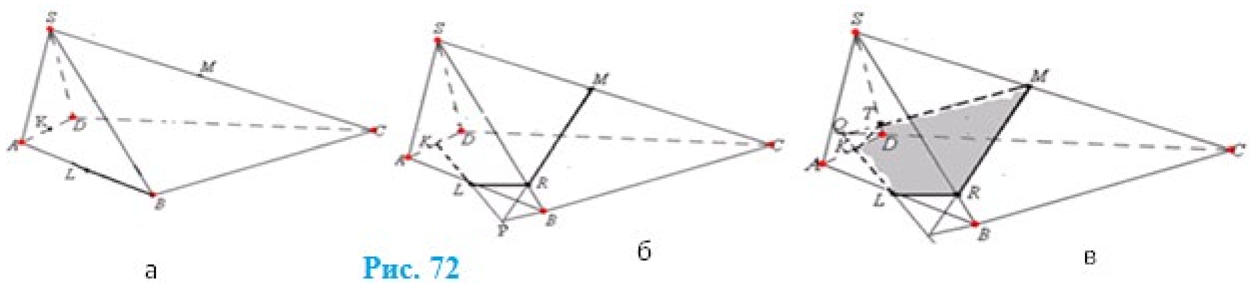


Рис. 72

Точки P и M принадлежат как секущей плоскости, так и плоскости грани SBC, то есть прямая PM является прямой пересечения секущей плоскости и плоскости грани SBC. Следовательно, точка R пересечения прямых SB и PM является точкой пересечения секущей плоскости с ребром SB. Точка пересечения T секущей плоскости с ребром SD находится аналогично: строится точка Q пересечения прямых KL и DC, а T — точка пересечения ребра SD с прямой QM. Пятиугольник $KLRMT$ и является сечением пирамиды плоскостью KLM (рис. 72 в). ■

Пример 3. В тетраэдре $ABCD$ точки K, F, E — середины ребер DA, DC, DB, а M и P — центры масс граней ABD и BCD соответственно. Найти площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости ABD и проходящей через точку P, если все ребра тетраэдра равны a.

Решение. Построим сечение, указанное в условии, пользуясь признаком параллельности плоскостей. Проведем через точки P и Q прямые, параллельные прямым DB и DA соответственно (см. рис.73). Эти прямые пересекают отрезок CD в точке L. Последнее вытекает из свойства центра масс треугольника — он делит медианы треугольника в отношении 2 : 1, считая от вершины. Осталось применить теорему Фалеса. Таким образом, плоскости PLQ и BDA параллельны. Искомым сечением является треугольник LSN.

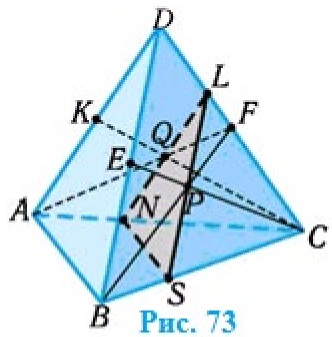


Рис. 73

По построению, треугольники BCD и SCL подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{CE}{CP}=\dfrac{3}{2}$. Поэтому $LS=\dfrac{2}{3}BD$. Аналогично устанавливаются равенства: $LN=\dfrac{2}{3}AD$, $NS=\dfrac{2}{3}AB$. Отсюда вытекает, что треугольники LSN и ABD подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{2}{3}$. По свойствам площадей подобных треугольников, $S_{LNS}=\dfrac{4}{9}S_{ABD}$. Осталось найти площадь треугольника ABD. Поскольку, по условию, все ребра тетраэдра равны a, то $S_{ABD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Искомая площадь равна $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}a^2$.

Ответ. $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}a^2$.

Уместно обратить внимание на то, что ответ зависит лишь от площади грани ABD. Поэтому равенство всех ребер является лишь средством найти эту площадь. Таким образом, данную задачу можно существенно обобщить.

Вопросы для самоконтроля

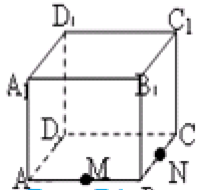


Рис. 74

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис.74) пересекается плоскостью, проходящей через середины M, N ребер AB и BC параллельно ребру BB_1.

1) Какой многоугольник получен в сечении?

2) Чему равен периметр сечения, если ребро куба равно a?

2. Может ли сечением куба быть равнобокая трапеция?

3. Определите, чем является сечение фигуры плоскостью, проходящей через данные три точки, изображенные на рисунке 75 а-г.

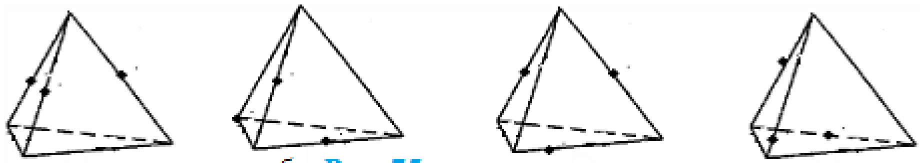


Рис. 75

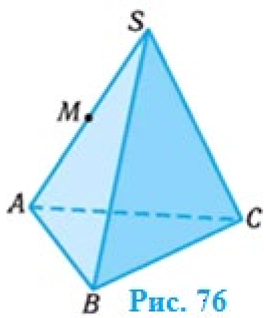


Рис. 76

4. В правильном тетраэдре $SABC$ (см. рис. 76) плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой CS. Может ли сечение тетраэдра плоскостью α быть: 1) треугольником; 2) правильным треугольником; 3) четырехугольником; 4) ромбом?

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте сечение куба, являющееся:

1) равносторонним треугольником;
2) равнобокой трапецией;
3) пятиугольником;
4) ромбом, не являющимся квадратом.

2. Постройте сечение тетраэдра, являющееся:

1) параллелограммом;
2) равнобедренным треугольником;
3) трапецией.

3. В треугольной пирамиде $SABC$ через отрезки AD и CE, где D — середина SB, а E — середина SA, проведите сечения, параллельные между собой.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Воспользуйтесь изложением «Повторяем теорию»; 2) проведите в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сечение через точки A, C и середины рёбер A_1B_1 и B_1C_1; 3) проведите в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сечение через точку A и середины рёбер B_1C_1 и C_1D_1; 4) проведите сечение, пересекающее последовательно четыре параллельных ребра куба, например, в середине ребра, в точке, делящей ребро в отношении 2:1, снова в середине ребра, в точке, делящей ребро в отношении 2:1.

2. 1) Проведите сечение через средние линии двух граней, имеюших общее ребро, параллельные этому ребру; 2) в тетраэдре, в котором две грани с общим ребром равны, проведите сечение через медианы этих граней, делящие общее ребро пополам; 3) проведите сечение, например, через среднюю линию одной из двух граней, имеюших общее ребро, параллельную этому ребру, и произвольный отрезок второй грани, параллельный тому же ребру, но отличный от средней линии.

3. В треугольнике ADS проведите среднюю линию EF, а в треугольнике FCB — отрезок $DK \parallel FC$, $K \in BC$.

Ответы на вопросы для самоконтроля

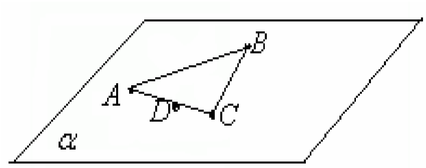
1. 1) Прямоугольник; 2) $2a + \sqrt{2}a$. **2.** Да. **3.** 1) Треугольником; 2) треугольником; 3) четырёхугольником; 4) четырёхугольником. **4.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да.

Тренажёр

1. Основные понятия и аксиомы стереометрии

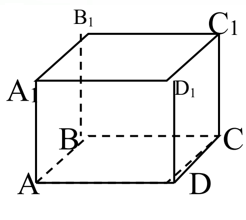
Вариант 1

1. Какими тремя точками, указанными на рисунке, плоскость α не определяется однозначно?



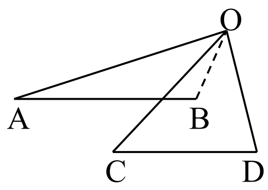
А. A, B, C. **Б.** A, B, D. **В.** B, C, D. **Г.** A, D, C.

2. Сколько плоскостей можно провести через вершины A, D_1, C куба, изображённого на рисунке?



А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Три. **Г.** Бесконечно много

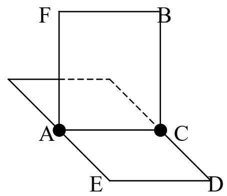
3. Прямая *AB* не принадлежит плоскости *COD*. Сколько общих точек имеют плоскости *AOB* и *COD*, изображённые на рисунке?



А. Одну. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ отличен от приведенных.

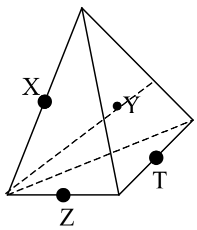
4. Пересечением плоскостей *AED* и *AFB*, изображённых на рисунке, является …



А. точка *A*. **Б.** отрезок *AC*.

В. совокупность двух точек {*A*; *C*}. **Г.** прямая *AC*.

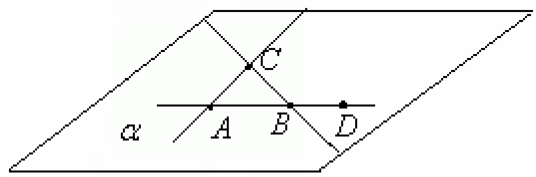
5. На изображении тетраэдра в одной грани не лежат точки …



А. *X* и *Y*. **Б.** *X* и *Z*. **В.** *Y* и *T*. **Г.** *Z* и *T*.

Вариант 2

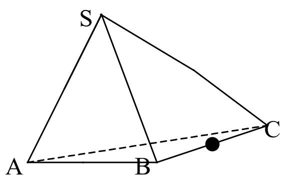
1. Через какие три точки, указанные на рисунке, можно провести ещё одну плоскость, отличающуюся от плоскости α?



А. *A, B*, *C*. **Б.** *A*, *B*, *D*. **В.** *B*, *C*, *D*.

Г. Такой тройки точек на рисунке нет.

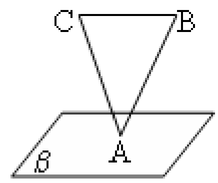
2. Сколько плоскостей можно провести через ребро *AS* тетраэдра *SABC* и середину ребра *BC*?



А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Две.

Г. Бесконечно много.

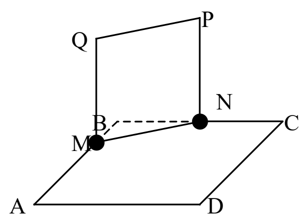
3. Точка *A* принадлежит плоскости β, а точки *B* и *C* лежат вне её. Сколько общих точек имеют плоскости β и *ABC*?



А. Одну. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ отличен от приведенных

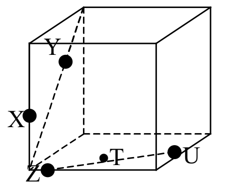
4. Пересечением плоскостей *ADC* и *MQP*, изображённых на рисунке, является …



А. отрезок *MN*. **Б.** совокупность точек *M* и *N*.

В. прямая *MN*. **Г.** треугольник *MBN*.

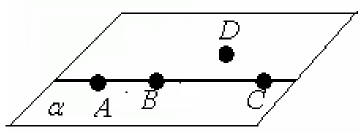
5. На изображении куба в одной грани не лежат точки …



А. X и Y. **Б.** Z и X. **В.** Z и U. **Г.** Y и T.

Вариант 3

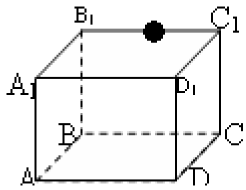
1. Сколько плоскостей можно провести через четыре точки, изображённые на рисунке?



А. Ни одной. **Б.** Одну.

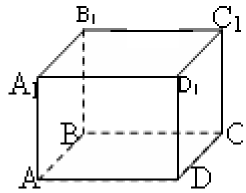
В. Две. **Г.** Бесконечно много.

2. Сколько плоскостей можно провести через ребро AA_1 куба и середину ребра B_1C_1?



А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Две. **Г.** Бесконечно много.

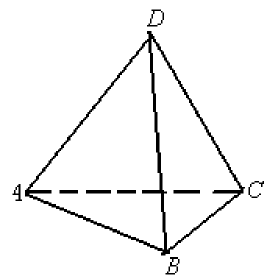
3. Сколько общих точек имеет грань $ABCD$ куба и плоскость A_1C_1D?



А. Одну. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ отличен от приведённых.

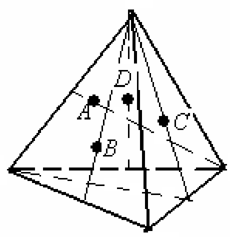
4. Пересечением плоскостей ABC и DAC, где A, B, C и D — вершины тетраэдра $DABC$, является …



А. точка A. **Б.** отрезок AC.

В. совокупность двух точек $\{A; C\}$. **Г.** прямая AC.

5. На изображённом тетраэдре в одной грани лежат точки …



А. A и D. **Б.** A и C. **В.** A и B. **Г.** B и C.

Подсказки

1. Воспользуйтесь свойством **C_2**.

2. Воспользуйтесь теоремой о плоскости, проходящей через прямую и точку.

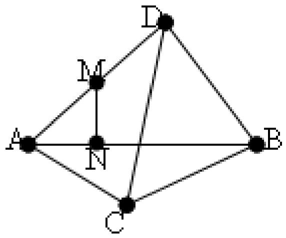
3. Воспользуйтесь свойством **C_3**.

4. Воспользуйтесь свойством **C_3**.

5. Воспользуйтесь тем, что указанные точки лежат на прямых, принадлежащих граням. Установите, какой грани принадлежат две прямые, изображённые на рисунке.

2. Взаимное расположение прямых в пространстве

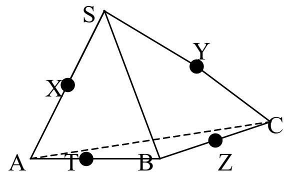
Вариант1



6. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямые CB и MN, изображенные на рисунке, …

А. параллельны. **Б.** скрещиваются. **В.** пересекаются.

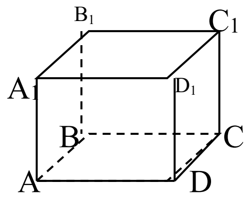
Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от расположения плоскостей ABC и CDB.



7. В тетраэдре $SABC$ точки X, Y, Z, T — середины рёбер SA, SC, CB, AB. Прямые XY и TZ …

А. параллельны. **Б.** пересекаются. **В.** скрещиваются.

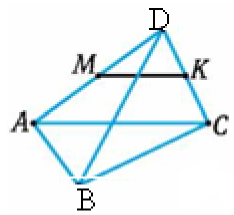
Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от вида тетраэдра.



8. Диагонали противоположных граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба …

А. параллельны. **Б.** скрещиваются.

В. параллельны или скрещиваются. **Г.** пересекаются.

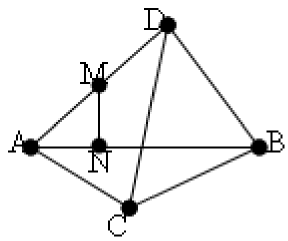


9. На рисунке изображены точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точки M, K — середины отрезков AD и DC соответственно. Как расположены прямые AB и MK?

А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Скрещиваются.

Г. Пересекаются или параллельны.

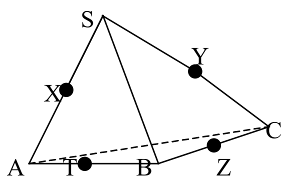
Вариант 2



6. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямые CD и MN, изображенные на рисунке, …

А. параллельны. **Б.** скрещиваются. **В.** пересекаются.

Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от расположения плоскостей ABC и ADB.

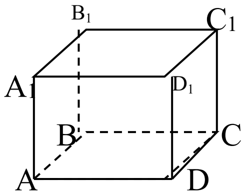


7. В тетраэдре $SABC$ точки X, Y, Z, T — середины рёбер SA, SC, CB, AB. Прямые XT и YZ …

А. параллельны. **Б.** пересекаются. **В.** скрещиваются.

Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от вида тетраэдра.

8. Диагонали смежных граней AA_1B_1B и BB_1C_1C куба …

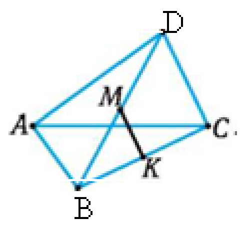


А. пересекаются. **Б.** скрещиваются.

В. параллельны или скрещиваются.

Г. пересекаются или скрещиваются.

9. На рисунке изображены точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точки M, K — середины отрезков BD и BC соответственно. Как расположены прямые AC и MK?

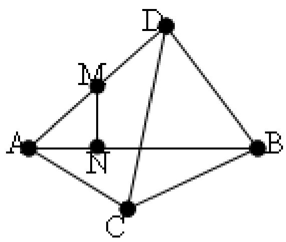


А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Скрещиваются.

Г. Пересекаются или параллельны.

Вариант 3

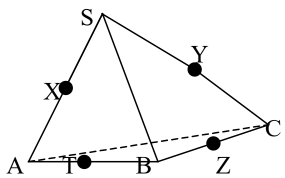
6. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямые CB и MN, изображенные на рисунке, …



А. параллельны. **Б.** скрещиваются. **В.** пересекаются.

Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от расположения плоскостей ABC и CDB.

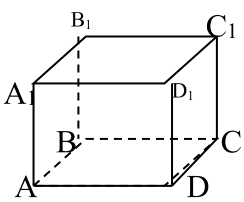
7. В тетраэдре $SABC$ точки X, Y, Z, T — середины рёбер SA, SC, CB, AB. Прямые XY и TZ …



А. параллельны. **Б.** пересекаются. **В.** скрещиваются.

Г. могут быть по-разному расположены в зависимости от вида тетраэдра.

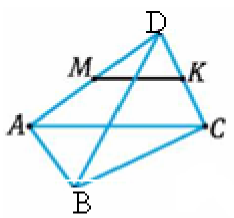
8. Диагонали противоположных граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба …



А. параллельны. **Б.** скрещиваются.

В. параллельны или скрещиваются. **Г.** пересекаются.

9. На рисунке изображены точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точки M, K — середины отрезков AD и DC соответственно. Как расположены прямые AB и MK?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Скрещиваются.

Г. Пересекаются или параллельны.

Подсказки

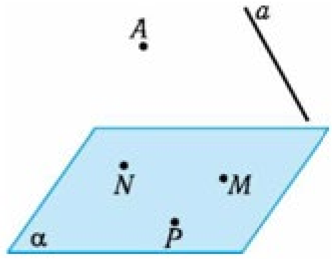
6. Воспользуйтесь одним из признаков скрещивающихся прямых.

7. Воспользуйтесь признаком параллельности прямых в пространстве.

8. Рассмотрите различные пары диагоналей противоположных граней куба.

9. Вначале, анализируя рисунок, выскажите гипотезу о расположении указанных прямых, а затем обоснуйте её с помощью определений, свойств и признаков.

3. Параллельное проектирование
Вариант 1



10. На рисунке изображены плоскость проекции α, направление проектирования a и точка A. Какая из точек, изображённых на рисунке, может быть параллельной проекцией точки A?

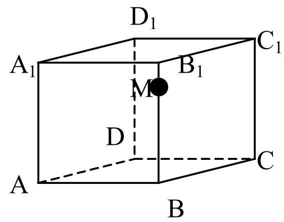
А. P. **Б.** N. **В.** M. **Г.** Ни одна из указанных точек.

11. Проекцией двух параллельных прямых не может быть…

А. одна прямая. **Б.** одна точка. **В.** две прямые. **Г.** две точки.

12. Проекцией квадрата не может быть …

А. отрезок. **Б.** ромб. **В.** прямоугольник. **Г.** трапеция.



13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка $M \neq B$ на ребре BB_1. Прямая MC пересекает плоскость $A_1B_1D_1$ в точке, лежащей на прямой …

А. A_1B_1. **Б.** A_1D_1. **В.** B_1C_1. **Г.** A_1C_1.

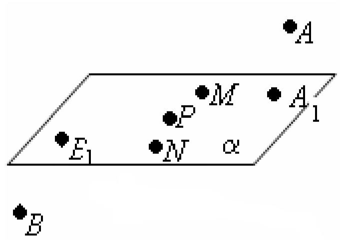
14. Если d — длина отрезка, d_1 — длина его параллельной проекции на плоскость, то…

А. $d > d_1$. **Б.** $d < d_1$. **В.** $d = d_1$.

Г. ни одно из приведенных соотношений не является верным.

Вариант 2

10. На рисунке изображены точки A, B и их параллельные проекции на плоскость α. Какая из точек, изображённых на этом рисунке, может быть точкой пересечения отрезка AB с плоскостью α?



А. P. **Б.** N. **В.** M. **Г.** Ни одна из указанных точек.

11. Проекции двух различных прямых не могут …

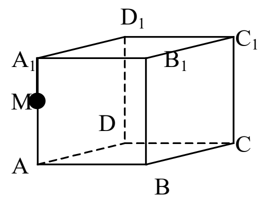
А. совпадать **Б.** быть скрещивающимися.

В. пересекаться. **Г.** быть параллельными.

12. Проекцией ромба не может быть …

А. квадрат. **Б.** параллелограмм. **В.** прямоугольник. **Г.** трапеция.

13. На рисунке дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M на ребре AA_1. Точка пересечения прямой MC_1 с плоскостью BCD лежит на прямой …



А. DC. **Б.** AC. **В.** BC. **Г.** AD.

14. Длина параллельной проекции отрезка на плоскость …

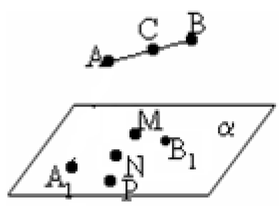
А. больше длины отрезка. **Б.** меньше длины отрезка.

В. равна длине отрезка.

Г. может быть меньше длины отрезка, больше её или равной ей.

Вариант 3

10. На рисунке изображены точки A, B и их параллельные проекции на плоскость α. Какая из точек M, N, P может быть изображением проекции точки C, принадлежащей отрезку AB?



А. P. **Б.** N. **В.** M. **Г.** Ни одна из указанных точек.

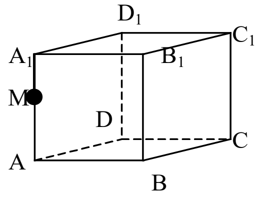
11. Проекции двух различных скрещивающихся прямых не могут …

А. совпадать **Б.** быть скрещивающимися.

В. пересекаться. **Г.** быть параллельными.

12. Проекцией параллелограмма не может быть …

А. квадрат. **Б.** параллелограмм. **В.** прямоугольник. **Г.** трапеция.



13. На рисунке дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M на ребре AA_1. Точка пересечения прямой MC с плоскостью $A_1B_1C_1$ лежит на прямой …

А. A_1B_1. **Б.** A_1C_1. **В.** B_1C_1. **Г.** . A_1D_1

14. Длина параллельной проекции отрезка длиной 10 см на плоскость …

А.больше 10 см. **Б.** меньше 10 см. **В.** равна 10 см.

Г. может быть меньше 10 см, больше 10 см или равна 10 см.

Подсказки

10. Воспользуйтесь определением параллельной проекции.

11. Воспользуйтесь свойствами параллельного проектирования. Рассмотрите случаи, когда проектирующая прямая пересекает фигуру не более чем в одной точке и более чем в одной точке.

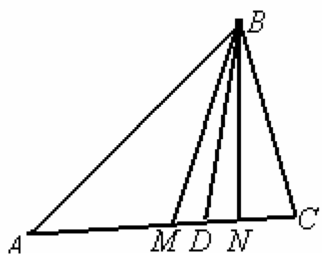
12. Воспользуйтесь свойствами проекций простейших геометрических фигур. Обратите внимание на то, что при параллельном проектировании не сохраняются длины отрезков, величины углов.

13. Выберите в качестве проектирующей прямой прямую, параллельную ребру куба, а в качестве плоскости проектирования — плоскость грани куба. Найдите проекцию прямой, для которой нужно найти точку пересечения с указанной плоскостью.

14. Воспользуйтесь тем, что параллельное проектирование моделирует освещение объекта солнечными лучами, а параллельные проекции данного отрезка на данную плоскость зависят от направления проектирования.

4. Изображение фигур в стереометрии

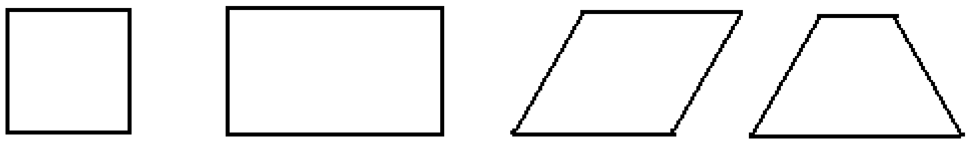
Вариант 1



15. На рисунке изображён равнобедренный треугольник. Какой из отрезков, имеющихся на рисунке, может быть изображением биссектрисы, проведенной из вершины треугольника B (точки пересечения боковых сторон)?

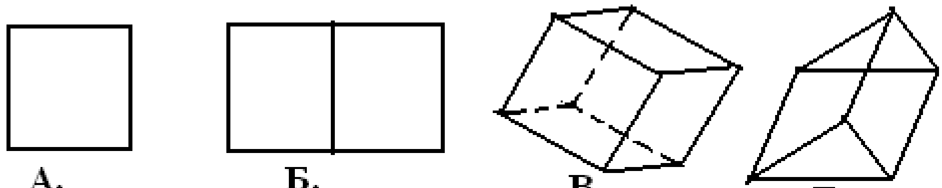
А. *MB*. **Б.** *DB*. **В.** *NB*. **Г.** Любой из приведенных.

16. Какая из фигур, изображённых в ответах, не может быть изображением квадрата?



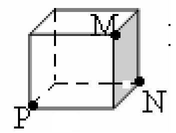
А. **Б.** **В.** **Г.**

17. Какая из фигур, изображённых в ответах, не может быть изображением куба?



А. **Б.** **В.** **Г.**

18. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, проходящей через точки *M*, *N*, *P*, указанные на рисунке?

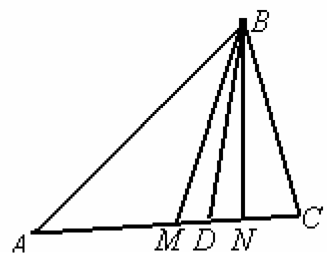


А. Квадратом. **Б.** Прямоугольником.

В. Параллелограммом. **Г.** Треугольником.

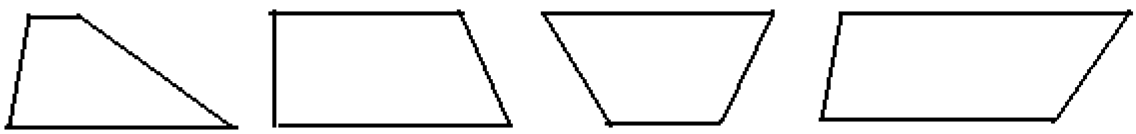
Вариант 2

15. На рисунке изображён равносторонний треугольник. Какой из отрезков, имеющихся на рисунке, может быть изображением высоты, проведенной из точки *B*?



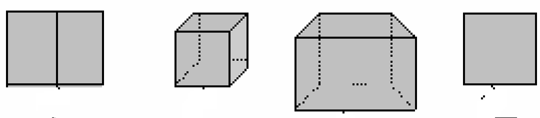
А. *MB*. **Б.** *DB*. **В.** *NB*. **Г.** Любой из приведенных.

16. На каком из рисунков, приведенных в ответах, правильно изображена трапеция, у которой одно основание вдвое больше другого?



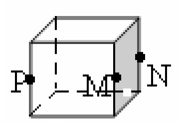
А. **Б.** **В.** **Г.**

17. На каком из рисунков, приведенных в ответах, изображение куба не является правильным?



А. **Б.** **В.** **Г.**

18. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, N, P, являющиеся серединами ребер?

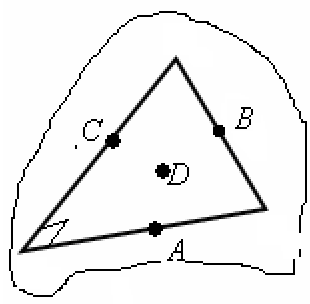


А. Квадратом. **Б.** Прямоугольником.

В. Параллелограммом. **Г.** Треугольником.

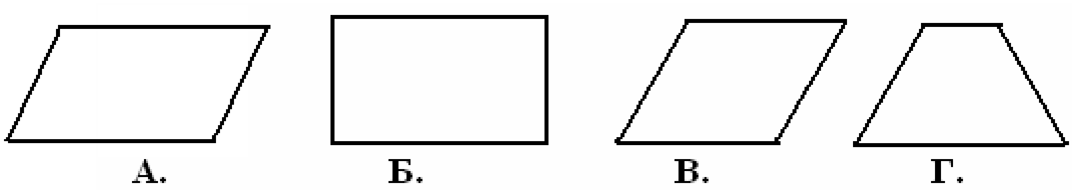
Вариант 3

15. На рисунке изображён прямоугольный треугольник. Какая из точек, изображённых на рисунке, может быть изображением центра окружности, описанной около этого треугольника?

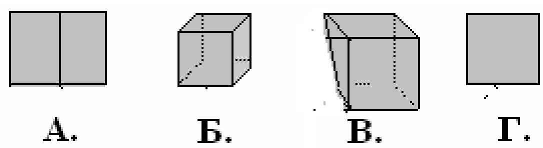


А. A. **Б.** B. **В.** C. **Г.** D.

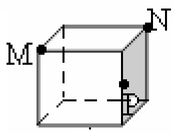
16. Какая из фигур, изображённых в ответах, не может быть изображением ромба?



17. На каком из рисунков, приведенных в ответах, изображение куба не является правильным?



18. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, N, P, указанные на рисунке?



А. Квадратом. **Б.** Прямоугольником.

В. Параллелограммом. **Г.** Треугольником.

Подсказки

15. Воспользуйтесь тем, что отношение длин проекций двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин этих отрезков (свойство 3 параллельного проектирования).

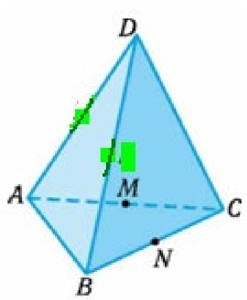
16. Воспользуйтесь тем, что изображениям данного параллелограмма может быть произвольный параллелограмм; изображением данной трапеции является трапеция, но не произвольная: должно сохраняться отношение длин оснований (они лежат на параллельных прямых, см. свойство 3 параллельного проектирования).

17. Воспользуйтесь тем, что изображением должно удовлетворять правилам построения параллельных проекций.

18. Воспользуйтесь тем, что сечениями параллелепипеда или пирамиды являются многоугольники, так как пересечением секущей плоскости и грани фигуры является отрезок. Постройте линии пересечения указанной плоскости со всеми гранями указанной пространственной фигуры, с которыми она имеет общие точки.

5. Параллельность прямых и плоскостей

Вариант 1



19. На рисунке изображён тетраэдр *ABCD*, точки *M*, *N* — середины рёбер *AC* и *BC*. Прямая *MN* параллельна плоскости …

А. *ABC*. **Б.** *ABD*. **В.** *ADC*. **Г.** *BDC*.

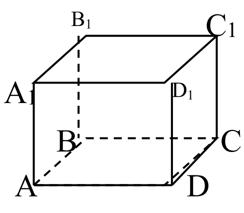
20. Если прямая параллельна плоскости, то…

А. все прямые плоскости ей параллельны.

Б. существуют в плоскости прямые ей не параллельные.

В. каждая прямая плоскости с ней скрещивается.

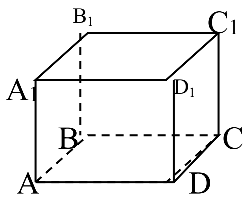
Г. существуют в плоскости прямые, пересекающие данную прямую.



21. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину *D*?

А. Ни одной. **Б.** Одна.

В. Две. **Г.** Бесконечно много.

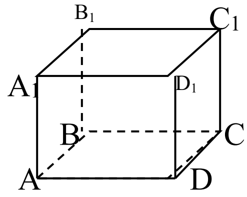


22. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через ребро AA_1?

А. Ни одной. **Б.** Одна.

В. Две. **Г.** Бесконечно много.

23. Сколько существует прямых, параллельных грани ADD_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину C?



А. Одна. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

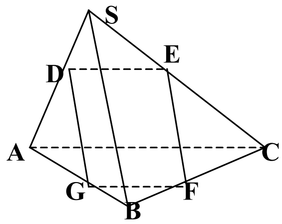
Г. Ответ зависит от размеров куба.

24. Сколько плоскостей можно провести через вершину треугольника, параллельных его стороне, не содержащей эту вершину?

А. Ни одной. **Б.** Одну

В. Бесконечно много. **Г.** Не более одной

25. На рисунке точки D, E, F, G — середины рёбер AS, SC, BC, AB. Найдите периметр четырёхугольника $DEFG$, если $DG = 4$ см, $AC = 16$ см.



А. 24 см. **Б.** 16 см. **В.** 32 см. **Г.** 40 см.

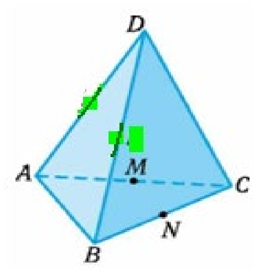
26. Известно, что прямые a и b параллельны плоскости α. Как расположены прямые a и b?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются. **В.** Совпадают.

Г. Могут быть расположены по-разному.

Вариант 2

19. На рисунке изображён тетраэдр $ABCD$, точки M, N — середины рёбер AC и BC. Прямая MN параллельна плоскости …



А. ABC. **Б.** BDC. **В.** BDA. **Г.** ADC.

20. Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна …

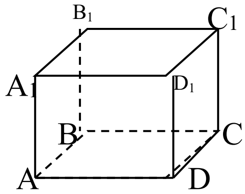
А. всем прямым этой плоскости.

Б. только одной прямой этой плоскости.

В. ровно двум пересекающимся прямым этой плоскости.

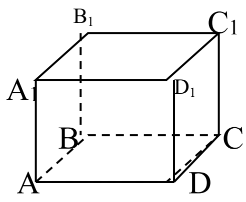
Г. бесконечному числу прямых этой плоскости.

21. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину B?



А. Ни одной. **Б.** Одна.

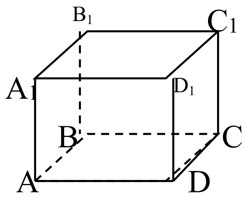
В. Две. **Г.** Бесконечно много.



22. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через ребро DC?

А. Ни одной. **Б.** Одна.

В. Две. **Г.** Бесконечно много.



23. Сколько существует прямых, параллельных грани BCC_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину A?

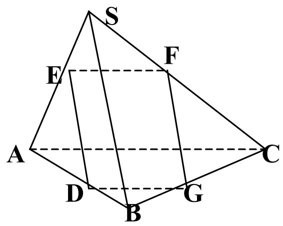
А. Одна. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ зависит от размеров куба.

24. Прямая a не проходит через точку M. Сколько плоскостей, параллельных прямой a, можно провести через точку M?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Бесконечно много. **Г.** Не более одной.

25. На рисунке точка D — середина отрезка AB, $EF \parallel AC$, $DG \parallel AC$, $DE \parallel FG$. Известно, что $DE = 2$ см, а периметр четырёхугольника $DEFG$ равен 14 см. Длина отрезка AC равна …



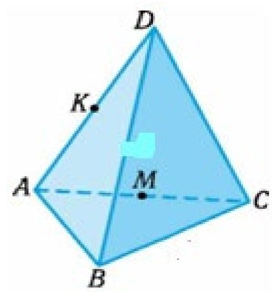
А. 5 см. **Б.** 10 см. **В.** 6 см. **Г.** 8 см.

26. Известно, что прямая a параллельна плоскости α, а прямая b лежит в плоскости α. Как расположены прямые a и b?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются. **В.** Скрещиваются.

Г. Параллельны или скрещиваются.

Вариант 3



19. На рисунке изображён тетраэдр $ABCD$, точки M, K — середины рёбер AC и AD. Прямая KM параллельна плоскости …

А. ABC. **Б.** BDC. **В.** ADC. **Г.** ABD.

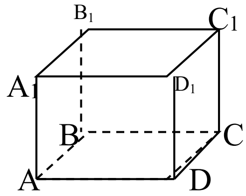
20. Для того, чтобы прямая была параллельна плоскости, необходимо, чтобы она была параллельна …

А. всем прямым этой плоскости. **Б.** только одной прямой этой плоскости.

В. ровно двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Г. бесконечному числу прямых этой плоскости.

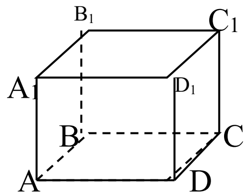
21. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину C?



А. Ни одной. **Б.** Одна.

В. Две. **Г.** Бесконечно много.

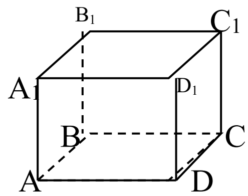
22. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через ребро DD_1?



А. Ни одной. **Б.** Одна.

В. Две. **Г.** Бесконечно много.

23. Сколько существует прямых, параллельных грани DCC_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину B?



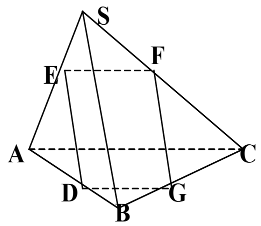
А. Одна. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ зависит от размеров куба.

24. Сколько плоскостей можно провести через вершину параллелограмма, параллельных его диагонали, не содержащей эту вершину?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Бесконечно много. **Г.** Не более одной.

25. На рисунке точка E — середина отрезка AS, $GF \parallel SB$, $DE \parallel SB$, $FE \parallel AC$. Известно, что $FE = 5$ см, а периметр четырёхугольника $DEFG$ равен 14 см. Длина отрезка SB равна …



А. 6 см. **Б.** 5 см. **В.** 4 см. **Г.** 2 см.

26. Известно, что прямая a параллельна плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α. Как расположены прямые a и b?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются. **В.** Скрещиваются.

Г. Пересекаются или скрещиваются.

Подсказки

19. Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости для обоснования выбранного ответа.

20. Воспользуйтесь определением параллельности прямой и плоскости, свойствами этого отношения.

21. Воспользуйтесь тем, что через произвольную точку пространства, не лежащей на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, а через эту прямую проходит бесконечное множество плоскостей, параллельных данной прямой.

22. Воспользуйтесь тем, что через прямую, параллельную данной прямой, проходит бесконечное множество плоскостей, параллельных данной прямой.

23. Воспользуйтесь тем, что через точку, лежащую вне плоскости, можно провести бесконечное количество прямых, параллельных данной плоскости.

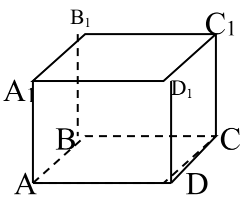
24. Воспользуйтесь тем, что через произвольную точку пространства, не лежащей на данной прямой, проходит бесконечное множество плоскостей, параллельных данной прямой.

25. Установите вид указанного четырёхугольника, воспользовавшись свойством средней линии треугольника.

26. Выскажите гипотезу о взаимном расположении указанных прямых, затем обоснуйте её, используя информацию о всевозможных вариантах взаимного расположения двух прямых в пространстве, свойства параллельности прямой и плоскости.

6. Параллельность плоскостей

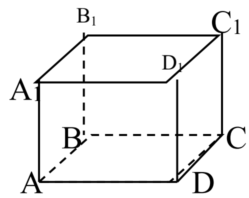
Вариант 1



27. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости $A_1B_1C_1$ и ADC?

А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Совпадают.

Г. Пересекаются или совпадают.



28. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости AB_1D и D_1AC?

А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Совпадают.

Г. Параллельны или совпадают.

29. Если две смежные стороны параллелограмма параллельны плоскости α, то плоскость параллелограмма и плоскость α…

А. параллельны. **Б.** пересекаются.

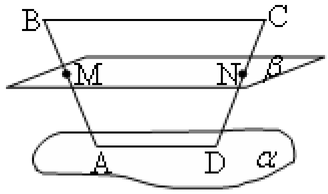
В. совпадают или параллельны. **Г.** параллельны или пересекаются.

30. Если диагонали трапеции параллельны плоскости α, то основания трапеции…

А. лежат в плоскости α. **Б.** параллельны α. **В.** пересекают α.

Г. могут пересекать α, а могут и быть ей параллельными.

31. Одно основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Через середину AB — точку M — проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая CD в точке N. Прямые MN и BC …



А. параллельны. **Б.** скрещиваются. **В.** пересекаются. **Г.** совпадают.

32. Сколько плоскостей, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку пространства?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ зависит от положения данной точки относительно данной плоскости.

33. Если линии пересечения плоскостей α и β плоскостью γ параллельны, то плоскости α и β…

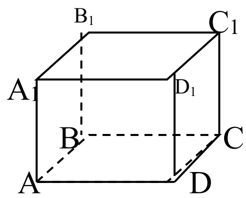
А. параллельны. **Б.** пересекаются.

В. могут быть параллельными, либо пересекаться.

Г. пересекаются или совпадают.

Вариант 2

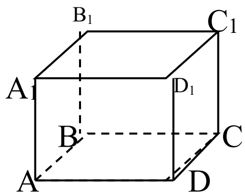
27. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости A_1D_1D и B_1CB?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны.

В. Совпадают. **Г.** Пересекаются или совпадают.

28. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости BDC_1 и $A_1C_1D_1$?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны.

В. Совпадают. **Г.** Параллельны или совпадают.

29. Если две смежные стороны трапеции параллельны плоскости α, то плоскости трапеции и α …

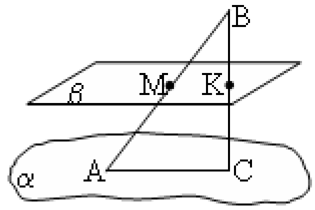
А. пересекаются. **Б.** параллельны. **В.** совпадают или параллельны.

Г. параллельны или пересекаются.

30. Две стороны треугольника параллельны некоторой плоскости α. Третья сторона …

А. лежит в α. **Б.** пересекает α. **В.** параллельна α. **Г.** может пересекать α.

31. Сторона AC треугольника ABC лежит в плоскости α. Через середину AB — точку M — проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая BC в точке K (см. рис.). Каково взаимное расположение прямых MK и AC?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны.

В. Скрещиваются. **Г.** Совпадают.

32. Сколько существует плоскостей, параллельных данной прямой и проходящих через данную точку?

А. Бесконечно много. **Б.** Одна. **В.** Ни одной.

Г. Ответ зависит от положения прямой относительно данной плоскости.

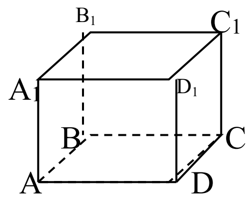
33. Если две плоскости параллельны одной и той же прямой, то эти плоскости …

А. параллельны. **Б.** пересекаются. **В.** совпадают.

Г. параллельны или пересекаются.

Вариант 3

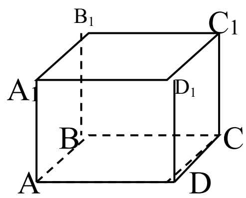
27. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости B_1BC_1 и AD_1D?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Совпадают.

Г. Пересекаются или совпадают.

28. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости AD_1B_1 и BC_1A_1?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Совпадают.

Г. Параллельны или совпадают.

29. Если две стороны треугольника параллельны плоскости α, то плоскости треугольника и α …

А. пересекаются. **Б.** параллельны. **В.** совпадают или параллельны.

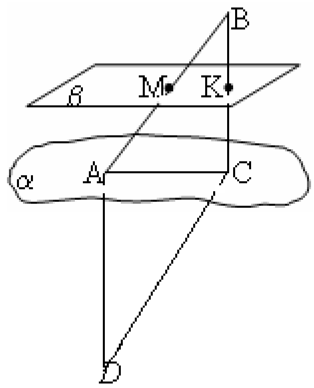
Г. параллельны или пересекаются.

30. Две смежные стороны параллелограмма параллельны некоторой плоскости α. Диагональ параллелограмма …

А. лежит в α. **Б.** пересекает α.

В. параллельна α. **Г.** может пересекать α.

31. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости α. Через середину стороны AB — точку M — проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая сторону BC в точке K (см. рис.). Каково взаимное расположение прямых MK и AC?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны.

В. Скрещиваются. **Г.** Совпадают.

32. Сколько плоскостей, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку пространства, не принадлежащую данной плоскости?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Две. **Г.** Бесконечно много.

33. Как расположены плоскость α и каждая плоскость, параллельная плоскости β, если плоскость α пересекает плоскость β?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются. **В.** Совпадают.

Г. Совпадают или пересекаются.

Подсказки

27. Воспользуйтесь признаком параллельности двух плоскостей. Найдите в каждой из указанных плоскостей пару пересекающихся прямых, соответственно параллельных друг другу.

28. Попытайтесь найти общие точки указанных плоскостей.

29. Воспользуйтесь признаком параллельности двух плоскостей.

30. Вначале установите взаимное расположение плоскости заданной фигуры и плоскости α, затем проверьте, может ли указанная прямая иметь с плоскостью α общие точки.

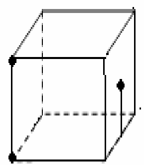
31. Воспользуйтесь теоремой о пересечении двух параллельных плоскостей третьей.

32. Рассмотрите различные случаи расположения данной точки относительно заданной плоскости (прямой).

33. Рассмотрите каждый возможный вариант взаимного расположения плоскостей, попробуйте, либо обосновать его, либо опровергнуть.

7. Сечения многогранников

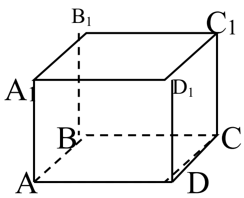
Вариант 1



34. Какой фигурой является сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через три данные точки, изображённые на рисунке?

А. Трапецией. **Б.** Треугольником.

В. Ромбом. **Г.** Прямоугольником.

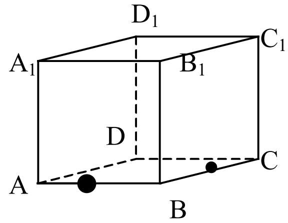


35. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены два сечения: через точки A, B_1, C и через точки A, D, C_1. Плоскости этих сечений …

А. совпадают. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

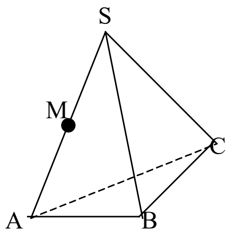
Г. могут быть расположены по-разному в зависимости от размеров куба.

36. Периметр многоугольника, полученного в сечении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и BC параллельно ребру DD_1, равен …



А. $2a$. **Б.** $2\sqrt{2}a$. **В.** $2(a+\sqrt{2}a)$. **Г.** $2a+\sqrt{2}a$.

37. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой CB. Сечением тетраэдра плоскостью α является …



А. правильный треугольник. **Б.** квадрат.

В. равнобедренный треугольник. **Г.** трапеция.

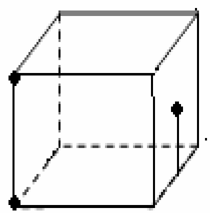
38. Сечением правильного тетраэдра не может быть…

А. трапеция. **Б.** равносторонний треугольник. **В.** ромб.

Г. правильный шестиугольник.

Вариант 2

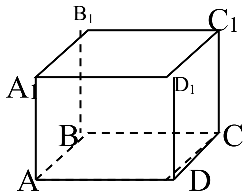
34. Какой фигурой является сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через три данные точки, изображённые на рисунке?



А. Трапецией. **Б.** Треугольником.

В. Четырёхугольником. **Г.** Пятиугольником.

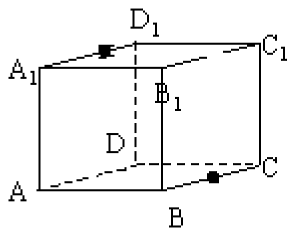
35. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены два сечения: через точки A_1, D, C_1 и через точки A_1, C_1, C. Плоскости этих сечений …



А. совпадают. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

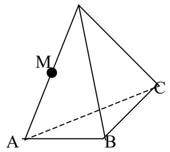
Г. могут быть расположены по-разному в зависимости от размеров куба.

36. Периметр многоугольника, полученного в сечении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a плоскостью, проходящей через середины рёбер BC и A_1D_1 параллельно ребру AA_1, равен …



А. $4a$. **Б.** $2a$. **В.** $2(1+\sqrt{2})a$. **Г.** $(2+\sqrt{5})a$.

37. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой AB. Сечение тетраэдра плоскостью α не может быть …



А. правильным треугольником. **Б.** равнобедренным треугольником.

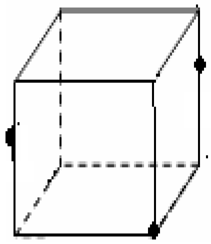
В. разносторонним треугольником. **Г.** четырёхугольником.

38. Сечением куба не может быть …

А. пятиугольник. **Б.** шестиугольник. **В.** семиугольник.

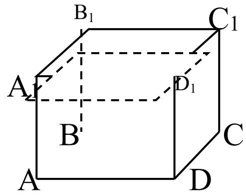
Г. правильный треугольник.

Вариант 3



34. Какой фигурой является сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через три данные точки, изображённые на рисунке?

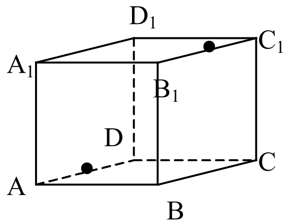
А. Трапецией. **Б.** Треугольником. **В.** Ромбом. **Г.** Пятиугольником.



35. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены два сечения: через точки A_1, B, C_1 и через точки A_1, D_1, C. Плоскости этих сечений …

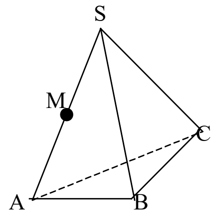
А. совпадают. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

Г. могут быть расположены по-разному в зависимости от размеров куба.



36. Периметр многоугольника, полученного в сечении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a плоскостью, проходящей через середины рёбер AD и B_1C_1 параллельно ребру AA_1, равен …

А. $4a$. **Б.** $2a$. **В.** $2(1+\sqrt{2})a$. **Г.** $(2+\sqrt{5})a$.



37. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой CA. Сечение тетраэдра плоскостью α не может быть …

А. правильным треугольником.

Б. равнобедренным треугольником.

В. разносторонним треугольником. **Г.** четырёхугольником.

38. Сечением правильного тетраэдра не может быть …

А. пятиугольник. **Б.** треугольник. **В.** параллелограмм. **Г.** трапеция.

Подсказки

34. Для установления вида сечения постройте отрезки, являющиеся пересечениями секущей плоскости с гранями куба, с которыми она имеет общие точки.

35. В первую очередь, посмотрите, нет ли среди наборов заданных точек одних и тех же точек, то есть имеют ли указанные плоскости общие точки. Если есть, то установите, пересекаются ли эти плоскости или совпадают. Если нет, то попытайтесь доказать их параллельность, воспользовавшись признаком параллельности двух плоскостей.

36.Установите вначале вид многоугольника, являющегося сечением куба. При нахождении его периметра воспользуйтесь теоремой Пифагора.

37.Вначале определите, какие грани тетраэдра может пересекать секущая плоскость, при этом обратите внимание на то, что эти грани могут определяться неоднозначно. Затем постройте отрезки, являющиеся пересечениями секущей плоскости с этими гранями тетраэдра.

38. Обратите внимание на то, что в сечении пространственной фигуры не может лежать многоугольник с числом сторон, превышающим количество граней этой фигуры.

Ответы к заданиям тренажёра

Ответы к заданиям 1-го варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Г	Б	В	Г	В	Б	А	В	В	В	Б	Г	В
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Г	А	Г	Г	Г	Б	Б	Г	Г	В	В	А	Г
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
Б	А	А	Б	А	Г	В	Г	Б	Г	В	Г	

Ответы к заданиям 2-го варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Г	Б	В	В	Г	Б	А	Г	В	А	Б	Г	Б
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Г	А	В	В	А	В	Г	Г	Г	В	В	Б	Г
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
Б	А	Б	В	Б	Г	Г	В	Б	А	В	В	

Ответы к заданиям 3-го варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Б	Б	А	Г	А	Б	А	В	В	Б	Б	Г	Б
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Г	Б	Г	В	Г	Б	Г	Г	Г	В	В	В	Г
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
Б	А	Б	В	Б	Б	Б	Г	Б	А	В	А	

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		**Контрольный тест**	**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	20 заданий	8 заданий	–
«хорошо»	Решено не менее	25 заданий	11 заданий	5 заданий
«отлично»	Решено не менее	30 заданий	14 заданий	8 заданий

Контрольный тест

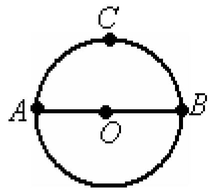
Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д».

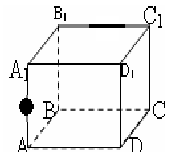
Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Через какие три из указанных на рисунке точек можно провести более одной плоскости?



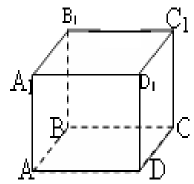
А. A, C, B. **Б.** O, C, B. **В.** A, C, O. **Г.** A, O, B.

2. Сколько плоскостей можно провести через ребро B_1C_1 куба и середину ребра AA_1?



А. Бесконечно много. **Б.** Две. **В.** Одну. **Г.** Ни одной.

3. Сколько общих точек имеет грань CC_1D_1D куба и плоскость B_1D_1A?



А. Одну. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

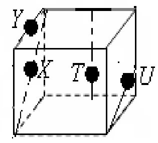
Г. Ответ отличен от приведённых.

4. Пересечением плоскостей ABC и DBC, где A, B, C и D — вершины тетраэдра $DABC$ является …

А. точка B. **Б.** прямая BC.

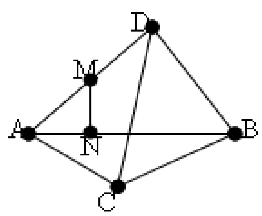
В. совокупность двух точек $\{B; C\}$. **Г.** отрезок BC.

5. На изображении куба в одной грани лежат точки …



А. X и T. **Б.** X и U. **В.** X и Y. **Г.** T и U.

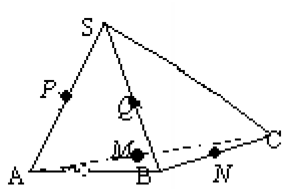
6. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямые CA и MN, изображенные на рисунке, …



А. параллельны. **Б.** скрещиваются. **В.** пересекаются.

Г. могут быть по разному расположены в зависимости от расположения плоскостей ABC и CDB.

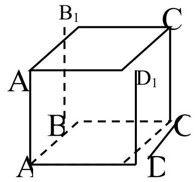
7. В тетраэдре $SABC$ точки P, M, N, Q — середины рёбер SA, AC, CB, SB. Прямые PQ и MN …



А. параллельны. **Б.** пересекаются. **В.** скрещиваются.

Г. могут быть по разному расположены в зависимости от вида тетраэдра.

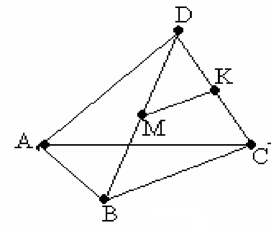
8. Диагонали смежных граней $ABCD$ и DD_1C_1C куба …



А. параллельны. **Б.** скрещиваются.

В. пересекаются или скрещиваются. **Г.** пересекаются.

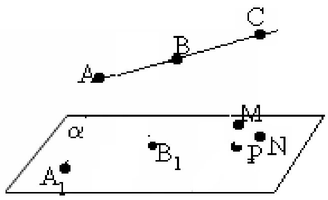
9. На рисунке изображены точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точки M, K — середины отрезков BD и DC. Как расположены прямые AC и MK?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны.

В. Скрещиваются. **Г.** Пересекаются или параллельны

10. На рисунке изображены точки A, B и их параллельные проекции на плоскость α. Какая из точек, изображённых на этом рисунке, может быть изображением точки C, принадлежащей прямой AB?



А. M. **Б.** N. **В.** P. **Г.** Ни одна из указанных точек.

11. Прямые, являющиеся проекциями двух параллельных прямых, …

А. совпадают. **Б.** параллельны. **В.** пересекаются.

Г. параллельны или совпадают.

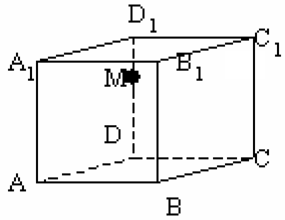
12. Проекцией прямоугольной трапеции не может быть …

А. равнобедренная трапеция. **Б.** параллелограмм.

В. трапеция со взаимно перпендикулярными диагоналями.

Г. прямоугольная трапеция.

13. На рисунке дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка $M \neq D_1$ на ребре DD_1. Точка пересечения прямой MB с плоскостью $B_1C_1D_1$ лежит на прямой …



А. D_1B_1. **Б.** A_1C_1. **В.** B_1C_1. **Г.** A_1D_1.

14. Длина столба при его освещении Солнцем …

А. больше длины тени от него. **Б.** меньше длины тени от него.

В. равна длине тени от него.

Г. может быть меньше длины тени от него, больше её или равной ей.

15. На рисунке изображена равнобокая трапеция. Какой из отрезков, изображённых на рисунке, может быть изображением высоты трапеции, проведенной из вершины трапеции?

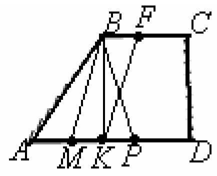
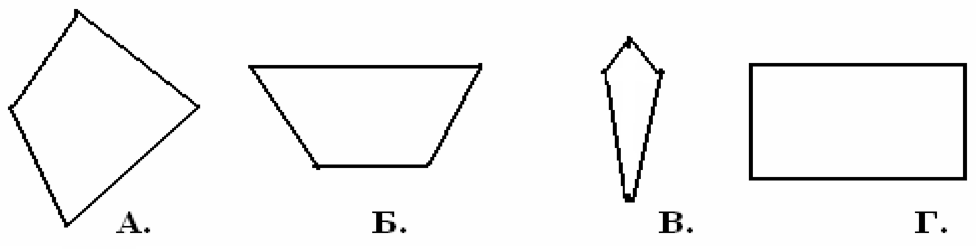


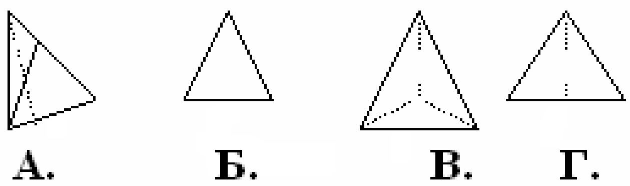
Рис. 18

А. *BM*. **Б.** *BK*. **В.** *FK*. **Г.** *BP*.

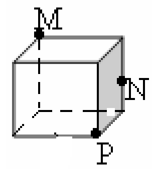
16. Какая из фигур, изображённых в ответах, может быть изображением параллелограмма?



17. На каком из рисунков, приведенных в ответах, изображение тетраэдра не является правильным?



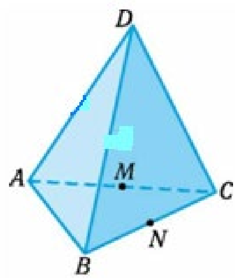
18. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, проходящей через точки *M*, *N*, *P*, указанные на рисунке?



А. Квадратом. **Б.** Прямоугольником.

В. Параллелограммом. **Г.** Треугольником.

19. На рисунке изображён тетраэдр *ABCD*, точки *M*, *N* — середины рёбер *AC* и *BC*. Как расположены прямая *MN* и плоскость *DAB*?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны.

В. Прямая *KC* лежит в плоскости *DMN*. **Г.** Установить невозможно.

20. Для того, чтобы прямая была параллельна плоскости, необходимо, чтобы

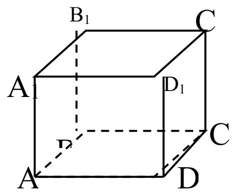
А. все прямые этой плоскости были ей параллельны.

Б. в плоскости существовали прямые, не параллельные данной прямой.

В. каждая прямая этой плоскости была скрещивающейся с данной прямой.

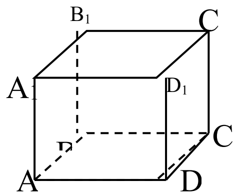
Г. в плоскости существовали прямые, пересекающие данную прямую.

21. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру *CD* куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через вершину *A*?



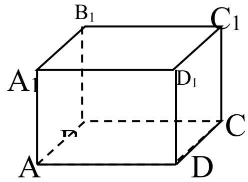
А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Бесконечно много.

22. Сколько существует плоскостей, параллельных ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходящих через ребро *AD*?



А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Бесконечно много.

23. Сколько существует прямых, проходящих через вершину *D* и параллельных грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?



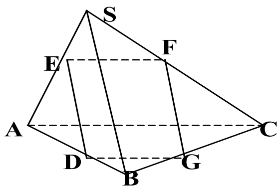
А. Одна. **Б.** Две. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ зависит от размеров куба.

24. Сколько плоскостей можно провести через точку пересечения диагоналей параллелограмма, параллельных его стороне?

А. Ни одной. **Б.** Одну **В.** Бесконечно много. **Г.** Не более одной.

25. На рисунке точки *D*, *E*, *F*, *G* — середины рёбер *AS*, *SC*, *BC*, *AB* соответственно. Найдите периметр четырёхугольника *DEFG*, если *DE* = 5 см, *AC* = 14 см.



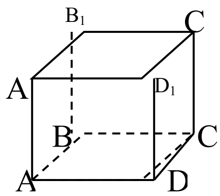
А. 24 см. **Б.** 12 см. **В.** 33 см. **Г.** 38 см.

26. Известно, что прямые *a* и *b* пересекают плоскость α. Как расположены прямые *a* и *b*?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются. **В.** Скрещиваются.

Г. Параллельны, или пересекаются, или скрещиваются.

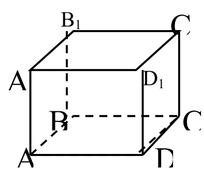
27. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости ADA_1 и B_1BC_1?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Совпадают.

Г. Пересекаются или совпадают.

28. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как расположены плоскости BDC_1 и A_1C_1D?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Совпадают.

Г. Параллельны или совпадают.

29. Если две диагонали параллелограмма параллельны плоскости α, то плоскости параллелограмма и α …

А. пересекаются. **Б.** параллельны. **В.** совпадают или параллельны.

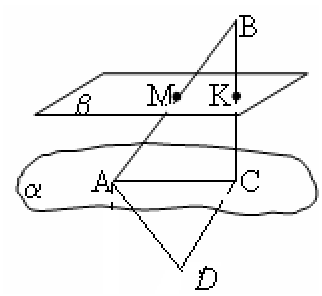
Г. параллельны или пересекаются.

30. Две диагонали трапеции параллельны некоторой плоскости α. Сторона трапеции …

А. лежит в α. **Б.** пересекает α. **В.** параллельна α.

Г. может пересекать α.

31. Диагональ *AC* трапеции *ABCD* лежит в плоскости α. Через середину стороны *AB* — точку *M* — проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая сторону *BC* в точке *K*. Каково взаимное расположение прямых *MK* и *AC*?



А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Скрещиваются. **Г.** Совпадают.

32. Сколько плоскостей, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку пространства, не принадлежащую данной прямой?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Две. **Г.** Бесконечно много.

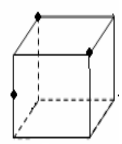
33. Известно, что прямая *a* пересекает плоскость α. Как расположены прямая *a* и каждая плоскость, параллельная плоскости α?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются.

В. Прямая *a* лежит в этих плоскостях.

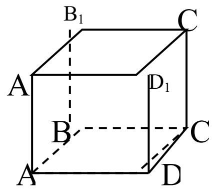
Г. Параллельны или прямая *a* лежит в этих плоскостях.

34. Какой фигурой является сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через три данные точки, изображённые на рисунке?



А. Трапецией. **Б.** Треугольником. **В.** Ромбом. **Г.** Параллелограммом.

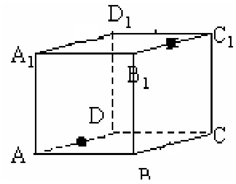
35. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены два сечения: через точки A, D_1, B_1 и через точки D, C_1, B. Плоскости этих сечений …



А. совпадают. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

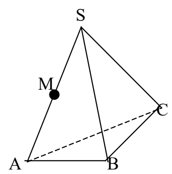
Г. могут быть расположены по-разному в зависимости от размеров куба.

36. Периметр многоугольника, полученного в сечении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a плоскостью, проходящей через середины рёбер B_1C_1 и AD параллельно ребру BB_1, равен …



А. $4a$. **Б.** $2a$. **В.** $2(1+\sqrt{2})a$. **Г.** $(2+\sqrt{5})a$.

37. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через середину M ребра AS параллельно прямой SC. Сечение тетраэдра плоскостью α не может быть …



А. правильным треугольником. **Б.** равнобедренным треугольником.

В. разносторонним треугольником. **Г.** ромбом.

38. Сечением куба не может быть …

А. квадрат. **Б.** прямоугольник.

В. восьмиугольник. **Г.** равнобедренный треугольник.

Основное задание

1. Два параллелограмма $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в различных плоскостях.

1) Определите взаимное расположение прямых CD и C_1D_1.

2) Определите взаимное расположение прямой C_1D_1 и плоскости ABC.

3) Постройте линию пересечения плоскостей DD_1C_1 и BCC_1.

4) Определите взаимное расположение плоскостей ADD_1 и BCC_1.

5) Через точку M, делящую отрезок AB в отношении 2:1, проведите плоскость α, параллельную плоскости C_1BC.

6) Постройте точку пересечения прямой AC с плоскостью α и найдите отношение, в котором эта точка делит отрезок AC.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Установите взаимное расположение прямой AC с плоскостями $A_1B_1C_1$, AA_1C_1, BB_1D_1, A_1C_1D.

2) Проведите прямую через середину ребра A_1D_1 параллельно плоскостям AA_1B_1 и BB_1D.

3) Постройте плоскость, пересекающую плоскости только четырёх граней куба.

4) Установите взаимное расположение плоскостей B_1D_1D и LMM_1, где L, M, M_1 — соответственно середины рёбер AB, AD и A_1D_1.

3. Дана плоскость α и отрезок AB, не имеющий общих точек с ней. Через концы отрезка A и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1 и B_1.

1) Постройте точку пересечения прямой AB и плоскости α.

2) Проведите через середину C отрезка AB прямую, параллельную прямой AA_1, и найдите точку ее пересечения C_1 с плоскостью α.

3) Найдите длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$.

4. На произвольном изображении равнобедренного треугольника ABC с основанием AB, являющегося разносторонним треугольником, постройте изображение:

1) медианы AM боковой стороны треугольника;

2) ромба, две смежные стороны которого совпадают с боковыми сторонами треугольника;

3) перпендикуляра из точки M на основание треугольника;

4) точки основания, равноудаленной от боковых сторон;

5) правильного шестиугольника, при условии, что основание AB треугольника является его стороной, а вершина C — серединой противоположной стороны шестиугольника.

5. Постройте сечение куба, являющееся:

1) равносторонним треугольником;

2) равнобокой трапецией; 3) пятиугольником.

Указания к задачам основного задания

1. 1) Воспользуйтесь признаком параллельности прямых.

2) Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости.

3) Воспользуйтесь расположением прямых DC и D_1C_1.

4) Воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей.

5) Постройте две прямые, проходящие через точку M и параллельные плоскости C_1BC.

6) Воспользуйтесь подобием треугольников для нахождения искомого отношения.

2. 1) Воспользуйтесь определениями и признаками взаимного расположения прямых и плоскостей.

2) Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости и тем, что данные плоскости пересекаются.

3) Воспользуйтесь параллельностью плоскостей противоположных граней куба.

4) Воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей.

3. 1) Воспользуйтесь тем, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости.

2) Воспользуйтесь тем, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

3) Воспользуйтесь тем, что четырёхугольник ABB_1A_1 — трапеция.

4. 1) — 5) Воспользуйтесь свойствами параллельного проектирования и свойствами равнобедренного треугольника.

5. 1) — 3) Выберите на рёбрах точки так, чтобы они лежали в одной плоскости, и пересечение этой плоскости с кубом было фигурой с нужными свойствами.

Дополнительное задание

1. Плоскость трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB > CD$) параллельна плоскости β. Через вершины трапеции проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость β соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

1) Постройте линию пересечения плоскости CDD_1 с плоскостью β.

2) Определите взаимное расположение прямых AB и C_1D_1, BD_1 и DC_1.

3) Определите взаимное расположение плоскости CDD_1 и прямой A_1B_1.

4) Определите взаимное расположение плоскостей BB_1A_1 и CDD_1.

5) Через вершину D проведите плоскость α, параллельную плоскости BCC_1.

6) Постройте точку пересечения прямой CA_1 с плоскостью α. В каком отношении эта точка делит отрезок CA_1, если $AB = 9$ см, $CD = 6$ см?

2. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a; точка M — середина ребра AA_1, точка N делит ребро C_1C в отношении 3:1 (считая от точки C_1).

1) Постройте линию пересечения плоскостей DA_1C_1 и D_1B_1B и найдите длину отрезка этой прямой внутри куба.

2) Постройте точки пересечения прямой MN с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, соответственно, и найдите расстояние между ними.

3) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно ребру BC, и найдите его площадь.

4) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно диагонали D_1B_1, и найдите его площадь.

3. На произвольном изображении равнобокой трапеции, боковая сторона которой равняется меньшему основанию, постройте изображение:

1) оси симметрии трапеции;

2) высоты трапеции, проходящей через вершину тупого угла;

3) вписанного в трапецию прямоугольника, две вершины которого лежат на большем основании и одна из сторон совпадает с меньшим основанием;

4*) центра окружности, касающейся боковых сторон и меньшего основания трапеции.

4. Через две прямые, не лежащие в плоскости α, проведите две плоскости, линия пересечения которых лежит в плоскости α.

5. * Некоторая фигура в пространстве обладает тем свойством, что любые ее четыре точки лежат в одной плоскости. Докажите, что вся фигура лежит в некоторой плоскости.

6. * На одной из двух скрещивающихся прямых взяли две различные точки A и A_1, а на второй — B и B_1. Докажите, что прямые AB и A_1B_1 скрещивающиеся.

Указания к задачам дополнительного задания

1. 1) Воспользуйтесь тем, что прямые CC_1 и DD_1 параллельны.

2) Воспользуйтесь признаками взаимного расположения прямых в пространстве.

3) Воспользуйтесь признаком параллельности прямой и плоскости.

4) Воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей.

5) Воспользуйтесь тем, что прямые BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны.

6) Постройте сначала линию пересечения плоскости α с плоскостью A_1AC.

2. 1) Воспользуйтесь тем, что точка D принадлежит плоскости D_1B_1B.

2) Воспользуйтесь тем, что точки M и N лежат в плоскости A_1C_1C, которая пересекает плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно по прямым AC и A_1C_1.

3) Выберите на ребре BB_1 такую точку P, чтобы прямая PN была параллельна прямой BC, и постройте сечение куба, проходящее через точки M, N, P.

4) Постройте сначала точку пересечения прямой MN и плоскости DBB_1.

3. 1) — 3) Воспользуйтесь свойствами параллельного проектирования.

4) Воспользуйтесь тем, что боковая сторона равна меньшему основанию.

4. Рассмотрите различные случаи расположения данных прямых и плоскости.

5. Воспользуйтесь тем, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну плоскость.

6. Воспользуйтесь методом доказательства от противного.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Пособие для дополнительного обучения математике

обучающихся 10 классов

Учебное пособие