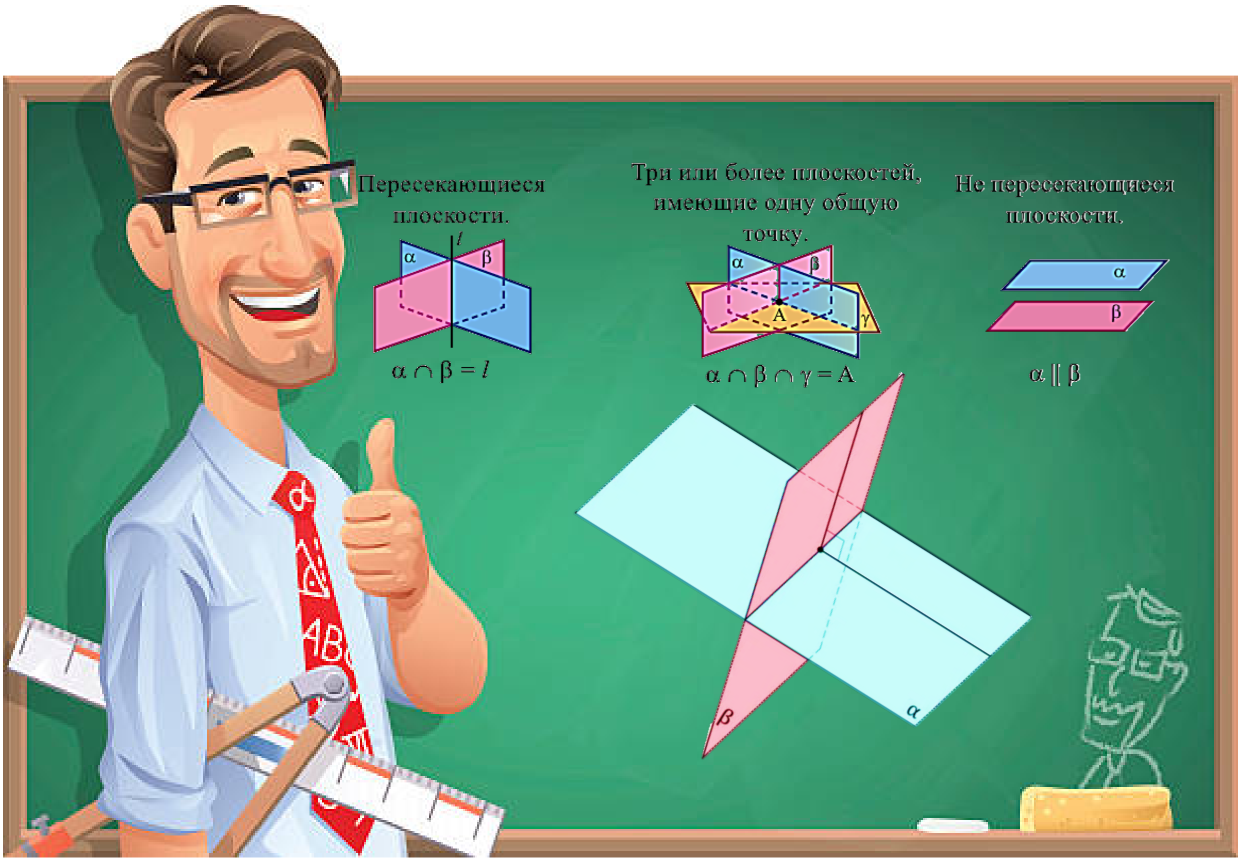
Донецкий национальный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я.С. Бродский, А.Л. Павлов

Перпендикулярность прямых и плоскостей



Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов

Донецк 2023

УДК 519 11
ББК 74.262я 72
Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Перпендикулярность прямых и плоскостей. Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов. − Донецк, 2023. – 109 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 10 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом *ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017)*. Ее цель — развитие у обучающихся умений учиться, самостоятельно приобретать знания, совершенствование умений и навыков применять математику для решения математических и жизненных задач.

Настоящее пособие предназначено для для развития умений исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, изображать пространственные конструкции, выполнять на них простейшие построения и измерять геометрические величины.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части представлен материал для обучения. В этой части содержатся краткие теоретические сведения, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля.

Во второй части пособия содержатся три варианта тренажёра с подсказками ко всем заданиям.

В третьей части пособия приведены задания для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части.

Пособие предназначено для обучающихся открытого математического колледжа факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета. Может быть использовано при проведении факультативных занятий, спецкурсов.

Содержание

Дорогой друг!

Настоящее пособие предназначено для развития умений исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, изображать пространственные конструкции, выполнять на них простейшие построения и измерять геометрические величины.

Пособие состоит из трёх частей: обучающей, тренировочной и контролирующей. В первой части представлен материал для повторения и обучения. Он содержит краткие теоретические сведения, применимые при решении представленных задач, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля с ответами на них. Вся совокупность задач разделена на группы по двум признакам: по характеру математических моделей, к которым приводит решение задач, и по их содержанию.

Вторая часть пособия состоит из тестов для тренировки, к заданиям которых приведены указания, ответы. Они структурированы в соответствии с частями, на который разделён весь материал. Тренажёр состоит из заданий с выбором ответа.

Задания для тренировки представлены тремя однотипными вариантами теста. Тренировку начинайте с первого варианта теста. Попробуйте выполнить самостоятельно его задания, не используя учебные пособия и микрокалькулятор. Выбор правильных ответов и необходимые записи делайте в отдельной тетради. После завершения работы над тестом сверьте свои ответы с ответами, приведенными в пособии. **Не пользуйтесь ответами, пока не дадите ответы самостоятельно!**

Каждое задание, по которому Ваш ответ не совпал с приведенным, тщательно проанализируйте, пользуясь подсказками. Такую работу полезно выполнить по всем заданиям теста. Наверное, некоторые ответы Вы угадали или «почувствовали», не зная полного решения. Кроме подсказок, целесообразно пользоваться теоретическими сведениями и примерами с решениями, содержащимися в первой части пособия.

В третьей части пособия приведено контрольное задание, состоящее из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям тестов для тренировки;

- ***основного задания***, содержащего задания, подобные рассмотренным в первой части пособия;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные задачи по сравнению с основным заданием.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут для Вас полезными и интересными.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит в освоении идей, методов, использованных в приведенных решениях типовых задач, самостоятельном решении подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно:

- сначала проанализировать её условие и вытекающие из него следствия;

- уяснить требование задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требования задачи.

2. Приступая к выполнению заданий тренажёра, повторите приведенный теоретический материал.

Надо сначала попробовать выполнить самостоятельно задания первого варианта первого блока тренажёра. Выбранные ответы записывайте на отдельном листочке. **Пользоваться учебником и калькулятором не рекомендуется.**

3. После завершения работы над первым вариантом первого блока тренажёра необходимо сверить свои ответы с приведенными в пособии.

Нельзя обращаться к приведенным ответам, пока не получены самостоятельно ответы ко всем заданиям.

4. Каждое задание, по которому ответ не совпал с приведенным, нужно тщательно проанализировать, пользуясь при необходимости приведенными в пособии указаниями.

Такую работу полезно проделать со всеми заданиями первого варианта блока. Наверное, некоторые ответы угаданы или «почувствованы».

5. Когда появится уверенность в том, что неясных вопросов не осталось, можно проверить надёжность своей уверенности с помощью второго варианта первого блока тренажёра.

Если же при выполнении второго варианта первого блока осталось ощущение, что не всё усвоено, то нужно продолжать работу по исправлению ошибок, выполнить задания третьего варианта, записывая при этом все проделанные шаги.

Если до конца выполнены данные выше рекомендации, то результаты при выполнении следующего варианта теста будут значительно выше первоначальных.

6. Если уверенность подтвердилась при выполнении второго варианта теста, то можно перейти к работе над первым вариантом второго блока. Методика работы над ним остаётся такой же. И так далее.

Ни в коем случае не бросайте работу!

Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части раздела.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!
Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.
Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели,
учитывая свою готовность, опыт и способности.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

В теме «Параллельность прямых и плоскостей» рассмотрены различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. В частности, обстоятельно изучалось отношение параллельности. Однако многочисленные применения геометрии связаны, в первую очередь, с измерением геометрических величин (расстояний, углов и т. п.). Предметом многих измерений являются пересекающиеся прямые и плоскости. Поэтому необходимо более детально исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей, ввести величины, характеризующие это расположение.

Частным случаем расположения прямой и плоскости, имеющих одну общую точку, является перпендикулярность, моделирующая отношение вертикальности между физическими телами и другие подобные отношения (например, гвоздь, забитый в стену). Воспользовавшись понятием перпендикулярности, мы сможем измерять расстояние от точки до плоскости, от прямой до параллельной ей плоскости, расстояние между параллельными плоскостями. На этих измерениях основано измерение расстояния между произвольными реальными объектами.

Не менее важным является введение количественных характеристик взаимного расположения пересекающихся прямых и плоскостей — угла между прямой и плоскостью, угла между плоскостями. Эти понятия родственны планиметрическому понятию угла между прямыми (да и определяются с его помощью).

1. Перпендикулярность прямой и плоскости

Повторяем теорию

Можно привести много примеров взаимного расположения физических объектов, характеризующихся математическим понятием перпендикулярности прямой и плоскости: вертикальная колонна перпендикулярна поверхности земли, ножки стола перпендикулярны полу, шнур, на котором висит лампа, — потолку, траектория свободно падающего тела — поверхности Земли и т. п.

В приведенных примерах расположение тел моделируется таким взаимным расположением прямой и плоскости, при котором прямая, пересекающая плоскость, не имеет наклона ни в одном направлении на плоскости. В связи с этим необходимо обобщить понятие перпендикулярности прямых на случай пространства, поскольку перпендикулярность прямых как раз и характеризует отсутствие наклона.

Две прямые пространства называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Перпендикулярность отрезков означает перпендикулярность прямых, их содержащих.

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна каждой прямой плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Пользуясь только определением, установить перпендикулярность прямой плоскости невозможно, ведь это сводилось бы к проведению бесконечного множества проверок.

Теорема 1 *(признак перпендикулярности прямой и плоскости).*

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

В том, что перпендикулярности данной прямой одной прямой плоскости не хватает для ее перпендикулярности плоскости, можно убедиться с помощью следующего примера. Ручка швабры перпендикулярна перекладине, лежащей на полу, но этого недостаточно, чтобы ручка была расположена вертикально. Но, если ручку вращать вокруг перекладины, то можно найти положение, когда она будет вертикальной. Это как раз будет тогда, когда она будет перпендикулярной еще одному направлению на полу.

Решаем

Пример 1. Через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.

Решение. Пусть даны плоскость α и точка O на ней. Проведем в плоскости α через точку O прямую l (рис. 1, а) и возьмем некоторую плоскость β, пересекающую плоскость α по прямой l (как выбрать такую плоскость?). В этой плоскости построим прямую AO, перпендикулярную прямой l (рис. 1, б). В плоскости это всегда можно сделать однозначно.

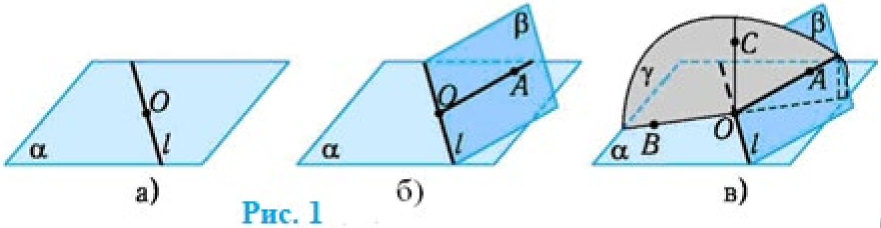


Рис. 1

Осталось только повернуть прямую OA вокруг прямой l так, чтобы она стала перпендикулярной плоскости α. Для этого в плоскости α через точку O проведем прямую OB, перпендикулярную прямой l. А затем через прямые OA и OB проведем плоскость γ (рис. 1, в). Наконец, проведем в плоскости γ прямую OC перпендикулярно прямой OB. Она и является искомой. Действительно, она перпендикулярна двум прямым плоскости — прямой OB, по построению, и прямой l, по определению перпендикулярности прямой и плоскости. Дело в том, что $l \perp \gamma$, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости ($l \perp OA$, $l \perp OB$, $OA \cap OB = \{O\}$). Таким образом, дважды примененный признак завершает доказательство возможности проведения прямой, проходящей через данную точку плоскости перпендикулярно этой плоскости. ■

Построение прямой, перпендикулярной данной плоскости, проходящей через данную точку, относится к основным построениям. В последующем будем вместо описания построения писать: «Проведем прямую, перпендикулярную плоскости».

Пример 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a; O — точка пересечения диагоналей грани $ABCD$.

1) Каким ребрам куба перпендикулярна прямая AC?
2) Установить взаимное расположение прямых D_1O и AC.
3) Доказать, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1D_1.

4) Через точку M на ребре AB провести прямую, перпендикулярную диагонали AC.

Решение. Изобразим условие примера на рис. 2.

1) Прямая AC перпендикулярна ребрам AA_1 и CC_1. Это вытекает из того, что указанные ребра перпендикулярны плоскости грани, в которой лежит прямая AC, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1): $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$; $CC_1 \perp CB$, $CC_1 \perp CD$.

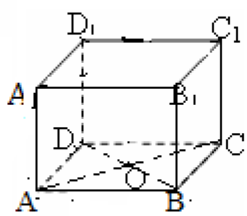


Рис. 2

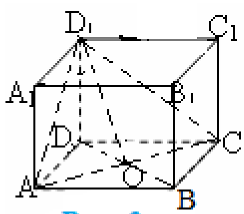


Рис. 3

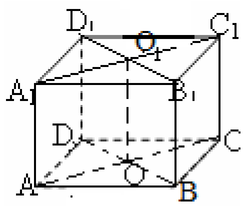


Рис. 4

2) Прямые D_1O и AC перпендикулярны. Рассмотрим треугольник AD_1C (рис. 3). Он равнобедренный: $AD_1 = D_1C$, как диагонали равных квадратов. Отрезок D_1O является медианой этого треугольника, проведенной к основанию. А потому он является и высотой. Таким образом, прямые D_1O и AC пересекаются под прямым углом.

3) Прямая A_1C_1 пересекается с прямой B_1D_1 под прямым углом в центре O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 4). Осталось доказать, что прямая A_1C_1 перпендикулярна прямой O_1O, лежащей в плоскости BB_1D_1. Но это вытекает из того, что четырехугольник ACC_1A_1 является прямоугольником: $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = CC_1$, по свойству транзитивности отношений параллельности и равенства, $AA_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AC$ (см. решение задания 1)). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1D_1, так как она перпендикулярна прямым B_1D_1 и O_1O этой плоскости.

4) Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно диагонали AC, параллельна прямой BD, поскольку BD также перпендикулярна AC, и все эти прямые лежат в одной плоскости (рис. 5). Построение заключается в проведении через точку M прямой MN, параллельной прямой BD.

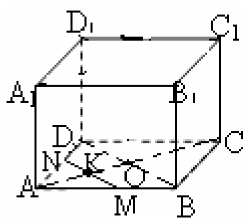


Рис. 5

Ответ. 1) $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$; $CC_1 \perp CB$, $CC_1 \perp CD$; 2) $D_1O \perp AC$.

Пример 3. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, точка O является центром основания $ABCD$.

1) Доказать, что $SO \perp ABC$; $AC \perp DBS$.

2) Через точку B провести плоскость, перпендикулярную прямой SC.

3) Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AS перпендикулярно прямой: а) BD; б) AB.

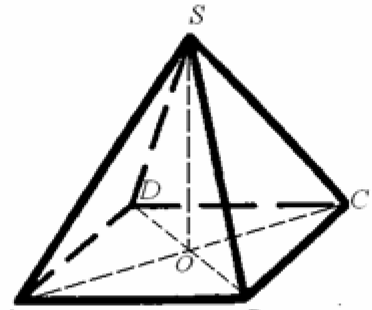


Рис. 6

Решение. 1) Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, точка O — центр ее основания (рис. 6). Так как треугольник ASC является равнобедренным ($AS = SC$), то его медиана SO является и высотой. Следовательно, $SO \perp AC$. Аналогично, $SO \perp BD$. Поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $SO \perp ABC$. Далее, $BD \perp AC$, как диагонали квадрата, и $SO \perp AC$, поэтому, по тому же признаку, $AC \perp DBS$.

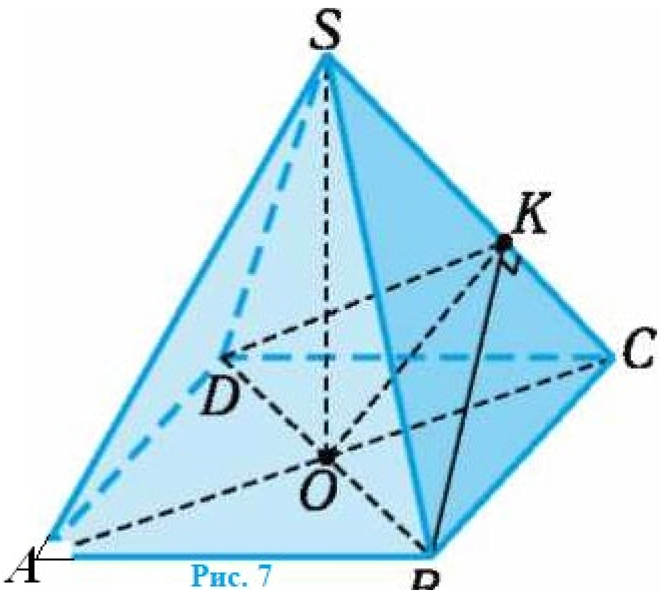


Рис. 7

2) Воспользуемся построением плоскости, проходящей через данную точку в пространстве и перпендикулярной данной прямой. Для этого в треугольнике BSC проведем $BK \perp SC$ (рис. 7). Поскольку $\Delta BCK = \Delta DCK$ (по двум сторонам и углу между ними), то $\angle DKC = \angle BKC = 90°$. Следовательно, $SC \perp BK$, $SC \perp DK$, поэтому $DBK \perp SC$, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Приведенная конструкция характерна для правильной пирамиды. Эта же плоскость определяется прямыми DB и OK, где $OK \perp SC$, или же является решением задачи: через точку O (или диагональ основания BD) провести плоскость, перпендикулярную ребру SC.

3) а) Пусть M — середина ребра AS. Прямая BD перпендикулярна плоскости ACS, содержащей точку M. Это устанавливается аналогично доказательству перпендикулярности прямой AC плоскости DBS. Поэтому искомым сечением служит треугольник ASC (рис. 8, а).

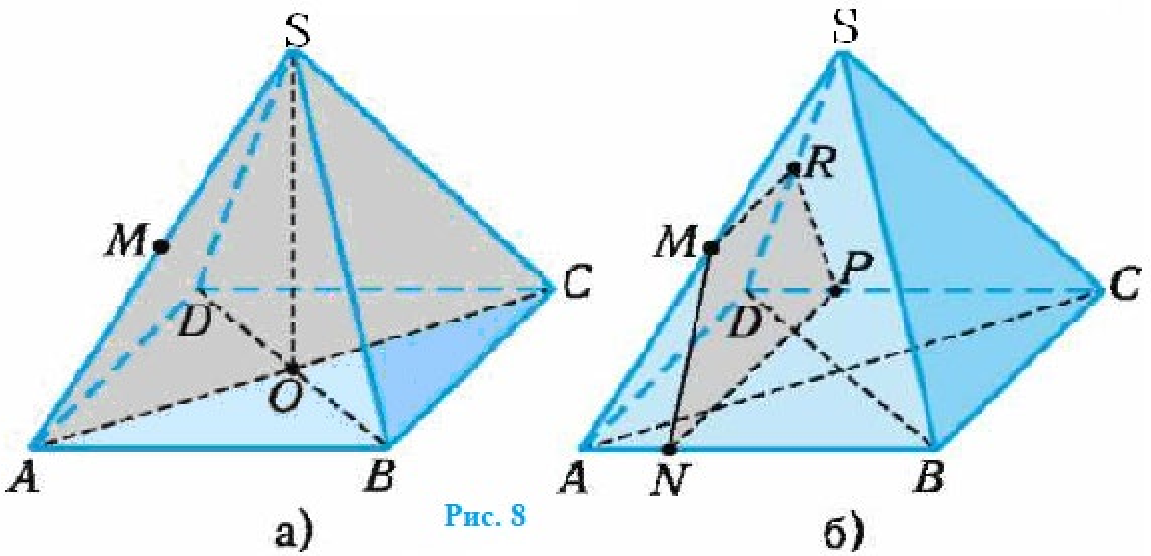


Рис. 8

б) Если в плоскости SAB через точку M провести перпендикуляр MN к AB и в плоскости ABC — перпендикуляр NP к AB (рис. 8, б), то плоскость MNP перпендикулярна прямой AB, то есть она является плоскостью искомого сечения. Поскольку $NP \parallel AD$, то $NP \parallel SAD$, и плоскость сечения пересекает грань SAD по отрезку MR, параллельному NP. Следовательно, сечением является трапеция $NMRP$ (легко доказать, что она равнобедренная, попробуйте это сделать). ■

Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то говорят также, что плоскость α перпендикулярна прямой a. Следующая задача связана с построением плоскости, перпендикулярной данной прямой.

Пример 4. Через данную точку в пространстве провести плоскость, перпендикулярную данной прямой.

Решение. Решение задачи нуждается в рассмотрении двух случаев:

1) данная точка не принадлежит данной прямой;

2) данная точка принадлежит данной прямой.

Пусть данная точка O не принадлежит данной прямой a. Искомая плоскость может быть задана двумя пересекающимися прямыми. Согласно доказанному признаку перпендикулярности прямой и плоскости, для перпендикулярности плоскости прямой *a* достаточно перпендикулярности этих прямых прямой *a.* Следовательно, задача сводится к построению двух пересекающихся прямых, перпендикулярных прямой *a,* одна из которых проходит через точку *O.* Для этого через точку *O* и прямую *a* проведем плоскость α и в ней построим прямую *m,* перпендикулярную прямой *a и* проходящую через точку *O* (рис. 9, а). Потом через прямую *a* проведем плоскость β, отличную от α, и в этой плоскости через точку пересечения прямых *a и m* проведем прямую *n,* перпендикулярную *a* (рис. 9, б). Прямые *m* и *n* определяют искомую плоскость γ.

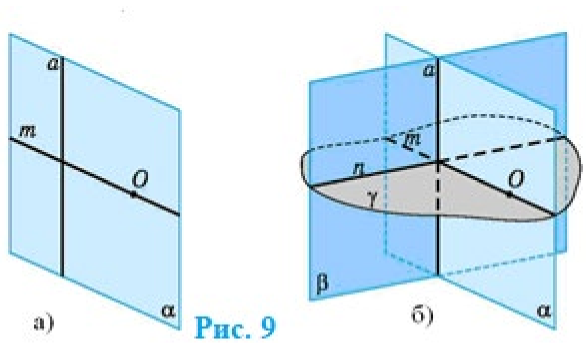


Рис. 9

Случай, когда данная точка лежит на данной прямой, рассматривают аналогично. Для этого через прямую *a* проводят произвольную плоскость, а в ней — прямую *m*, перпендикулярную прямой *a* и проходящую через точку *O*. А далее все строится так же, как и в первом случае.

Алгоритм построения плоскости, проходящей через данную точку *O*, перпендикулярную данной прямой *a*, следующий:

– через точку *O* и прямую *a* проводим плоскость α (см. рис. 9, а);

– проводим в плоскости α прямую *m*, проходящую через точку *O* и перпендикулярную прямой *a* (см. рис. 9, а);

– через прямую *a* проводим плоскость β, отличную от плоскости α (см. рис. 9, б);

– проводим в плоскости β прямую *n*, перпендикулярную прямой *a* и проходящую через точку пересечения прямых *a* и *m* (см. рис. 9, б);

– проводим через прямые *m* и *n* плоскость γ. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Перпендикулярны ли две пересекающиеся прямые, если через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой?

2. Верно ли, что прямая, перпендикулярная двум сторонам треугольника, перпендикулярна его плоскости?

3. Можно ли с помощью двух угольников определить направление, перпендикулярное плоскости стола?

4. Достаточно ли одной пары растяжек для обеспечения вертикальности мачты?

5. Верно ли, что прямая, пересекающая круг в его центре и перпендикулярная двум радиусам круга, перпендикулярна плоскости круга?

6. При поперечном распиле деревянного бруса плотник держит пилу так, чтобы можно было видеть две смежные грани бруса. С какой целью он это делает?

7. Как проверить перпендикулярность оси сверла плоскости стола, на котором закрепляют деталь?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Да. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Нет. **5.** Да. **6.** Чтобы обеспечить перпендикулярность плоскости распила ребру бруса.**7.** Нужно проверить перпендикулярность оси сверла плоскости стола в двух направлениях.

Задания для самостоятельного решения

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Найдите все ребра куба, перпендикулярные ребру AA_1.

2°) Докажите, что прямая, проходящая через вершину куба A_1 и центр грани $ABCD$, перпендикулярна прямой BD.

3°) Через точку B проведите прямую, перпендикулярную прямой A_1C_1.

4) Докажите, что каждая прямая, проходящая через середину отрезка A_1C_1 и пересекающая отрезок BD, перпендикулярна прямой A_1C_1.

2. Отрезок OS проведен из центра O квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости, точка M — середина отрезка BC.

1°) Укажите прямые, перпендикулярные прямой BD.

2°) Установите взаимное расположение плоскости ASC и прямой BD.

3°) Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости SOM.

4) Через точку O проведите плоскость, перпендикулярную прямой AB.

5) Постройте точки пересечения плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой BD, с прямыми BS, BA, BC. Вычислите площадь треугольника, образованного этими точками, если длина стороны квадрата равна 6 см, а отрезка OS — 4 см.

3. Отрезок CS проведен через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC перпендикулярно его катетам. Точка M — середина гипотенузы AB, $CB = CS = CA = a$.

1°) Укажите прямые, перпендикулярные прямой CS и прямой MC.

2°) Определите взаимное расположение плоскости SCA и прямой BC.

3°) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости CMS.

4) Через точку M проведите плоскость, перпендикулярную прямой AC.

5) Вычислите площадь треугольника, плоскость которого перпендикулярна прямой MS, одна из вершин — середина катета CB, а две другие — точки пересечения плоскости треугольника с прямыми CA и MS.

4. На изображении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте:

1°) прямую, проходящую через точку A_1 перпендикулярно к плоскости BB_1D;

2°) плоскость, проходящую через точку A_1 перпендикулярно прямой B_1D_1;

3°) прямую, проходящую через середину ребра AB перпендикулярно плоскости CDD_1;

4°) плоскость, проходящую через середину ребра AA_1 перпендикулярно прямой DD_1;

5) прямую, проходящую через середину ребра AB перпендикулярно плоскости A_1C_1C;

6) плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно прямой CD_1;

7*) прямую, проходящую через точку A_1 перпендикулярно плоскости AB_1D_1.

5. Точка S расположена на одинаковом расстоянии от всех вершин квадрата $ABCD$ и не принадлежит его плоскости. Постройте:

1) прямую, проходящую через точку S, перпендикулярную плоскости ABC;

2) плоскость, проходящую через середину K стороны AD, перпендикулярную прямой AD;

3*) прямую, проходящую через середину M стороны CD, перпендикулярную плоскости ABS;

4*) плоскость, проходящую через точку K перпендикулярно прямой DS.

6. Комната имеет длину 6 м, ширину 5 м и высоту 3 м. Найдите расстояние от светильника, размещённого в центре потолка, до нижних углов комнаты.

7°. Докажите, что через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой. Исследуйте, когда такую прямую можно провести лишь одну.

8°. Докажите, что прямая, проходящая через центры противоположных граней куба, перпендикулярна этим граням.

9. Докажите, что прямые, проходящие через данную точку прямой и перпендикулярные ей, образуют плоскость, перпендикулярную этой прямой.

10°. Прямая a перпендикулярна плоскости α и перпендикулярна прямой b, не лежащей в плоскости α. Докажите, что прямая b и плоскость α параллельны.

11. Докажите, что через точку, лежащую вне плоскости, можно провести только одну прямую, перпендикулярную этой плоскости.

12. Два отрезка AB и CD, лежащие в плоскости α, точкой пересечения E делятся пополам. Точка K находится вне плоскости α, причем $KA = KB$ и $KC = KD$. Докажите, что прямая KE перпендикулярна плоскости α.

13. Докажите, что прямые a и b параллельны, если они имеют две общие перпендикулярные прямые.

14*. Докажите, что прямые, перпендикулярные данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

15*. Найдите множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных точек A и B.

16. Постройте сечение куба плоскостью:

1°) проходящей через середину ребра, перпендикулярно этому ребру;

2) проходящей через середину диагонали грани куба, перпендикулярно этой диагонали.

17. В правильном тетраэдре $SABC$ точка K — середина ребра SC.

1°) Докажите, что плоскость AKB перпендикулярна прямой SC.

2)Изобразите сечения тетраэдра плоскостями, проходящими через вершину A перпендикулярно прямым BC и SB. Найдите линию пересечения этих сечений.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) Воспользуйтесь тем, что гранями куба являются квадраты; 2) воспользуйтесь тем, что треугольник A_1BD является равнобедренным; 3) используйте результат выполнения задания 2); 4) все эти прямые лежат в плоскости BDD_1, перпендикулярной A_1C_1. **2.** 1) Воспользуйтесь определением перпендикулярности прямой и плоскости и свойствами квадрата; 2), 3) воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости; 4) соедините точку O с серединой AB; 5) воспользуйтесь формулой площади треугольника. **3.** 1) Воспользуйтесь определением и признаком перпендикулярности прямой и плоскости и свойствами равнобедренного прямоугольного треугольника; 2), 3) воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости; 4) соедините точку M с серединой AC; 5) воспользуйтесь формулой площади треугольника. **4.** 1), 2), 3), 4) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости; 5), 6) воспользуйтесь свойствами средней линии треугольника; 7) воспользуйтесь тем, что треугольник AB_1D_1 равносторонний. **5.** 1) Соедините точку S с центром квадрата $ABCD$; 2) воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости; 3) проведите высоту из вершины M треугольника SMP, где P — середина ребра AB; 4) проведите из точки K перпендикуляр к SD. **6.** Воспользуйтесь теоремой Пифагора. **7.** Учтите взаимное расположение данных точки и прямой. **8.** Воспользуйтесь тем, что диагональное сечение куба является прямоугольником. **9.** Проведите через прямые a и b плоскость и рассмотрите её пересечение с плоскостью α. **10.** Примените метод «от противного». **11.** Выясните, чем является отрезок KE для треугольников KAB и KCD. **12.** Для прямых, лежащих в одной плоскости, всё понятно. Если предположить, что прямые, имеющие два общих перпендикуляра, скрещивающиеся, то эти перпендикуляры перпендикулярны и параллельным плоскостям, в которых лежат прямые, а потому они параллельны между собой. **13.** Используйте то, что указанные прямые параллельны между собой. **14.** 1) Рассмотрите сечение куба плоскостью, проходящей через середины параллельных рёбер; 2) рассмотрите сечение плоскостью, проходящей через диагонали противоположных граней. **15.** 2) Сечениями являются треугольники SAD и ACL, где D, L — середины отрезков BC и SB, а их пересечением является отрезок, соединяющий точку A с точкой пересечения отрезков SD и BK. **16.** Проведите через все пары скрещивающихся прямых параллельные плоскости.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) A_1D_1, A_1B_1, AD, AB. **2.** 1) SO, AC; 2) перпендикулярны; 4) SON, где N — середина AB; 5) $3\sqrt{2}$ см^2. **3.** 1) $CS \perp CB, CS \perp CM, CS \perp CA, CM \perp AB$; 2) перпендикулярны; 5) $\frac{\sqrt{6}}{24}a^2$. **4.** 1) A_1C_1; 2) AA_1C_1; 3) BN, где N — середина CD; 6) ADC_1; 7) A_1C. **5.** 1) SO, где O — центр квадрата $ABCD$; 2) SKO; 3) высота из вершины M треугольника SMP, где P — середина ребра AB. **6.** ≈ 4,9 м. **15.** 2) Сечениями являются треугольники SAD и ACL, где D, L — середины отрезков BC и SB, а их пересечением является отрезок, соединяющий точку A с точкой пересечения отрезков SD и BK.

2. Связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей

Повторяем теорию

О существовании связей между параллельностью и перпендикулярностью в пространстве свидетельствует наш опыт. Действительно, столбы, установленные вертикально, параллельны между собой; параллельны вертикально направленные ледовые сосульки, вертикальные колонны сооружений и т. п.

Теорема 1 (*о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости*).

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Приведенная теорема является признаком перпендикулярности прямой и плоскости, то есть с ее помощью устанавливают перпендикулярность прямой и плоскости. Её широко используют не только в геометрии, но и в практической деятельности.

Теорема 2 (*о параллельности прямых, перпендикулярных плоскости*).

Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они — параллельны.

Приведенная теорема также является признаком. С её помощью устанавливают параллельность прямых в пространственных конструкциях. Ведь вертикальность или перпендикулярность плоскости иногда легче проверить (особенно на громоздких объектах), чем параллельность.

Теорема 3 (*о параллельных плоскостях, одна из которых перпендикулярна прямой*).

Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то и вторая плоскость перпендикулярна этой же прямой.

Теорема 4 (*о двух плоскостях, перпендикулярных одной прямой*).

Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

Теоремы 3 и 4 также является признаками. Это два взаимно обратных утверждения, отражающие связь между параллельностью плоскостей и их перпендикулярностью прямой.

Обобщением результата примера 1, приведенного ниже, является следующая теорема.

Теорема 5 (*о прямой, перпендикулярной данной плоскости*).

Через произвольную точку пространства проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и к тому же только одна.

Теорема 6 (*о плоскости, перпендикулярной данной прямой*).

Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и к тому же только одна.

Решаем

П р и м е р 1. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости.

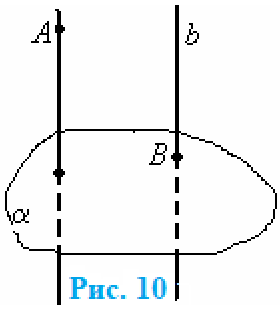


Рис. 10

Решение. Случай, когда данная точка A лежит в данной плоскости α, мы рассматривали в предыдущем пункте. Пусть теперь точка A лежит вне плоскости α. Через произвольную точку B плоскости α проведем прямую b, перпендикулярную плоскости α (рис. 10). Потом через точку A проведем прямую, параллельную прямой b (как это сделать?). Она и будет искомой, поскольку ее перпендикулярность плоскости α обусловлена теоремой 1. ■

П р и м е р 2. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен отрезок AM, перпендикулярный плоскости ABC. Построить:

1) плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно прямой AC;

2) прямую, проходящую через середину отрезка MC перпендикулярно плоскости ABC.

Решение. Изобразим условие примера на рис. 11, а.

1) Рассмотрим плоскость MAC. По условию, прямая MA перпендикулярна прямой AC. Для построения искомой плоскости достаточно провести через точку A еще одну прямую, перпендикулярную прямой AC. Поскольку прямая BD перпендикулярна прямой AC, то искомая прямая должна быть параллельной прямой BD.

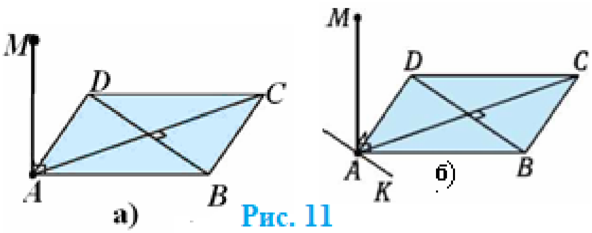


Рис. 11

Построение. Через точку A проведём прямую AK, параллельную прямой BD (рис. 11, б). Она перпендикулярна прямой AC. Плоскость MAK перпендикулярна прямой AC по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

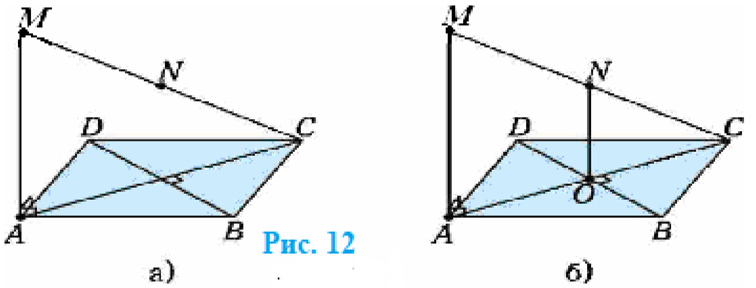


Рис. 12

2) Пусть N — середина отрезка MC (рис. 12, а). Искомая прямая параллельна прямой MA, по теореме о

параллельности прямых, перпендикулярных плоскости (теорема 2). Это — необходимое условие. Оно и достаточно, по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярная плоскости (теорема 1).

Построение. Через точку N проведём прямую, параллельную прямой MA (рис. 12, б). Точка ее пересечения O с плоскостью квадрата является центром квадрата, поскольку прямая NO лежит в плоскости MAC и проходит через середину отрезка AC (по теореме Фалеса). ■

Пример 3. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная плоскости квадрата, и на ней взята точка S. Построить:

1) прямую, проходящую через центр O квадрата перпендикулярно его плоскости;

2) плоскость, проходящую через середину P отрезка AS перпендикулярно ему;

3) плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно прямой BD;

4) прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости SBD.

Решение. 1) По условию, прямая AS перпендикулярна плоскости квадрата. Любая другая прямая, перпендикулярная этой плоскости, будет параллельна прямой AS по теореме 2, то есть параллельность прямой AS является необходимым условием перпендикулярности искомой прямой плоскости. Оно является и достаточным условием по теореме 1.

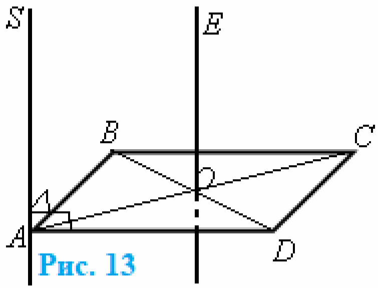


Рис. 13

Построение. Через точку O проводим прямую OE параллельно прямой AS (рис. 13). Прямая OE перпендикулярна плоскости квадрата по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.

2) По условию, прямая AS перпендикулярна плоскости $ABCD$. Любая иная плоскость, перпендикулярная прямой AS, будет параллельной плоскости $ABCD$, по теореме 4. Параллельность искомой плоскости $ABCD$ является по теореме 3 и достаточным условием.

Построение. Проведем через точку *P* плоскость, параллельную плоскости *ABCD*. Для этого через точку *P* проведем прямые *PK* и *PL*, параллельные прямым *AD* и *AB* соответственно (рис. 14). Плоскость *PKL* параллельна плоскости *ABCD*, по признаку параллельности плоскостей, а потому является искомой.

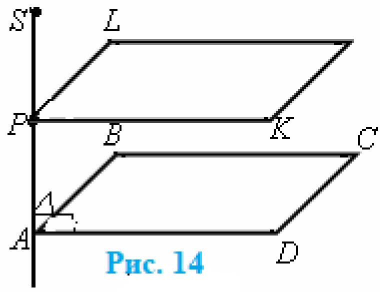


Рис. 14

3) Диагонали квадрата перпендикулярны, то есть $BO \perp AO$ (см. рис. 15). Поэтому прямая *AO* лежит в искомой плоскости. Если через точку *O* провести еще одну прямую *OE,* перпендикулярную *BO*, то прямая *BO* будет перпендикулярной плоскости *AOE*, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Эта плоскость содержит точку *A*.

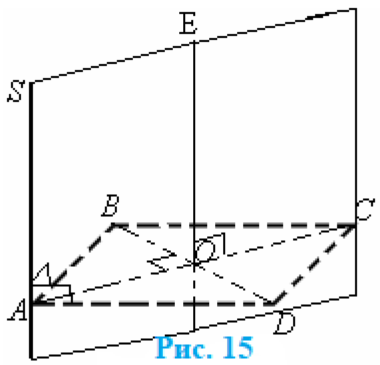


Рис. 15

Построение. Проведем через точку *O* прямую *OE,* параллельную прямой *AS.* Она будет перпендикулярной плоскости *ABCD* (рис. 15). Прямая *OE* перпендикулярна прямой *BO*, по определению перпендикулярности прямой и плоскости. Плоскость *AOE* является искомой.

4) Рассмотрим треугольники *ABD* и *SBD* (рис. 16, а). Они равнобедренные, так как *AD* = *AB*, по условию, а равенство *SB* = *SD* вытекает из равенства прямоугольных треугольников *ASD* и *ASB.* Их медианы *SO* и *AO* являются высотами, а потому прямая *BD* перпендикулярна плоскости *AOS,* по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 1). В прямоугольном треугольнике *AOS* из вершины прямого угла *A* проведем высоту *AE* (рис. 16, б). Прямая *AE* является искомой. Действительно, проведем в плоскости *SBD* через точку *E* прямую *EF* параллельно прямой *BD*. Эта прямая будет перпендикулярной плоскости *AOS*, по теореме 1. А это означает, что она перпендикулярна прямой *AE*. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая *AE* перпен

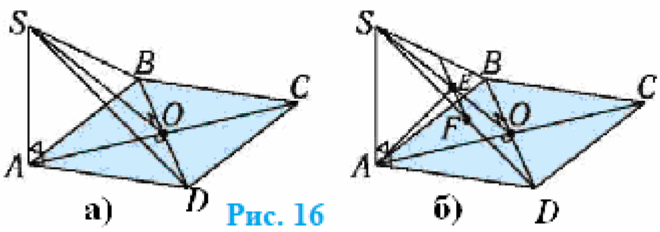


Рис. 16

дикулярна плоскости SBD. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что две прямые, перпендикулярные некоторой плоскости, лежат в одной плоскости?

2. Могут ли два боковых ребра пирамиды быть перпендикулярными плоскости основания пирамиды?

3. Можно ли провести прямую перпендикулярно двум пересекающимся плоскостям?

4. Существует ли взаимосвязь между расположением ножек стола относительно его поверхности и пола, на котором он стоит?

5. Существует ли сечение куба плоскостью, перпендикулярной ровно двум его ребрам?

6. Можно ли провести плоскость, перпендикулярную одновременно двум скрещивающимся прямым?

7. Почему ледовые сосульки, свисающие с крыши весной, можно считать параллельными между собой (пренебрегая их толщиной)?

8. Можно ли через данную точку пространства провести три взаимно перпендикулярные прямые? А четыре?

9. Сколько различных плоскостей определяют четыре прямые, перпендикулярные одной плоскости?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Да. **2.** Нет. **3.** Не обязательно. **4.** Да. **5.** Нет. **6.** Нет. **7.** Так как они перпендикулярны поверхности земли. **8.** Три можно, четыре — нельзя. **10.** Или 6, или 4, или 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из вершины прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная плоскости этого треугольника, и на ней взята точка S. Постройте:

1°) плоскость, проходящую через точку S перпендикулярно прямой AB;

2°) прямую, проходящую через середину отрезка AS перпендикулярно плос кости ABC;

3°) плоскость, проходящую через точку A параллельно плоскости BCS;

4) прямую, проходящую через точку C перпендикулярно плоскости ABS, если $AC = \frac{2}{\sqrt{3}} CS.$

2. Из середины K гипотенузы BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная плоскости этого треугольника, и на ней взята точка M. Постройте:

1°) плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно прямой AC;

2°) прямую, проходящую через середину отрезка AM перпендикулярно плоскости ABC;

3°) плоскость, проходящую через точку A параллельно плоскости BCM;

4) плоскость, проходящую через точку K перпендикулярно прямой AM, если $MK = CK$.

3. Из центра O правильного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника, и на ней взята точка S. Постройте:

1°) плоскость, проходящую через точку O перпендикулярно прямой BC;

2°) прямую, проходящую через середину отрезка AS перпендикулярно плоскости ABC;

3) плоскость, проходящую через середину отрезка AS перпендикулярно прямой OS;

4*) прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости BCS.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте:

1°) прямую, проходящую через центр грани $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно противоположной грани;

2°) плоскость, проходящую через вершину A перпендикулярно диагонали BD;

3) прямую, проходящую через центр грани AA_1B_1B перпендикулярно плоскости BDD_1.

4*) плоскость, проходящую через точку D перпендикулярно прямой BD_1.

5. В тетраэдре $SABC$ все грани — правильные треугольники, точка O — центр основания ABC, D — середина ребра BC, точка N принадлежит боковому ребру SA.

1°) Определите взаимное расположение прямой SO и плоскости ABC.

2°) Определите взаимное расположение прямой BC и плоскости ASD.

3) Проведите через точку N прямую, перпендикулярную основанию.

4*) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку N перпендикулярно прямой OS.

6°. Два электрических провода необходимо протянуть от столба высотой 7 м к зданию высотой 4 м. Сколько нужно иметь провода, если расстояние от здания до столба равно 10 м и на провисание провода нужно добавить 3% от расчетной длины?

7. Сторожевая башня для охраны участка прямоугольной формы установлена в одной из вершин прямоугольника. Расстояния от наблюдателя, который стоит на башне, до остальных вершин прямоугольника равны a, b, c, причем $a > b > c$. Чему равняется высота башни?

8. Три параллельные прямые a, b, c не лежат в одной плоскости. Через точку M, лежащую на прямой a, проведены перпендикуляры к прямым b и c, пересекающие их, соответственно, в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямым b и c.

9. Через точку O, находящейся на высоте CD треугольника ABC, проведен перпендикуляр OM к его плоскости. Докажите, что плоскость, проходящая через прямые CD и OM, перпендикулярна прямой AB.

10*. Даны плоскость α и прямая a, пересекающая плоскость в точке M и не перпендикулярная α. Докажите, что в плоскости α через точку M проходит прямая, перпендикулярная прямой a, и к тому же лишь одна.

10. На прямой, перпендикулярной плоскости α, взяты две точки A и B, не лежащие в плоскости α, а в плоскости α взяты две точки X и Y. Известно, что $XA > XB$. Сравните отрезки YA и $YБ$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Из точки S проведите перпендикуляр к прямой AB; 2) проведите прямую через середины отрезков AS и AC; 3) проведите через точку A прямые, параллельные CS и CB; 4) из точки C проведите перпендикуляр к прямой SO. **2.** 1) Соедините точку M с серединой AC; 2) проведите прямую через середину AM параллельно MK; 3) проведите через точку A прямые, параллельные BC и KM; 4) докажите, что треугольники BMC и ABC равны. **3.** 1) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости; 2) проведите прямую через середину AS параллельно SO; 3) воспользуйтесь тем, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC. 4) докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости ASO. **4.** 1) Соедините центры указанных граней; 2) проведите диагональ AC; 3) воспользуйтесь тем, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BDD_1; 4) проведите через точку D прямую, параллельную прямой AC. **5.** 1), 2) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости; 3) проведите через точку N прямую, параллельную SO; 4) проведите через точку N прямые, параллельные AC и AB. **6.** Воспользуйтесь теоремой Пифагора. **7.** Воспользуйтесь теоремой Пифагора. **8.** Достаточно доказать, что прямая a перпендикулярна плоскости MPQ. **9.** Через точку D проведите прямую, параллельную OM. **10.** Это прямая, перпендикулярная ортогональной проекции прямой a на плоскость α. **11.** Сравните предварительно AO и BO, где O — точка пересечения прямой AB с плоскостью α.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) SOC, где O — середина AB; 2) KL, где K, L — середины отрезков AS и AC. **2.** 1) MKO, где O — середина AC; 2) прямая, проходящая через середину AM параллельно MK; 4) BCL, где L — середина AM. **3.** 1) AOS; 2) прямая, параллельная SO. **4.** 1) Проходит через центры указанных граней; 2) AA_1C. **5.** 1) $SO \perp ABC$; 2) $BC \perp ASD$. **6.** $\approx 21{,}5$ м. **7.** $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$. **11.** $YA > YB$.

3. Перпендикулярность плоскостей

Повторяем теорию

Из всего разнообразия взаимных расположений двух плоскостей особого внимания и изучения заслуживают то, при котором плоскости перпендикулярны друг другу (например, смежные стены комнаты, забор и участок земли, двери и пол и т. п.).

Две плоскости называются перпендикулярными, если каждая из них образована прямыми, перпендикулярными второй плоскости и проходящими через точки пересечения этих плоскостей.

Приведенное определение трудно использовать при фактической проверке перпендикулярности плоскостей. Но если внимательно проанализировать рассуждения, которые привели к этому определению, то увидим, что перпендикулярность плоскостей α и β обеспечило наличие в плоскости β прямой b, перпендикулярной плоскости α.

Теорема 1 (*признак перпендикулярности плоскостей*).

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную второй плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Приведенный признак дает возможность устанавливать перпендикулярность плоскостей или же обеспечивать ее.

Теорема 2 (*о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей*).

Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, принадлежащая одной плоскости и перпендикулярная линии пересечения этих плоскостей, перпендикулярна второй плоскости.

Приведенная теорема часто применяется для построения прямой, перпендикулярной некоторой плоскости. Алгоритм построения может быть таким:

1) через заданную точку проводим плоскость, перпендикулярную данной плоскости;

2) находим линию пересечения данной и построенной плоскостей;

3) строим прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную линии пересечения плоскостей.

С помощью теоремы 2 может быть обоснован еще один признак перпендикулярности плоскостей, важный с точки зрения последующего изучения взаимного расположения двух плоскостей.

Теорема 3 (*о плоскости, перпендикулярной линии пересечения перпендикулярных плоскостей*).

Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым.

Установлено еще одно свойство перпендикулярных плоскостей. Это свойство является характеристическим, то есть если оно справедливо для некоторых двух плоскостей, то плоскости перпендикулярны между собой. Имеем еще один признак перпендикулярности плоскостей.

Теорема 4 (*второй признак перпендикулярности плоскостей*).

Если прямые пересечения двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения, перпендикулярны, то данные плоскости тоже перпендикулярны.

Следующие теоремы устанавливают связь перпендикулярности двух плоскостей третьей плоскости с их взаимным расположением.

Теорема 5 (*о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости*).

Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то линия их пересечения перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 6 (*о параллельных плоскостях, перпендикулярных третьей плоскости*).

Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна третьей, то и вторая плоскость перпендикулярна ей.

Решаем

Пример 1. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен перпендикулярный его плоскости отрезок AK, $AB = AK = a$.

1) Определить взаимное расположение плоскостей AKC и ABD, AKD и ABK.

2) Построить плоскость, проходящую через прямую BD перпендикулярно плоскости ABC.

3) Провести через середину F отрезка KC плоскость, перпендикулярную плоскости KAC.

4) Найти площадь треугольника BDF.

Решение. Построим рисунок, соответствующий условию примера (рис. 17).

1) Плоскости AKC и ABD перпендикулярны, по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1): $AK \perp ABD$, по условию. Плоскости AKD и ABK также перпендикулярны, по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1). Действительно, прямая AB, через которую проходит плоскость ABK, перпендикулярна плоскости AKD, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости: $AB \perp AD$, как смежные стороны квадрата; $AB \perp AK$, так как $AK \perp ABD$.

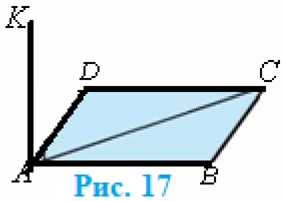


Рис. 17

2) По признаку перпендикулярности плоскостей, для искомого построения достаточно через некоторую точку прямой BD провести прямую, перпендикулярную плоскости ABC. А для этого достаточно через эту точку провести прямую, параллельную прямой AK. Действительно, по условию, прямая AK перпендикулярна плоскости ABC и потому, согласно теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (теорема 1 п. 2), построенная прямая будет перпендикулярна плоскости ABC.

Построение. Через точку B проводим прямую BE, параллельную прямой AK (рис. 18). Плоскость BDE — искомая.

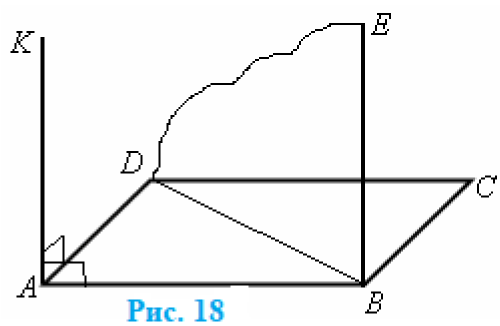


Рис. 18

3) Пусть F — середина отрезка KC. Проведем через точку F прямую, перпендикулярную плоскости ABC. Этой прямой будет прямая FO, где O — центр квадрата $ABCD$ (рис. 19). Действительно, $FO \parallel AK$, как средняя линия треугольника AKC. Поскольку прямая AK перпендикулярна плоскости $ABC,$ то и прямая FO будет ей перпендикулярна, по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости. Поэтому $FO \perp DB$. А поскольку $AC \perp DB,$ то $DB \perp AOF$ (или KAC). Плоскость BDF проходит через перпендикулярную прямую к плоскости $KAC,$ то есть она является искомой.

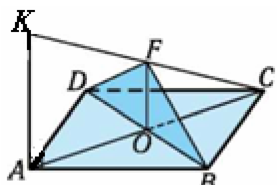


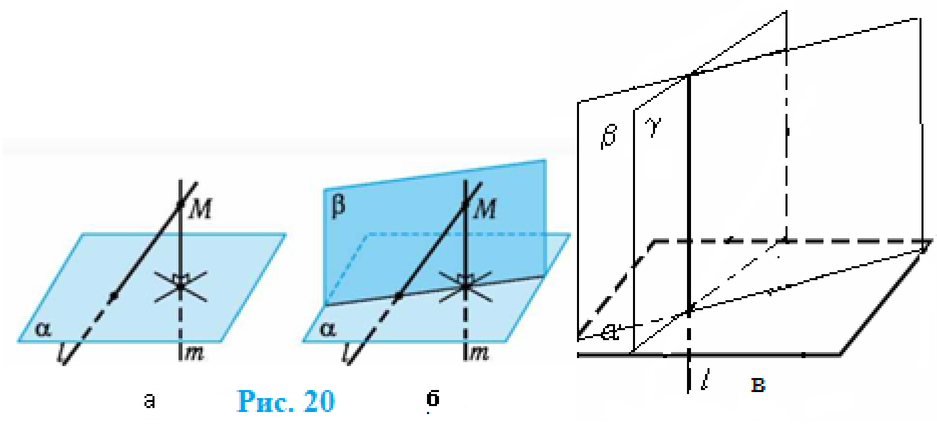
Рис. 19

5) В треугольнике BDF отрезок FO — высота, проведенная к стороне BD (см. рис. 19). Имеем: $BD = \sqrt{2}a$, как диагональ квадрата; $FO = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}a$, по свойству средней линии треугольника. Таким образом, $S = \frac{1}{2}BD \cdot FO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sqrt{2}}a^2.$

Ответ: 4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}a^2.$

Пример 2. Доказать, что через произвольную прямую, не перпендикулярную плоскости, можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

Решение. Пусть даны плоскость α и прямая $l.$ Возьмём на прямой l произвольную точку M и проведем через нее прямую $m,$ перпендикулярную плоскости α (рис. 20, а). Поскольку, по условию, l не перпендикулярна α, то прямые l и m пересекаются. Через эти прямые



а Рис. 20 б в

можно провести плоскость β (рис. 20, б), которая, согласно признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1), будет перпендикулярна плоскости α.

Однозначность построения вытекает из теоремы о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости (теорема 5). Действительно, если бы через прямую l проходили две различные плоскости β и γ, перпендикулярные плоскости α (рис. 20 в), то прямая l — линия пересечения этих плоскостей — была бы перпендикулярна плоскости α. А это противоречит условию. Поэтому через прямую l можно провести лишь одну плоскость, перпендикулярную данной. ■

Пример 3. Через вершину A правильной пирамиды $SABC$ с основанием ABC провести прямую, перпендикулярную плоскости боковой грани SBC.

Решение. Для решения данной задачи воспользуемся теоремой о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей (теорема 2). Пусть K — середина ребра BC (рис. 21). Плоскости AKS и BCS перпендикулярны, по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1). Действительно, $BC \perp SK$ и $BC \perp AK$, как медианы, проведенные к основаниям в равнобедренных треугольниках. Поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая BC перпендикулярна плоскости AKS. Плоскость BCS проходит через прямую, перпендикулярную плоскости AKS.

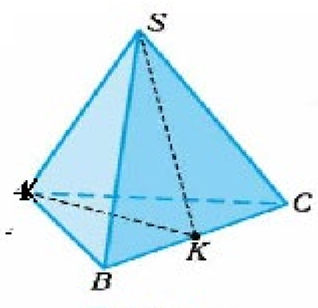


Рис. 21

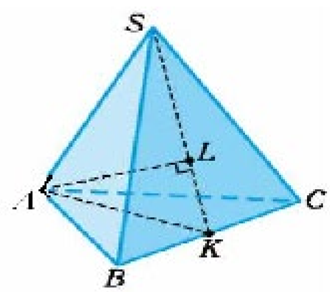


Рис. 22

Построение. Проведем в плоскости AKS из точки A прямую AL, перпендикулярную прямой KS — линии пересечения плоскостей AKS и BCS (рис. 22). По теореме о перпендикуляре к линии пересечения перпендикулярных плоскостей (теорема 2), прямая AL перпендикулярна плоскости BCS. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Две плоскости перпендикулярны. Можно ли через произвольную точку одной из них провести прямую в этой плоскости, перпендикулярную второй плоскости?

2. В плоскости α нельзя провести прямую, перпендикулярную плоскости β. Могут ли эти плоскости быть перпендикулярными?

3. Через некоторую точку плоскости α проходит прямая, лежащая в этой плоскости и перпендикулярная плоскости β. Верно ли, что плоскости α и β перпендикулярны?

4. Секция забора прикреплена к вертикальному столбу. Можно ли утверждать, что плоскость забора вертикальна?

5. Как к рейке, параллельной поверхности земли, прикрепить вертикально щит?

6. Почему поверхность дверей, независимо от того, закрыты они или открыты, располагается вертикально к полу?

7. Почему отвес плотно прилегает к вертикальной стене, а к наклонной — не обязательно?

8. Можно ли к наклонному столбу прикрепить щит так, чтобы он был перпендикулярным поверхности земли?

9. Как на практике установить, перпендикулярна ли плоскость стены плоскости пола?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Можно. **2.** Нет. **3.** Верно. **4.** Да. **5.** Достаточно к столбу прикрепить вертикальную рейку, а затем щит прикрепить и к рейке, и к столбу. **6.** Так как на полу можно всегда указать прямую, перпендикулярную плоскости двери. **7.** Поскольку отвес, перпендикулярный поверхности земли, лежит в плоскости, перпендикулярной поверхности земли. **8.** Можно. **9.** Можно с помощью отвеса.

Задачи для самостоятельного решения

1. Отрезок OS проведен из центра O квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей ACS и ABC.

2°) Определите взаимное расположение плоскостей ACS и BDS .

3) Постройте плоскость, проходящую через прямую OS перпендикулярно плоскости ABS.

4) Постройте плоскость, перпендикулярную плоскости ABC и проходящую через середины сторон AD и CD.

2. Из точки пересечения O диагоналей ромба $ABCD$ проведен перпендикулярный плоскости ромба отрезок OS; $AB = DB = SA = a$.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей SDB и ABC, SDB и ACS.

2°) Постройте плоскость, проходящую через прямую BC перпендикулярно плоскости ABD.

3) Проведите через середину F отрезка CS плоскость, перпендикулярную плоскости ABC.

4) Найдите площадь треугольника BDF.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Определите взаимное расположение плоскостей AB_1C_1 и CDD_1.

2°) Определите взаимное расположение плоскостей AB_1C_1 и CD_1A_1.

3°) Постройте плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости BB_1D_1.

4) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер A_1D_1 и B_1 C_1 перпендикулярно плоскости ABC.

5) Определите взаимное расположение плоскости AA_1B и плоскости, проходящей через середины ребер A_1B_1, C_1D_1, CD.

6) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через ребро BB_1 и середину ребра A_1D_1 ($BB_1 = a$).

7) Постройте точку, симметричную точке A относительно плоскости A_1B_1C.

4. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 2 см точка M — середина DB, а точка N — середина AC.

1°) Докажите, что прямая DB перпендикулярна плоскости AMC.

2°) Докажите, что плоскость BDC перпендикулярна плоскости AMC.

3) Через точку O пересечения медиан треугольника ADC проведите прямую, перпендикулярную плоскости AMC.

4) Найдите длину отрезка этой прямой внутри тетраэдра.

5) В каком отношении делит этот отрезок плоскость AMC?

5. Два равносторонних треугольника ABC и ADC лежат в перпендикулярных плоскостях.

1°) Найдите длину отрезка BD, если $AC = 1$ см.

2) Докажите, что плоскость BKD (K лежит на прямой AC) перпендикулярна плоскости каждого из треугольников тогда и только тогда, когда K является серединой стороны AC.

6. Прямоугольник $ABCD$, стороны которого 3 см и 4 см, перегнули по диагонали AC так, что треугольники ABC и ADC расположились в перпендикулярных плоскостях. Определите расстояние между точками B и D после того, как перегнули прямоугольник $ABCD$.

7. Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную каждой из двух данных плоскостей.

8°. Докажите, что плоскости смежных граней куба перпендикулярны.

9. Плоскости α и β перпендикулярны между собой. Из точки A плоскости α проведена перпендикулярная к плоскости β прямая AB. Докажите, что прямая AB лежит в плоскости α.

10. Докажите, что если плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны между собой.

11. Через точки A и B, лежащие на линии пересечения p перпендикулярных между собой плоскостей α и β, проведены перпендикулярные к p прямые AA_1 в α, BB_1 в β. Точка X лежит на прямой AA_1, а точка Y — на BB_1. Докажите, что прямая BB_1 перпендикулярна прямой BX, а прямая AA_1 перпендикулярна прямой AY.

12*. Через середину каждой стороны треугольника проведена плоскость, перпендикулярная этой стороне. Докажите, что все три проведенные плоскости пересекаются по одной прямой, перпендикулярной плоскости треугольника.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1), 2) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности двух плоскостей; 3) соедините середину отрезка AB с концами отрезка OS; 4) соедините середины отрезков AD и DC. **2.** 1) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности двух плоскостей; 2) проведите через середину BC прямую, параллельную OS; 3) проведите из точки F перпендикуляр к прямой AB; 4) докажите, что отрезок FO — высота треугольника BDF. **3.** 1) , 2) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности двух плоскостей; 3) проведите диагональ AC; 4) проведите из указанных точек перпендикуляры к плоскости $ABCD$; 5) воспользуйтесь признаком перпендикулярности двух плоскостей; 6) примените формулу площади прямоугольника и теорему Пифагора; 7) воспользуйтесь определением точки, симметричной данной относительно некоторой плоскости. **4.** 1) Воспользуйтесь тем, что медиана в правильном треугольнике является высотой; 2) воспользуйтесь заданием 1); 3) учтите, что $BD \perp AMC$; 4) проведите через точку O прямую, параллельную BD; 5) воспользуйтесь подобием треугольников. **5.** 1) Воспользуйтесь тем, что медиана в правильном треугольнике является высотой; 2) используйте то, что указанная плоскость единственна. **6.** Проведите из точек B и D перпендикуляры к AC. **7.** Рассмотрите случаи, когда плоскости параллельны и когда пересекаются. **8.** Укажите ребро одной грани, перпендикулярное другой грани. **9.** Воспользуйтесь определением перпендикулярности плоскостей и однозначностью перпендикуляра из точки к плоскости. **10.** Воспользуйтесь тем, что, плоскость, перпендикулярную другой плоскости, можно считать “составленной” из перпендикулярных прямых к другой плоскости. **11.** Докажите, что, например, $BB_1 \perp \alpha$, и тогда $BB_1 \perp BX$. **12.** Рассмотрите сначала две указанные плоскости и установите свойства их линии пересечения.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) Перпендикулярны; 2) перпендикулярны; 3) плоскость проходит через середину отрезка AB; 4) плоскость проходит через перпендикуляр к ABC, проведенный через середину AD. **2.** 1) $SDB \perp ABC, SDB \perp ABK$; 4) $\frac{1}{4}a^2$. **3.** 1) Перпендикулярны; 2) перпендикулярны; 5) перпендикулярны; 6) $\sqrt{\frac{3}{2}}a^2$. **4.** 4) $\frac{4}{3}$ см; 5) пополам. **5.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **6.** $\frac{1}{5}\sqrt{337}$ см.

4. Ортогональное проектирование

Повторяем теорию

Введение понятий перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей дает возможность вернуться к вопросам об изображении пространственных геометрических фигур. Качество изображений в стереометрии, то есть возможность по ним получить наиболее полное представление о фигуре, зависит от выбора направления параллельного проектирования. Среди всех возможных направлений проектирования выделяется направление, перпендикулярное плоскости проекций. Во-первых, такое направление лишь одно. Во-вторых, оно естественнее всего для восприятия человеком.

Таким образом, одним из важных в геометрии и ее приложениях частным случаем параллельного проектирования является ***ортогональное проектирование,*** то есть проектирование вдоль прямой, перпендикулярной плоскости проекций.

Параллельная проекция точки на плоскость называется ее ортогональной проекцией, если прямая, определяющая направление проектирования, перпендикулярна плоскости проекций.

Понятие перпендикулярности прямой и плоскости порождает один из важнейших видов симметрии в пространстве, а именно: симметрию относительно плоскости.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок AA_1 перпендикулярен плоскости α и точкой O пересечения его с α делится пополам **(рис. 23).** ***Точка плоскости α считается симметричной сама себе.***

Из этого определения вытекает, что $AO = OA_1$, то есть точки A и A_1 центрально-симметричны относительно точки O.

Фигуры пространства F и F_1 называются симметричными относительно плоскости α, если для каждой точки одной фигуры имеется симметричная ей точка во второй фигуре **(рис. 24).**

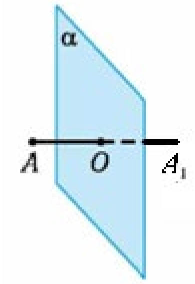


Рис. 23

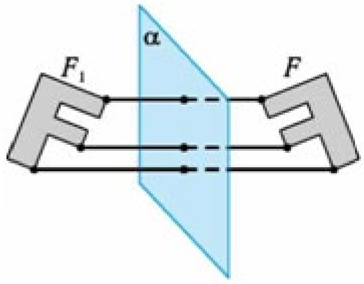


Рис 24

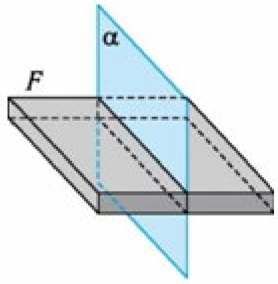


Рис. 25

Если же в этом определении $F = F_1$ (идет речь об одной и той же фигуре), то F называется ***симметричной относительно плоскости α*** (рис. 25).

Если при симметрии относительно плоскости фигура отображается на себя, то эту плоскость называют ***плоскостью симметрии данной фигуры***.

Примерами симметричных относительно плоскостей фигур насыщены как реальное физическое пространство, так и геометрическое. Природа создала симметричными фигуры людей и большинства живых существ, симметрична книга, которую вы держите в руках, столовая посуда, утюг и много-много др.

Симметричность фигур относительно плоскости связана с преобразованием пространства, которое называется ***симметрией относительно плоскости.***

Преобразование точек пространства, при котором произвольная точка пространства переходит в симметричную относительно данной плоскости, называют симметрией относительно этой плоскости.

Языком преобразований можно сформулировать определение симмет ричной фигуры относительно плоскости.

Фигура называется симметричной относительно плоскости, если при преобразовании симметрии относительно этой плоскости все ее точки переходят в точки этой самой фигуры.

Решаем

Пример 1. Правильная треугольная пирамида $SABC$ с боковым ребром 5 см и стороной основания $3\sqrt{3}$ см ортогонально проектируется на плоскость основания ABC.

1) В какую точку треугольника ABC проектируется вершина S?

2) Определить длину отрезка, соединяющего точку S с ее проекцией на плоскость основания.

Решение. 1) Пусть при ортогональном проектировании точка S проектируется в точку O, $SO \perp ABC$ (см. рис. 26). Поскольку $AO \perp SO$, то треугольник SAO — прямоугольный с гипотенузой SA. По теореме Пифагора, $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2}$. Аналогично из прямоугольных треугольников SCO и SBO имеем: $CO = \sqrt{SC^2 - SO^2}$, $BO = \sqrt{SB^2 - SO^2}$. Но в правильной пирамиде $AS = CS = BS$, поэтому $AO = CO = BO$, то есть O — центр окружности, описанной около основания ABC.

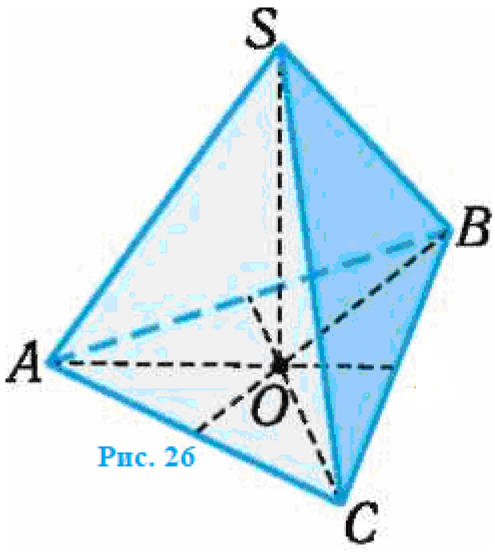


Рис. 26

2) Как известно, радиус окружности R, описанной около правильного треугольника со стороной a, вычисляется по формуле: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Поэтому

$$AO = \frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 3 \text{ (см), а } SO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см).}$$

Ответ: 2) 4 см.

Пример 2. Доказать, что правильный тетраэдр $SABC$ симметричен относительно плоскости SAD, где D — середина ребра BC.

Решение. Плоскости SAD и ABC перпендикулярны по признаку перпендикулярности плоскостей (теорема 1 п. 3): $BC \subset ABC$, $BC \perp SAD$ ($BC \perp SD$, $BC \perp AD$) (рис. 27). Возьмем произвольную точку M тетраэдра и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости ABC. Сечением правильного тетраэдра этой плоскостью является правильный треугольник $A_1B_1C_1$. Плоскость этого треугольника перпендикулярна плоскости SAD по теореме о параллельных плоскостях, перпендикулярных третьей плоскости (теорема 6 п. 3), причем эти плоскости пересекаются по прямой A_1D_1, где D_1 — середина B_1C_1. Но, как известно, медиана правильного треугольника является его осью симметрии. Поэтому симметричная M относительно плоскости SAD точка M_1 будет симметрична ей и относительно прямой A_1D_1, то есть она принадлежит треугольнику $A_1B_1C_1$, а вместе с этим и тетраэдру. ■

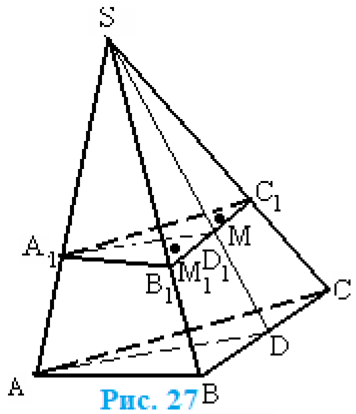


Рис. 27

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли ортогональной проекцией квадрата быть прямоугольник, не являющийся квадратом? А наоборот?

2. Верно ли, что ортогональной проекцией любой прямой является прямая?

3. Может ли отрезок быть ортогональной проекцией треугольника?

4. Верно ли, что длина ортогональной проекции отрезка меньше или равна длине самого отрезка?

5. Обязательно ли ортогональной проекцией квадрата является прямоугольник?

6. Какой угол может быть ортогональной проекцией прямого угла; острого угла; тупого угла?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Может; может. **2.** Верно, если прямая не перпендикулярна плоскости проек

2. ций. **3.** Может. **4.** Верно. **5.** Нет. **6.** Любой.

Задания для самостоятельной работы

1°. Концы отрезка AB лежат по одну сторону от плоскости α. Расстояния концов отрезка AB до их ортогональных проекций A_1, B_1 на плоскость α равны 4 см и 8 см. Найдите:

1) длину отрезка AB, если A_1B_1 = 5 см;

2) расстояние между серединой отрезка AB и серединой симметричного к нему отрезка относительно плоскости α.

2°. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от плоскости α. Расстояния концов отрезка AB до их ортогональных проекций A_1, B_1 на плоскость α равны 4 см и 8 см. Найдите:

1) длину отрезка AB, если A_1B_1 = 5 см;

2) расстояние между серединой отрезка AB и серединой симметричного к нему отрезка относительно плоскости α.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ со стороной основания a расстояние между ее вершиной S и симметричной ей точкой S_1 относительно плоскости $ABCD$ равно b. Найдите:

1) длину бокового ребра пирамиды;

2) площадь сечения пирамиды, проходящего через противоположные боковые ребра.

4. Только одна из сторон угла лежит в плоскости проекций. Докажите, что ортогональной проекцией прямого угла является прямой угол, острого угла — угол, меньший проектируемого, тупого угла — угол, больший проектируемого, если плоскость, в которой лежит угол, неперпендикулярна плоскости проекций.

5. Плоскость, параллельная основанию правильной четырехугольной пирамиды, делит боковое ребро пополам. Изобразите пирамиду, симметричную данной относительно этой плоскости. Изобразите также фигуру, полученную объединением данной и полученной пирамид?

6. Три взаимно перпендикулярные прямые OX, OY, OZ определяют три плоскости α, β, γ. Точки M и N лежат в плоскостях β и γ. Постройте ортогональные проекции прямой MN на плоскости α, β, γ.

7. Балка закреплена концами на стенке и на потолке, причем расстояние от концов балки до линии пересечения потолка и стены равны, соответственно, 30 см и 40 см. Найдите длину балки, если длина ее проекции на линию пересечения потолка и стены равна 120 см.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Проведите через точку A прямую, параллельную проекции данного отрезка; 2) Найдите расстояние между серединами отрезков AB и A_1B_1. **2.** 1) Воспользуйтесь подобием треугольников; 2) Обратите внимание на то, что фигура, полученная последовательным соединением концов отрезка AB и симметричного ему отрезка, является равнобедренной трапецией с известной длиной диагонали. Задача сводится к нахождению расстояния между серединами её диагонали. **3.** 1) Воспользуйтесь теоремой Пифагора; 2) примените формулу площади треугольника. **4.** Попробуйте реализовать конструкцию на прямоугольном параллелепипеде. **5.** Воспользуйтесь определением фигуры, симметричной данной относительно плоскости. **6.** Проведите из точек M и N перпендикуляры на указанные плоскости. Учтите, что они параллельны данным прямым. **7.** Примените теорему о трёх перпендикулярах.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $\sqrt{41}$ см; 2) 12 см. **2.** 1) 13 см; 2) 4 см. **3.** 1) $\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}ab$. **7.** 130 см.

5. Перпендикуляр и наклонная

Повторяем теорию

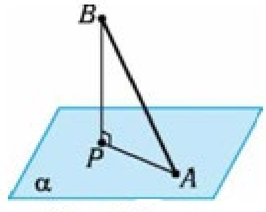


Рис. 28

Пусть один из концов A отрезка AB лежит в плоскости α, а другой — вне плоскости (см. рис. 28). Если отрезок и плоскость не перпендикулярны, то ортогональной проекцией отрезка AB на плоскость α является отрезок AP, где P — ортогональная проекция точки B на плоскость α. Имеем плоскость α и прямоугольный треугольник ABP, один из катетов которого лежит в плоскости, а второй — перпендикулярен ей.

Стороны прямоугольного треугольника ABP имеют свои названия: гипотенуза AB называется ***наклонной к плоскости,*** катет BP — ***перпендикуляром к плоскости,*** катет AP — ***проекцией наклонной на эту плоскость*** (речь идет, конечно, об ортогональной проекции). Точку P называют ***основанием перпендикуляра BP,*** а точку A — ***основанием наклонной BA.***

Теорема 1 (*свойство перпендикуляра к плоскости*).

Перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из этой самой точки к данной плоскости.

Теорема 2 (*свойство наклонных и их проекций*).

Наклонные к плоскости, проведенные из одной точки, равны тогда и только тогда, когда равны их проекции. Если даны две наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, то большая наклонная имеет большую проекцию, и наоборот, большей проекции соответствует большая наклонная.

Все эти свойства можно считать следствиями теоремы Пифагора. Их легко можно проиллюстрировать примерами из окружающей среды.

Теорема 3 (*о трех перпендикулярах*).

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее проекции.

Теорема о трех перпендикулярах является признаком перпендикулярности прямых в пространстве.

Применение теоремы о трех перпендикулярах как признака перпендикулярности прямых в пространстве сводится к проверке правильности одного из следующих утверждений.

1) Содержит ли одна из данных прямых проекцию наклонной к плоскости, в которой лежит другая прямая, и перпендикулярна ли наклонная ей?

2) Содержит ли одна из данных прямых наклонную к плоскости, в которой лежит другая прямая, и перпендикулярна ли проекция наклонной ей?

Решаем

Пример 1. Найти расстояние от вершины C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a до центра O грани $ABCD$.

Решение. Построим рисунок, который соответствует условию примера. Отрезок CC_1 — перпендикуляр к плоскости грани $ABCD$, C_1O — наклонная, CO — ее проекция (рис. 29). По условию, $CC_1 = a$, а CO равняется половине длины диагонали квадрата: $CO = \frac{1}{2}CA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Из прямоугольного треугольника COC_1 имеем: $C_1O = \sqrt{CO^2 + CC_1^2} = \sqrt{\frac{2}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a.$

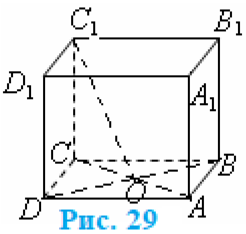


Рис. 29

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{2}}a.$

Пример 2. Найти расстояние от вершины башни до дороги, если известна высота башни h и расстояние a от дороги до подножия башни.

Решение. Условие примера иллюстрирует рисунок 30, на котором поверхность земли моделируется плоскостью α, дорога — прямой AB, башня — отрезком OO_1, перпендикулярным к плоскости α. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра OC, проведенного из точки O к прямой AB.

Проблема заключается в том, как найти основание этого перпендикуляра, находясь в плоскости α. Очевидно, что для этого достаточно из точки O_1 провести перпендикуляр O_1C к прямой AB (см. рис. 30). Отрезок OC и является искомым перпендикуляром по теореме о трёх перпендикулярах. Вычисления в этой задаче простые. Поскольку треугольник OCO_1 прямоугольный и OC — его гипотенуза, то $OC = \sqrt{CO_1^2 + O_1O^2} = \sqrt{h^2 + a^2}$.

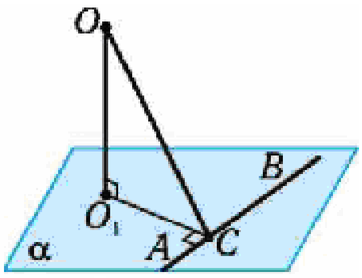


Рис. 30

Ответ: $\sqrt{h^2 + a^2}$.

Пример 3. Плоскости квадратов $ABCD$ и ABC_1D_1 со стороной a перпендикулярны. Найти расстояние от середины M стороны C_1D_1 до стороны CD.

Решение. Расстояние от точки M до прямой CD равно длине отрезка MN, где N — середина CD (см. рис. 31). Действительно, перпендикуляр MP, проведенный к плоскости $ABCD$, лежит в плоскости ABC_1D_1, так как эти плоскости перпендикулярны. Поэтому $MP \perp AB$. Точка P является серединой отрезка AB, ибо $MP \parallel C_1B$ и M — середина C_1D_1. Но тогда проекция PN наклонной MN перпендикулярна прямой CD как отрезок, соединяющий середины противоположных сторон квадрата. По теореме о трех перпендикулярах (теорема 3), $MN \perp CD$, то есть MN — перпендикуляр к прямой CD. Из прямоугольного треугольника MPN имеем $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

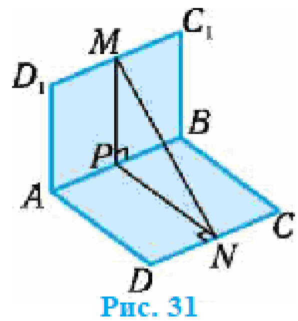


Рис. 31

Ответ: $\sqrt{2}a$.

Пример 4. Отрезок AP перпендикулярен плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что:

1) $ABCD$ — прямоугольник, если прямая PD перпендикулярна CD;

2) $ABCD$ — ромб, если прямая PO, где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, перпендикулярна BD.

Решение. 1) Если прямая PD перпендикулярна прямой CD, лежащей в плоскости параллелограмма α, то, по теореме о трех перпендикулярах (теорема 3), ее проекция AD перпендикулярна прямой DC (рис. 32). Поэтому параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

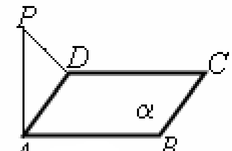


Рис. 32

2) Если наклонная PO перпендикулярна диагонали BD (рис. 33), то ее проекция AO будет перпендикулярна прямой BD, по теореме о трех перпендикулярах. Диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны. Поэтому он является ромбом. ■

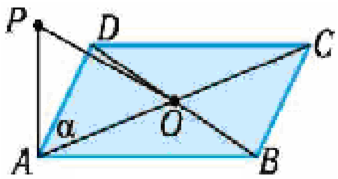


Рис. 33

Пример 5. Из точки M гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр MN к плоскости треугольника. Провести через точку

N прямую, перпендикулярную прямой *BC*.

Решение. Построим рис. 34 по условию примера. Воспользуемся теоремой о трех перпендикулярах. Для этого из точки *M* проведем перпендикуляр *MK* к прямой *BC*. Отрезок *MK* является проекцией наклонной *NK,* поэтому он перпендикулярен *BC* вместе с *NK*.

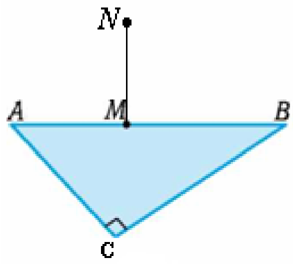


Рис. 34

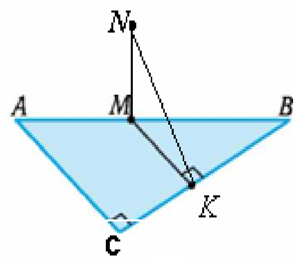


Рис. 35

Построение. Через точку *M* проведем прямую *MK* параллельно прямой *AC* (рис. 35), где *K* — точка ее пересечения с прямой *BC*. Прямая *NK* — искомая. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Какую фигуру образуют основания всех равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки?

2. Прямая проходит через центр окружности и перпендикулярна её плоскости. Равноудалены ли точки прямой от точек окружности?

3. Верно ли, что прямая перпендикулярна наклонной к некоторой плоскости, если она перпендикулярна ее проекции на эту плоскость?

4. Верно ли, что прямая, перпендикулярная наклонной к плоскости и ее проекции на эту плоскость, лежит в этой плоскости?

5. Две равные наклонные, проведенные из различных точек к плоскости, имеют равные проекции на эту плоскость. Образуют ли они равные углы с перпендикулярами, проведенными из этих точек к этой плоскости?

6. Всегда ли существует в плоскости прямая, перпендикулярная прямой, пересекающей плоскость?

7. Какую фигуру образуют точки, равноудаленные от: а) вершин треугольника; б) прямых, содержащих стороны треугольника?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Окружность. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Да. **5.** Не обязательно. **6.** Да. **7.** а) Точку; б) точку.

Задания для самостоятельного решения

1°. Из некоторой точки пространства проведен к данной плоскости перпендикуляр длиной 6 см и наклонная длиной 9 см. Найдите длину проекции наклонной и угол, который она образует с наклонной.

3. Пусть *MA* — перпендикуляр к плоскости прямоугольника *ABCD* со сторонами 15 см и 16 см, *MC* = 25 см. Найдите расстояния от точки *M* до других вершин прямоугольника.

4. Из некоторой точки *A* к данной плоскости проведен перпендикуляр *AO* длиной 1 см и две равные между собой наклонные *AB* и *AC*, образующие с перпендикуляром углы по 60°, а между собой — прямой угол. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

5. Из некоторой точки к данной плоскости проведены две равные наклонные. Угол между ними равен 60°, угол между их проекциями — 90°. Найдите угол между наклонной и ее проекцией.

5. Из данной точки пространства к плоскости проведены две наклонные, разность длин которых составляет 6 см. Их проекции на эту плоскость равны 27 см и 15 см. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из данной точки к плоскости.

6. Из точки *A* проведен к данной плоскости перпендикуляр *AC* длиной 10 см, а из точки *B* — наклонная *BD* длиной 11 см. Найдите *AB*, если *CD* = 6 см и $AB \perp BD$.

7. Из точки *M*, лежащей за пределами плоскости треугольника *ABC,* проведите перпендикуляр к прямой *AB*, если:

1) прямая *MC* перпендикулярна плоскости *ABC* и *AC* = *BC;*

2) основание *O* перпендикуляра, проведенного из точки *M* к плоскости *ABC*, делит *BC* пополам, а угол *BAC* — прямой;

3)треугольник *ABC* — равносторонний, *O* — середина стороны *BC* и $MO \perp ABC$.

8. Точка, лежащая вне плоскости треугольника со сторонами 10 см, 8 см, 6 см, удалена от его вершин на 13 см. Найдите расстояния от данной точки до сторон треугольника.

9°. Из точки пересечения диагоналей прямоугольника проведен перпендикуляр к его плоскости. Докажите, что каждая точка этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника.

10. Из данной точки A, не лежащей в плоскости α, проведены наклонные AB и AC, образующие равные углы с прямой BC плоскости α. Докажите, что проекции этих наклонных на плоскость α равны между собой.

11. Из середины стороны ромба со стороной a проведен перпендикуляр к его плоскости, верхний конец которого удален на $\frac{a}{2}$ от большей диагонали длиной d. Определите длину этого перпендикуляра.

12. Из середины стороны правильного шестиугольника со стороной a проведен перпендикуляр к его плоскости длиной $\frac{a}{4}$. Найдите расстояние от его верхнего конца до сторон шестиугольника.

13. В правильной четырехугольной пирамиде плоскости двух противоположных боковых граней — перпендикулярны. Перпендикулярны ли плоскости двух других боковых граней?

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Примените теорему Пифагора и соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. **2.** Примените теорему Пифагора. **3.** Примените теорему Пифагора и свойство катета, лежащего против угла в 30°. **4.** Воспользуйтесь тем, что расстояние между основаниями наклонных равно длине наклонной. **5.** Предварительно выразите длину перпендикуляра через длины наклонных из двух прямоугольных треугольников, приравняйте полученные выражения и решите уравнение. **6.** Воспользовавшись теоремой Пифагора найдите вначале AD, а затем AB. **7.** Во всех случаях речь идет о построении наклонной MK, перпендикулярной прямой AB. Для этого целесообразно сначала построить проекцию наклонной MK, перпендикулярную AB, а затем воспользоваться теоремой о трёх перпендикулярах. **8.** Воспользуйтесь тем, что данный треугольник прямоугольный, а также тем, что основания перпендикуляров к сторонам этого треугольника вместе с вершиной прямого угла треугольника являются вершинами прямоугольника, длины сторон которого вдвое меньше длин катетов. **9.** Воспользуйтесь тем, что наклонные, проведенные из точек перпендикуляра к вершинам прямоугольника, своими проекциями имеют половины диагоналей. **10.** Выясните, какой вид имеет треугольник ABC. **11.** Воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах, теоремой Пифагора, свойством средней линии треугольника. **12.** Обратите внимание на то, что если перпендикуляр к плоскости шестиугольника $ABCDEF$ проведен через середину ED, то расстояния от его верхнего конца K до CD и EF можно найти только до их продолжений. Для этого надо воспользоваться теоремой о трёх перпендикулярах и теоремой Пифагора. Расстояние до AB также можно найти, воспользовавшись теоремой о трёх перпендикулярах и теоремой Пифагора. Расстояния до BC и AF — это отрезки KC и KF. **13.** Воспользуйтесь тем, что пирамида правильная, в основании квадрат, все боковые грани равны.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. $3\sqrt{5}$ см, $\arcsin\frac{2}{3}$. **2.** 12 см, $3\sqrt{41}$ см, 20 см. **3.** $2\sqrt{2}$ см. **4.** 45°. **5.** 36 см. **6.** $\sqrt{15}$ см. **8.** 12 см, $\sqrt{178}$ см, $\sqrt{185}$ см. **11.** $\frac{1}{4}\sqrt{3a^2+\frac{1}{4}d^2}$. **12.** $\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{29}}{4}a, \frac{7}{4}a$. **13.** Да.

6. Измерение расстояний в пространстве

Повторяем теорию

Измерение расстояний между различными физическими объектами является одним из самых распространённых видов математической деятельности человека. Если размерами объекта можно пренебречь, то идет речь об измерении расстояний между точками, то есть об определении длин отрезков. В других случаях моделирование данных объектов с помощью точек при измерении расстояний между ними нецелесообразно или бессмысленно, например, когда идет речь об измерении расстояния между электролампой и столом, то при моделировании задача сводится к определению расстояния между точкой и плоскостью или её частью; при определении расстояния между фасадами зданий — к определению расстояния между параллельными плоскостями; при установлении вертикального рельса на определенном расстоянии от стены — к определению расстояния между параллельными прямой и плоскостью) и т. п.

Расстоянием между фигурами называют длину кратчайшего из отрезков, соединяющих точки данных фигур.

Если фигуры пересекаются, то будем считать, что расстояние между ними равно нулю. Для фигур, не имеющих общих точек, расстояние между ними является одной из мер их взаимного расположения.

Теорема 1 (*о расстоянии от точки до плоскости*).

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки на данную плоскость.

Это свойство расстояния от точки до плоскости непосредственно вытекает из свойства наклонных и перпендикуляров. Действительно, перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше наклонных, проведенных из той же точки до точек плоскости.

Теорема 2 (*о расстоянии между прямой и плоскостью*).

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равняется длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой к данной плоскости.

Обоснование этого свойства о расстоянии между прямой и плоскостью опирается на свойства прямой, параллельной плоскости, и теорему 1 о расстоянии от точки к плоскости. Действительно, расстояние от каждой точки прямой до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки к плоскости. Для точек прямой, параллельной плоскости, эти расстояния являются равными.

Теорема 3 (*о расстоянии между параллельными плоскостями).*

Расстояние между параллельными плоскостями равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости ко второй

плоскости.

Обоснование теоремы 3 аналогично обоснованию теоремы 2. Отличие заключается лишь в том, что перпендикуляры проводятся из всех точек одной плоскости ко второй.

Приведенными свойствами широко пользуются в различных сферах деятельности человека, в быту. Например, с их помощью определяют расстояния от самолета до поверхности земли, от светильника до пола, от провода линии электропередач до поверхности земли, между потолком и полом и т. п.

Чтобы найти расстояние от точки до прямой или плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями, необходимо:

– убедиться, что заданные фигуры не имеют общих точек;

– построить соответствующий ситуации перпендикуляр;

– найти длину этого перпендикуляра.

С помощью понятия расстояния можно характеризовать параллельность прямой и плоскости, параллельность плоскостей. При этом справедливы следующие утверждения, обратные к теоремам 2 и 3.

Теорема 4 (*признак параллельности прямой и плоскости*).

Если все точки прямой лежат на одинаковом, отличающемся от нуля, расстоянии от плоскости, то прямая и плоскость параллельны.

Теорема 5 (*признак параллельности плоскостей*).

Если все точки одной плоскости лежат на одинаковом, отличном от нуля, расстоянии от второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

Действительно, при выполнении условий этих утверждений соответствующие фигуры не могут иметь общих точек, иначе бы расстояние между ними равнялось нулю.

Приведенные утверждения широко используются на практике как признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей. Так, параллельность поверхности стола к полу обеспечивается одинаковой длиной его ножек.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине кратчайшего отрезка AB, концы которого лежат на этих прямых.

Отрезок, концы которого лежат на скрещивающихся прямых и который перпендикулярен этим прямым, называется общим перпендикуляром скрещивающихся прямых.

Задача измерения расстояния между скрещивающимися прямыми сводится к нахождению длины общего перпендикуляра этих прямых.

Решаем

Пример 1. Плоскости правильного треугольника ABS и квадрата $ABCD$ со стороной a перпендикулярны, точки L, K, M являются серединами соответственно сторон DC, AB, AS. Найти расстояние:

1) от точки A до прямой BS;

2) от точки A до плоскости SBC;

3) от прямой AD до плоскости SBC;

4) между плоскостями MKL и SBC.

Решение. 1) Расстояние от точки A до прямой BS равно длине перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой BS в плоскости ABS. Поскольку треугольник ABS — правильный, то таким перпендикуляром будет медиана AP этого треугольника (рис. 36). Её длина равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

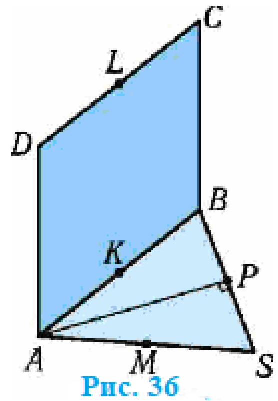


Рис. 36

2) Расстояние от точки A до плоскости SBC равно, по свойству расстояния от точки до плоскости (теорема 1), длине перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости SBC. Этим перпендикуляром будет отрезок AP, где P — середина стороны SB (рис. 36). Действительно, отрезок AP перпендикулярен стороне SB треугольника ABS, так как он является медианой правильного треугольника. Прямая BC перпендикулярна плоскости ABS, ибо она лежит в одной из перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения. Проведем через точку P прямую PE, параллельную прямой BC (рис. 37). Она лежит в плоско-

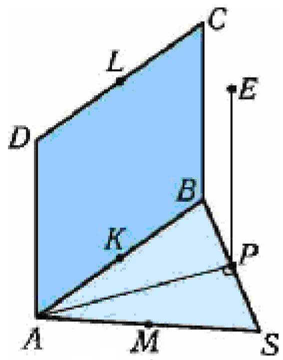


Рис. 37

сти SBC (почему?) и перпендикулярна плоскости ABS, по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости: $BC \parallel PE$, $BC \perp ABS$. Поэтому $PE \perp ABS$. По определению, $PE \perp AP$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AP \perp SBC$. Длина перпендикуляра AP равна $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Это и является искомым расстоянием от точки A до плоскости SBC.

3) Прямая AD и плоскость SBC параллельны, по признаку параллельности прямой и плоскости: $AD \parallel BC$. Поэтому искомое расстояние, по свойству расстояния между прямой и плоскостью (теорема 2), равно расстоянию от точки A до плоскости SBC и, по предыдущему заданию, равно $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

4) Плоскости MKL и SBC параллельны, по признаку параллельности плоскостей: $KM \parallel BC$ (KM — средняя линия треугольника ABS), $KL \parallel BC$ (KL — отрезок, соединяющий середины параллельных сторон квадрата $ABCD$), поэтому $MKL \parallel SBC$. Следовательно, искомое расстояние, по свойству расстояния между параллельными плоскостями (теорема 3), равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки плоскости MKL к плоскости SBC. Возьмем точку пересечения F отрезков MK и AP (рис 38). Поскольку AP является перпендикуляром к плоскости SBC (см. задание 2), то FP — перпендикуляр к этой плоскости.

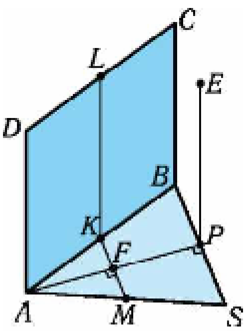


Рис. 38

Его длина равна $\frac{1}{2}AP$, так как средняя линия треугольника делит медиану, которую она пересекает, пополам (почему?). Искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

Ответ: 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

Пример 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 см. Найдите расстояния:

1) от вершины D_1 до прямой AC;

2) от точки A до плоскости D_1DB;

3) от прямой AA_1 до плоскости DBB_1;

4) от плоскости, проходящей через середины ребер AB, AD, A_1B_1, до плоскости DBB_1.

Решение. 1) Для нахождения расстояния от вершины D_1 до прямой AC проведем из точки D_1 перпендикуляр к этой прямой. Нетрудно установить, что им будет отрезок D_1O, где O — центр грани $ABCD$ (рис. 39). Действительно, D_1D — перпендикуляр к плоскости $ABCD$, DO — проекция наклонной D_1O. Прямая AC лежит в плоскости $ABCD$ и перпендикулярна проекции DO по свойству диагоналей квадрата. Поэтому по теореме о трех перпендикулярах (теорема 3 п. 5) наклонная D_1O перпендикулярна прямой AC. Она является искомым перпендикуляром к прямой AC. Из прямоугольного треугольника DD_1O, в котором DD_1 = 2 см, а $DO = \sqrt{2}$ см, имеем: $D_1O = \sqrt{DD_1^2 + DO^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$ (см).

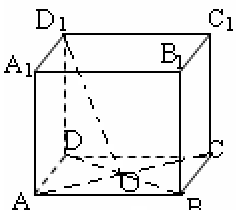


Рис. 39

2) Расстояние от точки A до плоскости D_1DB равняется длине перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости D_1DB. Этим перпендикуляром является отрезок AO (рис. 39) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости: $AO \perp BD$ по свойству диагоналей квадрата, $AO \perp OD_1$, как это было доказано во время решения задания 1). Поэтому $AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ (см).

3) Прямая AA_1 параллельна плоскости DBB_1 по признаку параллельности прямой и плоскости: $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \subset DBB_1$. Расстояние от прямой AA_1 до плоскости DBB_1 равняется расстоянию от точки A до этой плоскости. Поскольку плоскость DBB_1 содержит точку D_1 ($BB_1 \parallel DD_1$), то найденное в предыдущем задании расстояние и является искомым: $AO = \sqrt{2}$ (см).

4) Пусть M, N, P — середины ребер AB, AD, A_1B_1 (рис. 40). Плоскости NMP и DBB_1 параллельны по признаку параллельности плоскостей: $NM \parallel DB$ по свойству средней линии треугольника, $NP \parallel BB_1$, как отрезок, соединяющий середины параллельных сторон квадрата. Искомое расстояние равняется длине перпенди-

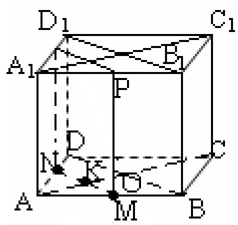


Рис. 40

куляра, проведенного из точки K пересечения NM с AC к плоскости DBB_1. Но точка K является серединой отрезка AO по теореме Фалеса. Поэтому искомое расстояние равняется $\frac{1}{2}AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см).

Ответ: 1) $\sqrt{6}$ см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) $\sqrt{2}$ см; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см.

Пример 3. В тетраэдре $SABC$ основание ABC — равносторонний треугольник со стороной 6 см, боковые грани SAB, SAC, SBC — равнобедренные треугольники с боковой стороной 5 см. Найти расстояние от центра O основания до плоскости боковой грани.

Решение. Расстояние от точки O до плоскости SBC равно длине перпендикуляра OK из точки O на плоскость SBC (см. рис. 41). Точка O лежит на пересечении медиан (и высот!) треугольника ABC, причем $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{6\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \sqrt{3}$. Поскольку в треугольнике SBC медиана SD также является высотой, то $SD \perp BC$, поэтому $BC \perp ODC$ и $SBC \perp ODC$. Следовательно, перпендикуляр из точки O на плоскость BSC совпадает с перпендикуляром OK из точки O на прямую SD, являющейся линией пересечения плоскостей SAD и SBC. По теореме Пифагора, $SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). Поскольку ортогональные проекции боковых ребер на основание равны, то S ортогонально проектируется в центр описанной около треугольника ABC окружности, то есть в точку O. Поэтому треугольник SOD — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{16-3} = \sqrt{13}$ (см). Нетрудно увидеть, что $OK = (SO \cdot OD) : SD = (\sqrt{13} \cdot \sqrt{3}) : 4 = \frac{\sqrt{39}}{4}$ (см). Понятно, учитывая симметрию, что расстояния от точки O до других боковых граней такие же.

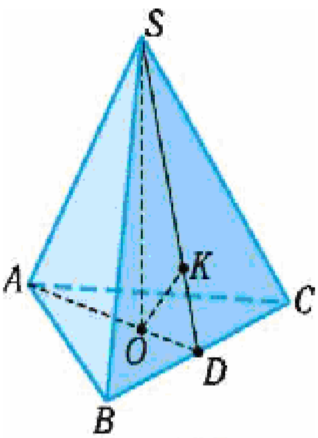


Рис. 41

Ответ. $\frac{\sqrt{39}}{4}$ см.

Пример 4. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра, ребро которого равняется a.

Решение. В правильном тетраэдре $SABC$ противоположные ребра лежат на скрещивающихся прямых (рис. 42). Построение параллельных плоскостей, в которых лежат скрещивающиеся прямые, в данном случае не является необходимым. Воспользовавшись симметричностью конструкции, предыдущим опытом работы с правильным тетраэдром, попробуем отыскать общий перпендикуляр для прямых SC и AB.

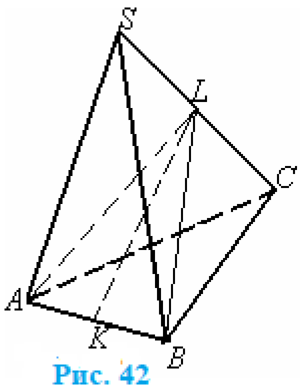


Рис. 42

Если K, L — середины ребер AB и SC, то $LK \perp AB$, как медиана и высота в равнобедренном треугольнике LAB, где $AL = BL$. Аналогично, $LK \perp SC$.

Поскольку $KB = \frac{a}{2}, LB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, то по теореме Пифагора $LK = \sqrt{LB^2 - KB^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

Понятно, что в данном случае расстояние между ребрами (отрезками) совпадает с расстоянием между прямыми, содержащими эти ребра (обратите внимание — в данном случае, а не вообще!). Кроме того, очевидно, что рассмотрение еще двух пар скрещивающихся ребер не требуется, поскольку расстояния между всеми парами скрещивающихся ребер равны в связи с симметрией конструкции.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}a.$

Вопросы для самоконтроля

1. Пусть прямая а параллельна плоскости α. Могут ли точки прямой а находиться на различных расстояниях от точек плоскости α?

2. Верно ли, что если расстояние от прямой до плоскости отлично от нуля, то прямая и плоскость параллельны?

3. Известно, что отрезок AB удален от плоскости α на 3 см. Означает ли это, что прямая AB удалена от плоскости α на 3 см?

4. Верно ли, что две плоскости совпадают, если расстояние между ними равно нулю?

5. Верно ли, что расстояние от отрезка до плоскости равно расстоянию от одного из его концов до этой плоскости?

6. Все стороны треугольника ABC находятся на расстоянии 3 от плоскости α. Параллельны ли плоскости ABC и плоскость α?

7. Какую фигуру образуют точки, равноудаленные от данной плоскости?

8. Как нужно закреплять провод на столбах, чтобы обеспечить его параллельность к поверхности земли?

9. Как измерить высоту дерева, не поднимаясь на его верхушку?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Могут. **2.** Верно. **3.** Нет. **4.** Нет. **5.** Верно. **6.** Да. **7.** Две плоскости. **8.** На одной и той же высоте от земли. **9.** Измерить длину тени и угол, под которым видно дерево из конца тени.

Задания для самостоятельного решения

1. Точка D находится на расстоянии 8 см от вершин равностороннего треугольника ABC со стороной 4 см. Найдите расстояние:

1°) от точки B до плоскости DOC, где O — центр треугольника ABC;

2°) от точки D до плоскости ABC;

3) от плоскости, проходящей через середины отрезков DA, DB, DC, до плоскости треугольника ABC.

2. Пусть точка O является серединой катета AC прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой $AB = 4$ см; OP — перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 см. Найдите расстояние:

1°) от точки B до плоскости AOP;

2°) от плоскости, проходящей через середины сторон CB и AB параллельно OP, до плоскости CPA;

3) от точки O до плоскости PAB.

3°. Из точки K — середины гипотенузы AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с катетами длиной 8 см — проведен перпендикуляр KS до плоскости треугольника. Длина KS составляет 6 см. Найдите расстояние:

1) от точки C до плоскости AKS;

2) от точки A до плоскости KCS;

3) от точки S до прямой BC.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите расстояние:

1°) от точки A_1 до плоскости BDD_1;

2°) от прямой B_1D_1 до плоскости ABC;

3°) между противоположными гранями куба;

4°) от точки A_1 до прямой BD;

5) между прямыми AD_1 и CC_1;

6*) от точки A_1 до плоскости AB_1D_1;

7*) между плоскостями CD_1B_1 и DA_1B.

5. Точка M лежит на расстоянии b от всех вершин квадрата $ABCBD$ со стороной a и центром в точке O. Найдите расстояние:

1°) от точки M до плоскости ABC;

2°) от точки A до плоскости BMD;

3) от точки O до плоскости MCD, если $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$;

4) от точки M до прямой CD;

5) между прямыми OM и AD.

6. Концы отрезка удалены от некоторой плоскости на 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости.

7. Катеты прямоугольного треугольника равны 16 см и 12 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника лежит точка, удаленная от каждой вершины треугольника на $10\sqrt{2}$ см?

8. Сторона равностороннего треугольника равна 6 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника расположена точка, удалённая на 9 см от:

1) сторон треугольника;

2*) каждой из прямых, содержащих стороны треугольника?

9°. Если из двух точек, находящихся на различных расстояниях от плоскости, провести равные наклонные, то на этой плоскости большей будет проекция наклонной, проведенной из более близкой к плоскости точки. Докажите это.

10. Если из точки A, находящейся вне плоскости α, опустить перпендикуляр на эту плоскость, а из его основания провести перпендикуляр к прямой BC, лежащей в плоскости α, то плоскость, проходящая через эти перпендикуляры, будет перпендикулярной прямой BC. Докажите это.

11*. Плиту прямоугольной формы подняли краном так, что три ее вершины удалены от поверхности земли, соответственно, на 2 м, 3 м и 4 м. На каком расстоянии от земли находится четвертая вершина?

12*. Точка A удалена от сторон угла, равного 60°, на 20 см и 7 см, а от его вершины — на 25 см. Найдите расстояние от точки A до плоскости угла.

13*. Точка, лежащая вне плоскости прямого угла, находится на расстоянии 4 см от каждой из его сторон. Найдите расстояние от точки до вершины угла, если точка удалена от плоскости угла на $\sqrt{7}$ см.

14. Плоскости квадрата $ABCD$ и равностороннего треугольника ABM взаимно перпендикулярны, $AB = a$. Постройте общий перпендикуляр прямой AC и медианы MO треугольника и определите длину этого перпендикуляра.

15. Пусть AB — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b. Точки A и C лежат на прямой a, точки B и D — на прямой b; $AC = BD$. Докажите, что $\angle ACB = \angle BDC$.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) Воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах; 2) воспользуйтесь тем, что ортогональной проекцией точки D является точка O; 3) воспользуйтесь тем, что указанная плоскость параллельна плоскости ABC. **2.** 1) Воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах; 2) воспользуйтесь теоремой о расстоянии между параллельными плоскостями; 3) докажите, что искомое расстояние равно длине высоты OF треугольника POK, где K — середина гипотенузы AB выразите площадь этого треугольника двумя способами. Примените теорему о трёх перпендикулярах. **3.** 1) Докажите, что искомое расстояние равно длине отрезка CK; 2) докажите, что искомое расстояние равно длине отрезка AK; 3) воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах. **4.** 1) Докажите, что искомое расстояние равно половине длины диагонали грани; 2) воспользуйтесь теоремой о расстоянии между прямой и плоскостью; 3) воспользуйтесь теоремой о расстоянии между параллельными плоскостями; 4) воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах; 5) обратите внимание на то, что указанные прямые являются скрещивающимися; 6) докажите, что искомое расстояние равно длине отрезка A_1K, где K — центр треугольника AB_1D_1. Воспользуйтесь теоремой Пифагора; 7) воспользуйтесь теоремой о расстоянии между параллельными плоскостями. **5.** 1) Докажите, что искомое расстояние равно длине отрезка OM; 2) докажите, что искомое расстояние равно длине отрезка AO; 3) докажите, что искомое расстояние равно длине перпендикуляра, проведенного из точки O к медиане MF треугольника MCD; 4) докажите, что искомое расстояние равно длине медианы MF треугольника MCD; 5) обратите внимание на то, что указанные прямые являются скрещивающимися. **6.** Рассмотрите два случая: концы отрезка лежат по одну сторону от плоскости и по разные. **7.** Воспользуйтесь тем, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы. **8.** 1) Воспользуйтесь тем, что центр окружности, вписанной в треугольник лежит на пересечении биссектрис треугольника; 2) рассмотрите два случая: основание перпендикуляра, проведенного из указанной точки, лежит внутри данного треугольника и вне его. **9.** Сравните выражения длин наклонных через перпендикуляры и проекции. **10.** Воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах. **11.** Следует рассмотреть трапеции, построенные на перпендикулярах, проведенных из противоположных вершин прямоугольника к поверхности Земли. Они имеют общую среднюю линию. Поскольку порядок следования вершин в задаче не обусловлен, то может быть три варианта ответа. **12.** Вычислив длины отрезков между вершиной данного угла и основаниями перпендикуляров, проведенных из точки А к сторонам угла, выразите двумя способами длину отрезка между вершиной угла и основанием искомого перпендикуляра. Затем решите полученное тригонометрическое уравнение. **13.** Воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах и докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются вершина данного прямого угла и основания перпендикуляров, проведенных из данной точки к сторонам и к плоскости угла, является квадратом. Отдельно рассмотрите случай, когда точка ортогонально проектируется за пределы угла, и когда расстояния от сторон угла равны расстоянию от вершины. **14**. Докажите, что искомым перпендикуляром является перпендикуляр, проведенный из точки O к диагонали AC. **15.** Рассмотрите треугольники ACB и BDC.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) 2 см; 2) $\frac{4}{3}\sqrt{11}$ см; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{11}$ см. **2.** 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ см. **3.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $2\sqrt{13}$ см. **4.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 2) a; 3) a; 4) $\sqrt{1{,}5}a$; 5) a; 6) $\frac{\sqrt{3}}{3}a$; 7) a. **5.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 3) $\frac{a}{2\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$; 5) $\frac{a}{2}$. **6.** 2,5 см или 1,5 см. **7.** 10 см. **8.** 1) $\sqrt{78}$ см; 2) $\sqrt{78}$ см или $3\sqrt{6}$ см. **11.** 1; 3; 5 м. **12.** $\sqrt{37}$ см. **13.** 5 или 4 см. **14.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

7. Измерение углов в пространстве

Повторяем теорию

Взаимное расположение прямых, прямых и плоскостей, а также плоскостей характеризуют в стереометрии различными способами. Один из них базируется на количестве общих точек этих фигур. Он приводит к важным отношениям между прямыми и плоскостями — отношениям параллельности. Уточнение взаимного расположения указанных фигур осуществляется с помощью отношений перпендикулярности. Они отображают определенную симметрию взаимного расположения фигур. Рассмотрение расстояний между фигурами дает возможность характеризовать их взаимное расположение с помощью чисел. Последующее уточнение взаимного расположения прямых и плоскостей осуществляется с помощью измерения углов между этими фигурами. Необходимость таких измерений вызвана потребностями как геометрии, так и практики. Измерения углов необходимы в геометрии, геодезии, мореходном деле, космонавтике и т. п. Их применяют и в повседневной жизни.

Углом между пересекающимися прямыми называется величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми.

По определению, угол между прямыми является величиной, изменяющейся от 0° до 90°. Угол между параллельными прямыми считают ровным 0°, а между перпендикулярными — 90°.

Углом между прямой и неперпендикулярной ей плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Напомним, что угол между пересекающимися прямыми изменяется в пределах от 0° до 90°. Поэтому и угол между прямой и плоскостью является величиной, изменяющейся в этих пределах.

Угол между прямой и плоскостью, в которой она лежит, считают равным 0°.

Угол между прямой и перпендикулярной ей плоскостью считают равным 90°.

Угол между прямой и её ортогональной проекцией на эту плоскость является наименьшим среди всех других углов между данной прямой и прямыми, пересекающими ее и лежащими в данной плоскости.

Чтобы построить угол между прямой и плоскостью, необходимо:

— из произвольной точки данной прямой провести перпендикуляр к заданной плоскости;

— через основание перпендикуляра и точку пересечения прямой и плоскости провести прямую.

Угол между заданной и построенной прямыми является углом между прямой и плоскостью.

Под углом между отрезком и плоскостью, между отрезком и плоской фигурой (например, между диагональю куба и его гранью) понимают угол между соответствующими прямой и плоскостью.

Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, образующимися при пересечении данных плоскостей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения.

Теорема 1 (*о равенстве углов между соответственно параллельными прямыми*).

Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, то углы между этими парами прямых равны.

Угол между совпадающими плоскостями естественно считать равным 0°. Если же угол между плоскостями равен 90°, то плоскости — перпендикулярны.

Обратно, угол между перпендикулярными плоскостями равен 90°.

Теорема 2 (*признак перпендикулярности плоскостей*).

Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между параллельными им пересекающимися прямыми.

Два луча OA и O_1A_1 в пространстве, не лежащие на одной прямой, одинаково направлены, если они параллельны и принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой OO_1. Два луча, лежащие на одной прямой, одинаково направлены, если один из них полностью принадлежит второму.

Как и в планиметрии, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 (*об углах с одинаково направленными сторонами*).

Углы с одинаково направленными сторонами равны между собой.

В практических задачах более распространенной является не конструкция из двух пересекающихся плоскостей, а конструкция из двух полуплоскостей, имеющих общую границу (скаты крыши, обложки книги, стенки желоба и т. п.).

Фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую границу, называется двугранным углом. Общая прямая полуплоскостей называется ребром, а сами полуплоскости — гранями двугранного угла.

Двугранный угол с ребром AB и точками M, N, принадлежащими различным граням (рис. 43), будем обозначать $M\underline{AB}N$.

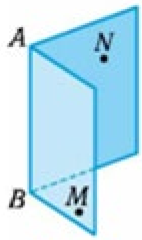


Рис. 43

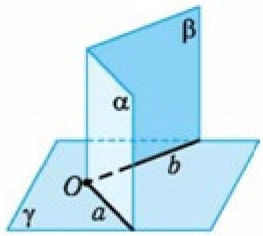


Рис. 44

Плоскость γ, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым a и b (см. рис. 44), выходящим из общей точки O. Построенный таким образом угол называется ***линейным углом двугранного угла***. Он и определяет угловую меру двугранного угла.

В отличие от угла между плоскостями, изменяющегося в пределах от 0° до 90°, угловая мера двугранного угла изменяется от 0° до 180°. Это отличие связано с тем, что в первом случае, в конце концов, измеряется угол между прямыми, а во втором — плоский угол, который может быть и острым, и тупым. Однако, существует простая связь между этими величинами: они или совпадают, или же в сумме равны 180°.

Понятие угла между плоскостями позволяет установить связь между площадью плоской фигуры и площадью ее ортогональной проекции.

Теорема 4 (*о площади ортогональной проекции многоугольника*).

Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Решаем

Пример 1. Пусть OS — перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ с центром в точке O; $OS = AB = 2$.

1) Найти угол между прямой CS и плоскостью ABD.

2) Найти угол между прямой AS и плоскостью DBS.

3) Найти угол между прямой, проходящей через точку S и середину стороны AB, и плоскостью DBS.

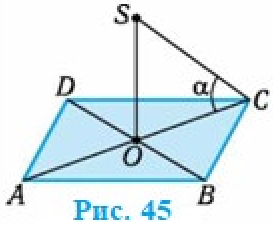


Рис. 45

Решение. 1) Построим рис. 45, который соответствует условию примера. Прямая OC является ортогональной проекцией прямой CS на плоскость ABD. По определению угла между прямой и плоскостью, искомый угол α равен величине угла OCS. Из прямоугольного треугольника SOC имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{SO}{OC} = \dfrac{2SO}{AC} = \dfrac{2\cdot 2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}.$

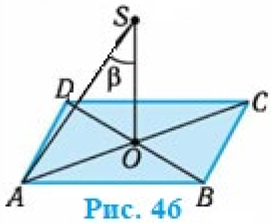


Рис. 46

2) Найдем ортогональную проекцию прямой AS на плоскость DBS (рис. 46). Нетрудно убедиться в том, что это прямая SO. Действительно, $AO \perp BD$, по свойству диагоналей квадрата, $AO \perp SO$, поскольку $SO \perp ABC$. Поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AO \perp DBS$ и точка O является основанием перпендикуляра AO.

По определению угла между прямой и плоскостью, искомый угол β равен величине угла ASO. Из прямоугольного треугольника ASO имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AO}{SO} = \frac{AC}{2SO} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Этот ответ можно было получить, пользуясь решением задания 1).

Треугольники AOS и COS равны по трём сторонам. Поэтому

$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

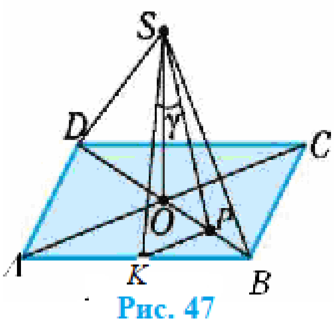


Рис. 47

3) Пусть K — середина стороны AB. Построим ортогональную проекцию прямой KS на плоскость DBS. Для этого проведем из точки K прямую KP, параллельную прямой AO (рис. 47), где точка P — середина отрезка OB — является точкой ее пересечения с плоскостью DBS. Поскольку AO является перпендикуляром к плоскости DBS (см. решение задания 2)), то KP — перпендикуляр к ней, по тео-

реме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости. Ортогональной проекцией прямой KS на плоскость DBS является прямая SP. Искомый угол γ равен величине угла KSP. Из прямоугольного треугольника KPS имеем: $tg\gamma = \frac{KP}{SP}$. Отрезок KP является средней линией треугольника AOB, потому $KP = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AC = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного треугольника SOP имеем: $SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$. Таким образом,

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \gamma = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: 1) $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$; 2) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Пример 2. Антенну закрепляют с помощью четырех растяжек одинаковой длины, изготовленных из троса. Известно, что для надежного крепления антенны растяжки должны быть натянуты под углом, не превышающим 60° к поверхности земли. Хватит ли для крепления 80 м троса, если точка крепления располагается на высоте 15 м над поверхностью земли и на закрепление одной растяжки идет до 1 м троса?

Решение. Установленная антенна схематически изображена на рисунке 48. Здесь OA — схематическое изображение антенны, точка A — место крепления растяжек на антенне, B, C, B_1, C_1 — точки крепления растяжек на земле. По условию, AO = 15 м, $AB = AC = AB_1 = AC_1$.

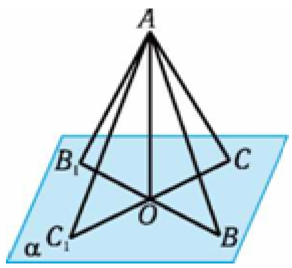


Рис. 48

Углы ABO, ACO, AB_1O, AC_1O равны между собой и не превышают 60°. Обозначим их угловую меру через α. Наиболее экономное крепление соответствует случаю, когда α = 60°. Из прямоугольного треугольника AOB имеем:

$$AB = \frac{AO}{\sin 60^\circ} = \frac{2\cdot 15}{\sqrt{3}} \approx 17{,}4 \text{ (м)}.$$

Таким образом, на изготовление одной растяжки нужно не менее чем 17,4 + 1 = 18,4 м троса, а на изготовление четырех — 73,6 м, что меньше 80 м. Следовательно, имеющейся длины троса хватит для установления антенны.

Ответ. Хватит.

Пример 3. Равнобокую трапецию $ABCD$ с большим основанием AD и высотой 8 см перегнули по прямой, проходящей через середины M и N сторон AB и CD, так, что вершина B расположилась от плоскости AMN на расстоянии 2 см.

1) Найти угол между плоскостями AMD и MBC.

2) Построить линейный угол двугранного угла $A\underline{MN}C$ и найти его угловую меру, если ортогональная проекция точки C на плоскость четырехугольника $AMND$ лежит за его пределами.

3) Найти расстояние от точки B до прямой AD.

4) Найти расстояние от прямой AN до плоскости ABD.

5) Построить линию пересечения плоскостей AMB и DNC.

Решение. Языком геометрических преобразований условие примера можно интерпретировать как поворот части трапеции $MBCN$ вокруг средней линии MN данной трапеции (рис. 49, а), при котором каждая точка, в частности точки B, C и др., вращаются в плоскости, проходящей через эту точку и перпендикулярной MN.

1) Построим рис. 49, б, в, соответствующие условию. Расстояние от точки B до плоскости AMN определяется длиной перпендикуляра BP, основание какого P лежит на прямой BE (рис. 49, а), или на прямой KE (рис. 49, б), где K — точка пересечения высоты BE трапеции $ABCD$ со средней линией MN. При этом точка P может лежать на луче KE (рис. 49, б) или же на дополнительном луче

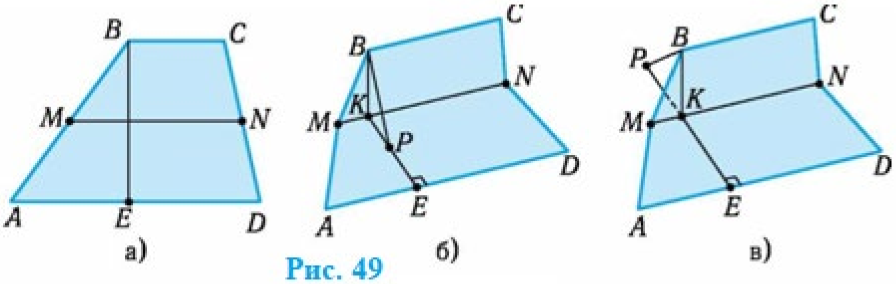


Рис. 49

до всей прямой KE (рис. 49, в).

В обоих отмеченных случаях угол между плоскостями *AMD* и *MBC* равен углу *BKP* одноименного прямоугольного треугольника, ведь плоскость *BKE* перпендикулярна *MN* и угол *BKP* — острый угол прямоугольного треугольника. Поскольку $BK = 4$ см, $BP = 2$ см, то $\sin\angle BKP = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \angle BKP = 30°.$

2) Этому условию соответствует рис. 49, в, ведь $KP < 4$ см и если точка *P* принадлежит лучу *KE*, то точка *P* попадает на отрезок *KE*. А расположение проекций точек *B* и *C* относительно четырехугольника *AMND* одинаково. Поэтому линейным углом двугранного угла *AMNC* может быть угол *BKE*, а его мера равна 180° – 30° = 150°.

3) Поскольку $BE \perp AD$, то расстояние от точки *B* до прямой *AD* определяется длиной стороны *BE* треугольника *BKE*. И опять имеем два случая, когда $\angle BKE = 30°$ и $\angle BKE = 150°$ (рис. 50, а, б), а $KB = KE = 4$ см в обоих случаях. Тогда, по теореме косинусов, $BE = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot \cos 30°} = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (см) или $BE = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (см).

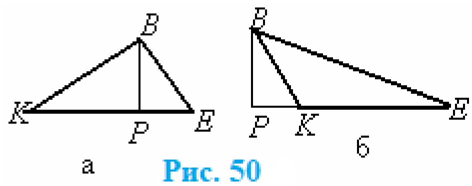


Рис. 50

4) Расстояние от прямой *MN* до плоскости *ABD* определяется длиной перпендикуляра из точки *K* к плоскости *ABD*. А поскольку плоскости *ABD* и *KBE* — перпендикулярны, то искомый перпендикуляр является высотой *h* треугольника *KBE*, проведенной из вершины *K*. И опять имеем два случая (рис. 50, а, б). В обоих из них высоту к стороне *BE* можно найти как отношение удвоенной площади $2S = KE\cdot BP = 4\cdot 2 = 8$ (см^2) треугольника *KBE* к стороне *BE*. То есть

$$h = \frac{8}{4\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \text{ (см) или } h = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \text{ (см).}$$

5) Возвратимся к рис. 49, б, в. Прямую, по которой пересекаются плоскости *ABM* и *DCN*, можно задать, определив две ее точки. Одну из них, точку *K*, можно получить как пересечение прямых *AB* и *DC* этих плоскостей. Причем

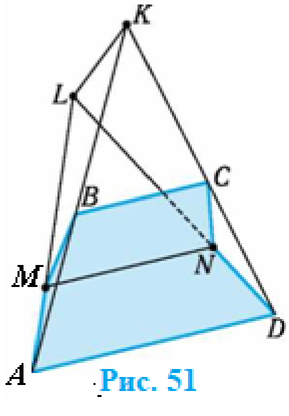


Рис. 51

эти прямые обязательно пересекаются, поскольку они проходят через боковые стороны AB и DC. Вторая точка L находится как точка пересечения прямых AM и DN, проходящих через боковые стороны трапеции $AMND$ (рис. 51).

Ответы: 1) 30°; 2) 150°; 3) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ или $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ или $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Пример 4. Ортогональной проекцией прямоугольника, одна из сторон которого параллельна плоскости проекций, является квадрат. Найти угол между плоскостями прямоугольника и квадрата, если стороны прямоугольника равны 6 см и $3\sqrt{3}$ см.

Решение. Пусть ортогональной проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость α, параллельную AD, является квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис.52). Проведём через сторону AD плоскость β ∥ α и обозначим символами B_2, C_2 точки пересечения с β проектирующих прямых BB_1 и CC_1 соответственно. По свойствам параллельного проектирования четырёхугольник

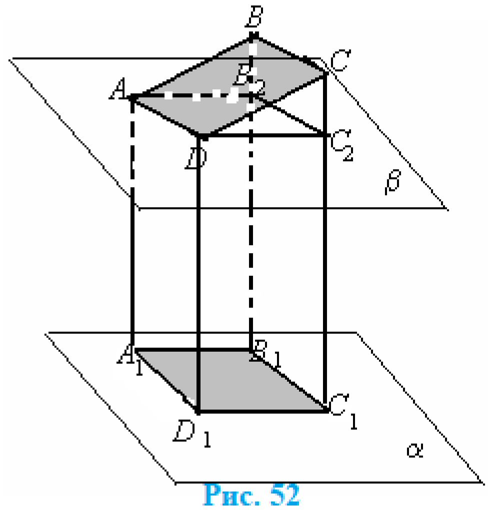


Рис. 52

AB_2C_2D является проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость β и равен квадрату $A_1B_1C_1D_1$. Кроме того, искомый угол равен углу φ между плоскостями ABC и β. Для нахождения этого угла воспользуемся формулой $S' = S\cos\varphi$ для площади ортогональной проекции плоской фигуры, подставив в неё вместо S' и S соответственно площади прямоугольника $ABCD$ и квадрата AB_2C_2D.

Прямоугольник $ABCD$ и квадрат AB_2C_2D имеют общую сторону AD. Это — меньшая сторона прямоугольника. Действительно, наклонная CD к плоскости β длиннее своей проекции DC_2. А поскольку $3\sqrt{3} < 6$, то именно сторона прямоугольника длиной $3\sqrt{3}$ см равна стороне квадрата. Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S} = \dfrac{\left(3\sqrt{3}\right)^2}{3\sqrt{3}\cdot 6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Итак, φ = 30°. **Ответ.** 30°.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли угол между прямой и плоскостью равняться 130°; –70°; 20°?

2. Будут ли равными в тетраэдре боковые ребра, если они образуют равные углы с плоскостью основания?

3. Верно ли, что угол между прямой, перпендикулярной плоскости, и произвольной прямой этой плоскости равняется 90°?

4. Как определить, пользуясь лишь рулеткой, угол наклона столба к земле?

5. Как бы Вы измерили угол, образованный солнечным лучом с поверхностью земли?

6. Угловая мера двугранного угла равна 100°. Чему равен угол между плоскостями граней этого двугранного угла?

7. Что нужно измерить, чтобы определить: а) высоту башни, к основанию которой наблюдатель может подойти; б) расстояние до дома, высота которого известна, если наблюдатель не может к нему подойти?

8. Может ли угол между плоскостями равняться 27°; 135°; 270°? Может ли принимать такие значения угловая мера двугранного угла?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Нет; нет; да. **2.** Да. **3.** Верно. **4.** Измерить рулеткой длину столба и длину тени, отбрасываемой им. **5.** Измерить высоту некоторого вертикального объекта и длину тени, отбрасываемой им. **6.** 80°. **7.** а) Длину тени, отбрасываемой башней, и угол, под котрым видна башня из конца тени; б) угол, под которым виден дом из конца тени, отбрасываемой им. **8.** Да; нет; нет. Да; да; нет.

Задания для самостоятельного решения

1. Пусть KS — перпендикуляр к плоскости квадрата ABCD, где K — середина стороны AD; $KS = \sqrt{3}$, $AB = 3$.

1°) Найдите угол между прямой SD и плоскостью ABC.

2°) Найдите угол между прямой BS и плоскостью ACD.

3°) Определите взаимное расположение плоскостей ABD и KCS.

4) Найдите угол между прямой, проходящей через точку K и середину стороны BC, и плоскостью BCS.

5) Найдите расстояние от точки B до прямой CS.

2. Из вершины A квадрата $ABCD$ со стороной $\sqrt{3}$ см проведен перпендикуляр AS к плоскости квадрата длиной 3 см.

1°) Найдите угол между прямой BS и плоскостью ABC.

2°) Найдите угол между прямой CS и плоскостью ABC.

3°) Определите взаимное расположение плоскостей ABS и BDC.

4) Найдите угол между прямой CS и плоскостью ASD.

5) Найдите расстояние от точки B до прямой CS.

3°. Из вершины прямого угла A треугольника ABC проведен перпендикуляр AP к плоскости треугольника длиной 4 см. Катет AC равен 4 см, а угол ACB =60°. Найдите угол:

1) между прямой PB и плоскостью ABC;

2) между прямой PB и плоскостью APC.

4. Из центра O квадрата $ABCD$ со стороной длиной 8 см восставлен перпендикуляр OP так, что угол между прямой PC и плоскостью ABC равен 60°.

1°) Найдите углы между прямой PD и плоскостями ABC и APC.

2°) Сравните углы, образованные прямыми PA, PB, PC, PD с плоскостью ABC.

3°) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABC.

4) Докажите, что точки A и C симметричны относительно плоскости PBD.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a.

1) Найдите угол между диагональю B_1D и плоскостью ACC_1.

2) Сравните углы, образованные диагональю B_1D с плоскостями его граней.

3) Найдите угол между диагональю B_1D и плоскостью A_1C_1D.

4) Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости A_1C_1D.

6. Равнобедренный треугольник ABC с высотой 16 см, проведенной к его основанию, перегнули по средней линии MN, параллельной основанию AC, так, что вершина B удалена от плоскости четырехугольника $ACNM$ на 4 см.

1°) Найдите угол между плоскостями *AMC* и *MBN*.

2°) Постройте линейный угол двугранного угла $B\underline{MN}C$ и найдите его угловую меру, если ортогональная проекция вершины *B* на плоскость четырехугольника *AMNC* лежит за его пределами.

3°) Сравните угловые меры двугранного угла $B\underline{MN}C$ и угла *BMA*.

4°) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *AC*.

5) Найдите расстояние от прямой *MN* до плоскости *ABC*.

6) Постройте линию пересечения плоскостей *AMB* и *BNC*.

7. Квадрат *ABCD* со стороной $4\sqrt{2}$ см перегнули по прямой, проходящей через середины *M* и *N* сторон *DC* и *BC* так, что вершина *C* удалена от плоскости *AMN* на 1 см.

1°) Найдите угол между плоскостями *ADM* и *CMN*.

2°) Постройте линейный угол двугранного угла $B\underline{MN}C$ и найдите его угловую меру, если ортогональная проекция вершины С на плоскость пятиугольника *ABNMD* лежит за его пределами.

3°) Сравните угловые меры двугранного угла $B\underline{MN}C$ и угла *CNB*.

4°) Найдите расстояние от точки *C* до прямой *BD*.

5) Найдите расстояние от прямой *MN* до плоскости *BDC*.

6) Постройте линию пересечения плоскостей *BNC* и *DMC*.

8°. Из вершины квадрата *ABCD* проведен перпендикуляр *AP* к плоскости квадрата.

1) Докажите, что угол *PBA* является линейным углом двугранного угла $P\underline{BC}A$.

2) Сравните угловые меры двугранных углов $P\underline{BC}A$ и $P\underline{CD}A$.

3) Найдите угол между плоскостями *APB* и *APD*.

9. Два одинаковых равнобедренных треугольника *ABC* и *ABD* с общим основанием *AB* лежат в различных плоскостях; *K* — середина *AB*.

1°) Докажите, что *CKD* — линейный угол двугранного угла $C\underline{AB}D$.

2) Постройте линейный угол двугранного угла *D*AC*B*.

3) Сравните угловые меры двугранных углов $C\underline{AB}D$ и $A\underline{CD}B$, если *AB* = *CD*.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; M — середина ребра AA_1. Вычислите:

1) угол между диагональю грани $A_1B_1C_1$ и плоскостью MDB;

2) углы между прямой MC_1 и плоскостями $A_1B_1D_1$, BCC_1, DBD_1;

3) угол между прямыми MC_1 и BC.

11°. Длина ручки швабры равна 1,2 м.

1) На каком расстоянии от пола размещен конец швабры при вытирании пола, если швабра наклонена к нему под углом 60°?

2) Какой угол образует ручка швабры с полом, если конец ручки удален от пола на 0,6 м?

12°. Канатная дорога в течение 15 мин поднимает лыжника на вершину горы от ее подножия со скоростью 2 м/с. Определите высоту горы, считая, что угол наклона горы приблизительно равен 30°.

13*. Пользуясь законами отражения света, докажите, что падающий и отраженный лучи образуют с зеркалом одинаковые углы.

14°. Точка M лежит между гранями двугранного угла и удалена от каждой из них на 8 см. Найдите расстояние от точки M до ребра, если величина двугранного угла равна: 1) 90°; 2) 60°; 3) 120°.

15°. Найдите угловую меру двугранного угла, если точка, лежащая на одной грани, расположена от ребра на расстоянии, вдвое большем, чем от второй грани.

16. Угол падения угольного пласта равен 35°. При вертикальном бурении обнаружено, что длина пути бура в угле равна 2,2 м. Вычислите толщину пласта.

17*. Прямая a образует равные углы с тремя прямыми, лежащими в плоскости α и проходящими через точку пересечения прямой a с плоскостью α. Докажите, что $a \perp \alpha$.

18*. Из вершины B ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр BK к его плоскости. Сторона ромба равна a, острый угол при вершине A равен α, а длина перпендикуляра — b. Найдите:

1) расстояние от точки A до плоскостей KDB; KBC; KDC;

2) углы между прямой AK и прямыми CD; BD;

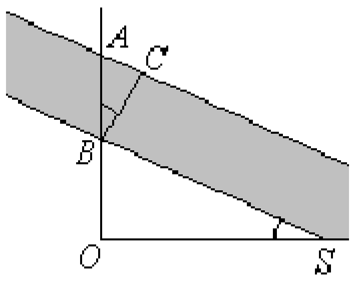
3) угол между прямой AK и плоскостью BDK;

4) углы между плоскостями ABK и KBC; ADK и DKC; ABK и DKC.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. 1), 2) Воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника, теоремой Пифагора; 3) воспользуйтесь признаком перпендикулярности плоскостей; 4) воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, теоремой о трёх перпендикулярах, соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника; 5) применив теоремы Пифагора и о трёх перпендикулярах, найдите два выражения для площади треугольника BCS. **2.** 1), 2) Воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника, теоремой Пифагора; 3) воспользуйтесь признаком перпендикулярности плоскостей; 4) воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, теоремой о трёх перпендикулярах, соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника; 5) применив теоремы Пифагора и о трёх перпендикулярах, найдите два выражения для площади треугольника BCS. **3.** 1), 2) Воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника. **4.** 1), 2) Воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, а также тем, что точка P равноудалена от всех верштн квадрата; 3) воспользуйтесь определением расстояния от точки до плоскости, соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника; 4) воспользуйтесь определением симметрии относительно плоскости. **5.** 1) Воспользуйтесь тем, что диагональ BD пересекает плоскость ACC_1, и точкой пересечения служит середина этой диагонали; 2) воспользуйтесь тем, что ортогональными проекциями диагонали B_1D на грани куба являются диагонали этих граней; 3) 3) воспользуйтесь тем, что $B_1O_1 \perp A_1C_1D$, где O_1 — середина A_1C_1; 4) воспользуйтесь тем, что основанием перпендикуляра, проведенного из точки D_1 к плоскости A_1C_1D является центр равностороннего треугольника A_1C_1D. **6.** 1) Докажите, что перпендикуляр BP, проведенный из точки B к прямой, содержащей высоту треугольника ABC, перпендикулярен плоскости AMC, не забудьте, что угол между плоскостями не превышает 90°; 2) воспользуйтесь определением линейного угла двугранного угла; 3) воспользуйтесь тем, что ортогональная проекция точки B на плоскость $ACMN$ лежит вне трапеции $ACMN$; 4) воспользовавшись результатом решения задания 1), примените теорему косинусов; 5) докажите, что искомый перпендикуляр является высотой треугольника с вершинами в точках B, серединах отрезков AC и MN, проведенным из последней указанной точки; 6) обратите внимание на то, что одна точка линии пересечения известна, вторая — является точкой пересечения прямых AM и NC. **7.** 1) Докажите, что перпендикуляр CP, проведенный из точки C к прямой, содержащей диагональ AC квадрата, перпендикулярен плоскости AMN, не забудьте, что угол между плоскостями не превышает 90°; 2) воспользуйтесь определением линейного угла двугранного угла; 3) воспользуйтесь тем, что ортогональная проекция точки B на плоскость $ACMN$ лежит вне трапеции $ACMN$; 4) воспользовавшись результатом решения задания 1), примените теорему косинусов; 5) докажите, что искомый перпендикуляр является высотой треугольника с вершинами в точках C, серединах отрезков BD и MN, проведенным из последней указанной точки; 6) обратите внимание на то, что одна точка линии пересечения известна, вторая — является точкой пересечения прямых BN и DM. **8.** 1) Воспользуйтесь определением линейного угла двугранного угла и теоремой о трёх перпендикулярах; 2) докажите, что их линейные углы равны 90°; 3) докажите, что искомый угол равен $\angle BAD$. **9.** 1) Воспользуйтесь тем, что оба треугольника являются равнобедренными с основаниями AB; 2) воспользуйтесь определением линейного угла двугранного угла; 3) докажите, что углы DKC и ANB — линейные углы указанных двугранных углов ($BN \perp AC$); воспользуйтесь теоремой косинусов. **10.** 1) Воспользуйтесь тем, что искомый угол равен углу MOA, где O центр грани $ABCD$; 2) воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, теоремой о трёх перпендикулярах; обратите внимание на то, что прямая C_1M пересекает плоскость DBD_1 в точке F, расположенной на отрезке, соединяющей центры O и O_1 граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ортогональной проекцией отрезка FM является отрезок, соединяющий точку F с серединой отрезка OO_1; 3) воспользуйтесь определением угла между скрещивающимися прямыми. **11.** 1) Воспользуйтесь тем, что ручка швабры является наклонной к плоскости пола, а длина перпендикуляра, проведенного из конца швабры к плоскости пола, равна расстоянию этого конца от пола; 2) воспользуйтесь соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. **12.** Найдите длину канатной дороги и воспользуйтесь соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. **13.** Закон отражения света: угол падения света равен углу отражения (см. рис.).

14. Проведите через точку M плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла, она пересекает ребро двугранного угла в точке O. Проведите также перпендикуляры MA и MB к граням двугранного угла. Задача свелась к нахождению диагонали MO четырёхугольника $MAOB$. Воспользуйтесь соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. **15.** Из произвольной точки одной грани двугранного угла проведите перпендикуляры к ребру и ко второй грани двугранного угла. **16.** Математическая модель ситуации представлена на рисунке. Длина бура с углём равна AB, а толщина угольного пласта — BC. Угол ABC равен углу падения угольного пласта BSO. **17.** Пусть $O = a \cap \alpha$. Отложите на трёх данных прямых плоскости α отрезки $OA = OB = OC$. Тогда точки прямой a равноудалены от вершин треугольника ABC. **18.** 1) Воспользуйтесь соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике; 2) воспользуйтесь определением угла между скрещивающимися прямыми; 3) воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью, теоремой о трёх перпендикулярах; 4) воспользуйтесь определением угла между двумя плоскостями, не забудьте, что угол между плоскостями не превышает 90°; угол между плоскостями ADK и DKC образован высотами к общей сто-



роне равных треугольников ADK и DKС; плоскости ABK и DKC пересекаются по прямой FK, параллельной CD, причём отрезки FK и CD равны.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{15}}$; 3) $ABD \perp SKC$; 4) 30°; 5) $\dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{57}}$.

2. 1) 60°; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; 3) $ABS \perp BDC$; 4) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$; 5) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **3.** 1) 30°; 2) 60°. **4.** 1) $60°$ и $30°$; 2) равные; 3) $4\sqrt{6}$. **5.** 1) $\approx 55°$; 2) равные; 3) $\approx 24°$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$. **6.** 1) 30°; 4) $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 5) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. **7.** 1) 30°; 4) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 5) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см.

8. 2) Равные; 3) 90°. **9.** 3) Равные.

10. 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **11.** 1) $\approx$ 1 м; 2) $30°$. **12.** $\approx$900 м. **14.** 1) $8\sqrt{2}$ см; 2) 16 см; 3) $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$ см. **15.** 30°. **16.** $\approx$ 1,8 м.

18. 1) $a\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $a\sin\alpha$; 2) $arctg\dfrac{b}{a}$, $\arccos\dfrac{a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}$; 3) $\arcsin\dfrac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}$;

4) α; $\pi - 2\operatorname{arctg}\dfrac{btg\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+4a^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{a\sin\alpha}{b}$.

Тренажёр

1. Перпендикулярность прямой и плоскости

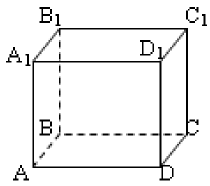
Вариант 1

1. Сторона AB правильного треугольника ABC лежит в плоскости α. Какая прямая из приведенных в ответах может быть перпендикулярной этой плоскости?

А. BC. **Б.** AM, где M — середина BC.

В. AC. **Г.** CD, где D — середина AB.

2. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскости грани ADD_1A_1 перпендикулярна прямая …



А. A_1C. **Б.** AC. **В.** DC. **Г.** DC_1.

3. Сколько плоскостей проходит через данную точку пространства перпендикулярно данной прямой?

А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Бесконечно много.

Г. Ответ зависит от расположения точки.

4. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости α, если прямая a перпендикулярна двум смежным сторонам параллелограмма, лежащего в плоскости α?

А. $a \perp \alpha$. **Б.** $a \parallel \alpha$. **В.** $a \subset \alpha$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

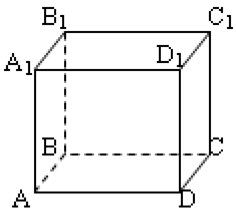
Вариант 2

1. Большее основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Какая прямая из приведенных в ответах может быть перпендикулярна этой плоскости?

А. BC. **Б.** MN, где M — середина BC, N — середина AD.

В. AB. **Г.** CD.

2. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскости грани B_1BC_1 перпендикулярна прямая…



А. AC. **Б.** BD . **В.** CD . **Г.** A_1C.

3. Сколько прямых можно провести в пространстве через точку перпендикулярно данной плоскости?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Две. **Г.** Бесконечно много.

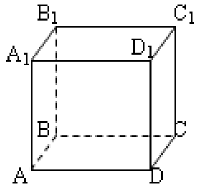
4. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости α, если прямая a перпендикулярна двум сторонам треугольника, лежащего в плоскости α?

А. $a \perp \alpha$. **Б.** $a \parallel \alpha$. **В.** $a \subset \alpha$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

Вариант 3

1. Меньшее основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Какая прямая из приведенных в ответах не может быть перпендикулярна этой плоскости?

А. BC. **Б.** AC. **В.** AB. **Г.** CD.



2. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскости грани ABB_1A_1 перпендикулярна прямая …

А. AD_1. **Б.** AC. **В.** AC_1. **Г.** AD.

3. Сколько прямых проходит через данную точку пространства перпендикулярно данной плоскости?

А. Бесконечно много. **Б.** Ни одной. **В.** Одна.

Г. Ответ зависит от расположения точки.

4. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости α, если прямая a перпендикулярна двум диаметрам круга, лежащего в плоскости α?

А. $a \subset \alpha$ **Б.** $a \perp \alpha$ **В.** $a \parallel \alpha$ **Г.** Ответ отличен от приведенных.

Подсказки

1. Воспользуйтесь свойствами многоугольника, заданного в задании для выбора прямой, удовлетворяющей требованию задания.

2. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

3. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости, рассмотрите различные случаи расположения данных в условии фигур.

4. Проверьте выполнимость условий признака перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей

Вариант 1

5. Если только одна из двух плоскостей перпендикулярна прямой, то эти плоскости …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** пересекаются.

Г. могут быть расположены как угодно.

6. Если прямая a перпендикулярна плоскости α, а плоскость α параллельна плоскости β, то прямая a и плоскость β ...

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** имеют две общие точки.

Г. могут быть расположены как угодно.

7. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Как расположены относительно прямой a плоскости, перпендикулярные плоскости α и не проходящие через точку пересечения a и α?

А. Пересекаются. **Б.** Параллельны. **В.** Перпендикулярны. **Г.** Содержат a.

8. Две стороны какого многоугольника из приведенных в ответах могут быть перпендикулярны одной плоскости?

А. Прямоугольной трапеции. **Б.** Треугольника.

В. Правильного пятиугольника. **Г.** Четырёхугольника с двумя парами равных смежных сторон, отличного от ромба.

Вариант 2

5. Если только одна из двух прямых перпендикулярна плоскости, то прямые…

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** пересекаются. **Г.** не параллельны.

6. Если одна из двух плоскостей перпендикулярна прямой, а другая плоскость параллельна этой прямой, то эти плоскости…

А. перпендикулярны. **Б.** совпадают. **В.** параллельны.

Г. параллельны или совпадают.

7. Если плоскость α перпендикулярна прямой b, а прямая a параллельна плоскости α, то прямые a и b ...

А. не параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** скрещиваются.

Г. могут быть расположены как угодно.

8. У какого четырехугольника из приведенных в ответах любые две противоположные стороны не могут быть перпендикулярны одной плоскости?

А. У прямоугольника. **Б.** У ромба. **В.** У трапеции. **Г.** У четырёхугольника с двумя парами равных смежных сторон, отличного от ромба.

Вариант 3

5. Если только одна из двух прямых перпендикулярна плоскости, то эти прямые …

А. скрещиваются. **Б.** пересекаются. **В.** не параллельны.

Г. могут быть расположены как угодно.

6. Если плоскость α параллельна прямой b, а прямая b перпендикулярна плоскости β, то плоскости α и β …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны.

В. параллельны или совпадают. **Г.** могут быть расположены как угодно.

7. Прямая a перпендикулярна плоскости α. Как расположены относительно плоскости α прямые, перпендикулярные прямой a и не проходящие через точку пересечения a и α?

А. Параллельны α. **Б.** Лежат в α. **В.** Перпендикулярны α. **Г.** Пересекают α.

8. Две стороны какого многоугольника из приведенных в ответах не могут быть перпендикулярны одной плоскости?

А. Треугольника. **Б.** Трапеции. **В.** Параллелограмма.

Г. Правильного шестиугольника.

Подсказки

5. Воспользуйтесь теоремой о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости, или теоремой о параллельных плоскостях, одна из которых перпендикулярна прямой.

6. Воспользуйтесь одной из теорем 1 — 6.

7. Воспользуйтесь одной из теорем 1 — 6.

8. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости, свойствами многоугольников, заданных в задании.

3. Перпендикулярность плоскостей

Вариант 1

9. Сечением куба плоскостью, перпендикулярной его грани, является …

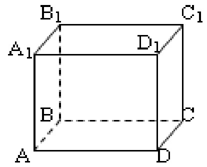
А. квадрат. **Б.** прямоугольник. **В.** треугольник.

Г. многоугольник, отличный от приведенных.

10. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, проходит через прямую, не перпендикулярную данной плоскости?

А. Бесконечно много. **Б.** Ни одной. **В.** Одна. **Г.** Две.

11. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость BDD_1 перпендикулярна плоскости …



А. C_1CD. **Б.** C_1B_1B. **В.** C_1CB. **Г.** $C_1D_1B_1$.

12. Если одна из двух плоскостей перпендикулярна прямой, а другая плоскость параллельна этой прямой, то эти плоскости …

А. перпендикулярны. **Б.** совпадают. **В.** параллельны.

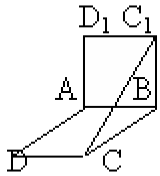
Г. параллельны или совпадают.

13. Если через данную точку можно провести плоскость, перпендикулярную двум данным плоскостям, то эти плоскости …

А. параллельны. **Б.** пересекаются. **В.** совпадают.

Г. могут быть расположены как угодно.

14. Плоскости квадратов $ABCD$ и ABC_1D_1 перпендикулярны. Расстояние CC_1 равно b. Длина отрезка AB равна …



А. $\frac{b}{2}$. **Б.** $\frac{b\sqrt{3}}{2}$. **В.** $b\sqrt{2}$. **Г.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 2

9. Какая фигура является сечением куба плоскостью, параллельной его ребру?

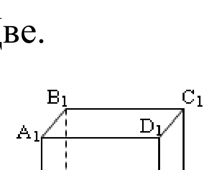
А. Прямоугольник. **Б.** Квадрат. **В.** Треугольник.

Г. Ответ отличен от приведенных.

10. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, проходит через прямую, параллельную данной плоскости?

А. Бесконечно много. **Б.** Ни одной. **В.** Одна. **Г.** Две.

11. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость ADC_1 перпендикулярна плоскости …



А. BA_1D_1. **Б.** C_1B_1B. **В.** A_1DC. **Г.** $C_1D_1B_1$.

12. Если плоскость α параллельна прямой b, а прямая b перпендикулярна плоскости β, то плоскости α и β …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** параллельны или совпадают.

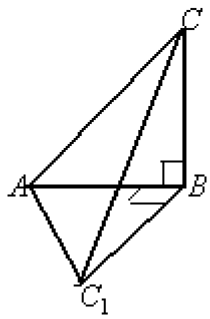
Г. могут быть расположены как угодно.

13. Если через данную точку можно провести прямую, перпендикулярную двум различным плоскостям, то эти плоскости …

А. перпендикулярны. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

Г. могут быть расположены как угодно.

14. Плоскости равнобедренных прямоугольных треугольников ABC и ABC_1 ($\angle ABC = \angle ABC_1 = 90°$) перпендикулярны. Расстояние CC_1 равно b. Длина отрезка AB равна …



А. $\frac{b}{2}$. **Б.** $\frac{b\sqrt{3}}{2}$. **В.** $b\sqrt{2}$. **Г.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 3.

9. Сечением куба плоскостью, перпендикулярной его ребру, является …

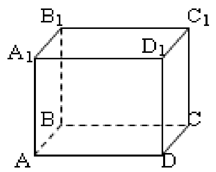
А. прямоугольник, не являющийся квадратом. **Б.** квадрат.

В. треугольник. **Г.** многоугольник, отличный от приведенных.

10. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, проходит через прямую, перпендикулярную данной плоскости?

А. Бесконечно много. **Б.** Ни одной. **В.** Одна. **Г.** Две.

11. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость A_1C_1C перпендикулярна плоскости …



А. BB_1C_1. **Б.** BCC_1. **В.** BCD. **Г.** BAA_1.

12. Если одна из двух перпендикулярных плоскостей параллельна прямой, то другая плоскость и эта прямая …

А. перпендикулярны. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

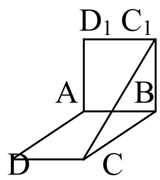
Г. могут быть расположены как угодно.

13. Если через данную точку нельзя провести прямую, перпендикулярную двум данным плоскостям, то эти плоскости …

А. параллельны. **Б.** пересекаются. **В.** перпендикулярны.

Г. могут быть расположены как угодно

14. Плоскости квадратов $ABCD$ и ABC_1D_1 перпендикулярны, $AB = a$. Расстояние CC_1 равно …



А. a. **Б.** $2a$. **В.** $a\sqrt{3}$. **Г.** $a\sqrt{2}$.

Подсказки

9. Воспользуйтесь свойствами линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей и двух перпендикулярных плоскостей плоскостью, перпендикулярной одной из этих плоскостей.

10. Обратите внимание на то, что ответ зависит от расположения прямой и плоскости.

11. Обратите внимание на то, что указанная плоскость содержит прямую, перпендикулярную данной плоскости.

12. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности плоскостей.

13. Рассмотрите различные случаи расположения плоскостей.

14. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

4. Ортогональное проектирование

Вариант 1

15. Проекцией куба при ортогональном проектировании параллельно его грани является …

А. квадрат. **Б.** прямоугольник. **В.** пятиугольник. **Г.** шестиугольник.

16. Какой угол является ортогональной проекцией прямого угла, одна сторона которого параллельна плоскости проекций, а другая ей не параллельна?

А. Прямой. **Б.** Острый. **В.** Тупой. **Г.** Любой из указанных.

17. Относительно какой из приведенных в ответах плоскостей симметрична данная плоскость?

А. Параллельной данной плоскости. **Б.** Пересекающей данную плоскость.

В. Перпендикулярной данной плоскости. **Г.** Любой плоскости.

18. Каково взаимное расположение прямой и её образа при симметрии относительно плоскости, параллельной данной прямой?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются.

В. Перпендикулярны. **Г.** Совпадают.

Вариант 2

15. Проекцией прямоугольного параллелепипеда при ортогональном проектировании параллельно его грани является …

А. квадрат. **Б.** прямоугольник. **В.** пятиугольник. **Г.** шестиугольник.

16. Какой угол является ортогональной проекцией прямого угла, если одна его сторона параллельна плоскости проекций?

А. Острый. **Б.** Прямой. **В.** Тупой. **Г.** Любой из указанных.

17. Относительно какой из приведенных в ответах плоскостей симметрична данная прямая?

А. Параллельной данной прямой. **Б.** Пересекающей данную прямую.

В. Перпендикулярной данной прямой. **Г.** Любой плоскости.

18. Каково взаимное расположение плоскости и её образа при симметрии относительно плоскости, перпендикулярной данной плоскости?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются.

В. Перпендикулярны. **Г.** Совпадают.

Вариант 3

15. Проекцией куба при ортогональном проектировании параллельно его ребру является …

А. квадрат. **Б.** прямоугольник, не являющийся квадратом.

В. пятиугольник. **Г.** шестиугольник.

16. Какой угол является ортогональной проекцией прямого угла, стороны которого параллельны плоскости проекций?

А. Тупой. **Б.** Острый. **В.** Прямой. **Г.** Любой из указанных.

17. Относительно какой из приведенных в ответах плоскостей симметричен данный отрезок?

А. Перпендикулярной данному отрезку и проходящей через один из его концов.

Б. Пересекающей данный отрезок в его середине.

В. Перпендикулярной данному отрезку и проходящей через его середину.

Г. Параллельной данному отрезку.

18. Каково взаимное расположение отрезка и его образа при симметрии относительно плоскости, содержащей отрезок?

А. Параллельны. **Б.** Пересекаются.

В. Перпендикулярны. **Г.** Совпадают.

Подсказки

14. Воспользуйтесь свойствами параллельного проектирования, определением ортогональной проекции.

15. Воспользуйтесь свойствами параллельного проектирования, определением ортогональной проекции.

16. Воспользуйтесь определением фигуры, симметричной относительно плоскости.

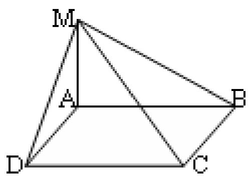
17. Воспользуйтесь определением фигуры, симметричной относительно плоскости.

18. Воспользуйтесь свойствами симметрии относительно плоскости.

5. Перпендикуляр и наклонная

Вариант 1

19. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ ($AB < BC$) проведен перпендикуляр AM к его плоскости. Точка M соединена с точками B, C, D. Какой из отрезков MA, MB, MC, MD имеет наибольшую длину?



А. MA. **Б.** MB. **В.** MC. **Г.** MD.

20. Из центра O круга радиуса 5 восстановлен перпендикуляр OA длины 5 к плоскости круга. Под каким углом из точки A виден диаметр круга?

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.

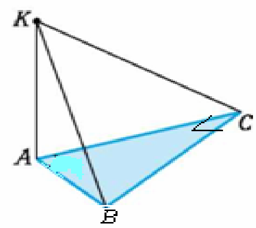
21. Геометрическим местом оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки, не лежащей на плоскости, к этой плоскости, является …

А. прямая. **Б.** отрезок. **В.** окружность . **Г.** круг.

22. Наклонная длины a составляет с плоскостью проекции угол 45^0. Проекция этой наклонной на плоскость равна …

А. $\sqrt{2}a$. **Б.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **В.** $\frac{2a}{\sqrt{2}}$. **Г.** a.

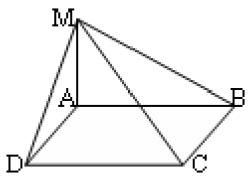
23. Из вершины A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведен перпендикуляр AK к плоскости треугольника (см. рис.). Сравните длины наклонных KB и KC.



А. $KB > KC$. **Б.** $KB = KC$.

В. $KB < KC$. **Г.** Сравнить нельзя.

Вариант 2



19. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр AM к его плоскости. Точка M соединена с точками B, C, D. Расположите отрезки MA, MB, MC, MD по возрастанию их длин.

А. $MA < MC < MB = MD$. **Б.** $MA < MB = MD < MC$.

В. $MB = MD < MA < MC$. **Г.** $MB = MD < MC < MA$.

20. Из центра O квадрата со стороной $\sqrt{2}$ восстановлен перпендикуляр OA длины $\sqrt{3}$ к плоскости квадрата. Под каким углом из точки A видна диагональ квадрата?

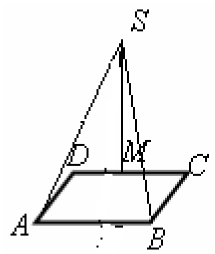
А. 30^0. **Б.** 60^0. **В.** 90^0. **Г.** 120^0.

21. Из данной точки, не лежащей на плоскости, к этой плоскости проведены всевозможные наклонные, имеющие проекции данной длины. Геометрическим местом оснований этих наклонных является …

А. прямая. **Б.** отрезок. **В.** окружность. **Г.** круг.

22. Наклонная длины a составляет с плоскостью проекции угол 30^0. Проекция этой наклонной на плоскость равна …

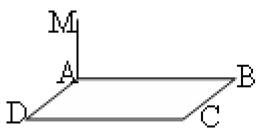
А. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Б.** $\frac{a}{2}$. **В.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **Г.** a.



23. Из середины M стороны CD прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр MS к его плоскости (см. рис.). Сравните длины наклонных SC и SB.

А. $SB > SC$. **Б.** $SB = SC$. **В.** $SB < SC$. **Г.** Сравнить нельзя.

Вариант 3



19. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ ($AB > BC$) проведен перпендикуляр AM к его плоскости. Наибольшим является расстояние от точки M до вершины …

А. *A*. **Б.** *B*. **В.** *C*. **Г.** *D*.

20. Из точки *A*, лежащей на окружности диаметра 6, проведен перпендикуляр *AB* длины 6 к плоскости окружности. Под каким углом из точки *B* виден диаметр окружности, проведенный через точку *A*?

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.

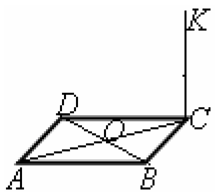
21. Геометрическим местом точек плоскости, равноудаленных от точки, лежащей вне плоскости, является …

А. отрезок. **Б.** круг. **В.** прямая. **Г.** окружность.

22. Точка отстоит от плоскости на *a*. Длина наклонной, проведенной из этой точки под углом 60^0 к плоскости, равна…

А. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **Б.** $\frac{a}{2}$. **В.** $\sqrt{2}a$. **Г.** $\frac{2}{\sqrt{3}}a$.

23. Из вершины *C* ромба *ABCD* проведен перпендикуляр *CK* к его плоскости (см. рис.). Сравните длины наклонных *KO* и *KB*.



А. $KB > KO$. **Б.** $KB = KO$. **В.** $KB < KO$. **Г.** Сравнить нельзя.

Подсказки

19. Примените теорему о свойствах наклонных и их проекций.

20. Воспользуйтесь определением перпендикуляра к плоскости и соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

21. Воспользуйтесь теоремой о свойствах наклонных и их проекций и определением окружности.

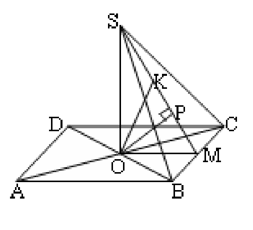
22. Воспользуйтесь определениями перпендикуляра, наклонной к плоскости, её проекции на эту плоскость, а также соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

23. Воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах.

6. Измерение расстояний в пространстве

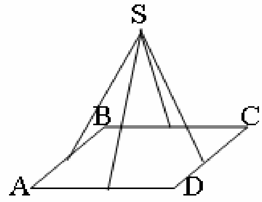
Вариант 1

24. Из центра *O* квадрата *ABCD* провели перпендикуляр *OS* к плоскости квадрата. *M* — середина *BC*. Расстояние от точки *O* до плоскости *BCS* равно …



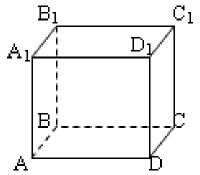
А. высоте OM Δ OBC. **Б.** медиане OK Δ OMS.

В. высоте OP Δ OMS. **Г.** перпендикуляру OS.



25. Точка S, не лежащая в плоскости квадрата $ABCD$, удалена от каждой из его сторон на 5 см. Сторона квадрата равна 6 см. Расстояние от точки S до плоскости квадрата равно …

А. $\sqrt{7}$ см. **Б.** 3 см. **В.** 4 см. **Г.** 1 см.



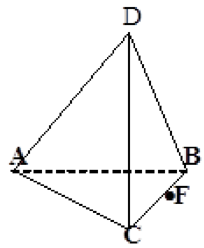
26. Расстояние от диагонали BC_1 грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a до грани ADD_1A_1 равно …

А. a. **Б.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **В.** $a\sqrt{2}$. **Г.** $a\sqrt{3}$.

27. Геометрическим местом точек пространства, расположенных на расстоянии $d \neq 0$ от данной плоскости, является …

А. прямая. **Б.** плоскость. **В.** пара параллельных плоскостей.

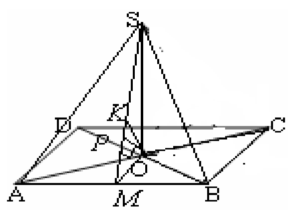
Г. фигура, отличная от приведенных.



28. На рисунке изображён правильный тетраэдр $ABCD$, F — середина BC. Расстоянием от точки D до ребра BC служит длина отрезка …

А. DB. **Б.** DC. **В.** DF. **Г.** отличного от приведенных.

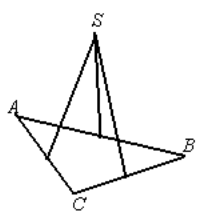
Вариант 2



24. Из точки O пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ провели перпендикуляр OS к плоскости прямоугольника. M — середина AB. Расстояние от точки O до плоскости ABS равно …

А. высоте OM Δ OBA. **Б.** медиане OK Δ OMS.

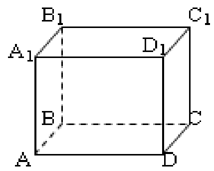
В. высоте OP Δ OMS. **Г.** перпендикуляру OS.



25. Точка S, не лежащая в плоскости правильного треугольника ABC, удалена от каждой из его сторон на 2 см. Сторона треугольника равна 6 см. Расстояние от точки S до плоскости треугольника равно …

А. $\sqrt{5}$ см. **Б.** 1 см. **В.** 2 см. **Г.** 3 см.

26. Расстояние от диагонали AB_1 грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до грани CDD_1C_1 равно a. Ребро куба равно …



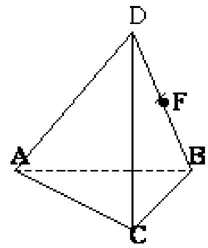
А. a. **Б.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **В.** $a\sqrt{2}$. **Г.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

27. Геометрическим местом точек пространства, равноудалённых от двух данных точек, является …

А. прямая. **Б.** плоскость. **В.** пара параллельных плоскостей.

Г. пара параллельных прямых.

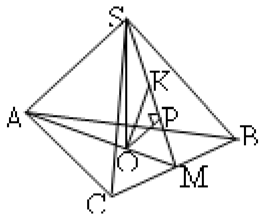
28. На рисунке изображён правильный тетраэдр $ABCD$, F — середина DB. Расстоянием от точки A до ребра DB служит длина отрезка …



А. AB. **Б.** AD. **В.** AF. **Г.** отличного от приведенных.

Вариант 3

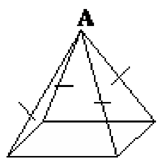
24. Из центра O правильного треугольника ABC проведен перпендикуляр OS к плоскости треугольника, M — середина BC. Расстояние от точки O до плоскости BCS равно длине …



А. высоты OM ΔOBC. **Б.** медианы OK ΔOSM.

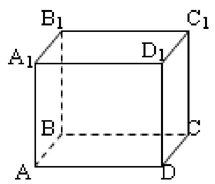
В. высоты OP ΔOSM. **Г.** отрезка OS.

25. Точка A, не лежащая в плоскости квадрата со стороной $6\sqrt{2}$ см, удалена от каждой из его вершин на 10 см. Расстояние от точки A до плоскости квадрата равно …



А. 6 см. **Б.** 8 см. **В.** $6\sqrt{2}$ см. **Г.** $8\sqrt{2}$ см.

26. Расстояние от диагонали BA_1 грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a до грани CDD_1C_1 равно …

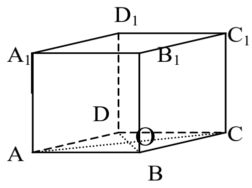


А. $a\sqrt{3}$. **Б.** $a\sqrt{2}$. **В.** a. **Г.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

27. Геометрическим местом точек пространства, равноудалённых от пары параллельных плоскостей, является …

А. плоскость. **Б.** прямая. **В.** пара параллельных плоскостей.

Г. фигура, отличная от приведенных.



28. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. O — центр квадрата $ABCD$. Расстоянием от вершины C_1 до диагонали BD грани служит длина отрезка …

А. C_1D. **Б.** C_1O. **В.** C_1B. **Г.** отличного от приведенных.

Подсказки

24. Воспользуйтесь определением расстояния от точки до плоскости.

25. Воспользуйтесь определением расстояния от точки до плоскости и планиметрическими теоремами об окружностях, вписанных в треугольник или четырёхугольник, или описанных около них.

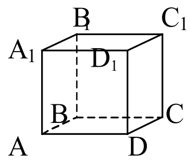
26. Воспользуйтесь определением расстояния от прямой до плоскости.

27. Воспользуйтесь определением расстояния между плоскостями.

28. Воспользуйтесь определением расстояния от точки до плоскости, свойством медианы равнобедренного треугольника.

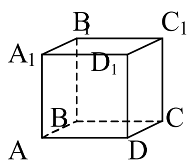
7. Измерение углов в пространстве

Вариант 1



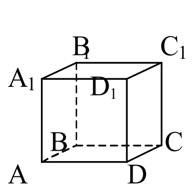
29. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равен угол между прямыми B_1A и B_1D_1?

А. 90°. **Б.** 60°. **В.** 45°. **Г.** 30°.



30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямая BA_1 образует с плоскостью D_1DA угол …

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.



31. Угол наклона диагонали C_1D грани CDD_1C_1 к грани ADD_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен …

А. $\angle C_1D_1A_1$. **Б.** $\angle C_1D_1A$. **В.** $\angle C_1DA_1$. **Г.** $\angle C_1DD_1$.

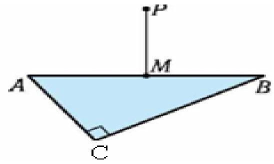
32. Прямая наклонена к плоскости под углом 60^0. В плоскости есть прямая, которая образует с данной прямой угол в …

А. 75^0. **Б.** 55^0. **В.** 45^0. **Г.** 15^0.

33. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 4 см, а длина отрезка прямой, заключенного между этими плоскостями, равна 8 см. Какие углы образует прямая с этими плоскостями?

А. 45^0 и 45^0. **Б.** 60^0 и 60^0. **В.** 30^0 и 60^0. **Г.** 30^0 и 30^0.

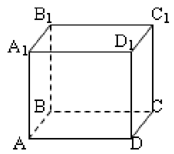
34. Из середины M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр MP к плоскости треугольника (см. рис.). Сравните углы наклона прямых PA, PB, PC к плоскости ABC.



А. $\angle PBM = \angle PAM = \angle PCM$. **Б.** $\angle PBM = \angle PAM < \angle PCM$.

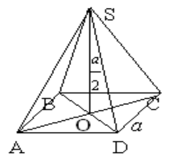
В. $\angle PBM = \angle PAM > \angle PCM$. **Г.** $\angle PBM < \angle PAM < \angle PCM$.

35. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равен угол между плоскостями AA_1B_1 и B_1C_1D?



А. 45^0. **Б.** 90^0. **В.** 60^0. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

36. Из центра O квадрата $ABCD$ восстановлен перпендикуляр OS, который вдвое короче стороны квадрата. Угол между плоскостями SDC и ABC равен ...



А. $45°$. **Б.** $30°$. **В.** $60°$. **Г.** $arctg\dfrac{2}{\sqrt{2}}$.

37. Угол между плоскостями не может быть равен …

А. 45^0. **Б.** 95^0. **В.** 85^0. **Г.** 5^0.

38. Какой угол образует плоскость линейного угла двугранного угла величиной 30^0 с каждой из его граней?

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.

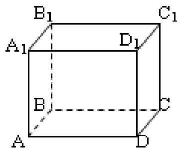
39. Сравните площадь S проектируемой плоской фигуры с площадью S_1 её ортогональной проекции на некоторую плоскость.

А. $S = S_1$. **Б.** $S < S_1$. **В.** $S > S_1$. **Г.** $S \geq S_1$.

40. Ортогональной проекцией правильного треугольника на плоскость, содержащую одну из его вершин, является равнобедренный прямоугольный треугольник. Угол между плоскостями этих треугольников равен …

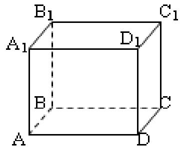
А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **Г.** 60^0.

Вариант 2



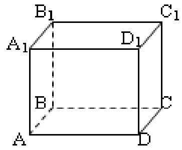
29. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Угол между прямыми C_1B и C_1D равен

А. 30°. **Б.** 45°. **В.** 60°. **Г.** 90°.



30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямая C_1D образует с плоскостью ABC угол …

А. 45^0. **Б.** 30^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.



31. Угол наклона диагонали B_1C грани BCC_1B_1 к грани CDD_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен …

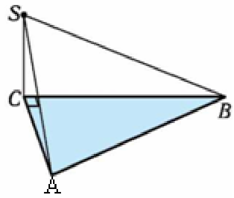
А. $\angle B_1C_1D$. **Б.** $\angle B_1DC_1$. **В.** $\angle B_1CC_1$. **Г.** $\angle B_1CD$.

32. Прямая наклонена к плоскости под углом 75^0. В плоскости есть прямая, которая образует с данной прямой угол в …

А. 30^0. **Б.** 45^0 . **В.** 60^0. **Г.** 80^0.

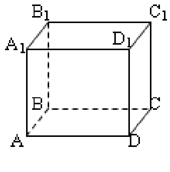
33. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 6 см, а длина отрезка прямой, заключенного между этими плоскостями, равна $6\sqrt{2}$ см. Какие углы образует прямая с этими плоскостями?

А. 45^0 и 45^0. **Б.** 60^0 и 60^0. **В.** 30^0 и 60^0. **Г.** 30^0 и 30^0.



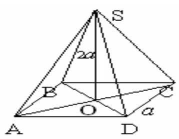
34. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр CS к плоскости ABC (см. рис.). Сравните катеты AC и BC, если угол наклона наклонной SA к плоскости ABC больше угла наклона наклонной SB к этой плоскости.

А. $AC = BC$. **Б.** $AC < BC$. **В.** $AC > BC$. **Г.** Сравнить нельзя.



35. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равен угол между плоскостями BB_1C_1 и B_1D_1D?

А. 45^0. **Б.** 90^0. **В.** 60^0. **Г.** Ответ отличен от приведенных.



36. Из центра O квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр OS к его плоскости, который вдвое длиннее стороны квадрата. Угол между плоскостями SDC и ABC равен ...

А. arctg 4. **Б.** arctg 2. **В.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{13}}$. **Г.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

37. Угол между плоскостями не может быть равен …

А. 1^0. **Б.** 60^0. **В.** 90^0. **Г.** 120^0.

38. Какой угол образует плоскость линейного угла двугранного угла величиной 60^0 с каждой из его граней?

А. 90^0. **Б.** 60^0. **В.** 45^0. **Г.** 30^0.

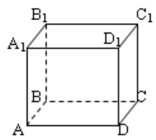
39. Сравните площадь S_1 ортогональной проекции плоской фигуры на некоторую плоскость с площадью S проектируемой фигуры.

А. $S_1 = S$. **Б.** $S_1 < S$. **В.** $S_1 > S$. **Г.** $S_1 \leq S$.

40. Ортогональной проекцией квадрата на плоскость, содержащую одну из его вершин, является ромб. Сторона квадрата равна 12 см, а одна из диагоналей ромба — $6\sqrt{2}$ см. Угол между плоскостями квадрата и ромба равен …

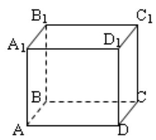
А. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **Б.** 60^0 . **В.** 45^0. **Г.** 30^0.

Вариант 3



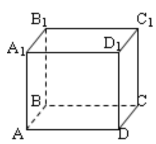
29. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Угол между прямыми AD_1 и CD_1равен …

А. 30°. **Б.** 45°. **В.** 60°. **Г.** 90°.



30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямая BC_1 образует с плоскостью D_1DC угол …

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.



31. Угол наклона диагонали A_1B грани ABB_1A_1 к грани BCC_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен …

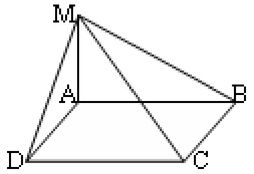
А. $\angle A_1B_1C_1$. **Б.** $\angle A_1BC$. **В.** $\angle A_1BB_1$. **Г.** $\angle A_1BC_1$.

32. Прямая пересекает плоскость α, в которой имеется прямая, образующая с данной прямой угол 65^0. Угол между данной прямой и плоскостью α может равняться …

А. 60^0. **Б.** 70^0. **В.** 80^0. **Г.** 75^0.

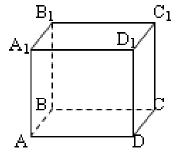
33. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2 м, пересечены прямой, образующей с каждой из них угол 60^0. Длина отрезка прямой, заключенной между этими плоскостями, равна …

А. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ м. **Б.** $4\sqrt{3}$ м. **В.** $4\sqrt{2}$ м. **Г.** $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ м.



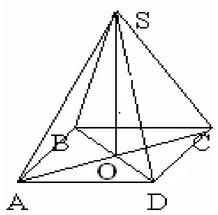
34. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр AM к плоскости $ABCD$ (см. рис.). Сравните углы α и β между плоскостями CMD и CMB с плоскостью ABC.

А. $\alpha = \beta$. **Б.** $\alpha < \beta$. **В.** $\alpha > \beta$. **Г.** Сравнить нельзя.



35. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равен угол между плоскостями AA_1B_1 и BDD_1?

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** Ответ отличен от приведенных.



36. Из центра O квадрата $ABCD$ со стороной 4 см восстановлен перпендикуляр OS. Угол между плоскостями SDC и ABC равен $30°$. Длина перпендикуляра OS равна ...

А. $2\sqrt{3}$ см. **Б.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ см. **В.** $4\sqrt{3}$ см. **Г.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ см.

37. Угол между различными плоскостями может равняться…

А. 70^0. **Б.** 110^0. **В.** 0^0. **Г.** 98^0.

38. Мера двугранного угла 130^0. Угол между плоскостями его граней равен …

А. 130^0. **Б.** 50^0. **В.** либо 130^0, либо 50^0. **Г.** 90^0.

39. Сравните отношение p площадей плоских фигур, лежащих в одной плоскости, проектируемых на одну плоскость, с отношением q площадей их ортогональных проекций на эту плоскость.

А. $p = q$. **Б.** $p < q$. **В.** $p > q$. **Г.** Сравнить нельзя.

40. Ортогональной проекцией ромба на плоскость, содержащую одну из его вершин, является квадрат. Если диагонали ромба равны 9 см и 18 см, то угол между плоскостями ромба и квадрата равен …

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** $\arccos 0{,}8$. **Г.** 60^0.

Подсказки

29. Обратите внимание на вид треугольника, образованного данными прямыми.

30. Воспользуйтесь тем, что угол между прямой и плоскостью — это угол между этой прямой и её ортогональной проекцией на эту плоскость.

31. Воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью.

32. Обратите внимание на то, что угол между прямой, пересекающей плоскость, и ее ортогональной проекцией на эту плоскость является наименьшим среди всех других углов между данной прямой и прямыми, пересекающими ее и лежащими в данной плоскости.

33. Воспользуйтесь определениями расстояния между плоскостями, угла между прямой и плоскостью и соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

34. Воспользуйтесь теоремой о трёх перпендикулярах, определениями углов между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями.

35. Воспользуйтесь определением угла между двумя плоскостями.

36. Воспользуйтесь определением угла между двумя плоскостями, соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

37. Обратите внимание на то, в каких пределах может находиться угол между двумя плоскостями.

38. Воспользуйтесь определениями двугранного угла и его линейного угла.

39. Воспользуйтесь соотношением между площадью ортогональной проекции плоской фигуры на некоторую плоскость и площадью проектируемой фигуры.

40. Воспользуйтесь соотношением между площадью ортогональной проекции плоской фигуры на некоторую плоскость и площадью проектируемой фигуры. Воспользуйтесь решением примера 4.

Ответы к заданиям 1-го варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Г	В	Б	А	В	Б	Б	А	Б	В	Г	А	Г	Г
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Б	А	В	А	В	Г	В	Б	А	В	В	А	В	В
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
Б	Б	Г	А	Г	А	Б	А	Б	Г	Г	В		

Ответы к заданиям 2-го варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Б	В	Б	А	Г	А	А	Г	А	В	А	Б	В	Г
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Б	Б	В	Г	Б	Б	В	А	А	В	Б	А	Б	В
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
В	А	В	Г	А	Б	А	А	Г	А	Г	Б		

Ответы к заданиям 3-го варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
А	Г	В	Б	В	Б	А	А	Б	А	В	Г	Б	Г
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
А	В	В	Г	В	Б	Г	Г	А	В	Б	В	А	Б
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
В	Б	В	А	А	А	Б	Г	А	Б	А	Г		

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		Контрольный тест	Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	20 заданий	10 заданий	–
«хорошо»	Решено не менее	25 заданий	12 заданий	5 заданий
«отлично»	Решено не менее	30 заданий	16 заданий	8 заданий

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

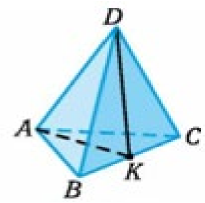
Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α. Какая прямая из приведенных в ответах может быть перпендикулярна плоскости α?

А. BC. **Б.** AM, где M — основание биссектрисы угла A.

В. AC. **Г.** CD, где D — середина AB.

2. На рис. изображен правильный тетраэдр $ABCD$, K — середина ребра BC. Какое из следующих утверждений верно?



А. $DK \perp ABC$. **Б.** $BC \perp AKD$. **В.** $AD \perp ABC$. **Г.** $CD \perp AKD$.

3. Сколько плоскостей можно провести в пространстве через точку, не лежащую на прямой, перпендикулярных этой прямой?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Две. **Г.** Бесконечно много.

4. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости α, если прямая a перпендикулярна двум сторонам трапеции, лежащей в плоскости α?

А. $a \perp \alpha$. **Б.** $a \parallel \alpha$. **В.** $a \subset \alpha$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

5. Если одна из двух пересекающихся прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая и эта плоскость …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** пересекаются.

Г. не перпендикулярны.

6. Если прямая a параллельна плоскости β, а плоскость β перпендикулярна прямой b, то прямые a и b …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** пересекаются.

Г. находятся в положении, отличном от приведенных.

7. Если плоскость α параллельна прямой $\boldsymbol{b}$, а прямая $\boldsymbol{b}$ перпендикулярна плоскости β, то плоскости α и β …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны. **В.** параллельны или совпадают.

Г. могут быть расположены как угодно.

8. Две стороны какой фигуры из приведенных в ответах не могут быть перпендикулярны ~~к~~ одной плоскости?

А. Ромба. **Б.** Равнобедренной трапеции.

В. Параллелограмма. **Г.** Треугольника.

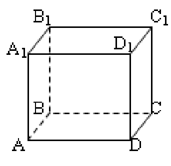
9. Какая фигура является сечением куба плоскостью, параллельной его ребру?

А. Прямоугольник. **Б.** Квадрат. **В.** Треугольник.

Г. Ответ отличен от приведенных.

10. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, проходит через точку, принадлежащую этой плоскости?

А. Бесконечно много. **Б.** Ни одной. **В.** Одна. **Г.** Две.



11. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость B_1BD перпендикулярна плоскости …

А. BB_1C_1. **Б.** CAA_1. **В.** AB_1B. **Г.** BCC_1.

12. Если одна из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярна прямой, то другая плоскость и эта прямая …

А. параллельны. **Б.** перпендикулярны.

В. параллельны или перпендикулярны.

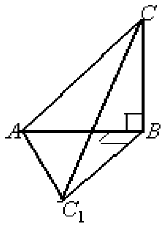
Г. либо не имеют общих точек, либо имеют их бесконечно много.

13. Если через данную точку можно провести бесконечно много плоскостей, перпендикулярных двум данным плоскостям, то эти плоскости …

А. перпендикулярны. **Б.** пересекаются. **В.** параллельны.

Г. могут быть расположены как угодно.

14. Плоскости равнобедренных прямоугольных треугольников ABC и ABC_1 ($\angle ABC = \angle ABC_1 = 90°$) перпендикулярны, $AB = a$. Расстояние CC_1 равно…



А. a **Б.** $2a$ **В.** $a\sqrt{3}$ **Г.** $a\sqrt{2}$.

15. Проекцией прямоугольного параллелепипеда при ортогональном проектировании параллельно его ребру является …

А. квадрат. **Б.** прямоугольник. **В.** пятиугольник. **Г.** шестиугольник.

16. Какой угол может быть ортогональной проекцией острого угла?

А. Тупой. **Б.** Острый. **В.** Прямой. **Г.** Любой из указанных.

17. Относительно какой из приведенных в ответах плоскостей симметричен данный луч?

А. Перпендикулярной данному лучу. **Б.** Пересекающей данный луч.

В. Содержащей данный луч. **Г.** Такой плоскости не существует.

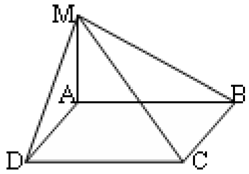
18. Каково множество всех точек, каждая из которых при симметрии относительно плоскости α отображаются на себя?

А. Плоскости, перпендикулярные плоскости α.

Б. Плоскости, пересекающие плоскость α.

В. Плоскости, параллельные плоскости α. **Г.** Плоскость α.

19. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр AM к его плоскости. Точка M соединена с точками B, C, D. Расположите отрезки MA, MB, MC, MD по убыванию их длин.



А. $MC > MD = MB > MA$. **Б.** $MA > MB = MD > MC$.

В. $MB = MD > MA > MC$. **Г.** $MB = MD > MC > MA$.

20. Из точки A, лежащей на окружности диаметра 2, проведен перпендикуляр AB длины $\sqrt{3}$ к плоскости окружности. Под каким углом из точки B виден радиус окружности, проведенный через точку A?

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.

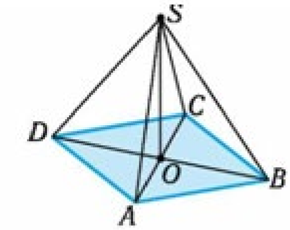
21. Геометрическим местом оснований наклонных к плоскости, проведенных из точки, лежащей вне плоскости, и наклонённых к этой плоскости под одним и тем же углом, является …

А. отрезок. **Б.** круг. **В.** прямая. **Г.** окружность.

22. Точка отстоит от плоскости на a. Длина наклонной, проведенной из этой точки под углом 45^0 к плоскости, равна …

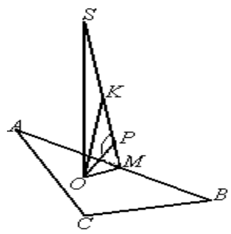
А. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **Б.** $\frac{a}{2}$. **В.** $\sqrt{2}a$. **Г.** $\frac{2}{\sqrt{3}}a$.

23. Из центра симметрии O параллелограмма $ABCD$ проведен перпендикуляр OS к его плоскости (см. рис.). Сравните длины наклонных SA и SC.



А. $SA > SC$. **Б.** $SA = SC$. **В.** $SA < SC$. **Г.** Сравнить нельзя.

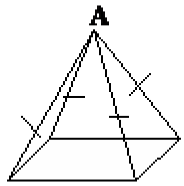
24. Из центра O описанной около треугольника ABC окружности проведен перпендикуляр OS к плоскости треугольника, M — середина AB (см. рис.). Расстояние от точки O до плоскости ABS равно длине …



А. высоты OM ΔOAB. **Б.** биссектрисы OK ΔOSM.

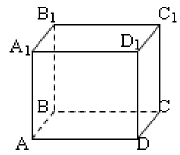
В. высоты OP ΔOSM. **Г.** отрезка OS.

25. Точка A, не лежащая в плоскости квадрата со стороной $4\sqrt{3}$ см, удалена от каждой из его вершин на 5 см. Расстояние от точки A до плоскости квадрата равно …



А. 1 см. **Б.** 4 см. **В.** $3\sqrt{2}$ см. **Г.** $4\sqrt{2}$ см.

26. Расстояние от диагонали DA_1 грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до грани BCC_1B_1 равно a. Диагональ DA_1 равна …



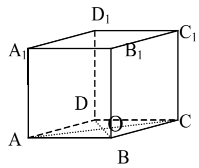
А. $a\sqrt{3}$. **Б.** $a\sqrt{2}$. **В.** a. **Г.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

27. Геометрическим местом точек плоскости α, равноудалённых от пары параллельных плоскостей β и γ, является …

А. плоскость. **Б.** прямая. **В.** пара параллельных плоскостей.

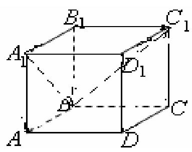
Г. фигура, отличная от приведенных.

28. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. O — центр квадрата $ABCD$. Расстоянием от вершины B_1 до диагонали AC грани служит длина отрезка …



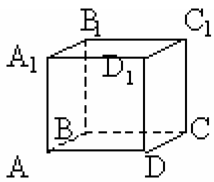
А. B_1A. **Б.** B_1O. **В.** B_1C. **Г.** отличного от приведенных.

29. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равен угол между прямыми A_1B и C_1B?



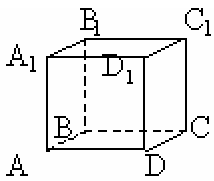
А. 30°. **Б.** 45°. **В.** 60°. **Г.** 90°.

30. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямая CB_1 образует с плоскостью A_1AB угол …



А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** 60^0. **Г.** 90^0.

31. Угол наклона диагонали AD_1 грани ADD_1A_1 к грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен …



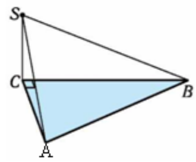
А. $\angle A_1D_1B$. **Б.** $\angle AD_1B_1$. **В.** $\angle AD_1C_1$. **Г.** $\angle A_1D_1A$.

32. Прямая наклонена к плоскости под углом 45^0. В плоскости нет прямой, образующей с данной прямой угол в …

А. 30^0. **Б.** 50^0. **В.** 60^0. **Г.** 80^0.

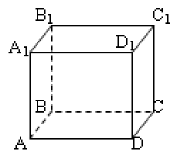
33. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 5 см, пере сечены прямой, образующей с каждой из них угол 45^0. Длина отрезка прямой, заключенной между этими плоскостями, равна …

А. $\frac{10}{\sqrt{3}}$ см. **Б.** $10\sqrt{2}$ см. **В.** $5\sqrt{2}$ см. **Г.** $\frac{5}{\sqrt{2}}$ см.



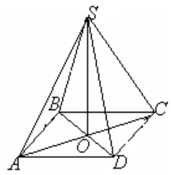
34. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр CS к плоскости ABC (см. рис.). Сравните катеты AC и BC, если угол наклона наклонной SA к плоскости ABC меньше угла наклона наклонной SB к этой плоскости.

А. $AC = BC$. **Б.** $AC < BC$. **В.** $AC > BC$. **Г.** Сравнить нельзя.



35. На рисунке изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равен угол между плоскостями A_1D_1D и B_1D_1D?

А. 45^0. **Б.** 90^0. **В.** 60^0. **Г.** Ответ отличен от приведенных.



36. Из центра O квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр OS к его плоскости длиной 4 см. Угол между плоскостями SDC и ABC равен 60°. Сторона квадрата равна …

А. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см. **Б.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$ см. **В.** $4\sqrt{3}$ см. **Г.** $8\sqrt{3}$ см.

37. Угол между неперпендикулярными плоскостями может быть равен …

А. 1^0. **Б.** 150^0. **В.** 90^0 . **Г.** 120^0.

38. Мера двугранного угла равна 140^0. Угол между плоскостями его граней равен …

А. 140^0. **Б.** 40^0. **В.** либо 140^0, либо 40^0. **Г.** 50^0.

39. Сравните отношение q площадей ортогональных проекций плоских фигур, лежащих в одной плоскости, с отношением p площадей этих фигур.

А. $q = p$. **Б.** $q < p$. **В.** $q > p$. **Г.** Сравнить нельзя.

40. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на некоторую плоскость вдвое меньше площади этого многоугольника. Угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен …

А. 30^0. **Б.** 45^0. **В.** $\arccos\frac{2}{3}$. **Г.** 60^0.

Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений. Условия задач записывать необязательно, но в решении нужно обязательно указывать номер задачи в пособии.

1. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 2 точка M — середина DB, а N — середина AC.

1) Докажите, что прямая BD и плоскость BDN перпендикулярны плоскости AMC.

2) Через точку пересечения медиан треугольника ADC проведите прямую, перпендикулярную плоскости AMC, и найдите длину отрезка этой прямой внутри тетраэдра. В каком отношении делит этот отрезок плоскость AMC?

2. Точка M находится вне плоскости квадрата $ABCD$ со стороной a на расстоянии a от всех его вершин. O — центр квадрата.

1) Определите взаимное расположение прямой MO и плоскости ABC; плоскостей AMC и BDM.

2) Найдите расстояние от точки C до плоскости BMD;

3) Найдите угол: между прямой AM и плоскостью ABC; между плоскостями DMC и ABC, AMB и DMC; между прямыми MC и DB.

4) Найдите расстояние: от точки O до плоскости MDC; от прямой AB до плоскости MDC; между прямыми AM и DC.

3. Из центра O правильного треугольника ABC со стороной 2 см проведен перпендикуляр OS длиной 2 см.

1°) Определите взаимное расположение прямой AB и плоскости OCS.

2°) Определите взаимное расположение плоскостей OSC и ABC.

3°) Найдите расстояние от точки A до плоскости OSC.

4°) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ABC.

5°) Найдите угол между плоскостями SBC и ABC.

6) Постройте плоскость, проходящую через середину отрезка AS параллельно плоскости SBC, и найдите расстояние между этими плоскостями.

4. Докажите, что если прямая образует равные углы со сторонами треугольника, то она перпендикулярна плоскости треугольника.

5. $ABCD$ — тетраэдр; $AD = DC = 5$; $AB = BC = 3$; $AC = DB = 4$; K — середин AC.

1) Докажите, что $DB \perp ABC$.

2) Докажите, что $BK \perp DB$.

3) Постройте сечение, проходящее через точку K перпендикулярно AC.

4) Докажите, что AB не перпендикулярна плоскости DBC.

5) Определите вид четырёхугольника, вершинами которого служат середины рёбер AD, DC, BC, AB.

6) Найдите расстояние между серединами AD и BC.

6. Точка A не принадлежит плоскости α; прямые MK и MN лежат в этой плоскости; $\angle AMN = \angle NMK = 90°$. Найдите взаимно перпендикулярные плоскость и прямую.

7. Плоскости квадрата $ABCD$ и равностороннего треугольника ABK взаимно перпендикулярны, $AB = a$. Найдите:

1) длину KC;

2) расстояние от D до плоскости AKB;

3) расстояние от B до плоскости DAK;

4) угол между прямыми AK и DB.

8. $ABCD$ — ромб; точка M не лежит в его плоскости; $AM = MB = MC$; DM перпендикулярна плоскости ABC. Найдите углы ромба.

Указания к задачам основного задания

1. 1) Примените признаки перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей. Чем являются отрезки BM и CM для соответствующих граней тетраэдра? Как размещены между собой искомая прямая и прямая BD? Где находятся точки пересечения этой прямой с плоскостью AMC? С плоскостью ABC?

2) Нужно определить, в каком отношении отрезок искомой прямой, размещенный внутри тетраэдра, делится плоскостью ANC.

2. 1) Примените признаки перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей.

2) Воспользуйтесь определением расстояния от точки до плоскости.

3) Выразите угол между плоскостями *AMB* и *DMC* через угол между плоскостями *DMC* и *ABC*. Для нахождения угла между прямыми *MC* и *DB* можно применить признак перпендикулярности прямой и плоскости или теорему о трех перпендикулярах.

4) Для нахождения расстояния между *AM* и *DC* спроектируйте эти прямые на плоскость, перпендикулярную *DC*.

3. 1) Примените теорему о трёх перпендикулярах и признак перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Примените признак перпендикулярности двух плоскостей.

3) Воспользуйтесь определением расстояния между точкой и плоскостью.

4) Воспользуйтесь определением угла между прямой и плоскостью.

5) Воспользуйтесь определением угла между двумя плоскостями.

6) Проведите через середину стороны *AB* прямую, параллельную плоскости *SBC*.

4. Докажите, что если прямая одинаково наклонена к двум пересекающимся прямым плоскости α и проходят через точку их пересечения, то она ортогонально проектируется на биссектрису угла между этими прямыми**.**

5. 1) Примените теорему, обратную теореме Пифагора.

2) Воспользуйтесь определением перпендикулярности прямой и плоскости.

3) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

4) Примените метод «от противного».

5) Воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.

6) Воспользуйтесь результатом решения задания 5).

6. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

7. 1) Воспользуйтесь теоремой о линии пересечения перпендикулярных плоскостей.

2) Воспользуйтесь теоремой о линии пересечения перпендикулярных плоскостей.

3) Воспользуйтесь определением расстояния между точкой и плоскостью.

4) Воспользуйтесь определением угла между скрещивающимися прямыми.

8. Воспользуйтесь теоремой о свойстве наклонных и их проекций.

Дополнительное задание

1. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a, M — точка пересечения медиан треугольника DBC. Найдите:

1) стороны треугольника, вершины которого являются ортогональными проекциями точки M на остальные грани тетраэдра;

2) расстояние от точки M до плоскости этого треугольника.

2. Найдите угол между двумя прямыми l_1 и l_2, если расстояние между точками $A \in l_1$ и $B \in l_2$, равноотстоящими от оснований $C \in l_1$ и $D \in l_2$ общего перпендикуляра к этим прямым, равно $2a$, а $DC = AC = BD = a$.

3. Может ли ортогональной проекцией прямоугольника, стороны которого 8 см и 9 см, быть квадрат, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см?

4. Плоскость γ составляет с двумя из трех взаимно перпендикулярных плоскостей углы α и β. Какой угол составляет плоскость γ с третьей плоскостью?

5. Четырехугольник $ABCD$ — ромб, угол A равен α, $AB = a$. Расстояние от точки M до плоскости ромба равно a, M_1 — ортогональная проекция точки M на плоскость ромба — лежит на отрезке AC и $M_1A = 3M_1C$. Найдите:

1) расстояния от точки M до прямых AB и DC, от точки B до плоскости MM_1C;

2) углы между прямой MD и плоскостью MM_1C, между плоскостями AMB и DMC;

3) точки пересечения плоскости, которая проходит через точку A и середины отрезков BM и MD с прямой MC.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2.

1) Докажите, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BDD_1.

2) Докажите, что плоскость A_1C_1D перпендикулярна прямой BD_1.

3) Через точку K, середину C_1D_1, проведите прямую, перпендикулярную плоскости A_1C_1D.

4) Найдите длину отрезка этой прямой внутри куба.

5) В каком отношении плоскость A_1C_1D делит данный отрезок, считая от точки K?

Указания к задачам дополнительного задания

1. 1) Покажите, что ортогональная проекция точки M на грань тетраэдра находится на медиане этой грани.

2) Воспользуйтесь определением расстояния от точки до плоскости и теоремой Пифагора.

2. Воспользуйтесь определением угла между скрещивающимися прямыми.

3. Докажите, что если ортогональной проекцией прямоугольника является квадрат, то меньшая сторона прямоугольника равна стороне квадрата.

4. Используйте тот факт, что плоские углы трёхгранного угла, образованные данными плоскостями, равны 90°.

5. 1) Примените теорему о трёх перпендикулярах.

2) Воспользуйтесь определениями угла между прямой и плоскостью, угла между двумя плоскостями.

3) Воспользуйтесь теоремой о линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельною другой.

6. 1) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Воспользуйтесь признаком перпендикулярности двух плоскостей.

3) Проведите в плоскости BD_1C_1 прямую, параллельную BD_1.

4) Воспользуйтесь свойствами средней линии треугольника.

5) Воспользуйтесь тем, что треугольник A_1C_1D равносторонний, а $BD_1 \perp A_1C_1D$.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Пособие для дополнительного обучения математике

обучающихся 10 классов

Учебное пособие