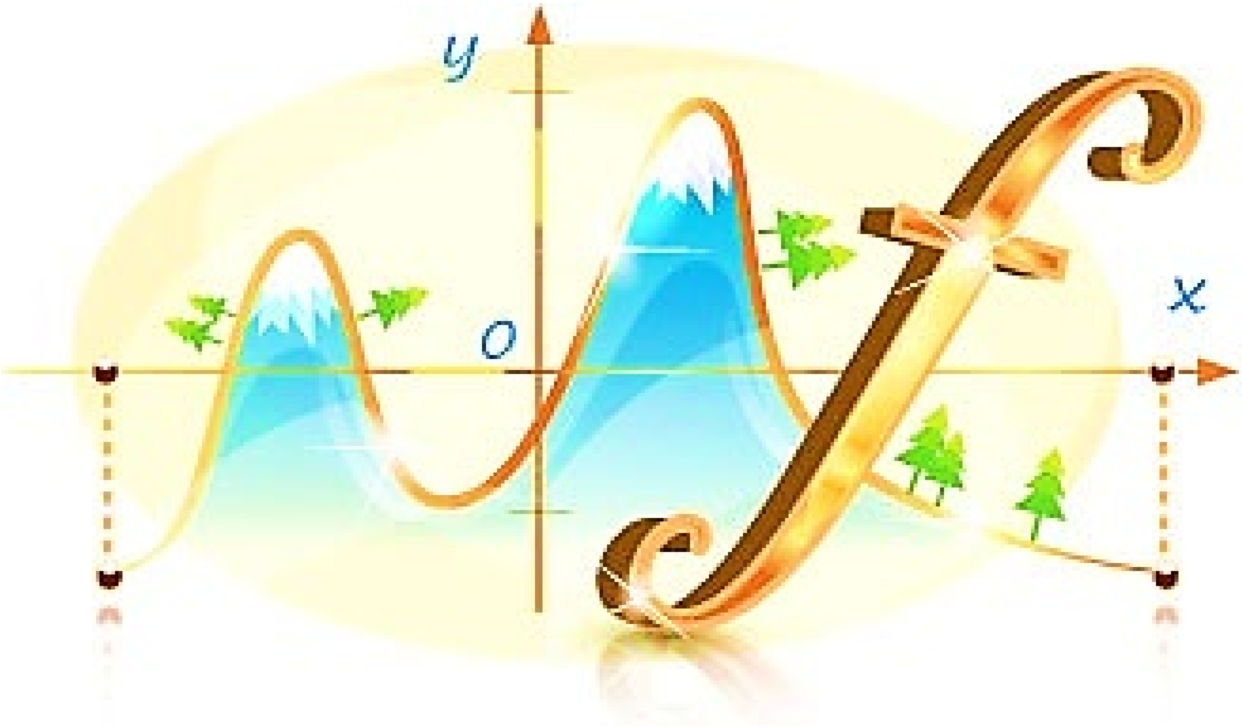
Донецкий национальный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Показательные и логарифмические функции, уравнения и неравенства



Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Показательные и логарифмические функции, уравнения и неравенства. Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов. − Донецк, 2023. – 81 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 10 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом *ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017).* Ее цель — развитие у обучающихся умений учиться, самостоятельно приобретать знания, совершенствование умений и навыков применять математику для решения математических и жизненных задач.

Настоящее пособие предназначено для развития у обучающихся умений исследовать показательные и логарифмические функции, применять их свойства к решению уравнений и неравенств, исследованию реальных процессов.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части представлен материал для обучения. В этой части содержатся краткие теоретические сведения образцы решения задач, вопросы для самоконтроля, задачи для самостоятельного решения с указаниями.

Во второй части пособия содержатся три однотипных варианта тренажёра с подсказками ко всем заданиям.

В третьей части пособия приведены задания для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части.

Пособие предназначено для обучающихся открытого математического колледжа факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета. Может быть использовано в общеобразовательной школе при проведении факультативных занятий, курсов по выбору.

Содержание

Дорогой друг!

Настоящее пособие предназначено для развития умений исследовать показательные и логарифмические функции, строить их графики, применять их свойства при решении прикладных задач, связанных, например, с процессами показательного роста и выравнивания.

Пособие состоит из трёх частей: обучающей, тренировочной и контролирующей. В первой части представлен материал для повторения и обучения. Он содержит краткие теоретические сведения, применимые при решении представленных задач, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля с ответами на них. Вся совокупность задач разделена на группы по их содержанию. Первая часть пособия завершается задачами для самостоятельного решения. К этим задачам приведены указания и ответы.

Вторая часть пособия состоит из тестов для тренировки, к заданиям которых приведены указания, ответы. Они структурированы в соответствии с частями, на который разделён весь материал. Тренажёр состоит из заданий с выбором ответа.

Задания для тренировки представлены тремя однотипными вариантами теста. Работу над пособием начинайте с первого варианта теста. Попробуйте выполнить самостоятельно его задания, не используя учебные пособия и микрокалькулятор. Выбор правильных ответов и необходимые записи делайте в отдельной тетради. После завершения работы над тестом сверьте свои ответы с ответами, приведенными в пособии. **Не пользуйтесь ответами, пока не дадите ответы самостоятельно!**

Каждое задание, по которому Ваш ответ не совпал с приведенным, тщательно проанализируйте, пользуясь подсказками. Такую работу полезно сделать по всем заданиям теста. Наверное, некоторые ответы Вы угадали или «почувствовали», не зная полного решения. При необходимости пользуйтесь подсказками к заданиям теста. Многие задания теста и задачи для самостоятельного решения подобны приведенным примерам с решениями, содержат основные идеи для решения задания. Тщательно проработайте их.

В третьей части пособия приведено контрольное задание, состоящее из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям тестов для тренировки;
- ***основного задания***, содержащего задания, подобные заданиям для самостоятельного решения;
- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Дополнительное задание желательно выполнять, если при выполнении основного задания не возникло много трудностей.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут для Вас полезными и интересными.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит в освоении идей, методов, использованных в приведенных решениях типовых задач, самостоятельном решении подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно:

- сначала проанализировать её условие и вытекающие из него следствия;

- уяснить требование задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требования задачи.

2. Приступая к выполнению заданий тренажёра, повторите приведенный теоретический материал.

Надо сначала попробовать выполнить самостоятельно задания первого варианта первого блока тренажёра. Выбранные ответы записывайте на отдельном листочке.

Пользоваться учебником и калькулятором не рекомендуется.

3. После завершения работы над первым вариантом первого блока тренажёра необходимо сверить свои ответы с приведенными в пособии.

Нельзя обращаться к приведенным ответам, пока не получены самостоятельно ответы ко всем заданиям.

4. Каждое задание, по которому ответ не совпал с приведенным, нужно тщательно проанализировать, пользуясь при необходимости приведенными в пособии указаниями.

Такую работу полезно проделать со всеми заданиями первого варианта блока. Наверное, некоторые ответы угаданы или «почувствованы».

5. Когда появится уверенность в том, что неясных вопросов не осталось, можно проверить надёжность своей уверенности с помощью второго варианта первого блока тренажёра.

Если же при выполнении второго варианта первого блока осталось ощущение, что не всё усвоено, то нужно продолжать работу по исправлению ошибок, выполнить задания третьего варианта, записывая при этом все проделанные шаги.

Если до конца выполнены данные выше рекомендации, то результаты при выполнении следующего варианта теста будут значительно выше первоначальных.

6. Если уверенность подтвердилась при выполнении второго варианта теста, то можно перейти к работе над первым вариантом второго блока. Методика работы над ним остаётся такой же. И так далее.

Ни в коем случае не бросайте работу!

Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части раздела.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Показательные и логарифмические функции

Важнейшим направлением развития математики является моделирование явлений природы, общества, причем понятие функции относится к важнейшим средствам моделирования. Поэтому вполне естественной и актуальной является проблема расширения классов изучаемых функций.

В естественных науках и технике встречаются процессы, «рост» или "угасание" в которых происходит быстрее, чем у любой степенной функции. Такие процессы описываются **показательными** функциями. Для их изучения необходимо воспользоваться еще одной (кроме извлечения корня) операцией, обратной возведению в степень. Она называется **логарифмированием.** Функции, вводимые с помощью этой операции, также широко применяются для описания реальных процессов и явлений.

1. Показательная функция и её свойства

В данном пункте рассматриваются показательные функции, их свойства и графики, применение этих функций для описания процессов и явлений окружающего мира.

Повторяем теорию

Функцию y = f(x), заданную формулой вида $y = a^x, x \in \boldsymbol{R}, a > 0,\ a \neq 1$**,** ***называют показательной.***

Независимой переменной показательной функции служит показатель степени, а основание степени — постоянная величина.

Случай $a = 1$ приводит к уже известной функции $y = 1^x = 1$.

Областью определения показательной функции является множество всех действительных чисел. Для рациональных значений показателя степени вычисление значения показательной функции сводится к операциям возведения в целую степень и извлечения корня. Для иррациональных значений показателя степени вычисление значения показательной функции сводится к построению последовательности рациональных приближений показателя, вычисления степеней с этими показателями и переходу к пределу построенной последовательности.

Свойства показательных функций

1) Показательная функция $y = a^x$ принимает только положительные значения.

2) Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $0 < a^x < 1$ при $x < 0$.

Если $0 < a < 1$, то $a^x > 1$ при $x < 0$, и $0 < a^x < 1$ при $x > 0$.

3) Показательная функция монотонна: при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает в области определения, а при $0 < a < 1$ она убывает в области определения.

4) Показательная функция не имеет нулей.

5) Множеством значений показательной функции является промежуток $(0; +\infty)$.

6) График показательной функции проходит через точку $(0; 1)$.

7) Показательная функция непрерывна.

8) Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании x ($x \to +\infty$) значения функции $y = a^x$ неограниченно возрастают, а при неограниченном убывании x ($x \to -\infty$) значения функции $y = a^x$ стремятся к нулю.

Если $0 < a < 1$, то при неограниченном убывании x ($x \to -\infty$) значения функции $y = a^x$ неограниченно возрастают, а при неограниченном возрастании x ($x \to +\infty$) значения функции $y = a^x$ стремятся к нулю.

Графики показательных функций имеют вид, изображенный на рисунке 1.

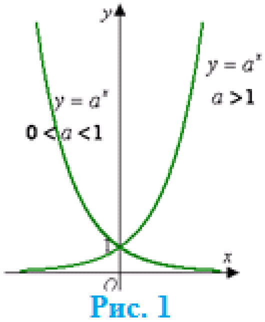


Рис. 1

С помощью показательных функций описываются различные процессы и явления.

Процесс распада радия можно описать формулой $m = m_0a^t$, где t — время, с; $m = m(t)$ — масса радия в момент времени t, г; $m_0 = m(0)$ — начальная масса радия, a — некоторое действительное число.

Зависимость температуры тела T от времени t при охлаждении его в среде с постоянной температурой T_0 можно выразить с помощью формулы $T = T_0 + (T_1 - T_0)a^t$, где T_1 — начальная температура тела.

Формула сложных процентов $A_t = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ определяет зависимость суммы A_t на счете вкладчика банка от времени t при начислении p% вклада a каждую единицу времени.

Подобными функциями описывают развитие биологических популяций, затраты предприятия, рост количества публикаций, объем информации и т. п.

Существование решений уравнения $a^x = b$ не вызывает сомнений из “физических” соображений. Нетрудно провести его полное исследование в зависимости от параметров a, b. При $b \le 0$ уравнение не имеет решений. При $b > 0$ существует единственное решение уравнения, что следует из свойств функции $y = a^x$. В частности, если $b = a^c$, то из монотонности функции $y = a^x$ вытекает, что решением данного уравнения является $x = c$. К уравнениям вида $a^x = a^c$ сводятся и некоторые другие уравнения, где неизвестное содержится в показателе степени.

Подобные рассуждения проводят и при решении неравенств, сводящихся к простейшим: $a^x > a^c$ или $a^x < a^c$.

Так как показательные функции при $a > 1$ возрастающие, а при $0 < a < 1$ — убывающие, то неравенство $a^x > a^c$ при $a > 1$ равносильно неравенству $x > c$, а при $0 < a < 1$ — неравенству $x < c$.

Аналогично неравенство $a^x < a^c$ при $a > 1$ равносильно неравенству $x < c$, а при $0 < a < 1$ — неравенству $x > c$.

Решаем

Задача 1. Дана функция $f(x) = 2^x - 2$.

1) Указать ее область определения и множество значений.

2) Проходит ли график этой функции через точку $A(3; 6)$?

3) Построить ее график.

4) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

5) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = -x^2$?

Решение. 1) Функция $y = 2^x - 2$ определена на всей координатной оси, то есть ее областью определения является множество $(-\infty;+\infty)$. Поскольку множеством значений функции $y = 2^x$ является промежуток $(0;+\infty)$, то есть $0 < 2^x < +\infty$, или $-2 < 2^x - 2 < +\infty$, то множеством значений данной функции является промежуток $(-2;+\infty)$.

2) Чтобы проверить, проходит ли график функции через точку $A(3;6)$ найдем значение функции в точке $x = 3$: $f(3) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$. Следовательно, график функции проходит через точку A.

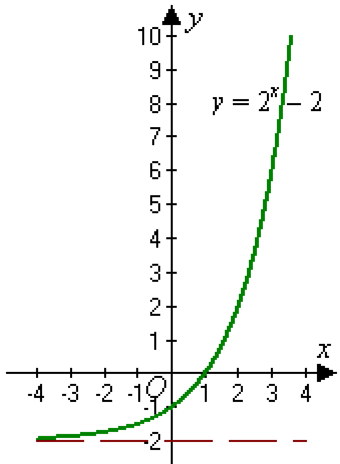


Рис. 2

3) График данной функции можно построить из графика функции $y = 2^x$ параллельным переносом последнего на 2 единицы в отрицательном направлении оси ординат (рис. 2).

4) Чтобы найти точку пересечения графика с осью y, найдем значение функции при $x = 0$: $f(0) = 2^0 - 2 = 1 - 2 = -1$. Следовательно, график функции пересекает ось y в точке $(0;-1)$. Чтобы найти точку пересечения графика с осью x, найдем, при каких значениях x функция принимает значение 0: $0 = 2^x - 2$, $2^x = 2$, $x = 1$. Следовательно, график функции пересекает ось x в точке $(1;0)$.

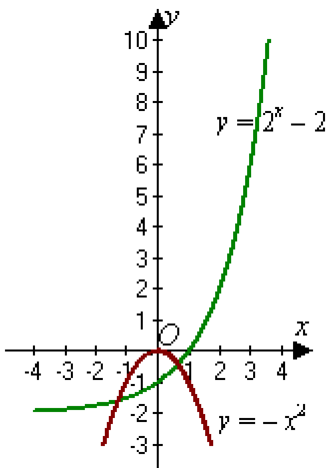


Рис. 3

5) Для ответа на вопрос необходимо выяснить, в скольких точках пересекаются графики функций $y = 2^x - 2$ и $y = -x^2$. Парабола $y = -x^2$ пересекает график данной функции в двух точках (рис. 3). Следовательно, уравнение имеет два корня.

Ответ. 1) $(-\infty;+\infty)$; $(-2;+\infty)$; 2) да; 4) $(1;0)$; 5) 2.

Задача 2. Атмосферное давление в зависимости от высоты местности над уровнем моря изменяется по закону $p = 1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 0{,}882^h$, где p — давление, Па, h — высота, км.

1) Найти атмосферное давление на всех уровнях — от уровня моря до уровня наивысшей земной вершины — с интервалом в 1 км.

2) На какой высоте находится вершина горы, если атмосферное давление на ней равно $5{,}00 \cdot 10^4$ Па?

Решение. 1) Так как высота наивысшей вершины на Земле не превышает 9 км, то выполнение задания сводится к вычислению значений данной функции при $h = 0, 1, \dots, 9$.

Воспользовавшись калькулятором, составим таблицу значений.

h, км	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p \cdot 10^{-4}$, Па	10,1	8,91	7,86	6,93	6,11	5,39	4,75	4,19	3,70	3,26

2) Второе задание сводится к решению уравнения

$$1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 0{,}882^h = 5{,}00 \cdot 10^4, \text{ или } 0{,}882^h = 0{,}495.$$

Так как методы для решения подобных уравнений будут рассмотрены далее, то попробуем решить его численно. Для этого воспользуемся составленной таблицей. Из нее видно, что искомая высота больше 5 км и меньше 6 км. Если нас устраивает точность в 0,5 км, то в качестве ответа можно взять число 5,5. Для увеличения точности результата можно было бы повторить процедуру, найдя значения функции в точках 5,1; 5,2; ...; 5,9. Понятно, что нас не интересует полная таблица значений, а лишь числа h_1 и h_2 из этой последовательности такие, что 0,495 содержится между $0{,}882^{h_1}$ и $0{,}882^{h_2}$. Число $\frac{h_1 + h_2}{2}$ является приближенным решением уравнения с точностью, не меньшей 0,05, и т. д. Этим путём можно в итоге достичь необходимой точности результатов.

Ответ: 2) $\approx 5{,}5$ км.

Задача 3. Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

Решение. Данное уравнение можно записать в виде $2^{x+2} = 2^0$. Отсюда $x + 2 = 0$ или $x = -2$.

Ответ: – 2.

Задача 4. Решить неравенство: 1) $2^{3x} < 2^{x^2+2}$; 2) $0{,}5^{\frac{1}{x}} < 0{,}25$.

Решение. 1) Так как показательная функция $y = 2^t$ возрастающая, то имеем равносильное неравенство $3x < x^2 + 2$. Решая квадратичное неравенство $x^2 - 3x + 2 > 0$, получим: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

2) Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{x} > 2$, ибо функция $y = 0{,}5^t$ убывающая и $0{,}25 = (0{,}5)^2$. Далее имеем: $\frac{1-2x}{x} > 0, (2x-1)x < 0, 0 < x < \frac{1}{2}$.

Ответ: 1) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как записать с помощью степени с основанием 10 число: а) 10 000; б) 0,0001?

2. Имеет ли решения уравнение:

а) $3^x = 0{,}001$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1000$; в) $10^x = -1$; г) $5^x = 0$; д) $1^x = 2$; е) $(0{,}0003)^x = 1$?

3. Какие из приведенных функций являются показательными:

а) $y = \frac{1}{2^x}$; б) $y = x^2$; в) $y = 2x$; г) $y = (\sin 2)^x$;

д) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; е) $y = \left(1 - \sqrt{3}\right)^x$; ж) $y = \sqrt{x}$?

4. Какие из показательных функций, приведенных в вопросе 3, возрастающие; убывающие?

5. Может ли функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ принимать значения:

а) $\sqrt{2}$; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) 1; д) 100 000; е) 0,00001?

6. Верно ли, что графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, имеют только одну общую точку?

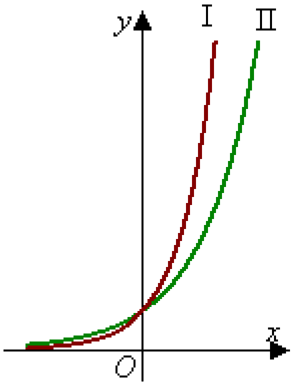


Рис. 4

7. Какое из чисел больше: а) $2^{\frac{1}{2}}$ или $2^{\frac{1}{3}}$; б) $(0,5)^{\frac{1}{2}}$ или $(0,5)^{\frac{1}{3}}$; в) $3^{\sqrt{2}}$ или $3^{1,5}$?

8. Какой из графиков, изображенных на рисунке 4, является графиком функции: а) $y = 2^x$; б) $y = 3^x$?

9. Может ли функция $y = 2^{-x} - 2$ принимать: а) отрицательные значения; б) значение $y = 5$; в) значение $y = -2$?

10. Какая из функций $y = -2^x$, $y = 2^x - 10$:

а) возрастающая; б) убывающая?

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = 0,3^x$; 3) $y = 3^x - 1$; 4) $y = \frac{1}{2} \cdot 3^{x-1}$; 5) $y = 3^{\sqrt{x^2}}$;

6) $y = \sqrt{3^x - 1}$; 7) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 8) $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$; 9) $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$.

2. Сумму 1000 зедов (зед — условная денежная единица) положили в сберкассу при условии 5% годовых. Найдите зависимость роста вклада от времени t. Постройте график этой зависимости в интервале $0 \leq t \leq 10$. Найдите величину вклада по истечении 5 лет, 10 лет.

3. Укажите область определения функции:

1) $y = 2^{\sqrt{-x}}$; 2) $y = \sqrt{2^{-x} - \frac{1}{2}}$; 3) $y = \sqrt{3^x - 9}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{0,5^x - 4}}$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Начинайте выполнение задания с установления области определения функции.

2. Воспользуйтесь формулой сложных процентов.

3. Воспользуйтесь областями определения функций $y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{1}{x}$, обратив внимание на то, что показательные функции определены на всей числовой прямой.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) 10^4 ; б) 10^{-4} .**2.** а**)** да; б) да; в) нет; г) нет; д) нет; е) да. **3.** а), г), д). **4)** а), г) — убывающие, д) — возрастающая. **5.** а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) да. **6.** Да. **7.** а) $2^{\frac{1}{2}}$; б) $(0,5)^{\frac{1}{3}}$; в) $3^{1,5}$. **8.** а) II; б) I. **9.** а) да; б) да; в) нет. **10.** а) $y = 2^x - 10$; б) $y = -2^x$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

2. $y = 1000\cdot(1,05)^t$, $y(5) \approx 1276$, $y(10) \approx 1629$.

3. 1) $(-\infty;0]$; 2) $(-\infty;1]$; 3) $[2;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2)$.

2. Вычисление значений выражений, содержащих логарифмы

В этом пункте рассматривается операция, с помощью которой находится решение уравнения $a^x = b$. Это значительно расширяет возможности в исследовании процессов и явлений, описываемых показательными функциями.

Повторяем теорию

Задача о нахождении показателя степени x по значениям степени $a^x = b$ и основания a приводит к определению ***логарифма.***

Логарифмом числа b > 0 по основанию a, где a > 0, a ≠ 1, называется такое число c, что $a^c = b$.

Иначе говоря, логарифм числа b с основанием a — это показатель степени c, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 32 = 5$, так как $2^5 = 32$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; так как $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$, так как $4^{\frac{1}{2}} = 2$; $\log_{10} 1 = 0$, так как $10^0 = 1$.

Многочисленные применения логарифмов базируются на их свойствах, вытекающие из определения логарифма и свойств степеней с действительными показателями.

Свойства логарифмов

1. Логарифм числа 1 по основанию *a*, где $a > 0, a \neq 1$, равен 0: $\log_a 1 = 0$.

2. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:

если $b > 0$, $c > 0$, то $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

3. Логарифм частного от деления положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

если $b > 0$, $c > 0$, то $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

4. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания:

если $b > 0$, то $\log_a b^p = p\log_a b$.

5 (*формула перехода к другому основанию*). Для произвольных положительных *a, b, c*, $a \neq 1$ и $c \neq 1$ справедливо соотношение: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

С л е д с т в и е 1. Если $a > 0$, $b > 0$ и $a \neq 1$, $b \neq 1$, то $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

С л е д с т в и е 2. Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$.

Логарифмы по основанию 10 называют десятичными и обозначают $\lg b$ (вместо $\log_{10} b$).

Логарифмы по основанию e называют натуральными и обозначают через $\ln b$ (вместо $\log_e b$).

Решаем

Задача 1. Вычислить:

$$1)\ \log_{12} 2+\log_{12} 72;\quad 2)\ \log_5 75-\log_5 3;\quad 3)\ \log_{11}\sqrt[3]{121};\quad 4)\ \log_2 8\sqrt{2};\quad 5)\ \log_3\frac{27}{\sqrt[3]{3}}.$$

Решение. 1) По свойству логарифма произведения положительных чисел имеем: $\log_{12} 2+\log_{12} 72=\log_{12}(2\cdot 72)=\log_{12} 144=2$, так как $12^2 = 144$.

2) По свойству логарифма частного положительных чисел имеем: $\log_5 75-\log_5 3=\log_5\frac{75}{3}=\log_5 25=2$.

3) По свойству логарифма степени положительного числа имеем:

$$\log_{11}\sqrt[3]{121}=\log_{11} 11^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\log_{11} 11=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

4) По свойствам логарифма произведения положительных чисел и логарифма степени имеем: $\log_2 8\sqrt{2}=\log_2 8+\log_2\sqrt{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

5) По свойствам логарифма частного от деления положительных чисел и логарифма степени имеем: $\log_3\frac{27}{\sqrt[3]{3}}=\log_3 27-\log_3\sqrt[3]{3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

Ответ: 1) 2**;** 2) 2; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{2}$; 5) $\frac{8}{3}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как записать с помощью степени с основанием 10 число: а) 3; б) 0,3?

2. Чему равняется: а) $\log_2 16$; б) $\log_2\frac{1}{8}$; в) $\log_3\frac{1}{3}$; г) $\log_a 1,\ a>0,\ a\neq 1$;

д) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; е) $\log_5\frac{1}{125}$; ж) $\log_a\frac{1}{a},\ a>0,\ a\neq 1$; з) $\log_{\frac{1}{a}} a,\ a>0,\ a\neq 1$?

3. Какой знак имеет число: а) $\log_5 2$; б) ln 5; в) ln 0,1; г) $\log_{0,1} 2$?

4. Чему равно значение выражения: а) $10^{\lg 2+1}$; б) $100^{-3\lg 2}$; в) $e^{2\ln e}$?

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите без вычислительных средств:

1) $49^{\log_7 2-\frac{1}{2}\log_{49}64}$; 2) $5^{\log_{5\sqrt{5}}7-2\log_{125}7}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 512$;

4) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{3}{1}+\log_{\sqrt{3}}\dfrac{5}{3}+\log_{\sqrt{3}}\dfrac{7}{5}+\log_{\sqrt{3}}\dfrac{9}{7}$.

2. Сравните без вычислительных средств числа:

1) $\log_2 3$ и $\log_7 18$; 2) $\log_{10}9$ и $\log_{11}10$; 3) $\log_5 7\cdot\log_7 9\cdot\log_9 11\cdot\log_{11}23$ и $\sqrt{5}$;

4) $\lg^2 8$ и $\lg 6$; 5) $\dfrac{1}{\ln 0{,}1}+\dfrac{1}{\log_{0,1}e}$ и -2.

3. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1}{\log_3 5}+\dfrac{1}{\log_9 5}+\dfrac{1}{\log_{27}5}+\dfrac{1}{\log_{81}5}$;

2) $\dfrac{1}{(\log_2 13)^{-1}+(\log_3 13)^{-1}+(\log_5 13)^{-1}+(\log_7 13)^{-1}}$;

3) $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9$.

4. Докажите тождество:

1) $\log_2 11\cdot\log_3 11+\log_3 11\cdot\log_4 11+\log_4 11\cdot\log_2 11=\dfrac{\log_2 11\cdot\log_3 11\cdot\log_4 11}{\log_{24}11}$;

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 4) Найдите предварительно $\left(3^x-3^{-x}\right)^3$.

2. 1) Сравните оба числа с числом $\dfrac{3}{2}$.

2) Вычтите из обоих чисел по 1 и сравните полученные числа..

3) Упростите первое число, воспользовавшись формулой перехода от одного основания логарифмов к другому.

4) Представьте число 8 в виде 10·0,8 и воспользуйтесь свойствами логарифма..

5) Обратите внимание на то, что первое число является суммой двух взаимно обратных чисел.

3. 2) Перейдите к логарифмам по основанию 5.

3) Перейдите к логарифмам по основанию 13.

4) Перейдите к логарифмам по основанию 3.

4. 1) Можно перейти к логарифмам по основанию 11.

2) Можно перейти к логарифмам по основанию a.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) $10^{\lg 3}$; б) $10^{\lg 0,3}$. **2.** а) 4; б) –3; в) –1; г) 0; д) –3; е) –3; ж) –1; з) –1.

3. а) +; б) +; в) –; г) –. **4.** а) 20; б) $\frac{1}{64}$; в) e^2.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) –2; 4) 4. **2.** 1) $\log_2 3 > \log_7 18$; 2) $\log_{10} 9 < \log_{11} 10$; 3) $\sqrt{5}$ больше;

4) $\lg^2 8 < \lg 7$; 5) $\frac{1}{\ln 0,1} + \frac{1}{\log_{0,1} e} < -2$. **3.** 1) $10\log_5 3$; 2) $\log_{210} 13$; 3) 2.

3. Преобразование логарифмических и показательных выражений

При решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств, при исследовании показательных и логарифмических функций, при решении прикладных задач часто приходится преобразовывать показательные и логарифмические выражения. Этому и посвящён данный пункт.

Повторяем теорию

В формулах, приведённых в предыдущем пункте, левые и правые части имеют смысл при разных ограничениях на значения входящих букв. Обратите внимание на то, что их применение слева направо сужает область определения, применение справа налево расширяет её. Применение этих формул слева направо при решении уравнений может привести к потере корней, а справа налево — к появлению посторонних корней.

В следующей таблице проанализирована ситуация с областью определения выражений, входящих в указанные формулы.

Формула	Множество значений букв, при которых имеет смысл левая часть	Множество значений букв, при которых имеет смысл правая часть
$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$	$x>0, y>0$ или $x<0, y<0$; $a>0$; $a\neq 1$	$x>0, y>0$; $a>0$; $a\neq 1$
$\log_a x^{2n}=2n\log_a x$	$x\neq 0$, $a>0$; $a\neq 1$; $n\in \boldsymbol{Z}$	$x>0$; $a>0$; $a\neq 1$; $n\in \boldsymbol{Z}$
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$	$x>0, y>0$ или $x<0, y<0$; $a>0$; $a\neq 1$	$x>0, y>0$; $a>0$; $a\neq 1$
$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$	$x>0$, $a>0$; $a\neq 1$; $b\in \boldsymbol{R}$	$x>0$, $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$; $b\neq 1$

Поэтому при решении различных задач, содержащих неизвестные величины, пользуются более общими формулами:

1) $\log_a(xy)=\log_a|x|+\log_a|y|, \quad xy>0$

2) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a|x|-\log_a|y|, \quad xy>0$

3) $\log_a x^{2n}=2n\log_a|x|, \quad x\neq 0, n\in \boldsymbol{Z}$

4) $\log_{a^{2n}} x=\dfrac{1}{2n}\log_{|a|} x, \quad x>0, n\in \boldsymbol{Z}, n\neq 0, a\neq 0, |a|\neq 1$

Первые две из этих формул тоже имеют смысл при разных ограничениях на значения входящих в них букв. Но их применение при решении уравнений слева направо может привести не к потере корней, а к приобретению посторонних решений, что более предпочтительно.

Иногда приходится восстанавливать число или выражение по его логарифму. Такую операцию называют ***потенцированием***.

Решаем

Задача 1. Упростить выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^{\frac{\lg x^6}{5}+\frac{\lg x^{-4}}{3}}$.

Решение. Так как x — произвольное действительное число, то формулу $\log_a x^k = k\log_a x$ применить нельзя. Воспользуемся равенством $\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|$. Преобразуем вначале показатель степени данного выражения: $\frac{\lg x^6}{5}+\frac{\lg x^{-4}}{3}=\frac{6}{5}\lg|x|-\frac{4}{3}\lg|x|=-\frac{2}{15}\log_2|x|$.

Далее, применяя свойства степени, логарифмов и основное логарифмическое тождество, получим: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^{-\frac{2}{15}\lg|x|}=\left(10^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{15}\lg|x|}=10^{\frac{1}{15}\lg|x|}=10^{\lg|x|^{\frac{141}{155}}}=|x|^{\frac{1}{15}}=\sqrt[15]{|x|}$.

Ответ: $\sqrt[15]{|x|}$

Задача 2. Упростите выражение $7^{\frac{\log_3\log_3 7}{\log_3 7}}$.

Решение. Воспользовавшись последовательно формулой перехода к логарифму с другим основанием в виде $\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b$ и основным логарифмическим тождеством, получим: $7^{\frac{\log_3\log_3 7}{\log_3 7}}=7^{\log_7\log_3 7}=\log_3 7$.

Ответ: $\log_3 7$.

Задача 3. При каком основании логарифм числа *a* равен *b*, если:

$a=\frac{1}{25}$, $b=-\frac{2}{3}$?

Решение. Обозначим неизвестное основание через *x*. По условию, $\log_x\frac{1}{25}=-\frac{2}{3}$. По определению логарифма имеем равенство: $x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{25}$. Решим полученное уравнение. Для этого возведём обе его части в степень с показателем $-\frac{3}{2}$. Получим: $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$ или $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}$.Применив правило возведения степени в степень, будем иметь: $x^{-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=5^{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}$ или x = $5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}=\sqrt[4]{125}$.

Ответ: $\sqrt[4]{125}$.

Задача 4. Найдите *x*, если $\log_4 x=2\log_4 10-\dfrac{1}{2}\log_4 7-3\log_4 3+\dfrac{1}{3}\log_4 19$.

Решение. Воспользовавшись в правой части заданного равенства свойствами логарифма произведения, логарифма частного и логарифма степени положительных чисел, получим:

$$\log_4 10^2-\log_4 7^{\frac{1}{2}}-\log_4 3^3+\log_4 19^{\frac{1}{3}}=\log_4 100-\log_4\sqrt{7}-\log_4 27+\log_4\sqrt[3]{19}=$$
$$=\log_4\frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

Итак, $\log_4 x=\log_4\dfrac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}$. Применив утверждение: если $\log_a x=\log_a y$, то $x=y$. Будем иметь: $x=\dfrac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}$.

Ответ. $x=\dfrac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как представить число 5 в виде степени 10; *e*; 2?

2. Всегда ли верно равенство:

а) $\ln b^2=2\ln b$; б) $\log_2(bc)=\log_2 b+\log_2 c$; в) $\lg b^4=2\lg b^2$; г) $\ln a^5=5\ln a$?

3. Какое из чисел больше:

а) $\log_2 3$ или $\log_2 6$; б) $\log_3 0{,}1$ или $\log_3 0{,}6$; в) $\log_{0,2} 3$ или $\log_{0,2} 2$; г) $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите тождество: $$\frac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log^2_{\frac{1}{a}}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}\sqrt{a^2-1}\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}=2\log_a\sqrt{a^2-1}.$$

2. Найдите:

1) $\log_6 9$, если $\log_6 2 = a$; 2) $\log_6 25$, если $\log_5 4 = a, \log_5 12 = b$;

3) $\log_{15} 81$, если $\log_{45} 125 = a$; 4) $\log_{12} 10$, если $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$.

3. Какое число ближе к 2:

1) $\log_3 8{,}9$ или $\log_3 9{,}1$; 2) $\log_{0,5} 0{,}23$ или $\log_{0,5} 0{,}27$?

Указания к задачам для самостоятельного решении

1. Можно перейти к логарифмам по основанию *a*.

2. 4) Последовательно можно переходить к логарифмам по основанию 10, основаниям 2 и 3, основанию 5, применяя на каждом шагу свойства логарифмов.

3. Воспользуйтесь тем, что близость двух чисел друг к другу определяется модулем их разности.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. $5 = 10^{\lg 5}$, $5 = e^{\ln 5}$, $5 = 2^{\log_2 5}$. **2.** а) нет; б) нет; в) да; г) нет. **3.** а) $\log_2 6$; б) $\log_3 0{,}6$; в) $\log_{0,2} 2$; г) $\log_2 3$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

2. 1) $2 - 2a$; 2) $\frac{4}{2b-a}$; 3) $\frac{8a}{3-a}$; 4) $\frac{a+1}{2a+b}$. **3.** 1) $\log_3 9{,}1$; 2) $\log_{0,5} 0{,}27$.

4. Логарифмическая функция, её свойства и график

Логарифмическая функция применяется для исследования показательной функции. Кроме того, она является математической моделью многих физических процессов.

Повторяем теорию

Функцию $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ называют ***логарифмической.***

Областью определения логарифмической функции является множество положительных чисел.

График логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку с координатами (1; 0), ибо $\log_a 1 = 0$.

Свойства логарифмических функций

1. Если $a > 1$**, то функция** $y = \log_a x$ **принимает положительные значения при** $x > 1$ **и отрицательные при** $0 < x < 1$**.**

Если $0 < a < 1$**, то функция** $y = \log_a x$ **принимает положительные значения при** $0 < x < 1$ **и отрицательные при** $x > 1$**.**

2. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ **возрастает, если** $a > 1$**, и убывает, если** $0 < a < 1$**.**

3. Множество значений функции $y = \log_a x$ **совпадает с множеством всех действительных чисел.**

4. Если $a > 1$**, то при неограниченном возрастании** x **(**$x \to +\infty$**) значения функции** $y = \log_a x$ **неограниченно возрастают, а при стремлении** x **к нулю значения функции** $y = \log_a x$ **неограниченно убывают.**

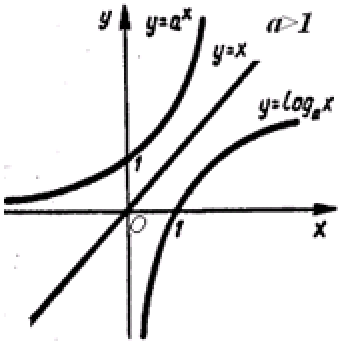


Рис 5

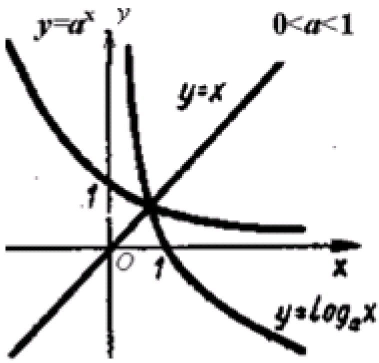


Рис.6

Если $0 < a < 1$**, то при неограниченном возрастании** x **(**$x \to +\infty$**) значения функции** $y = \log_a x$ **неограниченно убывают, а при стремлении** x **к нулю значения функции** $y = \log_a x$ **неограниченно возрастают.**

Графики логарифмических функций изображены на рис. 5 и 6. Обратите внимание на то, что они симметричны графикам показательных функций относительно прямой $y = x$.

Решаем

Задача 1. Между какими последовательными целыми числами находится: 1) $\log_5 200$; 2) $\log_{0,2} 2$?

Решение. 1) По определению логарифма, $\log_5 5 = 1$, $\log_5 25 = 2$, $\log_5 125 = 3$, $\log_5 625 = 4$. Так как $125 < 200 < 625$, а функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ возрастает (свойство 2), то $\log_5 125 < \log_5 200 < \log_5 625$ или $3 < \log_5 200 < 4$.

2) По определению логарифма, $\log_{0,2} 1 = 0$, $\log_{0,2} 5 = -1$. Так как $1 < 2 < 5$, а функция $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ убывает (свойство 2), то $\log_{0,2} 5 < \log_{0,2} 2 < \log_{0,2} 1$ или $-1 < \log_{0,2} 2 < 0$.

Ответ. 1) Между 3 и 4; 2) между –1 и 0.

Задача 2. Исследовать на чётность функцию $y = \lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

Решение. Так как $\sqrt{1 + x^2} > |x|$, то областью определения данной функции является множество всех действительных чисел. Так как

$$y(-x) = \lg\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \lg\frac{\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \lg\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} =$$

$= -\lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = -y(x)$, то данная функция нечётна.

Ответ: нечётна.

Вопросы для самоконтроля

1. Пересекает ли график функции $y = \log_a x$: а) ось x; б) ось y?

2. Проходит ли график функции $y = \log_{0,2} x$ через точку с координатами (5; 1)?

3. При каких значениях x график функции $y = \log_{0,5} x$ проходит выше оси абсцисс?

4. Какой знак имеет число: а) $\log_{0,5} 3$; б) $\log_{0,5}\frac{1}{3}$; в) $\log_5 3$?

5. Что больше 1 или $\log_{0,5} 0,7$?

6. Какова область определения функции: а) $y = \lg(x - 1)$; б) $y = \lg(-x)$

7. Совпадают ли графики функций:

а) $y = \frac{1}{x}$ и $y = 2^{\log_2 \frac{1}{x}}$; б) $y = \lg x^2$ и $y = 2\lg x$; в) $y = \log_2 2^x$ и $y = x$?

8. При каких значениях x имеет смысл выражение: а) $\sqrt{x \cdot \ln 0,5}$; б) $\sqrt{1 - \log_2 x}$?

9. При каких значениях *a* функция $y=\log_{3a+1}x$ убывает?

10. График какой функции получим, если график функции $y=\log_{0,5}x$ параллельно перенесём на две единицы в положительном направлении оси *x*?

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте схематически график функции:

1) $y=\log_3(-x)$; 2) $y=\log_2(x+1)$; 3) $y=a^{\log_a x}$; 4) $y=\log_2 x^2$;

5) $y=10^{\lg(1-x^2)}$; 6) $y=9^{\log_3 x}$; 7) $y=\log_x 2$; 8) $y=\log_2 \sin x$;

9) $y=\log_{2+x}\left(4+4x+x^2\right)+\log_{2-x}\left(4-4x+x^2\right)$.

2. Найдите область определения функции:

1) $y=\lg(x-1)$; 2) $y=\lg\left(x^2+0{,}1\right)$; 3) $y=\dfrac{1}{\log_5(x-4)}$; 4) $y=\sqrt{\log_{0,1}x}$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Начинайте выполнение задания с установления области определения функции.

2. Воспользуйтесь областями определения функций $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$, обратив внимание на то, что логарифмические функции определены при всех положительных значениях *x*.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) Да; б) нет. **2.** Нет. **3.** $x\in(0;\,1)$. **4.** а) –; б) +; в) +. **5.** 1. **6.** а) $(1;\,+\infty)$; б) $(-\infty;\,0)$. **7.** а) Нет; б) нет; в) да. **8.** а) $x\in(-\infty;\,0)$; б) $x\in(0;\,2]$. **9.** $a\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$.

10. $y=\log_{0,5}(x-2)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

2. 1) $(1;\,+\infty)$; 2) $x\in(-\infty;\,+\infty)$; 3) $(4;\,5)\cup(5;\,+\infty)$; **4.** $(0;\,1)$.

5. Показательные уравнения

В этом пункте рассматриваются некоторые методы решения показательных уравнений, то есть уравнений, в которых неизвестные содержатся в показателе степени.

Повторяем теорию

Простейшее показательное уравнение имеет вид $a^x = b, \quad a > 0$. При $b \le 0$ уравнение не имеет решений. При $b > 0$ существует единственное решение уравнения, что следует из свойств функции $y = a^x$. В частности, если $b = a^c$, то из монотонности функции $y = a^x$ вытекает, что решением данного уравнения является $x = c$. К уравнениям вида $a^x = a^c$ сводятся и некоторые другие уравнения, где неизвестное содержится в показателе степени.

Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$ и $a \ne 1$, имеет те же решения, что и уравнение $f(x) = g(x)$.

Уравнение может содержать несколько показательных функций. Тогда их целесообразно выразить через одну. Обычно после этого уравнения с помощью подходящих замен превращается в алгебраическое.

Общими методами решения показательных уравнений являются:

- переход от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- замена переменной;
- разложение на множители;
- логарифмирование обеих частей уравнения;
- применение свойств функций.

Решаем

Задача 1. Решить уравнение $7^x = 9^x$.

Решение. Так как $9^x \ne 0$, то, разделив обе части уравнения на 9^x, получим:

$$\frac{7^x}{9^x} = 1, \left(\frac{7}{9}\right)^x = \left(\frac{7}{9}\right)^0, x = 0.$$

- **Ответ.** 0.

Задача 2. Решить уравнение $4^x + 6^x - 2\cdot 9^x = 0$.

Решение. Нетрудно заметить, что $4^x = (2^x)^2, 9^x = (3^x)^2, 6^x = 2^x \cdot 3^x$. Так как $9^x \neq 0$ ни при каком $x \in \boldsymbol{R}$, то, разделив обе части уравнения на 9^x, получим равносильное уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0$, или $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$. После замены $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ получим квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $y_1 = -2,\ y_2 = 1$. Таким образом, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -2$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$. Первое из этих уравнений решений не имеет, а второе имеет единственный корень $x = \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$.

\- **Ответ:** 0.

Задача 3. Решить уравнение $2^{x^2-1} = 3^{4x}$.

Решение. Так как $3 = 2^{\log_2 3}$, то данное уравнение можно преобразовать к виду $2^{x^2-1} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{4x}$. Это уравнение равносильно уравнению $x^2 - 1 = 4x\log_2 3$. Его корнями, а значит и корнями данного уравнения, являются числа: $2\log_2 3 \pm \sqrt{4\log_2^2 3 + 1}$.

Рассмотренное уравнение можно решить логарифмированием обеих его частей. Прологарифмировав обе части уравнения $2^{x^2-1} = 3^{4x}$ по основанию 2, получим: $x^2 - 1 = 4x\log_2 3$.

Ответ: $2\log_2 3 \pm \sqrt{4\log_2^2 3 + 1}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли уравнение $a^x = b$ иметь два решения?

2. Какие из следующих уравнений не имеют решений:

а) $5^x = -2$; б) $5^x = 0$; в) $5^x = 2$?

3. Сколько решений имеет уравнение: а) $2^x = \frac{1}{x}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{1}{x}$; в) $2^x = -x$?

4. При каких значениях a уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 - a$ имеет корни?

5. Равносильны ли уравнения: а) $(a^x)^{f(x)} = (a^x)^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$;

б) $f(x) \cdot a^x = g(x) \cdot a^x$ и $f(x) = g(x)$; в) $2^x + 2^{-x} = 1$ и $2^x = -1$?

6. Имеет ли решения уравнение $2^{-3x} + 3^{2x} = 0$?

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение:

1) $\sqrt[\frac{1}{x}]{2^{2x+3x^{-1}-3}} = 4$; 2) $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$;

3) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} - 0{,}2 = 0$; 4) $37 \cdot 36^x + 3 \cdot 16^x - 26 \cdot 81^x = 0$;

5) $3^{3x} + 3^{2x+1} - 3^x - 3 = 0$; 6) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$;

7) $\sqrt{8 \cdot 3^{x+2} - 23} = 2 - 3^{x+1}$; 8) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

9) $8\left(4^x + 4^{-x}\right) - 54\left(2^x + 2^{-x}\right) + 101 = 0$; 10) $\left|8^x - 8\right| + \left|8^x - 64\right| = 56$;

11) $|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = 1$; 12) $3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 6$; 13) $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Не забудьте, что $\sqrt[n]{a}$ определён для натуральных $n > 1$.

2) Можно вынести в левой части уравнения общий множитель за скобки.

3) Уравнение решается заменой переменной.

4) Разделите обе части уравнения, например, на 9^{2x}.

5) Уравнение решается заменой переменной.

6) Обратите внимание на то, что в скобках стоят взаимно обратные числа.

7) Заменой переменной уравнение сводится к иррациональному.

8) Уравнение решается заменой переменной.

9) Уравнение решается заменой переменной.

10) Воспользовавшись методом интервалов, избавьтесь от модуля.

11) Рассмотрите 2 случая: показатель степени равен нулю, а основание степени отлично от нуля, или основание степени равно 1, а выражение, стоящее в показателе, имеет смысл.

12) Один корень можно угадать, затем целесообразно прологарифмировать обе части уравнения и воспользоваться формулами Виета.

13) Нужно найти решения для каждого значения параметра a.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Нет. **2.** а), б). **3.** а) 1; б) 1; в) 1. **4.** $a \in (-\infty; 1)$. **5.** а) да; б) да; в) да. **6.** Нет.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) 2; –2; 7) –1; 8) $\frac{3}{2}$; 9) ±1; ±2; 10) [1; 2]; 11) 4; 5; 12) 1; $-\log_3 36$; 13) если $a < -3$ или $a \geq 0$, то решений нет; если $-3 < a < 0$, то $x = 2 \pm \log_3\left(2 - \sqrt{4-a}\right)$.

6. Логарифмические уравнения

В этом пункте будут рассматриваться некоторые методы решения логарифмических уравнений, то есть уравнений, в которых неизвестные содержатся под знаком логарифма.

Повторяем теорию

Логарифмические уравнения — это такие уравнения, в которых неизвестные содержатся под знаком логарифма. Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид $\log_a x = b$. Его решения найти нетрудно. Например, уравнению $\log_3 x = 2$ удовлетворяет число $x = 3^2 = 9$, так как $\log_3 9 = 2$. Понятно, что уравнение $\log_a x = b$ имеет решение при любом $b \in \boldsymbol{R}$. Уравнение $\log_a x = b$ имеет единственное решение, которое, согласно определению логарифма, имеет вид $x = a^b$.

При переходе от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ могут появиться посторонние корни. Поэтому необходимо выполнить

проверку.

При решении логарифмических уравнений применяют:

- переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- свойства логарифмов;
- замену переменной;
- разложение на множители;
- логарифмирование;
- функциональные методы.

При решении логарифмического уравнения вида $f(x)\log_a g(x) = 0$ сведением к уравнениям $f(x) = 0$ и $\log_a g(x) = 0$ необходимо проверить, удовлетворяют ли их корни исходному уравнению.

Решаем

Задача 1. Решить уравнение: 1) $\log_5(2 - x) = 2$; 2) $\log_3(x^2 - x + 11) = 2$.

Решение. 1) По определению логарифма, $5^2 = 2 - x$, откуда $x = -23$.

2) Данное уравнение, согласно определению логарифма, удовлетворяют те значения x, для которых выполняется равенство $x^2 - 3x + 11 = 3^2$. Полученное квадратное уравнение имеет корнями числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, которые являются решениями данного уравнения.

Ответ: 1) – 23; 2) 1 и 2.

Рассмотрим логарифмические уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Задача 2. Решить уравнение: $\log_2(x - 2) = \log_2(x^2 - x - 17)$.

Решение. Если x_0 — корень этого уравнения, то имеет место числовое равенство $\log_2(x_0 - 2) = \log_2\left(x_0^2 - x_0 - 17\right)$, поэтому $x_0 - 2 = x_0^2 - x_0 - 17$ (последнее равенство следует из монотонности логарифмической функции). Отсюда: $x_0^2 - 2x_0 - 15 = 0$. Это равенство верно, если $x_0 = 5$ или $x_0 = -3$. Итак, предположив, что число x_0 — корень данного уравнения, мы показали, что оно может равняться или 5, или – 3. Проверим, являются ли эти числа корнями исходного уравнения. Подставляя последовательно в его левую и правую часть число 5, получим: $\log_2(x-2)=\log_2(5-2)=\log_2 3$; $\log_2(x^2-x-17)$ $=\log_2(25-5-17)=\log_2 3,$ то есть x = 5 — корень данного уравнения. При x = – 3 значения выражений $x-2$ и x^2-x-17 отрицательны, обе части уравнения не имеют смысла, то есть x = – 3 не является корнем данного уравнения.

Ответ: 5.

Задача 3. Решить уравнение: lg(x + 2) + lg(x – 2) = lg5.

Решение. Согласно свойству логарифма произведения, имеем: lg((x – 2)(x + 2)) = lg5. Отсюда следует, что x^2 – 4 = 5. Корнями этого уравнения является числа 3 и –3. Нетрудно проверить, что оба числа являются корнями уравнения lg(x^2 – 4)= lg5, но только число 3 является корнем исходного уравнения.

Посторонний корень появился после выполнения преобразования $\lg(x+2)+\lg(x-2)=\lg(x^2-4)$, в результате которого получили уравнение с более широкой областью определения. Действительно, выражения, содержащиеся в данном уравнении, имеют смысл при $x \in (2;\ +\infty)$, а в полученном — при $x \in (-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$. Расширение области определения уравнения привело к появлению посторонних корней.

Ответ: 3.

Задача 4. Решить уравнение $\log_2^2 x-2\log_2 x-3=0$.

Решение. Обозначив $\log_2 x$ = y, получим квадратное уравнение $y^2-2y-3=0$, имеющее корни $y_1=3,\ y_2=-1$. Решение задачи свелось к двум простейшим уравнениям $\log_2 x=3$ и $\log_2 x$ = –1, из которых находим: $x_1=2^3=8,\ x_2=2^{-1}=0{,}5.$

Ответ: 8; 0,5.

Задача 5. Решить уравнение $\sqrt{x}\lg(x-1)=0$.

Решение. Левая часть уравнения является произведением двух множителей. Приравняем каждый из них к нулю и решим полученные уравнения: $\sqrt{x}=0$, x = 0; lg(x – 1)= 0, x – 1 = 1, x = 2. Легко заметить, что число x = 0 не является корнем исходного уравнения, ибо при x = 0 выражение lg(x – 1) не имеет смысла. В то же время число $x = 2$ является корнем данного уравнения.

Ответ: 2.

Задача 6. Решить уравнение $7^{3\lg x} = 34,3x$.

Решение. Обе части уравнения принимают положительные значения: левая часть как степень некоторого числа, правая часть — на основании того, что $x > 0$. Учитывая, что $34,3 = \frac{343}{10} = \frac{7^3}{10}$, прологарифмируем обе его части по основанию10: $3\lg x \cdot \lg 7 = 3\lg 7 - \lg 10 + \lg x$, $\lg x(3\lg 7 - 1) = 3\lg 7 - 1, \lg x = 1, x = 10$.

Ответ: 10.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли уравнение $\log_2 x = b$ не иметь решений?

2. Может ли уравнение $\log_2 x = b$ иметь отрицательное решение?

3. Может ли уравнение $\log_2 x = b$ иметь два решения?

4. Каково решение уравнения: а) $\log_2 x = 0$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$; в) $\log_x 3 = 2$?

5. Сколько решений имеет уравнение:

а) $\log_2 x = \frac{1}{x}$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{x}$; в) $\log_2 x = -x$?

6. Верно ли решено уравнение: $\log_2 x^2 = \log_2 9$, $2\log_2 x = 2\log_2 3$, $x = 3$?

7. Имеет ли решения уравнение: а) $\ln x - \ln(x+2) = 2$; б) $\lg(x - 1) + \lg(1 - x) = 0$?

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение:

1) $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$; 2) $\log_x\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0$; 3) $\log_{x-2}\left(2x^3 - 13x^2 + 24x - 8\right) = 3$;

4) $\log_{2x}\left(x^2 - 2x\right) = \log_{2x}(2x - 3)$; 5) $\log_2\left(x^2 - 4x\right)^2 = 2\log_2(18 - 5x)$; 6) $5^{3\lg x} = 12,5x$;

7) $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$; 8) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$; 9) $10^{\sqrt{\lg x}} + x^{\sqrt{\log_x 10}} = 200$;

10) $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$; 11) $\log_2^2 x + \log_{2x}\frac{2}{x} = 1$;12) $\left(x^2 + x - 1\right)^{(x-2)\log_{0,5-x}\log_2\left(x^2 - 2x - 1\right)} = 1$.

2. Решите уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x+4$;2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x-4$;3) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$; 4) $x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64$;

5) $\log_2\left(|x-1|+1\right) = 2-\sqrt[3]{(x-1)^4}$; 6) $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{\log^2_{\frac{1}{7}}\left(x^2-4x+4\right)} = 0$.

3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x + \lg y = \dfrac{5}{4}, \\ \log_x 10 + \log_y 10 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-y)^{x+y} = 16, \\ (x-y)^2 \cdot 2^{x+y} = 64; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^{x^2+7x+12} = 1, \\ x+y=6, \\ y>0. \end{cases}$

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1), 2), 3) Воспользуйтесь определением логарифма.

4) Учтите, что уравнение $x^2-2x=2x-3$ является следствием данного.

5) Следствием данного уравнения является уравнение $\left(x^2-4x\right)^2 = (18-5x)^2$.

6) Прологарифмируйте обе части уравнения.

7) Докажите, что $5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$.

8) Приведите логарифмы к одному основанию.

9) Докажите, что $10^{\sqrt{\lg x}} = x^{\sqrt{\log_x 10}}$.

10) Уравнение решается заменой переменной.

11) Приведите логарифмы к одному основанию.

12) Рассмотрите 2 случая: показатель степени равен нулю, а основание степени отлично от нуля или основание степени равно 1, а выражение, стоящее в показателе, имеет смысл.

2. 1) Исследуйте функции, стоящие в левой и правой частях уравнения на монотонность.

2) См. указание к заданию 2. 1).

3) Разделите обе части уравнения на $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ и воспользуйтесь монотонностью функций, полученных в обеих частях уравнения.

4) Разделите обе части уравнения на $x \cdot 64$ и воспользуйтесь монотонностью функций, полученных в обеих частях уравнения.

5) Разделите область определения уравнения на два промежутка: $x \le 1$ и $x > 1$.

6) Воспользуйтесь тем, что сумма двух неотрицательных выражений равна нулю тогда и только тогда, когда оба слагаемых одновременно обращаются в нуль.

3. 1) Перейдите во втором уравнении к основанию 10; 2) прологарифмируйте оба уравнения по основанию 2; 3) воспользуйтесь равенством $1=y^0$.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Нет. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** а)1; б) 2; в) $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; б) 1; в) 1. **6.** Нет. **7.** а) нет; б) нет.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) 8; 2) 3; 3) 4; 4) 3; 5) 3; $-1-\sqrt{73}$; 6) 10; 7) 2; 8) $\frac{1}{2};\frac{1}{8}$; 9) 10 000; 10) $\sqrt{2}$; 4; 11) 1; 2; $\frac{1}{4}$; 12) –2; –1. **2.** 1) –1; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) 0; 2; 6) 3. **3.** 1) $\left(10;\sqrt[4]{10}\right),\left(\sqrt[4]{10};10\right)$; 2) (3; 1), (3; –1); 3) (5; 1), (–3; 9), (–4; 10).

7. Показательные и логарифмические неравенства

Повторяем теорию

Решение показательных неравенств базируется на использовании монотонности показательных функций. Функции $y=a^x$ при $a>1$ возрастают, а при $0<a<1$ — убывают. В соответствии с этим, неравенство $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ имеет те же решения, что и неравенство $f(x)<g(x)$ при $a>1$ и $f(x)>g(x)$ при $0<a<1$

Общими методами решения показательных неравенств являются:

- переход от неравенства $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ к неравенству $f(x)<g(x)$ при $a>1$ и $f(x)>g(x)$ при $0<a<1$;
- замена переменной;
- разложение на множители;
- логарифмирование обеих частей неравенства;
- применение свойств функций.

Неравенство вида $f\left(a^x\right) \geq 0$ при помощи замены переменной $t = a^x$ сво-

1) записать условия, задающие область определения неравенства, то есть множество значений переменной, при которых имеют смысл выражения, входящие в неравенство; 2) отбросить знаки логарифмов с учётом возрастания или убывания логарифмической функции; 3) решить полученное неравенство; 4) записать ответ с учётом области определения неравенства.

дится к решению системы неравенств $\begin{cases} f(t) \geq 0, \\ t > 0 \end{cases}$ а затем к решению простейших показательных неравенств.

Решение логарифмических неравенств основано на использовании монотонности логарифмических функций. Функции $y = \log_a x$ определены при $x > 0$ и при $a > 1$ возрастают, а при $0 < a < 1$ – убывают.

Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) >< \log_a g(x)$ можно решать по такой схеме:

Решение логарифмических неравенств основано на использовании монотонности логарифмических функций и учёте области её определения, то есть на следующей теореме, вытекающей из свойств логарифмической функции.

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ а при $0 < a < 1$ – системе неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Решаем

Задача 1. Решить неравенство $(0{,}5)^{4x^2-2x-2} \leq (0{,}5)^{2x-2}$.

Решение. Поскольку 0,5 < 1, то данное неравенство равносильно неравенству $2x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$. Последнему, а значит и исходному неравенству удовлетворяют все действительные числа.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

Задача 2. Решить неравенство $9^x - 4\cdot 3^x + 3 < 0$.

Решение. Обозначив $3^x = t$, получим квадратное неравенство $t^2 - 4t + 3 < 0$. Оно выполняется при $1 < t < 3$. Так как $3^x = t$, то $1 < 3^x < 3$, или $3^0 < 3^x < 3^1$, $0 < x < 1$.

Ответ: (0; 1**).**

Задача 3. Решите неравенство $2^{3x-1} + 6 \cdot 2^{1-3x} - 5 \le 0$.

Решение. Используя свойство степени, запишем данное неравенство в виде $2^{3x-1} + \dfrac{6}{2^{3x-1}} - 5 \le 0$. Обозначив $y = 2^{3x-1}$, получим: $\begin{cases} y + \dfrac{6}{y} - 5 \le 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2 - 5y + 6 \le 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le y \le 3$.Таким образом, данное неравенство равносильно двойному неравенству: $2 \le 2^{3x-1} \le 3$, откуда $1 \le 3x - 1 \le \log_2 3$, $\dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{1}{3}(\log_2 3 + 1)$

.

Ответ: $\left[\dfrac{2}{3}; \log_2 \sqrt[3]{6}\right]$.

Задача 4. Решить неравенство: 1) $\log_3 x < -1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x \le -2$.

Решение. 1) Запишем неравенство в виде $\log_3 x < \log_3 3^{-1}$ или $\log_3 x < \log_3 \dfrac{1}{3}$. Функция $y = \log_3 x$ определена при $x > 0$ и возрастает (основание логарифма больше 1), поэтому неравенство выполняется при $x > 0$ и $x < \dfrac{1}{3}$, то есть при $0 < x < \dfrac{1}{3}$.

2) Неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \le -2$ можно записать в виде $\log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ или $\log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} 9$. Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x > 0$ и убывает (так как основание логарифма находится между 0 и 1), поэтому неравенство выполняется при $x > 0$ и $x \ge 9$, то есть при $x \ge 9$.

Ответ: 1) $0 < x < \frac{1}{3}$; 2) $x \geq 9$.

Задача 5. Решить неравенство $\lg(3x - 4) < \lg(2x + 1)$.

Решение. Будем действовать по приведенной схеме.

1) Логарифмическая функция $y = \lg x$ определена при $x > 0$, потому неравенство имеет смысл при $3x - 4 > 0$ и $2x + 1 > 0$, или при $x > \frac{4}{3}$ и $x > -\frac{1}{2}$. Следовательно, ее областью определения является промежуток $x > \frac{4}{3}$.

2) Так как логарифмическая функция с основанием 10 возрастает, то, отбросив знаки логарифмов, получим: $3x - 4 < 2x + 1$.

3) Решим полученное неравенство: $x < 5$.

4) С учетом области определения имеем: $\frac{4}{3} < x < 5$.

Ответ: $\left(\frac{4}{3};5\right)$.

Задача 6. Решить неравенство:

1) $\log_2(1 - 4x) > \log_2(x^2 + 4)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) > -3$.

Решение. 1) В данном случае основание логарифма больше 1, поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 1 - 4x > x^2 + 4, \\ x^2 + 4 > 0 \end{cases}$ или неравенству $x^2 + 4x + 3 < 0$, так как неравенство $x^2 + 4 > 0$ выполняется при всех значениях x. Решением неравенства $x^2 + 4x + 3 < 0$ является промежуток, содержащийся между корнями -3 и -1 уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$. Следовательно, решением данного неравенства является интервал $(-3; -1)$.

2) Представим -3 как $\log_{\frac{1}{3}} 27$, тогда данное неравенство принимает вид: $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Так как основание логарифма находится между 0 и 1, то последнее неравенство равносильно двойному неравенству $0 < x - 2 < 27$. Ре-

шая систему двух линейных неравенств $\begin{cases} x-2<27, \\ x-2>0, \end{cases}$ получим: $2<x<29$.

Ответ: 1) (– 3; – 1); 2) $2<x<29$.

Вопросы для самоконтроля

1. Каково решение неравенства:

а) $2^x>0$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<0$; в) $2^x>1$; г) $2^x<1$; д) $2^x>-1$?

2. Какие целые числа удовлетворяют неравенству:

а) $\frac{1}{27}<3^x<3$; б) $\frac{1}{9}\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le 9$?

3. Каково решение неравенства:

а) $\log_2 x<0$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x>0$; в) $\log_3 x<1$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x>-1$?

4. Какие целые числа удовлетворяют неравенству:

а) $2<\log_2 x<3$; б) $-2\le\log_{\frac{1}{2}} x\le -1$?

5. Равносильны ли неравенства: а) $x^2\ge 0$ и $2^x>0$; б) $\log_2 x>1$ и $x>2$; в) $\log_2 x<1$ и $x<2$; г) $\log_x(\sqrt{5}-1)>1$ и $\sqrt{5}-1>x$?

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите неравенство:

1) $-1\le\left(\frac{1}{3}\right)^x<2$; 2) $9^x-10\cdot 3^x+9\le 0$; 3) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

4) $x^{\frac{2x-1}{3-x}}>1$; 5) $2\cdot 64^{-\frac{1}{x}}-9\cdot 4^{-\frac{2}{x}}+4^{1-\frac{1}{x}}\ge 0$; 6) $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$.

2. Решите неравенство:

1) $\frac{\ln x}{x+1}\ge 0$; 2) $\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4$;

3) $\log_4\left(2x^2+3x+1\right)\le\log_2\left(2x+2\right)$; 4) $2\log_5 x-\log_x 125<1$;

5) $5^{\frac{1}{4}\log_5^2 x} \geq 5x^{\frac{1}{5}\log_5 x}$; 6) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leq 0$;

7) $\log_2 \dfrac{5-12x}{12x-8} + \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$; 9) $\log_2^2 x + 3\log_2 x \geq \dfrac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}} 16$;

10) $\log_x (x-2) \leq 0$; 11) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2+4x}{2x-3} < 1$; 12) $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+2}} < \dfrac{1}{9}$; 13) $\log_{x+1}\left(x^2+x-6\right)^2 \geq 4$.

3. Решите неравенство:

1) $(8-x)^{\log_2^2(8-x)} \leq 2^{3x-4}$; 2) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1} < 3^x - \log_2\left(1+x^2\right)$; 3) $\log_5 x < \sqrt{1-x^4}$;

4) $\log_4\left(2+\sqrt[4]{x}\right) + \log_2\left(1+x^2+x^4\right) < 0$; 5) $x \cdot 4^x > 4$; 6) $x \cdot \log_3 x < 18$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) Запишите двойное неравенство в виде системы неравенств.

2) Неравенство решается заменой переменной.

3) Обратите внимание на то, что в скобках стоят взаимно обратные числа.

4) Рассмотрите 3 случая: 1) $x < 1$, 2) $x > 1$; 3) основание степени отрицательно, а показатель степени — целое число.

5) Неравенство решается заменой переменной.

6) Заменой переменной сведите данное неравенство к иррациональному.

2. 1) Данное неравенство равносильно неравенству $\ln x \geq 0$.

2) Примените свойства логарифмов и логарифмической функции.

3) Приведите логарифмы к одному основанию.

4) Приведите логарифмы к одному основанию.

5) Прологарифмируйте обе части неравенства.

6) Неравенство решается заменой переменной.

7) Приведите логарифмы к одному основанию.

8) Приведите логарифмы к одному основанию.

9) Предварительно найдите значение правой части.

10) Обратите внимание на то, что основание логарифма содержит переменную величину. Рассмотрите два случая: $0 < x < 1$, $x > 1$.

11) Обратите внимание на то, что основание логарифма меньше 1.

12) Вначале воспользуйтесь свойствами показательной функции, затем — логарифмической.

13) Обратите внимание на то, что основание логарифма содержит переменную величину. Рассмотрите два случая: $0 < x + 1 < 1$, $x + 1 > 1$.

3. 1) Прологарифмируйте обе части неравенства и воспользуйтесь свойствами монотонности логарифмической функции.

2) Найдите область определения неравенства.

3) Найдите область определения неравенства и воспользуйтесь монотонностью функций, входящих в неравенство.

4) Найдите область определения неравенства и воспользуйтесь монотонностью функций, входящих в неравенство.

5) Обратите внимание на то, что отрицательные значения x не удовлетворяют неравенству. Разделите обе части неравенства на x и исследуйте полученные функции.

6) Разделите обе части неравенства на x и исследуйте полученные функции.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений; в) $(0; +\infty)$; г) $(-\infty; 0)$; д) $(-\infty; +\infty)$. **2.** а) 0; –1; –2; б) –2; –1; 0; 1; 2. **3.** а) (0;1); б) (0; 1); в) (0; 3); г) (0; 3). **4.** а) 5; 6; 7; б) 2; 3; 4. **5.** а) нет; б) да; в) нет; г) нет.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $(-\log_3 2; +\infty)$; 2) $[0; 2]$; 3) $[-2; -1)\cup(-1; +\infty)$; 4) $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;3)$;

5) $[-1; 0)\cup(0; 2]$; 6) $(2; +\infty)$. **2.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $(1; 3)$; 3) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$;

4) $(0;0{,}2)\cup(1;5^{1,5})$; 5) $\left(0;5^{-\sqrt{20}}\right]\cup\left[5^{-\sqrt{20}};+\infty\right)$;

6) $\left[\frac{1}{2};4\right]$; 7) $\left(\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right]$; 8) $(0;\ 1)$; 9) $\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup[2;+\infty)$; 10) $(2;3]$;

$11)\left(-3;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$; 12) $(1;\ 2)$; 13) $(-1;0)\cup(0;1]$.

3. 1) $[4;8)$; 2) 1; 3) $(0;1)$; 4) нет решений; 5) $(1;\ +\infty)$; 6) $(0;\ 9)$.

8. Применение показательных и логарифмических функций

Повторяем теорию

С помощью показательных функций описываются различные процессы и явления. Например, процесс распада радия можно описать формулой $m = m_0a^t$, где t — время, с; $m = m(t)$ — масса радия в момент времени t, г; $m_0 = m(0)$ — начальная масса радия, a — некоторое действительное число. Зависимость температуры тела T от времени t при охлаждении его в среде с постоянной температурой T_0 можно выразить с помощью формулы $T = T_0 + (T_1 - T_0)a^t$, где T_1 — начальная температура тела. Формула сложных процентов $A_t = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ определяет зависимость суммы A_t на счете вкладчика банка от времени t при начислении p% вклада каждую единицу времени. Подобными функциями описывают развитие биологических популяций, затраты предприятия, рост количества публикаций, объем информации и т. п.

Говоря о применении логарифмических функций, нужно иметь в виду то, что потребность в них возникает чаще всего там, где используются показательные функции. Например, пусть зависимость атмосферного давления от высоты местности над уровнем моря описана с помощью показательной функции, тогда высота над уровнем моря определяется через атмосферное давление с помощью логарифмической функции.

Кроме того, с помощью логарифмических функций моделируются некоторые реальные процессы и явления: зависимость скорости ракеты v от ее массы m задается формулой $v = v_г \ln\frac{m_0}{m}$, где $v_г$ — скорость вылетающих газов, m_0 — стартовая масса ракеты; зависимость коэффициента D звукоизоляции стен от давления p звука, прошедшего через стену, задается формулой $D = A\lg\frac{p_0}{p}$, где p_0 — давление звука до поглощения, A — некоторая постоянная.

Логарифмическая функция применяется в сейсмологии. Например, магнитуда объемных волн (показатель землетрясения) вычисляется по формуле $m_b = \lg\frac{A}{T} + Q(D,h)$, где A — амплитуда колебаний земли (в микрометрах), T — период волны (в секундах), и Q — поправка, зависящая от расстояния до эпицентра D и глубины очага землетрясения h.

Решаем

Задача 1. Атмосферное давление в зависимости от высоты местности над уровнем моря изменяется по закону $p = 1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 0{,}882^h$, где p — давление, Па, h — высота, км. На какой высоте находится вершина горы, если атмосферное давление на ней равно $5{,}00 \cdot 10^4$ Па?

Решение. Решение задачи сводится к решению уравнения

$$1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 0{,}882^h = 5{,}00 \cdot 10^4, \text{ или } 0{,}882^h = 0{,}495.$$

Отсюда $h = \frac{\lg 0{,}495}{\lg 0.882} \approx \frac{-0{,}305}{-0{,}055} \approx 5{,}55$.

Ответ: $\approx$5,55 км.

Задача 2. Закон изменения некоторой величины со временем имеет вид $x = \frac{100}{3}\log_2(0{,}06t + 1)$, где t — время; x — числовое значение величины.

1) Найдите значение величины при: а) $t = 0$; б) $t = 10$.

2) Через сколько единиц времени после начала его отсчета значение величины будет составлять 120?

Решение. 1) Подставив значения t в заданную формулу и воспользовавшись калькулятором, получим:

а) $x(0) = \frac{100}{3}\log_2(0{,}06 \cdot 0 + 1) = 0$; б) $x(10) = \frac{100}{3}\log_2(0{,}06 \cdot 10 + 1) \approx 22{,}6$.

2) Ответом на поставленный вопрос служит решение уравнения

$\frac{100}{3}\log_2(0{,}06t+1)=120$ или $\log_2(0{,}06t+1)=3{,}6$ или $2^{3,6} = 0{,}06t + 1$. Отсюда

$t=\frac{2^{3,6}-1}{0.06}\approx 185$.

Ответ. 1) а) 0; б) ≈22,6. 2) ≈185.

Вопросы для самоконтроля

1. При радиоактивном распаде количество вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через: а) 1 сутки; б) 2 суток; в) 1,5 суток; г) 3,5 суток; д) 100 суток?

2. Давление воздуха падает с ростом высоты (при постоянной температуре) по закону $p=p_0e^{-\frac{h}{H}}$, где p_0 — давление на уровне моря (h = 0), p — давление на высоте h, H — некоторая константа, зависящая от высоты. Какой знак имеет константа H ?

3. Резервуар имеет отверстие, через которое за каждую единицу времени вытекает $\frac{1}{10}$ часть того количества воды, которая содержалось в нём в начале отсчета единицы времени. Какая часть воды в резервуаре останется через 2 единицы времени?

Задачи для самостоятельного решения

1. Скорость погружения тела в жидкость описывается формулой $v=2{,}5(1-2{,}7^{-1,5t})$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

1) Найдите скорость тела через 10 и 20 с после начала погружения.

2) На сколько изменится скорость за первые 10 с погружения? За следующие 10 с?

2. Конструкция вакуумного насоса рассчитана на откачивание за один ход поршня из камеры 3% газа от того количества, которое было в камере перед этим ходом поршня. Сколько движений нужно сделать, чтобы откачать из камеры 99% газа?

3. Количество особей биологической популяции в течение каждой единицы времени увеличивается на 8 % по отношению к предыдущей единице времени. Через сколько единиц времени численность популяции удвоится?

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Вычислите значения заданной функции при указанных значениях t.

2. Введя обозначения для начального количества газа в насосе и для количества ходов поршня насоса, выразите через них количество газа в насосе через введенное количество ходов поршня.

3. Введя обозначения для начального количества особей и для количества единиц времени, выразите через них количество особей в популяции через введенное количество единиц времени.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) 125 г; б) 62,5 г; в) ≈88,4 г; г) ≈22,1 г; д) ≈0 г. **2.** $H > 0$. **3.** 0,81.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

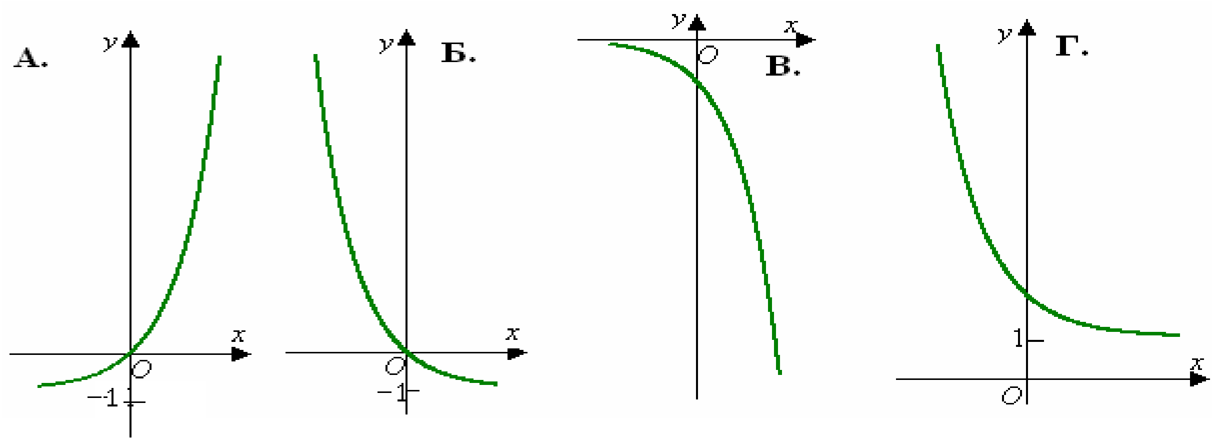
1. 1) ≈2,5 м/с, ≈2,5 м/с; 2) на 10^{-6} м/с, на 10^{-11} м/с. **2.** ≈ 152. **3.** ≈ Через 10.

Тренажёр

1. Показательная функция и её свойства

Вариант 1

1. Какой вид имеет график функции $y = 3^{-x} - 1$?



2. Расположите по возрастанию числа $a = \left(\frac{1}{3}\right)^3$; $b = \left(\frac{1}{3}\right)^\pi$; $c = 3^{-4}$.

А. $a < c < b$. **Б.** $c < a < b$. **В.** $c < b < a$. **Г.** $a < b < c$.

3. Точка $M\left(2; \sqrt[3]{3}\right)$ принадлежит графику функции $f(x) = \ldots$

А. $3^{\frac{x+1}{x-1}}$. **Б.** $3^{\frac{x-1}{x+1}}$. **В.** $3^{\frac{1-x}{x+1}}$. **Г.** $3^{\frac{x+1}{1-x}}$.

4. Функция $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна **Г.** и чётна, и нечётна.

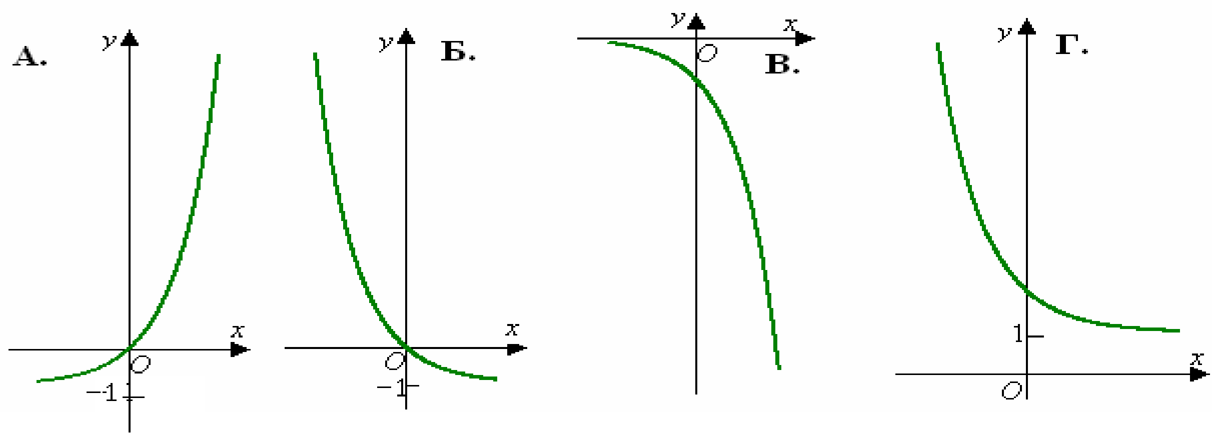
5. График функции $y = \dfrac{3^{4x} + 1}{3^{2x}}$ симметричен относительно …

А. оси абсцисс. **Б.** начала координат. **В.** оси ординат. **Г.** прямой $y = x$.

6. Укажите все значения x, при которых график функции $y = 2^x$ расположен ниже графика функции $y = e^x$.

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(0; +\infty)$. **В.** $(-1; 0)$. **Г.** $(-\infty; 0)$.

Вариант 2



1. Какой вид имеет график функции $y = 3^x - 1$?

2. Расположите по возрастанию числа $a = \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $b = \left(\frac{1}{3}\right)^e$; $c = 3^{-3}$.

А. $a < c < b$. **Б.** $c < a < b$. **В.** $c < b < a$. **Г.** $a < b < c$.

3. Точка $M\left(4;\frac{1}{4}\right)$ принадлежит графику функции $f(x) = \ldots$

А. $2^{-\sqrt{x}}$. **Б.** $2^{\sqrt{x}}$. **В.** $2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. **Г.** $2^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

4. Функция $y = \dfrac{3^{2x} - 1}{3^x}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна. **Г.** и чётна, и нечётна.

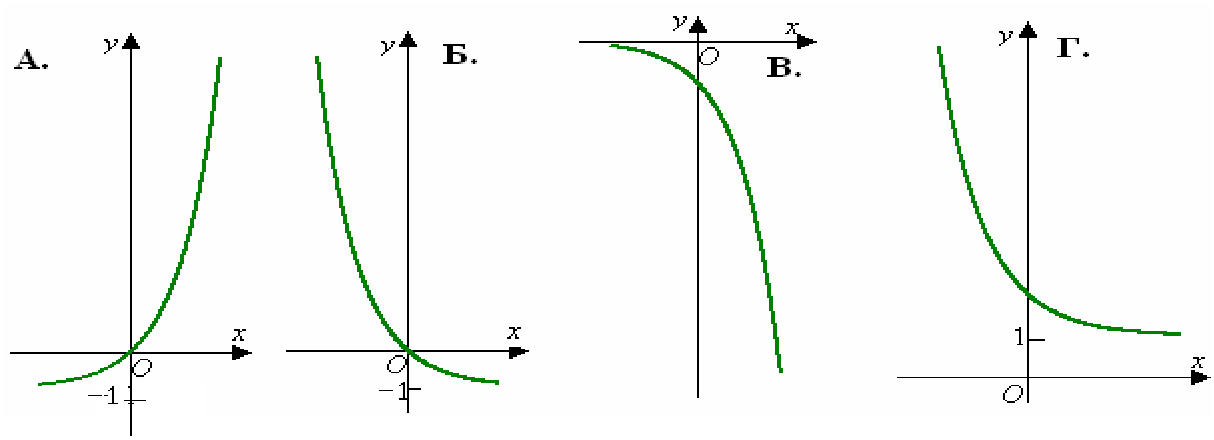
5. График функции $y = \dfrac{2^{6x} - 1}{2^{3x}}$ симметричен относительно …

А. оси абсцисс. **Б.** начала координат. **В.** оси ординат. **Г.** прямой $y = x$.

6. Укажите все значения x, при которых график функции $y = 2^x$ расположен выше графика функции $y = e^x$.

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(0; +\infty)$. **В.** $(-1; 0)$. **Г.** $(-\infty; 0)$.

Вариант 3



1. Какой вид имеет график функции $y = -3^x$?

2. Расположите по возрастанию числа $a = \left(\frac{2}{5}\right)^2$; $b = \left(\frac{2}{5}\right)^e$; $c = (2{,}5)^{-3}$.

А. $a < c < b$. **Б.** $c < a < b$. **В.** $c < b < a$. **Г.** $a < b < c$.

3. Точка $M\left(-2;\sqrt[3]{3}\right)$ принадлежит графику функции $f(x) = \ldots$

А. $3^{\frac{x+1}{x-1}}$. **Б.** $3^{\frac{x+1}{1-x}}$. **В.** $3^{\frac{x-1}{x+1}}$. **Г.** $3^{\frac{1-x}{1+x}}$.

4. Функция $y = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна. **Г.** и чётна, и нечётна.

5. График функции $y = \dfrac{1-5^{4x}}{5^{2x}}$ симметричен относительно …

А. оси абсцисс. **Б.** начала координат. **В.** оси ординат. **Г.** прямой $y = x$.

6. Укажите все значения x, при которых график функции $y = 2^{-x}$ расположен выше графика функции $y = e^{-x}$.

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(0; +\infty)$. **В.** $(-1; 0)$. **Г.** $(-\infty; 0)$.

Подсказки

1. Воспользуйтесь построением графиков функций с помощью геометрических преобразований.

График функции $y = f(x) + a$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси y на $|a|$ единиц: в направлении оси y, если $a > 0$ и в противоположном направлении, если $a < 0$.

График функции $y = f(x + b)$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси x на $|b|$ единиц: в направлении оси x, если $b < 0$ и в противоположном направлении, если $b > 0$.

График функции $y = -f(x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси x.

2. Воспользуйтесь свойством 3 показательной функции. Обратите внимание на значение основания степени.

3. Воспользуйтесь определением графика функции.

График функции y = f(x) — это множество точек координатной плоскости с координатами (x; f(x)), где x — произвольное число из области определения функции.

Подставьте значение абсциссы в формулы, приведенные в ответах, и выясните, для какой функции полученное значение равно ординате заданной точки.

4. Воспользуйтесь определениями чётной и нечётной функций.

Функция y = f(x) называется чётной, если:

1) её область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x).$$

Функция y = f(x) называется нечётной, если:

1) ее область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x).$$

5. Воспользуйтесь тем, что

функция является чётной тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно оси ординат;

функция является нечётной тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно начала координат.

Обратите внимание на то, что график никакой функции не может быть симметричным относительно оси абсцисс.

6. Решение задания сводится к решению простейшего показательного неравенства. Составьте это неравенство, разделите обе его части на выражение, стоящее в правой части, или на выражение, стоящее в левой части, и воспользуйтесь свойством 2 показательной функции.

2. Вычисление значений выражений, содержащих логарифмы

Вариант 1

7. Вычислите $\log_2 \frac{1}{8} + \lg 0{,}01$.

А. –5. **Б.** –1. **В.** 1. **Г.** 5.

8. Вычислите: $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$.

А. $\frac{1}{4}$. **Б.** – 4. **В.** $\frac{1}{2}$. **Г.** –2.

9. Вычислите $\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_8 4\right)$.

А. 2. **Б.** – 1. **В.** 0. **Г.** 1.

10. Вычислите $5^{\log_{\sqrt{5}} 3}$.

А. 3. **Б.** $\sqrt{3}$. **В.** 9. **Г.** $\frac{1}{3}$.

11. Вычислите $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$.

А. 2. **Б.** $\frac{1}{2}$. **В.** $\frac{1}{3}$. **Г.** 3.

12. Вычислите: $2\log_3 \sqrt{12} + \log_{\frac{1}{3}} 4$.

А. 1. **Б.** 0. **В.** –2. **Г.** – 1.

13. Вычислите $\log_5 16 \cdot \log_4 25$.

А. 4. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** 5.

14. Вычислите $\dfrac{3\log_{64} 3}{\log_4 9}$.

А. 2. **Б.** 0,5. **В.** 3. **Г.** 1,5.

Вариант 2

7. Вычислите: $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{5}} 25$.

А. 0. **Б.** 1. **В.** 5. **Г.** 6.

8. Вычислите: $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{9}$.

А. $\dfrac{1}{2}$. **Б.** – 2. **В.** $\dfrac{1}{4}$. **Г.** –4.

9. 9. Вычислите $\log_{\frac{3}{4}} \left(\log_{16} 8\right)$.

А. А. 2. **Б.** 0. **В.** – 1. **Г.** 1.

10. Вычислите $\sqrt{3}^{\log_{\frac{1}{3}} 7}$.

А. А. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **Б.** $\sqrt{7}$. **В.** 7. **Г.** $\dfrac{1}{7}$.

11. Вычислите $5^{\frac{1}{\log_4 5}}$.

А. 5. **Б.** $\dfrac{1}{4}$. **В.** $\dfrac{1}{5}$. **Г.** 4.

12. Вычислите: $3\log_5 \sqrt[3]{500} + \log_{\frac{1}{5}} 4$.

А. – 3. **Б.** 3. **В.** –2 **Г.** – 1.

13. Вычислите $\log_3 49 \cdot \log_7 27$.

А. 6. **Б.** 4. **В.** 1. **Г.** 5.

14. Вычислите $\dfrac{6\log_{27} 5}{\log_3 25}$.

А. 2. **Б.** 3. **В.** 1. **Г.** 1,5

Вариант 3

7. Вычислите: $\log_2 32 - \log_{\frac{1}{2}} 8$.

А. 0. **Б.** 2. **В.** 5. **Г.** 8.

8. Вычислите: $\log_9 \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

А. $-\dfrac{1}{2}$. **Б.** 2. **В.** $-\dfrac{1}{4}$. **Г.** 4.

9. Вычислите $\log_{0,4}(\log_4 32)$.

А. –1. **Б.** 1. **В.** 2,5. **Г.** 8

10. Вычислите $7^{\log_{\sqrt{7}} 5}$.

А. 5. **Б.** $\sqrt{5}$. **В.** 25. **Г.** 0,2.

11. Вычислите $3^{\frac{1}{\log_7 3}}$.

А. 3. **Б.** $\dfrac{1}{7}$. **В.** $\dfrac{1}{3}$. **Г.** 7.

12. Вычислите: $\log_2 \sqrt{144} + \log_{\frac{1}{2}} 3$.

А. 1. **Б.** 2. **В.** –2. **Г.** – 1.

13. Вычислите $\log_2 25 \cdot \log_5 8$.

А. 6. **Б.** 4. **В.** 1. **Г.** 5. **А.** 2. **Б.** 3 . **В.** 1. **Г.** 1,5

14. Вычислите $\dfrac{12\log_{125} 3}{\log_5 9}$.

Подсказки

7. Воспользуйтесь определением логарифма. Рассмотрите примеры, приведенные выше после определения логарифма.

8. Можно воспользоваться или определением логарифма, или свойством логарифма частного, или свойством логарифма степени положительного числа.

9. Обратите внимание на то, что логарифм числа 1 по основанию *a,* где $a > 0$, $a \neq 1$, равен 0: $\log_a 1 = 0$.

10. Вначале вычислите логарифм, стоящий в скобках. Для его вычисления можно воспользоваться следствием 2 формулы перехода к другому основанию и свойством логарифма степени.

11. Воспользуйтесь основным логарифмическим тождеством. Предварительно можно воспользоваться формулой перехода к другому основанию или следствием 2 из неё.

12. Воспользуйтесь следствием 1 из формулы перехода к другому основанию: **если $a > 0$, $b > 0$ и** $a \neq 1$, $b \neq 1$, **то** $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. Затем можно применить основное логарифмическое тождество. Приведите оба логарифма к одному основанию, затем воспользуйтесь свойствами логарифмов.

13. Приведите оба логарифма к одному основанию, воспользовавшись формулой перехода к другому основанию. Далее примените определение логарифма.

14. Приведите оба логарифма к одному основанию, воспользовавшись формулой перехода к другому основанию, и примените определение логарифма.

3. Преобразование логарифмических и показательных выражений

Вариант 1

15. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение $\sqrt{8}^{\frac{\log_2 x^2}{3}-\frac{\log_2 x^4}{5}}$? **А.** $\sqrt[5]{x}$. **Б.** $\sqrt[5]{|x|}$. **В.** $\frac{1}{\sqrt[5]{|x|}}$. **Г.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

16. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение

$3^{\frac{\log_5 \log_5 3}{\log_5 3}}$

А. 3. **Б.** $\log_3 5$. **В.** $\log_5 3$. **Г.** 5.

17. При каком основании логарифм числа a равен b, если: $a=\frac{1}{9}, b=-\frac{4}{3}$?

А. $\sqrt{3}$. **Б.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **В.** $3\sqrt{3}$. **Г.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

18. Найдите x, если: $\log_3 x=\frac{2}{3}\log_3 8+\frac{1}{2}\log_3 16$.

А. 4. **Б.** 8. **В.** 16. **Г.** 32.

19. Найдите $\log_2 x$, если $\log_{0,25} x-\log_4 x=1$.

А. 1. **Б.** –1. **В.** 2. **Г.** –2.

20. Вычислите $25^x + 25^{-x}$, если $5^x + 5^{-x} = 3$.

А. 7. **Б.** 9. **В.** 11. **Г.** 27.

21. Вычислите $8^x + 8^{-x}$, если $2^x + 2^{-x} = 5$.

А. 110. **Б.** 115. **В.** 120. **Г.** 125.

22. Вычислите $2^x - 2^{-x}$, если $4^x + 4^{-x} = 27$.

А. 5. **Б.** –5. **В.** 5 или –5. **Г.** 3 или –3.

23. Вычислите $27^x - 27^{-x}$, если $3^x - 3^{-x} = 4$.

А. 52. **Б.** 60. **В.** 64. **Г.** 76.

Вариант 2

15. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{\log_7 x^4}{5}-\frac{\log_7 x^2}{3}}$?

А. $\sqrt[15]{x}$.   **Б.** $\sqrt[15]{|x|}$.   **В.** $\frac{1}{\sqrt[15]{x}}$.   **Г.** $\frac{1}{\sqrt[15]{|x|}}$.

16. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение $5^{\frac{\log_3 \log_3 5}{\log_3 5}}$?

А. 3.   **Б.** $\log_3 5$.   **В.** $\log_5 3$.   **Г.** 5.

17. При каком основании логарифм числа *a* равен *b*, если: $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{3}{4}$?

А. $\sqrt[3]{64}$.   **Б.** $\sqrt[3]{128}$.   **В.** $\sqrt[3]{256}$.   **Г.** $\sqrt[3]{512}$.

18. Найдите *x*, если: $\log_5 x = \frac{2}{5}\log_5 3 - \frac{1}{10}\log_5 9$.

А. $\sqrt[3]{5}$.   **Б.** $\sqrt[10]{9}$.   **В.** $\sqrt[5]{9}$.   **Г.** $\sqrt[5]{3}$.

19. Найдите $\log_3 x$, если $\log_9 x - \log_{\frac{1}{9}} x = 2$.

А. 1.   **Б.** –1.   **В.** 2.   **Г.** –2.

20. Вычислите $9^x + 9^{-x}$, если $3^x + 3^{-x} = 4$.

А. 64.   **Б.** 18.   **В.** 16.   **Г.** 14.

21. Вычислите $27^x + 27^{-x}$, если $3^x + 3^{-x} = 4$.

А. 40.   **Б.** 52.   **В.** 64.   **Г.** 78.

22. Вычислите $4^x - 4^{-x}$, если $16^x + 16^{-x} = 11$.

А. 3.   **Б.** –3.   **В.** 5 или –5.   **Г.** 3 или –3.

23. Вычислите $8^x - 8^{-x}$, если $2^x - 2^{-x} = 2$.

А. 8.   **Б.** 14.   **В.** 16.   **Г.** 22.

Вариант 3

15. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{\log_2 x^4}{5}+\frac{\log_2 x^{-2}}{3}}$?

А. $\sqrt[15]{x}$.   **Б.** $\sqrt[15]{|x|}$.   **В.** $\frac{1}{\sqrt[15]{x}}$.   **Г.** $\frac{1}{\sqrt[15]{|x|}}$.

16. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение $2^{\frac{\log_5 \log_5 2}{\log_5 2}}$?

А. 2. **Б.** $\log_2 5$. **В.** $\log_5 2$. **Г.** 5.

17. При каком основании логарифм числа *a* равен *b*, если: $a = \dfrac{1}{16},\ b = -\dfrac{8}{3}$?

А. $\sqrt{2}$. **Б.** 2. **В.** $2\sqrt{2}$. **Г.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

18. Найдите *x*, если: $\log_2 x = \log_2 5 + 3\log_2 7 - \frac{1}{3}\log_2 3$.

А. $1715\sqrt[3]{3}$. **Б.** $\dfrac{1715}{\sqrt[3]{3}}$. **В.** $105\sqrt[3]{3}$. **Г.** $\dfrac{105}{\sqrt[3]{3}}$.

19. Найдите $\log_5 x$, если $\log_{0,04} x - \log_{25} x = -1$.

А. 1. **Б.** –1. **В.** 2. **Г.** –2.

20. Вычислите $49^x + 49^{-x}$, если $7^x + 7^{-x} = 5$.

А. 27. **Б.** 25. **В.** 23. **Г.** 125.

21. Вычислите $64^x + 64^{-x}$, если $4^x + 4^{-x} = 6$.

А. 252. **Б.** 234. **В.** 216. **Г.** 198.

22. Вычислите $6^x - 6^{-x}$, если $36^x + 36^{-x} = 51$.

А. 7. **Б.** –7. **В.** 9 или –9. **Г.** 7 или –7.

23. Вычислите $125^x - 125^{-x}$, если $5^x - 5^{-x} = 3$.

А. 18. **Б.** 27. **В.** 36. **Г.** 45.

Подсказки

15. Преобразуйте вначале показатель степени, воспользовавшись более общей формулой 3), а затем примените свойства степени, логарифмов и основное логарифмическое тождество.

16. Пользуясь формулой перехода к другому основанию, представьте показатель степени в виде логарифма некоторого выражения, затем воспользуйтесь основным логарифмическим тождеством.

17. Воспользовавшись определением логарифма, составьте уравнение относительно неизвестного основания. Для его решения возведите обе его части в степень с таким показателем, чтобы получить неизвестное в первой степени.

18. Воспользовавшись свойствами 2, 3 и 4 логарифмов, преобразуйте правую часть, а затем примените утверждение: если $\log_a x = \log_a y$, то $x = y$.

19. Применив формулу перехода к другому основанию логарифмов, приведите все логарифмы к одному основанию.

20. Возведите обе части данного равенства в квадрат, из полученного равенства найдите значение искомого выражения.

21. Возведите обе части данного равенства в куб, пользуясь формулой $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, и из полученного равенства найдите значение искомого выражения.

22. Вычислите вначале значение квадрата искомого выражения, воспользовавшись данным равенством.

23. Вычислите вначале значение куба искомого выражения, воспользовавшись формулой $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ и данным равенством.

4. Логарифмическая функция, её свойства и график

Вариант 1

24. Областью определения функции $y = \ln(6 - 2x)$ является множество …

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(3; +\infty)$. **В.** $(-\infty; 3)$. **Г.** $(-\infty; 3]$.

25. Точка $M(-9; 3)$ принадлежит графику функции $f(x) = \ldots$

А. $\sqrt{x}\lg(1-x)$. **Б.** $\sqrt{x}\lg(x-1)$. **В.** $\sqrt{-x}\lg(x-1)$. **Г.** $\sqrt{-x}\lg(1-x)$.

26. Укажите все значения x, при которых равны функции $\dfrac{\log_x 2}{\log_x 5}$ и $g(x) = \log_5 2$.

А. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. **Б.** $x \in (0; +\infty)$.

В. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **Г.** $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

27. Между какими последовательными целыми числами находится $\lg 50$?

А. –2 и –1. **Б.** –1 и 0. **В.** 0 и 1. **Г.** 1 и 2.

28. Между какими последовательными целыми числами находится $\log_2 0,7$?

А. –2 и –1. **Б.** –1 и 0. **В.** 0 и 1. **Г.** 1 и 2.

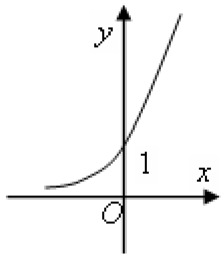
29. Укажите все значения k, при которых функция $y = x\log_k 0,5 + 1$ возрастает.

А. $k \in (0; 1)$. **Б.** $k \in (0; +\infty)$. **В.** $k \in (1; +\infty)$. **Г.** $k \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

30. Функция $y = x\ln\dfrac{x-2}{x+2}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна **Г.** и чётна, и нечётна.

31. Укажите из приведенных в ответах функцию, график которой схематично изображен на рисунке.



А. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. **Б.** $y = 3^x$. **В.** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **Г.** $y = \dfrac{1}{x}$.

Вариант 2

24. Областью определения функции $y = \lg\dfrac{x^2}{x+1}$ является множество …

А. $(-1; +\infty)$. **Б.** $(1; +\infty)$. **В.** $(-1; 0)\cup(0; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; 1-)\cup(-1; +\infty)$.

25. Точка $M\left(\dfrac{1}{2}; 2\lg 2\right)$ принадлежит графику функции $f(x) = \ldots$

А. $\lg(3-4x+4x^2)$. **Б.** $\lg(3-4x-4x^2)$. **В.** $\lg(3+4x+4x^2)$. **Г.** $\lg(3+4x-4x^2)$.

26. Укажите все значения x, при которых равны функции $f(x) = 2^{\log_2 x}$ и $g(x) = x$.

А. $x \in (-\infty; +\infty)$. **Б.** $x \in (0; +\infty)$. **В.** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **Г.** $x \in (-\infty; 0]$.

27. Между какими последовательными целыми числами находится $\log_2 10$?

А. 3 и 4. **Б.** 2 и 3. **В.** 0 и 1. **Г.** 1 и 2.

28. Между какими последовательными целыми числами находится $\log_4 0,2$?

А. –2 и –1. **Б.** –1 и 0. **В.** 0 и 1. **Г.** 1 и 2.

29. Укажите все значения k, при которых функция $y = \log_{\frac{k}{k-1}}(x)$ возрастает.

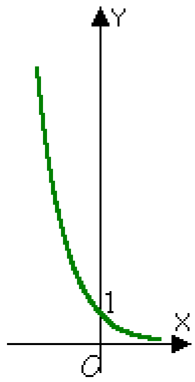
А. $k \in (0; 1)$. **Б.** $k \in (0; +\infty)$. **В.** $k \in (1; +\infty)$. **Г.** $k \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

30. Функция $y=\ln\dfrac{x+2}{x-2}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна.

Г. и чётна, и нечётна.

31. Укажите из приведенных в ответах функцию, график которой схематично изображен на рисунке.



А. $y=\log_{\frac{1}{3}} x$. **Б.** $y = 3^x$. **В.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **Г.** $y=\dfrac{1}{x}$.

Вариант 3

24. Областью определения функции $y=\lg\dfrac{x+1}{x^2}$ является множество …

А. (–1; +∞). **Б.** (1; +∞). **В.** (–1; 0)∪(0; +∞). **Г.** (–∞; 1–ǐ) ∪(–1; +∞).

25. Точка $M(4;-2)$ принадлежит графику функции $f(x)$ = …

А. $\dfrac{2}{\log_2 x-1}$. **Б.** $\dfrac{\log_2 x-1}{2}$. **В.** $\dfrac{1-\log_2 x}{2}$. **Г.** $\dfrac{2}{1-\log_2 x}$.

26. Укажите все значения x, при которых равны функции $f(x)=\log_{x^2} 3$ и $g(x)$ = $\dfrac{1}{2}\log_{|x|} 3$.

А. $x \in (-\infty; +\infty)$. **Б.** $x \in (0; +\infty)$.

В. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **Г.** $x \in (-\infty; 0]$.

27. Между какими последовательными целыми числами находится $\log_3 40$?

А. 3 и 4. **Б.** 2 и 3. **В.** 0 и 1. **Г.** 1 и 2.

28. Между какими последовательными целыми числами находится $\log_{0,5} 9$?

А. –1 и 0. **Б.** –2 и –1. **В.** –3 и –2. **Г.** –4 и –3.

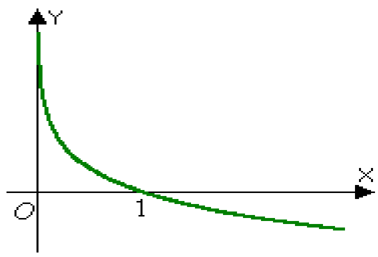
29. Укажите все значения k, при которых функция $y = (\log_k 2)^x$ убывает.

А. $k \in (0; 1)$. **Б.** $k \in (2; +\infty)$. **В.** $k \in (1; 2)$. **Г.** $k \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

30. Функция $y=\lg\dfrac{1-x}{x+1}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна. **Г.** и чётна, и нечётна.

31. Укажите из приведенных в ответах функцию, график которой схематично изображен на рисунке.



А. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. **Б.** $y = 3^x$. **В.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **Г.** $y = \log_3 x$.

Подсказки

24. Воспользовавшись тем, что областью определения логарифмической функции является множество положительных чисел, составьте и решите соответствующее неравенство.

25. Воспользуйтесь определением графика функции.

График функции y = f(x) — это множество точек координатной плоскости с координатами (x; f(x)), где x — произвольное число из области определения функции.

Подставьте значение абсциссы в выражения, приведенные в ответах, и выясните, для какой функции полученное значение равно ординате заданной точки.

26. Воспользуйтесь определением равных функций.

Функции называются равными, если они:

1) имеют одинаковую область определения;

2) в каждой точке области определения принимают одинаковые значения.

27-28. Воспользуйтесь определением логарифма и свойством 2 монотонности логарифмической функции.

29. Установите, об убывании какой функции (линейной, логарифмической или показательной) идёт речь в задании. Воспользуйтесь условиями убывания соответствующего класса функций. Составьте и решите соответствующее неравенство.

30. Воспользуйтесь определениями чётной и нечётной функций.

Функция y = f(x) называется чётной, если:

1) её область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

f(–x) = f(x).

Функция y = f(x) называется нечётной, если:

1) ее область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x).$$

31. Сравните приведенный график с выше приведенными графиками показательных и логарифмических функций.

5. Показательные уравнения

Вариант 1

32. Корень уравнения $3^{4x+1} = 3\sqrt{3}$ лежит в интервале …

А. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **Б.** $\left(-\frac{1}{8};0\right)$. **В.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **Г.** $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

33. Решите уравнение $8^x + 3\cdot 2^{3x-1} = 20$.

А. 8. **Б.** 4. **В.** 2. **Г.** 1.

34. Найдите наименьший корень уравнения $\left(1-4^{x^2-1}\right)\sqrt{3x+1} = 0$.

А. 1. **Б.** –1. **В.** $-\frac{1}{3}$. **Г.** $\frac{1}{3}$.

35. Найдите расстояние между корнями уравнения $\frac{1}{5^{3-2x}} - 6\cdot 5^{x-2} + 1 = 0$.

А. 20. **Б.** 5. **В.** 2. **Г.** 1.

36. Найдите значение выражения $3^{x_1+x_2}$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $9^x - 5\cdot 3^x + 6 = 0$.

А. 2. **Б.** 3. **В.** 6. **Г.** 12.

Вариант 2

32. Корень уравнения $2^{4x+1} = 2\sqrt{2}$ лежит в интервале …

А. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **Б.** $\left(-\frac{1}{8};0\right)$. **В.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **Г.** $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

33. Решите уравнение $9^{x+3} + 3^{2x+2} = \frac{82}{9}$.

А. 4. **Б.** 2. **В.** –2. **Г.** –1.

34. Найдите наименьший корень уравнения $\left(9^x - 3^{x-2}\right)\sqrt{1-x^2} = 0$.

А. 1. **Б.** –1. **В.** –2. **Г.** 0.

35. Найдите расстояние между корнями уравнения $4^{x-0,5} - \dfrac{9}{2^{1-x}} + 4 = 0$.

А. 3. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** 7.

36. Найдите значение выражения $4^{x_1+x_2}$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $2\cdot 16^x - 5\cdot 4^x + 2 = 0$.

А. 8. **Б.** 4. **В.** 2. **Г.** 1.

Вариант 3

32. Корень уравнения $3^{2x+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ лежит в интервале …

А. $\left(-\dfrac{5}{4};0\right)$. **Б.** $\left(-\dfrac{5}{8};0\right)$. **В.** $\left(0;\dfrac{5}{4}\right)$. **Г.** $\left(0;\dfrac{5}{8}\right)$.

33. Решите уравнение $2\cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} = 15$.

А. 2. **Б.** 1. **В.** –2. **Г.** –1.

34. Найдите наименьший корень уравнения $\left(9^{0,5x^2-1} - \dfrac{1}{3}\right)\sqrt{1+2x} = 0$.

А. 1. **Б.** –1. **В.** –0,5. **Г.** 0.

35. Найдите расстояние между корнями уравнения $4\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 5\cdot 2^{-x+1} + 4 = 0$.

А. –2. **Б.** 0. **В.** 1. **Г.** 2.

36. Найдите значение выражения $5^{x_1+x_2-2}$ если x_1 и x_2 — корни уравнения $25^x - 3\cdot 5^x + 2 = 0$.

А. 0,04. **Б.** 0,08. **В.** 0,16. **Г.** 0,32.

Подсказки

32. Представьте обе части уравнения в виде степеней с одним и тем же основанием. Затем от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ перейдите к уравнению $f(x) = g(x)$. Найдя его корень, выберите из интервалов, представленных в ответах, тот, в котором лежит найденный корень.

33. Выразите все показательные функции, входящие в уравнение, через одну.

34. Обратите внимание на то, что левая часть уравнения представляет собой произведение двух множителей, а правая часть равна 0.

Уравнение вида $f(x)\sqrt{g(x)}=0$ обычно решают переходом к совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ \sqrt{g(x)}=0. \end{array}\right.$ При этом может оказаться, что корень совокупности не является корнем данного уравнения в виду того, что он не принадлежит его области определения. Поэтому обязательно нужно сделать проверку. Из корней уравнения нужно выбрать наименьший.

35. Расстояние между корнями — это модуль разности между ними. Для решения заданного уравнения воспользуйтесь методом замены. Преобразуйте члены уравнения так, чтобы заменой свести его к квадратному.

36. Обратите внимание на то, что фактически нужно найти $a^{x_1}\cdot a^{x_2}$, где a^{x_1} и a^{x_2} численно равны корням уравнения, которое можно получить из данного заменой a^x, например, на *y*. Для нахождения указанного произведения можно воспользоваться теоремой Виета.

6. Логарифмические уравнения

Вариант 1

37. Найдите сумму корней уравнения $\log_5\left(x^2+4x+4\right)=0$ или укажите его корень, если он единственный.

А. – 4. **Б.** 4. **В.** – 1. **Г.** – 2.

38. Сколько корней имеет уравнение $\log_{0,1}x=x^2-1$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Невозможно определить.

39. Решите уравнение $\log_8(x^2–1) = 1$.

А. 3. **Б.** –3. **В.** 3;–3. **Г.** $\sqrt{3};-\sqrt{3}$.

40. Решите уравнение $\log_x(x+2)=2$.

А. 2; –1. **Б.** –1. **В.** 2. **Г.** –2; 1.

41. Найдите отрицательные корни уравнения $\log_2\left|\frac{2x+1}{x}\right|=3$.

А. –0,2. **Б.** $-\frac{1}{6}$. **В.** –0,1. **Г.** – 1.

Вариант 2

37. Найдите сумму корней уравнения $\log_{0,5}\left(x^2-6\right)=\log_{0,5}x$ или укажите его корень, если он единственный.

А. 3. **Б.** 1. **В.** – 1. **Г.** – 2.

38. Сколько корней имеет уравнение $\ln x=\left(x-1\right)^2$?

А. Ни одного. **Б.** Один **В.** Два. **Г.** Более двух.

39. Решите уравнение $\log_6(x^2-3)=1$.

А. 3. **Б.** –3. **В.** 3;–3. **Г.** $\sqrt{3};-\sqrt{3}$.

40. Решите уравнение $\log_x(2x^2-1)=1$

А. 1. **Б.** –0,5. **В.** 1; –0,5. **Г.** Нет решений.

41. Найдите отрицательные корни уравнения $\log_{0,5}\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|=0$.

А. –3. **Б.** $-\frac{1}{3}$. **В.** –3; $-\frac{1}{3}$. **Г.** $-\frac{1}{3}$; –9.

Вариант 3

37. Найдите сумму корней уравнения $\log_{0,5}\left(x^2-2x-4\right)=\log_{0,5}x$ или укажите его корень, если он единственный.

А. 2. **Б.** 4. **В.** –4. **Г.** –2.

38. Сколько корней имеет уравнение $\lg x=-x^2$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Более двух.

39. Решите уравнение $\log_7(x^2-9)=1$.

А. 4. **Б.** –4. **В.** 4; –4. **Г.** 2; –2.

40. Решите уравнение $\log_{x^2}(2-x)=1$.

А. 1. **Б.** –2. **В.** 1; –2. **Г.** Нет решений.

41. Найдите отрицательные корни уравнения $\log_3\left|\dfrac{1}{2x+1}\right|=-1$.

А. –2. **Б.** 1. **В.** –2; 1. **Г.** –1; 2.

Подсказки

37. Воспользуйтесь определением логарифма.

38. Постройте графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения в одной системе координат и подсчитайте количество точек их пересечения. Это количество и будет количеством корней данного уравнения.

39. Воспользуйтесь определением логарифма.

40. Воспользуйтесь определением логарифма, но обратите внимание на то, что после его применения может расшириться область определения уравнения, так как основание логарифма зависит от переменной. Поэтому обязательно сделайте проверку.

41. После применения определения логарифма уравнение примет вид $|f(x)| = a$, $a > 0$. Оно равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$ В заключение отберите отрицательные корни.

7. Показательные и логарифмические неравенства

Вариант 1

42. Решите неравенство: $(0{,}25)^{6-x} > (0{,}25)^5$

А. $x > 1$. **Б.** $x > 11$. **В.** $x < 1$. **Г.** $x < 11$.

43. Решите неравенство $0{,}25^{\frac{x+1}{2}} < 0{,}5$.

А. $(-\infty;\ 1)$. **Б.** $(0;\ +\infty)$. **В.** $(-\infty;\ 0)$. **Г.** $(1;\ +\infty)$.

44. Неравенство $\log_{0,2}(3x+1) > \log_{0,2}(-x)$ равносильно …

А. неравенству $3x + 1 > -x$. **Б.** неравенству $3x + 1 < -x$.

В. системе $\begin{cases} 3x+1>-x, \\ -x>0. \end{cases}$ **Г.** системе $\begin{cases} 3x+1<-x, \\ 3x+1>0. \end{cases}$

45. Решите неравенство $\log_{0,5}(1-x) > -1$.

А. (0; 2). **Б.** (1; +∞). **В.** (–1; 1). **Г.** (–∞; –1).

46. Какое из неравенств не имеет решений?

А. $10^x > -100$. **Б.** $\lg x > -100$. **В.** $10^x < -100$. **Г.** $\lg x < -100$.

47. В каком из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Leftrightarrow$»?

А. $3\log_a b = c \Leftrightarrow \log_a b^3 = c$. **Б.** $-\log_a b = c \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{b} = c$.

В. $\frac{1}{3}\log_a b = c \Leftrightarrow \log_a \sqrt[3]{b} = c$ **Г.** $2\log_a b = c \Leftrightarrow \log_a b^2 = c$.

Вариант 2

42. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$.

А. [1; +∞). **Б.** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. **В.** (–∞; 1]. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

43. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1} \geq \frac{1}{25}$.

А. [1; +∞). **Б.** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. **В.** (–∞; 1]. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

44. Неравенство $\log_5(x-1) < \log_5(2x)$ равносильно …

А. неравенству $x - 1 < 2x$. **Б.** системе $\begin{cases} x-1>2x, \\ x>0. \end{cases}$.

В. системе $\begin{cases} x-1<2x, \\ x>0. \end{cases}$ **Г.** системе $\begin{cases} x-1<2x, \\ x-1>0. \end{cases}$

45. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(7-x) < -2$.

А. (–2; 7). **Б.** (–∞; –2). **В.** (–∞; 7). **Г.** (–2; +∞).

46. Какое из следующих неравенств выполняется при всех значениях x?

А . $10^x > -100$. **Б.** $\lg x > -100$. **В.** $10^x < -100$. **Г.** $\lg x < -100$.

47. Какое из следующих пар предложений состоит из неравносильных предложений?

А. $\lg x = 0$ и $x = 1$; **Б.** $x^2 \geq 0$ и $2^x > 0$;

В. $\log_2 x > 1$ и $x > 2$; **Г.** $\lg x = \lg y$ и $x = y$.

Вариант 3

42. Решите неравенство $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-3} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5}$.

А. $[2; +\infty)$. **Б.** $(-\infty; -2]$. **В.** $(-\infty; 2]$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

43. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} \geq \frac{1}{9}$.

А. $[1; +\infty)$. **Б.** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. **В.** $(-\infty; 1]$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

44. Неравенство $\log_5(x-1) > \log_5(2x)$ равносильно …

А. неравенству $x - 1 > 2x$. **Б.** системе $\begin{cases} x-1 > 2x, \\ x > 0. \end{cases}$.

В. системе $\begin{cases} x-1 < 2x, \\ x > 0. \end{cases}$ **Г.** системе $\begin{cases} x-1 > 2x, \\ x-1 > 0. \end{cases}$

45. Решите неравенство $\log_3(7-x) < 2$.

А. $(-\infty; 7)$. **Б.** $(-2; +\infty)$. **В.** $(-2; 7)$. **Г.** Ответ отличен от приведённых.

46. Какое из следующих неравенств выполняется при всех значениях x?

А. $3^x > -9$. **Б.** $\lg x > -9$. **В.** $3^x < -9$. **Г.** $\lg x < -9$.

47. В каком из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Leftrightarrow$»?

А. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0, \\ x^2-1 < 1. \end{cases}$ **Б.** $\log_x(2-x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = x^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

В. $\log_2 x = \log_2(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x-1, \\ x > 0. \end{cases}$ **Г.** $x\log_2 x = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ или $\log_2 x = 0)$

Подсказки

42. Воспользуйтесь монотонностью показательной функции..

43. Представьте обе части неравенства в виде степеней с одним и тем же основанием и воспользуйтесь решением примера 1.

44. Воспользуйтесь теоремой о неравенстве $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ и решением примера 6.

45. Воспользуйтесь тем, что функции $y = \log_a x$ определены при $x > 0$ и при $a > 1$ возрастают, а при $0 < a < 1$ – убывают.

46. Воспользуйтесь множествами значений показательной и логарифмической функций.

47. Воспользуйтесь определением равносильных утверждений.

Предложения А и В называются равносильными, если множества их решений совпадают. Это обозначается так: « $A \Leftrightarrow B$ ***» (читается: «А равносильно В»).***

Примените ранее рассмотренные методы решения логарифмических уравнений и неравенств, обратите внимание на теорему о неравенстве $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

8.Применение показательных и логарифмических функций

Вариант 1

48. При передаче электроэнергии по подводному кабелю потери энергии на каждом километре (при удалении от источника энергии) составляют 0,5 %. Мощность источника равна E_0. Чему равно количество передаваемой энергии на расстоянии l км от источника энергии?

А. $E_0 \cdot 0{,}995^l$. **Б.** $E_0 \cdot (1{,}005)^l$. **В.** $E_0 \cdot (0{,}005)^l$. **Г.** $E_0 \cdot (0{,}95)^l$.

49. Закон изменения величины x в зависимости от времени имеет вид: $x = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$. В какой момент времени значение величины равно $\frac{1}{2}$?

А. $t = 0$. **Б.** $t = \frac{1}{2}$. **В.** $t = \ln 2$. **Г.** Такого момента нет.

50. При радиоактивном распаде масса M оставшегося вещества определяется по формуле $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где M_0 — количество вещества к началу распада, T — период полураспада. Имеется 8 г радиоактивного вещества с периодом полураспада в 3 года. Через сколько лет масса вещества будет равна 0,5 г?

А. Через 6 лет. **Б.** Через 12 лет. **В.** Через 18 лет. **Г.** Через 24 года.

Вариант 2

48. При искусственном выращивании каких-либо микроорганизмов, когда обеспечиваются особо благоприятные условия для жизни организмов, размножение клеток идёт так, что за некоторый определённый промежуток времени каждая клетка делится на две дочерние клетки. Сколько клеток будет через t указанных промежутков времени, если в начале наблюдения их было a штук?

А. $a \cdot 0{,}5^t$ **Б.** $a \cdot 2^t$ **В.** $a \cdot (0{,}05)^t$ **Г.** $a \cdot (1{,}5)^t$

49. Скорость v ракеты в зависимости от массы m изменяется по закону $v = v_г \ln\frac{m_0}{m}$ (формула Циолковского), где $v_г$ — скорость газов, вылетающих из ракеты, m_0 – стартовая масса ракеты. Найдите зависимость массы ракеты от ее скорости.

А. $m = m_0 e^{\frac{v}{v_г}}$. **Б.** $m = m_0 e^{\frac{v_г}{v}}$. **В.** $m = m_0 e^{-\frac{v}{v_г}}$. **Г.** $m = m_0 e^{-\frac{v_г}{v}}$.

50. При радиоактивном распаде масса М оставшегося вещества определяется по формуле $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где M_0 — количество вещества к началу распада, T — период полураспада. Искусственным путём было получено 30 г радиоактивного вещества с периодом полураспада в 10 суток. Через сколько суток от начала опыта из всей массы полученного вещества останется лишь 7,5 г?

А. Через 10 суток. **Б.** Через 15 суток. **В.** Через 20 суток. **Г.** Через 30 суток.

Вариант 3

48. Световой луч, проходя через пластмассовую пластинку, теряет $\frac{1}{3}$ своей интенсивности. Чему будет равна интенсивность светового луча, если он пройдёт через n таких пластинок, если значение интенсивности до прохождения через пластинки равна a?

А. $a\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **Б.** $a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **В.** $a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$. **Г.** $a\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

49. Коэффициент звукоизоляции стен вычисляется по формуле $D = A\lg\frac{p_0}{p}$, где p_0 — давление звука до поглощения, p — давление звука, прошедшего через стену, A — некоторая постоянная. Выразите давление звука после поглощения через другие переменные.

А. $p = p_0 e^{-\frac{D}{A}}$. **Б.** $p = p_0 e^{\frac{D}{A}}$. **В.** $p = p_0 10^{\frac{D}{A}}$. **Г.** $p = p_0 10^{-\frac{D}{A}}$.

50. При радиоактивном распаде масса M оставшегося вещества определяется по формуле $M = M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где M_0 — количество вещества к началу распада, T — период полураспада. К началу наблюдения радиоактивного распада имелось 6 г вещества с периодом полураспада 6 лет. Через сколько лет масса вещества будет равна 0,75 г?

А. Через 6 лет. **Б.** Через 12 лет. **В.** Через 18 лет. **Г.** Через 24 года.

Подсказки

48. Воспользуйтесь тем, что рассматриваемый процесс в каждую единицу времени, или на каждой единице длины, или проходя через каждую пластину, изменяется на одно и то же количество процентов от значения этого процесса в начале указанного момента.

49. Для нахождения искомой величины решите соответствующее уравнение относительно этой величины.

50. Воспользуйтесь формулой радиоактивного распада вещества.

Ответы к заданиям 1 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Б	В	Б	А	В	Б	А	Б	Г	В	Г	А	А	Б	В	В	В
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
В	Б	А	А	В	Г	В	Г	Г	Г	Б	А	Б	Б	В	Г	В
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
Г	В	А	Б	В	В	В	А	Б	Г	В	В	Г	А	Г	Б	

Ответы к заданиям 2 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
А	В	А	А	Б	Г	В	Г	Г	А	Г	Б	А	В	Б	Б	В
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Г	В	Г	Б	Г	Б	В	Г	Б	А	А	В	А	В	В	В	Б
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
А	Г	А	В	В	Г	А	В	В	Г	Б	А	Г	Б	В	В	

Ответы к заданиям 3 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
В	В	А	А	Б	Б	Г	В	А	В	Г	Б	А	А	Г	В	В
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Б	А	В	Г	Г	В	В	Г	В	А	Г	Б	А	А	А	Б	В
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
Г	Б	Б	Б	В	Б	А	В	В	Г	В	А	Г	А	Г	В	

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Контрольный тест**	**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	25 задач	15 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	32 задач	20 задач	11 задач
«отлично»	Решено не менее	40 задач	28 задач	15 задач

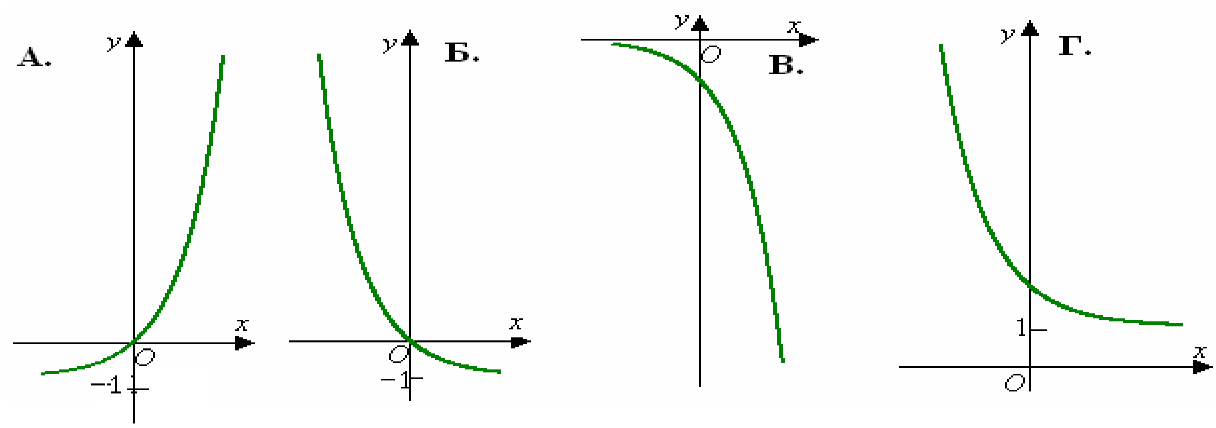
Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Какой вид имеет график функции $y = 3^{-x}$?



2. Расположите по возрастанию числа $a = \left(\frac{1}{5}\right)^2$; $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; $c = 5^{-3}$.

А. $a < c < b$. **Б.** $c < a < b$. **В.** $c < b < a$. **Г.** $a < b < c$.

3. Точка $M\left(\frac{1}{9};9\right)$ принадлежит графику функции $f(x) = \ldots$

А. $3^{-\sqrt{x}}$. **Б.** $3^{\sqrt{x}}$. **В.** $3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. **Г.** $3^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

4. Функция $y = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{3}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна. **Г.** и чётна, и нечётна.

5. График функции $y = \dfrac{7^{6x} + 1}{7^{3x}}$ симметричен относительно …

А. оси абсцисс. **Б.** начала координат. **В.** оси ординат. **Г.** прямой $y = x$.

6. Укажите все значения x, при которых график функции $y = 2^{-x}$ расположен ниже графика функции $y = e^{-x}$.

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(0; +\infty)$. **В.** $(-1; 0)$. **Г.** $(-\infty; 0)$.

7. Вычислите $\log_3 \frac{1}{9} + \lg 0{,}001$.

А. –5. **Б.** –1. **В.** 1. **Г.** 5.

8. Вычислите: $\log_{49} \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

А. $\frac{1}{4}$. **Б.** -4. **В.** $-\frac{1}{2}$. **Г.** $-\frac{1}{4}$.

9. Вычислите $\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_{25}125\right)$.

А. 2. **Б.** -1. **В.** 0. **Г.** 1.

10. Вычислите $\sqrt{10^{\lg 6}}$.

А. 6. **Б.** $\sqrt{6}$. **В.** 36. **Г.** $\frac{1}{6}$.

11. Вычислите $7^{\frac{1}{\log_5 7}}$.

А. 7. **Б.** $\frac{1}{7}$. **В.** $\frac{1}{5}$. **Г.** 5.

12. Вычислите: $3\lg\sqrt[3]{200}+\log_{0,1}0{,}2$.

А. 10. **Б.** 3. **В.** -3. **Г.** -10.

13. Произведение $\log_7 81\cdot\log_9 49$ равно …

А. 4. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** -4.

14. Вычислите $\frac{15\log_8 7}{\log_4 49}$.

А. 7. **Б.** 0,2. **В.** 5. **Г.** 3.

15. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{\log_5 x^{-8}}{7}+\frac{\log_5 x^2}{3}}$?

А. $\sqrt[21]{x^5}$. **Б.** $\sqrt[21]{|x|^5}$. **В.** $\frac{1}{\sqrt[21]{|x|^5}}$. **Г.** $\frac{1}{\sqrt[21]{x^5}}$.

16. Какому из выражений, приведенных в ответах, равняется выражение $7^{\frac{\log_3\log_3 7}{\log_3 7}}$

А. 7. **Б.** $\log_7 3$. **В.** $\log_3 7$. **Г.** 3.

17. При каком основании логарифм числа 16 равен $-\frac{2}{3}$?

А. 64. **Б.** $\frac{1}{8}$. **В.** 8. **Г.** $\frac{1}{64}$.

18. Найдите x, если: $\log_4 x = 2\log_4 10 - \frac{1}{2}\log_4 7 - 3\log_4 3$.

А. $\frac{2700}{\sqrt{7}}$. **Б.** $\frac{100}{27\sqrt{7}}$. **В.** $\frac{100\sqrt{7}}{27}$. **Г.** $2700\sqrt{7}$.

19. Найдите $\log_2 x$, если $\log_{2\sqrt{2}} x - \log_8 x = 2$.

А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 6.

20. Вычислите $36^x + 36^{-x}$, если $6^x + 6^{-x} = 5$.

А. 23. **Б.** 25. **В.** 27. **Г.** 30.

21. Вычислите $125^x + 125^{-x}$, если $5^x + 5^{-x} = 3$.

А. 27. **Б.** 25. **В.** 20. **Г.** 18.

22. Вычислите $3^x - 3^{-x}$, если $9^x + 9^{-x} = 18$.

А. 4. **Б.** –4. **В.** 6 или –6. **Г.** 4 или –4.

23. Вычислите $64^x - 64^{-x}$, если $4^x - 4^{-x} = 5$.

А. 110. **Б.** 125. **В.** 140. **Г.** 155.

24. Областью определения функции $y = \lg(8 - 2x)$ является множество …

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(4; +\infty)$. **В.** $(-\infty; 4)$. **Г.** $(-\infty; 4]$.

25. Точка $M(-4; 2)$ принадлежит графику функции $f(x) = \dots$

А. $\sqrt{x}\log_5(1-x)$. **Б.** $\sqrt{x}\log_5(x-1)$. **В.** $\sqrt{-x}\log_5(x-1)$. **Г.** $\sqrt{-x}\log_5(1-x)$.

26. Укажите все значения x, при которых совпадают функции $\frac{\log_x 2}{\log_x 5}$ и $g(x)$ = $\log_5 2$.

А. $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **Б.** $x \in (0; +\infty)$.

В. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **Г.** $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

27. Между какими последовательными целыми числами находится $\log_5 200$?

А. 0 и 1. **Б.** 1 и 2. **В.** 2 и 3. **Г.** 3 и 4.

28. Между какими последовательными целыми числами находится $\log_{\frac{1}{3}} 30$?

А. –4 и –3. **Б.** –3 и –2. **В.** –2 и –1. **Г.** –1 и 0.

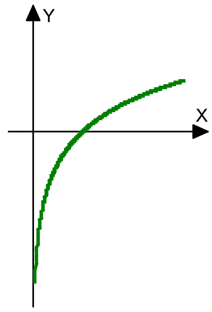
29. Укажите все значения k, при которых функция $y = 2^{x\log_k 2}$ убывает.

А. $k \in (0;\ 1)$. **Б.** $k \in (0;\ +\infty)$. **В.** $k \in (1;\ +\infty)$. **Г.** $k \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

30. Функция $y = x\lg\dfrac{1-x}{x+1}$ …

А. нечётна. **Б.** чётна. **В.** ни чётна, ни нечётна.

Г. и чётна, и нечётна.



31. Укажите из приведенных в ответах функцию, график которой схематично изображен на рисунке.

А. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. **Б.** $y = 3^x$. **В.** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **Г.** $y = \log_3 x$.

32. Корень уравнения $2^{2x+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ лежит в интервале …

А. $\left(-\dfrac{5}{4};0\right)$. **Б.** $\left(-\dfrac{5}{8};0\right)$. **В.** $\left(0;\dfrac{5}{4}\right)$. **Г.** $\left(0;\dfrac{5}{8}\right)$.

33. Решите уравнение $81^x + 7\cdot 9^{2x} + 5\cdot 3^{4x-1} = 87$.

А. 2. **Б.** 1. **В.** 0,5. **Г.** 0,25.

34. Найдите наименьший корень уравнения $\left(9^{x^2-1}-1\right)\sqrt{2x-1} = 0$.

А. 1. **Б.** –1. **В.** $-\dfrac{1}{2}$. **Г.** $\dfrac{1}{2}$.

35. Найдите расстояние между корнями уравнения $2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2x+1} - 5\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 2 = 0$.

А. $\dfrac{1}{3}$. **Б.** $\dfrac{2}{3}$. **В.** 1. **Г.** $\dfrac{4}{3}$.

36. Найдите значение выражения $2^{x_1+x_2-1}$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$.

А. 3. **Б.** 2. **В.** 1,5. **Г.** 1.

37. Найдите сумму корней уравнения $\log_2^2 x = \log_2 \frac{4}{x}$ или укажите его корень, если он единственный.

А. 1. **Б.** 2,25. **В.** 1,75. **Г.** –1.

38. Сколько корней имеет уравнение $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Невозможно определить.

39. Решите уравнение $\log_5(14 - x^2) = 1$.

А. 3. **Б.** –3. **В.** 3;–3. **Г.** $\sqrt{3};-\sqrt{3}$.

40. Решите уравнение $\log_x(2x + 3) = 2$.

А. 1; –3. **Б.** 3. **В.** 1. **Г.** –1; 3.

41. Найдите отрицательные корни уравнения $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{|3x-2|} = -2$.

А. $-\frac{5}{3}$. **Б.** $-\frac{1}{3}$. **В.** $-\frac{2}{3}$. **Г.** $-\frac{5}{6}$.

42. Решите неравенство: $(0,7)^{3-2x} < (0,7)^{x-6}$.

А. $x > 3$. **Б.** $x > -3$. **В.** $x < 3$. **Г.** $x < -3$.

43. Решите неравенство $0{,}36^{\frac{1-x}{2}} < 0{,}6$.

А. $(-\infty; 1)$. **Б.** $(0; +\infty)$. **В.** $(-\infty; 0)$. **Г.** $(1; +\infty)$.

44. Неравенство $\log_{0,2}(3x + 1) < \log_{0,2}(-x)$ равносильно …

А. неравенству $3x + 1 > -x$. **Б.** неравенству $3x + 1 < -x$.

В. системе $\begin{cases} 3x+1 > -x, \\ -x > 0. \end{cases}$ **Г.** системе $\begin{cases} 3x+1 < -x, \\ 3x+1 > 0. \end{cases}$

45. Решите неравенство $\log_{0,5}(1 - x) > -1$.

А. (1; 2). **Б.** $(1; +\infty)$. **В.** (–2; –1). **Г.** Ответ отличен от приведённых.

46. Какое из неравенств не имеет решений?

А. $3^x > -9$. **Б.** $\log_3 x > -9$. **В.** $3^x < -9$. **Г.** $\log_3 x < -9$.

47. Какое из высказываний, приведенных в ответах, является истинным?

А. $\left(\sqrt{5}-2\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$ **Б.** $\log_{\sqrt{3}-1} x < 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}-1.$

В. $\log_x(\sqrt{5}-1) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-1 > x.$ **Г.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$

48. Количество особей биологической популяции в течение каждой единицы времени увеличивается на 8% по отношению к предыдущей единице времени. Первоначальное количество особей равно a. Чему равно количество особей через t единиц времени после начала наблюдений?

А. $a\cdot 1{,}08^t$. **Б.** $a\cdot(1{,}008)^t$. **В.** $a\cdot(0{,}08)^t$. **Г.** $a\cdot(0{,}92)^t$.

49. Давление воздуха падает с ростом высоты (при постоянной температуре) по закону $p = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$, где p_0 — давление на уровне моря ($h = 0$), p — давление на высоте h, H — некоторая константа, зависящая от высоты. Найдите формулу для вычисления высоты в зависимости от давления.

А. $h = H\ln\frac{p}{p_0}$. **Б.** $h = H\ln\frac{p_0}{p}$. **В.** $h = \frac{1}{H}\ln\frac{p_0}{p}$. **Г.** $h = \frac{1}{H}\ln\frac{p}{p_0}$.

50. Закон радиоактивного распада вещества имеет вид $m = m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где m_0 — количество вещества к началу распада, m — масса вещества в момент t, T — некоторая константа, которую называют периодом полураспада. Через время T после начала распада масса радиоактивного вещества уменьшается вдвое. Чему приближённо, с точностью до суток, равен период полураспада вещества, если за год его масса уменьшилась в 16 раз?

А. 96 суток. **Б.** 94 суток. **В.** 91 суток. **Г.** 90 суток.

Основное задание

1. Вычислите без вычислительных средств:

1) $27^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 0,5 - \log_{27} 2}$; 2) $\log_6 25$, если $\log_5 4 = a$, $\log_5 12 = b$; 3) $\left(\log_5 2 + \frac{1}{\log_3 5}\right)\log_6 5$.

2. Сравните без вычислительных средств числа:

1) $\dfrac{1}{\log_3 5}+\log_5 11$ и 2; 2) $\log_5 7+\log_7 5$ и $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$.

3. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)^{\frac{2\lg x^2}{5}+\frac{\lg x^{-4}}{3}}$; 2) $\dfrac{1}{\log_{\sqrt{2}} 9}+\dfrac{1}{\log_2 9}+\dfrac{1}{\log_{2\sqrt{2}} 9}+\dfrac{1}{\log_4 9}+\dfrac{1}{\log_{4\sqrt{2}} 9}$.

4. Постройте график функции:

1) $y=\log_x x^2$; 2) $y=2^{2x-1}+1$; 3) $y=\sqrt{\log_2 x}$.

5. Решите уравнение:

1) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$; 2) $2^{2+x}-2^{2-x}-15=0$; 3) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x-5\cdot 36^x=0$;

4) $\log_3\left(4\cdot 3^x-1\right)=2x+1$; 5) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$;

6) $2\log_2\dfrac{x-7}{x-1}+\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=1$; 7) $\log_4 x+\log_{x^2} 2=1$; 8) $x^{\log_x (x+1)^2}=4$;

9) $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$; 10) $\log^2_{\sqrt{2}} x+3\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x=2$.

6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=2{,}75,\\ 2^x-3^y=-0{,}75;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=13,\\ 2\log_6 x+\log_6 y=3.\end{cases}$

7. Решите неравенство:

1) $\log_{0{,}5}(1+2x)>-1$; 2) $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}\left(x^2-3x+2\right)\geq 2$; 3) $\log_x\dfrac{4x+5}{6x-5}<-1$;

4) $\left(\dfrac{1}{5^{x+1}}\right)^x\leq 0{,}04$; 5) $2^{2x+1}-3\cdot 2^x+2\geq 0$; 6) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>\log_2(2-x)$;

7) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leq\dfrac{1}{2}$; 8) $\log_2\left(4^x-5\cdot 2^x+2\right)>2$.

8. Найдите область определения функции:

1) $y=\lg\left(1-\log_{\frac{1}{2}}(x+5)\right)$; 2) $y=\lg\left(4-x^2\right)\cdot\sqrt{\dfrac{1+\lg^2 x}{\lg x^2}-1}$.

Указания к выполнению основного задания

1. 1) Примените свойства логарифмов и основное логарифмическое тождество.

2) Можно свести задачу к нахождению $\log_5 2$ и $\log_5 3$.

3) Приведите логарифмы к основанию 5.

2. 1) Приведите логарифмы к одному основанию.

2) Сравните оба числа с числом 2.

3. 1) Представьте основание степени в виде степени 10воспользовавшись свойствами логарифмов и основным логарифмическим тождеством.

2) Можно привести все логарифмы к основанию 9.

4. 1) Найдите предварительно область определения функции.

2) Воспользуйтесь преобразованиями графика показательной функции.

3) Постройте на одном рисунке графики функций $y = \sqrt{\log_2 x}$ и $y = \log_2 x$.

5. 1) Уравнение можно решить вынесением общего множителя за скобки.

2) Уравнение решается заменой переменной.

3) Можно разделить обе части уравнения, например, на 36^x.

4) Уравнение сводится к показательному.

6) Необходимо либо следить за равносильностью выполняемых преобразований, либо выполнить проверку найденных решений.

7) Можно перейти к логарифмам по основанию 2.

8) Можно прологарифмировать обе части уравнения по основанию x.

9) Обратите внимание на то, что если уравнение имеет решение x_0, то $0 < x_0 < 1$.

10) Приведите логарифмы к одному основанию.

6. 1) Заменой переменных можно свести данную систему к системе линейных уравнений.

2) Можно выразить из второго уравнения одну из переменных через другую и подставить в первое.

7. Не забывайте учитывать область определения логарифмической функции.

3) Рассмотрите два случая для основания логарифма.

4) Представьте обе части неравенства в виде степени одного и того же числа.

5) Неравенство приводится к алгебраическому заменой переменной.

6) и 7) Приведите логарифмы к одному основанию.

8) Неравенство легко сводится к показательному.

8. 1) Используйте область определения логарифмической функции и решите полученное неравенство.

2) Задача сводится к решению системы неравенств.

Дополнительное задание.

1. Сравните без вычислительных средств числа:

1) $\log_3 5$ и $\log_7 19$; 2) $\log_8 9$ и $\log_9 10$; 3) $9^{\log_5 2} + \cos 4$ и $2^{\log_5 9} + \cos 5$; 4) $\lg^2 7$ и $\lg 5$.

2. Какое число ближе к 3: $\log_{0,5} 0{,}124$ или $\log_{0,5} 0{,}126$?

3. Постройте схематически график функции:

1) $y = 3^{-\frac{1}{x}}$; 2) $y = \log_x 3$; 3) $y = \log_2 \cos x$.

4. Решите уравнение:

1) $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$; 2) $(\lg 3)^{(x+4)(x-1)} = (\log_3 10)^{\sqrt{x^2+3x-2}}$;

3) $\log_{3x+7}(4x^2 + 12x + 9) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$;

4) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$; 5) $\log_3(8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$;

6) $x\log_2(x+1) = \log_{\frac{1}{3}} x + 7$; 7) $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) = 1$.

5. Решите неравенство: 1) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2 - 2x}{x-3} < 0$; 2) $4^x \le 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$;

3) $\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-1}{x+1}$; 4) $\log_2(2^x - 1)\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$.

6. Докажите неравенство:

1) $\sqrt{x-1} + 3^x + \log_2 x < 13$, при $1 \le x \le 2$; 2) $e^x \ge x^2 + 1$.

7. Докажите, что области определения функции $f(x) = \sqrt{-x - x^2}$ не принадлежит точка $x_0 = \log_{\log_{0,5} 0,7} 0{,}8$.

Указания к выполнению дополнительного задания

1. 1) Сравните оба числа с числом $\frac{3}{2}$.

2) Вычтите из обоих чисел по 1 и сравните полученные числа.

3) Решение задачи сводится к сравнению cos 4 и cos 5.

4) См. указание к решению задачи 2. 4) для самостоятельного решения из п. 2. «Вычисление значений выражений, содержащих логарифмы».

2. См. указание к решению задачи 3 для самостоятельного решения из п. 3. «Преобразование логарифмических и показательных выражений».

3. Предварительно найдите области определения функций.

4. 1) Можно разделить обе части уравнения, например, на $6^{-\frac{1}{x}}$.

2) Представьте обе части уравнения в виде степеней с одним основанием.

3) Разложите выражения, стоящие в скобках, на множители.

4) Перенесите все члены в одну сторону и разложите полученное выражение на множители.

5) Оцените отдельно левую и правую части уравнения.

6) Используйте монотонность функций, входящих в уравнение.

7) Сравните каждый сомножитель с 1.

5. 1) Как обычно, при решении логарифмических неравенств, учитывайте область определения неравенства и основание логарифма.

2) Разделите неравенство на $2^{\sqrt{x}+1}$ и обозначьте $2^{x-\sqrt{x}}$ через y.

3) Перейдите в правой части к логарифмам по тем же основаниям, что и в левой.

4) Перейдите к логарифмам по одному основанию.

6. 1) Используйте монотонность функции, стоящей в левой части неравенства.

2) Прологарифмируйте неравенство, используйте для решения исследование функций с помощью производной.

7. Установите знак x_0 и знак $-x_0 - x_0^2$.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Показательные и логарифмические функции, уравнения и неравенства

Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов

Учебное пособие