Донецкий национальный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я.С. Бродский, А.Л. Павлов

Текстовые задачи

Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Текстовые задачи. Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов. − Донецк, 2023. – 62 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 10 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом *ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017)*. Ее цель – развитие у обучающихся умений учиться, самостоятельно приобретать знания, умений и навыков применять математику для решения математических и жизненных задач.

Настоящее пособие предназначено для развития умений решать прикладные задачи, сводящиеся к составлению и решению уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части представлен материал для обучения. В этой части содержатся краткие теоретические сведения, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля.

Во второй части пособия содержатся три варианта тренажёра с подсказками ко всем заданиям.

В третьей части пособия приведены задания для проверки овладения учащимися действиями и приёмами, представленными в первой части.

Пособие предназначено для обучающихся открытого математического колледжа факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета. Может быть использовано при проведении факультативных занятий.

Содержание

Дорогой друг!

Настоящее пособие предназначено для развития умений решать текстовые задачи, повторения и систематизации знаний по математике, совершенствования умений моделировать реальные процессы и явления с помощью уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств.

Пособие состоит из трёх частей: обучающей, тренировочной и контролирующей. В первой части представлен материал для повторения и обучения. Он содержит краткие теоретические сведения, применимые при решении представленных задач, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля с ответами на них. Вся совокупность задач разделена на группы по двум признакам: по характеру математических моделей, к которым приводит решение задач, и по их содержанию.

Вторая часть пособия состоит из тестов для тренировки, к заданиям которых приведены указания, ответы. Они структурированы в соответствии с частями, на который разделён весь материал. Тренажёр состоит из заданий с выбором ответа.

Задания для тренировки представлены тремя однотипными вариантами теста. Тренировку начинайте с первого варианта теста. Попробуйте выполнить самостоятельно его задания, не используя учебные пособия и микрокалькулятор. Выбор правильных ответов и необходимые записи делайте в отдельной тетради. После завершения работы над тестом сверьте свои ответы с ответами, приведенными в пособии. **Не пользуйтесь ответами, пока не дадите ответы самостоятельно!**

Каждое задание, по которому Ваш ответ не совпал с приведенным, тщательно проанализируйте, пользуясь подсказками. Такую работу полезно выполнить по всем заданиям теста. Наверное, некоторые ответы Вы угадали или «почувствовали», не зная полного решения. Кроме подсказок целесообразно пользоваться теоретическими сведениями и примерами с решениями, содержащимися в первой части пособия.

В третьей части пособия приведено контрольное задание, состоящее из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям тестов для тренировки;

- ***основного задания***, содержащие задания, подобные рассмотренным в первой части пособия;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные задачи по сравнению с основным заданием.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут для Вас полезными и интересными.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит в освоении идей, методов, использованных в приведенных решениях типовых задач, самостоятельном решении подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. **Чтобы решить задачу, нужно:**

- сначала проанализировать её условие и вытекающие из него следствия;

- уяснить требование задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требования задачи.

2. Приступая к выполнению заданий тренажёра, повторите приведенный теоретический материал.

Надо сначала попробовать выполнить самостоятельно задания первого варианта первого блока тренажёра. Выбранные ответы записывайте на отдельном листочке.

Пользоваться учебником и калькулятором не рекомендуется.

3. После завершения работы над первым вариантом первого блока тренажёра необходимо сверить свои ответы с приведенными в пособии.

Нельзя обращаться к приведенным ответам, пока не получены самостоятельно ответы ко всем заданиям.

4. **Каждое задание, по которому ответ не совпал с приведенным, нужно тщательно проанализировать, пользуясь при необходимости приведенными в пособии указаниями.**

Такую работу полезно проделать со всеми заданиями первого варианта блока. Наверное, некоторые ответы угаданы или «почувствованы».

5. Когда появится уверенность в том, что неясных вопросов не осталось, можно проверить надёжность своей уверенности с помощью второго варианта первого блока тренажёра.

Если же при выполнении второго варианта первого блока осталось ощущение, что не всё усвоено, то нужно продолжать работу по исправлению ошибок, выполнить задания третьего варианта, записывая при этом все проделанные шаги.

Если до конца выполнены данные выше рекомендации, то результаты при выполнении следующего варианта теста будут значительно выше первоначальных.

6. Если уверенность подтвердилась при выполнении второго варианта теста, то можно перейти к работе над первым вариантом второго блока. Методика работы над ним остаётся такой же. И так далее.

Ни в коем случае не бросайте работу!

Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части раздела.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы– выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Текстовые задачи

Введение

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных задач не просто, но можно. Этому способствует решение текстовых задач.

Текстовые задачи вы решали, начиная с первого класса различными методами. Многие текстовые задачи решаются арифметическими методами. Но наиболее употребительно для решения текстовых задач применение уравнений, неравенств и их систем при следующей системе действий:

Выбирают некоторое неизвестное значение величины или количества и обозначают его какой-нибудь буквой.

Выражают через введенную букву и данные, приведенные в условии, другие неизвестные значения величины или количества.

Составляют два выражения, в которые входит выбранная буква, и приравнивают их, пользуясь условием.

Полученное равенство называют ***уравнением***. Такой перевод условия задачи на язык математики называют ***составлением уравнения по условию задачи***.

Решают составленное уравнение, находят значение величины или количества, обозначенное введенной буквой. Пользуясь найденным значением неизвестного, нужно выполнить требования задачи.

Схема решения текстовых задач с помощью уравнений, неравенств и их систем состоит, как правило, из четырех этапов:

1) Выбор неизвестных.

2) Составление уравнений (возможно неравенств или системы уравнений).

3) Нахождение неизвестных из полученных соотношений.

4) Проверка соответствия найденных значений условию задачи.

Выбор неизвестных диктуется типом задачи. В задачах на движение, как правило, в качестве неизвестных берутся скорость, расстояние, иногда время. В задачах на работу – производительность, объем работы, время ее выполнения. Не следует пытаться обойтись небольшим числом неизвестных. Чем больше неизвестных, тем легче составлять уравнения.

При составлении уравнений и неравенств в тексте задачи выделяются те предложения, которые представляют собой связи между параметрами ситуации. После записи этих связей с использованием введенных неизвестных получаются уравнения, или неравенства, определяющие решение задачи.

В простейших случаях (если Вы использовали все условия) Вы получите систему уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Проиллюстрируем изложенные рекомендации при решении задачи.

Пример. Из сосуда, наполненного 96%-ным раствором кислоты, отлили 2,5 л и долили сосуд 80%-ным раствором той же кислоты, затем еще раз отлили 2,5 л и снова долили 80%-ным раствором кислоты. После этого в сосуде получился 89%-ный раствор кислоты. Определите вместимость сосуда.

Решение. **1-й этап.** Пусть емкость сосуда равна x л.

2-й этап. "Чистой " кислоты он содержит $0{,}96x$. Из этого сосуда отлили 2,5 л 96%-ной кислоты, т.е. отлили $2{,}5 \cdot 0{,}96 = 2{,}4$ л "чистой" кислоты. Добавили 2,5 л 80%-ной кислоты, т.е. добавили $2{,}5 \cdot 0{,}8 = 2$ л "чистой" кислоты. В сосуде оказалось $(0{,}96x - 2{,}4 + 2)$ л $= (0{,}96x - 0{,}4)$ л "чистой" кислоты. Концентрация полученного раствора равна $\dfrac{0{,}96x - 0{,}4}{x} = 0{,}96 - \dfrac{0{,}4}{x}$.

Другими словами, 1 л раствора содержит $\left(0{,}96 - \dfrac{0{,}4}{x}\right)$ л "чистой" кислоты.

Во второй раз из сосуда отлили $\left(0{,}96 - \dfrac{0{,}4}{x}\right)2{,}5$ л и добавили $2{,}5 \cdot 0{,}8 = 2$ л "чистой" кислоты. Ее в сосуде стало

$$(0{,}96x - 0{,}4) - \left(0{,}96 - \frac{0{,}4}{x}\right)2{,}5 + 2 = \left(0{,}96 - \frac{0{,}4}{x}\right)(x - 2{,}5) + 2 \text{ л.}$$

Концентрация полученного раствора равна $\dfrac{\left(0{,}96-\dfrac{0{,}4}{x}\right)(x-2{,}5)+2}{x}$, что равно по условию 0,89. Итак, имеем уравнение $\left(0{,}96-\dfrac{0{,}4}{x}\right)\left(1-\dfrac{2{,}5}{x}\right)+\dfrac{2}{x}=0{,}89.$

3-й этап. После несложных преобразований полученное уравнение примет вид $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{0{,}8}{x}+0{,}07=0$.

Обозначив $\dfrac{1}{x}$ через y, получим уравнение $y^2 - 0{,}8y + 0{,}07 = 0$. Его корни:

$y_1 = 0{,}7;\ y_2 = 0{,}1$. Отсюда $x_1 = \dfrac{10}{7}, x_2 = 10.$

4-й этап. Значение $\dfrac{10}{7}$ не удовлетворяет условию, так как емкость сосуда не менее 2,5 л.

Ответ: Емкость сосуда 10 л

1. Составление уравнений и систем уравнений

Повторяем теорию

Два выражения с переменной, соединённые знаком равенства, образуют ***уравнение***. Переменную в уравнении обычно называют также ***неизвестным*м**.

Значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство, называется корнем или решением уравнения.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Множество значений неизвестного, при котором определены выражения, составляющие уравнение, называебтся областью допустимых значений уравнения или коротко – ОДЗ.

Два уравнения называются равносильными, если совпадают множества их корней или оба уравнения корней не имеют.

Уравнение $g(x) = 0$ называется ***следствием*** уравнения $f(x) = 0$, если каждое решение второго уравнение является решением первого уравнения.

Уравнение вида ax = b, где a и b – некоторые числа, x – переменная, называют линейным уравнением с одной переменной.

Уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ***где f(x) и g(x) – многочлены, называется дробно-рациональным.***

Решением системы уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел, которая удовлетворяет каждому уравнению системы.

Аналогично можно определить решение системы уравнений с любым числом неизвестных.

Решить систему – значит найти множество всех её решений.

Определение равносильности систем, а также того, что одна система является следствием другой, совершенно аналогичны соответствующим определениям для уравнений.

При решении систем возможны два пути.

а) Переход к равносильным системам. Тогда при каждом переходе множество решений сохраняется и в конечном итоге получаем решения исходной системы.

б) Переход к следствиям исходной системы. Тогда множество решений может расшириться за счёт появления посторонних решений, избавиться от которых можно проверкой.

Справедливы следующие утверждения:

1) если какое-либо уравнение системы заменить равносильным, а остальные уравнения оставить без изменения, то новая система равносильна исходной;

2) если какое-либо уравнение системы заменить его следствием, а остальные уравнения оставить без изменения, то новая система будет следствием исходной;

3) если в каком-либо уравнении системы одно неизвестное выразить через другие и подставить полученное выражение в остальные уравнения, то новая система будет равносильна исходной;

4) если к обеим частям одного уравнения системы прибавить соответствующие части других, умноженные на некоторые числа, а остальные уравнения оставить без изменения, то получим равносильную систему.

Методы решения систем уравнений: метод подстановки; линейные преобразования уравнений; разложение на множители; метод замены неизвестного.

Типы, общий вид и решения простейших уравнений и систем уравнений приведены в следующей таблице.

Тип уравнения (системы, неравенства)	Общий вид	Решение
Линейное уравнение	$ax + b = c$	Если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{c-b}{a}$. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений. Если $a = 0$, $b = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$.

Дробно-рациональное уравнение	$\frac{f(x)}{g(x)}=0$	Равносильно системе $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$
Система 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$	$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.
Полное квадратное уравнение	$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$, если $D > 0$. Если $D < 0$, то решений нет. Если $D = 0$, то $x=-\frac{b}{2a}$.
Неполное квадратное уравнение	$ax^2 = b$, $ab > 0$	$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$
Неполное квадратное уравнение	$ax^2 + bx = 0, a \neq 0$	$x_1 = 0$, $x_2=-\frac{b}{a}$
Иррациональное уравнение	$ax^{\alpha} = b$, $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$, где α – рациональное число	$x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

Решаем

Пример 1. Скорость прямолинейно движущегося тела меняется по закону $v = 4 + 2t$, где v – скорость в момент t, см/с, t – время, с. В какой момент времени скорость будет равна 5 см/с?

Решение. Подставим в данную формулу заданное значение $v = 5$: $5 = 4 + 2t$. Решим полученное линейное уравнение: $2t = 1$, $t = 0,5$. Итак, через 0,5 с после начала движения скорость движущейся точки будет равняться 5 м/с.

Ответ. 0,5 с.

Пример 2. Тело движется по закону $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где s – пройденное расстояние, м; v_0 – начальная скорость, м/с; a – ускорение, м/с^2; t – время, с. Известно, что за первые 2 с оно проходит 44 м, а за первые 4 с – 96 м. За какое время с начала движения тело пройдёт 300 м?

Решение. По условию, при t = 2 с расстояние s равно 44 м, при t = 4 с тело проходит расстояние s, равное 96 м. Подставим эти значения в закон движения. Получим систему уравнений относительно v_0 и a:

$$\begin{cases} 44 = 2a + 2v_0, \\ 96 = 8a + 4v_0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a + v_0 = 22, \\ 2a + v_0 = 24. \end{cases}$$ Отсюда $a = 2$, $v_0 = 20$.

В задаче нужно узнать, за какое время с начала движения тело пройдёт 300 м. Искомое время является решением квадратного уравнения $t^2 + 20t - 300 = 0$. Решая его по формуле с «чётным» коэффициентом, получим: $\frac{D}{4} = 100 + 300 = 400, \sqrt{\frac{D}{4}} = 20,$

$t_1 = -10 - 20 = -30$, $t_2 = -10 + 20 = 10$. Первое значение не удовлетворяет условию: время после начала движения положительно. Следовательно, тело пройдёт 300 м за 10 с после начала движения.

Ответ. За 10 с.

В рассмотренных выше примерах количество уравнений совпадало с количеством неизвестных. Если у Вас число уравнений оказалось меньше числа неизвестных, поступайте следующим образом:

1) проверьте, все ли условия использованы;

2) если использованы все условия, внимательно прочтите, что нужно найти. Если искомая величина в задаче не принята за неизвестное, выразите её через введенные неизвестные;

3) если искомые величины могут принимать только целые значения, то однозначное решение находится только при условии существенного использования этого обстоятельства.

Пример 3. Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за 40 мин., вторая, третья и четвёртая, работая одновременно, за 10 мин.; вторая, третья и пятая – за 20 мин., и, наконец, пятая и четвертая – за 30 мин. За сколько времени наполняют резервуар все пять труб при одновременной работе?

Решение. Обозначим объём резервуара *V*, производительности насосов в минуту x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 соответственно. По условию сразу составляются четыре уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{V}{40}, \\ x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{V}{10}, \\ x_2 + x_3 + x_5 = \dfrac{V}{20}, \\ x_4 + x_5 = \dfrac{V}{30}. \end{cases}$$

Из этой системы нельзя найти все шесть неизвестных. Однако требуется найти время наполнения резервуара при совместной работе всех пяти труб. А для этого достаточно знать общую производительность всех насосов, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. Прибавив к обеим частям удвоенного первого уравнения соответствующие части всех остальных, получим:

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \frac{7V}{30},$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{7V}{60}.$$

Отсюда искомое время равно $T = \dfrac{V}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \dfrac{V}{\frac{7V}{60}} = \dfrac{60}{7}$.

Ответ. $\dfrac{60}{7}$ мин или $\dfrac{1}{7}$ часа.

В примере 3 рассматривалась задача, в которой число неизвестных в системе уравнений превышало число самих уравнений. Как правило, это случается в тех случаях, когда величина, которую нужно найти, может быть представлена в виде некоторой комбинации введённых неизвестных. В этих случаях часто не удаётся найти все неизвестные, но определяется искомая комбинация.

Пример 4. Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретятся на половине пути, если поезд из A выйдет на 2 ч. раньше, чем поезд из B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через 2 ч расстояние между ними составит $\frac{1}{4}$ расстояния между A и B. За какое время каждый поезд проходит весь путь?

Решение. Расстояние AB обозначим через S км, скорости поездов соответственно через x км/ч и y км/ч. К каждой из двух ситуаций, описываемых в задаче, сделаем чертёж.

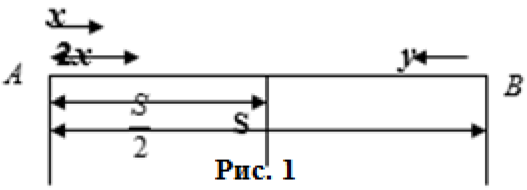


Рис. 1

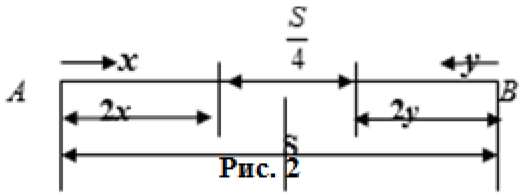


Рис. 2

Составим следующую таблицу:

Движение	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Поезда из А до встречи со $2^{м}$, если он выйдет на 2 ч раньше поезда В	$\frac{S}{2}$	X	$\frac{S}{2x}$
Поезда из В до встречи с $1^{м}$, если он выйдет на 2 ч позже поезда из А	$\frac{S}{2}$	$У$	$\frac{S}{2y}$
Поезда из А, при одновременном начале движения	$2x$	X	2
Поезда из В, при одновременном начале движения	$2y$	$У$	2

Используя первые две строчки таблицы и рис. 1, получаем уравнение

$$\frac{S}{2x}-\frac{S}{2y}=2\,.$$

Из последних двух строк и рис. 2 имеем: $2x+2y+\frac{S}{4}=S$.

Получим систему $\begin{cases} \frac{S}{x}-\frac{S}{y}=4, \\ x+y=\frac{3S}{8}, \end{cases}$ в которой число неизвестных больше числа уравнений. Но в задаче требуется найти не x, y, S, а $\frac{S}{x}$ и $\frac{S}{y}$, т.е. время, за которое каждый поезд проходит весь путь. Полученная система равносильна такой системе: $\begin{cases} \frac{S}{x}-\frac{S}{\frac{3S}{8}-x}=4, \\ y=\frac{3S}{8}-x. \end{cases}$ Первое уравнение принимает вид $3S^2-28Sx+32x^2=0$

Это однородное относительно x и y уравнения. Т.к. $x \neq 0$, то разделив обе части на x^2, получим $3\left(\frac{S}{x}\right)^2-28\left(\frac{S}{x}\right)+32=0$.

Это квадратное относительно $\frac{S}{x}$ уравнение. Его корни 8 и $\frac{4}{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, т.к. поезд из А проходит весь путь во всяком случае более чем за 2 часа. Из уравнения $\frac{S}{x}-\frac{S}{y}=4$ находим, что $\frac{S}{y}=4$.

Ответ. 8 ч и 4 ч.

Пример 5. Найти трёхзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.

Решение. Трёхзначное число имеет вид $100x + 10y + z$, где x – цифра сотен, y – цифра десятков, z – цифра единиц. По условию имеем систему уравнений $\begin{cases} \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{xz}, \\ 100\boldsymbol{x}+10\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-(100\boldsymbol{z}+10\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}) = 297. \end{cases}$

После преобразований получим $\begin{cases} y^2 = xz, \\ x-z=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} y^2=z(z+3), \\ x=z+3. \end{cases}$

Так как x, y, z – целые числа, то $z + 3$ должно иметь вид k^2z, где $k \in \boldsymbol{Z}, k \neq \pm 1$,

то есть $z + 3 = k^2z$, $z = \dfrac{3}{k^2 - 1}$. Отсюда следует, что $k^2 - 1$, может равняться 1 или 3, тогда $z = 3$ или $z = 1$. В первом случае $x = 6$, $y^2 = 18$, что невозможно, так как $y \in \boldsymbol{Z}$. Во втором случае $x = 4$, $y^2 = 4$, $y = 2$ и получаем число 421.

Заметим, что z может иметь также вид $l^2(z+3)$, где $l \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $l = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 3$. Получим число 300.

Ответ. 421; 300.

Вопросы для самоконтроля

1. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 150 - 10p$. Каков максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 440 тыс. руб.?

2. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 5 - 1{,}6t + 0{,}128t^2$, где t – время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

3. Давление газа p (в Па) в зависимости от температуры t (°C) меняется по закону $p = 78000 + 286t$ (закон Шарля). При какой наименьшей температуре, выраженной в целых значениях °C, давление достигнет 100 000 Па?

4. Скорость прямолинейно движущегося тела в зависимости от времени меняется по закону $v = v_0 + at$, где v – скорость в момент времени t, м/с, v_0 – скорость в начальный момент времени ($t = 0$), м/с, t – время, с, a – ускорение, м/с^2. Какой была скорость в конце пятой секунды, если в начальный момент она равнялась 5 м/с, а в конце десятой секунды – 15 м/с?

5. Рассмотрим задачу.

Из курса физики известно, что если не учитывать сопротивления воздуха, то высота h (в м), на которой брошенное вертикально вверх тело окажется *через t секунд, может быть найдена по формуле* $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$*, где* v_0 *– начальная скорость (в м/с), g – ускорение свободного падения, приближённо равное 10 м/с*^{2}*.Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Через сколько секунд оно окажется на высоте 60 м?*

Сколько решений имеет задача?

6. Рассмотрим следующую задачу:

Пароход плывет от Н. Новгорода до Астрахани 5 суток, а от Астрахани до Н. Новгорода 7 суток.

Если через x обозначить собственную скорость парохода, через y – скорость течения, а через S – расстояние от Н. Новгорода до Астрахани, то какую систему уравнений можно составить по условию?

7. Рассмотрим следующую задачу:

Пароход плывет от Н. Новгорода до Астрахани 5 суток, а от Астрахани до Н. Новгорода 7 суток. Сколько суток плывут плоты от Н. Новгорода до Астрахани?

Если через x обозначить собственную скорость парохода, через y – скорость течения, а через S – расстояние от Н. Новгорода до Астрахани, то как выразить искомую величину через введенные неизвестные?

8. Двузначное число с цифрой единиц a и цифрой десятков b равно...

А. ba. **Б.**$10b + a$. **В.** ab. **Г.** $10a+b$.

9. Сколько существует двузначных чисел, в два раза превышающих сумму своих цифр?

А. Ни одного. **Б.** Одно. **В.** Два. **Г.** Три.

10. Рассмотрим следующую задачу: *Найдите двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.* Какую чётность имеет цифра единиц?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. 11 тыс. руб. **2.** В течение 6 мин 15 с. **3.** 77 °С. **4.** 10 м/с. **5.** 2. **6.** $\begin{cases} \dfrac{S}{x+y}=5, \\ \dfrac{S}{x-y}=7. \end{cases}$ **7.** $\dfrac{S}{y}$.

8. Б. **9.** Б. **10.** Чётна.

2. Моделирование процессов, связанных с движением, выполнением работы

Повторяем теорию

В задачах "на движение" обычно принимаются такие допущения:

а) движение на отдельных участках считается равномерным;

б) повороты движущихся тел происходят мгновенно, без затрат времени, скорость при этом меняется мгновенно;

в) скорость тела, движущегося по течению реки, равна скорости в стоячей воде v плюс скорость течения реки u, а если тело движется против течения реки, то его скорость равна $v-u$. Если в условии задачи речь идет о движении плотов, то этим хотят сказать, что тело движется со скоростью течения реки.

Если в задаче речь идет о движении двух тел навстречу друг другу, то эти тела сближаются со скоростью, равной сумме их скоростей. Если речь идет о движении в одном направлении, то одно тело догоняет другое или удаляется от него со скоростью, равной разности скоростей этих тел.

Прямолинейное движение – это движение по линии, которую можно считать прямой.

Равномерное движение тела – это такое движение, при котором тело за равные промежутки времени проходит равные расстояния. Такое движение характеризуется скоростью.

Скорость прямолинейного равномерного движения тела равна длине пути, проходимому телом за единицу времени.

Длина пройденного пути s равна произведению скорости движения v

на затраченное время t $s = vt$

Время t, необходимое для преодоления некоторого пути, равно частному от деления длины пути s на скорость движения v $t = \frac{s}{v}$

$v = \frac{s}{t}$

Скорость движения v равна частному от деления пройденного пути s на затраченное время t

При движении в одном направлении скорость сближения (или удаления) равна разности скоростей.

При прямолинейном равномерном движении в противоположных направлениях скорость сближения (или удаления) равна сумме скоростей.

Скорость движения катера по течению равна сумме собственной скорости катера и скорости течения.

Скорость движения катера против течения равна разности собственной скорости катера и скорости течения.

Если тело движется в среде с собственной скоростью V_T, а среда движется со скоростью V_c, и если направления движения тела и среды совпадают, то фактически тело движется со скоростью $V_д = V_T + V_c$.

Если тело движется в среде с собственной скоростью V_T, а среда движется со скоростью V_c, и если направление движения тела противоположно направлению движения среды, то фактически тело движется со скоростью $V_д = V_T - V_c$.

К задачам на движение можно отнести и задачи, в которых кто-либо выполняет какую-либо работу. В задачах такого типа вся работа играет роль расстояния, а производительности объектов, совершающих работу, аналогичны скоростям движения. Имеют место следующие соотношения.

Объём выполненной работы a равен произведению производительности труда p на затраченное время t $a = pt$

Время t, необходимое для выполнения некоторой работы, равно частному от деления объёма работы a на производительность труда p $t = \frac{a}{p}$

$p = \frac{a}{t}$

Производительность труда p равна частному от деления объёма выполненной работы a на затраченное время t

В задачах на движение весьма полезно составить иллюстративный чертеж. Желательно его сделать таким, чтобы на нем была видна динамика движения.

Решаем

Пример 1. В полдень из пункта *A* в пункт *B* вышел пешеход и выехал велосипедист, и в полдень же из *B* в *A* выехал верховой. Через 2 ч велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины *AB*, а еще через 48 мин. встретились пешеход и верховой. Определить скорость каждого и расстояние *AB*, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

Решение.Составим следующую таблицу, в которой виден и выбор неизвестных.

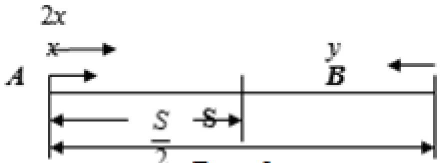


Рис. 3

Движение	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Пешехода до встречи с верховым	$2\frac{4}{5}x$	x	$2\frac{4}{5}$
Велосипедиста до встречи с верховым	$4x$	$2x$	2
Верхового до встречи с велосипедистом	$2y$	$У$	2
Верхового до встречи с пешеходом	$2\frac{4}{5}y$	$У$	$2\frac{4}{5}$

Здесь 48 мин. представлено в виде $\frac{4}{5}$ ч.

Пусть расстояние *AB* равно *S* км. Составим следующий чертеж.

По условию задачи составляем уравнения: $\begin{cases} 2{,}8x + 2{,}8y = S; \\ 4x = \dfrac{S}{2} + 3; \\ 2y = \dfrac{S}{2} - 3. \end{cases}$ Выражая x и y через S соответственно из второго и третьего уравнений и подставляя эти выражения в первое уравнение, получим

$2{,}8\left(\dfrac{S}{8} + \dfrac{3}{4}\right) + 2{,}8\left(\dfrac{S}{4} - \dfrac{3}{2}\right) = S.$ Отсюда $S = 42$. Тогда $x = 6$; $y = 9$.

Ответ. 6; 9; 12 км/ч; 42 км.

Пример 2. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 ч. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

Решение. В качестве неизвестных возьмём: x (км/ч) – скорость катера в стоячей воде; y (км/ч) – скорость течения.

Составим уравнение. Поскольку скорость катера при движении по течению равна $(x + y)$ (км/ч), а против течения – $(x - y)$ (км/ч), то на основании того, что сказано во второй фразе условия, получим

$$\frac{96}{x+y} + \frac{96}{x-y} = 14 \quad \text{или} \quad \frac{48}{x+y} + \frac{48}{x-y} = 7.$$

Вторая часть последней фразы условия ("катер встретил...") даёт нам уравнение

$\dfrac{96}{x+y} + \dfrac{72}{x+y} = \dfrac{24}{y}$ или $\dfrac{4}{x+y} + \dfrac{3}{x-y} = \dfrac{1}{y}.$ Таким образом, имеем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{48}{x+y} + \dfrac{48}{x-y} = 7, \\ \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{3}{x-y} = \dfrac{1}{y}. \end{cases}$

Нужно найти x и y. Освобождаясь во втором уравнении от знаменателя, найдём $x = 7y$. Подставляя $x = 7y$ в первое уравнение, получим $y = 2$, $x = 14$.

Ответ. Скорость катера в стоячей воде 14 км/ч, скорость течения 2 км/ч.

К задачам на движение, как мы отмечали выше, относятся также и задачи, в которых кто-либо выполняет какую-нибудь работу, или задачи, связанные с наполнением и опорожнением резервуаров. В задачах такого типа вся работа или полный объём резервуара играют роль расстояния, а производительности объектов, совершающих работу, аналогичны скоростям движения.

Пример 3. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрей, а второй – вдвое медленней, то они выполнили бы всю работу за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу каждый рабочий, работая один?

Решение. В задачах на работу в качестве неизвестных иногда удобней принимать время, которое необходимо для выполнения всей работы, а иногда – производительность труда. В данной задаче удобнее второй вариант.

Пусть производительность труда первого рабочего равна x, а второго – y. Объём всей работы обозначим через a. Тогда из первого предложения условия имеем уравнение: $5(x + y) = a$.

Условные производительности труда рабочих, о которых идёт речь во втором предложении, соответственно равны $2x$ и $0,5y$. Имеем второе уравнение: $4(2x + 0,5y) = a$. Итак, получили систему уравнений

$\begin{cases} 5(x+y)=a, \\ 4(2x+0,5y)=a \end{cases}$ или $\begin{cases} 5x+5y=a, \\ 8x+2y=a. \end{cases}$ Вычитая почленно из второго уравнения первое, будем иметь: $3x - 3y = 0$, откуда $x = y$. Тогда из первого уравнения получим что производительность труда каждого из рабочих равна $0,1a$. Следовательно, работая самостоятельно, каждый рабочий может выполнить работу за $a{:}0,1a = 10$ дней.

Ответ. За 10 дней.

Вопросы для самоконтроля

1. Два тела движутся навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2. Первоначальное расстояние между ними S. Они встретятся через время, равное ...

А. $\dfrac{S}{V_1 - V_2}$. **Б.** $\dfrac{S}{V_1} + \dfrac{S}{V_2}$. **В.** $\dfrac{S}{V_1} - \dfrac{S}{V_2}$. **Г.** $\dfrac{S}{V_1 + V_2}$.

2. Два тела, первоначальное расстояние между которыми равно S, движутся в одном направлении со скоростями V_1 и V_2 ($V_1 > V_2$). Первое тело догонит второе через время, равное ...

А. $\dfrac{S}{V_1 - V_2}$. **Б.** $\dfrac{S}{V_1 + V_2}$. **В.** $\dfrac{S}{V_1} - \dfrac{S}{V_2}$. **Г.** $\dfrac{S}{V_1} + \dfrac{S}{V_2}$.

3. Велосипедист каждую минуту проезжает 500 м. Сколько км он проезжает в час?

А. 30. **Б.** 50. **В.** ≈ 83. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

4. Человек шел со скоростью 4 км/час, а потом еще столько же времени – со скоростью 8 км/час. Средняя скорость его за это время была ...

А. 6 км/час. **Б.** $\dfrac{16}{3}$ км/час. **В.** 6,4 км/час. **Г.** 5,6 км/час.

5. Человек прошел половину пути со скоростью 4 км/час и другую половину со скоростью 8 км/час. Средняя его скорость на всем пути была равна ...

А. 6 км/час. **Б.** $\dfrac{16}{3}$ км/час. **В.** 6,4 км/час. **Г.** 5,6 км/час.

6. Лодка движется по течению реки со скоростью V, а против течения – со скоростью W. Собственная скорость лодки равна ...

А. $\dfrac{1}{2}(V + W)$. **Б.** $\dfrac{1}{2}(V - W)$. **В.** $V - W$. **Г.** $V + W$.

7. Катер движется по течению реки со скоростью V, а против течения – со скоростью W. Скорость течения равна…

А. $V + W$. **Б.** $\dfrac{1}{2}(V - W)$. **В.** $\dfrac{1}{2}(V + W)$. **Г.** $V - W$.

8. Две трубы, действуя вместе, наполняют бассейн за 3 часа, первая труба делает это за 4 часа. Вторая труба наполняет бассейн за ...

А. 7 часов **Б.** 6 часов **В.** 9 часов **Г.** 12 часов

9. Один рабочий выполняет некоторую работу за 2 суток, второй рабочий ту же работу – за 3 суток, третий за 6 суток. Трое рабочих, работая вместе, выполняют эту работу за ...

А. 1 сутки **Б.** 2 суток **В.** 1,5 суток **Г.** 5 суток

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Г. **2. А**. **3. А**. **4.** ***А***. **5. Б**. **6. А**. **7. Б**. **8. Г. 9. А.**

3. Моделирование процессов, связанных со “смесями”, “растворами”, “сплавами”

Повторяем теорию

В задачах на «смеси», «растворы», сплавы» принимаются следующие допущения (если не оговорено иное):

1) все получающиеся сплавы или смеси однородны;

2) при слиянии двух растворов (переплавке двух сплавов), имеющих объемы V_1, V_2 (или массы m_1, m_2) получается смесь, объем которой равен $V_0 = V_1 + V_2$ (или масса $m_0 = m_1 + m_2$).

Отношение $C_1 = \frac{V_1}{V_0}$ называется ***объемной концентрацией*** первого раствора в смеси. Оно показывает, какую долю полного объема смеси составляет объем первого раствора. Концентрация, выраженная в процентах, т.е. величина $P_1 = C_1 100\%$ называется ***объемным процентным содержанием*** первого раствора.

Отношение $C = \frac{m_1}{m_0}$ называется ***весовой концентрацией*** первого металла в сплаве. Величина $P = C \cdot 100\%$ называется ***весовым процентным содержанием*** первого металла в сплаве.

Решаем

Пример 1. Пять литров раствора с 35% содержанием растворенного в воде вещества смешали с четырьмя литрами 20% раствора того же вещества и еще прибавили один литр чистой воды. Найдите процентное содержание вещества в полученном растворе.

Решение. Объём вещества в первом растворе равен $\frac{5\cdot 35}{100}=1{,}75$ (л), а его объём во втором растворе равен $\frac{4\cdot 20}{100}=0{,}8$ (л). Объём этого вещества в полученном после смешивания растворе равен 1,75 + 0,8 = 2,55 (л).

Объём полученного раствора равен сумме объёмов двух смешиваемых растворов, сложенной с 1 л чистой воды, то есть он равен 5 + 4 + 1 = 10 (л).

Процентное содержание вещества в полученном растворе равно $\frac{2{,}55\cdot 100}{10}=25{,}5\%$.

Ответ. 25,5 %.

Пример 2. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля в 30%?

Решение. Обозначим через x т массу стали первого сорта, которую нужно взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля в 30%. Тогда стали второго сорта нужно для этой цели взять $(140 - x)$ т.

Сталь первого сорта массой x т содержит $0{,}05x$ т никеля, а сталь второго сорта массой $(140 - x)$ т содержит $0{,}4(140 - x)$ т никеля. 140 т стали с содержанием никеля в 30% содержит 140·0,3 = 42 т никеля.

По условию имеем уравнение: $0{,}05x + 0{,}4(140-x) = 42$ или $0{,}35x = 14$. Отсюда $x=40$.

Следовательно, стали первого сорта нужно взять 40 т, а второго – $140 - 40 = 100$ т.

Ответ. 40 т и 100 т.

Вопросы для самоконтроля

1. К двум литрам 30-% водного раствора кислоты добавили литр чистой воды. Какова концентрация кислоты в полученном растворе?

2. Пять литров раствора с 35% содержанием растворенного в воде вещества смешали с четырьмя литрами 20 % раствора того же вещества. Найдите процентное содержание вещества в полученном растворе.

3. Пять литров раствора с 35% содержанием растворенного в воде вещества смешали с четырьмя литрами 20 % раствора того же вещества и еще прибавили один литр чистой воды. Найдите процентное содержание вещества в полученном растворе.

4. В каких пределах может находиться процентное содержание вещества в растворе, полученном от смешения 40-% и 20-% растворов того же вещества?

5. Из молока жирностью 5 % готовят сыр жирностью 15,5 % и при этом получается сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько сыра выйдет из 1 т молока?

6. Из сосуда объёмом V л, наполненного кислотой, отлили 1 л кислоты и добавили 1 л воды. Какой объём кислоты содержится в 1 л полученного раствора?

7. Из сосуда объёмом V л, наполненного кислотой, отлили 1 л кислоты и добавили 1 л воды. Затем отлили 1 л полученной смеси и добавили 1 л воды. Какой объём кислоты содержится в 1 л полученного раствора?

8. Имеется два сплава меди с цинком. Первый сплав содержит 70% меди, а второй – 10% меди. Сплавы переплавили. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание цинка может быть получено в этом новом сплаве?

Ответы к вопросам для самоконтроля

1. 20%. **2.** $28\frac{1}{3}\%$. **3.** 25,5%. **4.** Между 20% и 40%. **5.** 300 кг. **6.** $\frac{V-1}{V}$ л.

7. $\frac{(V-1)^2}{V^2}$ л. **8.** 30% и 90%.

4. Составление неравенств

Повторяем теорию

Свойства числовых неравенств:

1. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. **2.** Если $a < b$, то $a + d < b + d$ для любого d.

3. Если $a < b$, $c < d$, то $a + c < b + d$. **4.** Если $a < b$, и $\lambda > 0$, то $\lambda a < \lambda b$.

5. Если $a < b$, и $\lambda < 0$, то $\lambda a > \lambda b$.

6. Если a, b, c, d – положительные числа, $a < b$, $c < d$, то $ac < bd$.

7. Если $a < b$ и $ab > 0$ (т.е. числа a и b имеют один и тот же знак), то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

8. Если $|a| \le b$, то $-b \le a \le b$. **9.** Если $-b \le a \le b$, то $|a| \le b$.

10. Если $|a| \ge b$, то $\left[\begin{array}{l} a \le -b, \\ a \ge b. \end{array}\right.$ **11.** Если $\left[\begin{array}{l} a \le -b, \\ a \ge b, \end{array}\right.$ то $|a| \ge b$.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства называется множество всех значений неизвестного, при которых имеют смысл выражения, входящие в неравенство.

Решением неравенства с одним неизвестным называется такое число, которое будучи подставлено в неравенство, обращает его в верное числовое неравенство.

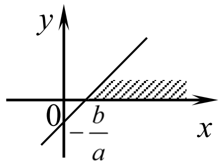
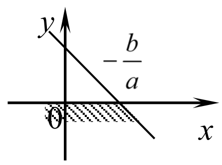
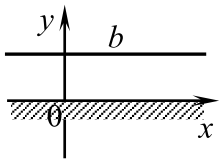
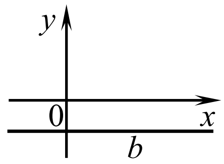
Решить неравенство – значит найти множество всех его решений или доказать, что их нет.

Неравенства называются равносильными, если совпадают множества их решений. Обозначается это так: $f(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$.

Неравенства называются равносильными на некотором множестве *M*, если на этом множестве они имеют одни и те же решения или не имеют решений.

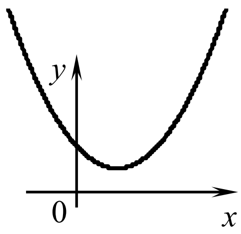
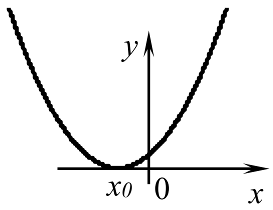
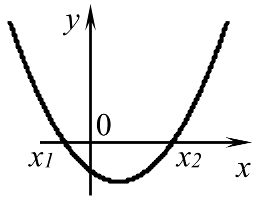
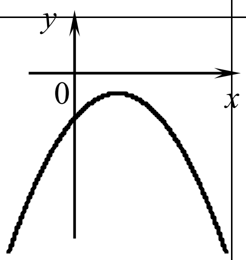
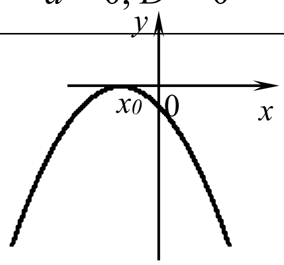
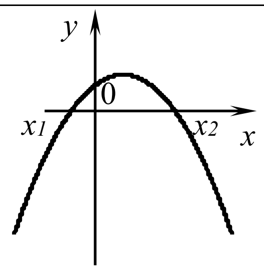
Обозначается это так: $f(x) > 0 \overset{M}{\Leftrightarrow} g(x) > 0$.

Решение линейных неравенств

	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0,\ b \ge 0$	$a = 0,\ b < 0$
$y = ax + b$				

$ax + b \geq 0$	$x \geq -\dfrac{b}{a}$	$x \leq -\dfrac{b}{a}$	$x \in \boldsymbol{R}$	$\varnothing$
$ax + b < 0$	$x < -\dfrac{b}{a}$	$x > -\dfrac{b}{a}$	$\varnothing$	$x \in \boldsymbol{R}$

Решение квадратных неравенств

	$a > 0,\ D < 0$	$a > 0,\ D = 0$	$a > 0,\ D > 0$
$y = ax^2 + bx + c$			
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x \in (x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$\varnothing$	$x = x_0$	$x \in [x_1; x_2]$
	$a < 0,\ D < 0$	$a < 0,\ D = 0$	$a < 0,\ D > 0$
$y = ax^2 + bx + c$			
$ax^2 + bx + c > 0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x \in (x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$\varnothing$	$x = x_0$	$x \in [x_1; x_2]$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

Решаем

Пример 1. Расстояние между станциями *A* и *B* равно 360 км. В одно и тоже время из *A* и из *B* навстречу друг другу выезжают два поезда. Поезд, вышедший из *A*, прибывает на станцию *B* не ранее чем через 5 часов. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше, чем через два часа после своего выхода из *A*. Скорость какого поезда больше?

Решение. Пусть скорость поезда, выехавшего из *A*, равна $x\,\frac{км}{ч}$, а скорость поезда, выехавшего из $B - y\,\frac{км}{ч}$. Так как первый поезд расстояние в 360 км проезжает не менее чем за 5 часов, то его скорость $x \le \frac{360}{5} = 72$.

Если скорость первого поезда увеличить в 1,5 раза, то она станет равной $1{,}5x$ км/ч. Оба поезда, двигаясь со скоростями, равными соответственно $1{,}5x$ и y км/ч, встретятся раньше, чем через два часа после своего выхода, т.е. сумма расстояний, пройденных ими за 2 часа превысит 360 км. Имеем неравенство: $3x + 2y > 360$. Получим систему неравенств: $\begin{cases} 3x + 2y > 360, \\ x \le 72, \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x + 2y > 360, \\ -3x \ge -216. \end{cases}$

Складывая два последних неравенства (с одинаковыми знаками неравенств), получим: $2y > 144$, $y > 72$.

Ответ. Скорость поезда, вышедшего из *B*, больше.

Пример 2. Расстояние между городами А и В равно 100 км. Из города А в город В одновременно отправляются два автомобиля. Первый делает на 10 км в час больше второго, но на пути делает остановку на 50 мин. В каких пределах может меняться скорость первого автомобиля при условии, что он прибудет в город В не позже второго автомобиля?

Решение. Пусть скорость первого автомобиля равна v км/ч, тогда скорость второго – $(v - 10)$ км/ч. Расстояние между А и В первый автомобиль преодолевает за $\left(\frac{100}{v} + \frac{5}{6}\right)$ ч (с учётом остановки), а второй – за $\frac{100}{v-10}$ ч. По условию имеем неравенство: $\frac{100}{v}+\frac{5}{6}\le\frac{100}{v-10}$ или $\frac{600(v-10)+5v(v-10)-600v}{v(v-10)}\le 0$, или

$\frac{v^2-10v-1200}{v(v-10)}\le 0$. Так как знаменатель принимает только положительные значения при v>10, то последнее неравенство равносильно системе $\begin{cases} v^2-10v-1200\le 0, \\ v>10. \end{cases}$

Её решением является промежуток $(10;40]$. Следовательно, скорость первого автомобиля находится в следующих пределах: $10 < v \le 40$.

Ответ. $10 < v \le 40$.

Пример 3. Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно в пункты, откуда они начали движение. В какой реке на это передвижение потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

Решение. Введём обозначения: x км/ч – собственная скорость катеров, y км/ч – скорость течения «быстрой» реки, z км/ч – скорость течения «медленной» реки, S – расстояние, пройденное каждым катером в одном направлении, t_1 ч – время движения, затраченного катером на весь путь по реке с быстрым течением, t_2 ч – время движения, затраченного катером на весь путь по реке с медленным течением. По условию, имеем следующие равенства:

$$t_1=\frac{S}{x+y}+\frac{S}{x-y}=\frac{2Sx}{x^2-y^2},\quad t_2=\frac{S}{x+z}+\frac{S}{x-z}=\frac{2Sx}{x^2-z^2}.$$

Так как $y> z$, то $x^2-y^2 < x^2-z^2$, следовательно, $\frac{2Sx}{x^2-y^2}>\frac{2Sx}{x^2-z^2}$, то есть $t_1> t_2$.

Ответ. В реке с быстрым течением.

Вопросы для самоконтроля

1. Если скорость одного поезда v на 19 км/ч больше скорости другого w, то какое соотношение справедливо для скорости первого поезда?

2. Пусть скорость путешественника составляет v км/день. Если бы он проезжал в день на 20 км больше, то он проехал бы за 8 дней расстояние, большее 1000 км. Какое неравенство описывает эту информацию?

3. Со скоростью v один турист прошёл половину пути, а второй с той же скоростью – больше половины пути. Кто из них затратил больше времени?

4. При каком значении x функция $y = \frac{x}{6} + \frac{6}{x}$ достигает минимума?

5. Как изменится правильная дробь, если к числителю и знаменателю прибавить одно и то же положительное число?

6. Что больше: сумма квадратов двух различных действительных чисел или их удвоенное произведение?

7. Какой знак имеет неполный квадрат разности двух действительных чисел?

8. Какое неравенство связывает среднее арифметическое двух неотрицательных чисел и среднее геометрическое этих чисел?

9. При каком условии произведение нескольких положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, принимает наибольшее значение?

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. $v - w = 19$. **2.** $8(v + 20) > 1000$. **3.** Второй. **4.** $x = 6$. **5.** Увеличится. **6.** Сумма квадратов. **7.** Плюс. **8.** $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. **9.** При равенстве этих сомножителей.

Тренажёр

1. Составление уравнений и систем уравнений

Вариант 1

1. Объем газа V (в см^3) в зависимости от температуры t (°C) меняется по закону $V = 100 + 0{,}35t$ (закон Гей-Люссака). При какой из указанных температур объём превысит 120 см^3?

А. 55°C. **Б.** 56°C. **В.** 57°C. **Г.** 58°C.

2. Напряжение в электрической цепи равномерно растет, то есть линейно зависит от времени. В начале опыта напряжение равнялось 10 В, а в конце опыта, длившегося 5 с, напряжение удвоилось. Через сколько с после начала опыта первоначальное напряжение увеличится в 1,5 раза?

А. Через 2 с. **Б.** Через 2,5 с. **В.** Через 3 с. **Г.** Через 3,5 с.

3. При свободном падении тела с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с зависимость пройденного пути от времени выражается формулой $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, где s – путь, м; t – время, с; $g \approx 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. За какое время тело пройдет 15 м? Выберите наиболее точный результат.

А. ≈ за 1 с. **Б.** ≈ за 2 с. **В.** ≈ за 2,5 с. **Г.** ≈ за 3 с.

4. Из формулы $h = \frac{v^2}{2g}$, выражающей зависимость высоты подъёма h от скорости v и ускорения силы тяжести g, выразите v через остальные переменные.

А. $v = \sqrt{\frac{2g}{h}}$. **Б.** $v = \sqrt{\frac{h}{2g}}$. **В.** $v = 2gh$. **Г.** $v = \sqrt{2gh}$.

Вариант 2

1. По закону Бойля–Мариотта, давление p и объем газа V связаны формулой $p = \frac{c}{V}$, где c – постоянная величина для данной массы и температуры газа. Известно, что при давлении $p = 10$ Па объем газа равняется 0,5 л. При каком давлении объём газа будет больше 1 л?

А. $p = 5$ Па. **Б.** $p < 5$ Па. **В.** $p > 5$ Па. **Г.** $p = 6$ Па.

2. Скорость тела линейно зависит от времени. В начале движения скорость равнялась 5 м/с, а через 12 с она равнялась 23 м/с. Через сколько с после начала движения скорость равнялась 11 м/с?

А. Через 3 с. **Б.** Через 3,5 с. **В.** Через 4 с. **Г.** Через 4,5 с.

3. Камень, брошенный с поверхности Земли вверх, движется по закону $h = -\frac{gt^2}{2} + 20t$, где h – высота, м; t – время, с; $g \approx 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. На каком временном промежутке (в с) камень будет находиться на высоте более 15 м от Земли?

А. (1; 3). **Б.** (0; 1). **В.** (3; 4). **Г.** (1; 4).

4. Из формулы объёма цилиндра $V = \pi R^2 H$ найдите зависимость радиуса основания R от объёма V.

А. $R = \sqrt{\frac{\pi H}{hV}}$. **Б.** $R = \sqrt{\frac{V}{\pi H}}$. **В.** $R = \sqrt{\pi VH}$. **Г.** $R = \left(\frac{V}{\pi H}\right)^2$.

Вариант 3

1. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v = 4 - 2t$, где v – скорость в момент t, см/с, t – время, с. В какой из указанных моментов времени скорость будет меньше 1см/с?

А. 1 с. **Б.** 1,25 с. **В.** 1,5 с. **Г.** 2 с.

2. Закон движения проекции некоторой движущейся точки на ось абсцисс имеет вид $x = a + bt$, где x – абсцисса точки, t – время, с, a и b – некоторые числа. В начальный момент времени $t = 0$ точка имела абсциссу 1, а через 5 с её абсцисса равнялась 21. Какой была абсцисса точки через 10 с после начала движения?

А. 40. **Б.** 41. **В.** 42. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

3. Путь, который проезжает автомобиль после резкого торможения, описывается формулой $s = 20t - 2{,}5t^2$, где s – пройденный путь, м, t – время, с, $0 \le t \le 8$. За какое время он проедет 40 м?

А. За 2 с. **Б.** За 3 с. **В.** За 4 с. **Г.** За 5 с.

4. Из формулы $E = mc^2$, выражающей зависимость внутренней энергии E от массы покоя тела m и скорости света c, выразите c через остальные переменные.

А. $c = \sqrt{\frac{m}{E}}$. **Б.** $c = \sqrt{\frac{E}{m}}$. **В.** $c = Em$. **Г.** $c = \sqrt{mE}$.

Подсказки

1. Составьте по условию неравенство и решите его.

2. Обратите внимание на то, что искомая величина линейно зависит от времени t, то есть описывается линейной функцией $y = a + bt$, где a и b – некоторые числа.

3. Составьте уравнение по условию задачи и решите его.

4. Фактически речь идёт о решении неполного квадратного уравнения относительно v.

2. Моделирование процессов, связанных с движением, выполнением работы

Вариант 1

5. Турист прошел 3 км по шоссе и 6 км по проселочной дороге. По шоссе он шел со скоростью x км/час, а по проселочной дороге – на 2 км/час меньшей. За какое время турист прошел весь путь?

А. За $\left(\frac{3}{x-2} + \frac{6}{x}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{x-2}{6} + \frac{x}{3}\right)$ ч. **В.** За $\left(\frac{x-2}{3} + \frac{x}{6}\right)$ ч. **Г.** За $\left(\frac{6}{x-2} + \frac{3}{x}\right)$ ч.

6. Расстояние между двумя автомобилями, движущимися по прямолинейной дороге, равно 10 км. Их скорости – 90 км/ч. и 60 км/ч. Чему равно расстояние между ними через 2 мин.?

А. 5 км. **Б.** 5 или 15 км. **В.** 5, 9 или 15 км. **Г.** Другой ответ.

7. Два тела, находящиеся на расстоянии S, друг от друга, движутся навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2. Они встретятся через время, равное ...

А. $\frac{S}{V_1 - V_2}$. **Б.** $\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}$. **В.** $\frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2}$. **Г.** $\frac{S}{V_1 + V_2}$.

8. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми S км, и через час встречаются. Скорость их сближения равна...

А. $\frac{S}{2}\frac{км}{час}$. **Б.** $2S\frac{км}{час}$. **В.** $S\frac{км}{час}$. **Г.** $\frac{1}{S}\frac{км}{час}$.

9. Два тела, первоначальное расстояние между которыми равно S, движутся в одном направлении со скоростями V_1 и V_2 ($V_1 > V_2$). Первое тело догонит второе через время, равное...

А. $\frac{S}{V_1 - V_2}$. **Б.** $\frac{S}{V_1 + V_2}$. **В.** $\frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2}$. **Г.** $\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}$.

10. Лодка движется по течению реки со скоростью V, а против течения – со скоростью W. Собственная скорость лодки равна ...

А. $\frac{1}{2}(V + W)$. **Б.** $\frac{1}{2}(V - W)$. **В.** $V - W$. **Г.** $V + W$.

11. Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км – против течения реки. За какое время он прошел весь путь, если собственная скорость катера 20 км/ч, а скорость течения – x км/ч?

А. За $\left(\frac{18}{20+x} + \frac{20}{20-x}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{20+x}{18} + \frac{20-x}{20}\right)$ ч.

В. За $\left(\frac{18}{20-x} + \frac{20}{20+x}\right)$ ч. **Г.** За $\left(18(20+x) + 20(20-x)\right)$ ч.

12. Человек шел со скоростью 4 км/час, а потом еще столько же времени – со скоростью 8 км/час. Средняя скорость его за это время была ...

А. 6 км/час. **Б.** $\frac{16}{3}$ км/час. **В.** 6,4 км/час. **Г.** 5,6 км/час.

13. Человек прошел половину пути со скоростью 4 км/час и другую половину со скоростью 8 км/час. Средняя его скорость на всем пути была равна ...

А. 6 км/час. **Б.** $\frac{16}{3}$ км/час. **В.** 6,4 км/час. **Г.** 5,6 км/час.

14. Поезд за четверть минуты проходит мимо указателя километров, стоящего перед мостом через реку, а за 50 с проходит сам мост длиной 350 м. Найдите длину поезда.

А. 105 м. **Б.** 150 м. **В.** 200 м. **Г.** Другой ответ.

15. Поезд проехал мост длиной в 450 м за 45 с, а мимо будки стрелочника за 15 с. Скорость поезда равна …

А. 63 км/ч. **Б.** 56 км/ч. **В.** 54 км/ч. **Г.** 45 км/ч.

16. Чтобы выполнить вовремя заказ, бригада токарей должна была обтачивать в день по 40 изделий. Однако она обтачивала ежедневно на 3 изделия больше, и на последний день ей осталось обточить 16 изделий. Сколько изделий составлял заказ?

А. 320. **Б.** 360. **В.** 400. **Г.** 440.

17. Рабочему и ученику нужно было изготовить 69 деталей. После того, как ученик проработал 3 ч, к выполнению задания подключился рабочий, и они вместе закончили работу через 2 ч. На сколько деталей в час производительность рабочего выше производительности ученика, если рабочий за 3 ч делает столько же, сколько ученик за 4 ч?

А. На 12 деталей в час. **Б.** На 9 деталей в час.

В. На 6 деталей в час. **Г.** На 3 детали в час.

18. Одна бригада должна была сшить 160 костюмов, а вторая за тот же срок – на 25% меньше. Первая бригада шила в день на 10 костюмов больше костюмов, чем вторая, и выполнила задание за 2 дня до намеченного срока. Второй бригаде для выполнения задания понадобилось дополнительно к сроку 2 дня. Сколько дней составлял срок для выполнения задания?

А. 6. **Б.** 8. **В.** 10. **Г.** 12.

19. Две трубы, действуя вместе, наполняют бассейн за 3 часа, первая труба делает это за 4 часа. Вторая труба наполняет бассейн за ...

А. 7 часов. **Б.** 6 часов. **В.** 9 часов. **Г.** 12 часов.

Вариант 2

5. Автобус проехал 150 км по шоссе и 60 км по проселочной дороге. По шоссе он ехал со скоростью x км/час, а по проселочной дороге – на 20 км/час меньшей. За какое время автобус проехал весь путь?

А. За $\left(\frac{150}{x-20}+\frac{60}{x}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{x-20}{60}+\frac{x}{150}\right)$ ч.

В. За $\left(\frac{x-20}{150}+\frac{x}{60}\right)$ ч. **Г.** За $\left(\frac{60}{x-20}+\frac{150}{x}\right)$ ч.

6. Расстояние между двумя автомобилями, движущимися по прямолинейной дороге в одном направлении, равно 10 км. Их скорости – 75 км/ч. и 60 км/ч. Чему равно расстояние между ними через 4 мин.?

А. 1 км. **Б.** 1 или 19 км. **В.** 9 км. **Г.** 9 или 11 км.

7. Два тела, движутся из двух пунктов A и B навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2. Они встретились через t ч. Расстояние между A и B равно ...

А. $(V_1-V_2)t$. **Б.** $(V_1+V_2)t$. **В.** $\frac{V_1+V_2}{t}$. **Г.** $\frac{V_1-V_2}{t}$.

8. Два велосипедиста выезжают одновременно в одном направлении из пунктов A и B, расстояние между которыми S км. Через 2 часа один из них догнал второго. Скорость их сближения равна ...

А. $\frac{S}{2}\frac{км}{час}$. **Б.** $2S\frac{км}{час}$. **В.** $S\frac{км}{час}$ **Г.** $\frac{1}{S}\frac{км}{час}$.

9. Два тела, находящиеся в пунктах A и B, движутся в одном направлении со скоростями V_1 и V_2 ($V_1 > V_2$). Первое тело догонит второе через t ч. Расстояние между A и B равно ...

А. $(V_1-V_2)t$. **Б.** $(V_1+V_2)t$. **В.** $\frac{V_1+V_2}{t}$. **Г.** $\frac{V_1-V_2}{t}$.

10. Лодка движется по течению реки со скоростью V, а против течения – со скоростью W. Скорость течения равна ...

А. $\frac{1}{2}(V+W)$. **Б.** $\frac{1}{2}(V-W)$. **В.** $V-W$. **Г.** $V+W$.

11. Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км – против течения реки. За какое время он прошел весь путь, если собственная скорость катера x км/ч, а скорость течения – 3 км/ч?

А. За $\left(\frac{18}{x+3}+\frac{20}{x-3}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{x+3}{18}+\frac{x-3}{20}\right)$ ч.

В. За $\left(\frac{18}{x-3}+\frac{20}{x+3}\right)$ ч. **Г.** За $\left(18(x+3)+20(x-3)\right)$ ч.

12. Мотоциклист ехал со скоростью 60 км/час, а потом еще столько же времени – со скоростью 50 км/час. Средняя скорость его за это время была ...

А. 56 км/час. **Б.** $54\frac{6}{11}$ км/час. **В.** 55 км/час. **Г.** 54 км/час.

13. Мотоциклист проехал из A в B со средней скоростью 30 км/ч., а затем вернулся назад. С какой средней скоростью он возвращался, если средняя скорость на всем пути составляла 35 км/ч.?

А. 40 км/ч. **Б.** 42 км/ч. **В.** 45 км/ч. **Г.** 50 км/ч.

14. Поезд за четверть минуты проходит мимо указателя километров, стоящего перед мостом через реку, а за 50 с проходит сам мост длиной 350 м. Найдите скорость поезда.

А. 30 км/ч. **Б.** 36 км/ч. **В.** 40 км/ч. **Г.** 45 км/ч.

15. Поезд проехал мост длиной в 450 м за 45 с, а мимо будки стрелочника за 15 с. Длина поезда равна …

А. 450 м. **Б.** 375 м. **В.** 275 м. **Г.** 225 м.

16. Сергей набирал на компьютере рукопись книги. Ему надо было набирать по 20 страниц в день, чтобы успеть выполнить работу в срок. Он же набирал ежедневно на 2 страницы больше, поэтому в последний день ему осталось набрать 6 страниц. Сколько страниц было в рукописи?

А. 140. **Б.** 150. **В.** 160. **Г.** 170.

17. Двум рабочим нужно было изготовить 172 детали. После того, как первый проработал 4 дня, к выполнению задания подключился второй, и они вместе закончили работу через 3 дня. На сколько деталей в день производительность второго рабочего выше производительности первого, если второй за 4 дня делает столько же, сколько первый за 5 дней?

А. На 6 деталей в день. **Б.** На 5 деталей в день.

В. На 4 детали в день. **Г.** На 3 детали в день.

18. Фирма получила заказ сшить к определённому сроку 60 костюмов. Подсчитав, каким должен быть объём работы, мастер решил шить ежедневно на 1 костюм больше. В этом случае вся работа будет закончена на 3 дня раньше срока. За сколько дней требовалось выполнить заказ?

А. За 15 дней. **Б.** За 12 дней. **В.** За 9 дней **Г.** За 6 дней.

19. Первая бригада выполняет всю работу за два часа, а вторая – за четыре часа. За сколько времени выполнят всю работу обе бригады, работая вместе?

А. За 6 часов **Б.** За $\frac{3}{4}$ часа **В.** За $\frac{4}{3}$ часа **Г.** За 1,5 часа

Вариант 3

5. Мотоциклист проехал 60 км по шоссе и 20 км по пересечённой местности. По шоссе он ехал со скоростью x км/час, а по пересечённой местности – на 10 км/час меньшей. За какое время мотоциклист проехал весь путь?

А. За $\left(\frac{60}{x-10}+\frac{20}{x}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{x-10}{20}+\frac{x}{60}\right)$ ч.

В. За $\left(\frac{x-10}{60}+\frac{x}{20}\right)$ ч. **Г.** За $\left(\frac{20}{x-10}+\frac{60}{x}\right)$ ч.

6. Расстояние между двумя автомобилями, движущимися навстречу друг другу по прямолинейной дороге, равно 10 км, а через 2 мин. оно стало равным 6 км. Какова скорость сближения автомобилей?

А. 90 км/ч. **Б.** 100 км/ч. **В.** 110 км/ч. **Г.** 120 км/ч.

7. Два тела, движутся навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2. Они встретились через время t. На каком расстоянии друг от друга находились тела в начале движения?

А. $(V_1 - V_2)t$. **Б.** $(V_1 + V_2)t$. **В.** $\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)t$. **Г.** $\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)t$.

8. Два велосипедиста выезжают одновременно в одном направлении из пунктов A и B, расстояние между которыми S км, и через 5 часов расстояние между ними составило $3S$ км. Они движутся с постоянными скоростями. Скорость их удаления равна ...

А. $\frac{3S}{5}\frac{км}{час}$. **Б.** $\frac{2S}{5}\frac{км}{час}$. **В.** $\frac{S}{5}\frac{км}{час}$ **Г.** $\frac{5}{2S}\frac{км}{час}$.

9. Два тела движутся в одном направлении со скоростями V_1 и V_2 ($V_1 > V_2$). Первое тело догнало второе через время t. На каком расстоянии друг от друга находились тела в начале движения?

А. $(V_1 - V_2)t$. **Б.** $(V_1 + V_2)t$. **В.** $\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)t$. **Г.** $\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)t$.

10. Лодка движется по течению реки со скоростью V, а по озеру – со скоростью W. Скорость лодки против течения равна ...

А. $2V - W$. **Б.** $2V + W$. **В.** $2W - V$. **Г.** $V + 2W$.

11. Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км – по озеру. За какое время он прошел весь путь, если собственная скорость катера х км/ч, а скорость течения – 2 км/ч?

А. За $\left(\frac{18}{2+x} + \frac{20}{x}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{2+x}{18} + \frac{x}{20}\right)$ ч.

В. За $\left(\frac{18}{x} + \frac{20}{x-2}\right)$ ч. **Г.** За $\left(18(2+x) + 20x\right)$ ч.

12. Человек шел со скоростью 4 км/час, а потом еще вдвое меньше времени – со скоростью 8 км/час. Средняя скорость его за это время была ...

А. 6 км/час. **Б.** $5\frac{1}{3}$ км/час. **В.** $5\frac{2}{3}$ км/час. **Г.** 5,5 км/час.

13. Человек прошел четверть пути со скоростью 4 км/час и остальной путь со скоростью 8 км/час. Средняя его скорость на всем пути была равна ...

А. 6 км/час. **Б.** $\frac{16}{3}$ км/час. **В.** 6,4 км/час. **Г.** $\frac{17}{3}$ км/час.

14. Поезд, движущийся со скоростью 45 км/ч, за треть минуты проходит мимо неподвижного наблюдателя. Найдите длину поезда.

А. 125 м. **Б.** 150 м. **В.** 200 м. **Г.** 250 м.

15. Поезд, движущийся со скоростью 45 км/ч, проехал мост длиной в 400 м за 50 с. Найдите длину поезда.

А. 225 м. **Б.** 200 м. **В.** 175 м. **Г.** 150 м.

16. Бригада формовщиков должна была изготовить некоторое количество пресс-форм в определённый срок. Надо было набирать по 12 пресс-форм в месяц, чтобы успеть выполнить работу в срок. Предложенная бригадой новая технология формовки позволила изготовлять на 4 пресс-формы больше в месяц, поэтому всё задание они выполнили за месяц до срока. Сколько пресс-форм составлял заказ?

А. 60. **Б.** 48. **В.** 36. **Г.** 24.

17. Двум классам было поручено изготовить к Новому году 222 ёлочные игрушки. После того, как один класс проработал 5 дней, к выполнению задания подключился второй, класс и они вместе закончили работу через 4 дня. На сколько игрушек в день производительность первого класса выше производительности второго, если первый класс за 5 дней делает столько же игрушек, сколько второй за 6 дней?

А. На 6 игрушек в день. **Б.** На 5 игрушек в день.

В. На 4 игрушки в день. **Г.** На 3 игрушки в день.

18. Работники элеватора получила заказ очистить к определённому сроку 175 т пшеницы. Взвесив свои возможности, коллектив решил ежедневно очищать на 10 т пшеницы больше. В этом случае вся работа будет закончена на 2 дня раньше срока. За сколько дней требовалось выполнить заказ?

А. За 7 дней. **Б.** За 6 дней. **В.** За 5 дней. **Г.** За 4 дня.

19. Две трубы, действуя вместе, наполняют треть бассейна за 2 часа, первая труба делает это за 4 часа. Вторая труба наполняет бассейн за ...

А. 6 часов. **Б.** 8 часов. **В.** 9 часов. **Г.** 12 часов.

Подсказки

5. Найдите время на каждом из участков движения туриста или транспорта.

6. Если в условии не сказано, как движутся автомобили: в противоположных направлениях навстречу друг другу, или удаляясь друг от друга; либо в одном направлении, причём один догоняет другого, или так, что расстояние между ними увеличивается, то нужно рассмотреть все четыре случая.

7. Воспользуйтесь правилом нахождения скорости сближения тел.

8. Воспользуйтесь формулой пути равномерного движения: $s = vt$, где s – расстояние, v – скорость, t – время.

9. Воспользуйтесь формулой пути равномерного движения: $s = vt$, где s – расстояние, v – скорость, t – время.

10. Воспользуйтесь связью скоростей движения лодки по течению и против течения с собственной скоростью лодки и скоростью течения.

11. Воспользуйтесь связью скоростей движения лодки по течению и против течения с собственной скоростью лодки и скоростью течения. Искомое время находите на каждом из участков движения.

12. Воспользуйтесь тем, что средняя скорость движения равна отношению всего пройденного пути ко всему затраченному времени.

13. См. подсказку к предыдущему заданию.

14. Обратите внимание на то, что, когда поезд проезжает мимо объекта, размерами которого можно пренебречь, расстояние, пройденное поездом, равно его длине, а когда он проезжает мост, – сумме длин поезда и моста.

15. Обратите внимание на то, что, когда поезд проезжает мимо объекта, размерами которого можно пренебречь, расстояние, пройденное поездом, равно его длине, а когда он проезжает мост, – сумме длин поезда и моста.

16. Введите обозначение для искомой работы и выразите через него время, необходимое для её выполнения.

17. Введите обозначение для производительности одного из объектов, выполняющих работу, выразите через него производительность второго и объём работы.

18. Введите обозначение для времени, необходимого для выполнения работы, и выразите через него производительности труда.

19. Через данные значения времени выразите соответствующие производительности труда. Воспользуйтесь тем, что производительность труда равна отношению объёма работы к затраченному времени.

3. Моделирование процессов, связанных со “смесями”, “растворами”, “сплавами”

Вариант 1

20. Имеется сплав меди с цинком массой x кг с процентным содержанием меди $p\%$. Масса цинка в этом сплаве равна...

А. $\frac{xp}{100}$ кг. **Б.** $x\left(1-\frac{p}{100}\right)$ кг. **В.** $x(100-p)$ кг. **Г.** xp кг.

21. Имеется сплав меди и цинка массой x кг. Масса меди в нем равна a кг. Процентное содержание цинка в сплаве равно ...

А. $\frac{x-a}{x}$ 100%. **Б.** $\frac{a}{x}$ 100%. **В.** $\frac{a}{x-a}$ 100%. **Г.** $\frac{x-a}{a}$ 100%.

22. Имеется два сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 30% и 50%. После переплавки можно получить сплав с процентным содержанием меди...

А. 29%. **Б.** 49%. **В.** 51%. **Г.** 60%.

23. Имеется два сплава меди и цинка массой x кг и y кг с процентным содержанием меди $p\%$ и $q\%$ соответственно. Сплавы переплавили. Количество меди в получившемся сплаве равно...

А. $\frac{xp+y(100-q)}{100}$ кг. **Б.** $\frac{x(100-p)+y(100-q)}{100}$ кг.

В. $\frac{xp+yq}{100}$ кг. **Г.** $\frac{x(100-p)+yq}{100}$ кг.

24. Три литра 30% раствора спирта смешали с 5 литрами 20% раствора спирта. Процентное содержание спирта в получившемся растворе равно ...

А. 22,15%. **Б.** 23,25%. **В.** 23,75%. **Г.** 24,25%.

Вариант 2

20. Имеется сплав меди и цинка массой x кг с процентным содержанием меди $p\%$. Масса меди в этом сплаве равна ...

А. $\frac{xp}{100}$ кг. **Б.** $x\left(1-\frac{p}{100}\right)$ кг. **В.** $x(100-p)$ кг. **Г.** xp кг.

21. Имеется сплав меди и цинка массой x кг. Масса меди в нем равна a кг. Процентное содержание меди в сплаве равно ...

А. $\frac{x-a}{x}$ 100%. **Б.** $\frac{x-a}{a}$ 100%. **В.** $\frac{a}{x-a}$ 100%. **Г.** $\frac{a}{x}$ 100%.

22. Имеется два сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 30% и 50%. После переплавки нельзя получить сплав с процентным содержанием меди ...

А. 40%. **Б.** 45%. **В.** 49%. **Г.** 51%.

23. Имеется два сплава меди и цинка массой x кг и y кг с процентным содержанием меди $p\%$ и $q\%$ соответственно. Сплавы переплавили. Количество цинка в получившемся сплаве равно ...

А. $\frac{xp+y(100-q)}{100}$ кг. **Б.** $\frac{x(100-p)+y(100-q)}{100}$ кг.

В. $\frac{xp+yq}{100}$ кг. **Г.** $\frac{x(100-p)+yq}{100}$ кг.

24. Смешали два литра 25% раствора кислоты и 4 литра 10% раствора кислоты. Концентрация кислоты в полученном растворе равна …

А. 35%. **Б.** 15%. **В.** 17,5%. **Г.** 20%.

Вариант 3

20. Имеется водный раствор спирта массой x кг с процентным содержанием спирта $p\%$. Масса воды в этом растворе равна ...

А. $x\left(1-\dfrac{p}{100}\right)$ кг. **Б.** $\dfrac{xp}{100}$ кг. **В.** $x(100-p)$ кг. **Г.** xp кг.

21. Имеется водный раствор кислоты массой x кг. Масса кислоты в нем равна a кг. Процентное содержание воды в растворе равно ...

А. $\dfrac{x-a}{x}$ 100%. **Б.** $\dfrac{a}{x}$ 100%. **В.** $\dfrac{a}{x-a}$ 100%. **Г.** $\dfrac{x-a}{a}$ 100%.

22. Имеется два водных раствора спирта с процентным содержанием спирта 40% и 50%. После смешения этих растворов можно получить раствор с процентным содержанием спирта ...

А. 30%. **Б.** 35%. **В.** 49%. **Г.** 51%.

23. Имеется два сплава меди и цинка массой x кг и y кг с процентным содержанием цинка $p\%$ и $q\%$ соответственно. Сплавы переплавили. Количество меди в получившемся сплаве равно ...

А. $\dfrac{xp+y(100-q)}{100}$ кг. **Б.** $\dfrac{x(100-p)+y(100-q)}{100}$ кг.

В. $\dfrac{xp+yq}{100}$ кг. **Г.** $\dfrac{x(100-p)+yq}{100}$ кг.

24. Смешали 200 г соли и 1 л воды со 100 г соли и 2 л воды. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

А. $9\dfrac{1}{11}$%. **Б.** $11\dfrac{1}{9}$%. **В.** $9\dfrac{10}{11}$%. **Г.** $11\dfrac{8}{9}$%.

Подсказки

20. Можно найти массу (объём) того металла (или вещества) в первоначальном сплаве (растворе), процентное содержание которого известно или легко может быть найдено, а потом его массу (объём) в новом сплаве (растворе).

21.Обратите внимание на то, что известны и общая масса сплава (раствора), и масса одной из составляющих в сплаве (растворе).

22. Воспользуйтесь тем, что процентное содержание металла (вещества) в сплаве (растворе), полученном при переплавке (смешении) двух сплавов (растворов), находится между процентными содержаниями этого металла (вещества) в каждом сплаве (растворе).

23. Воспользовавшись определением концентрации металла в сплаве, найдите вначале массу искомого металла в каждом первоначальном сплаве.

24. Процентное содержание или концентрация вещества в растворе равно отношению объёма этого вещества в растворе к объёму раствора, выраженному в процентах.

4. Составление неравенств

Вариант 1

25. Расстояние между двумя пунктами равно 240 км. Поезд преодолевает это расстояние менее чем за 4 часа. Какова его скорость?

А. 60 км/ч. **Б.** Менее 60 км/ч. **В.** Более 60 км/ч. **Г.** Определить невозможно.

26. Расстояние между пунктами А и В равно 240 км. Из этих пунктов навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля со скоростями, превышающими 50 км/ч и 70 км/ч соответственно. Через какое время они встретятся?

А. Через 2 ч. **Б.** Менее, чем через 2 ч.

В. Более, чем через 2 ч. **Г.** Определить невозможно.

27. Два пешехода вышли одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу. Встреча произошла ближе к пункту А, чем к пункту В. Скорость какого пешехода больше?

А. Вышедшего из В. **Б.** Вышедшего из А.

В. Скорости равные. **Г.** Определить невозможно.

28. В коробке содержалось a красных и b синих карандашей, причём число синих более чем на 3 превосходило число красных. Какое соотношение справедливо для a и b?

А. $b - a = 3$. **Б.** $b - a < 3$. **В.** $a - b > 3$. **Г.** $b - a > 3$.

29. Имеется два куска металла массой 1 кг и 2 кг. Из этих кусков сделали два других: первый массой 0,5 кг, содержащий 40% меди, а второй массой 2,5 кг, содержащий 88% меди. Каково процентное содержание меди в исходном первом куске?

А. 40%. **Б.** < 40%. **В.** > 40%. **Г.** Определить невозможно.

30. Культуре из 100 бактерий предоставлена возможность размножаться при благоприятных условиях. За каждые сутки их число увеличивается втрое. Через какое минимальное целое число суток их число превысит 3000?

А. Через 2 суток. **Б.** Через 3 суток. **В.** Через 4 суток. **Г.** Через 5 суток.

Вариант 2

25. Расстояние между двумя пунктами равно 240 км. Поезд движется со скоростью, меньшей 80 км/ч. За сколько времени он преодолевает это расстояние?

А. За 3 ч. **Б.** Менее, чем за 3 ч.

В. Более, чем за 3 ч. **Г.** Определить невозможно.

26. Расстояние между пунктами А и В равно 240 км. Из этих пунктов в направлении из пункта В в пункт А одновременно выехали два автомобиля со скоростями, превышающей 40 км/ч (автомобиль из А) и меньшей 80 км/ч (автомобиль из В). Через какое время автомобиль из В догонит автомобиль из А?

А. Через 6 ч. **Б.** Менее, чем через 6 ч.

В. Более, чем через 6 ч. **Г.** Определить невозможно.

27. Два пешехода вышли одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу. Встреча произошла ближе к пункту В, чем к пункту А. Скорость какого пешехода меньше?

А. Вышедшего из В. **Б.** Вышедшего из А.

В. Скорости равные. **Г.** Определить невозможно.

28. В коробке содержалось a красных и b синих карандашей, причём число синих менее чем на 3 превосходило число красных. Какое соотношение справедливо для a и b?

А. $b - a = 3$. **Б.** $b - a < 3$. **В.** $a - b > 3$. **Г.** $b - a > 3$.

29. Имеется два куска металла массой 1 кг и 2 кг. Из этих кусков сделали два других: первый массой 0,5 кг, содержащий 40% меди, а второй массой 2,5 кг, содержащий 88% меди. Каково процентное содержание меди в исходном втором куске?

А. Определить невозможно. **Б.** < 100%. **В.** 88%. **Г.**100%.

30. При радиоактивном распаде количество вещества уменьшается вдвое за сутки. Через какое наименьшее целое число суток от имеющегося вещества останется менее 0,1 его массы?

А. Через 3 суток. **Б.** Через 4 суток. **В.** Через 5 суток. **Г.** Через 6 суток.

Вариант 3

25. Площадь прямоугольника равна 48 $см^2$. Длина одной стороны более 8 см. Какова длина смежной ей стороны?

А. Менее 6 см. **Б.** Более 6 см. **В.** 6 см. **Г.** Определить невозможно.

26. Расстояние между пунктами А и В равно 240 км. Из этих пунктов в направлении из пункта В в пункт А одновременно выехали два автомобиля со скоростями, превышающей 40 км/ч (автомобиль из В) и меньшей 80 км/ч (автомобиль из А). Через какое время расстояние между автомобилями увеличится на 120 км?

А. Через 3 ч. **Б.** Менее, чем через 3 ч.

В. Более, чем через 3 ч. **Г.** Определить невозможно.

27. Два пешехода вышли одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу. Скорость пешехода из А больше скорости пешехода из В. Где произошла встреча пешеходов?

А. Ближе к В, чем к А. **Б.** Ближе к А, чем к В.

В. Посередине между А и В. **Г.** Определить невозможно.

28. В коробке содержалось a красных и b синих карандашей, причём число синих более чем в 3 раза превосходило число красных. Какое соотношение справедливо для a и b?

А. $b = 3a$. **Б.** $b < 3a$. **В.** $a > 3b$. **Г.** $b > 3a$.

29. Имеется два куска металла массой 2 кг и 4 кг. Из этих кусков сделали два других: первый массой 1 кг, содержащий 20% меди, а второй массой 5 кг, содержащий 84% меди. Каково процентное содержание меди в исходном первом куске?

А. 20%. **Б.** < 20%. **В.** > 20%. **Г.** Определить невозможно.

30. Рост дрожжевых клеток происходит делением каждой клетки на две части. За какое наименьшее число делений число клеток превысит 1000, если вначале было 4 клетки?

А. 8. **Б.** 9. **В.** 10. **Г.** 11.

Подсказки

25. Составьте по условию и решите неравенство относительно искомой величины.

26. Воспользовавшись свойствами понятия скорости сближения (удаления), выразите искомую величину через данные условия и оцените её значение.

27. Воспользуйтесь тем, что до встречи пешеходы двигались одинаковое время.

28. Обратите внимание на то, что число синих карандашей превосходило число красных не ровно на какое-то определённое число или в определённое число раз, а более или менее чем на определённое число или более или менее, чем в определённое число раз.

29. Обратите внимание на то, что первый кусок металла просто делится пополам, а оставшаяся от первого куска часть добавляется ко второму.

30. Воспользовавшись формулой сложных процентов, составьте показательное неравенство и решите его.

Ответы к заданиям 1 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	Б	А	Г	Г	Г	Г	В	А	А	А	А	Б	Б	В
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Б	Г	В	Г	Б	А	Б	В	В	В	Б	А	Г	А	В

Ответы к заданиям 2 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Б	В	А	Б	Г	Г	Б	А	А	Б	А	В	Б	Г	Г
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
В	В	А	В	А	Г	Г	Б	Б	В	В	Б	Б	Г	Б

Ответы к заданиям 3 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	Б	В	Б	Г	Г	Б	Б	А	В	А	Б	В	Г	А
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Б	Г	А	Г	А	А	В	Б	А	А	В	А	Г	А	Б

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Контрольный тест**	**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	15 задач	5 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	20 задач	7 задач	3 задач
«отлично»	Решено не менее	25 задач	10 задач	6 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v = 4 + 2t$, где v – скорость в момент t, см/с, t – время, с. В какой из указанных моментов времени скорость превысит 8 см/с?

А. 0,5 с. **Б.** 1 с. **В.** 2 с. **Г.** 2,5 с.

2. Закон движения проекции некоторой движущейся точки на ось ординат имеет вид $y = c + dt$, где y – ордината точки, t – время, с, c и d – некоторые числа. В начальный момент времени $t = 0$ точка имела ординату –1, а через 5 с её ордината равнялась 29. Какой была ордината точки через 20 с после начала движения?

А. 118. **Б.** 119. **В.** 120. **Г.** 121.

3. Путь, который проезжает автомобиль после торможения, описывается формулой $s = 10t - 0{,}2t^2$, где s – пройденный путь, м, t – время, с, $0 \le t \le 50$. За какое время он проедет 125 м?

А. За 25 с. **Б.** За 20 с. **В.** За 15 с. **Г.** За 10 с.

4. Из формулы $E = \dfrac{mv^2}{2}$, выражающей зависимость кинетической энергии движущейся точки E от скорости v и массы m, выразите v через остальные переменные.

А. $v = 2Em$. **Б.** $v = \sqrt{\dfrac{m}{2E}}$. **В.** $v = \sqrt{2Em}$. **Г.** $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}}$.

5. Автомобиль проехал по трассе 80 км и 15 км по городским улицам. По трассе он ехал со скоростью x км/час, а по городским улицам – на 30 км/час меньшей. За какое время автомобиль проехал весь путь?

А. За $\left(\frac{15}{x-30}+\frac{80}{x}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{x-30}{15}+\frac{x}{80}\right)$ ч.

В. За $\left(\frac{x-30}{80}+\frac{x}{15}\right)$ ч. **Г.** За $\left(\frac{80}{x-30}+\frac{15}{x}\right)$ ч.

6. Расстояние между двумя автомобилями, движущимися по прямолинейной дороге в одном направлении, равно 10 км. Через 2 мин расстояние между ними составило 8 км. Чему равна скорость их сближения?

А. 120 км/ч. **Б.** 80 км/ч. **В.** 60 км/ч. **Г.** 45 км/ч.

7. Два тела, движутся в одном направлении из двух пунктов A и B со скоростями V_1 и V_2 ($V_1 > V_2$). Первое тело догнало второе через время t. На каком расстоянии друг от друга находились тела в начале движения?

А. $(V_1 - V_2)t$. **Б.** $(V_1 + V_2)t$. **В.** $\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)t$. **Г.** $\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)t$.

8. Два велосипедиста выезжают одновременно в одном направлении из пунктов A и B, расстояние между которыми S км, и через 5 часов один из них догоняет второго. Скорость их сближения равна ...

А. $\frac{5}{S}\frac{км}{час}$. **Б.** $5S\frac{км}{час}$. **В.** $2{,}5S\frac{км}{час}$ **Г.** $\frac{S}{5}\frac{км}{час}$.

9. Два тела движутся в одном направлении со скоростями V_1 и V_2 ($V_1 > V_2$), причём первое тело удаляется от второго. Через время t расстояние между ними удвоилось. На каком расстоянии друг от друга находились тела в начале движения?

А. $(V_1 - V_2)t$. **Б.** $(V_1 + V_2)t$. **В.** $\frac{(V_1+V_2)t}{2}$. **Г.** $\frac{(V_1-V_2)t}{2}$.

10. Лодка движется против течения реки со скоростью V, а по озеру – со скоростью W. Скорость лодки по течению реки равна ...

А. $2V - W.$ **Б.** $V + 2W.$ **В.** $2W - V.$ **Г.** $2V + W.$

11. Катер прошел 20 км против течения реки, а затем 18 км – по озеру. За какое время он прошел весь путь, если скорость катера против течения реки x км/ч, а скорость течения – 2 км/ч?.

А. За $\left(\frac{18}{x-2}+\frac{20}{x}\right)$ ч. **Б.** За $\left(\frac{x-2}{18}+\frac{x}{20}\right)$ ч.

В. За $\left(\frac{18}{2+x}+\frac{20}{x}\right)$ ч. **Г.** За $\left(18(x+2)+20x\right)$ ч.

12. Человек шел со скоростью 4 км/час, а потом еще вдвое больше времени – со скоростью 8 км/час. Средняя скорость его за это время была...

А. 6 км/час. **Б.** $6\frac{1}{3}$ км/час. **В.** $6\frac{2}{3}$ км/час. **Г.** 7 км/час.

13. Человек прошел половину пути со скоростью 4 км/час и другую половину со скоростью 8 км/час. Средняя его скорость на всем пути была равна ...

А. 6 км/час. **Б.** $\frac{16}{3}$ км/час. **В.** 6,4 км/час. **Г.** 5,6 км/час.

14. Поезд, движущийся со скоростью 60 км/ч, за четверть минуты проходит мимо неподвижного наблюдателя. Найдите длину поезда.

А. 150 м. **Б.** 170 м. **В.** 200 м. **Г.** 250 м.

15. Поезд, движущийся со скоростью 50 км/ч, проехал мост длиной в 450 м за 45 с. Найдите длину поезда.

А. 225 м. **Б.** 200 м. **В.** 175 м. **Г.** 150 м.

16. Бригада должна была обработать некоторое количество деталей в определённый срок. Надо было обрабатывать по 15 деталей в день, чтобы успеть выполнить работу в срок. Предложенная бригадой новая технология обработки позволила обрабатывать на 2 детали больше за день, поэтому на последний день у них остались необработанными 5 деталей. Сколько деталей составлял заказ?

А. 60. **Б.** 75. **В.** 90. **Г.** 105.

17. На двух станках к определённому сроку нужно было изготовить 258 деталей. В связи с ремонтом второго станка, первые три дня детали изготовлялись только на первом станке. Затем за 5 дней совместной работы заказ был полностью выполнен. На сколько деталей в день производительность первого станка выше производительности второго, если на первом станке за 6 дней изготовляли столько же деталей, сколько на втором за 7 дней?

А. На 6 деталей в день. **Б.** На 5 деталей в день.

В. На 4 детали в день. **Г.** На 3 детали в день.

18. Рабочий получил заказ на станке-автомате изготовить к определённому сроку 200 деталей. Станок был усовершенствован, в результате чего за день можно было изготовлять на 5 деталей больше. Поэтому вся работа была закончена на 2 дня раньше срока. За сколько дней требовалось выполнить заказ?

А. За 8 дней. **Б.** За 10 дней. **В.** За 12 дней. **Г.** За 15 дней.

19. Две трубы, действуя вместе, наполняют половину бассейна за 3 часа, первая труба делает это за 5 часов. Вторая труба наполняет бассейн за ...

А. 15 часов. **Б.** 8 часов. **В.** 7,5 часа. **Г.** 4 часа.

20. Имеется водный раствор спирта массой x кг с процентным содержанием спирта $p\%$. Масса спирта в этом растворе равна ...

А. $\frac{xp}{100}$ кг. **Б.** xp кг. **В.** $x(100-p)$ кг. **Г.** $x\left(1-\frac{p}{100}\right)$ кг.

21. Имеется водный раствор кислоты массой x кг. Масса воды в нем равна a кг. Процентное содержание кислоты в растворе равно ...

А. $\frac{x-a}{x}$ 100%. **Б.** $\frac{a}{x}$ 100%. **В.** $\frac{a}{x-a}$ 100%. **Г.** $\frac{x-a}{a}$ 100%.

22. Имеется два водных раствора спирта с процентным содержанием спирта 40% и 50%. После смешения этих растворов нельзя получить раствор с процентным содержанием спирта ...

А. 39%. **Б.** 41%. **В.** 45%. **Г.** 49%.

23. Имеется два сплава меди и цинка массой x кг и y кг с процентным содержанием цинка $p\%$ и $q\%$ соответственно. Сплавы переплавили. Количество цинка в получившемся сплаве равно ...

А. $\dfrac{xp+y(100-q)}{100}$ кг. **Б.** $\dfrac{x(100-p)+y(100-q)}{100}$ кг.

В. $\dfrac{x(100-p)+yq}{100}$ кг. **Г.** $\dfrac{xp+yq}{100}$ кг.

24. Смешали два литра молока жирностью 6% и три литра молока жирностью 8%. Какова жирность образованной молочной смеси?

А. 6,6%. **Б.** 7%. **В.** 7,2%. **Г.** 7,5%.

25. Площадь прямоугольного треугольника равна 72 см^2. Длина одного катета менее 9 см. Какова длина другого катета?

А. Менее 16 см. **Б.** Более 16 см. **В.** 16 см. **Г.** 8 см.

26. Расстояние между пунктами A и B равно 240 км. Из этих пунктов в направлении из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля со скоростями, превышающей 60 км/ч (автомобиль из B) и меньшей 80 км/ч (автомобиль из A). Через какое время расстояние между автомобилями уменьшится на 40 км?

А. Через 2 ч. **Б.** Менее, чем через 2 ч.

В. Более, чем через 2 ч. **Г.** Определить невозможно.

27. Два пешехода вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Скорость пешехода из A меньше скорости пешехода из B. Где произошла встреча пешеходов?

А. Ближе к B, чем к A. **Б.** Ближе к A, чем к B.

В. Посередине между A и B. **Г.** Определить невозможно.

28. В коробке содержалось a красных и b синих карандашей, причём число синих менее чем в 3 раза превосходило число красных. Какое соотношение справедливо для a и b?

А. $b = 3a$. **Б.** $b < 3a$. **В.** $a > 3b$. **Г.** $b > 3a$.

29. Имеется два куска металла массой 2 кг и 4 кг. Из этих кусков сделали два других: первый массой 1 кг, содержащий 20% меди, а второй массой 5 кг, содержащий 84% меди. Каково процентное содержание меди в исходном втором куске?

А. 84%. **Б.** < 84%. **В.** 100%. **Г.** Определить невозможно.

30. Банк начисляет вкладчикам ежегодно 20% на сумму, находящуюся на вкладе на тот момент, если вкладчик не снимает ни положенные, ни начисленные деньги со своего счёта. Через сколько лет впервые размер вклада увеличится более чем в 1,5 раза?

А. Через 2 года. **Б.** Через 3 года. **В.** Через 4 года. **Г.** Через 5 лет.

Основное задание

1. Количество продукции, выпускаемой заводом A, составляет 40,96% количества продукции, выпускаемой заводом B. Число годового процента прироста продукции на заводе A на 30 больше числа годового процента прироста продукции на заводе B. Каков годовой процент прироста продукции на заводе A, если на четвертый год работы завод A дает то же количество продукции, что и завод B?

2. Заработная плата повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. В результате она возросла в 1,32 раза. На сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз?

3. Чтобы перевезти некоторый груз, две автомашины работали вместе в течение 5 часов и сверх того одна первая работала 50 минут. Сколько времени требуется каждой автомашине отдельно, чтобы перевезти весь груз, если одна первая автомашина может перевезти весь груз на 2 часа скорее, чем одна вторая?

4. Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго $\frac{2}{3}$, а третий кусок, в котором было $\frac{1}{3}$ всей ткани, продали весь. Сколько процентов ткани продано, если всего осталось ее вдвое меньше, чем было во втором куске?

5. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и в одном и том же направлении. Одна машина идет со скоростью 50 км/час, а другая – 40 км/час. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1 ч 30 мин. позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

6. Скорый поезд выходит в один час дня из города A и направляется в город B со скоростью 60 км/час. 15 минут спустя из A выходит вслед за ним пассажирский поезд, который идет со скоростью 40 км/час. Поезд, вышедший из B, направляется в A со скоростью 50 км/час и встречает скорый поезд после 1 часа пути, а пассажирский – спустя 20 мин после этого. В котором часу вышел поезд из B?

7. Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 часа 41 мин. Дорога из A и B идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если скорость ходьбы туриста составляет: в гору 4 км/час, по ровному месту – 5 км/час и под гору – 6 км/час, а расстояние AB равно 9 км?

8. Некто проехал в лодке по реке из города A в город B и обратно, употребив на это 10 час. Расстояние между городами равно 20 км. Найти скорость течения реки, зная, что он проплывал 2 км против течения в такое же время, как 3 км по течению реки.

9. Эскалатор метро спускает идущего по нему вниз человека за 1 минуту. Если человек будет идти вниз вдвое быстрее, то он спустится за 45 секунд. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе?

10. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом через каждый час. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются каждые полчаса. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

11. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

12. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой, потом из бака вылили столько же литров смеси. Тогда в баке осталось 49 л чистого спирта. Вместимость бака 64 л. Сколько спирта вылили в первый раз и во второй раз?

13. Из *A* в *B* по течению реки плывет плот. Одновременно с тем, когда плот начал путь из *A* в *B*, из *B* в *A* навстречу ему поплыла лодка, которая встречает плот не ранее чем через 2 часа и затем прибывает в *A*, затратив на весь путь менее 3 ч 20 мин. Успеет ли плот преодолеть путь из *A* в *B* за 5 ч, если расстояние между *A* и *B* равно 20 км?

Указания к задачам основного задания

1. Воспользовавшись формулой сложных процентов, составьте и решите уравнение относительно процента ежегодного роста продукции на одном из заводов.

2. Обратите внимание на то, что второй раз повышался размер зарплаты, полученный после первого повышения.

3. Введите обозначение для времени, необходимого одной из машин для выполнения всей работы.

4. Введите обозначения для количества ткани в каждом куске и выразите через них процентное отношение проданной ткани ко всей ткани.

5. Введите обозначения для скорости третьей машины и времени, через которое третья машина обгонит вторую.

6. Введите обозначения для скорости, с которой скорый поезд двигался до встречи с поездом из В, и для расстояния между А и В.

7. Выразите через длину дороги по ровному месту длину пути в гору и под гору.

8. Выразите скорости движения лодки по течению и против течения через её собственную скорость и скорость течения.

9. Выразите скорости человека, спускающегося на едущем вниз эскалаторе через скорость эскалатора и собственную скорость человека, идущего по нему вниз.

10. Выразите скорости сближения автомобилей при движении в противоположных направлениях и при движении в одном направлении через их скорости и длину кольцевой дороги.

11. Введите обозначения для количеств частей первого и второго сплава в третьем сплаве.

12. Выразите через объём спирта, отлитого в первый раз, объём «чистого» спирта, отлитого во второй раз и за два раза.

13. Выразите через собственную скорость лодки и скорость плота скорость лодки против течения, и скорость сближения лодки и плота.

Дополнительное задание

1. Войсковая колонна имеет длину 5 км. Связной, выехав из начала колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся к началу. Колонна за это время прошла 12 км. Какой путь проехал связной?

2. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем "троек" было больше, чем "пятерок" и меньше, чем "четверок". Кроме того, число "четверок" делилось на 10, а число "пятерок" было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

3. От пристани A вниз по реке, скорость течения которой равна V км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/час. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить все те значения V, при которых к моменту возвращения катера в A плот проходит более 15 км.

4. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе делают за час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более 3 часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 часов. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на всю работу, если бы с начала и до конца он делал ее один?

5. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист отставал от них на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода нагнал мотоциклист?

6. Температуру можно измерять по шкале Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что 0 градусов по Цельсию соответствует 0 градусов по Реомюру и 32 градусам по Фаренгейту, а 100 градусов по Цельсию соответствует 80 градусам по Реомюру и 212 градусам по Фаренгейту. Сколько градусов по Реомюру будет, если температуры по Цельсию и Фаренгейту составляют равное число градусов?

7. Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а ученик на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе - на один час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

8. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 24 часа, если бы делали ее одновременно. Вместо этого они приступили к работе один за другим через равные промежутки времени и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если первый приступивший к работе проработал в пять раз больше, чем последний?

9. За время хранения вклада в банке, проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}$ % и, наконец, 12,5% в месяц. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечению срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определить срок хранения вклада.

Указания к задачам дополнительного задания

1. Выразите через скорость движения колонны и скорость движения связного время, которое связной ехал из начала в конец колонны и из конца в начало колонны, а также расстояние, которое колонна за это время прошла.

2. Составьте по условию два уравнения относительно количества «двоек», «троек», «четверок», «пятерок».

3. Выразите через время, за которое катер догонит плот, путь, который за это время пройдут плот и катер. Составьте и решите неравенство относительно скорости течения.

4. Введите обозначение для производительности первого рабочего, выразите через него совместную производительность второго и третьего рабочих. Из условия задачи составьте уравнение и неравенство.

5. Введите обозначения для скоростей мотоциклиста, велосипедиста и пешехода. Выразите через них время, за которое мотоциклист догнал велосипедиста, мотоциклист догнал пешехода.

6. Найдите, на сколько градусов промежуток от точки замерзания воды до ее кипения разделен в шкале Цельсия, в шкале Фаренгейта, в шкале Реомюра.

7. Введите обозначения для производительности мастера, времени, за которое мастер выполняет заказ. Выразите через них объём заказа.

8. Введите обозначения для производительности труда одного рабочего, времени работы рабочего, приступившего к работе первым; числа рабочих; промежутка времени, через который рабочие последовательно приступали к работе. Используйте свойства арифметической прогрессии.

9. Введите обозначения для размера первоначального вклада, количеств месяцев с начислением указанных количеств процентов. Воспользовавшись формулой сложных процентов, составьте уравнение для этих переменных. Для его решения примените теорему о единственности разложения натурального числа на простые множители.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Текстовые задачи

Пособие для дополнительного обучения математике

обучающихся 10 классов

Учебное пособие