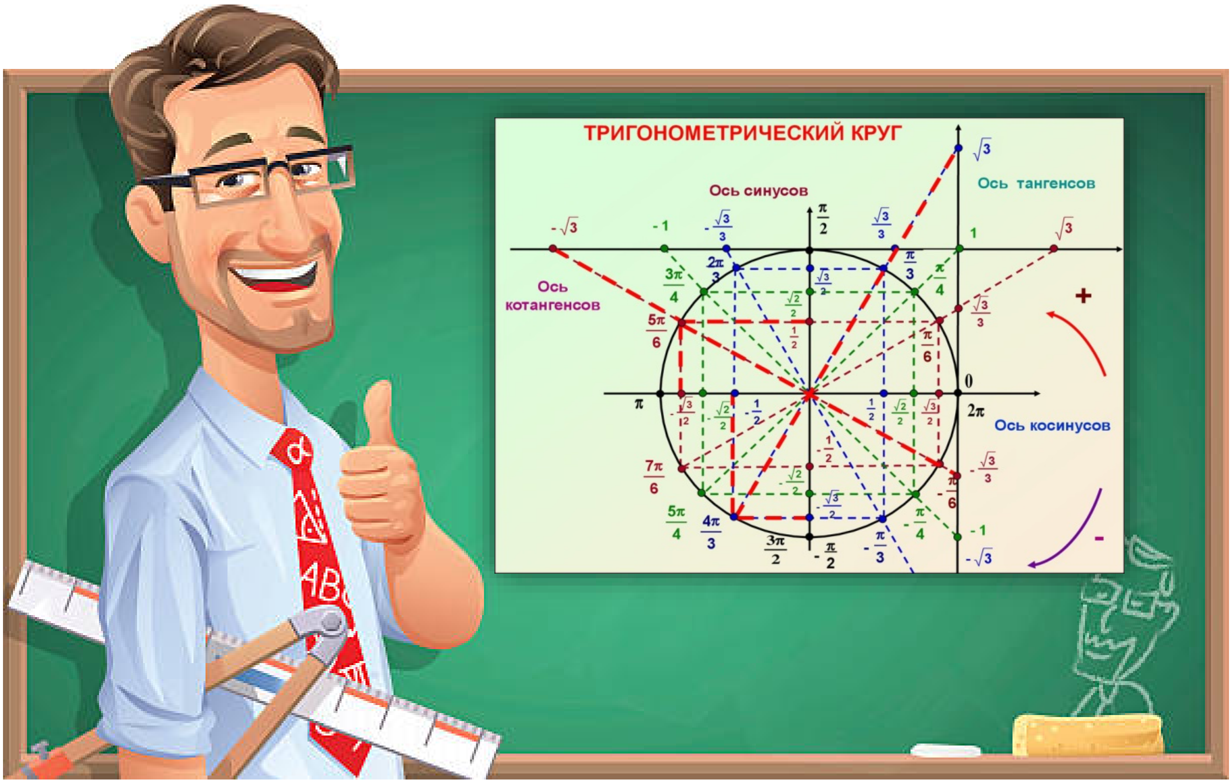
Донецкий национальный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я.С. Бродский, А.Л. Павлов

Тригонометрические функции, их свойства и применение



Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Тригонометрические функции, их свойства и применение. Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов. − Донецк, 2023, – 164 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 10 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом *ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017).* Ее цель — развитие у обучающихся умений учиться, самостоятельно приобретать знания, совершенствование умений и навыков применять математику для решения математических и жизненных задач.

Настоящее пособие предназначено для развития умений исследовать тригонометрические функции, применять их свойства к решению уравнений и неравенств, исследованию периодических процессов.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части представлен материал для обучения. В этой части содержатся краткие теоретические сведения, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля.

Во второй части пособия содержатся три варианта тренажёра с подсказками ко всем заданиям.

В третьей части пособия приведены задания для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части.

Пособие предназначено для обучающихся открытого математического колледжа факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета. Может быть использовано при проведении факультативных занятий.

СОДЕРЖАНИЕ

Дорогой друг!

Настоящее пособие предназначено для развития умений исследовать тригонометрические функции, строить их графики, применять свойства тригонометрических функций при решении прикладных задач, связанных с вращательным движением, гармоническими колебаниями.

Пособие состоит из трёх частей: обучающей, тренировочной и контролирующей. В первой части представлен материал для повторения и обучения. Он содержит краткие теоретические сведения, применимые при решении представленных задач, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля с ответами на них. Вся совокупность задач разделена на группы по их содержанию. Первая часть пособия завершается задачами для самостоятельного решения. К этим задачам приведены указания и ответы.

Вторая часть пособия состоит из тестов для тренировки, к заданиям которых приведены указания, ответы. Они структурированы в соответствии с частями, на который разделён весь материал. Тренажёр состоит из заданий с выбором ответа.

Задания для тренировки представлены тремя однотипными вариантами теста. Тренировку начинайте с первого варианта теста. Попробуйте выполнить самостоятельно его задания, не используя учебные пособия и микрокалькулятор. Выбор правильных ответов и необходимые записи делайте в отдельной тетради. После завершения работы над вариантом теста сверьте свои ответы с ответами, приведенными в пособии. **Не пользуйтесь ответами, пока не дадите ответы самостоятельно!**

Каждое задание, по которому Ваш ответ не совпал с приведенным, тщательно проанализируйте, пользуясь подсказками. Такую работу полезно выполнить по всем заданиям теста. Наверное, некоторые ответы Вы угадали или «почувствовали», не зная полного решения. Кроме подсказок целесообразно пользоваться теоретическими сведениями и примерами с решениями, содержащимися в первой части пособия.

В третьей части пособия приведено контрольное задание, состоящее из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям тестов для тренировки;

- ***основного задания***, содержащего задания, подобные рассмотренным в первой части пособия;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные задачи по сравнению с основным заданием.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут для Вас полезными и интересными.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит в освоении идей, методов, использованных в приведенных решениях типовых задач, самостоятельном решении подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. **Чтобы решить задачу, нужно:**

- сначала проанализировать её условие и вытекающие из него следствия;

- уяснить требование задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требования задачи.

2. Приступая к выполнению заданий тренажёра, повторите приведенный теоретический материал.

Надо сначала попробовать выполнить самостоятельно задания первого варианта первого блока тренажёра. Выбранные ответы записывайте на отдельном листочке.

Пользоваться учебником и калькулятором не рекомендуется.

3. После завершения работы над первым вариантом первого блока тренажёра необходимо сверить свои ответы с приведенными в пособии.

Нельзя обращаться к приведенным ответам, пока не получены самостоятельно ответы ко всем заданиям.

4. **Каждое задание, по которому ответ не совпал с приведенным, нужно тщательно проанализировать, пользуясь при необходимости приведенными в пособии указаниями.**

Такую работу полезно проделать со всеми заданиями первого варианта блока. Наверное, некоторые ответы угаданы или «почувствованы».

5. Когда появится уверенность в том, что неясных вопросов не осталось, можно проверить надёжность своей уверенности с помощью второго варианта первого блока тренажёра.

Если же при выполнении второго варианта первого блока осталось ощущение, что не всё усвоено, то нужно продолжать работу по исправлению ошибок, выполнить задания третьего варианта, записывая при этом все проделанные шаги.

Если до конца выполнены данные выше рекомендации, то результаты при выполнении следующего варианта теста будут значительно выше первоначальных.

6. Если уверенность подтвердилась при выполнении второго варианта теста, то можно перейти к работе над первым вариантом второго блока. Методика работы над ним остаётся такой же. И так далее.

Ни в коем случае не бросайте работу!

Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполнив контрольный тест, оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части раздела.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Тригонометрические функции и их свойства

С тригонометрическими функциями вы уже имели дело на уроках геометрии. До сих пор их приложения, в основном, ограничивались решением треугольников, то есть речь шла о нахождении одних элементов треугольника по другим. Из истории математики известно, что возникновение тригонометрии связано с измерением длин и углов. Однако, теперь область ее применений стала намного шире, чем в древности.

Большинство применений тригонометрии касаются именно периодических процессов, то есть процессов, повторяющихся через равные промежутки времени. Восход и закат Солнца, изменения времен года, вращения колеса — это простейшие примеры таких процессов. Механические и электромагнитные колебания являются также важными примерами периодических процессов. Поэтому исследование периодических процессов — важное задание. И роль математики в его решении является определяющей.

В этом пособии систематизируется материал, уже известный вам из курса геометрии, продолжается изучение тригонометрических функций и их приложений для характеристики периодических процессов, в частности, вращательного движения, колебательных процессов и т. п.

1. Измерение углов

Повторяем теорию

В планиметрии углы рассматриваются как фигуры, образованные с помощью двух лучей, имеющих общее начало. Обычно углы в геометрии измеряют в градусах: 1 градус $(1°)$ — это $\frac{1}{180}$ часть меры развернутого угла. Градусная мера углов в геометрии изменяется от 0° до 180°.

В тригонометрии любой угол рассматривается как ***фигура, образованная вращением подвижного луча вокруг его начала***. Пусть зафиксированы вершина угла и один из лучей, образующих этот угол. Второй луч будем вращать вокруг вершины угла. Полученные при этом углы между неподвижным и подвижным лучами называют ***углами вращения***.

На рис. 1 изображен угол, образованный вращением подвижного луча OA_1 вокруг точки O, с неподвижным лучом OA. Траекторией движения точки A_1 луча OA_1 является линия AA_1. Она является дугой окружности с центром в точке O и с радиусом OA_1 (или OA).

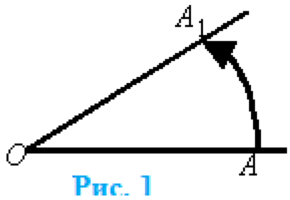


Рис. 1

Мерой угла вращения является мера угла поворота подвижного луча. Углы вращения можно измерять в градусах. Удобнее является ***радианная мера углов***.

Радианной мерой угла вращения называется отношение пути, пройденного от начального положения фиксированной точкой подвижного луча, к расстоянию от этой точки до начала луча.

Численно радианная мера угла равняется пути, который пройдет точка подвижного луча, находящаяся на единичном расстоянии от вершины. Угол, радианная мера которого равняется числу 1, называется ***радианом*** (рис. 2). Длина соответствующей дуги окружности равняется длине радиуса окружности.

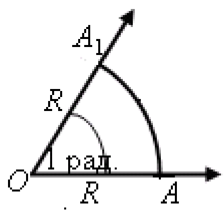


Рис. 2

Угол вращения, образованный подвижным лучом с неподвижным (начальным положением подвижного луча), зависит от направления вращения — против часовой стрелки или по ней. Будем считать, что угол вращения является положительным, если поворот осуществляется против часовой стрелки (рис. 3), и отрицательным, если — по ней (рис. 4).

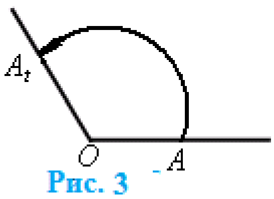


Рис. 3

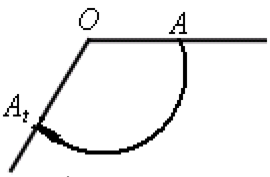


Рис. 4

Если угловая мера угла составляет α радиан, $\alpha > 0$, то это означает, что длина соответствующей дуги окружности l радиуса R равняется αR: $l = \alpha R$.

Отсюда вытекает, что ***длина дуги единичной окружности численно совпадает с её радианной мерой.*** Именно это обстоятельство и делает радианную меру угла удобной.

Окружность радиуса R имеет длину $2\pi R$. Рассмотрим дугу, длина которой равняется радиусу R. Ее длина в 2π раз меньше длины окружности. Поэтому угол, равный 1 радиану (1 рад), составляет $\dfrac{1}{2\pi}$ части полного оборота:

$$1 \text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''.$$

Поскольку радинная мера угла 360° составляет 2π рад, то 1° соответствует $\dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}017$ рад.

Этим самым установлена связь между радианной и градусной мерами угла, которая, кстати, свидетельствует о независимости радианной меры угла от радиуса окружности.

Слово «радиан» часто опускают и говорят «угол π». Так, записи $\alpha = 1{,}12$; $\alpha = 0{,}39$; $\alpha = 15{,}7$ означают, что угол α измерен в радианах. В то же время обозначения градусов не принято опускать в записях.

Введение радианной меры угла вращения дает возможность установить простую связь между угловой и линейной скоростями точки, находящейся в равномерном вращательном движении. Угловая скорость при равномерном вращении — это угол, на который поворачивается точка за единицу времени. Она обычно измеряется в радианах за секунду (рад/с). Линейная скорость точки при равномерном движении — это расстояние, на которое перемещается точка по траектории движения за единицу времени.

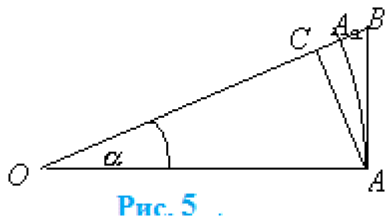


Рис. 5

Пусть угол α измерен в радианах, и он малый. Тогда длины катета AB, дуги AA_α, высоты AC прямоугольного треугольника OAB (рис. 5) мало отличаются друг от друга, и поэтому выполняются приближенные равенства:

$$tg\alpha = \frac{AB}{OA} \approx \frac{\overset{\frown}{AA_\alpha}}{OA} = \alpha \approx \frac{AC}{OA} = \sin\alpha,$$

то есть для малых углов α, выраженных в радианах, имеем приближенные формулы: $tg\alpha \approx \alpha, \quad \sin\alpha \approx \alpha$.

Решаем

Пример 1. Секундная стрелка часов имеет длину 1 см. Часы завели в 12 часов дня 1 января. В котором часу и какого числа путь, пройденный концом секундной стрелки, составит 1 км?

Решение. Найдём угол, на который повернётся стрелка за рассматриваемое время: $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{100\,000\text{ см}}{1\text{ см}} = 100\,000$ рад.

Так как длина окружности радиуса 1 см равна 2π см, то полная окружность содержит 2π радиан и, значит, 100 000 рад составляют $\frac{100\,000}{2\pi}$ оборотов. Один оборот секундная стрелка совершает за 1 мин. Расстояние в 1 км она проходит за $\frac{100\,000}{2\pi}$ минут или за $\frac{100\,000}{2\pi \cdot 60}$ часов или за $\frac{100\,000}{2\pi \cdot 60 \cdot 24}$ суток, то есть примерно за 11 суток 1 час 15 мин 30 с.

Ответ: 12 января в 13 час 15 мин 30 с.

Пример 2. Точка равномерно движется по окружности, радиус которой R = 40 см, с угловой скоростью ω = 2 рад/с. Найти линейную скорость точки.

Решение. За одну секунду точка выполняет поворот на угол, равный 2 рад. Надо найти длину дуги, которую проходит точка за 1 с. Из определения радиана вытекает, что углу в 1 рад соответствует дуга, длина которой равняется длине радиуса. Таким образом, углу в 2 рад соответствует дуга длиной 2R, или 40·2 = 80 см. Следовательно, линейная скорость точки равняется 80 см/с.

Ответ: 80 см/с.

Вопросы для самоконтроля

1. Верно ли, что радианная мера угла численно равна пути, пройденному точкой, находящейся на единичном расстоянии от вершины, на луче, вращением которого около начальной точки получен данный угол?

2. Какой из углов больше: $\frac{2}{\pi}$ рад. или $\frac{\pi}{5}$ рад.?

3. Во сколько раз угол в π градусов меньше угла в 1 радиан?

4. Чему равна радианная мера угла AOB, изображенного на рис. 6, если длина дуги MN равна $0{,}5ON$?

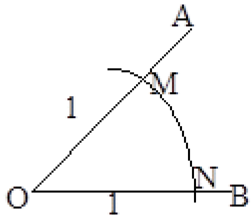


Рис. 6

5. Чему равняется в градусной мере угол поворота маховика, сделавшего: 1) 2 оборота; 2) 1,5 оборота; 3) $\frac{3}{8}$ оборота?

6. Верно ли, что радианная мера угла пропорциональна градусной мере этого угла?

7. ° Чему равняется величина угла правильного треугольника в радианах?

8. ° Чему равняются величины углов прямоугольного равнобедренного треугольника в радианах?

9. Лопасть винта сделала $7\frac{1}{4}$ полных оборота. На какой угол (в градусах) она отклонилась от начального положения?

10. Какие углы описывают минутная и часовая стрелки за: 1) 10 мин; 2) 10 ч?

11. Укажите, чему равняются приближенно градусные и радианные меры углов вращения, обозначенных стрелками на рис. 7.

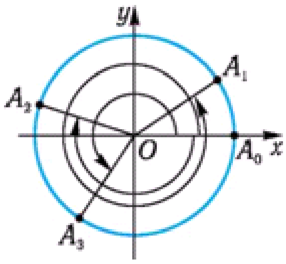


Рис. 7

Задания для самостоятельного решения

1. Запишите в радианной мере значения углов:

1) 150°; 2) 72°; 3) 240°; 4) 105°; 5) –300°; 6) 37°; 7) 127°12'.

2. Запишите в градусной мере значения углов:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) 2; 4) –7; 5) 0,349; 6) –3,14; 7) 6,34.

3. Изобразите на единичной окружности углы вращения, радианные меры которых равны: 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) 2; 4) – 3; 5) 0,5; 6) – 6.

4. Зубчатое колесо имеет 40 зубцов. Выразите в градусах угол, на который повернётся колесо при повороте на 1 зубец, 15 зубцов, 80 зубцов, 150 зубцов.

5. Среди мер углов вращения –290°, –200°, –70°, 790°, 880°, 1150°, 1600° укажите такие, в которых положение подвижного луча совпадает с положением подвижного луча угла, градусная мера которого равняется: 1) 70°; 2) 160°.

6. Среди мер углов вращения $-\frac{16\pi}{5}, -\frac{9\pi}{5}, -\frac{6\pi}{5}, -\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}, \frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}, \frac{21\pi}{5}$ укажите такие, в которых положение подвижного луча совпадает с положением подвижного луча угла, радианная мера которого равняется: 1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $\frac{4\pi}{5}$.

7. Найдите длину дуги, если известны её радианная мера α и радиус R окружности, содержащей её:

1) $\alpha = 3$, $R = 1$ см; 2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $R = 3$ см; 3) $\alpha = 0{,}2$, $R = 2$ м; 4) $\alpha = \frac{4\pi}{5}$, $R = 5$ м.

8. Колесо за 10 с повернулось на 5π рад. С какой угловой скоростью оно вращается?

9. Шкив скоростного электродвигателя делает 90 000 оборотов за минуту. Найдите угловую скорость этого шкива: 1) в град/с; 2) в рад/с.

10. Точка движется равномерно по окружности радиуса $R = 60$ см с угловой скоростью $\omega = 4\pi$ рад/с. Найдите ее линейную скорость.

11. Точка движется равномерно по окружности радиуса $R = 30$ см с линейной скоростью 75 см/с. Найдите ее угловую скорость.

12. Какую линейную скорость имеет точка вращающегося диска, когда она удалена на 18 см от оси вращения, а угловая скорость диска равняется $\frac{\pi}{3}\frac{\text{рад}}{\text{с}}$? Какой длины дугу опишет эта точка за 45 с?

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь тем, что поскольку радинная мера угла 360° составляет 2π рад, то 1° соответствует $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$ рад. **2.** Воспользуйтесь тем, что угол, равный 1 радиану (1 рад), составляет $\frac{1}{2\pi}$ части полного оборота. **3.** Воспользуйтесь тем, что полный оборот вращения составляет 360° или 2π рад. Учитывайте знак угла вращения. **4.** Учтите, что колесо имеет форму окружности. **5.** Воспользуйтесь тем, что положение подвижного луча совпадает с положением подвижного луча угла, если их градусные меры отличаются на величину, кратную 360°. **6.** Воспользуйтесь тем, что положение подвижного луча совпадает с положением подвижного луча угла, если их радианные меры отличаются на величину, кратную 2π рад. **7.** Воспользуйтесь тем, что если угловая мера угла составляет α радиан, α > 0, то длина соответствующей дуги окружности l радиуса R равняется αR, то есть $l = \alpha R$. **8.** Воспользуйтесь тем, что угловая скорость равномерного вращения тела равна углу, на которое поворачивается тело за единицу времени. **9.** Вычислите количество оборотов за 1 с и примените указание к заданию 3. **10, 11.** Воспользуйтесь тем, что если точка вращается равномерно по окружности радиуса R с угловой скоростью ω рад/с, то за секунду она проходит расстояние $R\omega$, то есть её линейная скорость равна $v = \omega R$. **12.** Зная угловую скорость вращения диска, найдите его линейную скорость, а затем — расстояние, которое проходит диск за указанное время.

Ответы к вопросам для самоконтроля

1. Да. **2.** $\frac{2}{\pi}$ рад. > $\frac{\pi}{5}$ рад. **3.** Примерно в 18 раз. **4.** 0,5 рад. **5.** 1) 720°; 2) 540°; 3) 135°. **6.** Да. **7.** $\frac{\pi}{3}$. **8.** $\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}$. **9.** 2610°. **10.** 1) 60°, 5°; 2) 3600°, 300°. **11.** 225° и $\frac{5\pi}{4}$; –210° и $-\frac{7\pi}{6}$; 390° и $\frac{13\pi}{6}$.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{4\pi}{3}$; 4) $\frac{7\pi}{12}$; 5) $-\frac{5\pi}{3}$; 6) $\frac{37\pi}{180}$; 7) $\approx 2{,}2$ рад. **2.** 1) 30°; 2) –120°; 3) ≈ 114,6°; 4) ≈ 401°; 5) ≈ 20°; 6) ≈ 180°; 7) ≈ 363°. **4.** 9°; 135°; 720°; 1350°. **5.** 1) –290°; 790°; 1150°; 2) –200°; 880°; 1600°. **6.** 1) $-\frac{9\pi}{5}$; $\frac{11\pi}{5}$; $\frac{21\pi}{5}$; 2) $-\frac{16\pi}{5}$; $-\frac{6\pi}{5}$; $\frac{14\pi}{5}$. **7.** 1) 3 см; 2) 2π см; 3) 0,4 м; 4) 4π м. **8.** $\frac{\pi}{2}\frac{1}{c}$. **9.** 1) 540 000 °/с; 2) 3 000π рад/с. **10.** $240\pi\frac{см}{c}$. **11.** $2{,}5\frac{1}{c}$. **12.** 6π см/с; 270π см.

2. Тригонометрическая окружность

Повторяем теорию

Как известно, между действительными числами и точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие. Пусть дано произвольное число t. Это соответствие можно проиллюстрировать с помощью движения частицы. Представим себе, что частица движется по числовой оси от начала отсчета в положительном направлении, если $t > 0$, и в отрицательном направлении, если $t < 0$. Если пройденное расстояние будет равняться $|t|$, то положению частицы будет соответствовать число t.

Определенное соответствие можно установить между действительными числами и точками единичной окружности (то есть радиуса 1) с центром в начале координат, которую называют еще ***тригонометрической окружностью***. Точку A с координатами (1; 0) называют ***началом отсчета*** (на окружности!).

Пусть задано число t. Представим себе, что некоторая частица движется по тригонометрической окружности и за единицу времени проходит единицу пути. Свое движение она начинает из точки A (рис. 8). Будем считать, что она движется против часовой стрелки, то есть в положительном направлении, если $t > 0$, и по часовой стрелке, то есть в отрицательном направлении, если $t < 0$. При $t = 0$ частица находилась в положении A. Если пройденное расстояние будет равняться $|t|$, частица попадет в точку, соответствующую числу t. Обозначим эту точку через P_t. Ясно, что точка P_0 совпадает с точкой A. В точку P_π частичка попадет, если пройдет в положительном направлении расстояние π, то есть длину единичной полуокружности. Точка P_π совпадает с точкой C. В точку $P_{-\frac{\pi}{2}}$ частица попадет, преодолев в отрицательном направлении путь $\frac{\pi}{2}$, то есть $\frac{1}{4}$ длины единичной окружности. Точка $P_{-\frac{\pi}{2}}$ совпадает с точкой D. Аналогично точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, $P_{\frac{3\pi}{2}}$, $P_{-\pi}$ бу-

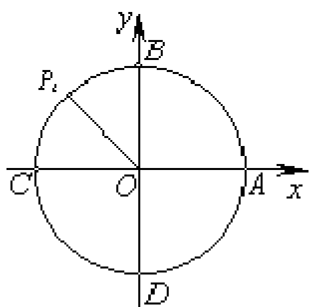


Рис. 8

дут совпадать соответственно с точками B, D, C.

Таким образом, каждому действительному числу t на тригонометрической окружности соответствует точка P_t. Это соответствие не является взаимно однозначным. Например, если $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ или $t = \frac{\pi}{2} + 4\pi$, ..., $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ldots$, то частица, пройдя дополнительно один раз или два раза, или ..., или n раз окружность, снова попадет в точку $P_{\frac{\pi}{2}}$, то есть точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ соответствует бесконечному множеству чисел $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots$. ***Итак, различным числам может соответствовать одна и та же точка тригонометрической окружности.***

Эта неоднозначность напоминает такую реальную ситуацию: *велотрек имеет длину 350 м, велосипедист находится в 150 м от финиша. Какой путь он проехал*?

Если он только начал соревнование, то он проехал 350 – 150 = 200 м, если проехал один круг, то — (200 + 350·1) м = 550 м, два круга — (200 + 350·2) м = 900 м; если проехал n кругов, то путь будет равняться (200 + 350·n) м. Сравните с выражением $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Если $0 < |t| < \pi$, то точка P_t расположена на тригонометрической окружности так, что угол AOP_t равен t радиан (рис. 8). В этом случае длина дуги AP_t равна $|t|$.

Решаем

Пример 1. Изобразить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$.

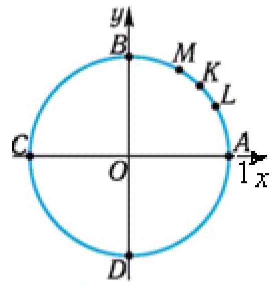


Рис.9

Решение. Разделим дугу AB, длина которой равна $\frac{\pi}{2}$, пополам точкой K, на три равные части — точками L и M (рис. 9). Тогда длины дуг AL, AK, AM соответственно равны $\frac{\pi}{2}:3 = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}:2=\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}:3\cdot 2=\frac{\pi}{3}$. Следовательно, числу $\frac{\pi}{6}$ соответствует точка L, числу $\frac{\pi}{4}$ — точка K, числу $\frac{\pi}{3}$— точка M. Эти точки можно соответственно обозначить через $P_{\frac{\pi}{6}}$, $P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{\pi}{3}}$. ■

Для точек, построенных в примере 1, нетрудно указать прямоугольные координаты, пользуясь соотношениями между сторонами и углами прямоугольных треугольников.

Пример 2. Найти прямоугольные координаты точек $P_{\frac{\pi}{6}}$, $P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{\pi}{3}}$.

Решение. Для точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ решение сводится к нахождению катетов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 1, а один из острых углов составляет $\frac{\pi}{6}$ = 30° (рис. 10). Катет, лежащий против угла 30° равен $\frac{1}{2}$, а прилежащий к этому углу катет равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, координаты точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ — $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

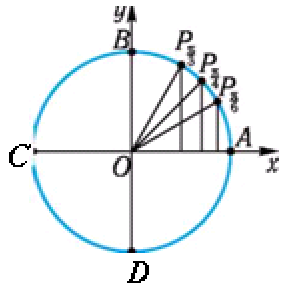


Рис. 10

Аналогично находятся координаты $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ точки $P_{\frac{\pi}{3}}$. Нахождение координат точки $P_{\frac{\pi}{4}}$ сводится к нахождению катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, гипотенуза которого равна 1. Его катеты равны $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $P_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **Ответ.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пользуясь результатом решения примера 1, можно находить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам, выраженным в долях числа π.

Пример 3. Изобразить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам $\frac{3\pi}{4}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{25\pi}{6}$.

Решение. Построение будем выполнять, пользуясь рис. 9. Отложим трижды от точки A дугу AK (точки K, L, M определены в примере 1) в положительном направлении (ее длина равна $\frac{\pi}{4}$). Получим точку E — середину дуги BC (рис. 11). Она и будет соответствовать числу $3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

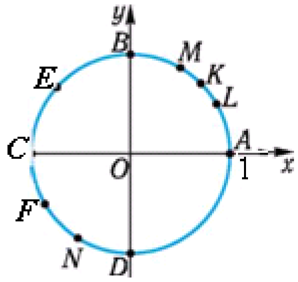


Рис. 11

Отложив дугу AL (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A в отрицательном направлении 5 раз, получим точку F, которая отделяет третью часть дуги CD. Эта точка и соответствует числу $5 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$.

Далее, отложив дугу AM (ее длина равна $\frac{\pi}{3}$) от точки A в положительном направлении 4 раза, получим точку N, отделяющую две трети дуги CD. Эта точка и соответствует числу $\frac{4\pi}{3}$. Наконец, принимая во внимание, что $\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi + \pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$, придем к выводу, что числу $\frac{25\pi}{6}$ соответствует точка L. Если бы мы отложили от точки A в положительном направлении 25 раз дугу AL, то получили бы тот же результат. ■

Координаты точек, построенных в примере 2, позволяют находить координаты точек тригонометрической окружности, соответствующих числам, выраженным в долях числа π.

Пример 4. Найти прямоугольные координаты точек $P_{\frac{5\pi}{6}}, P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{4\pi}{3}}$.

Решение. Построим данные точки (рис. 12). Их координаты по модулю совпадают с координатами соответственно точек $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{\pi}{3}}$, найденные в примере 2. Следует лишь определить их знаки. Точка $P_{\frac{5\pi}{6}}$ находится во второй

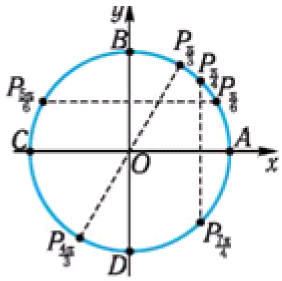


Рис. 12

координатной четверти, поэтому ее абсцисса отрицательна, а ордината положительна. Следовательно, $P_{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Аналогично получаем: $P_{\frac{7\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_{\frac{4\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ответ. $P_{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $P_{\frac{7\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $P_{\frac{4\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Приближенно можно изображать точки тригонометрической окружности, соответствующие произвольным числам.

Пример 5. Изобразить на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам 1, –2, 3, –5.

Решение. Числу 1 соответствует точка P_1, расположенная на дуге AB ближе к точке B, так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ или приближённо 1,5. Чтобы уточнить ее положение, отложим от точки A в положительном направлении угол в 1 радиан, приближенно равный $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$ (рис. 13). Его можно построить с помощью транспортира.

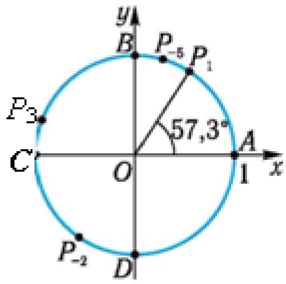


Рис. 13

Для построения точки P_{-2}, соответствующей числу –2, отложим от точки A в отрицательном направлении дугу в 2 рад. Соответствующий угол приближенно равен $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 2 \approx 115^\circ$ (см. рис. 13). Эта точка находится на дуге CD ближе к точке D, чем к точке C.

Аналогично строится точка P_3, соответствующая числу 3. Она находится на дуге BC ближе к точке C, чем к точке B (напомним, что точка C соответствует числу $\pi \approx 3{,}14$). Числу –5 соответствует та же точка, что и числу $-5+2\pi \approx 1{,}28$. Чтобы ее построить, отложим от точки A в положительном направлении дугу в 1,28 рад. Соответствующий угол приближенно равен $\frac{180°}{\pi}\cdot 1{,}28 \approx 73°$ (см. рис. 13). Точка P_{-5} находится на дуге AB ближе к точке B, чем к точке A (напомним, что точка B соответствует числу $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$. ■

Соответствие между действительными числами и точками тригонометрической окружности, как отмечалось выше, не является взаимно однозначным. Например, если рассмотреть числа $t_0 = \frac{\pi}{2}, t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, $t_2 = \frac{\pi}{2} + 4\pi$, ..., $t_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ldots$, то положение точек P_{t_n} для n = 0, 1, 2, ..., одно и то же — точка $P_{\frac{\pi}{2}}$, то есть точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ соответствует бесконечному множеству чисел $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots$. То же самое положение имеют и точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{2}-2\pi, \frac{\pi}{2}-4\pi, \ldots$. Таким образом, точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ соответствует числам $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Укажите все числа, которые соответствуют на тригонометрической окружности точкам A, B, C, D на рис. 13.

Решение. Поскольку длина всей окружности равняется 2π, то длина его четвертой части AB равняется $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, точка B соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а поэтому — всем числам вида $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Точно так же устанавливается, что точка C соответствует числам $\pi + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, точка D — числам $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, точка A — числам $2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $\pi + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

По прямоугольным координатам точки на тригонометрической окружности можно иногда записать соответствующие им числа.

Пример 7. Найти на тригонометрической окружности точки и записать, каким числам они соответствуют, если они имеют:

1) ординату $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) абсциссу $-\frac{1}{2}$.

Решение. 1) Прямая $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках P и Q (рис. 14). Точка P соответствует числу $\frac{\pi}{4}$ (см. пример 1), а следовательно всем числам $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. Точка Q соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$, а следовательно всем числам $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

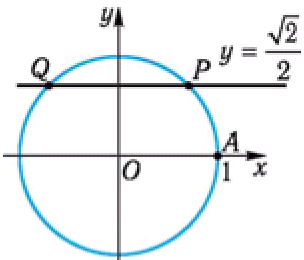


Рис. 14

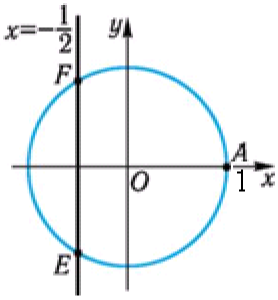


Рис. 15

2) Прямая $x = -\frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках E и F (рис. 15). Точка E соответствует числу $\frac{4\pi}{3}$ (см. пример 3), а следовательно всем числам $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. Точка F соответствует числу $\frac{2\pi}{3}$, а следовательно всем числам $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 8. Записать обозначения для открытых (то есть не содержащих концов) дуг FBE и ECF, где дуга AF составляет треть дуги AB, а точка E является серединой дуги BC (рис. 16).

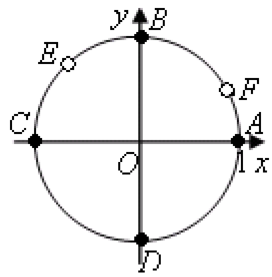


Рис. 16

Решение. Решение состоит из трех этапов. На первом устанавливаем наименьшие положительные числа, которые соответствуют отмеченным точкам. На втором — с помощью этих чисел записываем двойное неравенство, описывающее дугу. На последнем этапе составляем общую запись.

Точка F соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (трети числа $\frac{\pi}{2}$), точка E — числу $\frac{3\pi}{4}$ $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Для дуги FBE от точки F до точки E движемся в положительном направлении, поэтому для этой дуги имеем запись: $\frac{\pi}{6}<t<\frac{3\pi}{4}$. Общая запись имеет вид

$$\frac{\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Для дуги ECF от точки E к точке F движемся в положительном направлении. Точка E соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$. Дальше проходим через точки C (число π), D (число $\frac{3\pi}{2}$), A (число 2π) и попадаем в точку F (число $2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$). Следовательно, $\frac{3\pi}{4}<t<\frac{13\pi}{6}$. Общая запись имеет вид:

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{13\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{13\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 9. Найти на тригонометрической окружности точки: 1) ординаты которых меньше $-\frac{1}{2}$; 2) абсциссы которых больше $\frac{1}{2}$. Записать, каким числам соответствуют найденные точки.

Решение. 1) Прямая $y = -\frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках P и Q (рис. 17). Точки тригонометрической окружности, ординаты которых меньше $-\frac{1}{2}$, образуют дугу QP (на рис. она выделена жирной линией). Концы этой дуги не удовлетворяют условию, потому они изображены «выколотыми» точками. Точка P соответствует числу $-\frac{\pi}{6}$ (она симметрична точке F из примера 8 относительно оси абсцисс), а следовательно всем числам $-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. Точка Q соответствует числу $-\frac{5\pi}{6}$, а следовательно всем числам $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

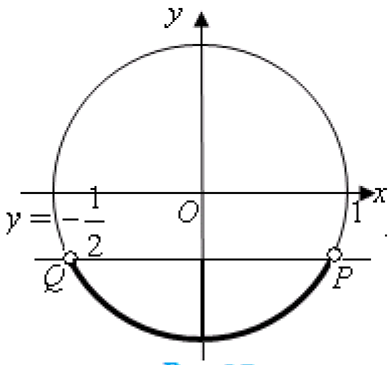


Рис.17

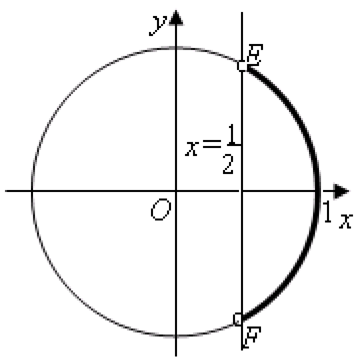


Рис. 18

Таким образом, условию удовлетворяют числа t такие, что $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n<t<-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

2) Прямая $x = \frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в точках E и F (рис. 18). Условию удовлетворяют все точки дуги EF, кроме концов. Точка E соответствует числу $\frac{\pi}{3}$ (см. пример 2), а, следовательно, всем числам $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. Точка F, симметричная точке E относительно оси x, соответствует числу $-\frac{\pi}{3}$, а, следовательно, всем числам $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. Таким обра

зом, условию удовлетворяют числа t такие, что $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n<t<-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

Вопросы для самоконтроля

1. ° Каким числам соответствуют на рис. 19:

а) середины дуг CD и DA;

б) точки P, Q, R, S, делящие дугу BC на пять равных частей?

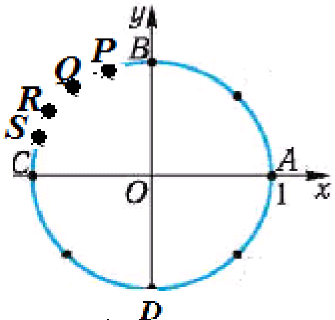


Рис. 19

2. ° На какой из дуг AB, BC, CD, DA тригонометрической окружности (рис. 19) находится точка, соответствующая числу $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$?

3. ° Чему равняется длина дуги: а) ACD на рис. 19;

б) EBF на рис. 20?

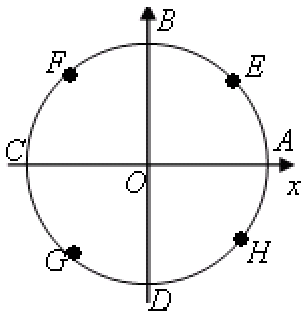


Рис. 2.0

4. ° В какой четверти тригонометрической окружности содержится точка P_t, если: а) $t=\frac{5\pi}{4}$; б) $t=-\frac{5\pi}{6}$; в) $t=5{,}3\pi$; г) $t=-2{,}9\pi$?

5. Сколько различных точек среди точек $P_{\frac{3\pi}{2}}$, $P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{-\frac{\pi}{4}}$, $P_{-\frac{7\pi}{4}}$, $P_{\frac{7\pi}{2}}$, $P_{\frac{9\pi}{4}}$?

6. На какой из дуг AB, BC, CD, DA тригонометрической окружности (рис. 19) находится точка тригонометрической окружности, соответствующая числу 1,5; 4; –3; 7?

7. Найдите числа из промежутка [0; 2π], которым на тригонометрической окружности соответствует точка с: а) ординатой 1; б) ординатой 0; в) ординатой –1; г) абсциссой 0; д) абсциссой 1; е) абсциссой –1.

8. Какие координаты имеют точки тригонометрической окружности, соответствующие числам: а) 3π; б) $\frac{19\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) 2π?

9. Как связаны между собой числа t и t', если $P_t = P_{t'}$?

10. Могут ли совпадать какие-то точки, которые соответствуют числам: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ?

11.° Каким числам соответствуют на тригонометрической окружности (рис. 20) точки:

а) E, F, G, H, делящие соответственно дуги AB, BC, CD, DA пополам;

б) делящие дуги AB, BC, CD, DA на три равные части?

Задания для самостоятельного решения

1. Изобразите на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам:

1) ° $-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$; 2) 1,5; 2,3; 4,5; –2; –6; 3) 5π; $-\frac{27\pi}{4}; \frac{7\pi}{3}; -\frac{15\pi}{2}$.

2. Найдите прямоугольные координаты точек:

1)° $P_{\frac{7\pi}{6}}, P_{\frac{3\pi}{4}}, P_{\frac{5\pi}{3}}$;

2)° $P_{-\frac{5\pi}{6}}, P_{-\frac{\pi}{4}}, P_{-\frac{2\pi}{3}}$; 3) $P_{\frac{11\pi}{6}}, P_{-\frac{5\pi}{4}}, P_{-\frac{4\pi}{3}}$; 4) $P_{-\frac{\pi}{6}}, P_{-\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{2\pi}{3}}$.

3. Найдите координаты точки тригонометрической окружности, полученной при повороте точки (1; 0) на угол:

1) ° 3π; 2) ° -2π; 3) ° $4{,}5\pi$; 4) ° $-5{,}5\pi$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 8) 225°; 9) –60°.

4. Найдите углы, на которые следует повернуть точку (1; 0) вокруг начала координат, чтобы получить точку с координатами:

1) ° $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 7) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. Изобразите на тригонометрической окружности и запишите, каким числам соответствуют точки с: 1) ординатой $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) абсциссой $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) ординатой $\frac{1}{2}$.

6. Для каждого из приведенных значений t $\left(t=\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{5}{6}\pi;\pi;\frac{4}{3}\pi;\frac{3}{2}\pi;\frac{11}{6}\pi\right)$ укажите такое значение t', чтобы точки P_t и $P_{t'}$ стали симметричными относительно: 1) начала координат; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат; 4)* прямой $y = x$; 5) * прямой $y = –x$.

7*. Числа заданы формулой: 1) $t=\frac{\pi}{2}\cdot k$, 2) $t=\pi\cdot k$, 3) $t=\frac{\pi}{4}\cdot k$, 4) $t=\frac{\pi}{2}\cdot(2k+1)$, де $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$. Изобразите на координатной прямой и на тригонометрической окружности точки, соответствующие этим числам. Сколько таких точек будет на координатной прямой и сколько на тригонометрической окружности?

8*. Найдите координаты концов дуг тригонометрической окружности, заданных формулой: 1) $t=\frac{k\pi}{3}$; 2) $t=\frac{\pi}{6}(2k+1)$; 3) $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; 4) $t=\frac{\pi}{2}\cdot k$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$).

9*. Найдите на тригонометрической окружности и запишите, каким числам соответствуют точки: 1) ординаты которых больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) абсциссы которых меньше $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь решениями примеров 1, 3, 5.

2. Воспользуйтесь решениями примеров 2, 4.

3. Укажите точки тригонометрической окружности, полученные при повороте точки (1; 0) на заданный угол и воспользуйтесь решениями заданий 1 и 2.

4. Вначале по заданным координатам укажите соответствуюшие точки.

5. Воспользуйтесь решением примера 7.

6. Воспользуйтесь тем, что точке P_t симметрична относительно: 1) начала координат точка $P_{t+\pi}$; 2) оси абсцисс точка P_{-t}; 3) оси ординат точка $P_{\pi - t}$; 4)* прямой $y = x$ точка $P_{\frac{\pi}{2}-t}$; 5) * прямой $y = -x$ точка $P_{\frac{3\pi}{2}-t}$.

7. Воспользуйтесь тем, что между действительными числами и точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие, а на тригонометрической окружности точки P_t совпадают с точками $P_{t+2\pi n}$.

8. Предварительно укажите все точки, являющиеся концами указанных дуг на тригонометрической окружности.

9. Воспользуйтесь решением примера 9.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

2. 1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **3.** 1) (–1; 0); 2) (1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; 1); 5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7) $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 9) $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{11\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{4\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$;
8) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $\frac{4\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. **6.** Например, 1) $\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; 0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{7\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; 0; \frac{5\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{4}; 0; \frac{5\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \pi; \frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{5\pi}{4}; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; 0; \frac{5\pi}{3}$. **7.** 1) Бесконечное множество и четыре; 2) бесконечное множество и две; 3) бесконечное множество и восемь; 4) бесконечное множество и две.

8. 1) $\begin{cases} (1;0) \text{ при } k=6n, \\ \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k=6n+1, \\ \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k=6n+2, \\ (-1;0) \text{ при } k=6n+3, \\ \left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k=6n+4, \\ \left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ при } k=6n+5,\ n\in Z. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right) \text{ при } k=6n, \\ (0;1) \text{ при } k=6n+1, \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right) \text{ при } k=6n+2, \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right) \text{ при } k=6n+3, \\ (0;-1) \text{ при } k=6n+4, \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right) \text{ при } k=6n+5,\ n\in Z. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k=4n, \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k=4n+1, \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k=4n+2, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } k=4n+3,\ n\in Z. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (1;0) \text{ при } k=4n, \\ (0;1) \text{ при } k=4n+1, \\ (-1;0) \text{ при } k=4n+2, \\ (0;-1) \text{ при } k=4n+3,\ n\in Z. \end{cases}$

9.1) $\frac{\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответы к вопросам для самоконтроля

1. а) $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{5};\frac{7\pi}{10};\frac{4\pi}{5};\frac{9\pi}{10}$. **2.** *CD*; *AB*: *BC*. **3**. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{2}$. **4.** а) Во 2-й; б), в), г) в 3-й. **5.** 4. **6.** *AB*, *AB*, *CD*, *AB*. **7.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; 2π; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; д) 0; е) π. **8.** а) (–1; 0); б) (0; –1); в) (0; –1); г) (1; 0). **9.** $t' = t + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **10.** Нет. **11.** а) $\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{3};\frac{11\pi}{6}$.

3. Тригонометрические функции числового аргумента

Повторяем теорию

Пусть задано произвольное число t, которое определяет точку P_t на тригонометрической окружности. Обозначим через $(x; y)$ координаты точки P_t (рис. 21).

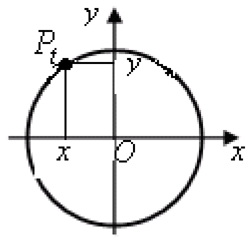


Рис. 21

Синусом числа *t* называется ордината точки P_t. $\quad$ **sin** $t = y$

Косинусом числа *t* называется абсцисса точки P_t. $\quad$ **cos** $t = x$

Тангенсом числа *t* называется отношение синуса числа *t* к его косинусу.

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{y}{x}}$$

Котангенсом числа *t* называется отношение косинуса числа *t* к его синусу.

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{x}{y}}$$

Каждому числу t отвечает единственная точка P_t тригонометрической окружности, а, следовательно, и единственные абсцисса и ордината этой точки. Собственно, именно поэтому sin t, cos t, tg t, ctg t являются функциями переменной t, которая принимает произвольные значения из множества вещественных чисел. Их называют ***тригонометрическими функциями***.

Для углов, рассматриваемых в геометрии, приведенные определения совпадают с определениями соответствующих величин в геометрии.

Знаки значений тригонометрических функций числа t определяются положением точки P_t на тригонометрической окружности.

Синус и косинус произвольного числа мы определили геометрически, но тангенс и котангенс ввели как некоторые отношения синуса и косинуса. Однако их также можно охарактеризовать геометрически.

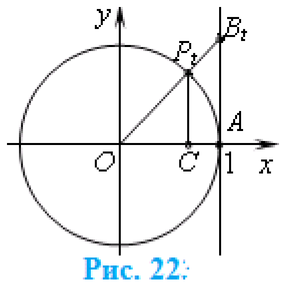


Рис. 22

Прямая, проходящая через точку A(1; 0) перпендикулярно оси абсцисс, называется линией тангенса (рис. 22).

Линия тангенсов имеет уравнение $x = 1$, ее можно считать координатной прямой с направлением и масштабом оси y и с началом в точке A.

Каждому числу $t \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \boldsymbol{Z}$, можно поставить в соответствие точку B_t на линии тангенса, которая является точкой пересечения прямой OP_t с линией тангенса. Докажем, что ордината точки B_t равняется tg t, если точка P_t находится в I четверти.

Из подобия треугольников OP_tC и OB_tA имеем: $\frac{P_tC}{OC} = \frac{AB_t}{OA}$, или $\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{AB_t}{1}$, $\operatorname{tg} t = AB_t$.

Этот вывод остаётся справедливым и тогда, когда точка P_t содержится не в первой четверти тригонометрической окружности. Предлагаем убедиться в этом самостоятельно.

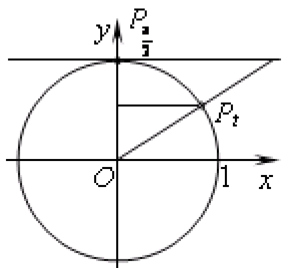


Рис. 23

Прямая, проходящая через точку $P_{\frac{\pi}{2}}$ перпендикулярно оси ординат, называется линией котангенса (рис. 23).

Линия котангенсов имеет уравнение $y = 1$, ее также можно считать координатной прямой с направлением и масштабом оси x и с началом в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$.

Докажите самостоятельно, что абсцисса точки пересечения прямой OP_t с линией котангенса равняется ctg t.

Решаем

Пример 1. Найти значения тригонометрических функций чисел $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

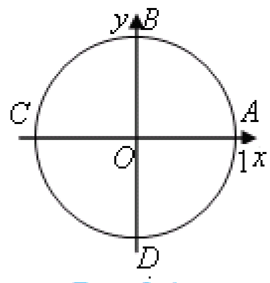


Рис. 24

Решение. Для решения задачи необходимо найти прямоугольные координаты точек тригонометрической окружности, соответствующих указанным числам, то есть точек $A = P_0 = P_{2\pi}, B = P_{\frac{\pi}{2}}, C = P_{\pi}, D = P_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 24). Учитывая, что радиус тригонометрической окружности равен 1, имеем: $P_0(1; 0), P_{\frac{\pi}{2}}(0; 1), P_{\pi}(-1; 0), P_{\frac{3\pi}{2}}(0; -1)$. Следовательно,

$$\sin 0 = \sin 2\pi = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\pi = 0, \sin\frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$\cos 0 = \cos 2\pi = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos\pi = -1, \cos\frac{3\pi}{2} = 0,$$

$$\mathrm{tg}0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 = \mathrm{tg}\pi = \mathrm{tg}2\pi, \ \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}, \mathrm{tg}\frac{3\pi}{2} \text{ не существуют.}$$

Аналогично $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0 = \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}, \mathrm{ctg}0, \mathrm{ctg}\pi$ не существуют, ибо на нуль делить нельзя. ■

Пример 2. Найти значения тригонометрических функций числа $\frac{5\pi}{6}$.

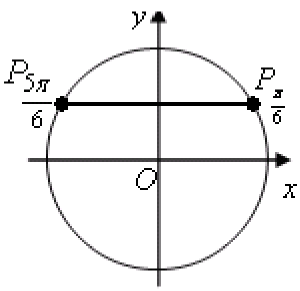


Рис. 2 5

Решение. Необходимо сначала найти прямоугольные координаты точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$. По модулю они совпадают с координатами точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 25). Применяя соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, получим, что $P_{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $P_{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (см. пример 4 предыдущего пункта). Поэтому, учитывая определения синуса и косинуса произвольного числа, получим:

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}; \ \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \ \mathrm{tg}\frac{5\pi}{6} = \frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \mathrm{ctg}\frac{5\pi}{6} = \frac{\cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{3}.$

Пример 3. Определить знаки чисел: sin 20°; cos 130°; tg 214°; ctg 356°.

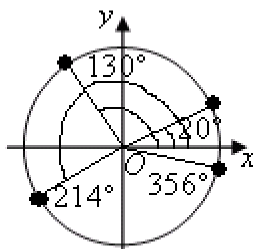


Рис. 2.6

Решение. Построим на тригонометрической окружности точки, соответствующие углам вращения на 20°; 130°; 214°; 356° (рис. 26). Далее, воспользовавшись определениями тригонометрических функций, будем иметь: sin20° > 0,

$\cos 130° < 0$, $\operatorname{tg} 214° = \dfrac{\sin 214°}{\cos 214°} > 0$, $\operatorname{ctg} 356° = \dfrac{\cos 356°}{\sin 356°} < 0$. ■

Пример 4. Изобразить на тригонометрической окружности точки P_t, если: 1) $\operatorname{tg} t = 2$; 2) $\operatorname{tg} t = -0{,}5$; 3) $\operatorname{ctg} t = 1{,}5$.

Решение. 1) Отложим на линии тангенсов в положительном направлении отрезок, равный 2 (напомним, что радиус окружности равняется 1). Через полученную точку и центр тригонометрической окружности проведем прямую. Точки F и F_1 пересечения этой прямой с окружностью и будут искомыми (рис. 27 а).

2) В отрицательном направлении линии тангенса отложим отрезок длиной 0,5. Далее задача решается аналогично предыдущей. Точки G и G_1 являются искомыми (рис. 27 а).

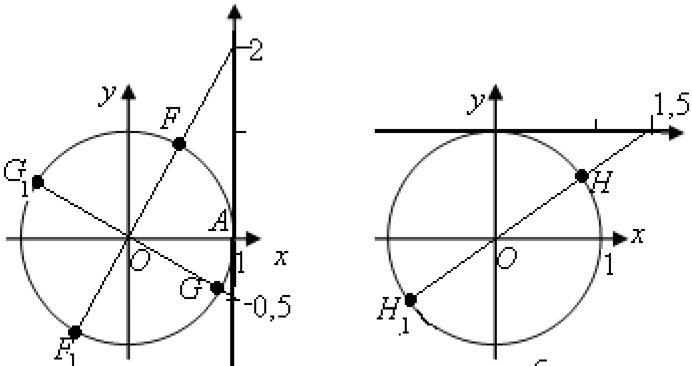


Рис. 2 7

3) Отрезок длиной 1,5 откладываем в положительном направлении линии котангенса. Далее задача решается аналогично заданию 1). Точки H и H_1 являются искомыми (рис. 27 б). ■

Пример 5. Расположить по возрастанию числа:

1) $\cos\dfrac{\pi}{8}, \cos\dfrac{5\pi}{7}, \cos\dfrac{10\pi}{9}, \cos\dfrac{5\pi}{3}$; 2) sin2, sin3, sin4, sin 5.

Решение. 1) Изобразим на тригонометрической окружности точки $P_{\frac{\pi}{8}}, P_{\frac{5\pi}{7}}, P_{\frac{10\pi}{9}}, P_{\frac{5\pi}{3}}$ (рис. 28). При этом следует иметь в виду, что $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{5\pi}{7} < \pi, \pi < \dfrac{10\pi}{9} < \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} < \dfrac{5\pi}{3} < 2\pi, 0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{6}$.

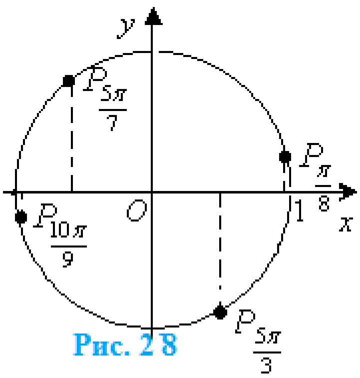


Рис. 2 8

Учитывая, что косинус числа t — это абсцисса точки P_t, будем иметь: $\cos\dfrac{10\pi}{9} < \cos\dfrac{5\pi}{7} < \cos\dfrac{5\pi}{3} < \cos\dfrac{\pi}{8}$.

2) Изобразим на тригонометрической окружности точки P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 29). Видим, что ординаты точек P_4 и P_5 отрицательны, но ордината точки P_5 больше по модулю, поэтому она является наименьшей среди ординат четырех точек. Ординаты точек P_2 и P_3 положительны, причем, ордината точки P_2 больше, поэтому она является наибольшей среди ординат четырех точек. Следовательно, sin5 < sin4 < sin3 < sin 2.

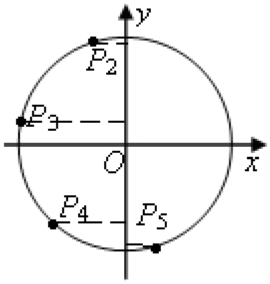


Рис. 29

Ответ: 1) $\cos\frac{10\pi}{9}<\cos\frac{5\pi}{7}<\cos\frac{5\pi}{3}<\cos\frac{\pi}{8}$; 2) sin5 < sin4 < sin3 < sin 2.

Пример 6. Найти все значения t, удовлетворяющие условию:

1) $\sin t=-1$; 2) $\cos t=\frac{1}{2}$.

Решение. 1) По определению, $\sin t$ равняется ординате точки P_t тригонометрической окружности. Ординату –1 имеет единственная точка D тригонометрической окружности на рис. 30. Этой точке соответствуют числа $\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$, и только они.

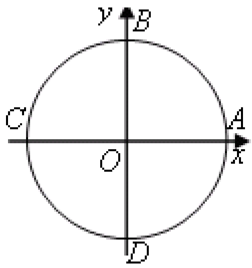


Рис. 30

2) Речь идет, в первую очередь, об отыскании точек с абсциссой $\frac{1}{2}$. Прямая $x=\frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках E и F (рис. 31). Длины дуг AE и AF составляют две трети длин дуг AB и DA, а поэтому эти точки соответствуют числам $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$. Следовательно, $E=P_{\frac{\pi}{3}}, F=P_{-\frac{\pi}{3}}$. Таким образом, равенству $\cos t=\frac{1}{2}$ удовлетворяют серии чисел:

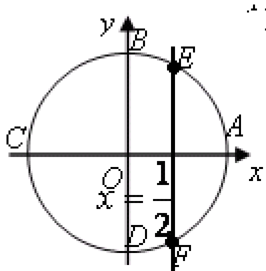


Рис. 31

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z},\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$, $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Найти все числа t, удовлетворяющие условию $\cos t = 0$ и принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$.

Решение. Сначала необходимо найти на тригонометрической окружности точки, абсциссы которых равны нулю. Таких точек две: $P_{\frac{\pi}{2}}$ и $P_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 32). Числа $t_1 = \frac{\pi}{2}$ и $t_2 = \frac{3\pi}{2}$

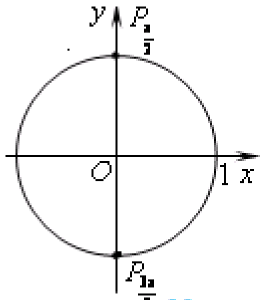


Рис. 32

удовлетворяют условию $\cos t = 0$ и принадлежат промежутку $[0;2\pi]$.

Каждая из точек $P_{\frac{\pi}{2}}$ и $P_{\frac{3\pi}{2}}$ соответствует бесконечному множеству чисел, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Таким образом, серии чисел

$$t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}; \qquad t_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

удовлетворяют условию $\cos t = 0$ и принадлежат промежутку $(-\infty; \infty)$. Поскольку $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$, то $t_2 = \frac{\pi}{2} + \pi(2k+1)$. Полученные две серии чисел можна записать так: $t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. При $n = 2k$ имеем первую серию, при $n = 2k+1$ — вторую.

Из найденных выше чисел нужно выбрать те, которые содержатся в промежутке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$. Для этого решаем относительно n неравенство:

$$-\frac{7\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} + \pi n \le \frac{11\pi}{4}.$$

Имеем: $-\frac{9}{4} \le n \le \frac{9}{4}$, то есть n принимает целые значения –2; –1; 0; 1; 2. Следовательно, подставив эти значения n в формулу $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, найдем искомые значения t: $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

Пример 8. Найти все числа, удовлетворяющие условию:

1) $\sin t > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin t \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. 1) Решение задания сводится к нахождению на тригонометрической окружности всех точек, имеющих ординату, большую $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, и записи всех чисел t, которым соответствуют эти точки. Для этого проведем прямую $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Она пересекает тригонометрическую окружность в точках E и F (рис. 33). Условию удовлетворяют числа, соответствующие тем точкам тригонометрической окружности, которые лежат выше этой прямой (эти точки изображены жирной линией). Речь идет о точках дуги, началом которой является точка E, а концом — точка F. Конечные точки не удовлетворяют условию, поэтому на рисунке они изображены "выколотыми". Точка E соответствует числу $\dfrac{\pi}{4}$, а точка F — числу $\dfrac{3\pi}{4}$ (напомним, что точка E делит дугу AB пополам, а точка F — дугу BC пополам). Имеем: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Эта запись означает объединение промежутков: $\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\pi; \dfrac{3\pi}{4} - 2\pi\right), \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right), \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\right), \ldots,$ то есть промежутков $\left(-\dfrac{7\pi}{4}; -\dfrac{5\pi}{4}\right), \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right), \left(\dfrac{9\pi}{4}; \dfrac{11\pi}{4}\right), \ldots$.

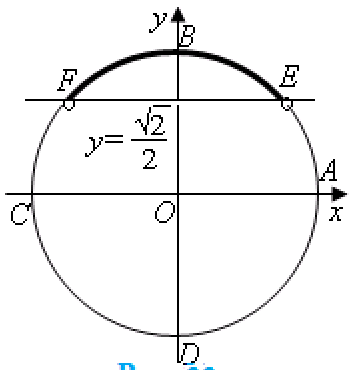


Рис. 33

2) Для решения задания проведем прямую $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Она пересекает тригонометрическую окружность в точках M и N (рис. 34). Точка M является серединой дуги CD, а точка N — серединой дуги

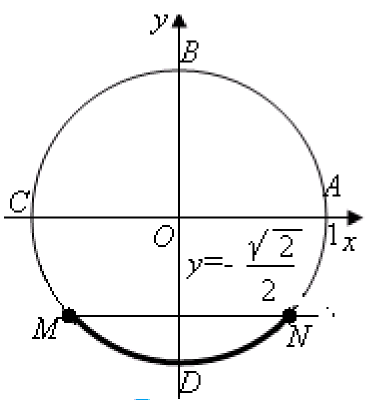


Рис. 34

DA. Поэтому они соответствуют числам $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$. Заданному условию удовлетворяет объединение промежутков $\frac{5\pi}{4}+2\pi n \le t \le \frac{7\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n < t < \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}+2\pi n \le t \le \frac{7\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Вопросы для самоконтроля

1. ° Может ли синус некоторого числа равняться $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}$?

2. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать: а) ° $\sin t$; б) ° $\cos t$; в) $\operatorname{tg} t$?

3. ° Возможно ли равенство $1 + \cos t = 3$?

4. Сколько чисел t, удовлетворяющих условию $\cos t = 1$, содержатся в промежутке $[0; 200]$?

5. Всегда ли существует на промежутке $[0; \pi]$ число, удовлетворяющее условию $\operatorname{tg} t = a$, где a — произвольное вещественное число?

6. Сколько чисел t, удовлетворяющих условию $|\sin t| = 0{,}4$, содержится в промежутке $[0; 2\pi]$?

7. Верно ли, что числам $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$ соответствует одна и та же точка на линии тангенсов?

8. Имеется ли точка на линии котангенсов, которая соответствует числу 5π?

9. Существуют ли на промежутке $[0; \pi]$ числа, удовлетворяющие условию $\sin t = –0{,}1$?

10. Каким числам нельзя поставить в соответствие точку на линии котангенса?

11. Верно ли, что $\sin(–3) > \sin 4$?

12. Какие числа удовлетворяют условию: 1) $\sin t \ge 1$; 2) $\sin t \le 1$; 3) $\cos t \le –1$; 4) $\cos t \ge –1$?

13. Какой знак имеет сумма $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, якщо α,β,γ — углы треугольника?

Задачи для самостоятельного решения

1°. Даны координаты точки P_t на тригонометрической окружности. Вычислите $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$: 1) $\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$; 2) $\left(-\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

2°. Вычислите значения тригонометрических функций чисел:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{4}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$; 5) $\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{5\pi}{3}$.

3°. Определите знаки тригонометрических функций $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ для t, равных: 1) $\frac{7\pi}{6}$; 2) $-\frac{5\pi}{3}$; 3) $\frac{12\pi}{7}$; 4) $-\frac{7\pi}{6}$; 5) $-\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{7\pi}{9}$; 7) $\frac{13\pi}{6}$.

4°. Вычислите:

1) $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi-2\operatorname{tg}2\pi+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\frac{3\pi}{2}+\cos3\pi-2\operatorname{tg}\pi+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

3) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{3\pi}{2}-2\operatorname{tg}0+\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{tg}3\pi+\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$.

5. Изобразите на тригонометрической окружности точки P_t, если:

1) $\operatorname{ctg} t = 1$; 2) $\operatorname{ctg} t = 2$; 3) $\operatorname{ctg} t = -0{,}5$; 4) $\operatorname{tg} t = 1{,}5$; 5) $\operatorname{tg} t = -1$.

6. Найдите все числа из промежутка $[0; 2\pi]$, удовлетворяющие условию:

1) $\sin t = 0$; 2) $\cos t = 1$; 3) $\operatorname{tg} t = 0$;

4) $\cos t = -1$; 5) $\operatorname{ctg} t = 0$; 6) $\sin t = -1$.

7. Найдите все числа, удовлетворяющие условию: 1) $\cos t = \frac{1}{2}$; 2) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8*. Найдите все числа, принадлежащие интервалу $\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{10\pi}{3}\right)$ и удовлетворяющие условию: 1) $\sin t = -1$; 2) $\sin t = 0$; 3) $\sin t = 1$; 4) $\cos t = 0$; 5) $\cos t = 1$; 6) $\cos t = -1$.

9*. Найдите все числа, удовлетворяющие условию: 1) $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos t \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos t \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin t \ge -\frac{1}{2}$.

10*. Выразите с помощью одной формулы серии углов ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$):

1) $t = \pi k + \frac{2\pi}{3}, \quad t = \pi k + \frac{\pi}{6}$; 2) $t = \pi k, \quad t = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$;

3) $t = \pi(2k+1), \quad t = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 4) $t = \frac{\pi k}{4}, \quad t = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.

11*. Удалите из следующих формул ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$) повторяющиеся углы:

1) $t = \frac{\pi k}{2}, \quad t = \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{6}$; 2) $t = \frac{\pi k}{2}, \quad t = \frac{\pi k}{5}$; 3) $t = \frac{\pi k}{4}, \quad t = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь определениями тригонометрических функций числа.

2. Вопользуйтесь решением примера 2.

3. Вопользуйтесь решением примера 3.

4. Воспользуйтесь результатами решения примера 1.

5. Вопользуйтесь решением примера 4.

6. Воспользовавшись решением примера 6, выберите значения, удовлетворяющие указанному промежутку.

7. По указанным абсциссе или ординате числа укажите эти числа.

8. Вопользуйтесь решением примера 7.

9. Вопользуйтесь решением примера 8.

10. Можно предварительно найти значения углов при указанных значениях k, а затем попытаться записать их общий вид.

11. Можно предварительно найти значения углов при указанных значениях k, затем удалить повторяющиеся значения и, наконец, попытаться записать общий вид оставшихся значений.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}$; 2) $\frac{12}{13}; -\frac{5}{13}; -\frac{12}{5}; -\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{3}$;

4) $\frac{\sqrt{7}}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{7}}{3}; \frac{3}{\sqrt{7}}.$

3.

Число / Функция	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{12\pi}{7}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{6}$
sin	–	+	–	–	+	+	+
cos	–	+	+	–	–	–	+
tg	+	+	–	+	–	–	+
ctg	+	+	–	+	–	–	+

4. 1) 0; 2) –2; 3) –1; 4) 1. **6.** 1) $0; \pi; 2\pi$; 2) $0; 2\pi$; 3) $0; \pi; 2\pi$; 4) π;

5) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; 6) $\frac{3\pi}{2}$. **7.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n, -\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

8. 1) $-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; 2) $-\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$; 5) $0; 2\pi$; 6) $-\pi; \pi; 3\pi$.

9. 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n < t < \frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi n < t < \frac{11\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$;

3) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n \le t \le \frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$;

5) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n \le t \le \frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

10. 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{3}, n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}(2n+1),\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{4}, n\in \boldsymbol{Z}$.

11. 1) $\frac{\pi n}{2}, \pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi n}{5}, n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}, n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответы к вопросам для самоконтроля

1. Нет; да. **2.** а), б) 1 и –1; в) не существуют. **3.** Нет. **4.** 32. **5.** Да. **6.** 4. **7.** Да. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** $n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11**. Да. **12.** 1 $t=\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $t\in \boldsymbol{R}$; 3) $t=\pi+2n\pi, n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $t\in \boldsymbol{R}$. **13.** +.

4. Основные соотношения между тригонометрическими функциями

Повторяем теорию

Найдем связь между синусом и косинусом одного и того же аргумента. Пусть $P_t(x(t);\ y(t))$ — точка тригонометрической окружности, соответствующая числу t (рис. 35). Тогда, по определению синуса и косинуса, имеют место следующие равенства:

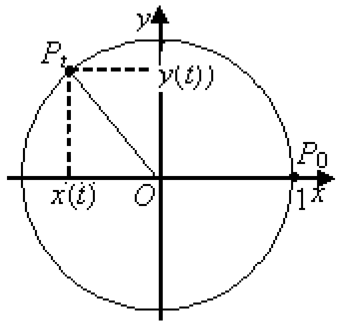


Рис. 35

$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t.$$

Так как точка P_t лежит на тригонометрической окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$. Поэтому для произвольного t выполняется равенство:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Это равенство называется ***основным тригонометрическим тождеством***.

К основным соотношениям между тригонометрическими функциями одного аргумента относят также равенства:

$$\mathrm{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \mathrm{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Из приведенных выше равенств вытекают другие зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\mathrm{tg} t \cdot \mathrm{ctg} t = 1, \qquad 1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Первое из этих соотношений является простым следствием определений тангенса и котангенса. Докажем второе. Имеем: $1 + tg^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$. Третье соотношение выводится аналогично. Рекомендуем сделать это самостоятельно.

Приведенные соотношения позволяют по значению одной из тригонометрических функций числа *t* вычислять квадраты значений других.

Например, если $\cos t = \frac{1}{3}$, **то** $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. **Для нахождения самих значений нужна дополнительная информация, которая бы позволяла устанавливать их знаки.**

В предыдущем параграфе рассматривались примеры, где приходилось определять знаки значений тригонометрических функций, пользуясь их определениями. Обобщим эти рассуждения, установив, при каких значениях аргумента тригонометрические функции принимают положительные значения, а при каких — отрицательные.

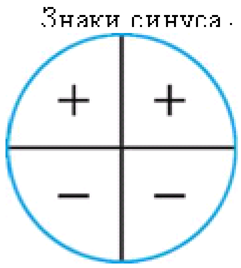


Рис. 36

Синус числа t — это ордината точки P_t (см. рис. 35). Положительными являются ординаты тех точек, которые расположены над осью абсцисс, то есть находятся в первой или во второй четверти. Если точка P_t расположена под осью абсцисс, то есть в третьей или в четвертой четверти, то ее ордината отрицательна (рис. 36).

Свойство 1. Синус числа *t* принимает положительные значения, если точка P_t находится в первой и второй четвертях, а отрицательные — если в третьей и четвертой.

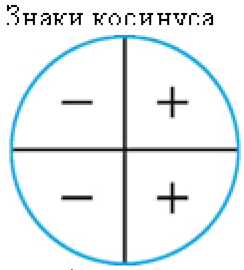


Рис. 37

Косинус числа t — это абсцисса точки P_t. Положительными являются абсциссы тех точек, которые расположены правее оси ординат, то есть находятся в первой или в четвертой четверти. Если точка P_t расположена левее оси ординат, то есть во второй или в третьей четверти, то ее абсцисса отрицательна (рис. 37).

Свойство 2. Косинус числа *t* принимает положительные значения, если точка P_t находится в первой и четвертой четвертях, а отрицательные — если во второй и третьей.

Согласно определению, $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, поэтому tg t и ctg t принимают положительные значения, если sin t и cos t имеют одинаковые знаки. Соответственно, tg t и ctg t принимают отрицательные значения, если sin t и cos$t$ имеют различные знаки (рис. 38).

Свойство 3. Тангенс и котангенс числа t принимают положительные значения, если точка P_t находится в первой и третьей четвертях, а отрицательные — если во второй и четвертой.

Знаки тангенса и котангенса

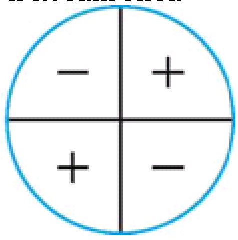


Рис. 38

Решаем

Пример 1. Определить знаки чисел: 1) $\sin\frac{5\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$.

Решение. 1) Определим сначала, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, которая соответствует числу $\frac{5\pi}{7}$. Поскольку $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{7}<\pi$, то числу $\frac{5\pi}{7}$ соответствует точка, находящаяся во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{5\pi}{7} > 0$.

2) Поскольку $\frac{3\pi}{2}<\frac{7\pi}{4}<2\pi$, то точка $P_{\frac{7\pi}{4}}$ расположена в четвертой четверти и $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} < 0$.

Ответ: 1) $\sin\frac{5\pi}{7} > 0$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} < 0$.

Пример 2. Определить знаки чисел: sin2; cos3; tg4; ctg5.

Решение.Пользуясь соотношениями

$\frac{\pi}{2}<2<\pi, \frac{\pi}{2}<3<\pi, \pi<4<\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}<5<2\pi$, отметим на тригонометрической окружности точки P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 39). Учитывая, что sin 2 — это ордината точки P_2, то приходим к выводу, что $\sin 2 > 0$. Поскольку cos 3 — это абсцисса точки P_3, то $\cos 3 < 0$. Знаки tg4 и ctg 5 определим, пользуясь определениями тангенса и котангенса: $\operatorname{tg}4=\frac{\sin 4}{\cos 4} > 0$, так как $\sin4 < 0$, $\cos4 < 0$,

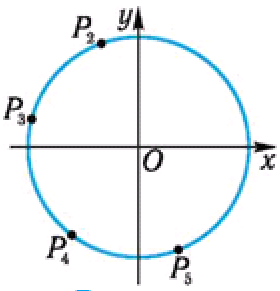


Рис.39

$\operatorname{ctg}5=\frac{\cos 5}{\sin 5}<0$, ибо $\sin5 < 0$, $\cos4 > 0$.

Ответ: $\sin2 > 0$; $\cos3 < 0$; $\operatorname{tg}4 > 0$; $\operatorname{ctg}5 < 0$.

Пример 3. Известно, что $\sin t = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти $\cos t$, $\mathrm{tg}\, t$, $\mathrm{ctg}\, t$.

Решение. Из тождества $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ находим:

$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - (0{,}8)^2 = 0{,}36$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то точка P_t расположена во второй четверти и $\cos t < 0$. Поэтому $\cos t = -0{,}6$; $\mathrm{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{4}{3}$;

$\mathrm{ctgt} = \frac{1}{\mathrm{tg} t} = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $-0{,}6; -\frac{4}{3}; \; -\frac{3}{4}$.

Пример 4. Упростить выражение $\sin^2\alpha - \left(\mathrm{tg}^2\alpha + 1\right)\cos^2\alpha$.

Решение. Применяя последовательно равенство $1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ и основное тригонометрическое тождество, будем иметь:

$$\sin^2\alpha - \left(\mathrm{tg}^2\alpha + 1\right)\cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha.$$

Ответ: $-\cos^2\alpha$.

Пример 5. Доказать тождество: $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 2\mathrm{ctg}\alpha$.

Решение. Преобразуем левую часть тождества. Приведя дроби к общему знаменателю, применяя основное тригонометрическое тождество, будем иметь:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 2\mathrm{ctg}\alpha,$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 6. Вычислить значение выражения $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1-\cos\alpha}$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha > 0$.

Решение. Сначала определим, в какой четверти находится угол α. Поскольку синус этого угла отрицателен, а котангенс — положителен, то угол α содержится в третьей четверти. С помощью основного тригонометрического тождества найдем значение $\cos^2\alpha$:

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

Поскольку в третьей четверти косинус принимает отрицательные значения, то $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. По определению тангенса найдём значение tgα: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Подставим найденные значения в данное выражение:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}:\left(1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = \frac{2\cdot 3}{\sqrt{5}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{6\cdot\sqrt{5}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)}{5\cdot(9-5)} = \frac{3\left(3\sqrt{5}-5\right)}{10}.$$

Ответ: $\frac{3\left(3\sqrt{5}-5\right)}{10}$.

Пример 7. Доказать тождество:

$$\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha) = \sin\alpha+\cos\alpha\,.$$

Решение. Заменим в левой части tgα и ctgα выражениями из их определений и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha) = \sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= \sin^3\alpha\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \sin^2\alpha\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)+$$

$$+\cos^2\alpha\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right) = \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right) = \sin\alpha+\cos\alpha.\ \blacksquare$$

Вопросы для самоконтроля

1. ° Какому равенству удовлетворяют координаты (x; y) точек тригонометрической окружности?

2. ° Дана точка $P_t\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ на тригонометрической окружности. Чему равняется:

а) sin*t;* б) cos *t;* в) tg *t;* г) ctg *t*?

3. Могут ли синус и косинус одного и того же аргумента равняться соответственно: а) ° 0 и 0; б) ° 1 и 0; в) ° 1 и –1; г) 0,6 и 0,8; д) 0,5 и 0,5; е) –0,4 и 0,7; ж) $\frac{12}{13}$ и $\frac{5}{13}$; з) * a и $\frac{1}{a}$?

4. Верно ли, что cos t = 0,6, если sin$t$ = 0,8?

5. Могут ли тангенс м котангенс одного и того же аргумента равняться соответственно: а) 1 и 0; б) 1 и 1; в) 1 и –1; г) $\sqrt{3}$ и $\frac{1}{3}$; д) $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$; е) $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$?

6. Верно ли, что $\mathrm{tg}t=\sqrt{3}-1$, если $\mathrm{ctg}t=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$?

7. Для каких точек P_t тригонометрической окружности имеют одинаковые знаки: а) sin$t$ и cos t; б) cos t и tg t?

8. Где расположена точка P_t на тригонометрической окружности, если:

а) ° sin t < 0; б) ° tg t > 0; в) cos 2t > 0; г) sin t cos t > 0; д) $\frac{\mathrm{tg}t}{\cos t}<0$; е) |sin t| = sin t; ж) |cos t| = – cos t?

9. Значения каких тригонометрических функций углов треугольника могут быть отрицательными?

10. Известно, что cos α = 0,5. Чему равняется sin α, если α — угол треугольника?

11. * Чему равняется cos t, если $\sin t=-\sqrt{1-a^2}$?

12. * Какой знак имеет tg(sin t) при – 1 ≤ t ≤ 1?

Задания для самостоятельного решения

1. Определите знаки выражений:

1) ° sin 55°; 2) ° cos 173°; 3) ° tg 127° sin 239°; 4) ° $\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{7}\mathrm{tg}\frac{2\pi}{9}$;

5) $\sin 2\cdot\cos 1\cdot\mathrm{tg}(-3)$; 6) * $\cos\frac{4\pi}{5}\mathrm{tg}\frac{5\pi}{9}\sin t$.

2. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Определите знак числа:

1) $\circ\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\circ\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\sin(2\alpha-\pi)$; 4) $\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$;

5) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$; 7) $\cos(\pi-\alpha)$; 8) $\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. Вычислите значение каждой из тригонометрических функций, если:

1) $\circ\cos t=0{,}8;\ \frac{3\pi}{2}<t<2\pi$; 2) $\circ\sin t=-\frac{12}{13};\ \pi<t<\frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}t=-2{,}4;\ \frac{\pi}{2}<t<\pi$; 4) $\operatorname{ctg}t=3;\ 0<t<\frac{\pi}{2}$;

5) $\circ\sin t=-0{,}6;\ \frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}$; 6) $\circ\cos t=\frac{5}{13};\ \pi<t<2\pi$;

7) $\operatorname{tg}t=-\frac{4}{3};\ 0<t<\pi$; 8) $\operatorname{ctg}t=2;\ \frac{3\pi}{2}<t<\frac{5\pi}{2}$.

4. Найдите координаты точки P_t на тригонометрической окружности, если:

1) $\operatorname{tg}t=-\frac{5}{12}$; 2) $\operatorname{ctg}t=-\frac{4}{3}$; 3) $\operatorname{tg}t=2+\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}t=1+\sqrt{2}$.

5. Вычислите:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\cos\alpha}$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg}\alpha>0$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha}$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\operatorname{ctg}\alpha<0$.

6. Известно, что tgα = 3. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha+3\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$; 5) $\frac{\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 6) $\frac{2-\sin^2\alpha}{3+\cos^2\alpha}$.

7. Упростите выражение:

1) $\circ\ \frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$; 2) $\circ\ \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha$; 3) $\circ\ \cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$;

4) $\circ\ \cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; 5) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 6) $\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

7) $\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; 8) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;

9) * $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; 10) * $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$; 11) * $\sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha}}$.

8. Докажите тождество:

1) ° $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$; 2) ° $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$;

3) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$; 4) $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

5) $\sin^3\alpha\left(1+\mathrm{ctg}\alpha\right)+\cos^3\alpha\left(1+\mathrm{tg}\alpha\right)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

6) $\dfrac{1}{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^2\alpha$;

7) * $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

9. Дано $\cos\alpha+\sin\alpha=1{,}3$. Найдите:

1) $\cos\alpha\sin\alpha$; 2) $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha$; 3) * $\cos\alpha-\sin\alpha$; 4) * $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

10. Сумма тангенса и котангенса некоторого числа равна 3. Найдите:

1) сумму их квадратов; 2) сумму их кубов;

3) сумму их четвёртых степеней; 4) * их разность.

11. Вычислите: 1) $\dfrac{\sin t+\cos t}{\sin t-\cos t}$, если $\sin t\cdot\cos t=0{,}48$;

2) $\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}+\mathrm{ctg}^2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=4$.

12. Докажите неравенство: 1) $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha\geq 2$, $\mathrm{tg}\alpha>0$; 2) $\mathrm{tg}^2\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\,\alpha\geq 2$.

При каких значениях α в каждом из этих неравенств имеет место равенство?

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь свойствами 1, 2, 3. **2.** Предварительно найдите четверть тригонометрической окружности, в которой расположена точка, соответствующая аргументу функции. **3.** Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством и следствиями из него, учитывайте указанные промежутки. **4.** Воспользуйтесь следствиями из основного тригонометрического тождества, рассмотрите всевозможные случаи для знаков координат. **5.** Воспользуйтесь решением примера 6. **6.** 1) Выразите котангенс через тангенс. 2), 3) разделите числитель и знаменатель на $\cos\alpha$; 4) – 6) разделите числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha$. **7.** Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством и следствиями из него. **8.** Преобразуйте левую часть равенства, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством и следствиями из него; в 7) примените формулу суммы кубов двух выражений. **9.** 1) Возведите обе части данного равенства в квадрат; 2) возведите обе части искомого равенства в куб; 3) возведите обе части искомого равенства в квадрат и примените результат решения задания 1); 4) примените определения тангенса и котангенса, приведите дроби к общему знаменателю и примените результаты решения предыдущих заданий. **10.** 1), 2) 3) Возведите искомые выражения в указанную степень; 4) возведите искомое выражение в квадрат и примените результат решения задания 1). В заданиях 3) и 4) рассмотрите всевозможные случаи. **11.** 1) Предварительно найдите квадрат искомого выражения; 2) возведите обе части данного равенства в квадрат. **12.** Воспользуйтесь оценкой суммы двух взаимно обратных положительных выражений.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) +; 2) –; 3) +; 4) –; 5) +; 6) +, если $\frac{\pi}{2}+2\pi n<t<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ и –, если $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<t<\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **2.** 1) +; 2) –; 3) –; 4) +; 5) –; 6) –; 7) –; 8) –. **3.** 1) $\sin t=$ $-0{,}6$; $\operatorname{tg} t=-0{,}75$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{4}{3}$;

2) $\cos t=-\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} t=2{,}4$; $\operatorname{ctg} t=\frac{5}{12}$; 3) $\cos t=-\frac{5}{13}$; $\sin t=\frac{12}{13}$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{5}{12}$;

4) $\cos t=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin t=\frac{1}{\sqrt{10}}$; $tgt=\frac{1}{3}$; 5) $\cos t=-0{,}8$; $\operatorname{tg} t=0{,}75$; $\operatorname{ctg} t=\frac{4}{3}$;

6) $\sin t=-\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t=-2{,}4$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{5}{12}$; 7) $\cos t=-\frac{3}{5}$; $\sin t=\frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{3}{4}$;

8) $\cos t=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin t=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg} t=\frac{1}{2}$. **4.** 1) $\left(\frac{12}{13};-\frac{5}{13}\right)$ или $\left(-\frac{12}{13};\frac{5}{13}\right)$; 2) $\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ или $\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$ или $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$ или $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. **5.** 1) $\frac{6}{5+3\sqrt{5}}$; 2) $-\frac{12}{7+4\sqrt{7}}$.

6. 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{9}{4}$; 4) $\frac{2}{5}$; 5) $-\frac{7}{2}$; 6) $\frac{11}{31}$. **7.** 1) $-ctg^2\alpha$; 2) 0; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) 0; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; 6) $\mathrm{ctg}^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha$; 8) $\sin\alpha$, если $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$ и $-\sin\alpha$, если $\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 9) $\cos\alpha$, если $2\pi n<\alpha<\pi+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$ и $-\cos\alpha$, если $\pi+2\pi n<\alpha<2\pi+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 10) $\mathrm{tg}\alpha$; 11) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **9.** 1) 0,345; 2) 0,8515; 3) $\sqrt{0{,}31}$ или $-\sqrt{0{,}31}$; 4) ≈ 1,05 или ≈ – 1,05. **10.** 1) 7; 2) 18; 3) 47; 4) $\sqrt{5}$ или $-\sqrt{5}$. **11.** 1) 7 или – 7; 2) 18. **12.** 1) $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. .$x^2+y^2=1$. **2.** а) $\frac{4}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $-\frac{4}{3}$; г) $-\frac{3}{4}$. **3.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) нет; ж) да; з) нет. **4.** Нет. **5.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет. **6.** Да. **7.** а) $t\in\left(\pi n,\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in\boldsymbol{Z}$; б) $t\in(2\pi n,\pi(2n+1)), n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** а) В 3-й или 4-й четверти; б) в 1-й или 3-й четверти; в) $t\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n,\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in\boldsymbol{Z}$; г) в 1-й или 3-й четверти; д) в 3-й или 4-й четверти; е) в 1-й или 2-й четверти; ж) во 2-й или 3-й четверти. **9.** Значения косинуса, тангенса и котангенса. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.** *a* или –*a*. **12.** Если $-1\le t<0$. то –, если $0<t\le 1$, то +; если $t=0$, то 0.

5. Формулы приведения

Существуют формулы, которые сводят вычисление значений тригонометрических функций для произвольного аргумента к вычислению их значений на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Эти формулы называют ***формулами приведения***.

Формулы приведения базируются на определениях тригонометрических функций и свойствах геометрических преобразований — поворотов. Рассмотрим на тригонометрической окружности точку P_t (рис. 40). Точку $P_{t+\pi}$ можно получить из точки P_t поворотом на угол π. Поэтому точки P_t и $P_{t+\pi}$ симметричны относительно начала координат. Их координаты — противоположные числа. Следовательно, имеют место следующие формулы:

$$\cos(\pi + t) = -\cos t; \quad \sin(\pi + t) = -\sin t.$$

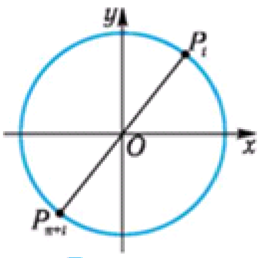


Рис. 40

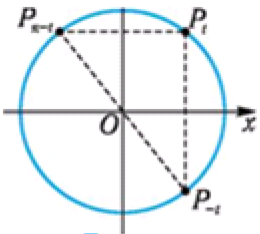


Рис. 41

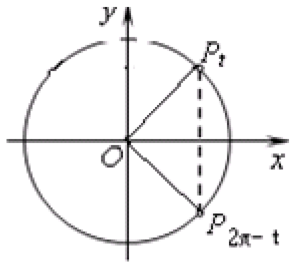


Рис. 42

Точки P_t, $P_{\pi-t}$ симметричны относительно оси ординат (рис. 41). Они имеют одинаковые ординаты и противоположные абсциссы. Это вытекает из того, что точки P_t и P_{-t} симметричны относительно оси абсцисс, а точки P_{-t} и $P_{\pi-t}$ симметричны относительно начала координат. Поэтому справедливы следующие формулы: $\cos(\pi - t) = -\cos t; \quad \sin(\pi - t) = \sin t$.

Точки P_{-t} и $P_{2\pi-t}$ совпадают (2π — полный оборот!) (рис. 42), поэтому точки P_t и $P_{2\pi-t}$ симметричны относительно оси абсцисс, у них одинаковые абсциссы и противоположные ординаты. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\cos(2\pi - t) = \cos t; \quad \sin(2\pi - t) = -\sin t.$$

Так как точки P_t и $P_{2\pi+t}$ совпадают, то имеют место следующие формулы:

$$\cos(2\pi + t) = \cos t; \quad \sin(2\pi + t) = \sin t.$$

Основной особенностью приведенной группы формул является то, что в каждой из них участвует лишь одна тригонометрическая функция. Существует еще одна группа формул приведения для синуса и косинуса. Она отличается тем, что в каждой из них содержатся две тригонометрические функции.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t.$$

Обоснование формул, приведенных в первых двух строках, проиллюстрировано на рис. 43 и 44. По свойству поворотов вокруг точки заштрихованные треугольники на рисунках равны друг другу. Остается воспользоваться смыслом координат точек, расположенных на тригонометрической окружности.

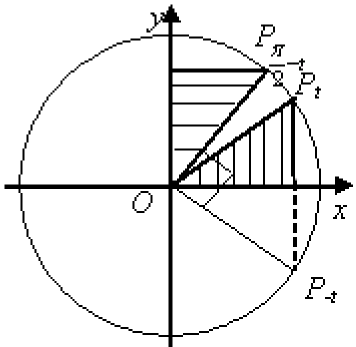


Рис. 43

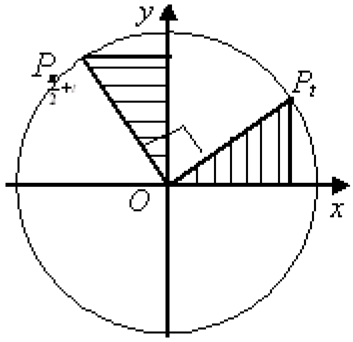


Рис. 44

Формулы, стоящие в последних двух строках, могут быть обоснованы, как и предыдущие, с помощью тригонометрической окружности. Их можно доказать и аналитически, пользуясь первой группой формул:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\sin t.$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin t.$$

Формулы приведения для тангенса и котангенса вытекают из определений этих функций и соответствующих формул для синуса и косинуса. Например,

$$\operatorname{tg}(\pi+t)=\frac{\sin(\pi+t)}{\cos(\pi+t)}=\frac{-\sin t}{-\cos t}=\operatorname{tg}t;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\operatorname{tg}t.$$

Обобщенно формулы приведения представлены в следующей таблице.

Таблица

Аргумент / Функция	$\frac{\pi}{2}-t$	$\frac{\pi}{2}+t$	$\pi-t$	$\pi+t$	$\frac{3\pi}{2}-t$	$\frac{3\pi}{2}+t$	$2\pi-t$	$2\pi+t$

sin	cos *t*	cos *t*	sin *t*	– sin *t*	– cos *t*	– cos *t*	– sin *t*	sin *t*
cos	sin *t*	– sin *t*	– cos *t*	– cos *t*	– sin *t*	sin *t*	cos *t*	cos *t*
tg	ctg *t*	– ctg *t*	– tg *t*	tg *t*	ctg *t*	– ctg *t*		
ctg	tg *t*	– tg *t*	– ctg *t*	ctg *t*	tg *t*	– tg *t*	– ctg *t*	ctg *t*

Анализируя таблицу, можно сформулировать так называемое мнемоническое правило, которое позволяет лучше запомнить формулы приведения.

1) В формуле приведения название функции не меняется, если к аргументу прибавлять ± π или же ±2π, и меняется (синус на косинус, тангенс на котангенс, косинус на синус, котангенс на тангенс), если прибавлять числа $\pm\frac{\pi}{2}$ или $\pm\frac{3\pi}{2}$.

2) Полученная функция в правой части равенства берется со знаком, совпадающим со знаком значения левой части, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Решаем

Пример 1. Найти sin(180° + α).

Решение. В первую очередь, замечаем, что выражение содержит угол 180° или π рад. Поэтому название функции не изменяется, и в правой части равенства должен стоять sinα. Чтобы определить знак перед sinα, допускаем, что угол α острый. Тогда точка $P_{180°+\alpha}$ лежит в третьей четверти тригонометрической окружности. Но синус в третьей четверти отрицателен. Поэтому перед sinα следует поставить знак «–» . Следовательно, sin(180° + α) = –sinα.

Ответ: –sinα.

Пример 2. Вычислить: $1)\sin\frac{7\pi}{6}$; $2)\cos\frac{3\pi}{4}$; $3)\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; $4)\sin 840°$; $5)\cos 1230°$

Решение. Для решения первых трех заданий представим число, стоящее под знаком тригонометрической функции, в виде суммы или разности чисел π или 2π и некоторого числа, меньшего $\frac{\pi}{2}$, и применим соответствующую формулу приведения. Необходимые рассуждения приведены при решении примера 1:

$$1)\ \sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2};\quad 2)\ \cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3)\ \mathrm{tg}\frac{5\pi}{3}=tg\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\,.$$

В двух последних заданиях выделим из приведенных углов вращения полные обороты, меры которых кратны 360°, их можно отбросить. Далее применяем формулы приведения.

$$4)\ \sin 840°=\sin\left(2\cdot 360°+120°\right)=\sin 120°=\sin(180°-60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5)\ \cos 1230°=\cos\left(3\cdot 360°+150°\right)=\cos 150°=\cos(180°-30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $1)-\frac{1}{2};\ 2)-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 3)-\sqrt{3};\ 4)\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 5)-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 3. Упростить выражение:

$$\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{tg}\left(\pi-\alpha\right)-\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\left(\pi+\alpha\right)\sin\left(2\pi-\alpha\right)\left(\sin\left(\pi+\alpha\right)-\cos\left(\pi-\alpha\right)\right)}.$$

Решение. Последовательно применяя формулы приведения, определения тангенса и котангенса, будем иметь:

$$\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{tg}\left(\pi-\alpha\right)-\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\left(\pi+\alpha\right)\sin\left(2\pi-\alpha\right)\left(\sin\left(\pi+\alpha\right)-\cos\left(\pi-\alpha\right)\right)}=\frac{-\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha(-\sin\alpha)\left(-\sin\alpha+\cos\alpha\right)}=$$

$$=\frac{2(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)\cos\alpha}{-\sin^2\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Ответ: $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin^3\alpha}.$

Пример 4. Вычислить: $1)\ \mathrm{tg}\frac{15\pi}{4};\quad 2)\ \mathrm{ctg}\frac{11\pi}{3}.$

Решение. Выделим из аргумента целое количество значений π.

$$1)\ \mathrm{tg}\frac{15\pi}{4}=\mathrm{tg}\left(3\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}=\mathrm{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=-1;$$

$$2)\ \operatorname{ctg}\frac{11\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(3\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $-1;\ -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Вопросы для самоконтроля

1.° Как расположены на тригонометрической окружности друг относительно друга точки: а) ° $P_{\pi+t}$ и P_t; б) ° $P_{\pi-t}$ и P_t; в) P_t и $P_{\frac{\pi}{2}-t}$; г) P_t и $P_{\frac{3\pi}{2}-t}$?

2.° Какая точка симметрична точке P_t тригонометрической окружности относительно: а) начала координат; б) оси ординат; в) оси абсцисс?

3. Что можно утверждать об: а) ординатах точек $P_{\pi-t}$ и $P_{\pi+t}$ тригонометрической окружности; б) абсциссах точек $P_{\frac{\pi}{2}-t}$ и $P_{\frac{\pi}{2}+t}$ тригонометрической окружности?

4. Какие координаты имеет точка тригонометрической окружности, симметричная точке $P\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ относительно: а) ° начала координат; б) ° оси ординат; в) ° оси абсцисс; г) прямой $y = x$; д) прямой $y = -x$?

5. Как можно представить угол 112°, чтобы, воспользовавшись формулами приведения и таблицей синусов острых углов, вычислить $\cos 112°$?

6. Чему равняется выражение: а) $\sin(\pi+1)+\sin 1$; б) $\sin(\pi+1)+\sin(\pi-1)$; в) $\operatorname{tg}(\pi-1)\operatorname{ctg}(\pi+1)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+1\right)+\sin 1$; д) $\sin^2 2(\pi+2)+\cos^2 2(\pi-2)$?

7. Верно ли утверждение, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу третьего угла?

8. Чему равняется тангенс тупого угла параллелограмма, если тангенс острого угла равен $\frac{2}{3}$?

9. Тангенс одного из острых углов прямоугольного треугольника равен 2. Чему равняется тангенс другого острого угла этого треугольника?

Задания для самостоятельного решения

1°. Вычислите тригонометрические функции следующих углов:

1) 120°; 2) 135°; 3) 150°; 4) 210°; 5) 225°; 6) 240°; 7) 300°; 8) 315°; 9) 330°; 10) 390°.

2°. Пользуясь формулами приведения, вычислите:

$$1)\ \sin\frac{19\pi}{6};\quad 2)\ \cos\frac{11\pi}{3};\quad 3)\ \mathrm{tg}\frac{11\pi}{4};\quad 4)\ \mathrm{ctg}\frac{31\pi}{6};$$

$$5)\ \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right);\quad 6)\ \cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right);\quad 7)\ \mathrm{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right);\quad 8)\ \mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right).$$

3°. Вычислите значение выражения:

1) $\cos 990° - \sin 780° - \mathrm{ctg}\, 945°$; 2) $\mathrm{tg}\, 1080° - \sin 855° + \cos 1305°$;

3) $3\cos 1860° + \sin(-1920°) + \cos(-630°)$;

4) $\cos 2850° - \cos(-765°) + \mathrm{tg}\ 1035°$.

4. Приведите к тригонометрическим функциям положительного аргумента, меньшего π: $1)\ \sin\frac{26\pi}{9};\quad 2)\ \cos\frac{35\pi}{9};\quad 3)\ \mathrm{tg}\frac{35\pi}{12};\quad 4)\ \mathrm{ctg}\frac{13\pi}{5}.$

5. Приведите к значению тригонометрической функции числа из отрезка $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$$1)\ \sin\frac{4\pi}{3};\qquad 2)\ \cos\frac{7\pi}{4};\qquad 3)\ \mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right);\qquad 4)\ \mathrm{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right);$$

$$5)\ \sin\frac{16\pi}{9};\qquad 6)\ \cos\left(-\frac{13\pi}{9}\right);\quad 7)\ \mathrm{tg}\left(-\frac{13\pi}{18}\right);\qquad 8)\ \mathrm{ctg}\frac{17\pi}{36}.$$

6. Упростите выражение:

$$1)\ \left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2;$$

$$2)\ \frac{\sin\alpha}{\sin(\pi+\alpha)}-\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}+\frac{\cos\alpha}{\cos(\pi-\alpha)};$$

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$; 4) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

7. Докажите тождество:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$; 2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{6}\right)=0$; 4) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{23\pi}{18}+\alpha\right)=0$.

8. Косинус одного из смежных углов равен $-\dfrac{3}{5}$. Найдите синус другого смежного угла.

9. Косинус одного из углов параллелограмма равен $-\dfrac{5}{13}$. Найдите синус другого из его углов.

10. Сумма косинусов острых углов прямоугольного треугольника равна *m*. Найдите:

1) сумму квадратов синусов этих углов; 2) произведение синусов этих углов.

11. Докажите, что площадь любого четырехугольника равняется половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

12. Найдите все числа из промежутка [0; 2π], удовлетворяющие условию:

1) $\sin\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$; 2) $\cos(\pi-t)=1$; 3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=0$;

4) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right)=-1$; 5) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=0$; 6) $\sin(\pi+t)=-1$.

13*. Найдите все числа *t*, удовлетворяющие условию:

1) $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)>\dfrac{1}{2}$; 2) $\cos(\pi-t)<\dfrac{1}{2}$; 3) $\cos(\pi+t)\le-\dfrac{1}{2}$;

4) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right)\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right)\ge-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

14. Вычислите:

1) $\left(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ\right) - \left(\cos 50^\circ + \cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ\right)$;

2) * ctg 31°·ctg 32°·ctg 33°·…·ctg 57°·ctg 58°·ctg 59°.

15. Вычислите сумму:

1) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + ... + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$;

2) $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + ... + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$;

3) $\mathrm{tg} 20^\circ + \mathrm{tg} 40^\circ + \mathrm{tg} 60^\circ + ... + \mathrm{tg} 160^\circ + \mathrm{tg} 180^\circ$;

4) $\mathrm{ctg} 5^\circ + \mathrm{ctg} 10^\circ + \mathrm{ctg} 15^\circ + ... + \mathrm{ctg} 170^\circ + \mathrm{ctg} 175^\circ$.

16*. Докажите, что

1) при любом натуральном n справедливо равенство

$\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + ... + \cos\frac{(n-1)\pi}{n} = 0$; 2)tg 1°·tg 2°·tg 3°·…·tg88°·tg 89° = 1.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь формулами приведения. **2.** Выделите из аргумента целое количество значений, кратных 2π. **3.** Выделив из аргумента целое количество значений, кратных 360°, примените формулы приведения. **4.** Отбросьте из аргумента целое количество значений, кратных 2π, π; из остатка вычтите число π. **5.** Если значение аргумента отрицательно, то примените свойства чётности соответствующей функции; затем полученное значение аргумента вычтите из числа π или 2π; если полученное значение аргумента больше $\frac{\pi}{4}$, то вычтите его из $\frac{\pi}{2}$. **6, 7.** Примените формулы приведения. **8, 9.** Воспользуйтесь тем, что сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°. **10.** Воспользуйтесь тем, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. **11.** Воспользуйтесь тем, что площадь любого треугольника равняется половине произведения его сторон на синус угла между ними. **12.** Обратите внимание на то, что в заданиях 1), 2), 4), 6) указана одна из координат точки, соответствующей аргументу. Укажите все значения аргумента, соответствующие этим точкам. Аналогично укажите все значения аргумента, соответствующие значениям тангенса и котангенса в заданиях 3) и 5). **13.** Воспользуйтесь решением примера 8 из пункта 3. **14.** 1) Раскрыв скобки, сгруппируйте слагаемые так, чтобы удобно было применить формулы приведения; 2) Сгруппируйте сомножители так, чтобы удобно было применить формулы приведения. **15.** Сгруппируйте слагаемые так, чтобы удобно было применить формулы приведения. **16.** 1) Сгруппируйте слагаемые так, чтобы удобно было применить формулы приведения; 2) Сгруппируйте сомножители так, чтобы удобно было применить формулы приведения.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1.

	120°	**135°**	**150°**	**210°**	**225°**	**240°**	**300°**	**315°**	**330°**
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$-\sqrt{3}$	**– 1**	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	**– 1**	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
ctg	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**– 1**	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**– 1**	$-\sqrt{3}$

2. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) $\sqrt{3}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\sqrt{3}$; 8) 1.

3. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$. **4.** 1) $\sin\frac{8\pi}{9}$; 2) $-\cos\frac{8\pi}{9}$; 3) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}$. **5.** 1) $-\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4}$; 3) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$; 5) $-\sin\frac{2\pi}{9}$; 6) $-\sin\frac{\pi}{18}$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}$; 8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$. **6.** 1) 4; 2) –1; 3) 1; 4) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **8.** $\frac{4}{5}$; **9.** $\frac{12}{13}$.

10. 1) 1; 2) $\frac{m^2-1}{2}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2) π; 3) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) 0; π; 2π; 6) $\frac{\pi}{2}$.

13. 1) $\frac{7\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

3) $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\le t\le\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\le t\le\dfrac{9\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$;

5) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\le t\le\dfrac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **14.** 1) 0; 2) 1. **15.** 1) 0; 2) – 1; 3) 0; 4) 0.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Симметрично относительно: а) начала координат; б) оси ординат; в) прямой $y = x$; г) прямой $y = –x$. **2.** а) $P_{\pi+t}$; б) $P_{\pi-t}$; в) P_{-t}. **3.** а) Противоположны; б) противоположны. **4.** а) $P\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$; б) $P\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$. **5.** 112° = 90° + 22°. **6.** а) 0;б) 0; в) –1; г) 0; д) 1. **7.** Да. **8.** $-\dfrac{2}{3}$; **9.** 2.

6. Периодические функции

Повторяем теорию

При введении тригонометрических функций аргумент обозначался буквой t, поскольку буквы x и y использовались для обозначения координат точки P_t. Теперь вернемся к привычным обозначениям: x — независимая переменная, y — зависимая переменная, то есть $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

Так как числам x, $x \pm 2\pi$ на тригонометрической окружности соответствует одна и та же точка P_x, то имеют место равенства:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x,\ \cos(x \pm 2\pi) = \cos x\ .$$

Это свойство функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ называют ***периодичностью***. Оно заключается в том, что значения функции повторяются через равные промежутки изменения аргумента. Точный смысл понятия периодичности функции содержится в следующем определении.

Функция y = f(x) называется периодической, если существует такое число T ≠ 0, что область определения функции вместе с каждой точкой x содержит точки x ± T и при этом выполняется равенство f(x ± T) = f(x). Число T называется периодом функции.

Обращаем внимание на то, что равенство $f(x \pm T) = f(x)$ должно выполняться для всех значений x из области определения функции. Для от-

дельных функций можно указать числа, прибавление которых к одному значению аргумента не меняет значения функции, в то же время прибавление к другому значению аргумента — меняет. Такие числа не являются периодами функции.

Например, $\sin 0 = \sin (0 + \pi) = 0$, но уже $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)=\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$, а $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$. Следовательно, число π не является периодом функции $y = \sin x$.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются периодическими с периодом 2π. Этот факт использовался выше при вычислении значений синуса и косинуса.

Периодом тангенса и котангенса является число π, что вытекает из формул приведения: $\operatorname{tg}(t + \pi)= \operatorname{tg}(t - \pi) = \operatorname{tg} t$.

На графике функции ее периодичность с периодом T отображается следующим образом.

Если график периодической функции с периодом *T* параллельно перенести на *T* единиц вдоль оси абсцисс в положительном или отрицательном направлениях, то он перейдет сам в себя.

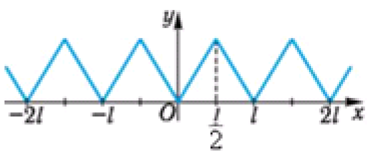


Рис. 45

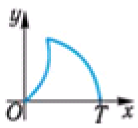


Рис. 46

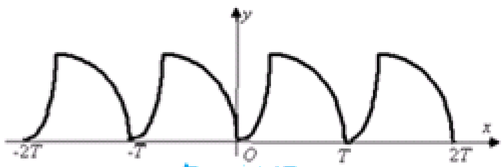


Рис. 47

На рис. 45 изображен график периодической функции с периодом l.

Для построения графика периодической функции с периодом T достаточно построить его на отрезке длиной T (рис. 46), а затем построенный график параллельно перенести вдоль оси абсцисс в обоих направлениях на расстояние T, $2T$, $3T$ и т. д. (рис. 47).

Постоянная функция, определённая на всей числовой оси, является периодической, ее период — любое число, отличное от нуля.

Периодическими функциями описываются различные физические процессы: малые колебания маятника, вращения планет вокруг Солнца, сила переменного тока и т. п. Самым простым прибором для иллюстрации периодических процессов являются часы. Положения концов стрелок повторяются через равные промежутки времени. Для секундной стрелки этот промежуток составляет 60 с, для минутной — 60 мин, для часовой — 12 час.

Из того, что каждой точке на тригонометрической окружности соответствует бесконечное множество чисел, отличающихся друг от друга на $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, вытекает, что тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ для чисел $x + 2\pi k$ при всех $k \in \boldsymbol{Z}$ принимают одно и то же значение: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, то есть периодами функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является числа $2\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Все эти периоды кратны 2π. Естественно возникает вопрос: «Существуют ли другие положительные периоды этих функций, меньшие 2π?» Ответ на него дает следующее утверждение.

Теорема 1. Наименьший положительный период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равен 2π.

Доказательство. Покажем, что других периодов, кроме чисел $2\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$, эти функции не могут иметь. Действительно, если T — период функции $y = \sin x$, то $\sin(x + T) = \sin x$ для любого x, в частности для $x = 0$, то есть $\sin T = \sin 0 = 0$. Но $\sin T$ обращается в нуль при $T = 0$; $T = \pi$; $T = 2\pi$ и, вообще, при $T = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и только при этих значениях.

Числа $\pi(2k + 1)$ не являются периодами рассматриваемой функции. Действительно, $\sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi(2k+1)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, то есть существует значение x из области определения функции, такое, что $\sin\big(x + \pi(2k+1)\big) \neq \sin x$. Следовательно, наименьшим положительным периодом функции $y = \sin x$ является числом 2π.

Доказательство того, что 2π — наименьший положительный период косинуса, аналогично. ■

Подобное утверждение справедливо для функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 2. Наименьший положительный период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π.

Доказательство. Из формул приведения вытекает, что числа πk, $k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$ являются периодами функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Поскольку $\operatorname{tg} x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ обращается в нуль при $x = 0$ или при $x = \pi$ и только в этих точках, то не существует положительного числа, меньшего π, которое могло бы быть периодом тангенса. Следовательно, наименьшим положительным периодом функции $y = \operatorname{tg} x$ является числом π. Доказательство того, что π — наименьший положительный период котангенса, аналогично. Рекомендуем провести его самостоятельно. ■

Рассмотрим некоторые общие свойства периодических функций.

Свойство 1. Если функция *f* является периодической с периодом *T*, то при любом целом $n \neq 0$ число nT также является периодом этой функции.

Доказательство. Действительно, поскольку функция f является периодической с периодом T, то, воспользовавшись несколько раз определением периодической функции, получим: во-первых, ее область определения вместе с каждой точкой x содержит точки $x \pm T$, а следовательно и точки $x \pm 2T$, $x \pm 3T$, ..., $x \pm nT$; во-вторых, $f(x + nT) = f(x + (n - 1)T) = f(x + (n - 2)T) = \ldots = f(x + T) = f(x)$. Аналогично, $f(x - nT) = f(x - (n - 1)T) = f(x - (n - 2)T) = \ldots = f(x - T) = f(x)$. ■

Таким образом, периодическая функция имеет бесконечное множество разных периодов. Во многих случаях среди положительных периодов существует наименьший. Его называют ***основным периодом*** этой функции. Можно доказать, что все другие ее периоды кратны основному периоду. Самым простым примером периодической функции, которая не имеет основного периода, является постоянная функция, определенная на всей числовой оси.

Свойство 2. График периодической функции с периодом *T* при параллельном переносе его на расстояние *nT* вправо и влево вдоль оси абсцисс отображается сам на себя.

Доказательство. Действительно, пусть точка (x_0; y_0) является точкой графика периодической функции f. Тогда точка с абсциссой $x_0 + nT$ при любом целом n принадлежит области определения функции f и в результате периодичности функции f выполняется равенство $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y_0$. Следовательно, точка ($x_0 + nT$; y_0), которую получили из точки (x_0; y_0) при параллельном переносе вдоль оси абсцисс на расстояние nT, также принадлежит графику функции f. ■

Свойство 3. Если функция f является периодической с основным периодом T, то функция $y = Af(kx + b) + l$, где A, $k \neq 0$, b, l — некоторые числа, также является периодической, причем ее основной период равен $\frac{T}{|k|}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $k > 0$. Нетрудно проверить, что число $\frac{T}{k}$ является периодом функции $y = Af(kx + b) + l$. Действительно, $Af\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right)+l = = Af\left(\left(kx+b\right)+T\right)+l = Af\left(kx+b\right)+l$, поскольку T — период функции f. Остается доказать, что число $\frac{T}{k}$ — основной период функции $y = Af(kx + b) + l$. Предположим, что периодом этой функции является такое число T_0, что $T_0 < \frac{T}{k}$. Тогда для любого x из области определения этой функции выполняется равенство

$$Af\left(k\left(x+T_0\right)+b\right)+l = Af\left(\left(kx+b\right)+kT_0\right)+l = Af\left(kx+b\right)+l,$$

поскольку T_0 — период рассматриваемой функции. Но это означает, что kT_0 — период функции f. По предположению $T_0 < \frac{T}{k}$, следовательно, $kT_0 < T$, то есть существует период функции f, меньший Т. Полученное противоречие и доказывает свойство. Случай, когда $k < 0$, рассматривается аналогично. ■

Из свойства 3 вытекает, что основные периоды функций $y = \sin 3x$,

$y = \cos\frac{x}{2}$, y = tg $2x$ соответственно равны $\frac{2\pi}{3}$, $2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi$, $\frac{\pi}{2}$.

Решаем

Пример 1. Пусть функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 5 и $f(1) = 2$. Чему равняется $f(-9)$?

Решение. Во-первых, отметим, что функция $y = f(x)$ определена при $x = -9$, так как, по определению периодической функции, область определения данной функции вместе с точкой $x = 1$ содержит точки: $1 - 5 = -4$, $-4 - 5 = -9$. Во-вторых, $f(-9) = f(-9 + 5) = f(-4) = f(-4 + 5) = f(1) = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Доказать, что периодом функции $y = \sin\frac{x}{3}$ является число 6π.

Решение. Функция $y = \sin\frac{x}{3}$ определена на всей числовой оси. Поэтому ее область определения вместе с каждой точкой x содержит точки $x \pm 6\pi$. Подставим вместо x в выражение для этой функции $x + 6\pi$: $\sin\left(\frac{1}{3}(x+6\pi)\right) = \sin\left(\frac{x}{3}+2\pi\right) = \sin\frac{x}{3}$. Такой же результат получим, если вместо x в выражение для этой функции подставить $x - 6\pi$. Получили то, что требовалось доказать. ■

Пример 3. Найти основной период функции $y = \sin\omega x$.

Решение. Областью определения данной функции является числовая ось. Числа $\frac{2\pi n}{\omega}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, — периоды для функции $\sin\omega x$:

$$\sin\omega\left(x+\frac{2\pi n}{\omega}\right) = \sin(\omega x + 2\pi n) = \sin\omega x .$$

Если T — произвольный положительный период для $\sin\omega x$, то $\sin\omega(x + T) = \sin\omega x$ при каждом x. Беря $x = \frac{\pi}{2\omega}$, будем иметь:

$\sin\omega\left(\frac{\pi}{2\omega}+T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, или $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega T\right)=1$. Однако, синус равняется единице лишь при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Поэтому $\frac{\pi}{2}+\omega T=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \omega T=2\pi n,\ T=\frac{2\pi n}{\omega}$.

Среди чисел $\frac{2\pi n}{\omega}$ наименьшим положительным является число $\frac{2\pi}{\omega}$, то есть основной период функции $\sin \omega x$ равняется $\frac{2\pi}{\omega}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{\omega}$.

Пример 4. Найдите основной период функции $y=-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

Решение. Согласно свойству 3, основной период этой функции равен $2\pi:\left|-\frac{\pi}{4}\right|=8$.

Ответ: 8.

На следующих примерах проиллюстрируем общую идею доказательства или опровержения того, что некоторая функция является периодической.

Пример 5. Доказать, что функция $y = \sin^2 x$ является периодической и найти ее основной период.

Решение. Областью определения данной функции является вся координатная прямая. Предположим, что число T является ее периодом. Тогда для любого x выполняется равенство $\sin^2(x + T) = \sin^2 x$, в частности, для $x = 0$: $\sin^2 T = \sin^2 0 = 0$. Отсюда $\sin T = 0$, $T = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, если T — период функции $y = \sin^2 x$, то $T = k\pi$, $k \neq 0$. Проверка показывает, что числа $T = k\pi$ являются действительно периодами данной функции. Основной период при $k = 1$ равняется π. ■

Для того, чтобы убедиться, что функция $y = f(x)$ не является периодической, необходимо установить: для любого $T > 0$ найдется такое x из области определения $D(f)$ функции $y = f(x)$, что будет выполняться, по крайней мере, одно из следующих утверждений : а) точка $x + T$ не принадлежит $D(f)$; б) точка $x - T$ не принадлежит $D(f)$; в) $f(x + T) \neq f(x)$.

Пример 6. Доказать, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не является периодической.

Решение. Область определения функции содержит все вещественные числа, кроме $x = 0$. Пусть T — произвольное положительное число. Поскольку $-T \neq 0$, то точка $x_0 = -T$ принадлежит области определения функции. В то же время точка $x_0 + T = (-T) + T = 0$ не принадлежит области определения. Следовательно, для любого $T > 0$ нашлось такое $x = x_0$ (из области определения функции), что точка $x_0 + T$ не принадлежит области определения. Следовательно, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не является периодической. ■

Пример 7. Доказать, что функция $y = x\cos x$ не является периодической.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая прямая. Предположим, что число $T \neq 0$ является ее периодом. Тогда для любого x выполняется равенство $(x + T)\cos(x + T) = x\cos x$. В частности для $x = 0$ имеем $T\cos T = 0$. Отсюда $\cos T = 0$. Следовательно, если T — период функции $y = x\cos x$, то $T = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$. Но проверка показывает, что эти числа не являются периодами данной функции. Например, $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \neq x\cos x$ при $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\pi\cos\pi \neq \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$. Следовательно, нашлась такая точка $x = \frac{\pi}{2}$ из области определения функции $f(x) = x\cos x$, для которой $f(x + T) \neq f(x)$ для произвольного $T > 0$. Полученное противоречие показывает, что данная функция не является периодической. ■

Вопросы для самоконтроля

1. ° Верно ли, что если периодическая функция в какой-то точке принимает значение 1, то это значение она принимает в бесконечном множестве точек?

2. ° Можно ли, опираясь на равенство $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$, утверждать, что $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \cos x$?

3. ° Является ли число 3π периодом функции $y = \sin x$?

4. ° Является ли число 5π периодом функции $y = \operatorname{tg} x$?

5. Каков основной период функции: а) $\sin 3x$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\sin \pi x$?

6. Чему равняется $f(-5)$, если функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 3 и $f(1) = 0$?

7. Является ли функция $y=\cos\sqrt{x}$ периодической?

8. Может ли функция быть периодической, если она имеет конечное количество нулей?

9. Может ли быть периодической функция, возрастающая на всей области определения?

10. Верно ли утверждение: если T — период некоторой функции, то $-T$ также является ее периодом?

11. Верно ли утверждение: если T_1 и T_2 — периоды некоторой функции, то и $T_1 + T_2$ — период той же функции?

12. * Верно ли утверждение, что при сжатии графика периодической функции в a раз ($a > 1$) к оси ординат основной период функции уменьшается в a раз?

Задания для самостоятельного решения

1°. Вычислите: 1) $\cos\frac{17\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3360°$; 3) $\sin\left(-\frac{123\pi}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(-1950°)$.

2°. Упростите:

1) $\sin^2(\alpha+4\pi)+\cos^2(\alpha+6\pi)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha+3\pi)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-5\pi)$;

3) $1+\operatorname{ctg}^2(\alpha-7\pi)$; 4) $\frac{1}{\cos^2(2\alpha-8\pi)}-1$.

3°. Докажите равенство: 1) $\cos(t-\pi)=\cos(t+\pi)$; 2) $\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

4. На рис. 48 – 49 изображены части графиков функции с периодом T. Постройте графики этих функций на промежутке $[-2T; 2T]$.

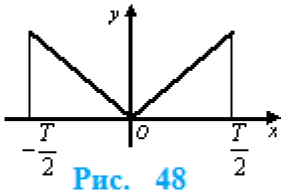


Рис. 48

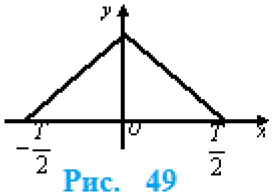


Рис. 49

5. Докажите, что число T является периодом функции f, если:

1) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}, T=4\pi$; 2) $f(x)=\sin 2x, T=\pi$; 3) $f(x)=tg3x, T=\dfrac{\pi}{3}$;

4) $f(x)=ctg\pi x, T=1$.

6. Докажите, что функция f является периодической, если:

1) $f(x) = 1 + \cos x$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$; 3) $f(x) = \sin x - \cos x$; 4) $f(x) = \cos^2 x$.

7. Найдите наименьший положительный период, если он существует, для функции: 1) $y=2\sin\dfrac{x}{3}$; 2) $y=3\operatorname{ctg}\dfrac{3x}{2}$; 3) $y=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$; 4) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

8. Докажите, что число 5 не является периодом функции:

1) $y = x^3 - 2$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = 5x - 5$; 4) $y = [x]$.

9*. Докажите, что функция не является периодической: 1) $y = x$; 2) $y = \sin x^2$;

3) $y = \cos x^3$; 4) $y=\sin\left(x\sqrt{2}\right)$.

10*. Является ли периодической функция: 1) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}$; 2) $y = 2\operatorname{tg} x + 1$;

3) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x}$?

11*. Известно, что функция $f(x)$ обладает таким свойством: для всех $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $f(x + T) = -f(x)$, $T \neq 0$. Докажите, что функция $f(x)$ периодическая.

12*. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin x + \cos 2x$; 2) $y = \sin 2x + \cos 3x$; 3) $y = \sin 3x + 2\cos 5x$;

4) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь периодичностью тригонометрических функций. **2.** Воспользуйтесь периодичностью тригонометрических функций и основными соотношениями между тригонометрическими функциями. **3.** Воспользуйтесь периодичностью тригонометрических функций. **4.** Примените свойство 2. **5.** Воспользуйтесь решением примера 2. **6.** Воспользуйтесь решением примера 5. **7.** Воспользуйтесь решением примера 3. **8.** Вычислите значение заданной функции, например, при $x = 0$ и при $x = 0 + 5 = 5$. **9.** Воспользуйтесь решением примера 6. **10.** Воспользуйтесь решением примеров 6 и 7, которые иллюстрируют общую идею доказательства или опровержения того, что некоторая функция является периодической. **11.** Воспользуйтесь равенством $f((x + T) + T) = -f(x + T) = -(-f(x)) = f(x)$. **12.** Можно найти наименьшие общие кратные основных периодов слагаемых.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sqrt{3}$. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\operatorname{tg}^2 2\alpha$. **7.** 1) 6π; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) не существует. **10.** 1) Нет; 2) да, π; 3) да, 2π; 4) да, π. **12.** 1) 2π; 2) 2π; 3) 2π; 4) π.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Да. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** Да. **5.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 4π; в) 2. **6.** 0. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** Да. **11.** Да. **12.** Да.

7. Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Повторяем теорию

Рассмотрим простейшие свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, пользуясь определениями синуса и косинуса, и построим их графики.

Свойство 1. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены на всей числовой оси.

Свойство 2. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — периодические с наименьшим положительным периодом 2π.

Свойство 3. Нулями функции $y = \sin x$ является числа πn, $n \in Z$, а нулями функции $y = \cos x$ — числа $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Нули функции $y = \sin x$ — это числа, которым на тригонометрической окружности соответствуют точки с ординатой 0, а именно: $\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ и вообще числа πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. Аналогично нули функции $y = \cos x$ — это числа, которым на тригонометрической окружности соответствуют точки с абсциссой 0, а именно: $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ и вообще числа $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Свойство 4. Функция $y = \sin x$ — нечётная, а функция $y = \cos x$ — чётная, то есть для каждого x

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x.$$

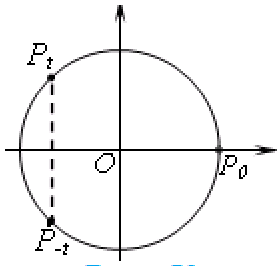


Рис. 50

Доказательство. По построению, точки P_t и P_{-t} симметричны относительно оси абсцисс (рис. 50). Их абсциссы совпадают, а ординаты противоположны. Поэтому при $t = x$:

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x. \blacksquare$$

Свойство 5. Функция $y = \sin x$ положительна на интервале $(0; \pi)$ и отрицательна на интервале $(\pi; 2\pi)$; функция $y = \cos x$ положительна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и отрицательна на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Свойство 6. Функция $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, а на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ убывает. Функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0; \pi]$ и возрастает на промежутке $[\pi; 2\pi]$.

Доказательство. Это свойство вытекает из геометрического смысла синуса и косинуса. Если t возрастает $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки P_t увеличивается от – 1 от 1 (рис. 51). Если же t растет от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_t уменьшается от 1 до – 1 (см. рис. 51). Если t растет от 0 до π, то абсцисса точки P_t уменьшается от 1 до – 1. Если же t растет от π до 2π, то абсцисса точки P_t увеличивается от –1 до 1 (см. рис. 51). ■

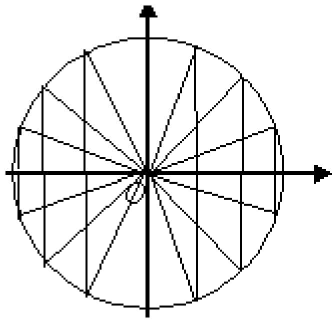


Рис. :51

Свойство 7. Множеством значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является отрезок [–1; 1].

Доказательство. По определению синуса $|\sin x| \le 1$. Для произвольного числа a из промежутка [–1; 1] существует, по крайней мере, одна точка тригонометрической окружности, ордината которой равна a. Это означает, что функция $y = \sin x$ принимает все значения из промежутка [–1; 1]. Аналогично обосновывается это свойство для функции $y = \cos x$. ■

Свойство 8. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на всей числовой оси.

Доказательство. Действительно, при непрерывном изменении значения x точка P_x непрерывно перемещается по тригонометрической окружности, а потому ее координаты $\cos x$ и $\sin x$ меняются непрерывно. ■

Построим график функции $y = \sin x$ с использованием рассмотренных свойств синуса. Так как эта функция периодическая с периодом 2π, то достаточно построить график на отрезке [0; 2π], длина которого равна периоду синуса. Сначала построим график на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция $y = \sin x$ возрастает, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Для нахождения нескольких точек графика разобьем отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, например, на 4 равные части. Возьмем единичную окружность с центром в произвольной точке оси абсцисс (для удобства сместим окружность влево (рис. 52)). Для построения точки с абсциссой t найдем на окружности точку P_t и через нее проведем прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с прямой $x = t$. Точка пересечения будет принадлежать графику функции $y = \sin x$, так как ее ордината совпадает с ординатой точки P_t и равна $\sin t$.

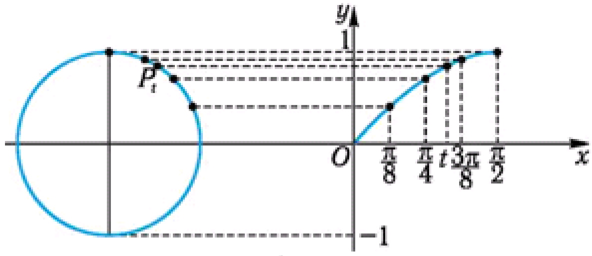


Рис. 52

Построив таким образом все 4 точки графика и соединив их, учитывая возрастание и непрерывность функции, непрерывной кривой, получим эскиз графика функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 52).

Так как, по формулам приведения, $\sin(\pi - t) = \sin t$, то есть ординаты точек t и $\pi - t$, симметричных относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, равны между собой, то на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ точки графика функции $y = \sin x$ располагаются симметрично точкам графика из промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 53).

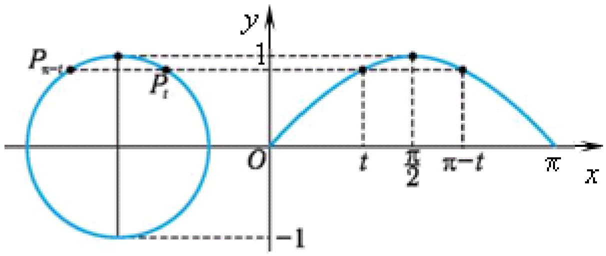


Рис. 53

Поскольку, по формулам приведения, $\sin(2\pi - t) = -\sin t$, то есть ординаты точек t и $2\pi - t$ противоположны друг другу, то на промежутке $[\pi; 2\pi]$ точки графика функции $y = \sin x$ располагаются симметрично точкам графика из промежутка $[0; \pi]$ относительно точки $(\pi; 0)$ (рис. 54).

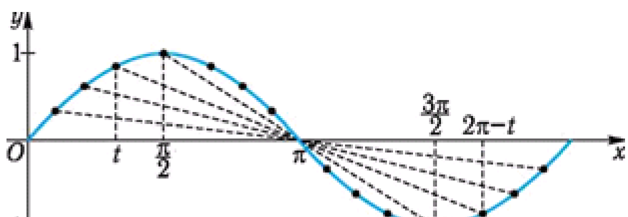


Рис. 54

Пользуясь правилом построения графика периодической функции, с помощью параллельных переносов продолжим график на 2π, 4π, 6π, ... вправо и влево вдоль оси абсцисс (рис. 55). Получим график функции $y = \sin x$. Он называется ***синусоидой.***

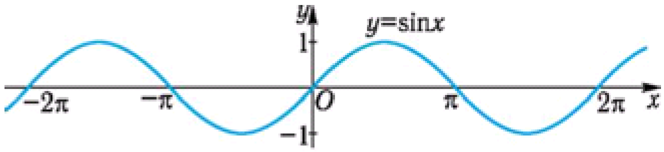


Рис. 55

Так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то график функции $y = \cos x$ можно построить параллельным переносом графика функции $y = \sin x$ в отрицательном направлении вдоль оси x на расстояние $\frac{\pi}{2}$ (рис. 56).

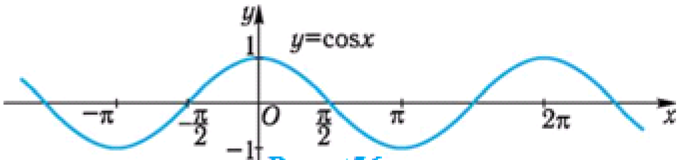


Рис. 56

В следующей таблице приведены обобщенные свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Свойства 5 и 6 выше рассматривались на промежутках, длина которых равнялась основному периоду 2π этих функций. Применяя периодичность синуса и косинуса параллельным переносом этих промежутков на $2\pi k$, где k — целое число, эти свойства можно рассмотреть на всей координатной прямой.

Таблица

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
1.	Область определения функции — множество всех вещественных чисел $\boldsymbol{R}$	
2.	Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π	
3.	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
4.	Функция является нечётной	Функция является чётной
5.	Функция является положительной на каждом из интервалов	Функция является положительной на каждом из интервалов

	$(2\pi k;\pi(2k+1)),\ k\in\boldsymbol{Z}$ и отрицательной на каждом из интервалов $(\pi\,(2k+1);\ \pi\,(2k+2)),\ k\in\boldsymbol{Z}$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in\boldsymbol{Z}$, и отрицательной на каждом из интервалов $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\boldsymbol{Z}$
6.	Функция возрастает на каждом из промежутков $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$, и убывает на каждом из промежутков $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$	Функция возрастает на каждом из промежутков $[\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k], k\in\boldsymbol{Z}$, и убывает на каждом из промежутков $[2\pi k;\pi+2\pi k],\ k\in\boldsymbol{Z}$
7.	Множеством значений функции является отрезок [–1; 1].	
8.	Функция непрерывна в области определения.	

На рис. 57 и 58 отмечены фрагменты графиков синуса и косинуса, где эти функции возрастают, а на рис. 59 и 60 — убывают.

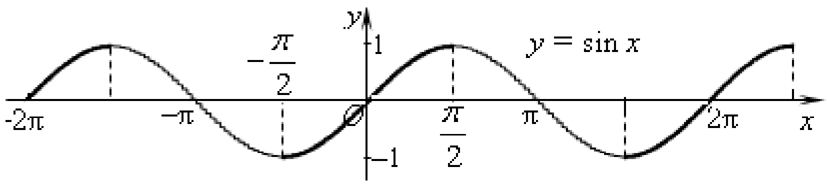


Рис.57

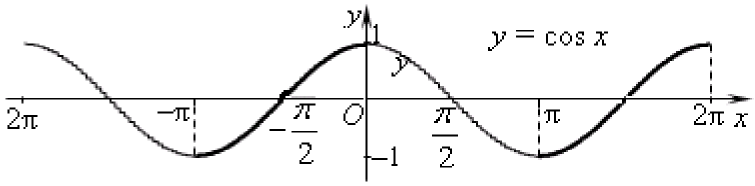


Рис. 58

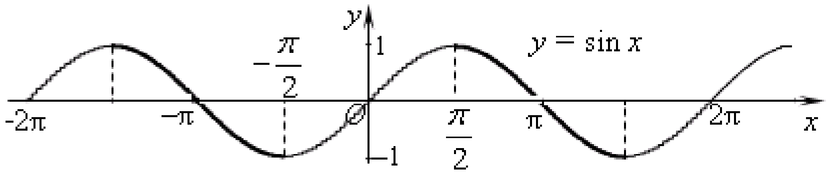


Рис. 59

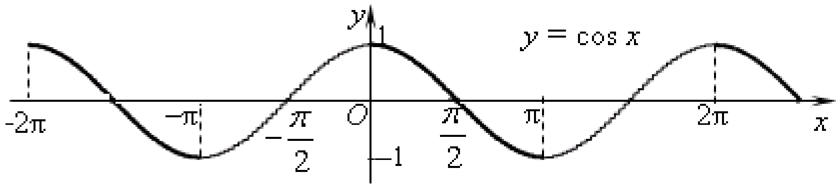


Рис. 60

Решаем

Свойства и графики синуса и косинуса позволяют решать разнообразные задачи, связанные с этими функциями, а именно: "читать" графики, сравнивать значения этих функций, решать уравнения, неравенства и т. п.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x = x - \pi$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = x - \pi$, $y = \sin x$. Они пересекаются в одной точке (рис. 61), как видно из графиков. Абсцисса π точки пересечения является решением данного уравнения.

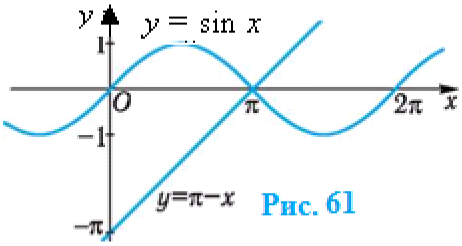


Рис. 61

Ответ. $x = \pi$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Построим график функции $y = \cos x$, отметив на оси абсцисс точки с координатами $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}$ (рис. 62). Найдем на промежутке наивысшую и самую низкую точки графика. Ординаты этих точек $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $y(\pi) = \cos\pi = -1$ являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции на данном промежутке, которые она принимают соответственно в точках $\frac{\pi}{3}$ и π.

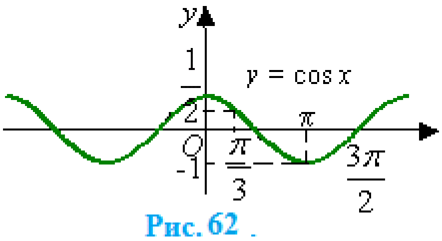


Рис. 62

Ответ: $\frac{1}{2}; -1$.

Пример 3. Построить графики функций:

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2\sin x$; 3) $y = \sin 3x$.

Решение. 1) График функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ можно получить из графика функции y = sin$x$ параллельным переносом вдоль оси x на $\frac{\pi}{4}$ в направлении, противоположном оси абсцисс (рис. 63).

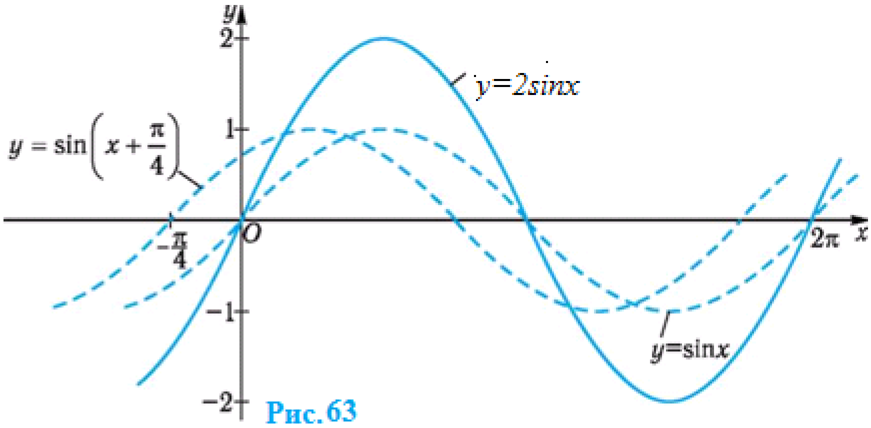


Рис.63

2) График функции y = 2sin$x$ построим растяжением графика y= sin$x$ от оси абсцисс в 2 раза (рис. 63).

3) График функции y = sin 3x является результатом сжатия графика y = sin x к оси ординат в три раза (рис. 64). ■

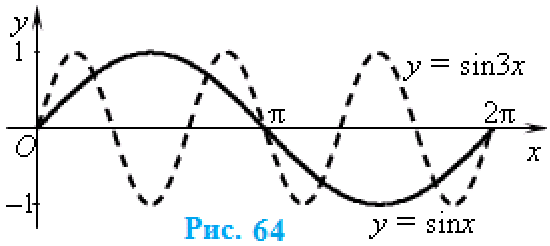


Рис. 64

Пример4. Сравнить числа:1) sin2 и sin 3; 2) cos 5 и cos 6; 3) cos $\frac{\pi}{7}$ и sin $\frac{3\pi}{8}$.

Решение. 1) Так как $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ функция y = sin x убывает, то sin 2 > sin 3.

2) Так как $\frac{3\pi}{2}<5<6<2\pi$, а на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ функция y = cos$x$ возрастает, то cos 5 < cos 6.

3) По формуле приведения $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$. Числа $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{7}$ принадлежат отрезку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция y = cos x убывает. Так как $\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{7}$, то $\cos\frac{\pi}{8}>\cos\frac{\pi}{7}$, то есть $\sin\frac{3\pi}{8}>\cos\frac{\pi}{7}$.

Ответ. 1) $\sin 2 > \sin 3$; 2) $\cos 5 < \cos 6$; 3) $\sin\frac{3\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{7}$.

Пример 5. Найти все числа из отрезка $[0; 2\pi]$, для которых выполняется неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$.

Решение. Построим график функции $y = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$ и прямую $y = \frac{1}{2}$ (рис. 65). Учитывая, что $\cos x = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{5\pi}{3}$, можем определить ту часть графика косинуса, для которой $\cos x < \frac{1}{2}$. Она расположена ниже прямой $y = \frac{1}{2}$, а следовательно, неравенству удовлетворяют такие значения x, что $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

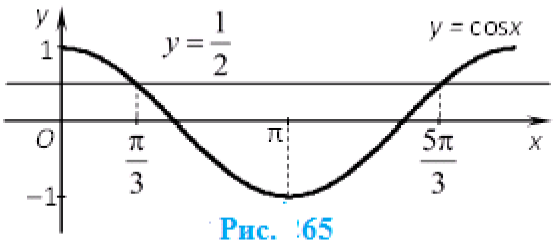


Рис. 65

Ответ: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

Пример 6. Построить график функции $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. График данной функции $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ получим из графика функции $y = \sin x$ последовательным выполнением таких преобразований:

а) сжатием его к оси y вдвое ($y = \sin 2x$);

б) растяжением полученного графика от оси x втрое ($y = 3\sin 2x$);

в) параллельным переносом

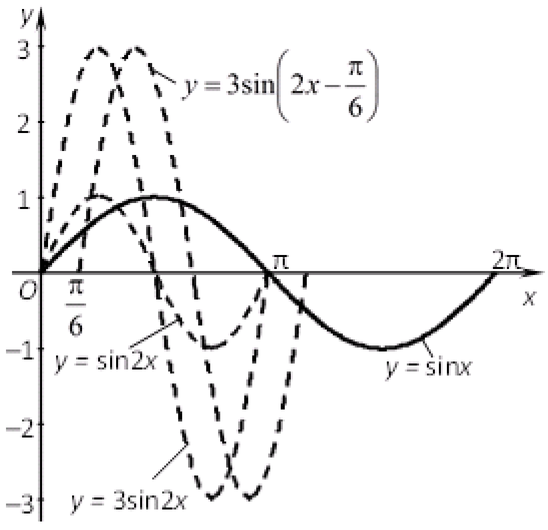


Рис. 66

предыдущего графика в положительном направлении оси x на $\frac{\pi}{6}$ единиц (рис. 66).

График строили по такой схеме:

$$y=\sin x \to y=\sin 2x \to y=3\sin 2x \to y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right). \blacksquare$$

Из правил преобразований графиков функций можно получить также выводы относительно построения графиков функций, которые содержат некоторые выражения под знаком модуля.

График функции $y = |\sin x| = \begin{cases}\sin x \text{ при } \sin x \geq 0,\\ -\sin x \text{ при } \sin x < 0\end{cases}$ является объединением части графика функции $y = \sin x$, которая лежит выше оси x (для которой $\sin x \geq 0$), с графиком, в который отображается при симметрии относительно оси абсцисс та часть графика функции $y = \sin x$, для которой $\sin x < 0$ (рис. 67).

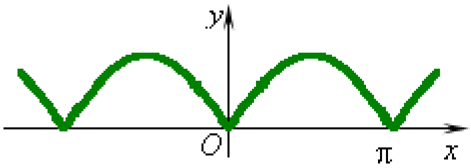


Рис. 67

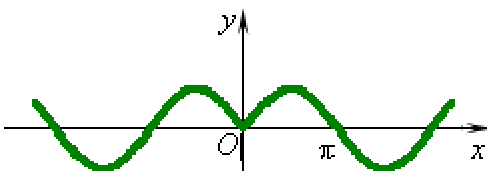


Рис. 68

Чтобы построить график функции

$$y=\sin|x|=\begin{cases}\sin x \text{ при } x \geq 0,\\ \sin(-x)=-\sin x \text{ при } x<0\end{cases}$$

следует объединить часть графика функции $y = \sin x$, для которой $x \geq 0$, с графиком, в который отображается эта часть при симметрии относительно оси ординат (рис. 68).

Пример 7. Построить график функции $y=\sin\left(\pi|x|+\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. График данной функции $y=\sin\left(\pi|x|+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi\left(|x|+\frac{1}{4}\right)\right)$ получим из графика функции $y = \sin x$ последовательным выполнением таких преобразований:

а) сжатием его к оси y в π раз (черт. 69);

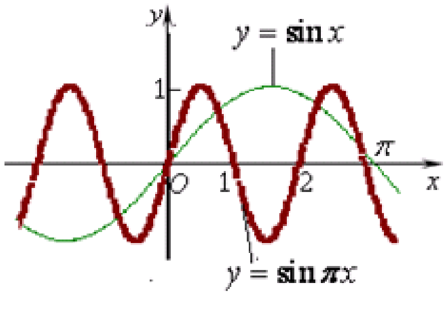


Рис. 69

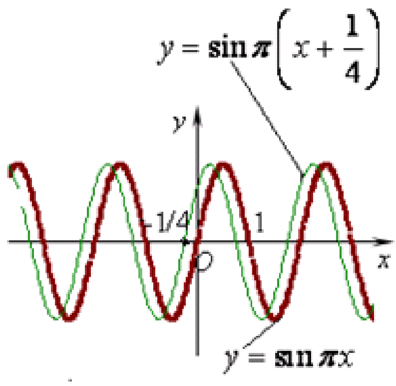


Рис. 70

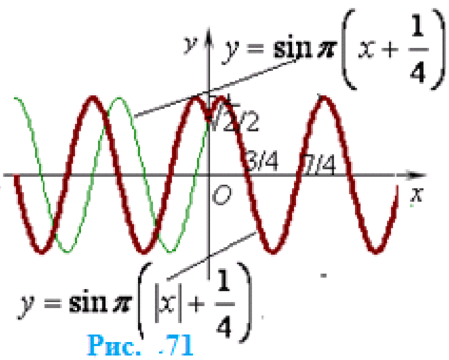


Рис. 71

б) параллельным переносом в отрицательном направлении оси x на $\frac{1}{4}$ единицы (рис. 70);

в) устранением той части графика, которая находится в левой полуплоскости;

г) симметричным отражением относительно оси ординат оставшейся части графика (рис. 71).

График функции $y=\sin\left(\pi|x|+\frac{\pi}{4}\right)$ строили по такой схеме:

$$y=\sin x \to y=\sin\pi x \to y=\sin\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)\to y=\sin\pi\left(|x|+\frac{1}{4}\right). \ \blacksquare$$

Пример 8. Решить уравнение $4\cos\frac{\pi x}{3}=|x+1|+|x-1|$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y=4\cos\frac{\pi x}{3}$ и $y=|x+1|+|x-1|$ (рис. 72). График функции $y=4\cos\frac{\pi x}{3}$ строили по схеме:

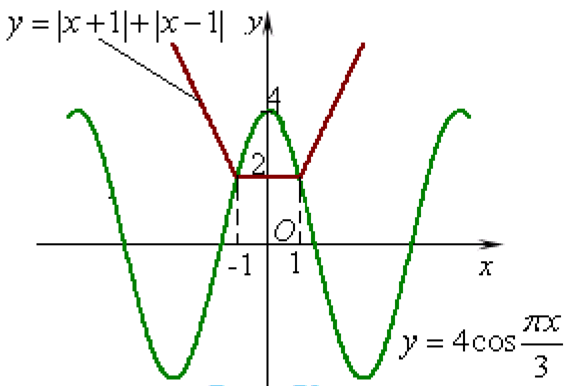


Рис. 72

$y=\cos x \to y=\cos\frac{\pi x}{3}\to y=4\cos\frac{\pi x}{3}$. Функция $y=|x+1|+|x-1|$ имеет такой вид:

$$y = \begin{cases} -2x, \text{ если } x \le -1, \\ 2, \text{ если } -1 < x \le 1, \\ 2x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Графики этих функций пересекаются в двух точках, а именно в тех точках, где происходят «изломы» графика функции $y = |x+1| + |x-1|$. Это точки с абсциссами $x = -1$ и $x = 1$. Следовательно, уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Ответ: $\{-1; 1\}$.

Вопросы для самоконтроля

1. ° Имеет ли смысл запись sin 2020?

2. ° Может ли синус числа x равняться: а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{7}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}$?

3. ° Являются ли чётными функции: а) $y = -\cos x$; б) $y = \sin^2 t$; в) $y = \cos^3 t$?

4. ° Какое из чисел sin 1°, sin 2°, sin 3°, ..., sin 100° является наибольшим?

5. ° С помощью каких преобразований из графика функции $y = \cos x$ можно получить график функции: а) $y = \cos(x + 2)$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = 2\cos x$; г) $y = \cos x + 2$?

6. ° График какой функции получим, если график функции $y = \sin x$:

а) параллельно перенести на 2 единицы в положительном направлении оси абсцисс;

б) параллельно перенести на 2 единицы в отрицательном направлении оси ординат;

в) сжать к оси абсцисс вдвое;

г) растянуть от оси абсцисс вдвое;

д) симметрично отобразить относительно начала координат;

е) симметрично отобразить относительно оси ординат?

7. Каковы область определения и множество значений функции: а) $y = \cos(x - 1)$; б) $y = \sin x - 1$; в) $y = \sin 2x$; г) $y = 3\sin x$; д) $y = \sin(-x)$; е) $y = -\cos x$?

8. Монотонна ли функция $y = \sin x$?

9. Являются ли нечётными функции: а) $y = -\sin t$, б) $y = \sin(\pi - t)$; в) $y = \sin^3 t$?

10. Что больше: а) $\cos\frac{\pi}{6}$ или $\cos\frac{\pi}{8}$; б) $\sin 40°$ или $\sin 75°$?

11. Возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:

а) $[\pi; 2\pi]$; б) $[0; \pi]$; в) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; г) $[-3; -2]$?

12. * Чему равняются наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на промежутке: а) $\left[0; \frac{7\pi}{6}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$?

13. * При каких значеннях c будет симметричным относительно прямой $x = c$ график функции: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$?

14. * На каких промежутках совпадают графики функций $y = |\sin x|$ и $y = \sin |x|$?

15. * Как получить график функции: а) $y = |\cos x|$ из графика функции $y = \cos x$; б) $y = \cos |x|$ из графика функции $y = \cos x$?

Задания для самостоятельной работы

1. Постройте график функции $y = \sin x, x \in [-2\pi; \pi]$ и укажите на нём точки, для которых:

1) ° $\sin x = -1$; 2) ° $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) ° $\sin x = \frac{1}{4}$;

4) $\sin x > 0$; 5) $\sin x > \frac{1}{2}$; 6) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Постройте график функции $y = \cos x, x \in [-\pi; 2\pi]$ и укажите на нём точки, для которых:

1) ° $\cos x = 1$; 2) ° $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) ° $\cos x = \frac{1}{3}$;

4) $\cos x < 0$; 5) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Найдите область определения функции:

1) ° $y=\dfrac{3\cos x-1}{2}$; 2) $y=\sin^2 x$; 3) ° $y=\dfrac{1}{2\sin^2 x+1}$; 4) $y=\dfrac{1}{\cos x+1}$;

5) $y=\dfrac{1}{\sin x}$; 6) * $y=\sqrt{\cos x}$; 7) * $y=\sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$; 8) * $y=\sqrt{1-2\sin x}$.

4. Какие из следующих функций являются чётными, какие нечётными, а какие — ни чётными, ни нечётными:

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\dfrac{1+\cos x}{x^2}$; 3) $y=x+\sin x$;

4) $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; 5) $y=\dfrac{1-\cos x}{1-\sin^2 x}$; 6) $y=1+\sin x$?

5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) ° $y = 2\sin x$; 2) ° $y = \cos x + 3$; 3) $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $y=1-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

5) $y=0{,}5\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 6) $y=1+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

6. Сравните числа:

1) ° sin 42° и sin 73°; 2) ° sin 230° и sin 250°; 3) ° sin 190° и sin 250°;

4) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$; 5) * $\cos\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ и $\sin\dfrac{4\pi}{7}$;

6) cos(–3) и cos(–2); 7) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ и $\sin\dfrac{\pi}{5}$; 8) * $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ и $\sin\dfrac{3\pi}{8}$.

7*. Докажите, что функция: 1) $y = \cos(\sin x)$ убывает на промежутке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$;

2) $y = \sin(\cos x)$ убывает на промежутке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. Найдите множество значений функции:

1) ° $y = \sin 2x$; 2) ° $y = 2\sin x$; 3) ° $y = 2\cos x - 1$; 4) $y = \cos^2 x$;

5) $y=\dfrac{1}{2}\sin^2 x-1$; 6) $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 7) $y=3\cos 2x-\dfrac{\pi}{6}$;

8) $y = 3\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$; 9) $y = 3|\cos 2x| - \frac{\pi}{6}$.

9. Постройте график функции:

1) ° $y = 3\cos x$; 2) ° $y = \sin 2x$; 3) $y = \sin\frac{x}{2} - 1$; 4) * $y = 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

10*. Постройте график функции:

1) $y = 2|\cos x - 1|$; 2) $y = |2\cos x - 1|$; 3) $y = 2|\cos x| - 1$; 4) $y = 2(|\cos x| - 1)$.

5) $y = \sin|x - 1|$; 6) $y = \sin(|x| - 1)$; 7) $y = |\sin(x - 1)|$; 8) $y = |\sin|x - 1||$.

11. Постройте график функции: 1) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) * $y = \cos\left(2|x| - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) * $y = \cos\left|2x - \frac{\pi}{4}\right|$; 4) * $y = \left|\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

12*. Изобразите множество таких точек $A(x; y)$, что:

1) $y = \sin|x|$; 2) $y = |\sin x|$; 3) $|y| = \sin x$; 4) $|y| = |\sin x|$.

13*. Над графиком функции $y = \cos x$ выполнили такие преобразования: сжатие к оси y в 4 раза; параллельный перенос вдоль оси x на 0,5 единицы в положительном направлении; сжатие к оси x в 5 раз; параллельный перенос вдоль оси y на 3 единицы в отрицательном направлении. График какой функции получили?

14. Найдите все числа x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, удовлетворяющие условию:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15*. Найдите все числа x на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, удовлетворяющие условию:

1) $\sin x \le \frac{1}{2}$; 2) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\cos x > \frac{1}{2}$; 6) $\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\cos x \le -\frac{1}{2}$

16*. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

1) $f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $f(x)=4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$.

17*. Решите уравнение $4\sin\frac{\pi}{6}(2x+3)=|x+1|+|x-1|$.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1, 2. Воспользуйтесь описанием построения графика функции $y=\sin x$. **3.** Примените свойство 1 функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. **4.** Примените свойство 4 функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. **5.** Примените свойство 6 функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. **6.** Воспользуйтесь промежутками монотонности функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. **7.** Воспользуйтесь тем, что функция, стоящая в скобках на указанном промежутке принимает значения от –1 до 1. **8.** Примените свойство 6 функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. **9.** Воспользуйтесь решением примеров 3 и 6. **10.** Воспользуйтесь решением примера 7. **11.** Воспользуйтесь решением примеров 3, 6, 7. **12.** Запишите заданные выражения без знака модуля, рассмотрите всевозможные случаи. **13.** Вспомните, как изменяется выражение, задающее функцию, при параллельном переносе графика вдоль координатных осей, сжатии и растяжении графика, симметричном отражении относительно координатных осей. **14.** Можно построить график заданной функции и указать на нём точки, для которых выполняется указанное равенство. **15.** Воспользуйтесь решением примера 5. **16.** Можно построить график заданной функции и указать на нём точки, для которых выполняется указанное соотношение. **17.** Воспользуйтесь решением примера 7.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

3. 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $(-\infty;+\infty)$ 1) $x\neq\pi+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 5) $x\neq\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$;

6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 7) $2\pi n<x<\pi+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$;

8) $-\frac{7\pi}{6}+2\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 1) Чётная; 2) чётная; 3) нечётная; 4) нечётная; 5) чётная; 6) ни чётная, ни нечётная. **5.** 1) Возрастает на каждом из проме-

жутков $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in \boldsymbol{Z};$ убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ 2) возрастает на каждом из промежутков $\left[\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ убывает на каждом из промежутков $\left[2\pi n;2\pi+2\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ 3) возрастает на каждом из промежутков $\left[\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3};\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}\right], n\in \boldsymbol{Z};$ убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ 4) возрастает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ убывает на каждом из промежутков $\left[-\frac{5\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ 5) возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ 6) возрастает на каждом из промежутков $\left[\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{7\pi}{6}+\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z};$ убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right],\ n\in \boldsymbol{Z}.$ **6.** 1) $\sin 42° < \sin 73°$;

2) $\sin 230° > \sin 250°$; 3) $\sin 190° > \sin 250°$;

4) $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$; 6) $\cos(-3) < \cos(-2)$;

7) $\cos\frac{\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{5}$; 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. **8.** 1) [–1;1]; 2) [–2; 2]; 3) [–3; 1]; 4) [0; 1];

5) $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$; 6) [– 3; 3]; 7) $\left[-3-\frac{\pi}{6};3-\frac{\pi}{6}\right]$; 8) $[0;3]$; 9) $\left[-\frac{\pi}{6};3-\frac{\pi}{6}\right]$.

13. $y=\frac{1}{5}\cos(4x-2)-3$. **14.** 1) $\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$; 3) $-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$. **15.** 1) $x\in\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$; 2) $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$; 3) $x\in\left(-\frac{5\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{2\pi}{3}\right]$ $\cup\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $x\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$; 6) $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; 7) $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$; 8) $x\in\left[-\frac{4\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right]$. **16.** 1) $f(x)>0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $f(x)<0$ при $x\in\left(\frac{5\pi}{6}+\pi n;\frac{4\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$ – нули функции; 2) $f(x)>0$ при $x\in\left(-\frac{5\pi}{2}+6\pi n;\frac{\pi}{2}+6\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $f(x)<0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{2}+6\pi n;\frac{7\pi}{2}+6\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{2}+3\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ – нули функции. **17.** ± 1.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Да. **2.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **3.** а) Да; б) да; в) да. **4.** sin 90°. **5.** а) Параллельным переносом на 2 единицы в отрицательном направлении оси абсцисс; б) сжатием к оси ординат в 2 раза; в) растяжеием от оси абсцисс в 2 раза; г) параллельным переносом на 2 единицы в положительном направлении оси ординат. **6.** а) $y=\sin(x-2)$; б) $y=\sin x-2$; в) $y=\frac{1}{2}\sin x$; г) $y=2\sin x$; д) $y=\sin x$; е) $y=-\sin x$. **7.** а). в) д) е) $D(y)=\boldsymbol{R}$, $E(y)=[-1;1]$; б) $D(y)=\boldsymbol{R}$, $E(y)=[-2;0]$; г) $D(y)=\boldsymbol{R}$, $E(y)=[-3;3]$. **8.** Нет. **9.** а) Да; б) да; в) да. **10.** $\cos\frac{\pi}{8}>\cos\frac{\pi}{6}$; б) $\sin 75°>\sin 40°$. **11.** а) возрастает; б) убывает; в) убывает; г) возрастает. **12.** а) 1 и $-\frac{1}{2}$; б) 1 и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** При $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; б) при $x=\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$. **14.** а) $[2\pi n;\pi(2n+1)]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in\boldsymbol{Z}$. **15.** Чтобы получить график функции: а) $y=|\cos x|$ из графика функции $y=\cos x$ нужно объединить часть графика функции $y=\cos x$, которая лежит выше оси x (для которой $\cos x\geq 0$), с графиком, в который отображается при симметрии относительно оси абсцисс та часть графика функции $y = \cos x$, для которой $\cos x < 0$; б) график функции $y = \cos |x|$ совпадает с графиком функции $y = \cos x$.

8. Свойства и графики функций *y* = tg *x* и *y* = ctg *x*

Повторяем теорию

Рассмотрим простейшие свойства функций $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$, пользуясь их определениями, и построим их графики.

Свойство 1. Функция *y* = tg *x* определена при всех действительных значениях *x*, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$**, а функция *y* = ctg *x* определена при всех действительных значениях *x*, кроме** $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ **.**

Доказательство. Действительно, функция $y = \mathrm{tg}\, x$ определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель выражения $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ равняется нулю. А условию $\cos x = 0$ как раз и удовлетворяют значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Аналогично доказывается вторая часть свойства. ■

Свойство 2. Функции *y* = tg *x* и *y* = ctg *x* — периодические с наименьшим положительным периодом π.

Свойство 3. Нулями функции *y* = tg *x* являются числа $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$**, а нулями функции *y*= ctg *x* — числа** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ **.**

Доказательство. Действительно, нули функции $y = \mathrm{tg}\, x$ совпадают с нулями функции $y = \sin x$, а нули функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ — с нулями функции $y = \cos x$ (см. п. 7)). ■

Свойство 4. Функции *y* = tg *x* и *y* = ctg *x* — нечётные.

Доказательство. Действительно, $\mathrm{tg}\ (-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg} x$. График функции $y = \mathrm{tg}\, x$ симметричен относительно начала координат. Так же доказывается это свойство для функции $y = \mathrm{ctg}\, x$. ■

Свойство 5. Функции $y = \mathrm{tg}\,x$ и $y = \mathrm{ctg}\,x$ положительны на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и отрицательны на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Свойство 6. Функция $y = \mathrm{tg}\,x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а функция $y = \mathrm{ctg}\,x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$.

Доказательство. Это свойство вытекает из геометрического смысла тангенса. Если x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{tg}x$, то есть координата точки B_x, которая является точкой пересечения прямой OP_x с линией тангенса, возрастает от 0 до $+\infty$ (рис. 73). Иначе говоря, если $x = 0$, то $\mathrm{tg}x = 0$, а когда x приближается к $\frac{\pi}{2}$, оставаясь меньшим $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\,x$ возрастает и может принимать как угодно большие значения.

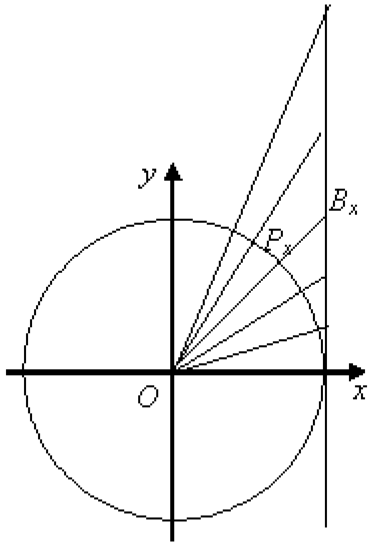


Рис. 73

Аналогично, из геометрического смысла котангенса вытекает, что когда x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, координата точки C_x на линии котангенса, которая является точкой пересечения прямой OP_x с линией котангенса и равняется $\mathrm{ctg}x$, убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 74). Иначе говоря, если $x = \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{ctg}x = 0$, а когда x приближается к 0, оставаясь больше 0, значения $\mathrm{ctg}\,x$ растут и могут принять как угодно большие значения. ■

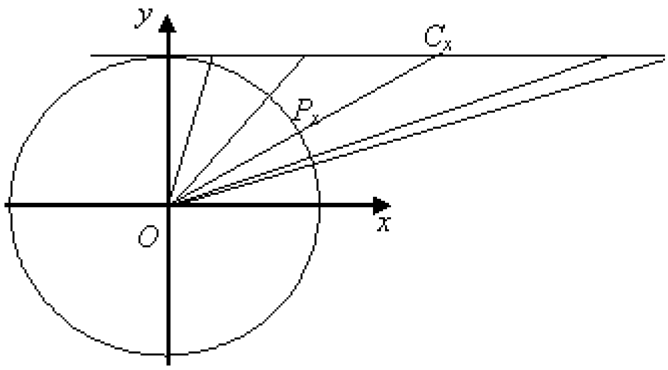


Рис. 74

Свойство 7. Множеством значений функций $y = \mathrm{tg}\,x$ и $y = \mathrm{ctg}\,x$ является множество всех действительных чисел.

Доказательство. Докажем, что произвольное вещественное число a может быть значением тангенса некоторого числа. Рассмотрим тригонометрическую окружность и проведем линию тангенса (рис. 75), обозначим на ней точку $B(1;\ a)$. Соединим точки O и B и обозначим буквой P точку пересечения прямой OB с окружностью. Точка P соответствует некоторому числу x, принадлежащему промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ее координаты — ($\cos x$; $\sin x$). Поэтому $P_0B = \mathrm{tg}\, x = a$. Аналогично свойство доказывается для функции $y = \mathrm{ctg}\, x$. ■

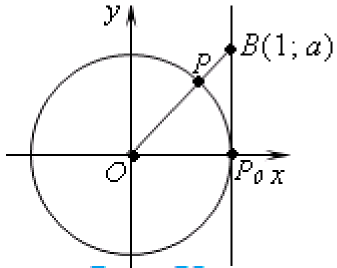


Рис. 75

Свойство 8. Функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$ непрерывны в своих областях определения. Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ являются точками разрыва функции $y = \mathrm{tg}\, x$, а точки $x = \pi k,\ k \in Z$ являются точками разрыва функции $y = \mathrm{ctg}\, x$.

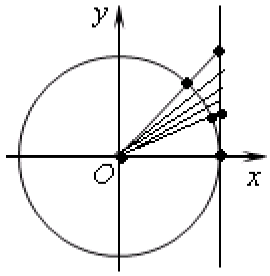


Рис. 76

Доказательство. Непрерывность функции $y = \mathrm{tg}\, x$ вытекает из того, что если две точки на тригонометрической окружности сближаются, то есть, расстояние между ними становится как угодно малым, то соответствующие точки на оси тангенсов (котангенсов) также сближаются (рис. 76). Аналогично обосновывается это свойство для функции $y = \mathrm{ctg}\, x$. ■

Рассмотренные свойства функции $y = \mathrm{tg}x$ позволяют построить ее график, как и для функции $y = \sin x$, в три этапа. На первом этапе построим график на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Для этого достаточно найти несколько точек графика и соединить их непрерывной линией. Как и при построении синусоиды, разобьем промежуток $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ на 4 равные части. Воспользовавшись

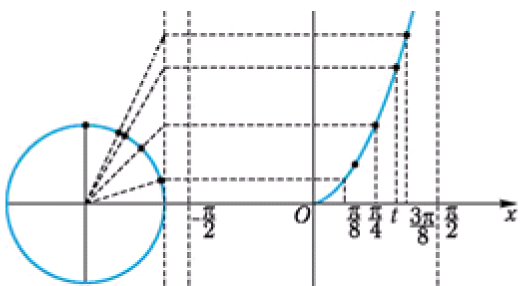


Рис. 77

линией тангенсов, построим четыре точки (рис. 77), принадлежащие графику функции $y = \mathrm{tg}x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Соединив точки (ввиду возрастания и непрерывности функции), непрерывной кривой, будем иметь эскиз графика функции на промежутке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

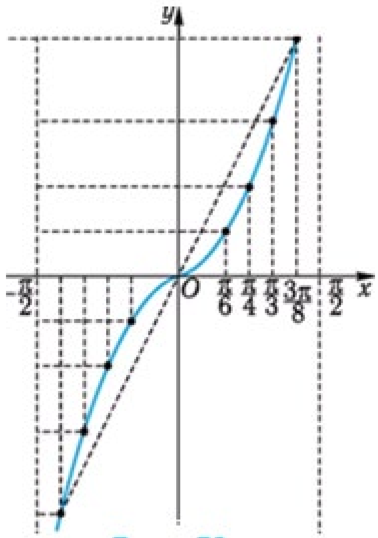


Рис. 78

На втором этапе построим график на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ преобразованием симметрии, воспользовавшись нечётностью тангенса (рис. 78).

Тем самым получили график функции $y = \mathrm{tg}x$ на промежутке, длина которого равна наименьшему положительному периоду тангенса π.

Так как функция $y = \mathrm{tg}x$ является периодической, то на третьем этапе ее полный график можно построить с помощью параллельного переноса полученного графика вдоль оси x на ±π; ±2π и т. д. (рис. 79). График функции $y = \mathrm{tg}x$ называют ***тангенсоидой***.

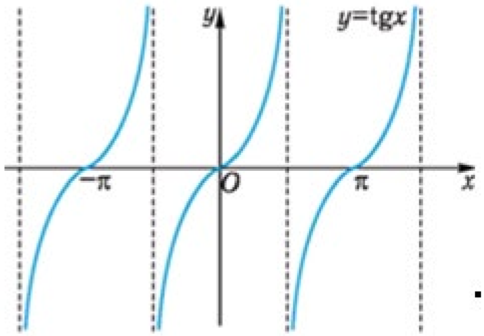


Рис. 79

График функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ можно получить из графика функции $y = \mathrm{tg}\, x$. Для этого, в соответствии с формулой приведения

$\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, достаточно график функции $y = \mathrm{tg}x$ параллельно перенести в отрицательном направлении оси x на

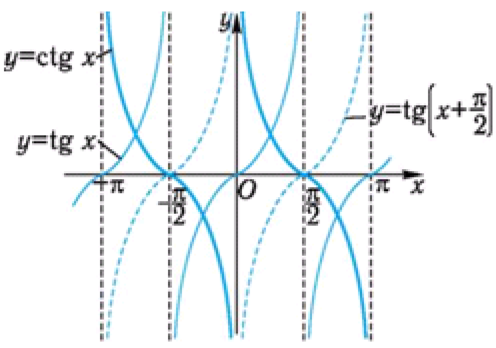


Рис. 80

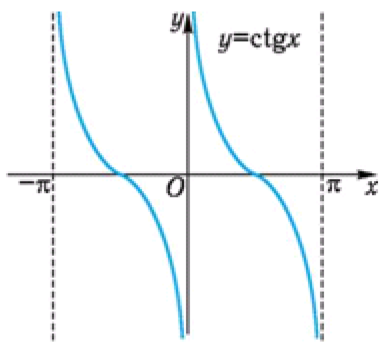


Рис. 81

$\frac{\pi}{2}$, а затем отобразить полученный график симметрично относительно оси абсцисс. На рис. 80 тангенсоида изображена тонкой линией, сдвинутая тангенсоида — штриховой, график функции $y = \text{ctg}\, x$ — жирной.

В окончательном виде график функции $y = \text{ctg}\, x$ изображён на рис. 81.

В следующей таблице приведены обобщенные свойства функций $y = \text{tg}\, x$ и $y = \text{ctg}\, x$. Свойства 5, 6 и 8 выше рассматривались на промежутках, длина которых равнялась основному периоду π этих функции. Применяя периодичность тангенса и котангенса параллельным переносом этих промежутков на πk, где k — целое число, эти свойства можно продолжить на всю координатную прямую.

Таблица

	$y = \text{tg}\, x$	$y = \text{ctg}\, x$
1.	Область определения функции — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.	Область определения функции — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, кроме $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
2.	Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π	
3.	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.	Функция имеет бесконечное множество нулей $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
4.	Функция нечётна	
5.	Функция положительна на каждом из интервалов $\left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$ и отрицательна на каждом из интервалов $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$	
6.	Функция возрастает на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$	Функция убывает на каждом из интервалов $\left(\pi k; \pi(k+1)\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

7.	Множеством значений функции является множество всех действительных чисел	
8.	Функция непрерывна в области определения. Точки $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ являются точками разрыва функции	Функция непрерывна в области определения. Точки $x=\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ являются точками разрыва функции

Приведем доказательство свойства 8 для тангенса.

Доказательство. Числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin x}{\cos x}$, как было показано в п. 7, являются непрерывными функциями на всей координатной оси. Если $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, то знаменатель дроби отличен от нуля и, согласно утверждению, сформулированному выше, функция y = tg x является непрерывной функцией в своей области определения. В точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, функция $y = tg\, x$ не определена, эти точки являются точками разрыва функции. ■

Исследуем поведение графиков функции y = tg x и y = ctg x вблизи точек их разрыва. Учитывая способ построения графиков этих функций, достаточно рассмотреть для тангенса лишь интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а для котангенса — (0; π).

Свойство 9. Если $0<x<\frac{\pi}{2}$, и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то соответствующие значения *tgx* являются положительными и неограниченно растут. Если же $-\frac{\pi}{2}<x<0$, и x приближается к $-\frac{\pi}{2}$, то соответствующие значения tg x являются отрицательными и неограниченно растут по модулю.

Если $0<x<\frac{\pi}{2}$ и x приближается к 0, то соответствующие значения ctg x являются положительными и неограниченно растут. Если же

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$**, и** x **приближается к π, то соответствующие значения** ***ctgx*** **являются отрицательными и неограниченно растут по модулю**.

Доказательство. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к единице, а $\cos x$ — к нулю, а поэтому $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ будет принимать положительные и как угодно большие значений (рис. 73). В этом случае иногда говорят, что $\operatorname{tg} x$ стремится к плюс бесконечности. При $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и для функции $y = \operatorname{ctg} x$ доказательство аналогичное. ■

Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ являются ***вертикальными асимптотами*** графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Прямые $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ являются ***вертикальными асимптотами*** графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Решаем

Пример 1. Найти абсциссы точек пересечения графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с прямой $y = \sqrt{3}$.

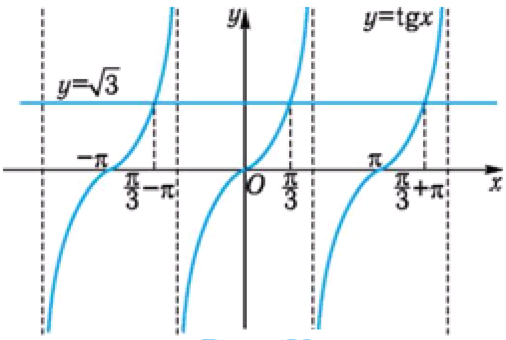


Рис. 82

Решение. Построив графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sqrt{3}$ (рис. 82), увидим, что та ветвь графика тангенса, которая соответствует промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, пересекает прямую $y = \sqrt{3}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Остальные точки пересечения имеют абсциссы $x_0 + \pi$; $x_0 - \pi$, $x_0 + 2\pi$, $x_0 - 2\pi$ и т. д. Итак, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение. Воспользуемся графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ на рис. 82. На данном промежутке функция возрастает. Поэтому наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах промежутка. Наибольшее значение тангенса на отмеченном промежутке равняется $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, наименьшее — $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

Пример 3. Построить графики функции:

1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = 2\operatorname{ctg} x$.

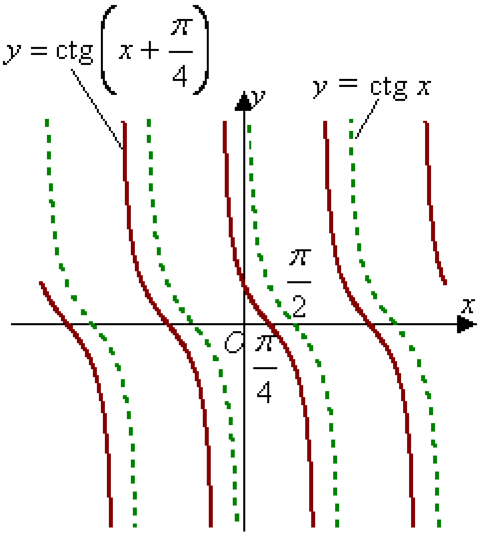


Рис. 83

Решение. 1) График функции $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ параллельным переносом его в отрицательном направлении оси абсцисс на $\dfrac{\pi}{4}$ (рис. 83).

2) График функции $y = \operatorname{ctg} x - 1$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ параллельным переносом его в отрицательном направлении оси ординат на 1 (рис. 84).

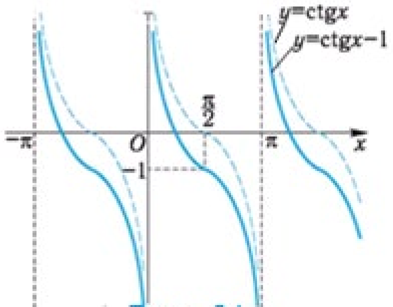


Рис. 84

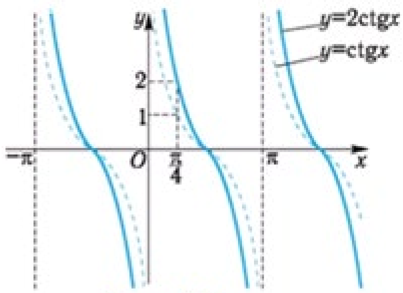


Рис. 85

3) График функции $y = 2\operatorname{ctg} x$ можна получить из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ растяжением его от оси абсцисс в два раза (рис. 85).

Пример 4. Сравнить числа: 1) $\operatorname{tg} 1{,}6\pi$ и $\operatorname{ctg} 0{,}7\pi$; 2) $\operatorname{ctg} 0{,}6\pi$ и $\operatorname{ctg} 0{,}9\pi$.

Решение. 1) Применяя формулы приведения, будем иметь: $\operatorname{tg} 1{,}6\pi = \operatorname{tg}(\pi + 0{,}6\pi) = \operatorname{tg}0{,}6\pi$; $\operatorname{ctg} 0{,}7\pi = \operatorname{tg}(0{,}5\pi - 0{,}7\pi) = -\operatorname{tg}0{,}2\pi = -\operatorname{tg}(\pi - 0{,}8\pi) =$

tg 0,8π. Поскольку $\frac{\pi}{2} < 0{,}6\pi < 0{,}8\pi < \pi$ и тангенс возрастает во второй четверти, то tg 0,6π < tg 0,8π, или tg l,6π < ctg 0,7π.

2) Поскольку $\frac{\pi}{2} < 0{,}6\pi < 0{,}9\pi < \pi$, и котангенс убывает во второй четверти, то ctg 0,9π < ctg 0,6π.

Ответ: 1) tg l,6π < ctg 0,7π. 2) ctg 0,9π < ctg 0,6π.

Пример 5. Найти нули, промежутки знакопостоянстап, возрастания и убывания функции $y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Выясним, при каких значениях x функция y = tg x принимает значение 0: tg x = 0, если $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Применив этот результат к данной функции, получим: $3x + \frac{\pi}{6} = \pi k,\, x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \boldsymbol{Z}$.

Воспользовавшись свойством 5 функции y = tg x, запишем условие, при котором данная функция принимает положительные значения: $\text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$, если $\pi k < 3x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + \pi k,\, k \in \boldsymbol{Z}$. Решив полученное неравенство относительно x, будем иметь: $-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \boldsymbol{Z}$.

Воспользовавшись снова свойством 5 функции y = tg x, запишем условие, при котором данная функция принимает отрицательные значения, и решим полученное неравенство относительно x: $\text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 0$, если $\frac{\pi}{2} + \pi k < 3x + \frac{\pi}{6} < \pi + \pi k$, $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутки, на которых функция возрастает, найдём, воспользовавшись свойством 6: $-\frac{\pi}{2} + \pi k < 3x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$. Промежутков, на которых данная функция убывает, не существует, ибо с возрастанием x возрастает аргумент данной функции, а с возрастанием аргумента на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, возрастает тангенс.

Ответ: $-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}, k \in \boldsymbol{Z}$ — нули функции; $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)>0$ на $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}\right), k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)<0$ на $\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}; \frac{5\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}\right), k \in \boldsymbol{Z}$; возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}\right), k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Найти все числа x из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых выполняется условие: 1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Решение. Воспользуемся графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 86).

1) График функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ пересекается с прямой $y = 1$ в точках с абсциссами $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{5\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$, и больше точек пересечения на этом промежутке не существует.

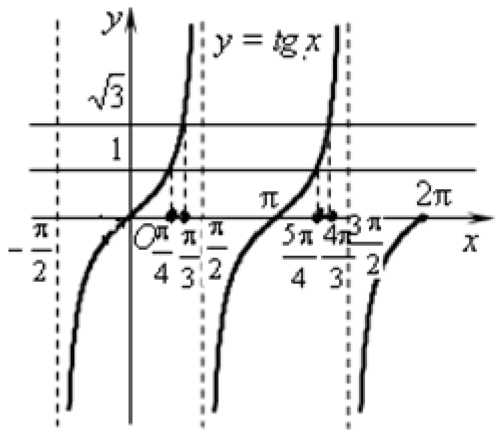


Рис. 86

2) Поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, то этот график пересекается с прямой $y = \sqrt{3}$ в точках $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$. На графике отмечены его части на отрезке $[0; 2\pi]$, которые удовлетворяют условию $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$. Им соответствует объединение промежутков: $0 \le x < \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$.

Ответ: 1) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; 2) $0 \le x < \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$.

Пример 7. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} x(x-\pi), \text{ если } x<\pi, \\ \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}x+|\mathrm{ctg}x|\right), \text{ если } x>\pi. \end{cases}$$

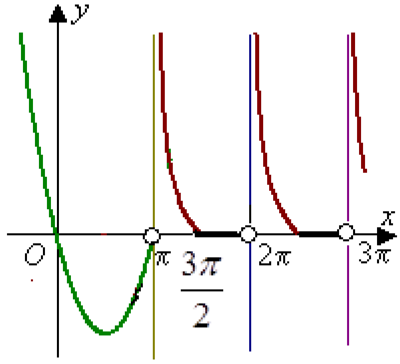


Рис. 87

Решение. Если $x > \pi$, то данная функция равняется ctg x для тех значений x, при которых ctg x принимает положительные значения, и нулю на тех промежутках, где ctg x отрицательный. Следовательно, необходимо в одной системе координат построить графики трёх функций $y = x(x - \pi)$, $y = 0$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$ и оставить те участки этих графиков, которые соответствуют отмеченным промежуткам (рис. 87). Обращаем внимание на то, что в точках π, 2π, 3π и вообще πk, $k \in \boldsymbol{Z}$, заданная функция не определена. ■

Вопросы для самоконтроля

1°. Имеет ли смысл запись: а) tg 2021; б) ctg 2021π?

2°. Является ли функция y = tg x возрастающей на промежутке:

а) $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$; б) $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$; в) $[0; \pi]$; г) (1,6; 3)?

3.° Является ли функция $y=\mathrm{ctg}x$ убывающей на промежутке …

а) $\left[\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{6}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; в) (1,6; 3)?

4.° Справедливо ли неравенство tg $x > 0$ во всех точках промежутка:

а) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$; г) (1; 1,5)?

5.° Справедливо ли неравенство ctg $x < 0$ во всех точках промежутка:

а) $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$; г) (2; 2,5)?

6.° В каких точках функции y = tg x и y = ctg x равны нулю?

7. Какова область определения функции: а) y = tg x – 1; б) y = tg (x + 1);

в) ctg $(x + 2)$; г) $y = \operatorname{ctg} x - 2$; д) $y = \operatorname{ctg} 2x$?

8. Могут ли функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ принимать значения 0,0000001; 2020; 10^{-20}; 10^{20}?

9. Каково множество значений функции: а) $y = \operatorname{tg} x - 1)$; б) $y = \operatorname{ctg} x + 1$?

10. Существуют ли на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ такие значения x, при которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает наименьшее значение?

11. Можно ли утверждать, что тангенс возрастает:

а) на всей своей области определения;

б) на каждом интервале, который полностью лежит в его области определения?

12. Чему равняется наименьший положительный период функции:

а) $y = \operatorname{tg} 3x$; б) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$?

13.* Сколько точек разрыва имеет функция: а) $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[0; 5\pi]$; б) $y = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $[-\pi; 3\pi]$?

14.* Как найти точки разрыва функции $y = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, зная точки разрыва функции $y = \operatorname{tg} x$?

15.* Как получить график функции $y = \operatorname{ctg} |x|$ из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$?

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите область определения функции:

1) ° $y = \operatorname{tg} 2x$; 2) ° $y = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x - 1}$.

2. Какие из следующих функций являются чётными, какие нечётными, а какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) ° $y = \operatorname{tg} 2x \cos 4x$; 2) ° $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 3) ° $y = \operatorname{tg} 3x \sin 2x$;

4) ° $y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x}$; 5) $y = \operatorname{tg} x + \cos x$; 6) $y = \frac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$?

3. Сравните числа: 1) tg (–80°) и tg (–50°); 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$; 3) tg 1 и tg 1,6;

4) tg (–2) и tg (–3); 5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$; 6) ctg 95° и ctg 117°;

7) ctg 2 и ctg 3; 8) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{11}$ и $\operatorname{tg} 1{,}3\pi$; 9) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; 10) $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{14}$ и $\operatorname{ctg}\frac{35}{27}\pi$.

4. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) ° $y = \operatorname{ctg} 2x$; 2) ° $y = \operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = 2\operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

5) * $y = \operatorname{tg}^2 x$; 6) * $y = \operatorname{ctg}^2 x$; 7) * $y = tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$; 8) * $y = 2 + ctg\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Найдите множество значений функции:

1) ° $y = \operatorname{tg}(x + 1)$; 2) ° $y = \operatorname{ctg}x - 1$; 3) $y = ctgx,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}$; 4) $y = \operatorname{tg}^2 x$;

5) $y = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x$; 6) $y = \operatorname{ctg}^3 x$; 7) * $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 8) $y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

6. Укажите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) ° $y = \operatorname{tg}x,\ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$; 2) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2},\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$; 3) $y = \sin x + \operatorname{tg}x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

7. Постройте график функции:

1) ° $y = \operatorname{tg}x,\ x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$; 2) ° $y = \operatorname{ctg}x,\ x \in (-\pi; 0)$; 3) ° $y = \operatorname{ctg}x - 1$;

4) ° $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 5) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 6) $y = \begin{cases} \operatorname{tg}x \text{ при } x \le \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{ctg}x \text{ при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

8*. Постройте график функции:

1) $y = |\operatorname{tg} x|$; 2) $y = \operatorname{tg} |x|$; 3) $y = |\operatorname{ctg} x|$; 4) $y = \operatorname{ctg}|x|$;

5) $y = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x$; 6) $y = \frac{|x|}{x}\operatorname{tg}x$; 7) $y = \frac{x}{|x|}\operatorname{ctg}x$.

9. Найдите все числа x на отрезке $[0;\ 2\pi]$, удовлетворяющие условию:

1) $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg}x = 1$; 4) $\operatorname{ctg}x = -\sqrt{3}$.

10. Найдите на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ все значения x, удовлетворяющие условию::

1) $\operatorname{tg} x \geq 1$; 2) $\operatorname{tg} x < -1$; 3) $\operatorname{ctg} x > -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < 1$; 5) $0 \leq \operatorname{ctg} x \leq 1$.

11*. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

1) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right)$.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Примените свойство 1 функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. **4.** Примените свойство 4 функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. **5.** Воспользуйтесь промежутками монотонности функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. **6.** Примените свойство 6 функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. **7.** Воспользуйтесь описанием построения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. **8.** Воспользуйтесь решением примера 3**. 9.** Воспользуйтесь решением примера 6. **10.** Воспользуйтесь решением примера 6. **11.** Можно построить график заданной функции и указать на нём точки, для которых выполняется указанное соотношение.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1.1) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ \ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$;3) $x \neq \frac{\pi n}{2}; n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n; x \neq \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) Нечётная. 2) нечётная; 3) чётная; 4) чётная; 5) ни чётная, ни нечётная; 6) чётная. **3.** 1) $\operatorname{tg}(-80°) < \operatorname{tg}(-50°)$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg}1 > \operatorname{tg}1,6$; 4) $\operatorname{tg}(-2) > \operatorname{tg}(-3)$; 5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$; 6) $\operatorname{ctg}95° > \operatorname{ctg}117°$; 7) $\operatorname{ctg}2 > \operatorname{ctg}3$; 8) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{11} <$ $< \operatorname{tg}1,3\pi$; 9) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; 10) $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{14} > \operatorname{ctg}\frac{35\pi}{27}$. **4.** 1) Убывает на каждом из промежутков $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) убывает на каждом из промежутков $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) убывает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; возрастает на каждом из промежутков $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; убывает на каждом из промежутков $\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) убывает на каждом из промежутков $\left(-\frac{3\pi}{4}+3\pi n;\frac{9\pi}{4}+3\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $(1;+\infty)$; 4) $\left[0;+\infty\right)$; 5) $\{1\}$; 6) $(-\infty;+\infty)$; 7) $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$; 8) $(-\infty;0]$.

6. 1) $1;-1$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}+1;0$. **9.** 1) $\frac{\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$.

10. 1) $x\in\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $x\in\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\left(-\pi;-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3\pi}{4}\right)$;

4) $x\in\left(-\frac{3\pi}{4};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{4};\pi\right)$; 5) $x\in\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. **11.** 1) $f(x) > 0$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $f(x) < 0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ – нули функции; 2) $f(x) > 0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $f(x) < 0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$ – нули функции.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) Да; б) нет. **2.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **3.** а) Да; б) нет; в) да. **4.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **5.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **6.** $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$.

7. Все действительные числа, кроме: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; б) $x=\frac{\pi}{2}-1+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; в) $x = -2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $x=\frac{\pi n}{2}, n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** Да. **9.** а), б) $\boldsymbol{R}$. **10.** Нет. **11.** а) Нет; б) да. **12.** а) $x=\frac{\pi}{3}$; б) 2π. **13.** а) 5; б) 5. **14.** Решить уравнение $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$. **15.** Чтобы получить график функции $y = \operatorname{ctg}|x|$ из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ нужно объединить часть графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, которая лежит выше оси x (для которой $\operatorname{ctg} x \geq 0$), с графиком, в который отображается при симметрии относительно оси абсцисс та часть графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, для которой $\operatorname{ctg} x < 0$.

9. Гармонические колебания

Повторяем теорию

Пусть по окружности радиуса A движется точка с постоянной угловой скоростью ω, то есть за единицу времени точка поворачивается на угол ω рад. За t единиц времени эта точка повернется на угол ωt рад. В начальный момент времени точка занимает положение M_0, угол BOM_0 равен α рад (рис. 88). В момент времени t точка займёт положение M, угол M_0OM равен ωt рад, угол BOM равен $(\omega t + \alpha)$ рад.

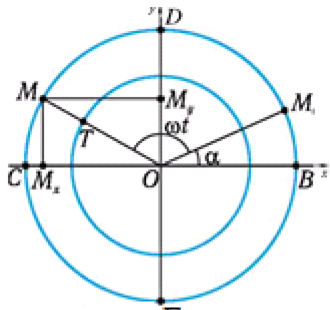


Рис. 88

Обозначим через M_x и M_y проекции точки M на оси x и y соответственно. Во время движения точки M по окружности ее проекция M_x на ось x совершает колебания вдоль горизонтального диаметра BC длиной $2A$, достигая то крайнего правого положения B, то крайнего левого положения C. Точно так же и ее проекция M_y на ось y совершает колебания вдоль вертикального диаметра DF, также достигая то наивысшего положения D, то самого нижнего положения F. Установим законы движения точек M_x и M_y. Построим единичную окружность с центром в точке O и обозначим через T точку пересечения луча OM с этой окружностью. Координаты точки $T = P_{\omega t + \alpha}$ равны $\cos(\omega t + \alpha)$ и $\sin(\omega t + \alpha)$, а поэтому, из соображений подобия, координаты точки M определяются формулами:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha),\ y = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Эти формулы описывают отклонения точек M_x и M_y от точки O — центра окружности. Они задают законы движения точек M_x и M_y, которые называются ***гармоническими колебаниями***.

Отметим, что при $A = 1$, $\omega = 1$, $\alpha = 0$ получим соответственно функции $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

Колебательные движения широко распространены в окружающем мире.

Представления о них дают и океанские волны, и маятниковые часы, и качели, и нервные импульсы. С ними связано распространение звука и света. Многие из этих явлений можно описать с помощью гармонических колебаний.

Введем некоторые понятия, связанные с гармоническими колебаниями. Точку O — середину отрезков, вдоль которого проходят гармонические колебания, — называют ***положением равновесия***, число A — ***амплитудой колебания***. Амплитуда характеризует величину наибольшего отклонения от положения равновесия.

Число ω, как известно, является угловой скоростью вращения точки. За 2π единиц времени точка повернется на угол $2\pi\omega$ рад, при этом ее проекции на ось x и на ось y выполнят $\frac{2\pi\omega}{2\pi} = \omega$ полных колебаний. Число ω, то есть количество полных колебаний за 2π единиц времени, называется еще ***круговой частотой колебаний***.

Число α, характеризующее начальное положение точки на окружности, называется ***начальной фазой колебания***, $\omega t + \alpha$ — фазой колебания.

Выше было рассмотрено построение графика гармонического колебания $y = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)$. Функцию $x = A\cos(\omega t + \alpha)$ можно получить из $y = A\sin(\omega t + \alpha)$, заменив α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Время T, в течение которого точка M совершает полный оборот, называется ***периодом гармонического колебания.*** За период T проекция M_x точки M на ось x дважды пройдет все свои возможные положения и возвратиттся в начальное положение. Исключения составляют лишь предельные положения B и C (см. рис. 88), каждое из которых точка пройдет один раз.

Так как за 2π единиц времени координата точки совершает ω полных колебаний, то одно полное колебание она совершает за $\frac{2\pi}{\omega}$ единиц времени, то есть

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Величина, обратная к периоду колебания, $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, называется ***частотой колебания***. Она показывает, сколько полных колебаний совершает координата точки за единицу времени.

На практике для построения графика гармонического колебания $y = A\sin(\omega t + \alpha)$ иногда действуют так: находят значения t, при которых $\sin(\omega t + \alpha)$ обращается в нуль, то есть точки пересечения графика с осью абсцисс. Деля пополам полученные отрезки, находят точки, в которых функция $y = A\sin(\omega t + \alpha)$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Эти значения равняются соответственно A или $-A$ в зависимости от знака функции.

Решаем

Пример 1. Построить график гармонического колебания $y = 5\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Решение. Функция $\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ обращается в нуль, если $2t + \dfrac{\pi}{3} = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, то есть если $t = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. При n = 0, 1,2 имеем: $t = -\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{6}$. В точке $\dfrac{\pi}{12}$ — середине отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right]$ — эта функция принимает значение 1, в точке $\dfrac{7\pi}{12}$ — середине отрезка $\left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ — значение –1 и т. д. Умножив полученные ординаты на 5, найдём характерные точки графика (рис. 89). ■

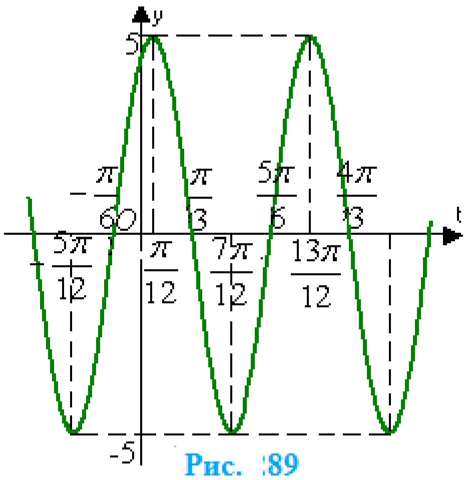


Рис. 89

Пример 2. Точка P совершает гармоническое колебание вдоль отрезка AB; O — середина отрезка AB. Расстояние AB, равное 12 см, точка P проходит за 14 с. Из начального положения, совпадающее с точкой O, точка P начала двигаться в направлении точки B.

1) Составьте формулу, выражающую закон изменения отклонения l точки P от точки O в зависимости от времени t.

2) Найдите положение точки на отрезке AB через 3,5; 7; 14 с после начала движения.

3) Через сколько секунд после начала движения точка P впервые достигнет точки B (точки A)?

Решение. 1) Отрезок AB можно рассматривать как горизонтальный диаметр окружности, по которой совершает вращательное движение некоторая частица, для которой точка P является проекцией её положения на диаметр AB (A — левый конец, B — правый). Амплитуда колебания равна половине длины отрезка AB, то есть 6 см. Половину окружности вращающаяся частица проходит за 14 с, поэтому её угловая скорость равна $\frac{\pi}{14}$ с$^{-1}$. Таким образом, закон изменения отклонения l точки P от точки O в зависимости от времени t имеет вид: $l = 6\cos\left(\frac{\pi}{14}t + \frac{\pi}{2}\right) = 6\sin\frac{\pi}{14}t$.

2) Так как

$l(3,5) = 6\sin\left(\frac{\pi}{14}\cdot 3,5\right) = 3\sqrt{2}; l(7) = 6\sin\left(\frac{\pi}{14}\cdot 7\right) = 6; l(14) = 6\sin\left(\frac{\pi}{14}\cdot 14\right) = 0$, то в указанные моменты времени точка P находится соответственно на середине отрезка OB, в точке B, в точке O.

3) Так как отклонение точки B от точки O равно 6 см, а отклонение точки A от точки O равно –6 см (положительным считаем направление движения от точки O до точки B), то искомые значения времени найдём, отыскав наименьшие положительные решения уравнений $6\sin\frac{\pi}{14}t = 6, 6\sin\frac{\pi}{14}t = -6$. Они соответственно равны 7 с и 21 с. ■

Вопросы для самоконтроля

1°. Чему равна амплитуда гармонического колебания точки, равномерно движущейся по окружности диаметра 10 см с центром в начале координат?

2°. Чему равна круговая частота гармонического колебания точки, равномерно движущейся с угловой скоростью 5 рад/с по окружности с центром в начале координат?

3°. Чему равен период гармонического колебания точки, равномерно движущейся с угловой скоростью 5 рад/с по окружности с центром в начале координат?

4°. Чему равна угловая скорость движения точки по окружности, если период соответствующего гармонического колебания координат равен 4?

5. Чему равна линейная скорость движения точки по окружности радиуса 2, если период соответствующего гармонического колебания координат равен 4?

6. Известно, что проекция точки, движущейся по окружности, на вертикальный диаметр совершает гармоническое колебание, определяемое формулой $y = 3\sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$. По какому закону изменяется проекция этой точки на горизонтальный диаметр?

7°. Чему равна начальная фаза гармонического колебания точки, равномерно движущейся по окружности с центром в начале координат, если в начальный момент времени её положение совпадает с верхним концом вертикального диаметра?

8.* Каким моментам времени соответствуют наибольшее и наименьшее значения функции $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, описывающей закон движения проекции точки, вращающейся по окружности, на горизонтальный диаметр?

Задания для самостоятельного решения

1°. Найдите амплитуду, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой:

1) $y = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = 2\sin\left(\frac{t}{2} + 1\right)$;

4) $y = 3\sin 4t$; 5) $y = \sin(t - 1)$.

2°. Дан закон, по которому изменяется координата (измеряемая в сантиметрах) движущегося тела. Найдите амплитуду, период, круговую частоту колебания. Вычислите координату тела в момент времени t_0, если:

1) $x(t) = 2{,}5\cos 3\pi t,\ t_0 = \dfrac{1}{9}\ c$; 2) $x(t) = 7\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right),\ t_0 = 2{,}5\ c$;

3) $x(t) = 2\cos 2\pi t,\ t_0 = 0{,}25\ c$; 4) $x(t) = 1{,}5\cos\left(\dfrac{\pi t}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right),\ t_0 = 3{,}5\ c$.

3. Дан закон, по которому изменяется со временем сила переменного тока: $I(t) = 5\sin 10\pi t$, I — сила тока, А; t — время, с.

1°) Найдите амплитуду, период, круговую частоту колебаний силы тока.

2°) Чему равна сила тока в момент времени $t = 0{,}05$ с?

3) В какие моменты времени сила тока принимает наибольшее значение?

4. Дан закон, по которому изменяется со временем напряжение: $U(t) = 220\cos 60\pi t$, U — напряжение, В; t — время, с.

1°) Найдите амплитуду, период, частоту колебаний напряжения.

2°) Чему равняется напряжение в момент времени $t = 0{,}5$ с?

3) В какие моменты времени напряжение принимает наибольшее значение?

5. Точка выполняет гармоническое колебание по закону: $y = 2\sin\left(3t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1) Найдите амплитуду, период и начальную фазу этого колебания.

2) Укажите, какие преобразования следует выполнить над синусоидой $y = \sin t$, чтобы получить график данного колебания.

3) Постройте схематически график гармонического колебания.

6. Ордината точки, вращающейся по окружности, совершает гармоническое колебание по закону: $y = 2\sin\left(3t - \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите моменты времени, в которых точка расположена в крайнем положении:

1) верхнем; 2) левом; 3) нижнем; 4) правом.

7. Напишите уравнение гармонического колебания, если:

1) амплитуда равна 1, период 0,2 с, начальная фаза $\frac{\pi}{6}$;

2) за 1 мин совершается 180 колебаний с амплитудой 7 см, а начальная фаза колебаний равна $\frac{\pi}{2}$.

8. Постройте график гармонического колебания в пределах одного периода:

1) $y = 3\sin 2t$; 2) $y = 2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = 4\sin\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь определениями указанных понятий. **2.** Для нахождения искомой координаты тела подставьте указанное значение t_0 в приведенную формулу. **3.** 2) Подставьте заданное значение времени в формулу силы тока; 3) воспользуйтесь наибольшим значением синуса. **4.** 2) Подставьте заданное значение времени в формулу напряжения; 3) воспользуйтесь наибольшим значением косинуса. **5.** Воспользуйтесь правилами геометрических преобразований функций. **6.** Воспользуйтесь тем, что в указанных положениях ордината точки соответственно равна 2, 0, –2, 0. Найдите период гармонического колебания и с его помощью запишите общий вид искомых моментов времени. **7.** Воспользуйтесь решением примера 2. **8.** Воспользуйтесь решением примера 1.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $6; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{1}{2}; 2; -\frac{\pi}{4}$; 3) $2{,}5; 6\pi; 1$; 4) $4; \frac{2\pi}{3}; 0$; 5) $1; 2\pi; 1$. **2.** 1) $2{,}5; \frac{2}{3}; 3\pi; \frac{5}{4}$ см; 2) 7; 0,5; 4π; $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ см; 3) 2; 1; 2π; 0 см; 4) 1,5; 6; $\frac{\pi}{3}; -0{,}75$ см. **3.** 1) 5; 0,2; 10π; 2) 5 А; 3) $t = 0{,}05 + 0{,}2n$ *с*, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **4.** 1) 220; $\frac{1}{30}; 60\pi$; 2) 220 В; 3) $\frac{n}{30}$ с, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **5.** 1) $2; \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}$; 2) параллельный перенос вдоль оси t на $\frac{\pi}{6}$ единиц в положительном направлении; сжатие к оси y втрое; растяжение от оси t вдвое. **6.** 1) $t = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n = 0,1,2,...$; 2) $t = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, n = 0,1,2,...$;

$t=\dfrac{2\pi(n+1)}{3}, n=0,1,2,...;$ 4) $t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}, n=0,1,2,....$ **7.**1)

7. 1) $y=0,5\sin\left(100\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=7\sin\left(6\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. 10 м. **2.** 5 рад/с. **3.** $\dfrac{2\pi}{5}$. **4.** $\dfrac{2}{\pi}$ рад/с. **5.** $\dfrac{4}{\pi}$ м/с. **6.** $y=\cos\left(5t-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **7.** $\dfrac{\pi}{2}$. **8.** A и $-A$.

10. Простейшие тригонометрические уравнения

Повторяем теорию

Рассмотрим решения простейших тригонометрических уравнений, то есть уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$, $\text{ctg}\, x = a$.

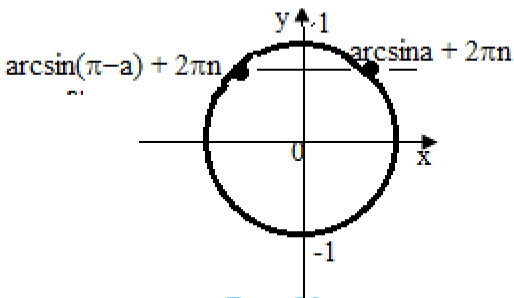


Рис. 90

Так как $|\sin x| \le 1$ и $y = \sin x$ — периодическая функция, то уравнение $\sin x = a$ при $|a| \le 1$ (т.е. при $-1 \le a \le 1$) имеет бесконечно много корней, а при $|a| > 1$ корней не имеет.

Будем предполагать, что $|a| \le 1$. Из свойств функции $y = \sin x$ следует, что для решения уравнения $\sin x = a$ достаточно найти один корень этого уравнения. Действительно, если x_0 – корень, то $x_0 + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — также корни этого уравнения. Кроме того, $\pi - x_0$ — корень данного уравнения. Следовательно, $\pi - x_0 + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — также корни, и других корней уравнение не имеет.

На промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает и принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$. Поэтому на этом промежутке существует единственный корень уравнения $\sin x = a$.

Корень уравнения, $\sin x = a$, принадлежащий промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, обозначают символом arcsin a (читают «арксинус числа a»).

Арксинус числа a (arcsin a) — это число из промежутка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ **та**

кое, что sin (arcsin a) = a.

Все остальные корни рассматриваемого уравнения выражаются через arcsin a (см. рис. 90):

x = arcsin $a + 2\pi n$, $x = \pi$ – arcsin $a + 2\pi n$ ($n \in \boldsymbol{Z}$)

Эти корни можно записать с помощью одной формулы:

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Если $a = \pm 1$, то формула (1) также верна. Однако в этих случаях проще сразу выписывать решения (см. рис. 90):

sin x = 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, sin x = – 1 при $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Рассмотрим теперь уравнение cos $x = a$. Если $|a| > 1$, то уравнение не имеет корней. Если $|a| \le 1$, то уравнение имеет бесконечно много корней. На промежутке [0; π] существует единственный корень уравнения.

Корень уравнения, принадлежащий промежутку [0; π], обозначают arccos a (читают “арккосинус числа a”).

Арккосинус числа a (arccos a) — это число из промежутка [0; π] такое, что cos(arccos a) = a.

Все корни уравнения cos $x = a$ легко выразить через arccos a (см. рис. 91):

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

При $a = \pm 1$ формулу (2) использовать нецелесообразно.

Очевидно, что корнями уравнения cos x = 1 являются числа $x = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а корнями уравнения cos x= –1 — числа $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

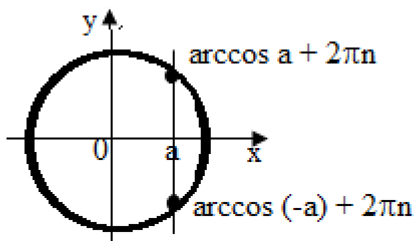


Рис. 91

Обратите внимание, что arcsin a и arccos a имеют смысл только для $|a| \le 1$. Имеют место следующие формулы, которые часто используются при решении тригонометрических уравнений:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a;\ \arccos(-a) = \pi - \arccos a. \qquad (3)$$

Наконец, рассмотрим уравнение $tg\,x = a$.

Уравнение $tg\,x = a$ имеет бесконечно много решений **при любом *a***. Его корнями (см. рис. 92) являются числа $x = \operatorname{arctg} a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}$. (4)

Здесь ***arctg a*** (арктангенс числа a) — ***это число из промежутка*** $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$***, тангенс которого равен a: (tg(arctg a)=a).***

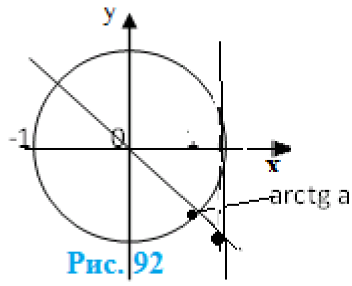


Рис. 92

Имеет место следующая формула, которая часто используются при решении тригонометрических уравнений: **arctg (–α) = –arctg α.**

Решаем.

Пример 1. Дано уравнения $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Найти его корни, принадлежащие промежутку [0; 2π].
2) Сколько корней этого уравнения лежат на отрезке [0; 100π]?

Решение. 1) Согласно формуле (1) имеем $2x - \dfrac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi n\ \ (n \in \boldsymbol{Z})$.

Отсюда $x = \dfrac{\pi}{6} + (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2}$ или $x = \dfrac{\pi}{6}(1 + (-1)^n) + \dfrac{\pi n}{2}$, $(n \in \boldsymbol{Z})$.

Перебирая значения $n \in \boldsymbol{Z}$, отберем те корни уравнения, которые принадлежат промежутку [0; 2π].

$n = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2};\ n = 0,\ x = \dfrac{\pi}{3};\ n = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2};\ n = 2,\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3};$

$n = 3,\ x = \dfrac{3\pi}{2};\ n = 4,\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi.$

Отсюда видно, что промежутку [0; 2π] принадлежат корни $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{4}{3}\pi$, $x = \dfrac{3}{2}\pi$.

2) Определим, сколько корней уравнения лежат на отрезке [0; 100π]. Заметим, что на каждом отрезке длиной 2π расположены 4 корня. Следовательно, на отрезке [0; 100π] расположено $4 \cdot 50 = 200$ корней.

Ответ: 1) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; 2) 200.

Пример 2. Определить, при каких значениях x функция $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ достигает наибольшего значения.

Решение. Известно, что $\cos z \le 1$. Поэтому $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$. Найдем такие x, чтобы $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$. Задача свелась к решению тригонометрического уравнения вида $\cos z = 1$. Согласно изложенному выше, $2x+\frac{\pi}{4}=2n\pi$, $x=-\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Найти наименьший положительный корень уравнения $\left(2\sin 15x+\sqrt{2}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Решение. Это уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 15x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0.\end{array}\right.$$

Согласно формуле (1) для первого уравнения имеем: $15x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi n$. Учитывая (3), получим $15x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi n$, $15x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{15},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Перебирая n, найдем наименьший положительный корень уравнения. При $n<0$ очевидно, что корни отрицательные. Поэтому рассмотрим $n \ge 0$: $n = 0$,

$x_0 = -\dfrac{\pi}{60} < 0$; $n = 1$, $x_1 = \dfrac{\pi}{60} + \dfrac{\pi}{15} = \dfrac{5\pi}{60} = \dfrac{\pi}{12} > 0$; $n = 2$, $x_2 = -\dfrac{2\pi}{15} = \dfrac{7\pi}{60} > 0$. Так как $x_2 > x_1 > 0$, то x_1 — наименьший положительный корень первого уравнения.

Решения второго уравнения совокупности имеют вид:

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in \boldsymbol{Z};\; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Его наименьший положительный корень получаем при $n = 0$: $x = \dfrac{\pi}{8}$. Так как $\dfrac{\pi}{8} > \dfrac{\pi}{12}$, то $\dfrac{\pi}{12}$ — наименьший положительный корень данного уравнения.

Ответ: $\dfrac{\pi}{12}$.

Пример 4. Вычислить $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + \arccos\dfrac{1}{7}\right)$.

Решение. Воспользовавшись сначала периодичностью функции $y = \sin x$, затем формулами приведения и, наконец, определением арккосинуса числа, получим: $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + \arccos\dfrac{1}{7}\right) = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{1}{7}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{1}{7}\right) = \cos\left(\arccos\dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{1}{7}$.

Ответ: $\dfrac{1}{7}$

Пример 5. Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Применяя свойство арккосинуса и формулы приведения, получим: $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \sin\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) = \sin\left(\arccos\dfrac{1}{3}\right)$.

Обозначим $\arccos\dfrac{1}{3} = \alpha$. Тогда согласно определению арккосинуса числа имеем: $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $0 \le \alpha \le \pi$. Наша задача свелась к следующей: найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ и $0 \le \alpha \le \pi$. Так как $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Пример 6. Вычислить $\sin\left(arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Применив свойство арктангенса $\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\,a$ и нечётность синуса, получим: $\sin\left(arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\sin\left(arctg\frac{1}{3}\right)$. Обозначим $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} = \alpha$. Тогда согласно определению арктангенса числа имеем: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и даже $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, так как $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$. Наша задача свелась к следующей: найти $\sin\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. На основании следствия из основного тригонометрического тождества имеем: $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Так как $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\alpha > 0$, то $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Из основного тригонометрического тождества имеем: $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Так $\sin\alpha > 0$, то $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 7. Решить уравнение $6tg\,3x + 1 - ctg3x = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $6tg\,3x + 1 - \frac{1}{tg3x} = 0$

или $\frac{6tg^2 3x + tg3x - 1}{tg3x} = 0$ (почему?). Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} 6tg^2 3x + tg3x - 1 = 0, \\ tg3x \neq 0. \end{cases}$ Уравнение системы заменой $tg\ 3x = t$ сведем к квадратному уравнению $6t^2 + t - 1 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Таким образом, мы получим совокупность простейших тригонометрических уравнений $\left[\begin{array}{l} tg3x = -\frac{1}{2}, \\ tg3x = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$ Каждое из этих равенств удовлетворяет условию $tg\ 3x \neq 0$. Решениями первого из этих уравнений являются числа $x = -\frac{1}{3} arctg\frac{1}{2} + \frac{k\pi}{3}$, второго — $x = \frac{1}{3} arctg\frac{1}{3} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{1}{3} arctg\frac{1}{2} + \frac{k\pi}{3}$, $\frac{1}{3} arctg\frac{1}{3} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

При решении тригонометрических уравнений нередко возникает необходимость из бесконечного множества его решений отобрать те, которые удовлетворяют определённому условию. Такая задача может возникнуть, например, при расширении области определения уравнения, при выполнении проверки и т. п. Отбор корней тригонометрического уравнения — задача не простая. Сейчас на примерах мы покажем, как такой отбор можно осуществить.

Пример 8. Решить уравнение $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = 0$.

Решение. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \boldsymbol{Z}, \\ 2x \neq \pi n, & n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, & k \in \boldsymbol{Z} \\ x \neq \frac{\pi n}{2}, & n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Итак, нам нужно из всех x, представимых в виде $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$, удалить посторонние корни, т.е. те x, которые представимы в виде $\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Есть разные способы выполнить такой отбор. Мы сделаем это с помощью тригонометрической окружности.

Отметим на тригонометрической окружности все точки, соответствующие числам $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$ (рис. 93). Получим 6 точек (они на чертеже обозначены черными кружками). Затем отметим на той же тригонометрической окружности точки, соответствующие числам $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Получим 4 точки (они отмечены светлыми кружками). Удалив совпадающие точки, получим ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ x=\frac{5\pi}{6}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

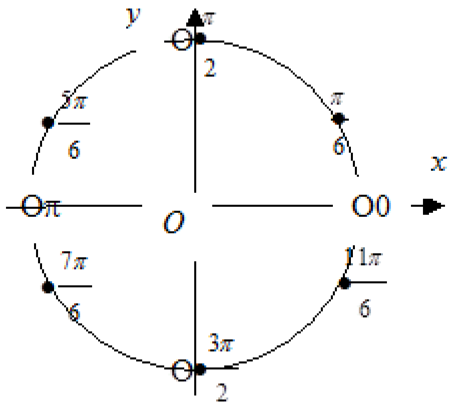


Рис. 93

Ответ: $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Отметим, что мы не случайно при записи системы обозначали произвольное целое число разными буквами: k в первом условии и n — во втором. Например, посторонний корень $x=\frac{3\pi}{2}$ получается при разных значениях k и n: $k = 4$, $n = 3$.

Пример 9. Найти нули функции $y=\cos 3x\sqrt{\cos 2x}$.

Решение. Это значит, нужно решить уравнение $\cos 3x\sqrt{\cos 2x}=0$. Уравнение $f(x)\cdot g(x)=0$ в ОДЗ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{array}\right.$. Следовательно, заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0, \\ \cos 2x=0\end{array}\right. \end{cases}$ (подумайте, почему?). Решим уравнения системы: cos $3x = 0$, $3x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3}$,

$n\in \boldsymbol{Z}$. $\cos 2x = 0$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Из полученных корней уравнений выберем те, которые удовлетворяют неравенству $\cos 2x \geq 0$. Учитывая, что косинус неотрицателен в I и IV четвертях, получим: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2x\leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ или $-\frac{\pi}{4}+k\pi \leq x\leq \frac{\pi}{4}+k\pi$.

Изобразим это множество, на тригонометрической окружности (рис. 94). Получим две дуги: если k = 0, то $-\frac{\pi}{4}\leq x\leq \frac{\pi}{4}$; если $k = 1$, то $\frac{3\pi}{4}\leq x\leq \frac{5\pi}{4}$. (Обратите внимание, что все остальные дуги при $k = -1, \pm 2\ldots$, на тригонометрической окружности совпадают с указанными выше).

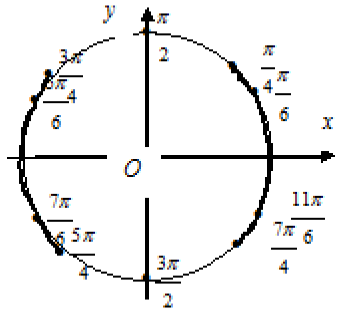


Рис.94

Теперь на тригонометрической окружности отметим точки $x=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3}$ и $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, и выберем те, которые лежат на выделенных дугах.

$n=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{4}$; $n=3$, $x=\frac{7}{6}\pi$, $x=\frac{7\pi}{4}$;

$n=1$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{4}\pi$; $n=4$, $x=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{9\pi}{4}$;

$n=2$, $x=\frac{5}{6}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$; $n=5$, $x=\frac{11\pi}{6}$.

Отсюда легко записать ответ: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Две первые серии корней можно записать одной формулой $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли уравнение $\sin x = a$ иметь: а) один корень; б) два корня?

2. Назовите два промежутка, на каждом из которых имеет только один корень уравнение: а) $\sin x = 0{,}4$; б) $\cos x = -0{,}2$.

3. Чему равняется: а) $\arcsin 0{,}5$; б) $\arcsin(-0{,}5)$; в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; д) $\arcsin 1$; е) $\arccos(-1)$; ж) $\arccos 0$?

4. При каких значениях a справедливо равенство:

а) $\sin(\arcsin a) = a$; б) $\arcsin(\sin a) = a$;

в) $\cos(\arccos a) = a$; г) $\arccos(\cos a) = a$?

5. Можно ли решения уравнения $\sin x = -1$ записать в виде $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \boldsymbol{Z}$?

6. Сколько решений уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ принадлежит отрезку $[0; 8\pi]$?

7. Может ли $\arcsin a$ принимать значения:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\pi$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\sqrt{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 1,5?

8. Какие значения могут принимать a и b, если: а) $b = \arcsin a$; б) $b = \arccos a$?

9. Может ли уравнение $\operatorname{ctg} x = a$:

а) иметь один корень; б) иметь два корня; в) не иметь ни одного корня?

10. Укажите два промежутка, на каждом из которых имеет лишь один корень уравнение: а) $\operatorname{ctg} x = a$; б) $\operatorname{tg} x = a$.

11. Чему равняется: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}(-1)$; в) $arcctg\sqrt{3}$; г) $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$;

д) $\operatorname{arctg} 0$; е) $\operatorname{arcctg} 0$?

12. При каких значениях a справедливо равенство:

а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a) = a$;

в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$; г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} a) = a$?

13. Можно ли решения уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ записать в виде $x = \pi + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$?

14. Сколько решений уравнения tg $x = 1$ принадлежит отрезку $[0;\ 5\pi]$?

15. Может ли arctg a принимать значения:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{3}$; д) $\sqrt{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 1,5?

16. Может ли arcctg a принимать значения:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) 4; е) –1; ж) π?

17. Какие значения могут принимать a и b, если: а) b = arctg a; б) b = arcctg a?

Задания для самостоятельного решения

1.° В какой четверти тригонометрической окружности лежит точка P_t, если:

1) t = arcsin 0,6; 2) t = arcsin (– 0,8); 3) t = arccos 0,8; 4) t = arccos (– 0,6).

2. Вычислите:

$$1)\ ^\circ\ \sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right);\quad 2)\ ^\circ\ \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right);\quad 3)\ ^\circ\ \cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right);$$

$$4)\ ^\circ\ \cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right);\quad 5)\ \sin(\arccos 0{,}6);\quad 6)\ \cos(\arcsin(-0{,}8)).$$

3. ^{0} Решите уравнение:

$$1)\ \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad 2)\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};\quad 3)\ \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2};\quad 4)\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5)\ \sin\frac{x}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2};\quad 6)\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 4-\sqrt{7};\quad 7)\ \sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1;\quad 8)\ 4\sin^2 x = 3;$$

9) $9\sin^2 x = -1$; 10) $(2\sin x + 1)(1 + \cos x) = 0$; 11) $(1-\sqrt{2}\cos x)(3 - 2\sin x) = 0$;

12) $\cos 2x = -0{,}6$; 13) $\sin\frac{x}{3} = 0{,}2$; 14) $\cos(x + 0{,}5) = 0{,}9$.

4. Найдите нули функции:

$$1)\ y = 2\sin x + 1;\quad 2)\ y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{4};\quad 3)\ y = 2\cos x + \sqrt{2}.$$

5. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=0$; 2) $\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=0$; 3) $\dfrac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=0$.

6. Укажите все нули функции:

1) $y=\sin x\sqrt{\cos x}$; 2) $y=\cos x\cdot \mathrm{tg}x+1$; 3) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\cos x\sqrt{\sin x}$.

7.* Найдите решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

1) $\sin x=-\dfrac{1}{2},\quad x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$; 2) $\cos 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad x\in[0;6\pi]$;

3) $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad x\in[-\pi;\ 3\pi]$.

8. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие приведенному условию:

1) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin 2x<0$; 2) $\cos 2x=0, \cos x<0$.

9.° В какой четверти тригонометрической окружности лежит точка P_t, если:

1) t = arctg 0,4; 2) t = arctg (–0,4); 3) t = arcctg 1,8; 4) t = arcctg (–1,6).

10. Вычислите: 1) ° $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 2) ° $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$;

3) ° $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$; 4) ° $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arcctg}\left(-1\right)\right)$.

11.[0] Решите уравнение: 1) $\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}=-1$; 3) $\mathrm{tg}2x=3$;

4) $\mathrm{ctg}\,x=3-\sqrt{2}$; 5) $\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}=1$; 6) $\mathrm{ctg}^2 x=3$; 7) $\mathrm{ctg}\,3x=-0{,}3$; 8) $\sqrt{3}-\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)=0$;

9) $(\mathrm{ctg}\,x+3)(\mathrm{tg}^2x+1)=0$; 10) $\left(2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right)(2\mathrm{ctg}\,x+1)=0$.

12.° Найдите нули функции:

1) $y=\mathrm{tg}x+1$; 2) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}x-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; 3) $y=2\mathrm{ctg}x+\dfrac{6}{\sqrt{3}}$.

13. Решите уравнение:

1) $\mathrm{tg}\pi x=\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{x-1}\,\mathrm{ctg}x=0$; 3) $\mathrm{tg}|x|=1$.

14. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие приведенному условию:

1) $\mathrm{ctg}x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} < 0$; 2) $\mathrm{tg}2x = 0, \cos x < 0$; 3) $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{3}, \sin\dfrac{x}{3} > 0$.

15. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

1) $\mathrm{tg}(3x + 75°) = 1$; 2) $(\mathrm{ctg}x + 1)(\sqrt{3} + \mathrm{tg}x) = 0$; 3) $\mathrm{tg}(5x + 2) = 0$.

16.* Найдите решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

1) $\mathrm{tg}\,x = -\sqrt{3},\ x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\mathrm{ctg}\,2x = 1,\ x \in \left[-\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

3) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ x \in [0;\ 6\pi]$; 4) $\mathrm{ctg}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1,\ x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Указания к заданиям для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь определениями arcsin a и arccos a. **2.** Вначале укажите значение выражения в скобках, а затем воспользуйтесь значениями тригонометрических функций от некоторых углов или основным тригонометрическим тождеством. **3.** Воспольвзуйтесь решениями примеров 1 и 2. **4.** Составьте соответствующее уравнение и решите его. **5.** Воспользуйтесь решением примера 8. **6.** Воспользуйтесь решением примера 9. **7, 8.** Из всех решений заданного уравнения отберите те, которые удовлетворяют заданному условию. Как это сделать, указано в примерах 8 и 9. **9.** Воспользуйтесь определениями arctg a и arcctg a. **10.** Воспользуйтесь решением примера 6. **11.** Воспользуйтесь формулами общих решений простейших тригонометрических уравнений. **12.** Составьте соответствующее уравнение и решите его. **13.** Воспользуйтесь решением примера 7. **14, 16.** Из всех решений заданного уравнения отберите те, которые удовлетворяют заданному условию. Как это сделать, указано в примерах 8 и 9. **15.** Воспользуйтесь решением примера 3.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) В первой; 2) в четвертой; 3) в первой; 4) во второй.**2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 0,8; 6) 0,6. **3.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

2) $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, -\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{5\pi}{12}+2\pi n, \frac{\pi}{12}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 5) нет решений; 6) нет решений; 7) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4}+3\pi n, n\in Z$; 8) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 9) нет решений; 10) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi, \pi+2n\pi, n\in\boldsymbol{Z}$; 11) $\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi, n\in\boldsymbol{Z}$; 12) $\pm\frac{1}{2}\arccos(-0,6)+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 13) $3(-1)^n\arcsin 0,2+3\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 14) $-0,5\pm\arccos 0,9+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

4. 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n; n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 2) нет решений; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 2) нет нулей; 3) $\frac{1}{\pi n}, n\in\boldsymbol{Z}, n\neq 0$; 4) $\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{15\pi}{8}$; $\frac{17\pi}{8}; \frac{23\pi}{8}; \frac{25\pi}{8}; \frac{31\pi}{8}; \frac{33\pi}{8}; \frac{39\pi}{8}; \frac{41\pi}{8}; \frac{47\pi}{8}$; 3) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$; 4) $-\frac{41\pi}{36}$; $-\frac{17\pi}{36}; \frac{7\pi}{36}; -\frac{35\pi}{36}$; $-\frac{11\pi}{36}$. **8.** 1) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+4\pi n; n\in\boldsymbol{Z}$. **9.** 1) В первой; 2) в четвертой; 3) в первой; 4) во второй. **10.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) -1. **11.** 1) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$;

3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{2}, n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\operatorname{arcctg}(3-\sqrt{2})+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$;

5) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{5\pi}{6}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}(-0,3)+\frac{\pi n}{3}, n\in \boldsymbol{Z}$;

8) $\frac{2\pi}{15}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 9) $\operatorname{arcctg}(-3)+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 10) $2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$;

$\operatorname{arcctg}(-0,5)+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$;

3) $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. **13.** 1) $\frac{1}{3}+n, n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $1; \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n=0,1,2,...$;

3) $\frac{\pi}{4}+\pi n; -\frac{\pi}{4}-\pi n, n=0,1,2,...$; 4) $(-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. **14.** 1) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$;

2) $\pi+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{2\pi}{3}+6\pi n, \frac{8\pi}{3}+6\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$. **15.** 1) $50°$; 2) $120°$; 3) $\frac{\pi-2}{5}$. **16.**

1) $\frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$; 2) $-\frac{7\pi}{8}$; $-\frac{3\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}$; 3) $0; 2\pi; 4\pi; 6\pi$; 4) $-\frac{4\pi}{3}; -\pi; -\frac{2\pi}{3}$;

$-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) Нет; б) нет. **2.** а) $\left(0;\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right),\left(\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)$; **3.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) π; ж) $\frac{\pi}{2}$. **4.** а) $-1\le a\le 1$, $-\frac{\pi}{2}\le a\le\frac{\pi}{2}$; б) $-1\le a\le 1$, $0\le a\le\pi$. **5.**Да.**6.** 8. **7.** а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) да; е) нет; ж) да. **8.** а) $-1\le a\le 1$, $-\frac{\pi}{2}\le b\le\frac{\pi}{2}$; б) $-1\le a\le 1$, $0\le b\le\pi$. **9.** а) Нет; б) нет; в) да. **10.** а), б) $\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. **11.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{6}$; д) 0; е) $\frac{\pi}{2}$. **12.** а) $a\in\boldsymbol{R}$; б) $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$; в) $a\in\boldsymbol{R}$; г) $0<a<\pi$. **13.** Да. **14.** 5. **15.** а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) да; ж) да. **16.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) нет; ж) нет. **17.** а) $a\in\boldsymbol{R}$; $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$; б) $a\in\boldsymbol{R}$; $0<a<\pi$.

Тренажёр

Вариант 1

1. Измерение углов

1. Градусная мера угла в $\frac{7\pi}{6}$ радиан равна …

А. 150°. **Б.** 330°. **В.** 210°. **Г.** 420°.

2. Радианная мера угла в 270° равна …

А. π. **Б.** $\frac{4\pi}{3}$. **В.** $\frac{3\pi}{4}$. **Г.** $\frac{3\pi}{2}$.

3. Точка тригонометрической окружности с абсциссой -1 соответствует числу

А. $\frac{\pi}{2}$. **Б.** π. **В.** $\frac{3\pi}{2}$. **Г.** 2π.

3. Тригонометрические функции числового аргумента

4. Сколько чисел t из промежутка [0; 3π] удовлетворяют условию $\sin t = 1$?

А. Два. **Б.** Три. **В.** Четыре. **Г**. Шесть.

5. Сколько чисел t из промежутка [0; 2π] удовлетворяют условию $\mathrm{tg}\, t = 0$?

А. Одно. **Б.** Четыре. **В.** Два. **Г**. Три.

6. Косинус числа не может равняться ...

А. $-\frac{1}{0,981}$. **Б.** $-\frac{\pi}{4}$. **В.** $\frac{\pi}{4}$. **Г.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

7. Определите знаки выражений $\sin(-2), \cos 2, \mathrm{tg}(-2)$.

А. –, +, –. **Б.** +,–, –. **В.** –, –, +. **Г.** +,+,+.

4. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

8. Найдите значение sin α, если cos α = – 0,8 и π < α < 2π.

А. 0,2. **Б.** 0,6. **В.** – 0,36. **Г**. – 0,6.

9. Чему равно значение cosα, если $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и sin α < 0?

А. $-\frac{4}{5}$. **Б.** $\frac{4}{5}$. **В.** $\frac{3}{5}$. **Г.** $-\frac{3}{5}$.

10. Синус и косинус одного и того же аргумента не могут равняться ...

А. 0,6 и – 0,8. **Б.** $\frac{12}{13}$ и $-\frac{5}{13}$. **В.** 0,5 и 0,5. **Г.** $-\frac{3}{4}$ и $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

11. Какому из приведенных выражений равно выражение $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - \cos^4\alpha$ при всех значениях α?

А. $-\sin^2\alpha$. **Б.** $\sin^2\alpha$. **В.** $\cos^2\alpha$. **Г.** $-\cos^2\alpha$.

12. Вычислите $\frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}5$.

А. 0,6. **Б.** –0,6. **В.** $-\frac{5}{3}$. **Г.** $\frac{5}{3}$.

5. Формулы приведения

13. Вычислите $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

А. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Б.** $\frac{1}{2}$. **В.** $-\frac{1}{2}$. **Г.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Если $\cos 15° = a$, то $\cos 345°$ равен …

А. $\sqrt{1-a^2}$. **Б.** $-\sqrt{1-a^2}$. **В.** a. **Г.** $-a$.

15. Вычислите $\sin 300° + \cos 330°$.

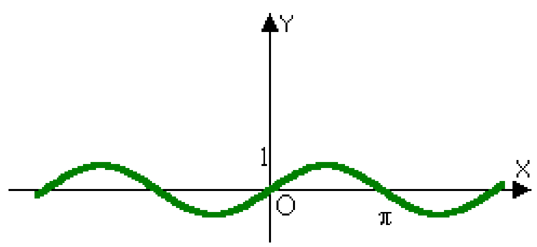
А. 0. **Б.** $\sqrt{3}$. **В.** 1. **Г.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

16. Значение выражения $\cos^2 80^\circ + \cos^2 190^\circ + \cos^2 260^\circ + \cos^2 350^\circ$ равно …

А. 1. **Б.** 2. **В.** 0. **Г.** 4.

7. Свойства и графики синуса и косинуса

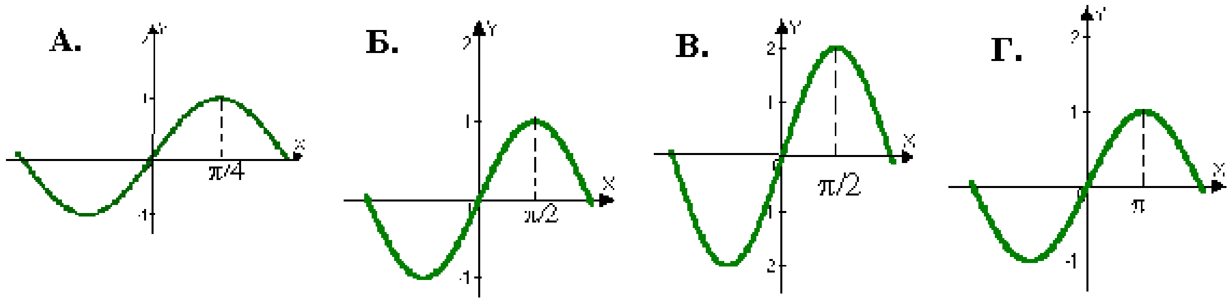
17. На рисунке изображен график функции $y = \sin x$. На каком из приведенных промежутков возрастает функция $y = \sin x$?



А. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right)$. **Б.** $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

В. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$. **Г.** $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

18. На каком рисунке изображен график функции $y = \sin 2x$?



19. Функция $y = x\sin x$ …

А. нечетна. **Б.** четна. **В.** ни четна, ни нечетна. **Г.** четна при $x \geq 0$.

20. Наименьшее значение функции $y = \sin x - 2$ равно …

А. -1. **Б.** -2. **В.** -3. **Г.** 1.

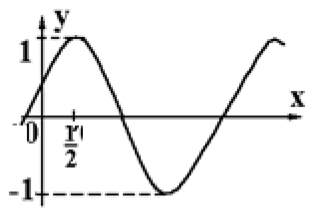
21. Наименьший положительный период функции $y = \cos 2x$ равен ...

А. 2π. **Б.** 4π. **В.** $\frac{\pi}{2}$. **Г.** π.

22. На рисунке изображен график функции …

А. $y = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$. **Б.** $y = \cos x + \frac{1}{2}$.

В. $y = \cos x - \frac{1}{2}$. **Г.** $y = \cos\left(x - \frac{1}{2}\right)$.



23. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

А. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **Б.** $[-1;1]$. **В.** $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. **Г.** $[0;1]$.

8. Свойства и графики тангенса и котангенса

24. Области определения функции $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ принадлежит число ...

А. 0. **Б.** $\frac{\pi}{2}$. **В.** π. **Г.** $\frac{3\pi}{4}$.

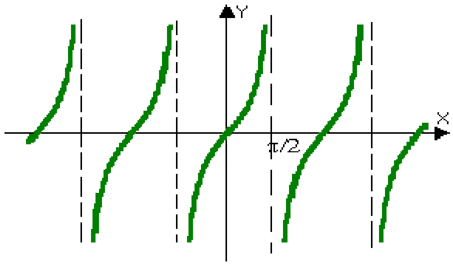
25. Области определения функции $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$ принадлежит число ...

А. 0. **Б.** $\frac{\pi}{2}$. **В.** π. **Г.** $\frac{3\pi}{4}$.

26. На рисунке изображен график функции ...

А. $y = \operatorname{tg} 2x$. **Б.** $y = \operatorname{tg} x$.

В. $y = \operatorname{ctg} x$. **Г.** $y = \operatorname{ctg} 2x$.



10. Простейшие тригонометрические уравнения

27. Значение выражения $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin 1$ равно ...

А. $\frac{7\pi}{6}$. **Б.** $\frac{\pi}{3}$. **В.** $\frac{4\pi}{3}$. **Г.** $\frac{\pi}{6}$.

28. При каком из перечисленных значений a выражение $\arccos a$ имеет смысл?

А. $\sqrt{2}$. **Б.** $-\sqrt{2}$. **В.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **Г.** $2-\sqrt{2}$.

29. Выражение $\operatorname{arc\,tg} a$ не может равняться ...

А. 1,5. **Б.** $-\sqrt{2}$. **В.** 1,6. **Г.** $\frac{5\pi}{11}$.

30. График функции $y = 2\cos x$ проходит через точку…

А. (0; 2). **Б.** $\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$. **В.** (π; 2). **Г.** $\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$.

31. Не имеет решений уравнение ...

А. $\sin x = \frac{2}{3}$. **Б.** $\cos x = \frac{2}{3}$. **В.** $\sin x = \frac{3}{2}$. **Г.** $tgx = \frac{3}{2}$.

32. Сколько решений на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; 4\pi\right]$ имеет уравнение $\cos x = 0$?

А. Три. **Б.** Четыре. **В.** Пять. **Г.** Шесть.

33. Решите уравнение $\sqrt{x}\cos x = 0$.

А. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **Б.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, \ldots\ldots$

В. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = 0$. **Г.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, \ldots, x = 0$.

34. Сколько корней на промежутке [0;2π] имеет уравнение $\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Три.

Подсказки к выполнению заданий 1 варианта теста

1. Воспользуйтесь тем, что градусная мера угла в π радиан равна 180°.

2. Воспользуйтесь тем, что радианная мера угла в 180° равна π радиан.

3. Воспользуйтесь тем, что каждому действительному числу t на тригонометрической окружности (окружности единичного радиуса с центром в начале координат) соответствует точка P_t, полученная из точки $A(1; 0)$ поворотом ее вокруг начала координат на t радиан.

4. Воспользуйтесь определением синуса числа:

Синусом числа t называется ордината точки тригонометрической окружности, соответствующей числу t.

5. Воспользуйтесь определением тангенса числа:

Тангенсом числа t называется отношение синуса числа t к его косинусу: $\mathrm{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

6. Воспользуйтесь тем, что из определения косинуса числа t вытекает, что $|\cos t| \leq 1$.

7. Найдите на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам –2, 2.

8. Примените основное тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Не забывайте о знаке $\sin \alpha$.

9. Примените следствие из основного тригонометрического тождества $1 + \mathrm{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$. Не забывайте о знаке $\cos \alpha$.

10. Примените основное тригонометрическое тождество.

11. Воспользуйтесь тем, что $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ и основным тригонометрическим тождеством.

12. Обратите внимание на то, что известно значение $\mathrm{tg}\, \alpha$. Подумайте над тем, с помощью какого преобразования можно получить в числителе и знаменателе данной дроби только $\mathrm{tg}\, \alpha$.

13. Примените формулы приведения.

1) В формуле приведения функция не меняется, если к аргументу прибавлять $\pm\pi$ или же $\pm 2\pi$, и меняется (синус на косинус, тангенс на котангенс, косинус на синус, котангенс на тангенс), если прибавлять числа $\pm\frac{\pi}{2}$ или $\pm\frac{3\pi}{2}$.

2) Полученная функция в правой части равенства (например, $\sin(\pi + t) = -\sin t$) берется со знаком, совпадающим со знаком значения левой части, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

14. Воспользуйтесь формулами приведения.

15. Представьте аргументы тригонометрических функций, входящих в данное выражение, в виде, удобном для применения формул приведения.

16. Обратите внимание на то, что 80° = 90° – 10°, 190° = 180° + 10°, 260° = 270° – 10°, 350° = 360° – 10°.

17. Используйте тот факт, что на промежутках возрастания большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть с ростом независимой переменной увеличивается и зависимая.

18. Воспользуйтесь тем, что график функции $y = \sin 2x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сжатием к оси ординат в 2 раза.

19. Воспользуйтесь определениями чётной и нечётной функций.

Функция y = f(x) называется чётной (нечётной), если:

1) её область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство: f(–x) = f(x) (f(–x) = – f(x)).

20. То, что –1 является наименьшим значением функции $y = \sin x$, следует из неравенств $-1 \le \sin x \le 1$ и того факта, что это значение функция принимает, например, при $x = -\frac{\pi}{2}$.

21. Используйте тот факт, что если функция f является периодической с наименьшим положительным периодом T, то функция $Af(kx + b)$, где A, $k \neq 0$, b — некоторые числа, также является периодической с наименьшим положительным периодом $\frac{T}{|k|}$.

22. Обратите внимание на то, что график функции, изображённый на рисунке, получен из графика функции $y = \cos x$ параллельным переносом.

23. Преобразуйте выражение для данной функции, применив основное тригонометрическое тождество.

24. Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $\operatorname{tg} x$ имеет смысл и отличен от нуля.

25. Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл и неотрицателен.

26. Воспользуйтесь тем, что функция, график которой изображён на рисунке, не определена в точке $\frac{\pi}{2}$, а при $x = 0$ определена и равна нулю.

27. Воспользуйтесь определениями арксинуса и арккосинуса.

Арксинусом числа а называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$***, синус которого равен а.***

Арккосинусом числа а называется такое число из промежутка **[0; π]*****, косинус которого равен а.***

28. Воспользуйтесь тем, что **cos (arccos *a*) = *a*.**

29. Воспользуйтесь определениями арктангенса.

Арктангенсом числа а называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$***, тангенс которого равняется а.***

30. Обратите внимание на то, что ординаты всех точек, приведенных в ответах, одинаковы.

31. Воспользуйтесь множествами значений тригонометрических функций.

32. Можно воспользоваться определением косинуса, найдя на тригонометрической окружности точки с абсциссой 0.

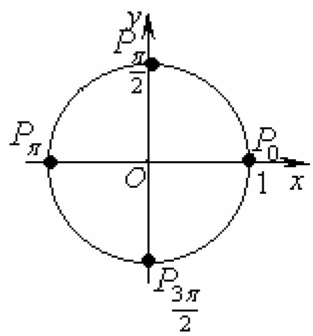
33. При нахождении значений x обратите внимание на то, что x может принимать только неотрицательные значения.

34. Убедитесь в том, что заданное уравнение равносильно уравнению $\cos x = 0$.

Советы к выполнению заданий 1 варианта теста

1. Замените 1 радиан на $\dfrac{180°}{\pi}$.

2. Замените 1° на $\dfrac{\pi}{180}$ радиан.



3. Воспользуйтесь тем, что концам горизонтального и вертикального диаметров тригонометрической окружности соответствуют числа 0, $\dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ (см. рис.).

4. Найдите на тригонометрической окружности точку с ординатой 1, а затем выберите числа из промежутка [0; 3π], которым соответствует эта точка.

5. Учитывая, что дробь равна нулю при тех значениях переменной, при которых числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, воспользуйтесь определением синуса и косинуса числа t и подсказкой и советом к заданию 4 теста.

Косинусом числа t называется абсцисса точки тригонометрической окружности, соответствующей числу t.

6. Сравните с 1 модули чисел, приведенных в ответах.

7. Чтобы легче было находить на тригонометрической окружности точки, соответствующие указанным числам, обратите внимание на то, что $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57; \pi \approx 3{,}14, \dfrac{3\pi}{2} \approx 4{,}71.$ Точки, соответствующие отрицательным числам, можно получить, совершая движение по тригонометрической окружности по часовой стрелке.

8. Обратите внимание на то, что из основного тригонометрического тождества можно найти $\sin^2\alpha$. Для нахождения $\sin\alpha$ установите его знак, воспользовав шись условием, приведенным для α.

9. Подобно предыдущему заданию вначале найдите $\cos^2\alpha$. Затем установите знак $\cos\alpha$, воспользовавшись тем, что $\sin\alpha$ отрицателен, а $\mathrm{tg}\ \alpha$ положителен.

10. Проверьте, какая из приведенных в ответах пара чисел удовлетворяет основному тригонометрическому тождеству.

11. Сгруппируйте первое и третье слагаемые данного выражения, разложите полученное при этом выражение на множители, воспользовавшись формулой разности квадратов двух выражений.

12. Воспользуйтесь тем, что $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$.

13. Обратите внимание на вид аргумента, установите, в какой четверти находится угол $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ и какой знак имеет синус в этой четверти.

14. Представьте 345° в виде 360° – 15°.

15. Примените формулы приведения и значения тригонометрических функций углов 30° и 60°: $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. Примите во внимание, что используя формулы приведения к каждому из слагаемых, не нужно устанавливать, какой знак следует ставить перед правой частью: ведь все слагаемые являются квадратами некоторых выражений.

17. Обратите внимание на то, что все промежутки в ответах имеют одно и то же начало.

18. Сравните ординаты точек графиков с абсциссами $\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi$ со значениями функции $y = \sin 2x$ в этих точках.

19. Найдите значение данной функции в точке $-x$ и сравните её с исходной функцией.

20. Вычтите из всех трёх частей неравенства, указанного в подсказке к данному заданию, число 2.

21. Используйте тот факт, что наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π.

22. Установите, в каком направлении и на сколько единиц параллельно перенесен график функции $y = \cos x$.

23. Не забывайте, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Подумайте над тем, какие значения принимает $|a|$, если $-1 \le a \le 1$.

24. Выберите из чисел, предложенных в ответах, такое, при котором знаменатель существует и не равен нулю.

25. Выберите из чисел, предложенных в ответах, такое, при котором подкоренное выражение существует и неотрицательно.

26. Выберите из функций, предложенных в ответах, такую, которая не определена в точке $\frac{\pi}{2}$, а при $x = 0$ определена и равна нулю.

27. Выберите угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен 1 и угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен $-\frac{1}{2}$.

28. Учитывая то, что a — это косинус некоторого угла, а $-1 \le \cos x \le 1$, выясните, какое из чисел, приведенных в ответах, удовлетворяет этому условию.

29. Принимая во внимание тот факт, что значения $\operatorname{arctg} a$ находятся в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, проверьте, какое из чисел, предложенных в ответах, не удовлетворяет этому условию.

30. Нахождение абсциссы искомой точки можно свести к решению простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = 1$.

31. Обратите внимание на то, что множеством значений тангенса является множество всех действительных чисел.

32. Обратите внимание на то, что на тригонометрической окружности есть две точки с абсциссой 0. Осталось указать числа из заданного промежутка, которым соответствуют эти точки.

33. Целесообразно воспользоваться определением косинуса, найдя на тригонометрической окружности точки с абсциссой 0 и записав все неотрицательные числа, которым соответствуют эти точки. Не упустите точку $x = 0$.

34. Выразите ctg x через cos x и sin x, сократите левую часть уравнения на sin x и примите во внимание, что sin $x \neq 0$. Обратите внимание на то, что на тригонометрической окружности есть две точки с абсциссой 0.

Ответы к заданиям 1 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
В	Г	Б	Б	Г	А	В	Г	А	В	Г	Б	А
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
В	А	Б	Г	А	Б	В	Г	Г	Г	Г	Б	Б
27	28	29	30	31	32	33	34					
А	Г	В	А	В	Б	Г	В					

Вариант 2

1. Измерение углов

1. Градусная мера угла в $\frac{2\pi}{3}$ радиан равна …

А. 150°. **Б.** 330°. **В.** 210°. **Г.** 120°.

2. Радианная мера угла в 240° равна …

А. $\frac{7\pi}{6}$. **Б.** $\frac{3\pi}{2}$. **В.** $\frac{5\pi}{4}$. **Г.** $\frac{4\pi}{3}$.

3. Число $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точке тригонометрической окружности с ординатой …

А. 1. **Б.** –1. **В.** 0. **Г.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Тригонометрические функции числового аргумента

4. Сколько чисел t из промежутка $[0; 3\pi]$ удовлетворяют условию $\cos t = 0$?

А. Два. **Б.** Три. **В.** Четыре. **Г.** Шесть.

5. Сколько чисел t из промежутка $[0; 2\pi]$ удовлетворяют условию $\operatorname{ctg} t = 0$?

А. Одно. **Б.** Четыре. **В.** Два. **Г.** Три.

6. Синус числа может равняться ...

А. $\frac{\pi}{3}$. **Б.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **В.** $-\frac{1}{0{,}981}$. **Г.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

7. Определите знаки выражений $\sin(-3), \cos 3, \mathrm{tg}(-3)$.

А. –, –, +. **Б.** +,–, –. **В.** –, +, –. **Г.** +,+,+.

4. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

8. Найдите значение cos α, если sin α = – 0,6 и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

А. 0,4. **Б.** 0,8. **В.** – 0,8. **Г.** – 0,64.

9. Найдите значение sin α, если ctg α = $-\frac{3}{4}$ и cos α > 0.

А. $\frac{3}{5}$. **Б.** $-\frac{4}{5}$. **В.** $\frac{4}{5}$. **Г.** $-\frac{3}{5}$.

10. Синус и косинус одного и того же аргумента могут равняться ...

А. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Б.** 0 и 0. **В.** $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. **Г.** 1 и – 1.

11. Какому из приведенных выражений равно выражение $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha - \sin^4\alpha$ при всех значениях α?

А. $\cos^2\alpha$. **Б.** $\sin^2\alpha$. **В.** $-\sin^2\alpha$. **Г.** $-\cos^2\alpha$.

12. Вычислите $\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha}$, если tgα = 0,5.

А. 0,6. **Б.** –0,6. **В.** $\frac{5}{3}$. **Г.** $-\frac{5}{3}$.

5. Формулы приведения

13. Вычислите $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

А. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Б.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **В.** $\frac{1}{2}$. **Г.** $-\frac{1}{2}$.

14. Если sin15° = b, то sin345° равен …

А. $\sqrt{1-b^2}$. **Б.** $-\sqrt{1-b^2}$. **В.** b. **Г.** $-b$.

15. Вычислите cos 240° + sin 210°.

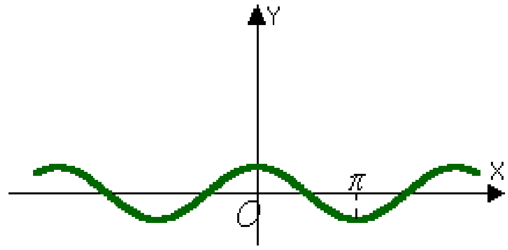
А. – 1. **Б.** $-\sqrt{3}$. **В.** 0. **Г.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

16. Значение выражения $\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 230^\circ + \sin^2 320^\circ$ равно …

А. 4. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** 0.

7. Свойства и графики синуса и косинуса

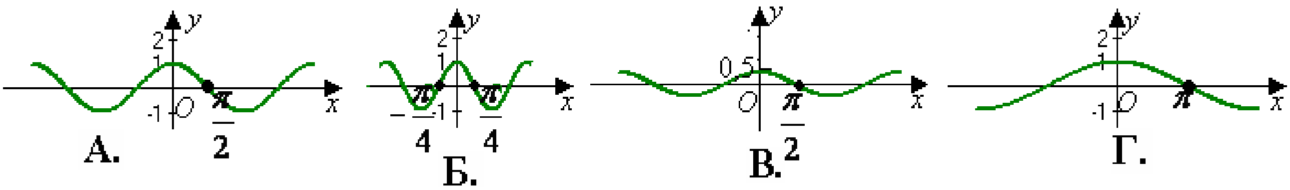
17. На рисунке изображен график функции $y = \cos x$. На каком из приведенных промежутков убывает функция $y = \cos x$?



А. $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$. **Б.** $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

В. $\left(\dfrac{\pi}{4}, \pi\right)$. **Г.** $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

18. На каком рисунке изображен график функции $y = \cos\dfrac{x}{2}$?



19. Функция $y = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ ...

А. четна. **Б.** нечетна. **В.** ни четна, ни нечетна.

Г. определена на множестве всех действительных чисел.

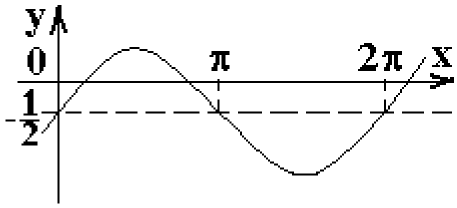
20. Чему равно наименьшее значение выражения 1– cos x?

А. –2. **Б.** –1. **В.** 0. **Г.** 1.

21. Наименьший положительный период, равный π, имеет функция …

А. $y = \sin x$. **Б.** $y = \sin(2x + 1)$. **В.** $y = \sin x + \cos x$. **Г.** $y = \cos\dfrac{x}{2}$.

22. На рисунке изображен график функции ...



А. $y = \sin\left(x + \frac{1}{2}\right)$. **Б.** $y = \sin\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

В. $y = \sin x - \frac{1}{2}$. **Г.** $y = \sin x + \frac{1}{2}$.

23. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{1 - \cos^2 2x}$.

А. [0;1]. **Б.** [–1;1]. **В.** $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. **Г.** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

8. Свойства и графики тангенса и котангенса

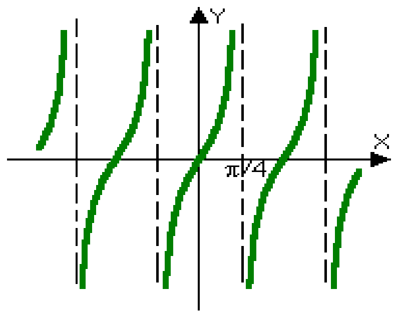
24. Области определения функции $y = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}x}$ принадлежит число …

А. 0. **Б.** $\frac{\pi}{2}$. **В.** π. **Г.** $\frac{3\pi}{4}$.

25. Области определения функции $y = \sqrt{\mathrm{tg}x}$ принадлежит число …

А. $\frac{5\pi}{3}$. **Б.** $\frac{\pi}{2}$. **В.** π. **Г.** $\frac{3\pi}{4}$.

26. На рисунке изображен график функции ...



А. $y = \mathrm{tg}\, 2x$. **Б.** $y = \mathrm{tg}\, x$.

В. $y = \mathrm{ctg}\, x$. **Г.** $y = \mathrm{ctg} 2x$.

10. Простейшие тригонометрические уравнения

27. Значение выражения $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos(-1)$ равно ...

А. $-\frac{\pi}{6}$. **Б.** $\frac{2\pi}{3}$. **В.** $\frac{4\pi}{3}$. **Г.** $\frac{5\pi}{6}$.

28. При каком из перечисленных значений a выражение $\arcsin a$ имеет смысл?

А. $\sqrt{2}$. **Б.** $-\sqrt{2}$. **В.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$. **Г.** $2 - \sqrt{2}$.

29. Какое из следующих значений не может принимать arcctg a?

А. $\frac{\pi}{2}$. **Б.** –1. **В.** 3. **Г.** $\sqrt{2}$.

30. График функции $y = 2\text{tg}x$ проходит через точку…

А. $\left(-\frac{\pi}{4}; 2\right)$; **Б.** $\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$; **В.** $\left(\frac{3\pi}{4}; 2\right)$; **Г.** $\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$.

31. Не имеет решений уравнение ...

А. $\sin x = \frac{3}{4}$; **Б.** $\cos x = \frac{3}{4}$; **В.** $\cos x = \frac{4}{3}$; **Г.** $\text{tg}x = \frac{4}{3}$.

32. Сколько решений на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$ имеет уравнение $\sin x = 0$?

А. Три. **Б.** Четыре. **В.** Пять. **Г.** Шесть.

33. Решите уравнение $\sqrt{x - \frac{\pi}{2}}\sin x = 0$.

А. $x = \pi n$, $n = 1, 2, ...,$ $x = \frac{\pi}{2}$. **Б.** $x = \pi n$, $n = 1, 2, ...$

В. $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = \frac{\pi}{2}$. **Г.** πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

34. Сколько корней на промежутке $[0;2\pi]$ имеет уравнение $\cos^2 x \cdot \text{tg}x = 0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Три.

Подсказки к выполнению заданий 2 варианта теста

1. Воспользуйтесь тем, что градусная мера угла в π радиан равна 180°.

2. Воспользуйтесь тем, что радианная мера угла в 180° равна π радиан.

3. Воспользуйтесь тем, что каждому действительному числу t на тригонометрической окружности (окружности единичного радиуса с центром в начале координат) соответствует точка P_t, полученная из точки $A(1; 0)$ поворотом ее вокруг начала координат на t радиан.

4. Воспользуйтесь определением косинуса числа:

Косинусом числа t называется абсцисса точки тригонометрической окружности, соответствующей числу t.

5. Воспользуйтесь определением котангенса числа:

Котангенсом числа t называется отношение косинуса числа t к его синусу: $\mathrm{ctg}t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

6. Воспользуйтесь тем, что из определения синуса числа t вытекает, что $|\sin t| \le 1$.

7. Найдите на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам –3, 3.

8. Примените основное тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Не забывайте о знаке $\cos \alpha$.

9. Примените следствие из основного тригонометрического тождества $1 + \mathrm{ctg}^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t}$. Не забывайте о знаке $\sin \alpha$.

10. Примените основное тригонометрическое тождество.

11. Воспользуйтесь тем, что $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ и основным тригонометрическим тождеством.

12. Обратите внимание на то, что известно значение $\mathrm{tg}\, \alpha$. Подумайте над тем, с помощью какого преобразования можно получить в числителе и знаменателе данной дроби только $\mathrm{tg}\, \alpha$.

13. Примените формулы приведения.

1) В формуле приведения функция не меняется, если к аргументу прибавлять $\pm \pi$ или же $\pm 2\pi$, и меняется (синус на косинус, тангенс на котангенс, косинус на синус, котангенс на тангенс), если прибавлять числа $\pm\dfrac{\pi}{2}$ или $\pm\dfrac{3\pi}{2}$.

2) Полученная функция в правой части равенства (например, $\sin(\pi + t) = -\sin t$) берется со знаком, совпадающим со знаком значения левой части, если считать, что $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

14. Воспользуйтесь формулами приведения.

15. Представьте аргументы тригонометрических функций, входящих в данное выражение, в виде, удобном для применения формул приведения.

16. Обратите внимание на то, что 50° = 90° – 40°, 230° = 180° + 40°, 320° = 360° – 40°.

17. Используйте тот факт, что на промежутках убывания большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть с ростом независимой переменной зависимая уменьшается.

18. Воспользуйтесь тем, что график функции $y = \cos\frac{x}{2}$ получается из графика функции $y = \cos x$ растяжением от оси ординат в 2 раза.

19. Воспользуйтесь определениями чётной и нечётной функций.

Функция y = f(x) называется чётной (нечётной), если:

1) её область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство: f(–x) = f(x) (f(–x) = – f(x)).

20. То, что 1 является наименьшим значением функции $y = \cos x$, следует из неравенств $-1 \le \cos x \le 1$ и того факта, что это значение функция принимает, например, при $x = 0$.

21. Используйте тот факт, что если функция f является периодической с наименьшим положительным периодом T, то функция $Af(kx + b)$, где A, $k \neq 0$, b — некоторые числа, также является периодической с наименьшим положительным периодом $\frac{T}{|k|}$.

22. Обратите внимание на то, что график функции, изображённый на рисунке, получен из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом.

23. Преобразуйте выражение для данной функции, применив основное тригонометрическое тождество.

24. Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $\mathrm{ctg}\, x$ имеет смысл и отличен от нуля.

25. Область определения данной функции состоит из всех значений x, для кото рых tg x имеет смысл и неотрицателен.

26. Воспользуйтесь тем, что функция, график которой изображён на рисунке, не определена в точке $\frac{\pi}{4}$, а при $x = \frac{\pi}{2}$ определена и равна нулю.

27. Воспользуйтесь определениями арксинуса и арккосинуса.

Арксинусом числа а называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$***, синус которого равен а.***

Арккосинусом числа а называется такое число из промежутка **[0; π]*****, косинус которого равен а.***

28. Воспользуйтесь тем, что **sin (arcsin *a*) = *a*.**

29. Воспользуйтесь определениями арккотангенса.

Арккотангенсом числа а называется такое число из промежутка $\left(0;\pi\right)$***, котангенс которого равняется а.***

30. Обратите внимание на то, что ординаты всех точек, приведенных в ответах, одинаковы.

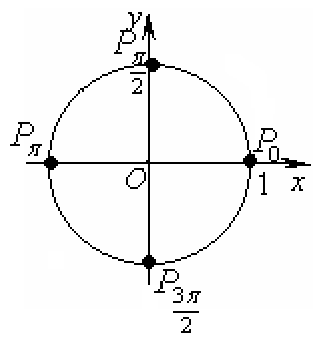
31. Воспользуйтесь множествами значений тригонометрических функций.

32. Можно воспользоваться определением синуса, найдя на тригонометрической окружности точки с ординатой 0.

33. При нахождении значений x обратите внимание на то, что x может принимать только значения, не меньшие $\frac{\pi}{2}$.

34. Убедитесь в том, что заданное уравнение равносильно уравнению $\sin x = 0$.

Советы к выполнению заданий 2 варианта теста



1. Замените 1 радиан на $\frac{180°}{\pi}$.

2. Замените 1° на $\frac{\pi}{180}$ радиан.

3. Воспользуйтесь тем, что концам горизонтального и вертикального диаметров тригонометрической окружностисоответствуют числа 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (см. рис.).

4. Найдите на тригонометрической окружности точку с абсциссой 0, а затем выберите числа из промежутка $[0; 3\pi]$, которым соответствует эта точка.

5. Учитывая, что дробь равна нулю при тех значениях переменной, при которых числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, воспользуйтесь определением синуса и косинуса числа *t* и подсказкой и советом к заданию 4 теста.

Синусом числа t называется ордината точки тригонометрической окружности, соответствующей числу t.

6. Сравните с 1 модули чисел, приведенных в ответах.

7. Чтобы легче было находить на тригонометрической окружности точки, соответствующие указанным числам, обратите внимание на то, что $\frac{\pi}{2} \approx 1,57; \pi \approx 3,14, \frac{3\pi}{2} \approx 4,71.$ Точки, соответствующие отрицательным числам, можно получить, совершая движение по тригонометрической окружности по часовой стрелке.

8. Обратите внимание на то, что из основного тригонометрического тождества можно найти $\cos^2\alpha$. Для нахождения $\cos\alpha$ установите его знак, воспользовавшись условием, приведенным для α.

9. Подобно предыдущему заданию вначале найдите $\sin^2\alpha$. Затем установите знак $\sin\alpha$, воспользовавшись тем, что $\cos\alpha$ положителен, а $\operatorname{ctg}\alpha$ отрицателен.

10. Проверьте, какая из приведенных в ответах пара чисел удовлетворяет основному тригонометрическому тождеству.

11. Сгруппируйте первое и третье слагаемые данного выражения, разложите полученное при этом выражение на множители, воспользовавшись формулой разности квадратов двух выражений.

12. Воспользуйтесь тем, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

13. Обратите внимание на вид аргумента, установите, в какой четверти находится угол $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ и какой знак имеет косинус в этой четверти.

14. Представьте 345° в виде 360° – 15°.

15. Примените формулы приведения и значения тригонометрических функций углов 30° и 60°: $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. Примите во внимание, что используя формулы приведения к каждому из слагаемых, не нужно устанавливать, какой знак следует ставить перед правой частью: ведь все слагаемые являются квадратами некоторых выражений.

17. Обратите внимание на то, что все промежутки в ответах имеют одно и то же начало.

18. Сравните ординаты точек графиков с абсциссами $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$ со значениями функции $y = \cos\frac{x}{2}$ в этих точках.

19. Найдите значение данной функции в точке $-x$ и сравните её с исходной функцией.

20. Умножьте все три части неравенства, указанного в подсказке к данному заданию, на –1 и прибавьте ко трём частям полученного неравенства число 1.

21. Используйте тот факт, что наименьший положительный период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равен 2π.

22. Установите, в каком направлении и на сколько единиц параллельно перенесен график функции $y = \sin x$.

23. Не забывайте, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Подумайте над тем, какие значения принимает $|a|$, если $-1 \le a \le 1$.

24. Выберите из чисел, предложенных в ответах, такое, при котором знаменатель существует и не равен нулю.

25. Выберите из чисел, предложенных в ответах, такое, при котором подкоренное выражение существует и неотрицательно.

26. Выберите из функций, предложенных в ответах, такую, которая не определена в точке $\frac{\pi}{4}$, а при $x = \frac{\pi}{2}$ определена и равна нулю.

27. Выберите угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $-\frac{1}{2}$, и угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен -1.

28. Учитывая то, что a — это синус некоторого угла, а $-1 \le \sin x \le 1$, выясните, какое из чисел, приведенных в ответах, удовлетворяет этому условию.

29. Принимая во внимание тот факт, что значения $\operatorname{arcctg} a$ находятся в интервале $(0;\pi)$, проверьте, какое из чисел, предложенных в ответах, не удовлетворяет этому условию.

30. Нахождение абсциссы искомой точки можно свести к решению простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = 1$.

31. Обратите внимание на то, что множеством значений тангенса является множество всех действительных чисел.

32. Обратите внимание на то, что на тригонометрической окружности есть две точки с ординатой 0. Осталось указать числа из заданного промежутка, которым соответствуют эти точки.

33. Целесообразно воспользоваться определением синуса, найдя на тригонометрической окружности точки с ординатой 0 и записав все числа, не меньшие $\frac{\pi}{2}$, которым соответствуют эти точки. Не упустите точку $x = \frac{\pi}{2}$.

34. Выразите $\operatorname{tg} x$ через $\cos x$ и $\sin x$, сократите левую часть уравнения на $\cos x$ и примите во внимание, что $\cos x \ne 0$.Обратите внимание на то, что на тригонометрической окружности есть две точки с ординатой 0.

Ответы к заданиям 2 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Г	Г	Б	Б	В	Г	А	В	Б	А	В	Г	А
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Г	А	Б	В	Г	Б	В	Б	В	А	Г	В	А
27	28	29	30	31	32	33	34					
Г	Г	Б	Г	В	Б	А	Г					

Вариант 3

1. Измерение углов

1. Градусная мера угла в $\frac{7\pi}{4}$ радиан равна …

А. 405°. **Б.** 315°. **В.** 225°. **Г.** 135°.

2. Радианная мера угла в 330° равна …

А. $\frac{5\pi}{3}$. **Б.** $\frac{7\pi}{6}$. **В.** $\frac{11\pi}{6}$. **Г** $\frac{11\pi}{3}$. .

3. Точка тригонометрической окружности с ординатой -1 соответствует числу

А. $\frac{\pi}{2}$. **Б.** π. **В.** 2π. **Г.** $\frac{3\pi}{2}$.

3. Тригонометрические функции числового аргумента

4. Сколько чисел t из промежутка [0; 3π] удовлетворяют условию $\sin t = -1$?

А. Одно. **Б.** Два. **В.** Три. **Г**. Четыре.

5. Сколько чисел t из промежутка [0; 2π] удовлетворяют условию $\operatorname{tg} t = 1$?

А. Одно. **Б.** Два. **В.** Три. **Г**. Четыре.

6. Косинус числа может равняться ...

А. $-\frac{1}{0{,}981}$. **Б.** $-\frac{\pi}{3}$. **В.** $\frac{\pi}{3}$. **Г.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

7. Определите знаки выражений $\sin(-4), \cos 4, \operatorname{tg}(-4)$.

А. +,–, –. **Б.** +,+, +. **В.** –, –, +. **Г.** –, +, –.

4. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

8. Найдите значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

А. $\frac{12}{13}$. **Б.** $\frac{8}{13}$. **В.** $-\frac{12}{13}$. **Г**. $-\frac{8}{13}$.

9. Чему равно значение $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ и $\sin\alpha < 0$?

А. $-\frac{4}{5}$. **Б.** $\frac{4}{5}$. **В.** $\frac{3}{5}$. **Г.** $-\frac{3}{5}$.

10. Тангенс и котангенс одного и того же аргумента не могут равняться ...

А. 0,6 и $\frac{5}{3}$. **Б.** $\frac{12}{13}$ и $-\frac{13}{12}$. **В.** $\sqrt{2}+1$ и $\sqrt{2}-1$. **Г.** $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{4}{3}$.

11. Какому из приведенных выражений равно выражение $\cos^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при всех допустимых значениях α?

А. $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **Б.** $-\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **В.** $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **Г.** $-\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

12. Вычислите $\frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha = 2$.

А. 0,6. **Б.** –0,6. **В.** $-\frac{5}{3}$. **Г.** $\frac{5}{3}$.

5. Формулы приведения

13. Вычислите $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

А. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Б.** $\frac{1}{2}$. **В.** $-\frac{1}{2}$. **Г.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Если $\cos 25° = a$, то $\cos 245°$ равен…

А. $\sqrt{1-a^2}$. **Б.** $-\sqrt{1-a^2}$. **В.** a. **Г.** $-a$.

15. Вычислите $\sin 210° + \cos 150°$.

А. –1. **Б.** $-\sqrt{3}$. **В.** $-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **Г.** $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

16. Значение выражения $\cos^2 70^\circ + \cos^2 200^\circ + \cos^2 250^\circ + \cos^2 340^\circ$ равно …

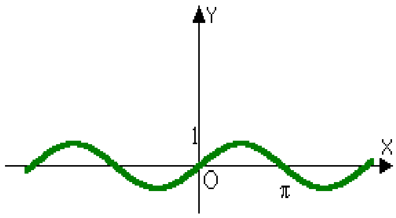
А. 2. **Б.** 1. **В.** 0. **Г.** 4.

7. Свойства и графики синуса и косинуса

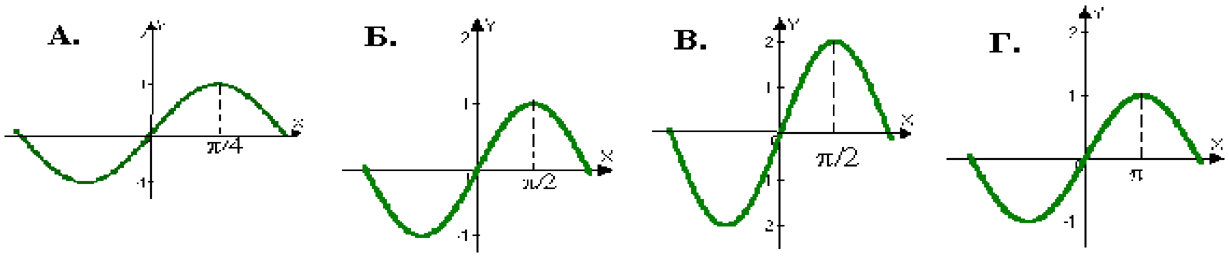
17. На рисунке изображен график функции $y = \sin x$. На каком из приведенных промежутков убывает функция $y = \sin x$?

А. $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right)$. **Б.** $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)$.

В. $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. **Г.** $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right)$



18. На каком рисунке изображен график функции $y=\sin\frac{x}{2}$?



19. Функция $y = x + \sin x$ …

А. нечетна. **Б.** четна. **В.** ни четна, ни нечетна. **Г.** четна при $x \geq 0$.

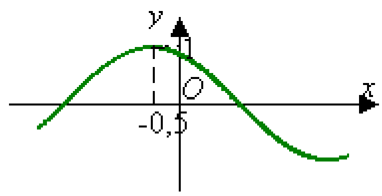
20. Наибольшее значение функции $y = \sin x - 1$ равно …

А. –2. **Б.** –1. **В.** 0. **Г.** 1.

21. Наименьший положительный период функции $y=\cos\frac{x}{2}$ равен ...

А. 2π. Б. 4π. В. $\frac{\pi}{2}$. Г. π.

22. На рисунке изображен график функции …



А. $y=\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)$. **Б.** $y=\cos x+\frac{1}{2}$.

В. $y=\cos x-\frac{1}{2}$. **Г.** $y=\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

23. Найдите множество значений функции $y=\sqrt{1-\sin^2 2x}$.

А. $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. **Б.** [–1;1]. **В.** $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. **Г.** [0;1].

8. Свойства и графики тангенса и котангенса

24. Области определения функции $y=\sqrt{\frac{1}{\text{tg}x}}$ принадлежит число ...

А. 0. **Б.** $\frac{\pi}{2}$. **В.** $\frac{\pi}{4}$. **Г.** $\frac{3\pi}{4}$.

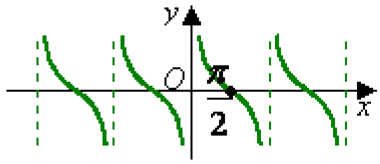
25. Области определения функции $y = \sqrt{-\text{ctg}x}$ принадлежит число ...

А. 0. **Б.** $\frac{\pi}{4}$. **В.** π. **Г.** $\frac{3\pi}{4}$.

26. На рисунке изображен график функции ...

А. y = tg 2x. **Б.** y = tg x.

В. y = ctg x. **Г.** $y = \text{ctg}2x$.



10. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

27. Значение выражения $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ + arcsin (–1) равно ...

А. $-\frac{4\pi}{3}$. **Б.** $\frac{\pi}{3}$. **В.** $\frac{4\pi}{3}$. **Г.** $-\frac{\pi}{3}$.

28. При каком из перечисленных значений a выражение arccos a не имеет смысла?

А. $\sqrt{2}$. **Б.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **В.** $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$. **Г.** $2-\sqrt{2}$.

29. Выражение $\text{arc}\,\text{tg}a$ может равняться ...

А. $\frac{\pi}{2}$. **Б.** $-\sqrt{2}$. **В.** 1,6. **Г.** π.

30. График функции y = 2sin$x$ проходит через точку…

А. (0; 2). **Б.** $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$. **В.** (π; 2). **Г.** $\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$.

31. Имеет решения уравнение ...

А. $\sin x = \frac{2}{3}$. **Б.** $\cos x = \frac{3}{2}$. **В.** $\sin x = \frac{\pi}{3}$. **Г.** $\cos x = -\frac{\pi}{2}$.

32. Сколько решений на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; 4\pi\right]$ имеет уравнение sin x = 1?

А. Пять. **Б.** Четыре. **В.** Три. **Г.** Два.

33. Решите уравнение $\sqrt{x+\pi}\,\mathrm{tg}\,x = 0$.

А. $x = \pi n$, $n = 1, 2, ..., x = -\pi$. **Б.** $x = \pi n$, $n = 0, 1, 2, ...$

В. $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **Г.** πn, $n = -1, 0, 1, 2, ...$

34. Сколько корней на промежутке $[0;2\pi]$ имеет уравнение $\sin x \cdot \mathrm{ctg}^2 x = 0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Три.

Подсказки к заданиям 3 варианта теста

1. Воспользуйтесь тем, что градусная мера угла в π радиан равна $180°$.

2. Воспользуйтесь тем, что радианная мера угла в $180°$ равна π радиан.

3. Воспользуйтесь тем, что каждому действительному числу t на тригонометрической окружности (окружности единичного радиуса с центром в начале координат) соответствует точка P_t, полученная из точки $A(1;\ 0)$ поворотом ее вокруг начала координат на t радиан.

4. Воспользуйтесь определением синуса числа:

Синусом числа t называется ордината точки тригонометрической окружности, соответствующей числу t.

5. Воспользуйтесь определением линии тангенса: ***линией тангенса называется прямая x = 1***. Она проходит через точку (1; 0) перпендикулярно оси абсцисс. Каждому числу $t \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует точка на линии тангенсов.

6. Воспользуйтесь тем, что из определения косинуса числа t вытекает, что $|\cos t| \leq 1$.

7. Найдите на тригонометрической окружности точки, соответствующие числам –4, 4.

8. Примените основное тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Не забывайте о знаке $\sin\alpha$.

9. Примените следствие из основного тригонометрического тождества $1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Не забывайте о знаке $\cos\alpha$.

10. Примените соотношение $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$.

11. Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством (см. подсказку к заданию 8) и следствием из него $1+\mathrm{ctg}^2 t=\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

12. Обратите внимание на то, что известно значение tg α. Подумайте над тем, с помощью какого преобразования можно получить в числителе и знаменателе данной дроби только tg α.

13. Примените формулы приведения.

1) В формуле приведения функция не меняется, если к аргументу прибавлять ± π или же ±2π, и меняется (синус на косинус, тангенс на котангенс, косинус на синус, котангенс на тангенс), если прибавлять числа $\pm\dfrac{\pi}{2}$ или $\pm\dfrac{3\pi}{2}$.

2) Полученная функция в правой части равенства (например, sin (π + t) = –sint) берется со знаком, совпадающим со знаком значения левой части, если считать, что $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

14. Воспользуйтесь формулами приведения.

15. Представьте аргументы тригонометрических функций, входящих в данное выражение, в виде, удобном для применения формул приведения.

16. Обратите внимание на то, что 70° = 90° – 20°, 200° = 180° + 20°, 250° = 270° – 20°, 340° = 360° – 20°.

17. Используйте тот факт, что на промежутках убывания большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть с ростом независимой переменной зависимая уменьшается.

18. Воспользуйтесь тем, что график функции $y = \sin\dfrac{x}{2}$ получается из графика функции $y = \sin x$ растяжением от оси ординат в 2 раза.

19. Воспользуйтесь определениями чётной и нечётной функций.

Функция y = f(x) называется чётной (нечётной), если:

1) её область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

$f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

20. То, что 1 является наибольшим значением функции $y = \sin x$, следует из неравенств $-1 \leq \sin x \leq 1$ и того факта, что это значение функция принимает, например, при $x = \frac{\pi}{2}$.

21. Используйте тот факт, что если функция f является периодической с наименьшим положительным периодом T, то функция $Af(kx + b)$, где A, $k \neq 0$, b — некоторые числа, также является периодической с наименьшим положительным периодом $\frac{T}{|k|}$.

22. Обратите внимание на то, что график функции, изображённый на рисунке, получен из графика функции $y = \cos x$ параллельным переносом.

23. Преобразуйте выражение для данной функции, применив основное тригонометрическое тождество.

24. Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $\operatorname{tg} x$ имеет смысл и положителен.

25. Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл и неположителен.

26. Воспользуйтесь тем, что функция, график которой изображён на рисунке, не определена в точке 0, а при $x = \frac{\pi}{2}$ определена и равна нулю.

27. Воспользуйтесь определениями арксинуса и арккосинуса.

Арксинусом числа a называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$***, синус которого равен a.***

Арккосинусом числа a называется такое число из промежутка **$[0; \pi]$*****, косинус которого равен a.***

28. Воспользуйтесь тем, что **$\cos(\arccos a) = a$.**

29. Воспользуйтесь определениями арктангенса.

Арктангенсом числа а называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$***, тангенс которого равняется а.***

30. Обратите внимание на то, что ординаты всех точек, приведенных в ответах, одинаковы.

31. Воспользуйтесь множествами значений тригонометрических функций.

32. Можно воспользоваться определением синуса, найдя на тригонометрической окружности точки с ординатой 1.

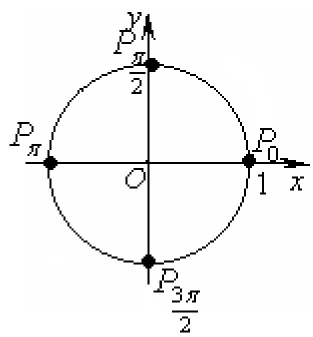
33. При нахождении значений x обратите внимание на то, что x может принимать только значения, большие $-\pi$.

34. Убедитесь в том, что первый сомножитель левой части уравнения не может равняться нулю.

Советы к выполнению заданий 3 варианта теста

1. Замените 1 радиан на $\frac{180°}{\pi}$.

2. Замените 1° на $\frac{\pi}{180}$ радиан.



3. Воспользуйтесь тем, что концам горизонтального и вертикального диаметров тригонометрической окружности соответствуют числа 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (см. рис.).

4. Найдите на тригонометрической окружности точку с ординатой –1, а затем выберите числа из промежутка [0; 3π], которым соответствует эта точка.

5. Найдите на линии тангенсов точку с координатой 1, проведите прямую, соединяющую её с центром тригонометрической окружности и отметьте точки её пересечения с окружностью**.**

6. Сравните с 1 модули чисел, приведенных в ответах.

7. Чтобы легче было находить на тригонометрической окружности точки, соответствующие указанным числам, обратите внимание на то, что

$\frac{\pi}{2} \approx 1,57; \pi \approx 3,14, \frac{3\pi}{2} \approx 4,71.$ Точки, соответствующие отрицательным числам, можно получить, совершая движение по тригонометрической окружности по часовой стрелке.

8. Обратите внимание на то, что из основного тригонометрического тождества можно найти $\sin^2\alpha$. Для нахождения $\sin\alpha$ установите его знак, воспользовавшись условием, приведенным для α.

9. Подобно предыдущему заданию вначале найдите $\cos^2\alpha$. Затем установите знак $\cos\alpha$, воспользовавшись тем, что $\sin\alpha$ отрицателен, а $\operatorname{tg}\alpha$ положителен.

10. Проверьте, какая из приведенных в ответах пара чисел удовлетворяет соотношению, приведенному в подсказке к этому заданию.

11. Сгруппируйте первое и третье слагаемые данного выражения.

12. Воспользуйтесь тем, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

13. Обратите внимание на вид аргумента, установите, в какой четверти находится угол $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ и какой знак имеет синус в этой четверти.

14. Представьте $245°$ в виде $270° - 25°$.

15. Примените формулы приведения и значения тригонометрических функций углов $30°$ и $60°$: $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. Примите во внимание, что используя формулы приведения к каждому из слагаемых, не нужно устанавливать, какой знак следует ставить перед правой частью: ведь все слагаемые являются квадратами некоторых выражений.

17. Обратите внимание на то, что все промежутки в ответах имеют один и тот же конец.

18. Сравните ординаты точек графиков с абсциссами $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$ со значениями функции $y = \sin\frac{x}{2}$ в этих точках.

19. Найдите значение данной функции в точке $-x$ и сравните её с исходной функцией.

20. Вычтите из всех трёх частей неравенства, указанного в подсказке к данному заданию, число 2.

21. Используйте тот факт, что наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π.

22. Установите, в каком направлении и на сколько единиц параллельно перенесен график функции $y = \cos x$.

23. Не забывайте, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Подумайте над тем, какие значения принимает $|a|$, если $-1 \le a \le 1$.

24. Выберите из чисел, предложенных в ответах, такое, при котором знаменатель существует и положителен.

25. Выберите из чисел, предложенных в ответах, такое, при котором подкоренное выражение существует и неотрицательно.

26. Выберите из функций, предложенных в ответах, такую, которая не определена в точке 0, а при $x = \frac{\pi}{2}$ определена и равна нулю.

27. Выберите угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен -1, и угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

28. Учитывая то, что a — это косинус некоторого угла, а $-1 \le \cos x \le 1$, выясните, какое из чисел, приведенных в ответах, не удовлетворяет этому условию.

29. Принимая во внимание тот факт, что значения $\operatorname{arctg} a$ находятся в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, проверьте, какое из чисел, предложенных в ответах, удовлетворяет этому условию.

30. Нахождение абсциссы искомой точки можно свести к решению простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = 1$.

31. Воспользуйтесь тем, что множеством значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

является промежуток [–1; 1].

32. Обратите внимание на то, что на тригонометрической окружности есть одна точка с ординатой 1. Осталось указать числа из заданного промежутка, которым соответствует эта точка.

33. Целесообразно найти значения x, при которых tg $x = 0$. Отберите из них значения, не меньшие $-\pi$. Не упустите значение $x = -\pi$.

34. Выразите ctg x через cos x и sin x, сократите левую часть уравнения на sin x и примите во внимание, что sin $x \neq 0$. Обратите внимание на то, что на тригонометрической окружности есть две точки с абсциссой 0.

Ответы к заданиям 3 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Б	В	Г	А	Б	Г	А	В	В	Б	В	А	В	Б	Г	А	В
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Г	А	В	Б	А	Г	В	Г	В	Б	А	Б	Б	А	Г	Г	В

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		**Контрольный тест**	**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	15 заданий	15 заданий	–
«хорошо»	Решено не менее	18 заданий	20 заданий	10 заданий
«отлично»	Решено не менее	22 задания	25 заданий	13 заданий

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

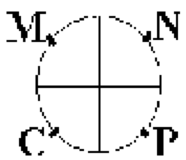
Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа укажите букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Сумма квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника равна…

А. 0. **Б.** 1. **В.** 2. **Г.** $\frac{3}{2}$.

2. Какая из точек, изображенных на тригонометрической окружности, приближённо соответствует числу $\frac{15\pi}{4}$ радиан?



А. N
Б. M
В. P
Г. C

3. Точке тригонометрической окружности с ординатой –1 соответствуют следующие числа из промежутка [–π; 2π] и только они:

А. $-\frac{\pi}{2}$. **Б.** $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. **В.** – π, π. **Г.** – π.

4. Чему равна радианная мера дуги окружности длиной 2,4 дм, если радиус окружности равен 12 см?

А. 0,5. **Б.** 1. **В.** 2. **Г.** 1,5.

5. Автомобиль, радиус колес которого равен 31 см, прошел 2,9 км. Сколько приблизительно оборотов сделало при этом каждое колесо? Выберите самый точный результат из приведенных.

А. 150. **Б.** 1500. **В.** 3000. **Г.** 15000.

6. Углу α = 1935° на тригонометрической окружности соответствует точка с координатами ...

А. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **Б.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **В.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **Г.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. Синус и косинус одного и того же аргумента не могут равняться ...

А. 0,6 и – 0,8. **Б.** $\frac{12}{13}$ и $-\frac{5}{13}$. **В.** 0,5 и 0,5. **Г.** $-\frac{3}{4}$ и $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

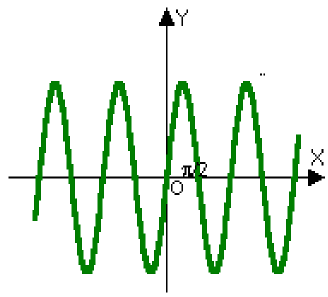
8. Разместите в порядке возрастания числа $a=\sin\frac{5\pi}{6}$, $b=\cos\frac{2\pi}{3}$, $c=tg\frac{3\pi}{4}$.

А. $b<c<a$. **Б.** $c<a<b$. **В.** $b<a<c$. **Г.** $c<b<a$.

9. Значение выражения $\cos^2 80^\circ+\cos^2 190^\circ+\cos^2 260^\circ+\cos^2 350^\circ$ равно …

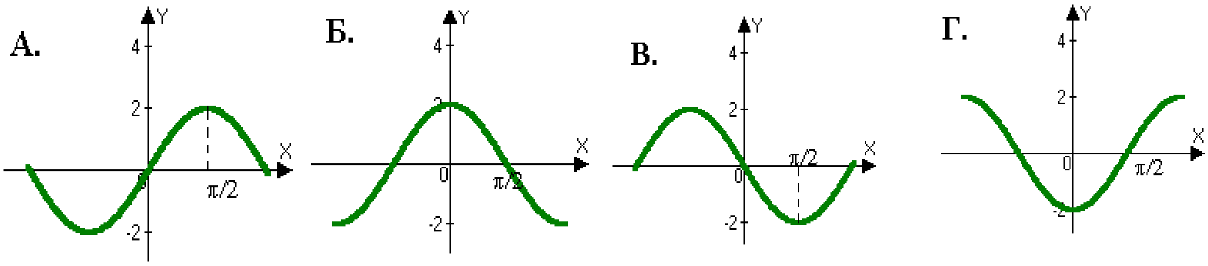
А. 1. **Б.** 2. **В.** 0. **Г.** 4.

10. Дан график функции $y=\sin 2x$. Эта функция убывает на промежутке ...

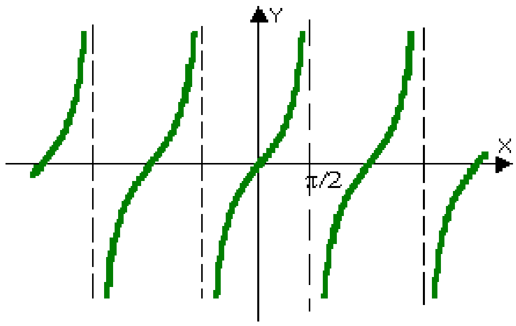


А. $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. **Б.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$. **В.** $\left(\frac{\pi}{4};\pi\right)$. **Г.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

11. На каком из рисунков изображен график функции $y=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$?



12. На рисунке изображен график функции ...



А. $y=tg\,2x$. **Б.** $y=tg\,x$.

В. $y=ctg\,x$. **Г.** $y=ctg2x$.

13. Укажите область определения функции $y=\sqrt{x\cdot tg2}$.

А. $(-\infty;0]$. **Б.** $[0;+\infty)$. **В.** $[0;1]$. **Г.** $[-1;0]$.

14. Найдите множество значений функции $y=\sqrt{1-\cos^2 2x}$.

А. [0;1]. **Б.** [–1;1]. **В.** $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. **Г.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

15. Число π является периодом функции ...

А. $y=tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **Б.** $y=\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

В. $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. **Г.** $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

16. Разместите в порядке возрастания числа cos1,5; cos3; cos2; cos π .

А. cos2; cos3; cos4; cos π . **Б.** cos1,5; cos3; cos π ; cos2.

В. cos π ; cos3; cos2; cos1,5. **Г.** cos1,5; cos2; cos3; cos π .

17. Симметричным относительно начала координат является график функции ...

А. $y=\sin x+x^3$. **Б.** $y=\sin x+tg^2x$. **В.** $y=x^2+ctg2x$. **Г.** $y=x^2-x\sin x$.

18. Проекция на вертикальный диаметр точки, которая вращается по окружности, осуществляет гармоническое колебание по закону $y=3\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$. С какой угловой скоростью она движется?

А. 5. **Б.** 3. **В.** $\frac{\pi}{6}$. **Г.** $-\frac{\pi}{6}$.

19. При каком из перечисленных значений *a* выражение arcsin *a* имеет смысл?

А. $\sqrt{2}$. **Б.** $-\sqrt{2}$. **В.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **Г.** $2-\sqrt{2}$.

20. Сколько решений на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};4\pi\right]$ имеет уравнение cos *x* = 0?

А. 3. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 6.

21. Какое из следующих соотношений неправильно?

А. arcsin (sin 1,5) = 1,5. **Б.** arcsin (sin (–1,2)) = –1,2.

В. arcos (cos (–1)) = –1. **Г.** arccos (cos 3) = 3.

22. Какая из следующих функций не имеет обратную?

А. $y=tgx,\ x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. **Б.** y = ctg x, $x \in (\pi; 2\pi)$.

В. $y=\cos x, x\in[\pi;2\pi]$. **Г.** $y=\sin x, x\in[\pi;2\pi]$.

23. Какое из следующих равенств не является тождеством на общей для обеих частей области определения?

А. $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$. **Б.** $\frac{\cos x}{\cos x}=1$.

В. $\sqrt{\cos x\cdot\sin x}=\sqrt{\cos x}\cdot\sqrt{\sin x}$. **Г.** $\cos x\cdot \mathrm{tg} x=\sin x$.

24. Решите уравнение $\frac{\sin x}{\sin 3x}=0$.

А. $x=n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$. **Б.** $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

В. $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$. **Г.** Уравнение решений не имеет.

25. Все решения неравенства $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутке [0; 2π] образуют множество ...

А. $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$; **Б.** $\left[0,\frac{5\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$; **В.** $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$; **Г.** $\left(\frac{7\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

Основное задание

1. Зубчатое колесо имеет 90 зубцов. Выразите в радианах угол поворота колеса, если оно повернется на: 1) 30 зубцов; 2) 100 зубцов.

2. Изобразите на тригонометрической окружности множество точек, соответствующих числам из промежутка: 1) $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. 2) $\left[-2\pi;-\frac{3\pi}{4}\right]$.

3. Найдите:

1) $tg\,x$, если $\sin x=\frac{3}{5}$ и $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. 2) $\cos x$, если $tgx=\sqrt{8}$, $\cos x>\sin x$.

4. Вычислите: 1) $\cos 165^\circ$. 2) $\sin 165^\circ-\sin 105^\circ$.

3) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+arctg(-\sqrt{3})\right)$. 4) $\sin^2\left(\arccos\frac{3}{4}\right)$.

5. Исследуйте на четность и нечетность функцию:

1) $y = \dfrac{x^3}{\sin x - x}$.   2) $y = x^2 \sin\left(3x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.   3) $y = \sin\left(x - \dfrac{2}{3}\pi\right)$.

6. Дана функция $f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1) Укажите основной период функции.

2) Найдите промежутки, на которых график функции лежит ниже прямой $y = -\dfrac{1}{2}$.

3) Постройте график функции $y=f(x)$.

4) Постройте график функции $y=|f(x)|$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 4 - 3\sin x$.   2) $y = \dfrac{1}{2 - \sin x}x$.

8. Расположите в порядке возрастания:

1) $\sin\dfrac{17\pi}{4}$, $\cos\left(-\dfrac{82\pi}{3}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{11\pi}{3}\right)$.

2) sin 1; sin 1,5; cos 1; cos 1,5.

9. Дано уравнение $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$.

1) ° Решите его.

2) ° Найдите его наибольший отрицательный корень.

3) Найдите все его решения на отрезке $[-\pi; 3\pi]$.

4) Сколько решений оно имеет на отрезке $[0; 20\pi]$?

5) Найдите все его решения, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$.

10. Точка *P* выполняет гармоническое колебание вдоль отрезка *AB* длиной 8 см; *O* – середина отрезка *AB*. Расстояние *AB* точка *P* проходит за 12 с. Из начального положения, совпадающего с точкой *O*, точка *P* начала движение в направлении точки *A*.

1) Найдите положение точки *P* на отрезке *AB* через 6; 12; 18; 24 с после начала движения.

2) Через сколько секунд после начала движения точка P впервые достигнет точки A; точки B?

3) Составьте формулу, выражающую закон изменения отклонения точки P от точки O в зависимости от времени, если O — начало координат, а координатная ось направлена в сторону точки B.

4) Найдите координаты точки P через 3; 4; 8; 9; 15; 16 с после начала движения.

Указания к основному заданию

1. Определите, на какой угол поворачивается колесо при повороте на 1 зубец.

2. Определите, каким числам соответствуют точки на тригонометрической окружности, являющиеся граничными для каждой четверти.

3. Воспользуйтесь соотношениями между тригонометрическими функциями одного аргумента. Знак определяйте при помощи приведенного условия.

4. 1) Используйте формулы приведения, затем найдите значение искомой тригонометрической функции угла по известному значению его тангенса. Не забудьте установить знак этого значения. 2) Необходимо найти значение синуса угла по его косинусу. 3),4) Воспользуйтесь формулами приведения.

5. Исследуйте на основании определений чётной и нечётной функций.

6. 1) Воспользуйтесь свойством 3 периодической функции. 2) Сведите задание к неравенству. 3), 4) Воспользуйтесь правилами преобразования графиков функций.

7. 1) Установите множество значений функции. 2) Вначале установите множество значений знаменателя, далее воспользуйтесь положительностью знаменателя.

8. 1) Вычислите указанные числа, применив формулы приведения и значения тригонометрических функций $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. 2) Воспользуйтесь геометрической интерпретацией тригонометрических функций.

9. 2) Из всех решений данного уравнения укажите наибольший отрицательный. 3) Можно составить и решить неравенство. 4) Установите количество решений уравнения на отрезке [0; 2π]. 5) Можно воспользоваться тригонометрической окружностью.

10. 1) Воспользуйтесь тем, что за указанное время точка пройдёт расстояние, соответственно равное половине длины, длине, полутору длины, двум длинам отрезка *AB*. 2) Воспользуйтесь тем, что расстояние *AB* точка *P* проходит за 12 с. 3) Установите амплитуду, угловую частоту, начальную фазу гармонического колебания, совершаемого проекцией вращающейся точки на вертикальный диаметр. 2) Подставьте значения *t* в формулу, полученную в задании 3).

Дополнительное задание

1. Вычислите: $\cos\left(arctg\frac{3}{5}\right)$.

2. Докажите, что функция $y = x + \sin x$ не является периодической.

3. Числа 5 и 8 являются периодами функции *f*. Докажите, что число 1 тоже ее период.

4. Сравните числа: sin 7 и cos 7.

5. Постройте график функции: 1) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}+\sin x$; 2) $y=\sin\left(\arcsin x\right)$; 3) $y=\arccos\left(\cos x\right)$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\sin^2 x+\sin x-2$.

7. Докажите формулу $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

8. Докажите формулу $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

9. Решите уравнение: 1) $\arcsin x=-\frac{3\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{6\pi x}{1+x+x^2}=1$.

10. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x)=\frac{1}{\sin x-1}$.

1) Найдите:

а) область ее определения; промежутки, на которых ее знаменатель убывает; является ли функция чётой или нечетной; решения уравнения $f(x) = -\frac{1}{2}$;

б) множество её значений;

в) наибольшее и наименьшее значения функции, если они существуют;

г) промежутки, на которых функция возрастает;

д) асимптоты графика функции.

2) Постройте график этой функции.

Указания к дополнительному заданию

1. 1) Найдите значение косинуса угла по известному значению его тангенса. Не забудьте установить его знак. 2), 3) Примените формулы приведения. Для нахождения cos 15° или sin 15° рассмотрите прямоугольный треугольник с острым углом 15°, достройте его до равнобедренного, боковые стороны которого раны гипотенузе данного. С помощью теоремы косинусов выразите катет через гипотенузу.

2. Воспользуйтесь методом от противного.

3. Воспользуйтесь свойствами периодической функции. Дополнительно докажите, что если T_1 и T_2 — периоды некоторой функции, то $T_1 + T_2$ — также период этой функции.

4. Примените формулы приведения и геометрическую интерпретацию тригонометрических функций.

5. Предварительно преобразуйте выражения, с помощью которых заданы функции.

6. Выделите полный квадрат.

7. Воспользуйтесь определением арксинуса.

8. 1) Обратитесь к определению арксинуса. 2) Сведите уравнение к квадратному уравнению с параметром.

9. 1) б) Вначале установите множество значений знаменателя, далее воспользуйтесь отрицательностью знаменателя. д) Речь идёт о вертикальных асимптотах. 2) График стройте с учётом установленных свойств (область определения, чётность, периодичность, промежутки монотонности, наибольшее и наименьшее значения). Можно поступить иначе: построить график по характерным точкам, а затем установить свойства функции по её графику.

Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович

Тригонометрические функции, их свойства и применение

Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов

Учебное пособие