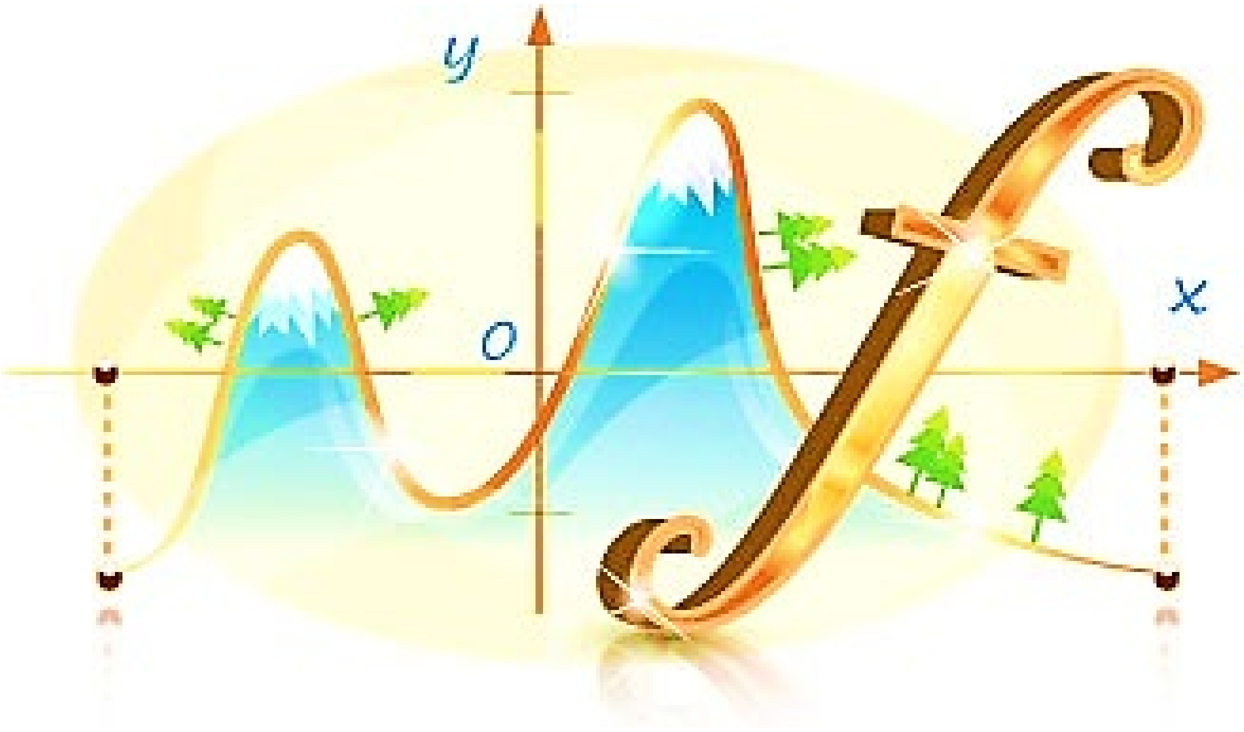
Донецкий национальный университет
факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Функции и их свойства



Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов

ДОНЕЦК 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Функции и их свойства. Пособие для дополнительного обучения математике обучающихся 10 классов. − Донецк, 2023. – 92 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 10 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом *ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017).* Ее цель – развитие у обучающихся умений учиться, самостоятельно приобретать знания, умений и навыков применять математику для решения математических и жизненных задач.

Настоящее пособие ориентировано на развитие у обучающихся умений исследовать функции, применять их свойства к решению уравнений и неравенств, исследованию реальных процессов.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части представлен материал для обучения. В этой части содержатся краткие теоретические сведения, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля, задачи для самостоятельного решения с указаниями.

Во второй части пособия содержатся три варианта тренажёра с подсказками ко всем заданиям и рекомендациями по поиску их решений.

В третьей части пособия приведены задания для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части.

Пособие предназначено для обучающихся открытого математического колледжа факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета. Может быть использовано в общеобразовательной школе при проведении факультативных занятий, курсов по выбору.

Содержание

Дорогой друг!

Настоящее пособие предназначено для развития умений исследовать функции, строить их графики, применять их свойства при решении уравнений и неравенств, исследовании реальных процессов, в частности, процессов, изучаемых в других дисциплинах.

Пособие состоит из трёх частей: обучающей, тренировочной и контролирующей. В первой части представлен материал для повторения и обучения. Он содержит краткие теоретические сведения, применимые при решении представленных задач, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля с ответами на них. Вся совокупность задач разделена на группы по их содержанию. Первая часть пособия завершается задачами для самостоятельного решения. К этим задачам приведены указания и ответы.

Вторая часть пособия состоит из тестов для тренировки, к заданиям которых приведены указания, ответы. Они структурированы в соответствии с частями, на который разделён весь материал. Тренажёр состоит из заданий с выбором ответа.

Задания для тренировки представлены тремя однотипными вариантами теста. Работу над пособием начинайте с первого варианта теста. Попробуйте выполнить самостоятельно его задания, не используя учебные пособия и микрокалькулятор. Выбор правильных ответов и необходимые записи делайте в отдельной тетради. После завершения работы над тестом сверьте свои ответы с ответами, приведенными в пособии. **Не пользуйтесь ответами, пока не дадите ответы самостоятельно!**

Каждое задание, по которому Ваш ответ не совпал с приведенным, тщательно проанализируйте, пользуясь подсказками. Такую работу полезно сделать по всем заданиям теста. Наверное, некоторые ответы Вы угадали или «почувствовали», не зная полного решения. При необходимости пользуйтесь подсказками к заданиям теста. Многие задания теста и задачи для самостоятельного решения подобны приведенным примерам с решениями, содержат основные идеи для решения задания. Тщательно проработайте их.

В третьей части пособия приведено контрольное задание, состоящее из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям тестов для тренировки;
- ***основного задания***, содержащие задания, подобные заданиям для самостоятельного решения;
- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Дополнительное задание желательно выполнять, если при выполнении основного задания не возникло много трудностей.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут для Вас полезными и интересными.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит в освоении идей, методов, использованных в приведенных решениях типовых задач, самостоятельном решении подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно:

- сначала проанализировать её условие и вытекающие из него следствия;

- уяснить требование задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требования задачи.

2. Приступая к выполнению заданий тренажёра, повторите приведенный теоретический материал.

Надо сначала попробовать выполнить самостоятельно задания первого варианта первого блока тренажёра. Выбранные ответы записывайте на отдельном листочке.

Пользоваться учебником и калькулятором не рекомендуется.

3. После завершения работы над первым вариантом первого блока тренажёра необходимо сверить свои ответы с приведенными в пособии.

Не следует обращаться к приведенным ответам, пока не получены самостоятельно ответы ко всем заданиям.

4. Каждое задание, по которому ответ не совпал с приведенным, нужно тщательно проанализировать, пользуясь при необходимости приведенными в пособии указаниями.

Такую работу полезно проделать со всеми заданиями первого варианта блока. Наверное, некоторые ответы угаданы или «почувствованы».

5. Когда появится уверенность в том, что неясных вопросов не осталось, можно проверить надёжность своей уверенности с помощью второго варианта первого блока тренажёра.

Если же при выполнении второго варианта первого блока осталось ощущение, что не всё усвоено, то нужно продолжать работу по исправлению ошибок, выполнить задания третьего варианта, записывая при этом все проделанные шаги.

Если до конца выполнены данные выше рекомендации, то результаты при выполнении следующего варианта теста будут значительно выше первоначальных.

6. Если уверенность подтвердилась при выполнении второго варианта теста, то можно перейти к работе над первым вариантом второго блока. Методика работы над ним остаётся такой же. И так далее.

Ни в коем случае не бросайте работу!

Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы– выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели,

учитывая свою готовность, опыт и способности.

Функции и их свойства

Данное пособие предназначено для развития умений исследовать функции, применять их свойства к решению уравнений и неравенств, исследованию реальных процессов.

Каждому человеку постоянно приходится иметь дело с различными зависимостями между величинами. Поэтому изучение зависимостей является основным содержанием его обучения в школе, а также в высшем учебном заведении.

В данном пособии рассмотрены основы для изучения функциональных зависимостей между переменными величинами, выделены некоторые важнейшие классы функций, представлены элементарные методы исследования функций.

1. Понятие функции, способы ее задания

Функциональные зависимости между величинами могут задаваться различными способами: с помощью формул, графиков, таблиц, словесных описаний. Совершенствованию умений пользоваться этими способами, получать из них необходимую информацию посвящен данный пункт.

Повторяем теорию

Пусть заданы две переменные x и y, и D — множество значений переменной x. ***Зависимость между переменными x и y, которая для каждого значения x из D определяет единственное значение y, называется функциональной зависимостью или функцией y от x с областью определения D.***

Переменную x в таких зависимостях называют ***независимой переменной*** или ***аргументом***, переменную y — ***зависимой переменной***. Функции обычно обозначают латинскими (иногда греческими) буквами — f, g, F, φ и т. п.

Область определения функции f часто обозначают $D(f)$. Значение переменной y, которое соответствует x, называют ***значением функции f в точке x*** и обозначают $f(x)$. Запись «$y = f(x)$» означает, что задана функция f. Функциональную зависимость переменной y от x иногда записывают так: $y = y(x)$.

Множество значений, которые принимает зависимая переменная y, если x пробегает область определения функции f, называют ***множеством значений этой функции*** и обозначают $E(f)$.

Существуют различные способы задания функции. В математике функциональная зависимость чаще всего задается ***формулами***.

Как известно, ***линейная функция*** задается формулой: $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, x — аргумент. Например, функции $y = 2x - 3$ (здесь $k = 2$, $b = -3$), $y = -0,5x + 2$ (здесь $k = -0,5$, $b = 2$), $y = 4x$ (здесь $k = 4$, $b = 0$), $y = 5$ (здесь $k = 0$, $b = 5$) являются линейными.

Квадратичная функция задается формулой: $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые числа, $a \neq 0$, x — аргумент. Например, функции $y = x^2$, $y = 3x^2 + 1$, $y = 2x^2 + x - 4$ являются квадратичными.

Обратная пропорциональность задается формулой $y = \dfrac{k}{x}$, где $k \neq 0$ — некоторое число, x — аргумент.

Такой способ задания функции называется ***аналитическим***.

Заметим, что не всякая зависимость между переменными является функциональной. Например, зависимость между переменными y и x, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$, не является функциональной, так как, например, значению $x = 0$ соответствуют значения $y_1 = -1$, $y_2 = 1$.

Если функция задана формулой, то при отсутствии дополнительных замечаний или условий считают, что ее областью определения является множество всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл. Её иногда называют *естественной областью определения функции.*

Так, линейная функция $y = kx + b$, квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ определены при всех значениях x, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Обратная пропорциональность $y=\dfrac{k}{x}$ определена при всех значениях x, кроме $x = 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Естественной областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0;+\infty)$, поскольку извлечение квадратного корня возможно только из неотрицательных чисел.

При решении многих прикладных задач область определения функции устанавливают, исходя из физического или геометрического смысла задачи. Например, если рассматривать зависимость площади квадрата от длины его стороны x, то областью определения этой функции будет интервал $(0;+\infty)$, так как длина стороны квадрата может выражаться только положительным числом. В таком случае иногда пишут: $y=x^2$, $x > 0$.

Функции называются равными, если они имеют одинаковые области определения и в каждой точке области определения принимают равные значения.

Например, функции $y=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ и $y = x^2 - 1$ являются равными, а функции $y=\dfrac{x^3}{x}$ и $y = x^2$ не являются равными, так как у них не совпадают области определения (проверьте это самостоятельно).

В математике и ее приложениях очень распространен ***графический способ задания функции.***

С помощью линии, изображенной на рис. 1, можно для каждого момента временит $0 \le t \le 12$ указать единственное значение температуры среды T, то есть эта линия задает функциональную зависимость между переменными t и T.

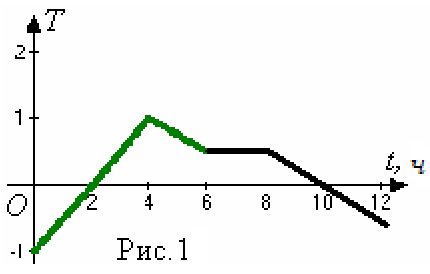


Рис.1

Не всякая линия на координатной плоскости задаёт некоторую функцию. Чтобы некоторая линия определяла функциональную зависимость y от x, необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая, параллельная оси y, или ось y пересекали эту линию не более чем в одной точке.

Так, линии на рис. 2 определяют функциональные зависимости y от x. Линии, изображённые на рис. 3, не задают функции y от x, так как можно указать вертикальные прямые, пересекающие линию в двух точках.

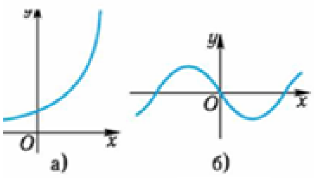


Рис. 2

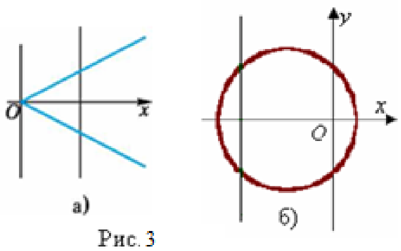


Рис. 3

Кроме аналитического и графического способов задания функций, применяется также ***табличный способ***. В физике и технике часто зависимости между переменными фиксируются на шкалах измерительных приборов. В таких случаях функцию задают в виде таблицы, в первой строке которой содержатся значения независимой переменной x_1, x_2, x_3, …, во второй – соответствующие им значения функции. Наиболее распространёнными являются таблицы с постоянными разностями $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ..., причем, значение разности называется ***шагом таблицы.*** Для таких таблиц независимая переменная принимает значения x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, ..., где h — ***шаг таблицы***. Приведенные ниже данные получили путём наблюдений за колебаниями тела, подвешенного на пружине.

Масса тела, г	50	100	150	200	250	300
Период колебаний, с	0,72	0,85	0,96	1,06	1,16	1,23

Имеем табличное задание периода колебаний от массы. Шаг таблицы равен 50.

Иногда функции можно задавать «словесно». Таким способом задаётся функция $y = [x]$ — целая часть числа: каждому действительному числу x поставлено в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее x. Так, $[2{,}5] = 2,\ [-2{,}5] = 3, [4] = 4, [0{,}5] = 0, [-0{,}5] = -1$ и т. д. График этой функции изображён на рис. 4.

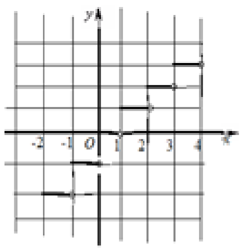


Рис. 4

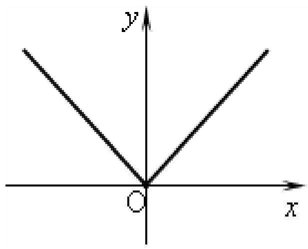


Рис. 5

Иногда функция на разных участках области определения может задаваться разными формулами. С одной из таких функций вы уже встречались: это функция $y = |x| = \begin{cases} -x, \text{если } x < 0, \\ x, \text{если } x \geq 0. \end{cases}$ Её график изображён на рис. 5.

Функциональные зависимости широко используются на практике. Много процессов и явлений описываются (конечно, в большинстве случаев приближённо) линейной функцией. Например, при равномерном движении пройденный путь прямо пропорционален времени движения, давление газа p при постоянном объеме прямо пропорционально его температуре T: $p = cT$ (закон Шарля); напряжение U в электрической цепи с постоянным сопротивлением R прямо пропорционально силе тока I : $U = RI$ (закон Ома). Зависимость силы F, действующей на пружину, от величины ее растяжения имеет вид $F = -kx$ (закон Гука).

Немало физических зависимостей успешно моделируются с помощью квадратичной функции. Например, закон движения тела вдоль координатной прямой под действием постоянной силы можно представить в виде: $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, зависимость кинетической энергии тела W, масса которого равняется m, от скорости движения v выражается формулой: $W = \dfrac{mv^2}{2}$. Тела, брошенные горизонтально или под углом к горизонту, будут двигаться под действием силы тяжести по параболическим траекториям (рис. 6, 7).

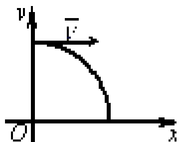


Рис 6

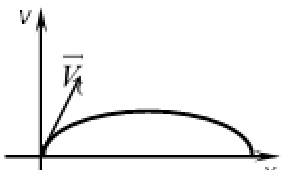


Рис. 7

Обратно пропорциональными являются:

– зависимость времени, необходимого на преодоление данного пути, от скорости;

– зависимость между сторонами прямоугольника при заданной площади;

– зависимость между давлением газа и его объемом при постоянной температуре.

Решаем

Задача 1. Дана функция $y = \frac{3}{x^2 - 1}$. Найти:

1) область определения функции;

2) значение функции в точке $x = -2$;

3) значения аргумента, при которых функция принимает значение 1.

Решение. 1) Функция определена при всех значениях x, для которых знаменатель дроби не равен нулю, то есть при всех x, кроме $x = \pm 1$.

Следовательно, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Значение функции в точке $x = -2$ равно: $y(-2) = \frac{3}{(-2)^2 - 1} = \frac{3}{4-1} = 1$.

3) Чтобы найти значения аргумента, при которых функция принимает значение 1, решим уравнение $1 = \frac{3}{x^2 - 1}$. Получим: $x^2 - 1 = 3$, $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Следовательно, в этих точках функция принимает значение 1.

Ответ. 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) 1; 3) – 2; 2.

Задача 2. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 8). Указать:

1) её область определения; 2) её множество значений; 3) значение функции при $x = 5$; 4) значение аргумента x, при котором функция принимает значение 3.

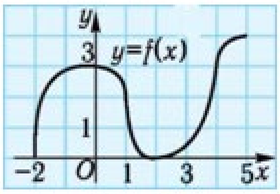


Рис. 8

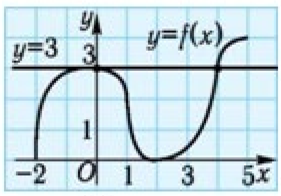


Рис. 9

Решение. 1) Областью определения функции является отрезок [–2; 5].

2) Множеством значений функции является отрезок [0; 4]. 3) $f(5) = 4$. 4) Проведем прямую $y = 3$ и найдем ее точки пересечения с графиком функции $y = f(x)$ (рис. 9). Это точки с координатами (0; 3) и (4; 3). Следовательно, значение 3 функция принимает при $x = 0$ и при $x = 4$.

Ответ. 1) [–2; 5]; 2) [0; 4]; 3) 4; 4) 0; 4.

Задача 3. На рис. 10 изображена зависимость $N(t)$ количества деталей, изготовленных рабочим, от времени t (в днях).

1) Сколько деталей изготовил рабочий за первые 10 дней?

2) За какие 10 дней — первые или последние — рабочий изготовил больше деталей?

3) За сколько дней рабочий изготовил 50 деталей?

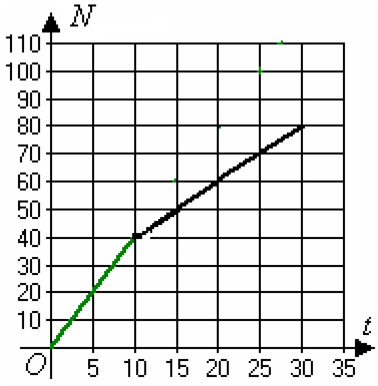


Рис. 10

Решение. 1) Найдем значение функции $N(t)$ при $t = 10$. Обратите внимание на масштаб по оси t и оси N. Имеем: $N(10) = 40$, то есть за первые 10 дней изготовлено 40 деталей.

2) За последние десять дней изготовлено $N(30) - N(20) = 80 - 60 = 20$ деталей, то есть меньше, чем за первые 10 дней.

3) Необходимо найти значение аргумента, при котором функция принимает значение 50. Проведем прямую $N = 50$ до пересечения с графиком функции $N = N(t)$. Получим, что 50 деталей рабочий изготовил за 15 дней.

Ответ. 1) 40; 2) за первые; 3) 15.

В рассмотренном примере функция $N(t)$ определена для натуральных значений аргумента. Её графиком является конечная совокупность точек. Для наглядности они соединены отрезками. Такой приём построения изображения зависимостей будем использовать и в дальнейшем.

Задача 4. При свободном падении тела с достаточно большой высоты с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с зависимость пройденного пути от времени $t \geq 0$ выражается формулой: $s = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$, де s — путь, м; t — время, с; g ≈ 10 м/с^2 — ускорение свободного падения.

1) Какой путь пройдет тело за первые 2 с?

2) За какое время тело пройдет 15 м?

Решение. 1) Чтобы ответить на первый вопрос, нужно вычислить значение функции s при $t = 2$: $s(2) \approx 10 \cdot 2 + \dfrac{10 \cdot 2^2}{2} = 40$ (м).

2) Чтобы ответить на второй вопрос, нужно решить квадратное уравнение: $10t + 5t^2 = 15$. Оно имеет два корня: –3 и 1, но условию задачи удовлетворяет

только значение $t = 1$. Следовательно, тело преодолеет 15 м примерно за 1 с.

Ответ. 1) ≈40 м; 2) ≈1 с.

Вопросы для самоконтроля

1°. Какие из следующих зависимостей являются функциональными:

а) каждому двузначному числу ставится в соответствие сумма его цифр;

б) каждому числу, не равному нулю, ставится в соответствие обратное к нему число;

в) каждому числу ставится в соответствие целое число, меньшее его?

2°. Какая из линий, изображенных на рис. 11, а) - г), не задаёт функциональную зависимость y от x?

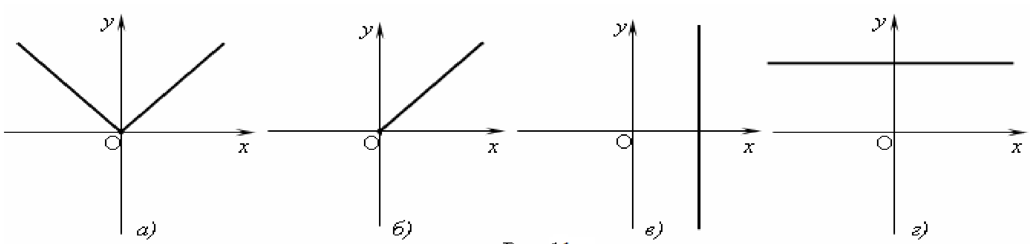


Рис. 11

3. Чему равно значение функции $y = \dfrac{x}{2x-1}$ в точке $x = -1$; $x = 0$?

4. В скольких точках функция $y = x^2 - 2x$ принимает значение 0; –1; –2?

5. Для какой из следующих функций: 1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = x^2$ областью определения служит промежуток $(0; +\infty)$?

6. Даны функции: 1) $y = \dfrac{1-x}{2}$; 2) $y = \dfrac{2}{x}$; 3) $y = (1-x)^2$; 4) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

а) Какая из них является линейной; квадратичной; обратной пропорциональностью?

б) В каких точках квадратичная функция принимает значение 1?

в) Какая из функций не обращается в 0?

7. Для графически заданной функции $y = f(x)$ (рис. 12) найдите:

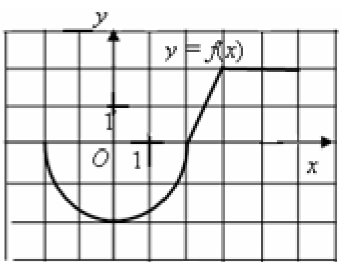


Рис.12

а) область определения;

б) множество значений;

в) значения функции в точке $x = 0$; $x = 4$;

г) нули функции, то есть точки, в которых функция обращается в 0.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Найдите: 1) ^{0} $f(-2)$, $f(3)$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$;

2°) нули функции; 3) корни уравнения $f(x) = f(0)$.

2°. Дана функция $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Найдите значения аргумента, при которых функция принимает значения: 1) – 2; 2) 2; 3) 3.

3. Найдите область определения функции:

1)^0 $y = \dfrac{5x+1}{x^2+4}$; 2)^0 $y = \dfrac{5x+1}{x^2-4}$; 3)^0 $y = \dfrac{1}{2-|x|}$; 4) ^{0} $y = \sqrt{3-2x}$;

5) $y = \dfrac{x}{x+3} + \sqrt{2-x}$; 6) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

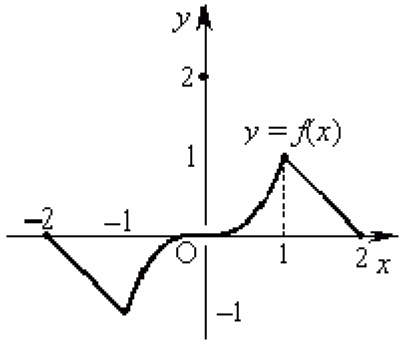


Рис. 13

4. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 13).

1°) Какова её область определения?

2°) Каково множество значений функции?

3°) Сколько нулей имеет функция?

4°) Укажите все значения x, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения.

5) Чему равно наибольшее (наименьшее) значение функции?

6) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0{,}5$?

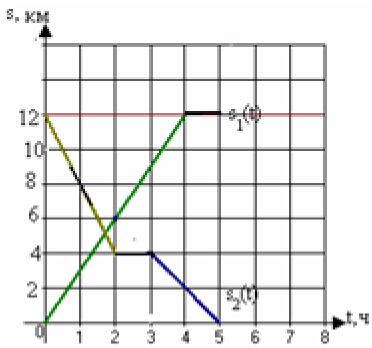


Рис. 14

5. На рис. 14 изображены графики движения двух пешеходов навстречу друг другу по шоссе, соединяющему пункты А и В; $s_1(t)$ и $s_2(t)$ – расстояния от А, соответственно, до первого и второго пешеходов в момент времени t.

1°) Каково расстояние между пунктами?

2°) Сколько километров прошел первый пешеход за первые два часа?

3) Какой из пешеходов к моменту встречи преодолел большее расстояние?

4) Какой из пешеходов пришел в пункт назначения первым?

6. На рис. 15 приведен график зависимости времени t, необходимого на путь из пункта A в пункт B, от скорости движения v, представляющей собой обратную пропорциональность. С какой скоростью нужно двигаться, чтобы добраться из A в B менее чем за 2 часа?

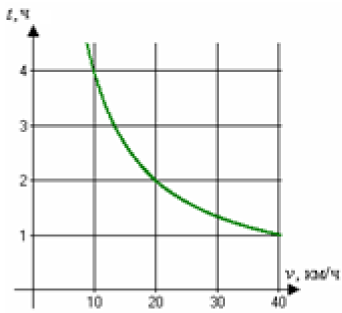


Рис. 15

Указания к задачам для самостоятельного решения

1.1) Подставьте указанные значения аргумента в выражение для функции. Воспользуйтесь определением модуля действительного числа. 2) Воспользуйтесь тем, что нули функции — это значения аргумента, при которых функция обращается в нуль. 3) Составьте и решите уравнение.

2.Решая составленные уравнения, обратите внимание на то, что знаменатель не должен обращаться в 0.

3. Воспользуйтесь тем, что дробь имеет смысл, если знаменатель не равен нулю, а арифметический квадратный корень имеет смысл, если подкоренное выражение неотрицательно.

4. Воспользуйтесь тем, что для функции, заданной графически: 1) область определения — это проекция графика на ось абсцисс; 2) множество значений — это проекция графика на ось ординат; 3) нули функции — это абсциссы точек пересечения графика с осью абсцисс; 4) значения x, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения — это проекция на ось абсцисс части графика, расположенного выше (ниже) оси абсцисс; 5) наибольшее (наименьшее) значение функции — это ордината самой высокой (низкой) точки графика; 6) корни уравнения $f(x) = a$ — это абсциссы точек пересечения графика функции с прямой $y = a$.

5. 1) Воспользуйтесь тем, что расстояние между пунктами равно модулю разности ординат начальной и конечной точек движения каждого из пешеходов. 2) Укажите ординату точки графика функции $s_1(t)$ при $t = 2$. 3)

Сравните модули разностей ординат начальных точек графиков расстояний и точек пересечения этих графиков для каждого пешехода.

6. Обратите внимание на то, что время отложено по оси ординат, а скорость — по оси абсцисс.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) и б). **2.** в). **3.** $\frac{1}{3}$; 0. **4.** В двух; в одной; ни в одной. **5.** Для функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

6. а) Линейная — 1); квадратичная — 3); обратная пропорциональность — 2); б) при $x = 0$ и $x = 2$; в) 2). **7.** а) [–2; 5]; б) [–2; 2]; в) –2; 2; г) –2; 2.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $f(-2)=5,\ f(3)=0,\ \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=3\frac{3}{4}$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **2.** $x=-\frac{3}{4}$; 2) значение 2 функция не принимает; 3) $x=-2$. **3.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; 3) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; 4) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$; 5) $(-\infty;-3)\cup(-3;2]$; 6) $[-1;0)\cup(0;1]$. **4.** 1) $D(f)=[-2;2]$; 2) $E(f)=[-1;1]$; 3) 3; 4) $f(x) > 0$ при $x \in (0; 2)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-2; 0)$; 5) 1 (– 1); 6) два. **5.** 1) 12 км; 2) 6 км; 3) второй; 4) первый. **6.** Более 20 км/ч.

2. График функции

Графической способ задания функции более нагляден по сравнению с аналитическим. По графику легко охарактеризовать исследуемую величину. Поэтому часто аналитическое задание функции сопровождают графиком. В данном пункте рассматриваются графики уже известных вам функций и некоторые способы построения графиков.

Повторяем теорию

График функции y = f(x) — это множество точек координатной плоскости с координатами (x; f(x)), где x — произвольное число из области определения функции.

Для построения графика функции $y = f(x)$ на плоскости вводят прямоугольную систему координат и строят точки с координатами $(x; f(x))$.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является, как вам уже известно, прямая линия. Для ее построения достаточно найти две точки графика и через них провести прямую. Например, для построения графика функции $y = 2x + 1$ возьмем точки пересечения прямой с осями координат, то есть точки $A(0;\ 1)$ и $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ и проведем через них прямую (рис. 16).

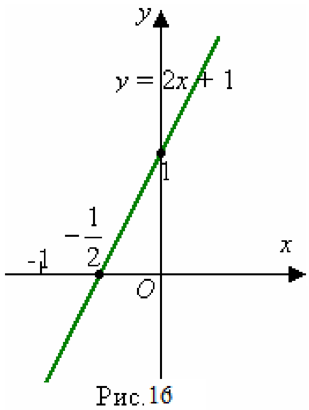


Рис.16

Число k равно тангенсу угла φ наклона прямой $y = kx + b$ к оси x и называется ее ***угловым коэффициентом***. На рис. 17, а), б) изображены графики линейных функций в зависимости от знака k. Если $k = 0$, то имеем постоянную функцию $y = b$, график которой изображен на рис.17в).
Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Ее расположение на координатной плоскости зависит от коэффициентов a, b, c.

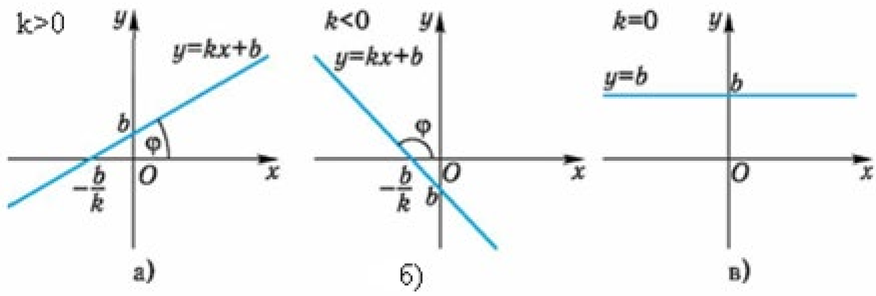


Рис. 17

Направление ее ветвей определяется знаком числа a: при $a > 0$ они направлены вверх, при $a < 0$ − вниз. Вершина ее находится в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Парабола может не иметь общих точек с осью x, а может иметь с ней одну или две общие точки. Это зависит от количества корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Параболу обычно строят по ее характерным точкам: вершине и точкам пересечения с осями координат. Графики функций $y = x^2$ и $y = – x^2$ изображены на рис. 18, 19.

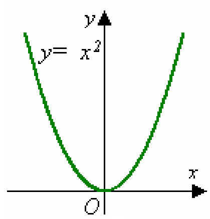


Рис.18

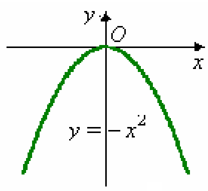


Рис.19

Графиком обратной пропорциональности $y=\dfrac{k}{x}$ является гипербола, расположение которой зависит от знака k (рис. 20, 21).

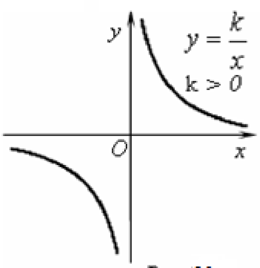


Рис.20

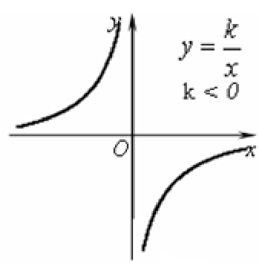


Рис21

Существуют различные способы построения графиков функций. Один из них — построение по нескольким характерным точкам.

Проще всего построить график линейной функции. Для этого достаточно найти две точки, принадлежащие графику, и через них провести прямую. Характерными точками для квадратичной функции являются вершина параболы и абсциссы точек пересечения параболы с осями координат. А для обратной пропорциональности характерной является точка $x = 0$, в которой ее график «разрывается».

Другим способом построения графика функции являются ***геометрические преобразования некоторого графика***. Так, зная график функции $y = f(x)$, можно построить графики функций $y = f(x) + a$ и $y = f(x + b)$, где a и b — некоторые числа, по следующим правилам.

График функции $y = f(x) + a$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси y на $|a|$ единиц: в направлении оси y, если $a > 0$ и в противоположном направлении, если $a < 0$ (рис. 22).

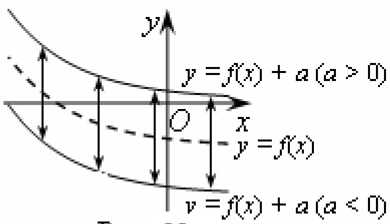


Рис. 22

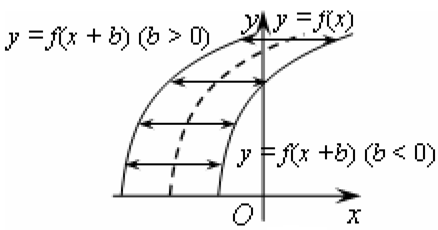


Рис. 23

График функции $y = f(x + b)$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси x на $|b|$ единиц: в направлении оси x, если $b < 0$ и в противоположном направлении, если $b > 0$ (рис. 23).

Например, график функции $y = x^2 - 1$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = x^2$ на одну единицу в направлении, противоположном направлению оси y (рис. 24). График функции $y = (x - 1)^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом последнего на одну единицу в направлении оси x (рис. 25).

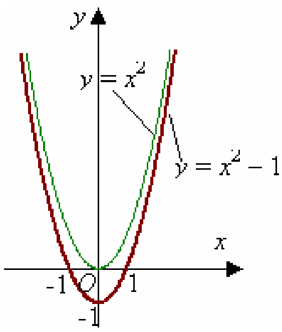


Рис.24

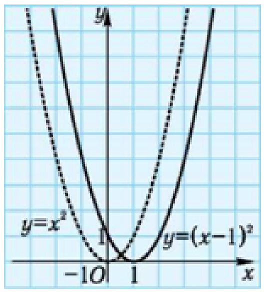


Рис.25

График функции $y = kf(x)$ ($k > 0$) получают из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз от оси x при $k > 1$ (рис. 26) и сжатием в $\frac{1}{k}$ раз к оси x при $0 < k < 1$ (рис. 27).

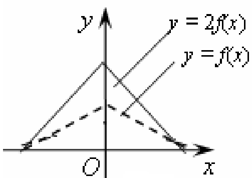


Рис. 26

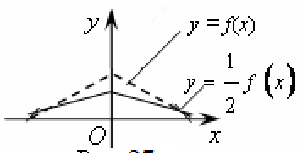


Рис.27

График функции $y = f(\omega x)$ ($\omega > 0$) получают из графика функции $y = f(x)$ сжатием его к оси y в ω раз при $\omega > 1$ (рис. 28) и растяжением в $\frac{1}{\omega}$ раз от оси y при $0 < \omega < 1$ (рис. 29).

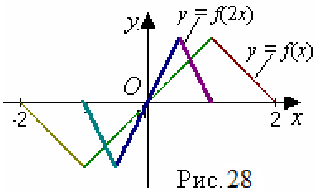


Рис.28

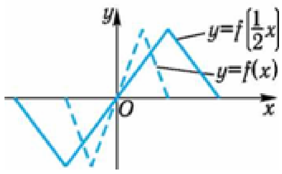


Рис. 29

Например, график функции $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ можно построить, растянув график функции $y = \sqrt{x}$ от оси y в 3 раза (рис. 30). График функции $y = \sqrt{3x}$ получим из графика функции $y = \sqrt{x}$, сжав его к оси y в три раза (рис. 31).

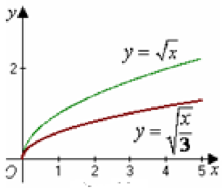


Рис. 30

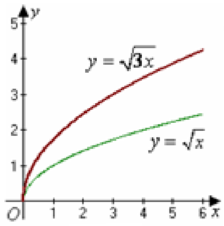


Рис. 31

График функции $y = -f(x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением его относительно оси x (рис. 32).

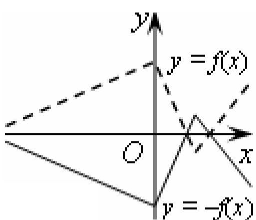


Рис. 32

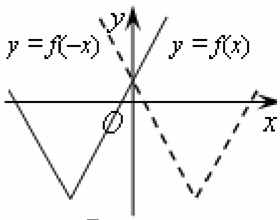


Рис. 33

График функции $y = f(-x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением

относительно оси y (рис. 33).

При построении графика функции иногда приходится выполнять несколько геометрических преобразований.

Рассмотрим построение графиков функций $y = f(\omega x + b)$, где $\omega > 0$, и b — некоторые числа. Представим функцию в виде $y = f\left(\omega\left(x + \frac{b}{\omega}\right)\right)$ и построим график функции по следующей схеме: $y = f(x) \to y = f(\omega x) \to$ $y = f\left(\omega\left(x + \frac{b}{\omega}\right)\right)$. Если $\omega > 1$, то график функции сожмем к оси y в ω раз, а потом перенесем полученный график вдоль оси x на $\left|\frac{b}{\omega}\right|$ единиц. Направление параллельного переноса зависит от знака числа $\frac{b}{\omega}$. Если $0 < \omega < 1$, то график функции растянем от оси y в $\frac{1}{\omega}$ раз и перенесем на $\left|\frac{b}{\omega}\right|$ единиц с учетом знака числа $\frac{b}{\omega}$.

С помощью геометрических преобразований можно строить и графики функций, содержащих модуль.

Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = |f(x)|$, нужно части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси абсцисс оставить без изменения, а части, лежащие под осью абсцисс, отобразить симметрично относительно этой оси (рис. 34).

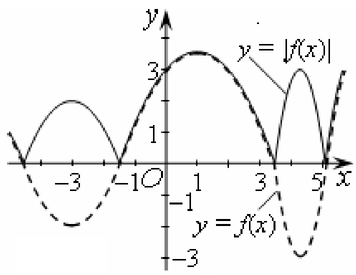


Рис. 34

Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(|x|)$, надо построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$, а затем «продолжить» его в левую полуплоскость x

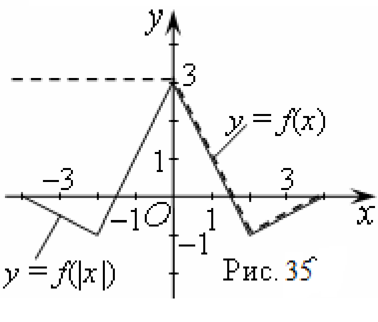


Рис. 35

< 0 с помощью симметричного отображения относительно оси ординат (рис. 35).

Решаем

Задача 1. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 6x + 8$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Решение. 1) Найдем абсциссу вершины параболы по формуле: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$:

$x_0 = -\dfrac{6}{2} = -3$. Ордината вершины находится вычислением значения квадратичной функции при $x_0 = -3$: $y_0 = y(-3) = 9 - 18 + 8 = -1$. Итак, координаты вершины — (–3; 1). Найдем точки пересечения графика с осью абсцисс. Для этого решим уравнение: $x^2 + 6x + 8 = 0$. Получим: $x_1 = -4$; $x_2 = -2$. Найдем точку пересечения графика с осью y. Для этого вычислим значение функции $y = x^2 + 6x + 8$ при $x = 0$: $y(0) = 8$. График пересекает ось y в точке с координатами (0; 8). Ветви параболы направлены вверх, ведь коэффициент при x^2 положителен. На основании полученных результатов построим график (рис. 36).

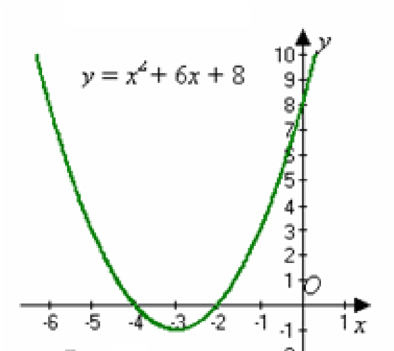


Рис. 36

2) Вершина параболы находится в точке с координатами (1, 4). Точки пересечения параболы с осью абсцисс имеют координаты (–1; 0) и (3; 0). График функции пересекает ось y в точке с координатами (0; 3). Ветви параболы направлены вниз. График изображен на рис. 37.

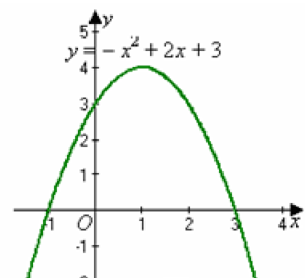


Рис.37

3) Вершина параболы находится в точке с координатами (1; 1). Парабола не пересекает ось x, поскольку уравнение $2x^2 - 4x + 3 = 0$ не имеет корней. Парабола пересекает ось y в точке с координатами (0; 3). Для уточнения положения графика вычислим

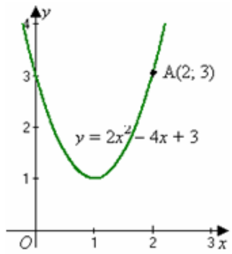


Рис. 38

значение функции в точке $x = 2$: $y(2) = 3$, то есть парабола проходит через точку $A(2; 3)$. График изображен на рис. 38.

Задача 2. На рис. 39 изображен график обратной пропорциональности. Задать эту зависимость формулой.

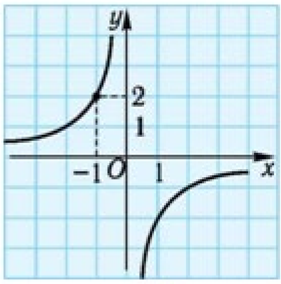


Рис.39

Решение. Обратная пропорциональность задается формулой $y = \frac{k}{x}$. Необходимо найти число k. График функции проходит через точку с координатами $(–1; 2)$, то есть имеет место равенство: $2 = \frac{k}{-1}$. Отсюда $k = – 2$.

Ответ. $y = -\frac{2}{x}$.

Задача 3. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = -\frac{1}{x+2}$?

Решение. Уравнение имеет столько корней, сколько общих точек имеют графики функций $y = x^2$ и $y = -\frac{1}{x+2}$. Построим графики этих функций в одной системе координат.

График функции $y = -\frac{1}{x+2}$ можно получить из графика функции $y = -\frac{1}{x}$ параллельным переносом последнего вдоль оси x на 2 единицы влево (рис. 40). Тогда из рис. 41 видно, что уравнение имеет один корень.

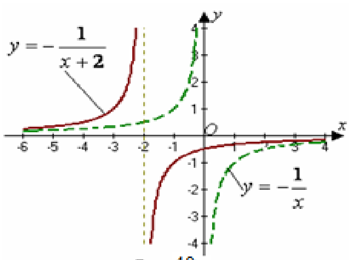


Рис. 40

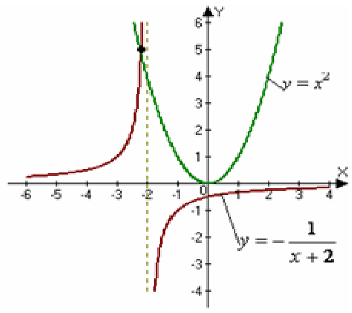


Рис. 41

Ответ. Один корень.

Задача 4. Построить графики функций $y = 1{,}5\,x^2$, $y = 0{,}5x^2$.

Решение. График функции $y = 1{,}5\,x^2$ получим из графика функции $y = x^2$ растяжением от оси x в 1,5 раза (рис. 42). График функции $y = 0{,}5x^2$ получим из графика $y = x^2$ сжатием его к оси x в 2 раза (рис. 43).

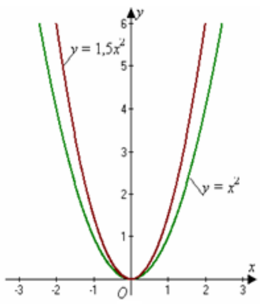


Рис. 42

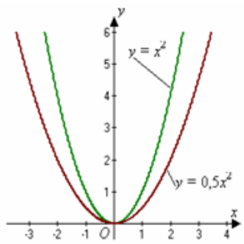


Рис. 43

Задача 5. Построить график функции $y = 2|x| - 1$.

Решение. Построение выполняется в два этапа, исходя из графика функции $y = |x|$:

1) график функции $y = |x|$ растягивается от оси x вдвое (рис. 44);

2) полученный график параллельно переносится на одну единицу в отрицательном направлении оси y (рис. 45).

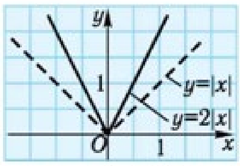


Рис.44

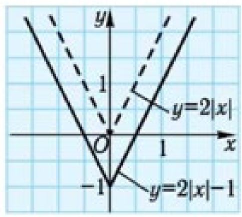


Рис. 45

Задача 6. Построить график функции $y = -\sqrt{x} + 1$.

Решение. Построим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 46). Отразим его симметрично относительно оси x. Затем перенесем полученный график в положительном направлении оси y на 1 единицу. Получили искомый график, он изображен на рис. 46 более толстой линией.

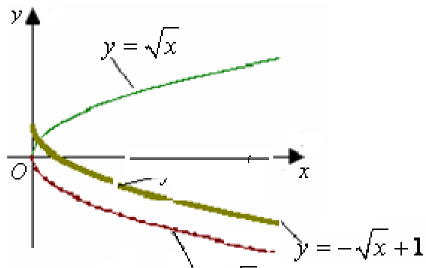


Рис.46

Задача 7. В скольких точках пересекаются графики функций $y = \sqrt{-x}$, $y = x^2 - 2$?

Решение. На одном рисунке строим графики функций. Первый график получим из графика функции $y = \sqrt{x}$ симметричным отображением его относительно оси y. Второй график получим из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом последнего на 2 единицы в направлении, противоположном оси y (рис. 47). Графики пересекаются в единственной точке.

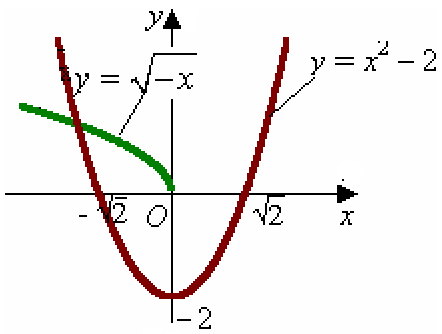


Рис. 47

Задача 8. На рис. 48 изображен график функции $y = f(x)$. Построить график функции $y = f(2x+3)$.

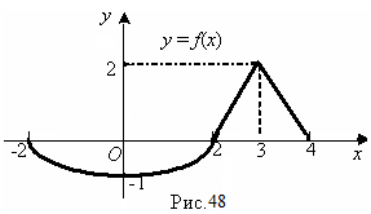


Рис.48

Решение. График функции будем строить по следующей схеме: $y = f(x) \to y = f(2x) \to y = f\left(2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right)$, то есть сначала график функции $y = f(x)$ сожмем к оси y в два раза, потом перенесем полученный график в направлении, противоположном направлению оси x, на $\frac{3}{2}$ единицы (рис. 49).

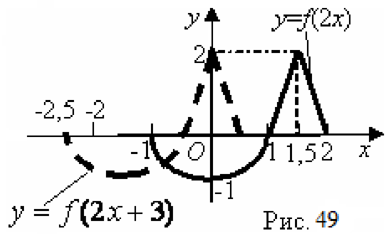


Рис. 49

Задача 9. Построить график функции $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$.

Решение. Сначала построим график квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 3$. Представим функцию в виде $y = (x - 1)^2 - 4$ и применим параллельный перенос вдоль осей x и y к графику функции $y = x^2$. Получим график, изображенный на рис. 50.

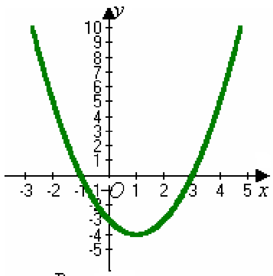


Рис. 50

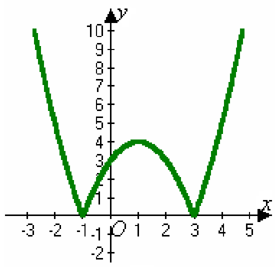


Рис. 51

Пользуясь правилом построения графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y = f(x)$, часть графика, которая лежит под осью x, отразим симметрично относительно этой оси. Получим искомый график (рис. 51).

Задача 10. Построить графики функций: 1) $y = x^2 - 2|x| - 3$; 2) $y = |2 - 2|x||$.

Решение. 1) На рис. 50 изображен график функции $y = x^2 - 2x - 3$. В соответствии с приведенным выше правилом, оставляем ту часть графика функции, которая находится в правой полуплоскости, и отражаем ее симметрично относительно оси y. Получаем график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$ (рис. 52).

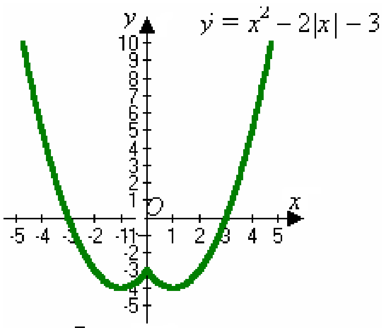


Рис. 52

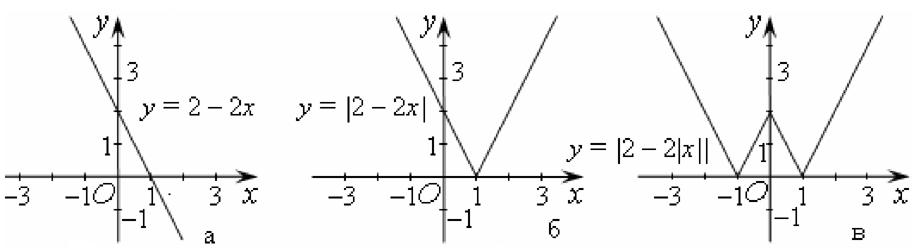


Рис.53

2) Построим сначала график функции $y = 2 - 2x$ (рис. 53 а). Затем построим график функции $y = |2 - 2x|$ (рис. 53 б), пользуясь правилом построения графика функции $y = |f(x)|$. А из него получим искомый график (рис. 53 в), воспользовавшись правилом построения графика функции $y = f(|x|)$.

Вопросы для самоконтроля

1°. В каких точках прямая $y = 1 - 4x$ пересекает оси координат?

2°. Укажите несколько точек, через которые проходит график линейной функции $y = -2$.

3°. Какие знаки имеют числа k и b, если график линейной функции $y = kx + b$ изображен на рис. 54?

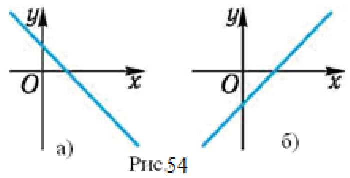


Рис.54

4°. У каких из следующих парабол ветви направлены вверх: а) $y = 1 - x + 2x^2$; б) $y = 5x - 3x^2 - 1$; в) $y = 1 - x^2$?

5°. Чему равна абсцисса вершины параболы:

а) $y = 1 - 3x + 2x^2$; б) $y = -5x^2 + x - 2$; в) $y = (x + 5)(x - 1)$?

6°. Найдите обратную пропорциональность, график которой изображен на рис. 55.

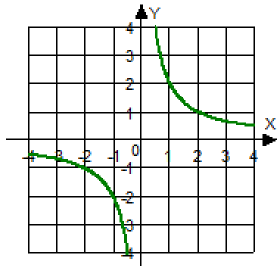


Рис.55

7°. Сколько точек пересечения имеют графики функций:

а) $y = \dfrac{2}{x}$, $y = x$; б) $y = \dfrac{2}{x}$, $y = -x$; в) $y = -\dfrac{2}{x}$, $y = x^2$?

8°. На сколько единиц и в каком направлении следует параллельно перенести гиперболу $y = \dfrac{1}{x}$, чтобы получить гиперболу: а) $y = \dfrac{1}{x+4}$; б) $y = \dfrac{1}{x} + 4$?

9°. На сколько единиц и в каком направлении следует параллельно перенести параболу $y = x^2$, чтобы ее вершина оказалась в точке с координатами: а) (–2; 0); б) (0; 2)?

10°. Какой формулой может быть задана функция, график которой изображен на рис. 56, если он получен с помощью геометрических преобразований из графика функции $y = \sqrt{x}$?

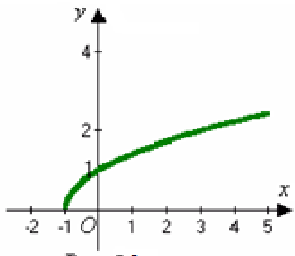


Рис.56

11. График какой функции получим из графика функции $y=\sqrt{x}$ растяжением от оси y в три раза?

12. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции: 1) $y = 2f(x)$; 2) $y = f(x + 2)$; 3) $y = -f(x)$; 4) $y = f(-x)$; 5) $y = f(2x + 1)$; 6) $y = 2f(x) + 1$?

13. На рисунке 57 изображен график функции $y=\dfrac{1}{x+a}+b.$

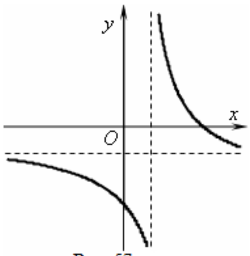


Рис. 57

Какие знаки имеют числа a и b?

14. График какой функции получим, если параболу $y = x^2$ сначала растянем от оси x в два раза, а затем перенесем вдоль оси x на единицу в направлении оси?

15. Областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок [0; 1]. Какова область определения функции: 1) $y = f(x - 3)$; 2) $y = f(x) + 3$; 3) $y = f(2x)$; 4) $y = f(2x - 1)$?

Задачи для самостоятельного решения

1°. Постройте график функции по характерным точкам:

1) $y=\dfrac{x-3}{2}$; 2) $y=-3$; 3) $y=-\dfrac{2}{x}$; 4) $y=x^2-5x+4$;

5) $y=-3x^2-2x+1$; 6) $y=x^2-4x+4$; 7) $y=(x+2)(x-4)$.

2. Постройте график функции с помощью геометрических преобразований:

1) $y=(x-0{,}5)^2$; 2) $y=x^2-0{,}5$; 3) $y=\dfrac{x^2}{2}$; 4) $y=\sqrt{x+2}$; 9) $y=\sqrt{x^2-4x+4}$;

5) $y=\sqrt{x}-2$; 6) $y=\dfrac{1}{x-3}$; 7) $y=\dfrac{1}{x}+3$; 8°) $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

10) $y=\left|x^2-x-2\right|$; 11) * $y=x^2-|x|-2$.

3. На рис. 58 изображен график функции $y = f(x)$.

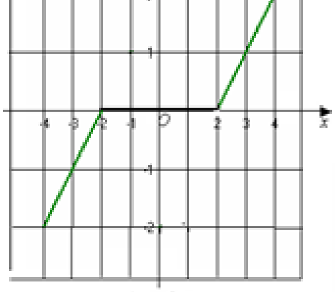


Рис.58

Постройте график функции: 1°) $y = f(x - 1)$;

2°) $y = f(x) - 1$; 3) $y = f(2x)$; 4) $y = 2f(x)$.

4. Найдите линейную функцию, если:

1°) ее график проходит через точки $A(1; -1)$ и $B(2; -1)$;

2) ее график составляет угол 135° с осью x и проходит через точку $A(0; 2)$.

5°. Задайте с помощью формулы функции, графики которых изображены на рис. 59, а) - в).

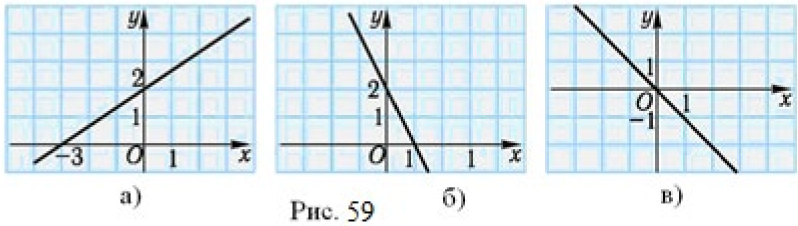


Рис. 59

6. Напряжение в электрической цепи равномерно растет, то есть линейно зависит от времени. В начале опыта напряжение равнялось 10 В, а в конце опыта, длившегося 5 с, напряжение увеличилось в 1,5 раза.

1) Выразите зависимость напряжения от времени и постройте график этой функции. 2) Каким было напряжение через 3 с после начала опыта?

7°. Найдите обратную пропорциональность, если известно, что ее график проходит через точку $A(-1; 3)$. Постройте ее график.

8. По закону Бойля – Мариотта, давление p и объем газа V связаны формулой $p=\dfrac{c}{V}$, где c — некоторое постоянное число,. Постройте график этой зависимости, если при давлении p = 10 Па объем газа равен 0,5 л.

9. Найдите функцию, график которой симметричен относительно оси абсцисс (ординат) графику функции: 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = 2x^2 - x + 1$; 3) $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$; 4) $y = -1$.

10. Найдите функцию, график которой симметричен относительно начала координат к графику функции:1) $y = -x + 5$,2) $y = 2$;3)$y = 4x-3x^2+1$; 4) $y=\dfrac{-2x+3}{3x-2}$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь характерными точками для функции.

2. Воспользуйтесь сдвигом графика функции, его сжатием или растяжением, симметричным отображением.

3. Воспользуйтесь правилами сдвига графика функции.

4. Воспользуйтесь тем, что если график функции проходит через некоторую точку, то её координаты удовлетворяют уравнению, задающему функцию, а также геометрическим смыслом углового коэффициента линейной функции.

5. Используйте координаты точек, через которые проходят графики.

6. Составьте по имеющимся данным систему уравнений относительно параметров линейной функции и решите её.

7. Воспользуйтесь тем, что если график функции проходит через некоторую точку, то её координаты удовлетворяют уравнению, задающему функцию.

8. Составьте по имеющимся данным уравнение относительно параметра обратной пропорциональности и решите его.

9. Воспользуйтесь тем, что если графики двух функций симметричны относительно оси абсцисс (ординат), то ординаты (абсциссы) соответствующих точек являются противоположными числами.

10. Воспользуйтесь тем, что если графики двух функций симметричны относительно начала координат, то абсциссы и ординаты соответствующих точек являются противоположными числами.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. (0,25; 0) и (0; 1). **2.** (0; –2); (1; –2); (–1; –2) и т. д. **3.** а) – +; б) + –. **4.** а). **5.** а) 0,75; б) 0,1; в) –2. **6.** $y=\frac{2}{x}$. **7.** а) 2; б) 0; в) 1. **8.** На 4 единицы влево; б) на 4 единицы вверх. **9.** а) На 2 единицы влево; б) на две единицы вверх. **10.** $y=\sqrt{x+1}$. **11.** $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$. **12.** 1) Растяжением от оси x в 2 раза; 2) сдвигом влево на 2 единицы; 3) симметричным отображением относительно оси абсцисс; 4) симметричным отображением относительно оси ординат; 5) сдвигом на 0,5 единицы влево и сжатием к оси y в два раза; 6) растяжением от оси x в 2 раза и сдвигом на 1 единицу вверх. **13.** $a < 0$, $b < 0$.**14.** $y = 2(x - 1)^2$. **15.** 1) [3; 4]; 2) [0; 1]; 3). [0; 0.5]; 4) [0,5;1].

Ответы к задачам для самостоятельного решения

4. 1) $y = -1$; 2) $y = -x + 2$. **5.** а) $y=\frac{2}{3}x+2$; б) $y = -2x + 2$; в) $y = -x$. **6.** 1) $V = t + 10$, $t \geq 0$; 2) 13 В. **7.** $y=-\frac{3}{x}$. **9.** 1) $y = -3x + 4$; $y = -3x - 4$; 2) $y = -2x^2 + x - 1$; $y = 2x^2 + x + 1$; 3) $y=\frac{x+2}{1-2x}$; $y=\frac{x-2}{1+2x}$; 4) $y = 1$; $y = -1$. **10.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -2$; 3) $y = 4x + 3x^2 + 1$; 4) $y=\frac{2x+3}{-3x+2}$.

3. Основные свойства функций

Изучение реальных процессов часто сводится к исследованию математических зависимостей, описывающих эти процессы. Исследовать функциональную зависимость — значит выявить ее характерные особенности. Характерными особенностями функции является, например, ее возрастание или убывание, чётность или нечётность, непрерывность. Рассмотрению этих свойств и посвящен данный пункт.

Повторяем теорию

Убывание и возрастание функций

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рис. 60.

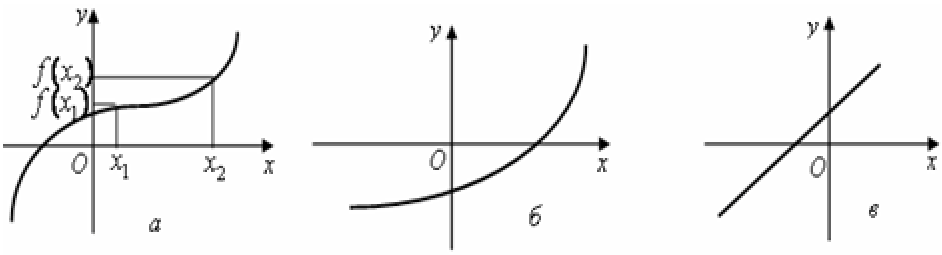


Рис. 60

Характерной особенностью этих функций является то, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Такие функции называют ***возрастающими***.

Возрастающие функции описывают процессы и явления, в которых зависимая величина увеличивается с возрастанием независимой. Например, температура воды при нагревании повышается с течением времени до момента кипения. Также увеличивается со временем скорость тела при свободном падении до момента падения.

Если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то такую функцию называют ***убывающей*** (рис. 61). Процессы и явления, в которых

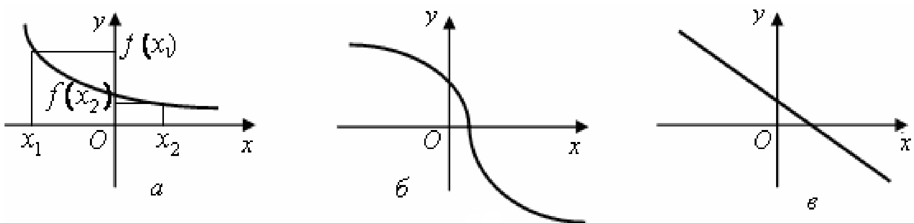


Рис.61

зависимая величина уменьшается с возрастанием независимой, описываются ***убывающими*** функциями. Например, уменьшается атмосферное давление при возрастании высоты над уровнем моря, скорость тела при торможении.

Возрастающие или убывающие функции называют ***монотонными.***

Многие функции не являются монотонными. Например, квадратичная функция $y = x^2$ (см. рис. 18) или обратная пропорциональность (см. рис. 20, 21). Однако, если рассматривать функцию $y = x^2$ только на промежутке $(-\infty; 0]$, то она убывает. На промежутке $[0; +\infty)$ эта функция возрастает.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если для произвольных точек этого промежутка x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на некотором промежутке, если для произвольных точек этого промежутка x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Установление промежутков, на которых функция возрастает или убывает, является важным заданием в исследовании этой функции. Это задание называют ***нахождением промежутков монотонности функции.*** Для функций, заданных графически, оно решается достаточно легко.

Для функций, заданных аналитически, находить промежутки возрастания и убывания достаточно трудно. Решим эту проблему для уже знакомых вам функций: для линейной, квадратичной и обратной пропорциональности.

У линейной функции $y = kx + b$ коэффициент k равняется тангенсу угла наклона ее графика (прямой) к оси x. Если $k > 0$, то $\text{tg}\varphi > 0$ и $0° < \varphi < 90°$. Следовательно, угол наклона прямой к оси x является острым, и линейная функция возрастает (см. рис. 17, а). Если $k = \text{tg}\varphi < 0$, то $90° < \varphi < 180°$. Следовательно, угол наклона прямой к оси x является тупым, и линейная функция убывает (см. рис. 17, б).

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, вершина которой находится в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Если $a > 0$, то квадратичная функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ (рис. 62). Если $a < 0$, то квадратичная функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ (рис. 63).

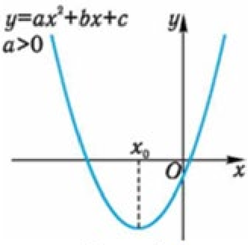


Рис. 62

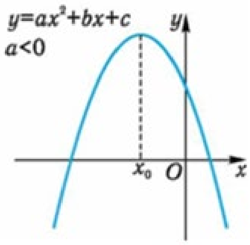


Рис. 63

Рассмотрим теперь обратную пропорциональность. Обратите внимание на то, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ не является убывающей в своей области определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Однако, она убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Вспомните график функции $y = \sqrt{x}$ и подумайте над тем, является ли она монотонной.

Четность и нечётность функций

Рассматривая графики функций $y = x^2$ и $y = |x|$ (рис. 64, 65), мы замечаем, что они симметричны относительно оси y.

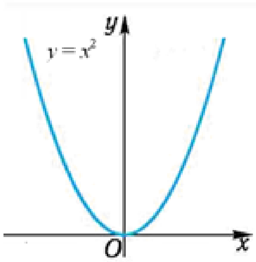


Рис. 64

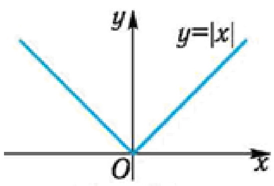


Рис. 65

Функцию, график которой симметричен относительно оси y, называют ***чётной***.

Функция $y = f(x)$ называется чётной, если:

1) её область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку $-x$;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x).$$

Функция является чётной тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно оси ординат.

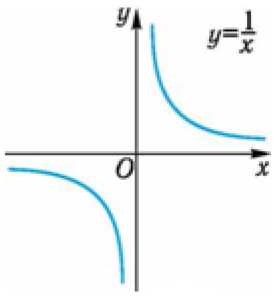


Рис. 66

График функции $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 66) симметричен относительно начала координат. Такие функции называют ***нечётными***.

Функция y = f(x) называется нечётной, если:

1) ее область определения вместе с каждой точкой x содержит и точку –x;

2) для каждого x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x).$$

Функция является нечётной тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно начала координат.

Для доказательства того, что функция не является ни чётной, ни нечётной, целесообразно действовать следующим образом.

1) Проверить, симметрична ли область определения функции относительно начала координат. Если она не симметрична (см. пример 3. 3)), то функция не является ни чётной, ни нечётной. Если она симметрична, то продолжать исследование.

2) Подобрать две точки, симметричные относительно начала координат и такие, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Это доказывает требуемое утверждение.

Непрерывность и точки разрыва функций

Познакомимся еще с одним важным свойством функции — ***непрерывностью***. Этим свойством мы уже неоднократно пользовались. Так, иногда при построении графика функции мы находили несколько его точек и соединяли их линией. Возникает вопрос, всегда ли можно так делать. Оказывается, что в первую очередь это зависит от того, будет ли функция ***непрерывной*** *или* ***разрывной***.

Рассмотрим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, изображенные на рис. 67 и 68.

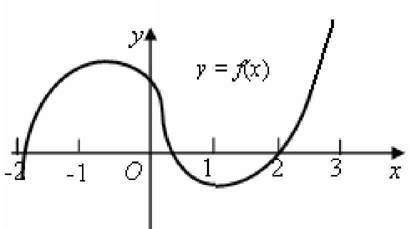


Рис.67

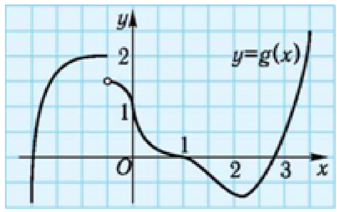


Рис 68

График функции $y = f(x)$ является неразрывной линией, то есть такой, которую можно начертить, не отрывая карандаша от листа бумаги. График функции $y = g(x)$ таким свойством не обладает. Он разорван в точке с абсциссой $x = –0,5$. Не закрашенным кружочком обозначена точка, не принадлежащая графику функции $y = g(x)$. То есть точка с координатами (–0,5; 1,5) не принадлежит этому графику. В то же время графику функции $y = g(x)$ принадлежит точка с координатами (–0,5; 2): $g(–0,5) = 2$. Обратите внимание на то, что две точки с одинаковыми абсциссами не могут одновременно принадлежать графику функции y от x.

Если функция задана на некотором промежутке, и ее график на нем является неразрывной линией, то функцию называют ***непрерывной*** на этом промежутке.

Функция $y = f(x)$ (рис. 67) непрерывна на промежутке [–2; 3]. Непрерывны в своих областях определения линейные и квадратичные функции.

О функции $y = g(x)$ (рис. 68) говорят, что точка $x =$ –0,5 является ее ***точкой разрыва***.

Например, точка $x = 0$ является точкой разрыва функций $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 66) и $y = \dfrac{|x|}{x}$ (рис. 69).

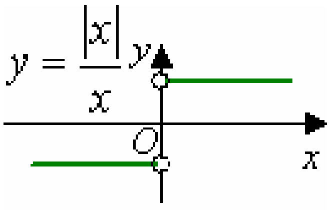


Рис. 69

Однако существуют процессы, в которых исследуемая величина меняется прыжками. Например, так изменяется в зависимости от времени масса товара *m*, остающаяся в машине, если его разгружают ящиками (рис. 70, а); сумма денег на банковском счете в зависимости от времени, если этот счет пополняется, но деньги с этого счета не снимаются (рис. 70, б); высота травы на газоне в зависимости от времени, если её регулярно подстригают с помощью газонокосилки (рис. 70, в) и т. п.

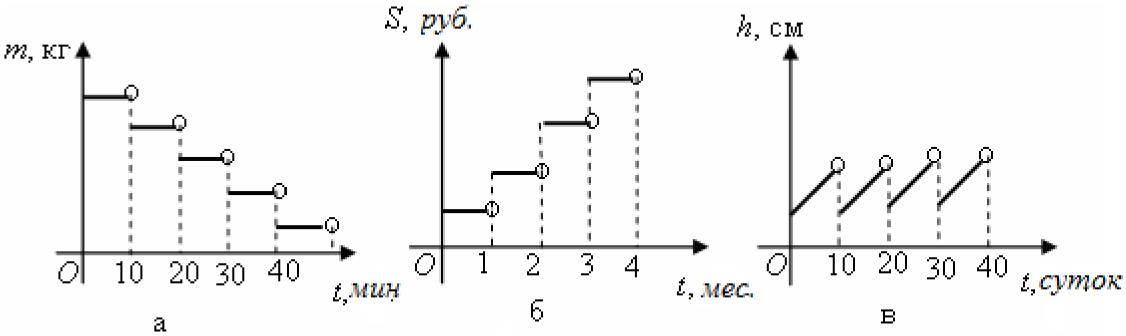


Рис 70

На рис. 71–74 изображены различные случаи бесконечных скачков. Мы видим, что точки графиков функций приближаются к прямой $x = x_0$, когда аргумент приближается к x_0. Прямую $x = x_0$ в таких случаях называют ***вертикальной асимптотой*** графика. Например, гипербола $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

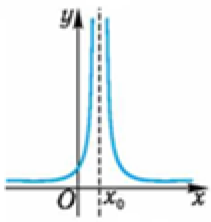


Рис. 71

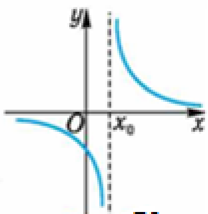


Рис. 72

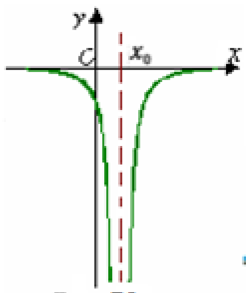


Рис. 73

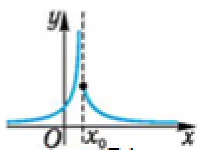


Рис. 74

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 75. Эта функция имеет две точки разрыва: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. В точке $x_1 = 2$ функция определена и $f(2) = 3$. Точка $x_2 = 3$ является точкой разрыва функции, хотя график в этой точке не делает скачка. В этой точке функция не определена.

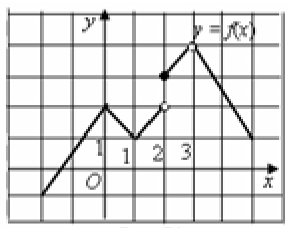


Рис. 75

Понятие обратной функции

Как известно, площадь круга S является функцией радиуса r: $S = \pi r^2, r > 0$. С помощью этой формулы можно найти площадь круга S при произвольном значении радиуса r. И наоборот, если известна площадь круга S, то можно определить его радиус, решив уравнение относительно $r: r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$

Теперь уже переменную r можно трактовать как функцию от переменной S. Такая функция называется ***обратной*** к функции $S = \pi r^2$, $r > 0$.

Обобщим рассмотренный пример. Пусть задана некоторая зависимость между переменными x и y. Если эту зависимость можно рассматривать и как функцию y от x ($y = f(x)$), и как функцию x от y ($x = g(y)$), то функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются ***взаимно обратными***. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $y = g(x)$, а функция $y = g(x)$ имеет обратную функцию $y = f(x)$.

Обратите внимание на то, что если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно обратны, то областью определения функции $y = g(x)$ является множество значений функции $y = f(x)$, а множеством значений функции $y = g(x)$ — область определения функции $y = f(x)$.

Любая ли функция имеет обратную? Нетрудно заметить, что обратную имеет функция, которая каждое свое значение принимает лишь в одной точке области определения. Геометрически это означает, что график такой функции пересекается с каждой прямой, параллельной оси x, и осью x не больше, чем в одной точке. В частности, обратную функцию имеют все возрастающие или убывающие функции, то есть монотонные функции.

Для того чтобы найти к данной функции $y = f(x)$ обратную, необходимо:

1) убедиться, что функция $y = f(x)$ имеет обратную;

2) решить уравнение $y = f(x)$ относительно x;

3) поменять местами переменные x и y.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Иллюстрациями этого факта является рис. 78, 79, расположенные далее.

Чтение графиков функций

Если функция задана графически, то нетрудно установить ее основные характеристики, в частности такие:

1) область определения;

2) чётность, нечетность;

3) нули функции;

4) промежутки знакопостоянства;

5) промежутки возрастания и убывания функции;

6) наибольшее и наименьшее значения функции;

7) множество значений функции;

8) непрерывность функции.

Описание свойств функции по ее графику обычно называют ***«чтением графика»***.

Решаем

Задача 1. На рис. 76 изображен график функции $y = f(x)$. Выяснить, является ли эта функция монотонной. Указать промежутки возрастания и убывания функции. Найти промежуток, на котором функция принимает постоянное значение.

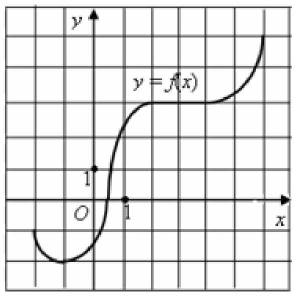


Рис.76

Решение. Функция не является монотонной. Она убывает на промежутке [–2; –1] и возрастает на каждом из промежутков [–1; 2] и [4; 6]. Функция сохраняет постоянное значение, равное 3, на промежутке [2; 4].

Ответ. [2; 4].

Задача 2. На рис. 77 изображен график скорости движения автомобиля. Охарактеризовать его движение.

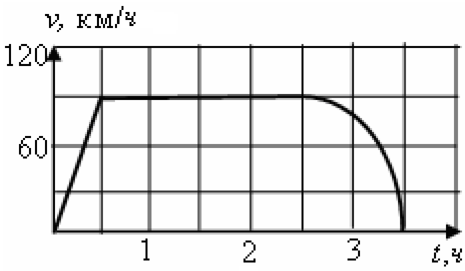


Рис.77

Решение. Первые полчаса скорость движения автомобиля росла от 0 км/ч до 90 км/ч, то есть автомобиль двигался ускоренно. В течение следующих двух часов (на временном промежутке [0,5; 2,5]) он двигался с постоянной скоростью 90 км/ч, то есть равномерно. После этого скорость начала уменьшаться и через час автомобиль остановился. Всего он двигался 3,5 часа.

Задача 3. Исследовать на четность и нечётность функцию:

$$1)\ f(x)=\frac{x^3}{x^2-3};\quad 2)\ f(x)=\frac{x^4}{x^2-3};\quad 3)\ f(x)=\frac{x^3}{x-3}.$$

Решение. 1) Проверим, является ли симметричной относительно начала координат область определения функции. Область определения функции $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ содержит все действительные числа, отличные от $\pm\sqrt{3}$, то есть она симметрична относительно начала координат. Найдем выражение для $f(-x)$: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-\dfrac{x^3}{x^2-3}=-f(x)$. Следовательно, $f(x) = -f(x)$ и $f(x)$ — нечётная функция.

2) Область определения функции $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-3}$ совпадает с областью определения функции из предыдущего задания. Имеет место равенство: $f(-x)=\dfrac{(-x)^4}{(-x)^2-3}=\dfrac{x^4}{x^2-3}=f(x)$. Поэтому данная функция является чётной.

3) Функция $f(x)=\dfrac{x^3}{x-3}$ не является ни чётной, ни нечётной, поскольку ее область определения не симметрична относительно начала координат: точка $x = -3$ входит в область определения, а точка $x = 3$ − не входит.

Задача 4. Доказать, что функция $f(x) = x^2 + x$ не является ни чётной, ни нечётной.

Решение. Её область определения симметрична относительно начала координат, но в симметричных точках 1 и –1 она принимает значения 2 и 0, которые не являются ни равными, ни противоположными числами. Поэтому не выполняется ни равенство $f(-x) = f(x)$, ни равенство $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения. Отсюда вытекает, что функция не является ни чётной, ни нечётной.

Задача 5. Найти обратную функцию для $y = 3x - 1$.

Решение. 1) Данная функция возрастает на всей числовой прямой, поэтому она имеет обратную.

2) Решим уравнение $y = 3x - 1$ относительно x: $x=\dfrac{y+1}{3}$.

3) Поменяв местами буквы, обозначающие переменные, получим искомую функцию $y = \dfrac{x+1}{3}$.

Построим на одном рисунке графики функций y=3x – 1 и $y = \dfrac{x+1}{3}$ (рис. 78). Обратите внимание на то, что эти графики симметричны относительно прямой $y = x$.

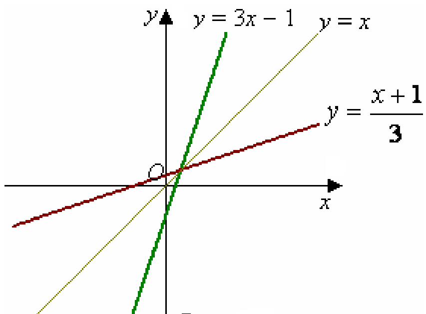


Рис.78

Ответ: $y = \dfrac{x+1}{3}$.

Задача 6. Найти функцию, обратную для функции $y = x^2$, $x \geq 0$.

Решение. 1) Эта функция возрастает на всей области определения [0; +∞), следовательно, она имеет обратную.

2) Решим уравнение $y = x^2$ относительно x: $x = \pm\sqrt{y}$. Поскольку $x \geq 0$, то берем только положительное значение корня: x=$\sqrt{y}$.

3) Сделав замену обозначений переменных, получим $y = \sqrt{x}$.

Аналогично можно показать, что функция $y = -\sqrt{x}$ является обратной к функции $y = x^2$, $x \leq 0$.

Построим на одном рисунке графики функций $y = x^2$, $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$ (рис. 79). Обратите внимание на то, что эти графики тоже симметричны относительно прямой $y = x$.

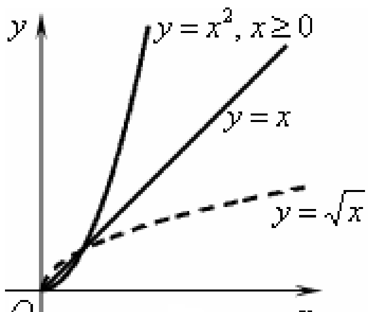


Рис.79

Ответ: $y = \sqrt{x}$.

Задача 7. На рис. 80 задан график функции y = f(x). Установите ее основные характеристики.

Решение. Ниже представлены результаты анализа графика функции, изображенного на рис. 80, по приведенной схеме.

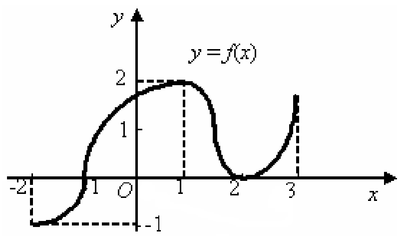


Рис. 80

	Свойства функции	Графическая интерпретация	Результаты анализа
1.	Область определения	Проекция графика на ось x.	$D(f) = [-2;\ 3]$.
2.	Четность, нечетность	Симметрия графика относительно оси у или начала координат.	Функция не является ни четной, ни нечетной.
3.	Нули функции.	Абсциссы точек пересечения графика с осью x.	$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
4.	Промежутки знакопостоянства функции	Промежутки на оси x, которые соответствуют точкам графика, лежащим выше (ниже) оси x	$f(x) > 0$ на множестве $(-1; 2)\cup(2; 3)$; $f(x) < 0$ на промежутке $(-2; -1)$.
5.	Промежутки монотонности функции (промежутки возрастания и убывания)	Промежутки на оси x, в которых большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции	$f(x)$ возрастает на промежутках $[-2; 1]$, $[2; 3]$; $f(x)$ убывает на промежутке $[1; 2]$.
6.	Наибольшее и наименьшее значения функции.	Ординаты самой высокой и самой низкой точек графика.	$f(x)$ принимает наибольшее значение, равное 2, в точке $x = 1$; $f(x)$ принимает наименьшее значение, -1, в точке $x = -2$.
7.	Множество значений функции.	Проекция графика на ось y.	$E(f) = [-1;\ 2]$.
8.	Непрерывность функции.	Неразрывность графика.	Функция непрерывна в области определения.

Задача 8. На рис. 81 изображен график движения пешехода из пункта А до пункта В и обратно.

1) Сколько часов длилось путешествие?

2) Сколько часов двигался пешеход?

3) Сколько часов понадобилось пешеходу, чтобы преодолеть путь от А до В и от В к А?

4) Каково расстояние между А и В?

5) С какой скоростью двигался пешеход из А в В и с какой из В в А?

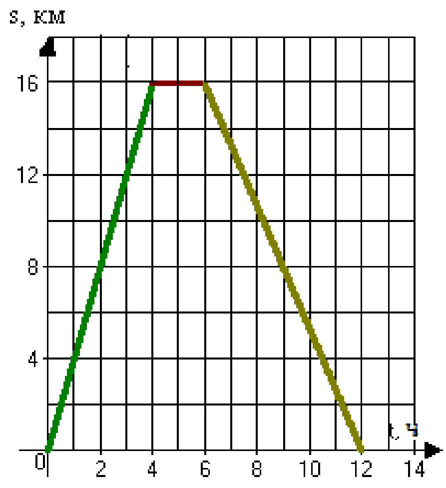


Рис.81

6) Задайте аналитически закон его движения, то есть зависимость расстояния от А от времени на каждом промежутке времени: $0 \le t \le 4$; $4 \le t \le 6$; $6 \le t \le 12$.

Решение. 1) Продолжительность путешествия равна длине промежутка, являющегося областью определения функции, график которой изображен на рис., то есть 12 часов.

2) Пешеход двигался с 0 ч. до 4 ч. и с 6 ч. до 12 ч., то есть всего 10 часов.

3) Из А в В пешеход двигался 4 ч и из В в А — 6 часов.

4) Расстояние между В и А равна длине промежутка, который является множеством значений соответствующей функции, то есть 16 км.

5) Пешеход двигался равномерно, путь от А до В, который составляет 16 км, он преодолел за 4 часа., поэтому он двигался со скоростью $v_1 = \frac{16}{4} = 4$ км / ч; из В в А он двигался со скоростью $v_2 = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$ км / ч.

6) На промежутке [0; 4] имеем линейную зависимость с угловым коэффициентом, равным 4, на промежутке [6; 12] линейную функцию можно восстановить по точкам с координатами (6; 16) и (12, 0). Итак, $s = 4t$ при $0 \le t \le 4$; $s = 16$ при $4 \le t \le 6$; $s = -\frac{8}{3}t + 32$ при $6 \le t \le 12$.

Вопросы для самоконтроля

1°. Какая из функций, графики которых изображены на рис. 82, а)-г), является: 1) возрастающей; 2) убывающей?

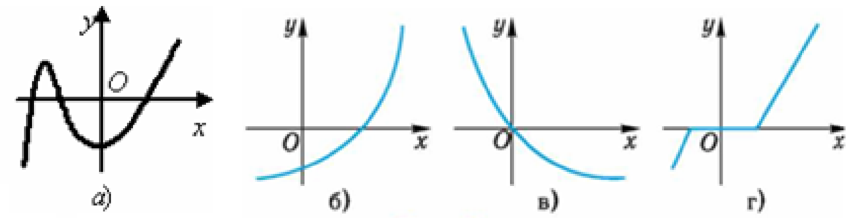


Рис. 82

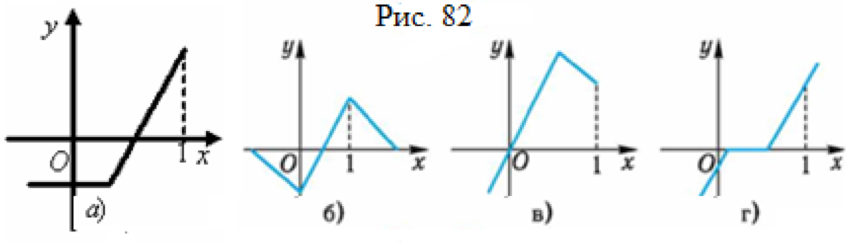


Рис. 83

2°. Какие из функций, графики которых изображены на рис. 82, а)-г), имеют промежутки постоянства?

3°. Какие из функций, графики которых изображены на рис. 83, а)-г), возрастает на промежутке [0; 1]?

4°. Какие из следующих линейных функций возрастают (убывают): а) $y = 1 - x$; б) $y = x - 1$; в) $y = -1$; г) $y = -2(x + 1)$?

5. Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[-2; 2]$. Сравните, если это возможно, числа $f(-0{,}5)$ и $f(-1)$.

6. Укажите промежуток убывания функции: а) $y = -\dfrac{x^2}{3}$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = (x - 1)^2$.

7°. Какая из функций, графики которых изображены на рис. 84, а) – г), может быть:

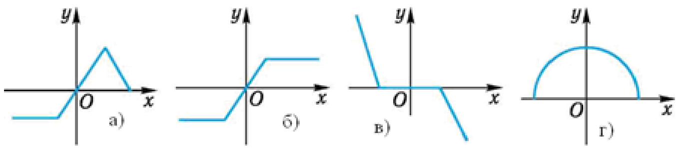


Рис. 84

1) чётной; 2) нечётной?

8°. Графики каких из приведенных ниже функций симметричны относительно оси y: а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^3$; г) $y = |x|$; д) $y = 1$; е) $y = \dfrac{x-1}{x-1}$?

9°. Графики каких из приведенных ниже функций симметричны относительно начала координат: а) ° $y = 3x$; б) ° $y = x^2 + 1$; в) ° $y = x^3$; г) $y = \dfrac{|x|}{x}$?

10. Известно, что функция $y = f(x)$ является нечётной и $f(-3) = 2$. Чему равняется $f(3)$?

11. Областью определения чётной функции является промежуток $[a;4]$. Чему равняется число a?

12. Может ли возрастающая функция быть: а) чётной; б) нечётной?

13. На рис. 85 изображен график функции $y = g(x)$. Какие из следующих утверждений справедливы?

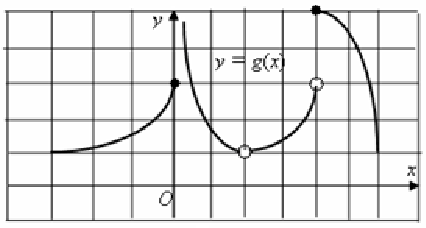


Рис. 85

1) Функция $y = g(x)$ является непрерывной.

2) Функция имеет три точки разрыва.

3) Функция не определена в точках разрыва.

4) $g(0)= 2$. 5) $g(4)= 2$.

14. Какие из функций, заданных графиками на рис. 86, имеют обратные?

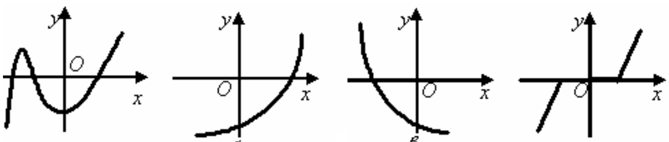


Рис. 86

15. Являются ли функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рис. 87, взаимно обратными?

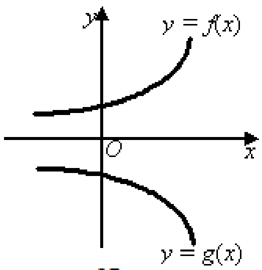


Рис. 87

Задачи для самостоятельного решения

1°. Исследуйте функцию на четность и нечётность:

$$1)\ y = 5x^3 - x;\quad 2)\ y = x^2 - 3;\quad 3)\ y = \frac{x^2}{x^4 - 1};\quad 4)\ y = \sqrt{x} + 1;\quad 5)\ y = |x| + x^2 - 4;$$

$$6)\ y = 3;\quad 7)\ y = \frac{x^3}{2x^2 - 1};\quad 8)\ y = \frac{x^3}{2x - 1}.$$

2. Докажите, что функция $y = f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной, если:

$$1)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1;\quad 2)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1}}.$$

3°. На рис. 88, 89 изображены графики функций $y = g(x)$ и $y = f(x)$. Найдите для каждой функции: 1) область ее определения; 2) множество ее значений; 3) нули функции и промежутки знакопостоянства; 4) промежутки возрастания, убывания функции.

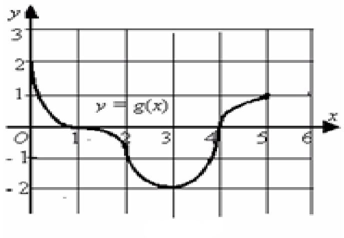


Рис. 88

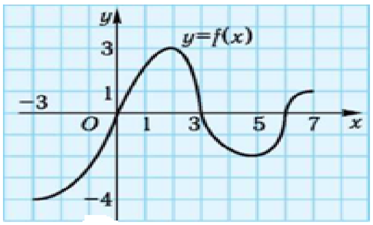


Рис. 89

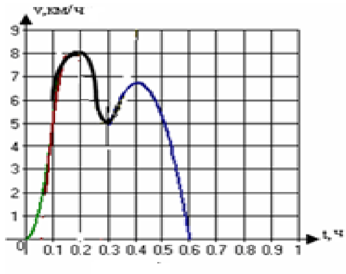


Рис. 90

4°. На рис. 90 изображена зависимость скорости велосипедиста от времени.

1) Какой была скорость велосипедиста в момент времени t = 18 мин?

2) В какие моменты времени скорость равнялась 5 км/ч?

3) Укажите промежутки времени, в течение которых скорость велосипедиста возрастала, убывала, была постоянной.

4) Какой была наибольшая скорость велосипедиста?

5°. На рис. 91 изображена зависимость объема воды от ее температуры. Укажите характерные особенности этой зависимости.

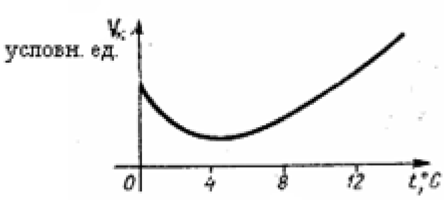


Рис. 91

6. На рис. 92, а) – в) изображены графики некоторых функций. Достройте каждый из них (если это возможно) до графика: 1) чётной функции; 2) нечётной функции.

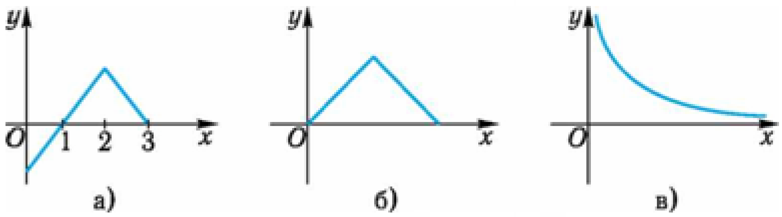


Рис.92

7°. На рис. 93 изображен график функции $y = g(x)$.

1) Является ли эта функция непрерывной? Если нет, то укажите ее точки разрыва.

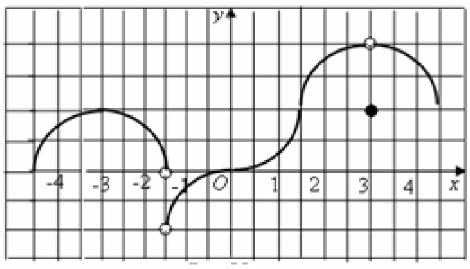


Рис. 93

2) Определена ли функция в точках разрыва?

3) Укажите значение функции в тех точках разрыва, в которых она определена.

4) Сколько нулей имеет функция?

8. Найдите функцию, обратную данной. Укажите ее область определения и множество значений. Постройте на одном рисунке графики этих функций. 1) ^{0} $y=0{,}1x+4$; 2) ^{0} $v=3u+5$; 3) ^{0} $z=\sqrt{t}$; 4) ^{0} $y=\dfrac{1}{x}$; 5) ^{0} $y=3x^2, x\in[0;\infty)$; 6) $y=x^2, 1\le x\le 3$; 7) $y=\dfrac{x}{x-1}$; 8) $y=\dfrac{t+1}{3t-2}$.

9. На рис. 94 изображена зависимость электрической проводимости раствора при данной температуре от процентного содержания K фосфорной кислоты в растворе.

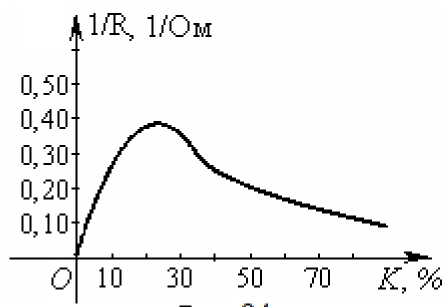


Рис. 94

1) При какой концентрации раствора его электрическая проводимость возрастает, а при какой — убывает?

2) Какова наибольшая электрическая проводимость?

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Воспользуйтесь определениями чётной и нечётной функций.

2. Воспользуйтесь схемой доказательства того, что функция не является ни чётной, ни нечётной. Можно воспользоваться решением задачи 4.

3. Воспользуйтесь решением задачи 7.

4. Воспользуйтесь решением задачи 8.

5. Воспользуйтесь решением задачи 2.

6. 1) Отобразите данный график симметрично относительно оси ординат.

2) Отобразите данный график симметрично относительно начала координат.

7. Воспользуйтесь понятиями непрерывной функции, точек разрыва, нулей функции, обозначениями точек, не входящих в область определения функции.

8. Воспользуйтесь правилами нахождения обратной функции.

9. Обратите внимание на то, что большему значению аргумента возрастающей (убывающей) функции соответствует большее (меньшее) значение функции.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. 1) б); 2) в). **2.** г). **3.** б. **4.** Возрастает б), убывают а) и г). **5.** $f(-0{,}5) < f(-1)$. **6.** а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$; в) $(-\infty; 1]$. **7.** 1) г), 2) б), в). **8.** б), г), д). **9.** а), в), г). **10.** –2. **11.** –4. **12.** а) Нет; б) да. **13.** 2). **14.** б), в). **15.** Нет.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. Чётные функции: 2), 3), 5), 6); нечётные функции: 1), 7). **3.** 1) $D(g) = [0;5]$, $D(f) = [-3;7]$; 2) $E(g) = [-2;2]$, $E(f) = [-4;3]$; 3) функция $y = g(x)$ имеет два нуля: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; $g(x) > 0$ на множестве $[0; 1) \cup (4; 5]$, $g(x) < 0$ на промежутке $(1; 4)$; функция $y = f(x)$ имеет три нуля: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$; $f(x) > 0$ на множестве $(0; 3) \cup (6; 7]$, $f(x) < 0$ на множестве $[-3; 0) \cup (3;6)$; 4) функция $y = g(x)$ убывает на промежутке $[0; 3]$ и возрастает на промежутке $[3; 5]$; функция $y = f(x)$ возрастает на каждом из промежутков $[-3; 2]$, $[5; 7]$ и убывает на промежутке $[2; 5]$. **4.** 1) 5 км/ч; 2) 0,1 ч, 0,3 ч, 0,5 ч; 3) скорость возрастала на протяжении следующих промежутков времени: $0 \le t \le 0{,}2$ и $0{,}3 \le t \le 0{,}4$; скорость уменьшалась на протяжении следующих промежутков времени: $0{,}2 \le t \le 0{,}3$ и $0{,}4 \le t \le 0{,}6$; 4) 8 км/ч. **7.** 1) Нет; $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 3$ – точки разрыва; 2) в точке $x_1 = -1{,}5$ функция не определена, в точке $x_2 = 3$ функция определена; 3) $f(3) = 1$; 4) два. **8.** 1) $y = 10x - 40$. 2) $v = \frac{u-5}{3}$. 3) $z = t^2$, $t \ge 0$. 4) $y = \frac{1}{x}$. 5) $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$. 6) $y = \sqrt{x}, 1 \le x \le 9$. 7) $y = \frac{x}{x-1}$. 8) $y = \frac{2t+1}{3t-1}$. **9.** 1) $[0; 30]$, $[30; +\infty)$; 2) 0,40.

4. Простейшие функциональные зависимости, их свойства и графики

В данном пункте приведен обзор некоторых основных функций, которые изучались раньше, их свойств и графиков.

Повторяем теорию

Линейная функция

Простейшим и очень важным в математике и ее приложениях является класс линейных функций.

Линейной называется функция, имеющая вид $y = kx + b$, где k, b — некоторые числа.

Известно, что графиком линейной функции является прямая. Коэффициент k равняется тангенсу угла наклона прямой $y = kx + b$ к оси x и называется ее ***угловым коэффициентом***.

Если $k = \operatorname{tg} \varphi > 0$, то $0° < \varphi < 90°$. Следовательно, угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x является острым и функция $y = kx + b$ возрастет в своей области определения (рис. 95 а)).

Если $k = \operatorname{tg} \varphi < 0$, то $90° < \varphi < 180°$.Следовательно, угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x является тупым и функция $y = kx + b$ убывает (рис. 95 б)).

Если $k = 0$, то имеем постоянную функцию $y = b$, графиком которой является прямая, параллельная оси x (рис. 95 в)).

Если $b = 0$, то линейная функция имеет вид $y = kx$ и называется ***прямой пропорциональностью*** (рис. 96).

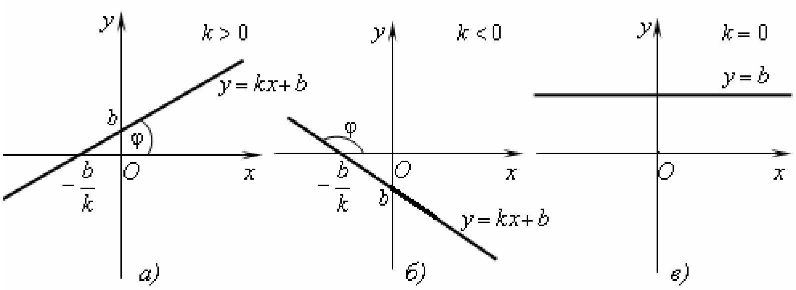


Рис.95

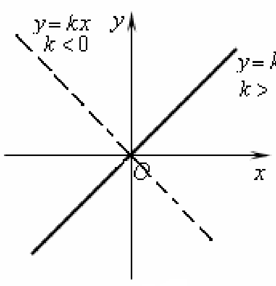


Рис. 96

Много процессов и явлений описываются законом $y = kx$. Например, напряжение U в электрической сети с постоянным сопротивлением R прямо пропорционально силе тока I: $U = RI$ (закон Ома). Зависимость силы F, действующей на пружину, от величины ее растяжения имеет вид $F = -kx$ (закон Гука).

Линейная функция $y = kx + b$ при любом k областью определения и множеством значений имеет множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, имеет при $k \neq 0$ единственный нуль $x = -\dfrac{b}{k}$, непрерывна.

При $k \neq 0$ и $b \neq 0$ она не является ни чётной, ни нечётной. Если $k \neq 0$ и $b = 0$, то функция $y = kx$ является нечётной.

При $k > 0$ функция положительна на промежутке $\left(-\dfrac{b}{k};+\infty\right)$ и отрицательна на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{b}{k}\right)$, возрастает в своей области определения.

При $k < 0$ функция отрицательна на промежутке $\left(-\dfrac{b}{k};+\infty\right)$ и положительна на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{b}{k}\right)$, убывает в своей области определения.

При $k = 0$ функция является постоянной: $y = b$. Ее свойства рекомендуем сформулировать самостоятельно.

Квадратичная функция

Не менее важной, чем линейная функция, в математике и ее приложениях является квадратичная функция.

Квадратичной называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — некоторые числа.

Квадратичная функция определена на множестве всех действительных чисел.

Если $b = c = 0$, то имеем функцию $y = ax^2$. Она имеет единственный нуль $x = 0$: $y(0) = 0$. При $a > 0$ функция $y = ax^2$ принимает неотрицательные значения

($ax^2 \geq 0$), при $a < 0$ — неположительные ($ax^2 \leq 0$). Функция $y = ax^2$ является чётной: $y(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = y(x)$. Как известно, ее графиком является парабола с вершиной в точке $B(0;\ 0)$, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$. На рис. 97, 98 изображены графики функции $y = ax^2$ в зависимости от знака числа a.

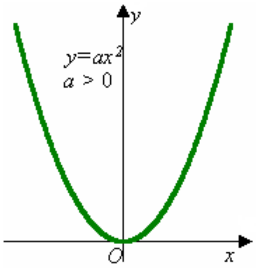


Рис. 97

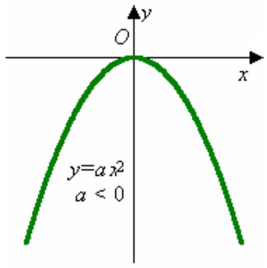


Рис. 98

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ также является парабола. Ее расположение на координатной плоскости зависит от коэффициентов a, b, c. Направление ее ветвей зависит от знака числа a: при $a > 0$ они направлены вверх, при $a < 0$ − вниз. Вершина ее находится в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Парабола может не пересекать ось x, а может ее пересекать в одной или двух точках. Это зависит от количества корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Параболу обычно строят по ее характерным точкам: вершине и точкам пересечения с осями координат. Конкретные примеры построения графиков квадратичной функции были рассмотрены выше.

Немало физических зависимостей выражаются с помощью квадратичной функции. Например, движение тела вдоль координатной прямой под действием постоянной силы можно представить в виде $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, зависимость кинетической энергии тела W, масса которого равняется m, от скорости v выражается формулой $W = \dfrac{mv^2}{2}$. Тела, которые бросили горизонтально или под углом к горизонту, будут двигаться по параболической траектории под действием силы притяжения (рис. 99 а, б).

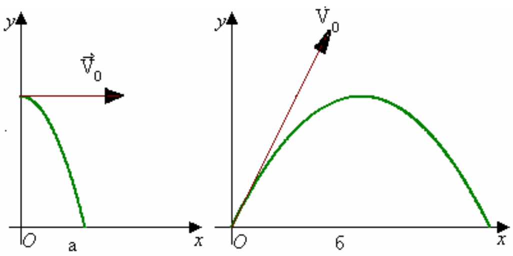
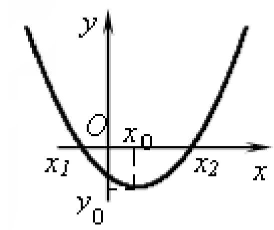
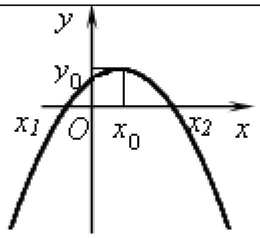
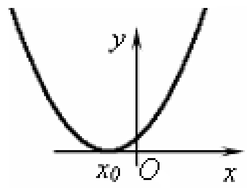
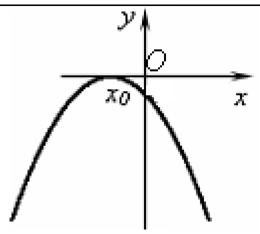
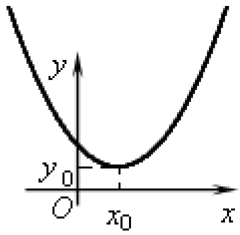
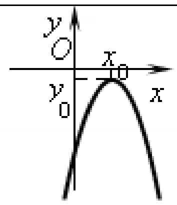


Рис.99

В следующей таблице представлены графики функций $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ и знака коэффициента a. Через $x_0 = -\frac{b}{a}$ обозначена абсцисса вершины параболы.

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, при всех a своей областью определения имеет множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, она непрерывна в своей области определения, в зависимости от знака дискриминанта D может иметь один или два нуля, либо не иметь их вообще, промежутки знакопостоянства зависят от знаков a и D.

При $b \neq 0$ функция не является ни чётной, ни нечётной, при $b = 0$ она является чётной.

При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$, где $x_0 = -\frac{b}{a}$ — абсцисса вершины параболы, и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$, наименьшее значение функция принимает при $x = x_0$, множество её значений — промежуток $[y(x_0); +\infty)$.

При $a < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$, наибольшее значение функция принимает при $x = x_0$, множество её значений — промежуток $(-\infty; y(x_0)]$.

Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называется функция, которая имеет вид $y = \dfrac{k}{x}$, где k — некоторое отличное от нуля число.

Как известно, графиком обратной пропорциональности является гипербола, расположение которой зависит от знака числа k (рис. 100 и 101).

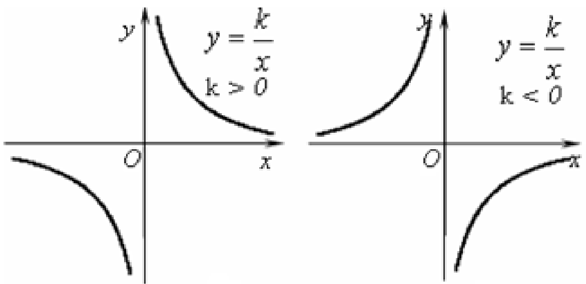


Рис 100 Рис. 101

Обратная пропорциональность широко применяется для описания зависимостей между величинами. Она часто связана с прямой пропорциональностью. Действительно, если s_0 — расстояние между пунктами А и В, то время t равномерного движения из А в В обратно пропорционально скорости движения v: $t = \frac{s_0}{v}$. Обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$ при всех $k \neq 0$ своей областью определения имеет множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, она нечётна, не имеет нулей, не является непрерывной, точка $x = 0$ — её точка разрыва, множество её значений — объединение промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

При $k > 0$ функция положительна на промежутке $(0; +\infty)$ и отрицательна на промежутке $(-\infty; 0)$, она убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

При $k < 0$ функция отрицательна на промежутке $(0; +\infty)$ и положительна на промежутке $(-\infty; 0)$, она возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решаем

Задача 1. Найти линейную функцию $y = kx + b$, график которой:

1) проходит через точки $A(-1;\ 1)$ и $B(2;\ 4)$;
2) образует угол 30° с осью абсцисс и проходит через точку $C\left(-\sqrt{3};2\right)$.

Решение. 1) Для нахождения k и b составим систему уравнений:

$$\begin{cases} k(-1)+b=1, \\ k\cdot 2+b=4. \end{cases}$$

Решим её методом подстановки.

$$\begin{cases} b-k=1, \\ b+2k=4, \end{cases} \quad \begin{cases} b=k+1, \\ k+1+2k=4, \end{cases} \quad \begin{cases} b=k+1, \\ 3k=3, \end{cases} \quad \begin{cases} b=k+1, \\ k=1, \end{cases} \quad \begin{cases} b=1+1=2, \\ k=1. \end{cases}$$

Итак, искомой является функция $y = x + 2$.

2) По условию, $k=tg30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $k\left(-\sqrt{3}\right)+b=2$. Следовательно, $b=2+1=3$, и

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3.$$

Ответ: 1) $y = x + 2$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$.

Задача 2. Скорость тела линейно зависит от времени. В начале движения скорость была 5 м/с, а через 12 с она достигла 23 м/с. Найти зависимость скорости тела от времени.

Решение. По условию, $v(t) = kt + b$, $v(0) = 5$, $v(12) = 23$. Отсюда: $k\cdot 0 + b = 5$, $k\cdot 12 + b = 23$.

Решая полученную систему, будем иметь: $b = 5$, $k = 1{,}5$; $v = 1{,}5t + 5$.

Ответ: $v = 1{,}5t + 5$.

Задача 3. Найти квадратичную функцию, если известно, что своё наименьшее значение $y = -3$ она принимает при $x = 2$, а ее график проходит через точку $A(0;\ 1)$.

Решение. Найти квадратичную функцию — это значит найти ее коэффициенты a, b, c. Поскольку по условию график функции проходит через точку $A(0;\ 1)$, то есть $y(0) = 1$, то $c = 1$. Кроме того, известно, что график функции проходит через точку с координатами (2; –3), которая является вершиной параболы. Отсюда имеем систему: $\begin{cases} y(2)=-3, \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4a+2b+1=-3, \\ b=-4a, \end{cases}$

решив которую, получим $a = 1$, $b = –4$. Таким образом, $y = x^2 – 4x + 1$.

Ответ: $y = x^2 – 4x + 1$.

Задача 4. График обратной пропорциональности проходит через точку $A(–1; 2)$.

1) Проходит ли он через точку $B(4; –0{,}5)$?

2) Возрастает или убывает обратная пропорциональность на промежутке $(0; +\infty)$?

Решение. 1) Поскольку график функции проходит через точку $A(–1; 2)$, то выполняется равенство $2=\dfrac{k}{-1}$. Отсюда находим $k = –2$. Заданная функция имеет вид $y=-\dfrac{2}{x}$. Поскольку $-0{,}5=\dfrac{-2}{4}$, то график функции проходит через точку $B(4; –0{,}5)$.

2) Поскольку $k = –2$, то функция возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: 1) проходит; 2) возрастает.

Вопросы для самоконтроля

1. Что можно сказать о коэффициентах k и b, если график линейной функции $y = kx + b$ лежит в нижней координатной полуплоскости?

2. Какой формулой задается функция, график которой изображен на рис. 102?

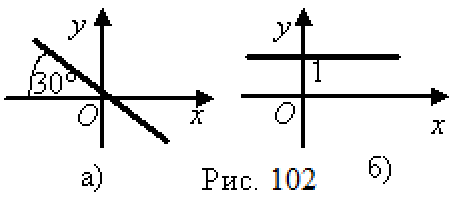


Рис. 102

3. При каких значениях k и b график функции $y=kx+b$:

а) проходит только через I и III четверти координатной плоскости;

б) отсекает треугольник во второй четверти;

в) * проходит через начало координат и лежит между прямыми $y = 0$ и $y = –x$?

4. Является ли любая прямая на координатной плоскости графиком линейной функции?

5. Чему равняется угловой коэффициент прямой AB, если график линейной функции проходит через точки $A(0; 1)$ и B $(1; 0)$?

6. Чему равняется наибольшее значение функции $y = -3x^2 + 6x - 1$?

7. Каков промежуток убывания функции: а) $y = -\dfrac{x^2}{3}$; б) $y = 2x^2 - 8x + 1$?

8. Чему равняется коэффициент k, если график функции $y = kx^2$ проходит через точку $A(2; -4)$?

9. При каких значениях параметра a функция $y = (1 - a)x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$?

10. На каком из рис. 103 а) - в) изображен график функции $y = (x + 1)(2 - x)$?

11. На рис. 103 а) - в) изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Какие знаки имеют числа a, b, c?

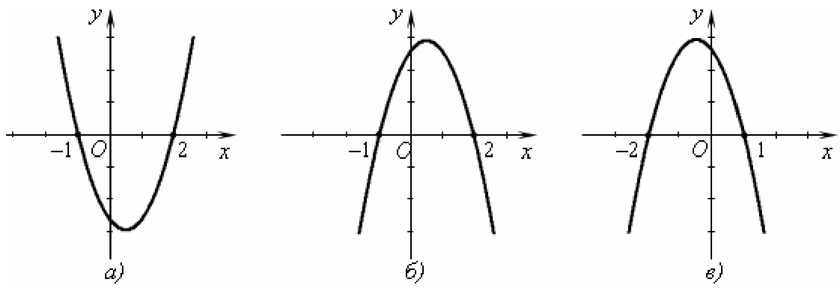


Рис. 103

12. Могут ли пересекаться гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ при разных значениях k?

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ якщо } x \le 0, \\ x-1, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$ 1) Постройте ее график.

2) Укажите промежутки ее возрастания и убывания.

3) Является ли функция чётной или нечётной?

4) Измените значение функции в одной точке так, чтобы она стала нечётной.

2. Задайте с помощью формулы функции, графики которых изображены на рис. 104 а) - в).

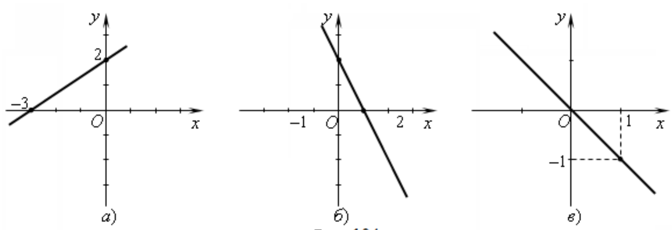


Рис. 104

3. На рис 105 изображен поперечный разрез канала,

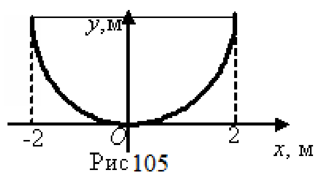


Рис105

основание которого имеет форму параболы $y = 3x^2$. Какова его наибольшая глубина?

4*. Найдите квадратичную функцию, если известно, что:

1) график ее проходит через точки $A(0;1)$, $B(1;0)$, $C(2;3)$;

2) вершина параболы, которая является ее графиком, имеет координаты $A(2{,}5;-0{,}25)$ и парабола проходит через точку $B(1;2)$;

3) свое наименьшее значение $y=-2$ она принимает в точке $x=1$, а ее график пересекает ось абсцисс при $x=5$.

5*. Задайте с помощью формулы функции, графиками которых являются параболы, изображенные на рис. 106 а) – в).

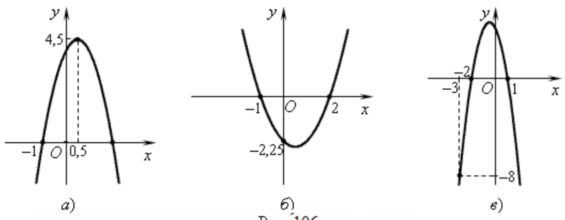


Рис. 106

6. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый полный оборот был сделан колесом за 8 с. На какой угол повернулось колесо за первые 2 с движения?

7. Камень, брошенный с поверхности Земли вверх, двигается по закону $h=-\frac{gt^2}{2}+20t$, где h — высота, м; t — время, с; g ≈ 10 м/с^2 — ускорение свободного падения. Через сколько примерно секунд камень упадет на Землю? Чему примерно равняется наибольшая высота, на которую взлетит камень?

8. Пусть арка моста имеет форму дуги параболы (рис. 107). Высота арки составляет 3 м, а длина хорды, которая стягивает ее, равняется 24 м. Арка имеет 5 вертикальных стояков, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга и от концов моста. Вычислите длины стояков.

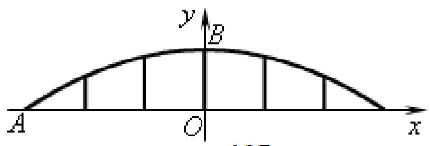


Рис. 107

9. Вершина прямого угла равнобедренного треугольника имеет координаты (0; 1). Основание треугольника лежит на оси x. Найдите уравнения прямых, на которых лежат боковые стороны треугольника.

10. Квадрат со стороной 2 пересекается прямой, параллельной его диагонали (рис. 108).

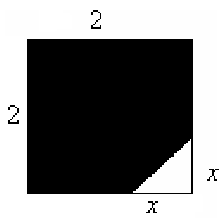


Рис. 108

1) Выразите зависимость площади закрашенной части квадрата от x.

2) Постройте график полученной функции.

11. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = -x^2 + 4x$; 2) $y = 3x^2 - 6x + 4$; 3) $y = (x+1)(x-2)$;

4) $y = \sqrt{x+1}$; 5) $y = \dfrac{1}{x+2}$; 6) $y = \dfrac{1}{x} - 2$.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. График можно построить, использовав графики линейных функций. На вопросы 2 и 3 можно ответить, воспользовавшись построенным графиком. Для выполнения задания 4 обратите внимание на значение функции при $x = 0$.

2. Воспользуйтесь координатами точек пересечения графиков с осями координат.

3. Найдите ординату наивысшей точки параболы.

4. Составьте по условию систему трёх уравнений с тремя неизвестными a, b, c.

5. Воспользуйтесь координатами точек, указанных на графиках.

6. Из условия найдите коэффициент пропорциональности, обратив внимание на то, что полный оборот равен 2π.

7. Обратите внимание на то, что камень упадет на Землю при $h = 0$. Наибольшая высота, на которую взлетит камень, равна ординате наивысшей точки параболы.

8. Воспользуйтесь тем, что из условия можно найти координаты точек пересечения параболы с осями координат, а затем − координаты начал и концов стояков.

9. Найдите предварительно координаты вершин острых углов треугольника.

10. Найдите вначале площадь квадрата, выразите через x площадь не закрашенной, а затем закрашенной частей квадрата.

11. Воспользуйтесь приведенными в таблицах промежутками возрастания и убывания квадратичной функции и обратной пропорциональности, а также графиком функции $y = \sqrt{x}$.

Ответы на вопросы для самоконтроля

1. $k = 0$, $b < 0$. **2.** а) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$; б) $y = 1$. **3.** а) $k > 0$, $b = 0$; б) $k > 0$, $b > 0$; в) $b = 0$, $-1 < k < 0$. **4.** Нет. **5.** –1. **6.** 2. **7.** а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 2]$. **8.** –1. **9.** $(1; +\infty)$. **10.** б). **11.** а) $a > 0$, $b < 0$; $c < 0$; б) $a < 0$, $b > 0$; $c > 0$; в) $a < 0$, $b < 0$; $c > 0$. **12.** Нет.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

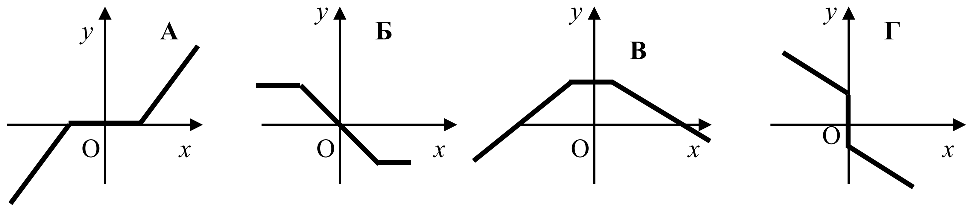
1. 2) Возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $(0; +\infty)$; 3) функция не является ни чётной ни нечётной; 4) **указание**: замените значение в точке $x = 0$. **2.** а) $y = \frac{2}{3}x + 2$; б) $y = -2x + 2$; в) $y = -x$. **3.** 12 м. **4.** 1) $y = 2x^2 - 3x + 1$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$; 3) $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4} - \frac{15}{8}$. **5.** а) $y = -2x^2 + 2x + 4$; б) $y = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{9}{4}$; в) $y = -2x^2 - 2x + 4$. **6.** $\frac{\pi}{8}$. **7.** 4 с; 20 м. **8.** 3 м, $\frac{8}{3}$м, $\frac{5}{3}$м. **9.** $y = x + 1$, $y = -x + 1$. **10.** 1) $S = 4 - \frac{x^2}{2}, 0 < x < 2$. **11**. Функции возрастают на промежутках: 1) $(-\infty; 2]$: 2) $[1;+\infty)$; 3) $[0,5; +\infty)$; 4) $[-1; +\infty)$; функции убывают на промежутках: 1) $[2;+\infty)$; 2) $(-\infty; 1]$: 3) $(-\infty; 0,5]$: 5) $(-2; +\infty)$; $(-\infty;-2)$; 6) $(0; +\infty)$; $(-\infty; 0)$.

Тренажёр

1. Понятие функции, способы ее задания

Вариант 1

1. Какая из изображенных на координатной плоскости линий не является графиком функции от аргумента x?



2. Укажите среди приведенных пару равных функций.

А. $y=\sqrt{\dfrac{1}{(x-1)^2}},\ y=\dfrac{1}{x-1}$. **Б**. $y=\dfrac{x}{x},\ y=1$. **В**. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+1},\ y=1$. **Г**. $y=\sqrt{x^2},\ y=x$.

3. График функции $y=\dfrac{x}{2-x}$ не проходит через точку с координатами …

А. (0; 0). **Б.** (1; 1). **В.** $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **Г.** $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Укажите область определения функции $y=\sqrt{2-x}$.

А. $(-\infty;+\infty)$. **Б.** $(-\infty;2]$. **В.** $(-\infty;2)$. **Г.** $(2;+\infty)$.

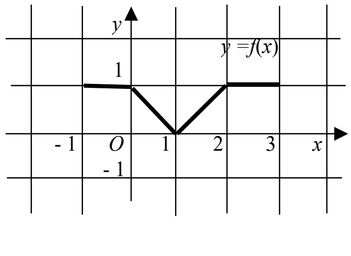
5. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что её график проходит через точку с координатами (–3; 4).

А. $y=-\dfrac{12}{x}$. **Б.** $y=\dfrac{12}{x}$. **В.** $y=-\dfrac{4}{3}x$. **Г.** $y=\dfrac{4}{3}x$.

6. В скольких точках функция $y=|2x-1|$ принимает значение 3?

А. Ни в одной. **Б**. В одной. **В**. В двух. **Г.** Ответить невозможно.

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какое из утверждений относительно этой функции верно?



А. Областью определения функции является промежуток [0; 1].

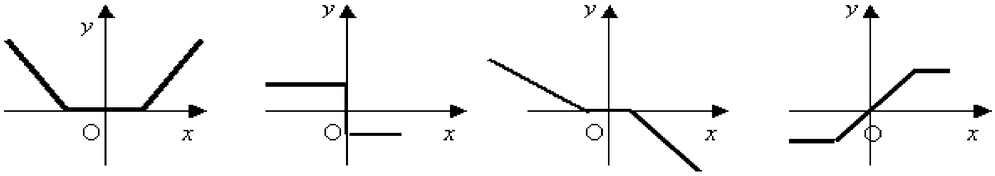
Б. Функция имеет один нуль.

В. Функция принимает только положительные значения.

Г. Множеством значений функции является промежуток $[-1; 3]$.

Вариант 2

1. Сколько из изображенных на координатной плоскости линий являются графиками функций от аргумента x?



А. Четыре. **Б.** Три. **В.** Две. **Г.** Одна.

2. Укажите среди приведённых пару неравных функций.

А. $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$. **Б.** $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$, $g(x) = x,\ x \geq 0$.

В. $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x) = 1$. **Г.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$, $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

3. График функции $y=\dfrac{1-x}{x}$ не проходит через точку с координатами …

А. $(1; 0)$. **Б.** $(-1; -2)$. **В.** $(0; 1)$. **Г.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

4. Укажите область определения функции $y = (2 - x)^3$.

А. $(0; 2]$. **Б.** $(-\infty; 2)$. **В.** $[2; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; +\infty)$.

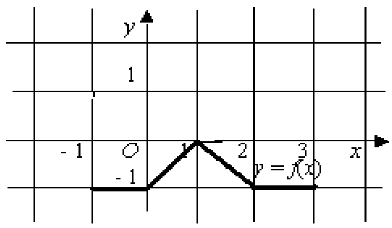
5. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что её график проходит через точку $(4; -3)$.

А. $y=-\dfrac{12}{x}$. **Б.** $y=\dfrac{12}{x}$. **В.** $y=-\dfrac{3}{4}x$. **Г.** $y=\dfrac{3}{4}x$.

6. В скольких точках функция | $y = |3x + 1|$ принимает значение 5?

А. Ни в одной **Б.** В одной. **В.** В двух . **Г.** Ответить невозможно

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какое из утверждений относительно этой функции верно?



А. Областью определения функции является промежуток $(-1; 3)$.

Б. Функция не имеет нулей.

В. Функция принимает только отрицательные значения.

Г. Множеством значений функции является промежуток [–1; 0].

Вариант 3

1. График функции не может проходить через точки …

А. $M(0; 0)$, $N(1; 0)$. **Б.** $M(0; 1)$, $N(1; 0)$. **В.** $M(0; 0)$, $N(0; 1)$. **Г.** $M(0; 0)$, $N(1; 1)$.

2. Функция $y = x$ равна функции …

А. $y=\sqrt{(x-1)^2}+1$. **Б**. $y=\dfrac{x^2}{x}$. **В**. $y=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$. **Г**. $y=\sqrt{x^2}$.

3. График функции $y=\dfrac{2x}{1-x}$ проходит через точку с координатами …

А. (3; –1). **Б.** (–1; –1). **В.** $\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$. **Г.**(1; –1).

4. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

А. (– ∞; + ∞). **Б.** (–2; + ∞). **В.** [–2; + ∞). **Г.** (2; + ∞).

5. Задайте формулой прямую пропорциональность, зная, что её график проходит через точку с координатами (1; 3).

А. $y=\dfrac{1}{3}x$. **Б.** $y=\dfrac{3}{x}$. **В.** $y = 2x + 1$. **Г.** $y = 3x$.

6. В скольких точках функция | $y = |4x – 2|$ принимает значение 1?

А. Ни в одной. **Б.** В одной. **В**. В двух. Г. Ответить невозможно

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какое из утверждений относительно этой функции верно?

А. Областью определения функции является промежуток (–2; 2).

Б. Функция имеет один нуль.

В. Функция не принимает отрицательных значений.

Г. Множеством значений функции является промежуток [–1; 1].

Подсказки

1. Воспользуйтесь тем, что каждому значению х из области определения функции $y = f(x)$ соответствует единственное значение функции.

2. Воспользуйтесь определением равных функций.

3. Воспользуйтесь определением графика функции.

4. Воспользуйтесь тем, что область определения функции, заданной выражением с переменной состоит из тех значений переменной при которых имеют смысл операции, входящие в выражение.

5. Запишите общий вид искомой зависимости и найдите в ней неизвестный коэффициент, используя условие задачи.

6. Составьте по условию уравнение, содержащее выражение с модулем и решите его.

7. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией таких понятий как «область определения функции», «множество значений функции», «нули функции» и др.

Рекомендации

1. Воспользуйтесь тем, что согласно определению функции, каждая прямая, параллельная оси y, и сама ось y могут пересекать график функции не более чем в одной точке.

2. Сравните области определения функций каждой пары. Если они совпадают, проверьте, одинаковые ли значения принимают эти функции в каждой точке области определения.

3. Воспользуйтесь тем, что график функции $y = f(x)$ проходит через точку A$(x_0; y_0)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $y_0 = f(x_0)$.

4. Определите какие операции входят в выражение, задающее функцию и для каких чисел эти операции определены

5. Воспользуйтесь тем, что общий вид прямой пропорциональности $y = kx$, а обратной – $y = \frac{k}{x}$. Неизвестный коэффициент можно найти, воспользовавшись тем, что график функции проходит через заданную точку.

6. Чтобы определить, в скольких точках функции $y = f(x)$ принимает значение a, нужно решить относительно X уравнение $f(x) = a$.

7. При «чтении» графика функции пользуйтесь правилами:

1) Область определения функции, заданной графически, состоит из всех проекций точек графика на ось x, а множество значений из всех проекций точек графика на ось y;

2) Чтобы найти нули функции, заданной графически, нужно найти абсциссы точек пересечения графика с осью x;

3) Функция принимает только положительные значения, если ее график лежит выше оси x, только отрицательные, если ее график лежит ниже оси x.

2. **График функции**

Вариант 1

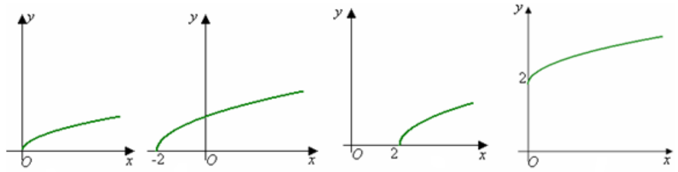
8. С помощью какого преобразования из графика функции y=g(x) можно получить график функции $y = g\left(x+\frac{1}{2}\right)$?

А. Сдвигом вдоль оси x на $\frac{1}{2}$. **Б.** Сдвигом вдоль оси y на $\frac{1}{2}$.

В. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси y на $\frac{1}{2}$.

Г. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси x на $\frac{1}{2}$.

9. На каком из рисунков изображен график функции $y = \sqrt{x+2}$?



А. **Б.** **В.** **Г.**

10. График функции $y = -x^2$ сдвинули на 1 единицу в направлении оси x. Получили график функции …

А. $y = -x^2 + 1$. **Б**. $y = -x^2 - 1$. **В**. $y = -(x - 1)^2$. **Г**. $y = -(x + 1)^2$.

11. С помощью какого преобразования из графика функции $y = g(x)$ можно получить график функции $y = g(x) + \frac{1}{2}$?

А. Сдвигом вдоль оси x на $\frac{1}{2}$. **Б.** Сдвигом вдоль оси y на $\frac{1}{2}$.

В. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси y на $\frac{1}{2}$.

Г. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси x на $\frac{1}{2}$.

12. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ перенесли на 2 единицы в направлении оси x. Получили график функции ...

А. $y = \sqrt[3]{x+2}$. **Б**. $y = \sqrt[3]{x-2}$. **В**. $y = \sqrt[3]{x} + 2$. **Г**. $y = \sqrt[3]{x} - 2$.

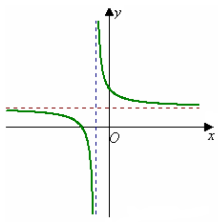
13. На сколько единиц и в каком направлении осей следует перенести параболу $y = (x + 1)^2$, чтобы получить параболу $y = (x - 1)^2 + 1$?

А. На 2 единицы в направлении, противоположном оси x, и на одну единицу вдоль оси y.

Б. На 2 единицы вдоль оси x и на одну единицу вдоль оси y.

В. На 2 единицы вдоль оси x и на одну единицу в направлении, противоположном оси y.

Г. На 2 единицы в направлении, противоположном оси x, и на одну единицу в направлении, противоположном оси y.



14. На рисунке изображен график функции $y = \dfrac{1}{x+a} + b$. Какие знаки имеют числа a и b?

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

15. График функции $y = x^2$ сжали к оси х в 2 раза. График какой функции получим?

А. $y = 2x^2$. **Б.** $y = 4x^2$. **В.** $y = \dfrac{x^2}{2}$. **Г.** $y = \dfrac{x^2}{4}$.

16. С помощью какого преобразования из графика функции $y = x^2$ можно получить график функции $y = \dfrac{x^2}{4}$?

А. Сжатия к оси y в 2 раза. **Б**. Растяжения от оси y в 2 раза.

В. Сжатия к оси x в 2 раза. **Г**. Растяжения от оси x в 2 раза.

17. График функции $y = x^2$ растянули от оси y в 2 раза и перенесли в отрицательном направлении оси y на 1 единицу. График какой функции получили в итоге?

А. $y = \dfrac{x^2}{4} + 1$. **Б**. $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$. **В.** $y = 2x^2 + 1$. **Г**. $y = 2x^2 - 1$.

18. Областью определения функции $y = f(x)$ является интервал ~~промежуток~~ (–1; 2). Какова область определения функции $y = f(x) + 2$?

А. (–1; 2). **Б.** $(-2;4)$. **В.** $(1;4)$ **Г.** $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$

Вариант 2

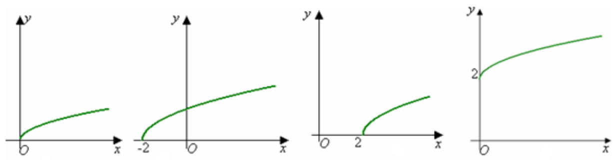
8. С помощью какого преобразования из графика функции $y = g(x)$ можно получить $y = g\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$?

А. Сдвигом вдоль оси x на $\dfrac{1}{2}$. **Б.** Сдвигом вдоль оси y на $\dfrac{1}{2}$.

В. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси y на $\dfrac{1}{2}$.

Г. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси x на $\dfrac{1}{2}$.

9. На каком из рисунков изображен график функции $y = \sqrt{x} + 2$?



А. **Б.** **В.** **Г.**

10. График функции $y = -x^2$ сдвинули на 1 единицу в направлении, противоположном оси x. Получили график функции …

А. $y = -x^2 + 1$. **Б**. $y = -x^2 - 1$. **В.** $y = -(x - 1)^2$. **Г.** $y = -(x + 1)^2$.

11. С помощью какого преобразования из графика функции $y = g(x)$ можно получить график функции $y = g(x) - \dfrac{1}{2}$?

А. Сдвигом вдоль оси x на $\frac{1}{2}$. **Б.** Сдвигом вдоль оси y на $\frac{1}{2}$.

В. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси y, на $\frac{1}{2}$.

Г. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси x, на $\frac{1}{2}$.

12. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ перенесли на 2 единицы в направлении оси y. Получили график функции ...

А. $y = \sqrt[3]{x+2}$. **Б**. $y = \sqrt[3]{x-2}$. **В**. $y = \sqrt[3]{x} + 2$. **Г**. $y = \sqrt[3]{x} - 2$.

13. На сколько единиц и в каком направлении осей следует перенести параболу $y = (x - 1)^2$, чтобы получить параболу $y = (x + 1)^2 + 1$?

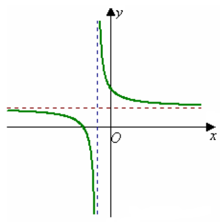
А. На 2 единицы в направлении, противоположном оси x, и на одну единицу вдоль оси y.

Б. На 2 единицы вдоль оси x и на одну единицу вдоль оси y.

В. На 2 единицы вдоль оси x и на одну единицу в направлении, противоположном оси y.

Г. На 2 единицы в направлении, противоположном оси x, и на одну единицу в направлении, противоположном оси y.

14. На рисунке изображен график функции $y = \dfrac{1}{x-a} + b$. Какие знаки имеют числа a и b?



А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

15. График функции $y = x^2$ сжали к оси y в 2 раза. График какой функции получим?

А. $y = 2x^2$. **Б.** $y = 4x^2$. . **В.** $y = \dfrac{x^2}{2}$. **Г.** $y = \dfrac{x^2}{4}$.

16. С помощью какого преобразования из графика функции $y = x^2$ можно получить график функции $y = 4x^2$?

А. Сжатия к оси y в 2 раза. **Б**. Растяжения от оси y в 2 раза.

В. Сжатия к оси x в 2 раза. **Г.** Растяжения от оси x в 2 раза.

17. График функции $y = x^2$ растянули от оси y в 2 раза и перенесли в направлении оси y на 1 единицу. График какой функции получили в итоге?

А. $y = 4x^2 + 1$. **Б.** $y=\frac{1}{4}x^2+1$. **В.** $y = 4x^2 - 1$. **Г.** $y=\frac{1}{4}x^2-1$.

18. Областью определения функции $y=f(x)$, является интервал ~~промежуток~~ (–1; 2). Какова область определения функции $y=f(2x)$?

А. (–1; 2). **Б**. $(-2;4)$. **В**. $(1;4)$. **Г.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$

Вариант 3

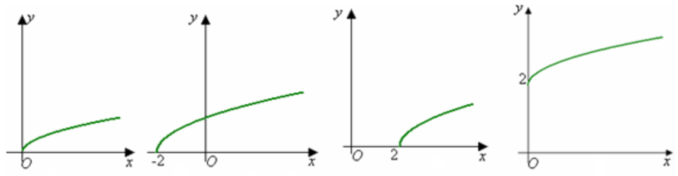
8. С помощью какого преобразования из графика функции $y = g(x)$ можно получить $y = g\left(\frac{1}{2}+x\right)$?

А. Сдвигом вдоль оси x на $\frac{1}{2}$. **Б.** Сдвигом вдоль оси y на $\frac{1}{2}$.

В. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси y на $\frac{1}{2}$.

Г. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси x на $\frac{1}{2}$.

9. На каком из рисунков изображен график функции $y=\sqrt{x-2}$?



А. **Б.** **В.** **Г.**

10. График функции $y = -x^2$ сдвинули на 1 единицу в направлении оси y. Получили график функции …

А. $y = -x^2 + 1$. **Б**. $y = -x^2 - 1$. **В**. $y = -(x - 1)^2$. **Г**. $y = -(x + 1)^2$.

11. С помощью какого преобразования из графика функции $y = g(x)$ можно получить график функции $y=-\left(-g(x)-\frac{1}{2}\right)$?

А. Сдвигом вдоль оси x на $\frac{1}{2}$. **Б.** Сдвигом вдоль оси y на $\frac{1}{2}$.

В. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси y на $\frac{1}{2}$.

Г. Сдвигом вдоль направления, противоположного оси *x* на $\frac{1}{2}$.

12. График функции $y=\sqrt[3]{x}$ перенесли на 2 единицы в направлении, противоположном оси *y*. Получили график функции ...

А. $y=\sqrt[3]{x+2}$. **Б**. $y=\sqrt[3]{x-2}$. **В**. $y=\sqrt[3]{x}+2$. **Г**. $y=\sqrt[3]{x}-2$.

13. На сколько единиц и в каком направлении осей следует перенести параболу $y = (x - 1)^2$, чтобы получить параболу $y = (x + 1)^2 - 1$?

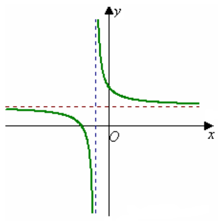
А. На 2 единицы в направлении, противоположном оси *x*, и на одну единицу вдоль оси *y*.

Б. На 2 единицы вдоль оси *x* и на одну единицу вдоль оси *y*.

В. На 2 единицы вдоль оси *x* и на одну единицу в направлении, противоположном оси *y*.

Г. На 2 единицы в направлении, противоположном оси *x*, и на одну единицу в направлении, противоположном оси *y*.

14. На рисунке изображен график функции $y=\frac{1}{x-a}-b$.



Какие знаки имеют числа *a* и *b*?

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

15. График функции $y = x^2$ растянули от оси *x* в 2 раза. График какой функции получим?

А. $y = 2x^2$. **Б.** $y = 4x^2$. **В.** $y=\frac{x^2}{2}$. **Г.** $y=\frac{x^2}{4}$.**В**

16. С помощью какого преобразования из графика функции $y = x^2$ можно получить график функции $y=\frac{x^2}{2}$?

А. Сжатия к оси у в 2 раза. **Б**. Растяжения от оси у в 2 раза.

В. Сжатия к оси *x* в 2 раза. **Г**. Растяжения от оси *x* в 2 раза.

17. График функции $y = x^2$ сжали к оси *y* в 2 раза и перенесли в направлении оси *y* на 1 единицу. График какой функции получили в итоге?

А. $y = 4x^2 + 1$. **Б.** $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. **В.** $y = 4x^2 - 1$. **Г.** $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

18. Областью определения функции $y = f(x)$, является промежуток $(-1; 2)$.

Какова область определения функции $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$?

А. $(-1; 2)$. **Б.** $(-2;4)$. **В.** $(1;4)$. **Г.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$

Подсказки

1. Проанализируйте, вдоль какой оси и в каком направлении нужно сдвинуть график функции $y = g(x)$, чтобы получить график функции $y = g(x + b)$.

2. Установите, график заданной функции получен из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом последнего вдоль оси x или оси y.

3. Воспользуйтесь правилами параллельного переноса графика функции вдоль оси x или оси y.

4. Выясните, вдоль какой оси и в каком направлении нужно сдвинуть график функции $y = g(x)$, чтобы получить график функции $y = g(x) + a$.

5. Воспользуйтесь правилом параллельного переноса графика функции вдоль оси x или оси y.

6. Найдите координаты вершин заданных парабол и установите связи между их абсциссами и ординатами соответственно.

7. Выясните, с помощью каких преобразований из графика функции $y = \frac{1}{x}$ получен заданный график.

8. Воспользуйтесь правилом сжатия графика функции к оси x.

9. Воспользуйтесь правилом сжатия (растяжения) графика функции к оси y (от оси y) или к оси x (от оси x).

10. Пользуясь правилами геометрического преобразования графиков функций выполните последовательно два указанных действия.

11. Воспользуйтесь правилами сжатия (растяжения) графика функции к оси x (от оси x) и параллельного переноса вдоль осей.

Рекомендации

8. Согласно правилам параллельного переноса график функции $y = g(x + b)$ можно получить из графика функции $y = g(x)$ сдвигом вдоль оси x на $|b|$ единиц.

9. Выясните, на сколько единиц и в каком направлении вдоль оси x сдвинут график функции $y = \sqrt{x}$.

10. Воспользуйтесь тем, что график функции $y = f(x + b)$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси x на $|b|$ единиц: в направлении оси x, если $b < 0$ и в противоположном направлении, если $b > 0$. а график функции $y = f(x) + a$ получают из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси y на $|a|$ единиц: в направлении оси y, если $a > 0$ и в противоположном направлении, если $a < 0$.

11. См. рекомендацию к заданию 10.

12. См. рекомендацию к заданию 10.

13. Определите, в каком направлении и на сколько единиц следует сдвинуть вершину первой параболы, чтобы получить вершину второй параболы.

14. Выясните, в каком направлении по оси x и в каком направлении по оси y следует сдвинуть график функции $y = \frac{1}{x}$, чтобы получить заданный график.

15. Согласно правилу, чтобы сжать (растянуть) к (от) оси x график функции, нужно выражение, задающее функцию, умножить на некоторое число k. Определите, чему равно k в рассматриваемом случае.

16. Согласно правилу, чтобы сжать (растянуть) график функции к оси y (от оси y), нужно умножить аргумент функции на некоторое число $k > 1$ $(0 < k < 1)$. Чтобы сжать (растянуть) график функции к оси x (от оси x), нужно умножить выражение для функции на некоторое число $0 < k < 1$ $(k > 1)$. Определите, чему равно k в каждом рассматриваемом случае.

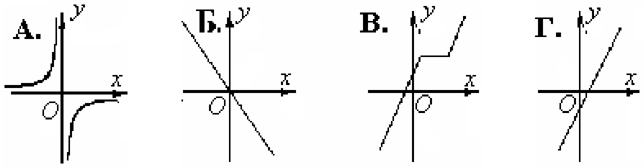
17. Воспользуйтесь рекомендациями к заданиям 16 и 10.

10. Чтобы найти область определения сжатой (растянутой) в k раз к оси x (от оси x) функции, нужно заданную область определения разделить (умножить) на число k. Определите, чему равно k в рассматриваемом случае.

3. Основные свойства функции

Вариант 1

19. На каком из рисунков изображен график возрастающей функции?



20. Укажите среди приведенных убывающую функцию.

А. $y = -2(1 - 3x)$. **Б.** $y = -2(1 + 3x)$. **В.** $y = \frac{1}{2}(1+3x)$. **Г.** $y = -\frac{1}{2}(1-3x)$.

21. Каково наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 3$?

А. –1. **Б.** 1. **В.** 15. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

22. Укажите промежуток убывания функции $y = x(x+2)$.

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(-\infty; 0]$. **В.** $[-2; 0]$. **Г.** $(-\infty; -1]$.

23. Укажите все значения x, при которых функция $y = \frac{x}{1-x}$ принимает положительные значения?

А. $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$. **Б.** $[0; 1)$. **В.** $(-1; 0)$. **Г.** $(0; 1)\cup(1; +\infty)$.

24. Исследуйте функцию $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ на чётность и нечётность.

А. Чётная. **Б.** Нечётная.

В. Ни чётная, ни нечётная. **Г.** Определить невозможно.

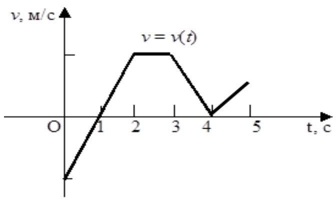
25. Известно, что функция $y = f(x)$ является чётной и $f(-2) = 1$. Чему равняется $f(2)$?

А. 1. **Б.** –1. **В.** 2. **Г.** –2.

26. Известно, что функция $y = f(x)$ является нечётной и $f(2) < f(1)$. Сравните $f(-2)$ и $f(-1)$.

А. $f(-2) < f(-1)$. **Б.** $f(-2) = f(-1)$.

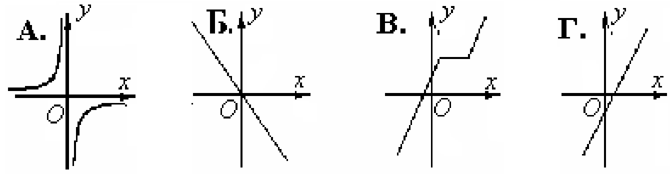
В. $f(-2) > f(-1)$. **Г.** Сравнить невозможно.



27. На каком из следующих промежутков функция, график которой изображен на рисунке, убывает?

А. [2;4] **Б.** [3;4] **В.** [0;1] **Г.** [2;3]

28. На каком из рисунков изображен график функции, не имеющей обратной?

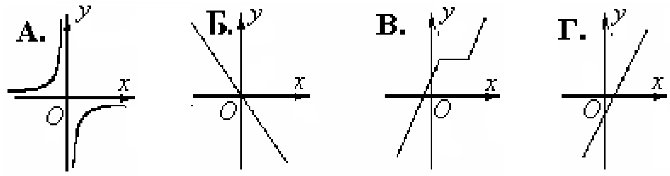


29. Найдите функцию, обратную для функции $y = \dfrac{x}{4} + 1$.

А. $y = 4x - 1$. **Б.** $y = 4x + 4$. **В.** $y = 4x - 4$. **Г.** $y = 4x + 1$.

Вариант 2

19. На каком из рисунков изображен график убывающей функции?



20. Укажите среди приведенных возрастающую функцию.

А. $y = -2(1 - 3x)$. **Б.** $y = -2(1 + 3x)$. **В.** $y = -\dfrac{1}{2}(1 + 3x)$. **Г.** $y = \dfrac{1}{2}(1 - 3x)$.

21. Каково наименьшее значение функции $y = x^2 + 4x + 3$?

А. –1. **Б.** 1. **В.** 15. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

22. Укажите промежуток убывания функции $y = x(x - 2)$.

А. $(-\infty; 1)$. **Б.** $(-\infty; 2]$. **В.** $(1; +\infty)$. **Г.** $(0; 2)$.

23. Укажите все значения x, при которых функция $y = \dfrac{x}{1 - x}$ принимает отрицательные значения?

А. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **Б.** $[0; 1)$. **В.** $(-1; 0)$. **Г.** $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

24. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$ на чётность и нечётность.

А. Чётная. **Б.** Нечётная.

В. Ни чётная, ни нечётная. **Г.** Определить невозможно.

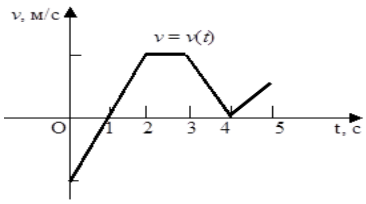
25. Известно, что функция $y = f(x)$ является нечётной и $f(-2) = 1$. Чему равняется $f(2)$?

А. –1. **Б.** 1. **В.** 2. **Г.** –2.

26. Известно, что функция $y = f(x)$ является чётной и $f(2) < f(1)$. Сравните $f(-2)$ и $f(-1)$.

А. $f(-2) < f(-1)$. **Б.** $f(-2) = f(-1)$.

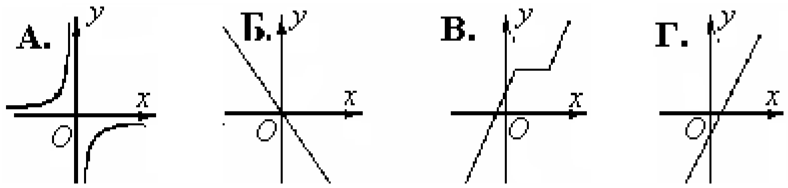
В. $f(-2) > f(-1)$. **Г.** Сравнить невозможно.



27. На каком из следующих множеств функция, график которой изображен на рисунке, возрастает?

А. [0;2]. **Б.** [4;5]. **В.** $[2;3]\cup[4;5]$. **Г.** $[0;2]\cup[4;5]$.

28. Сколько функций, графики которых изображены на рисунках, являются обратимыми?



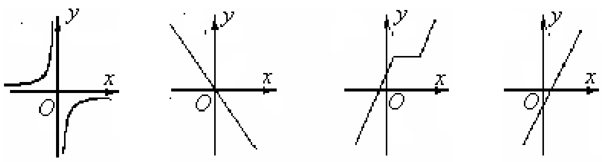
А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Три.

29. Найдите функцию, обратную для функции $y = \frac{x}{4} - 1$.

А. $y = 4x - 1$. **Б.** $y = 4x + 4$. **В.** $y = 4x - 4$. **Г.** $y = 4x + 1$.

Вариант 3

19. Сколько графиков функций, не являющихся ни возрастающими, ни убывающими, изображено на рисунках?



А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Три.

20. Укажите среди приведенных возрастающую функцию.

А. $y = -3(1 - 2x)$. **Б.** $y = -3(1 + 2x)$. **В.** $y = -\frac{1}{3}(1 + 2x)$. **Г.** $y = \frac{1}{3}(1 - 2x)$.

21. Каково наибольшее значение функции $y = -x^2 - 4x - 3$?

А. –1. **Б.** 1. **В.** 15. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

22. Укажите промежуток возрастания функции $y = x(x - 2)$.

А. $(1; +\infty)$. **Б.** $(-\infty; 1]$. **В.** $[-2; 0]$. **Г.** $(-\infty; -1]$.

23. Укажите все значения *x*, при которых функция $y = \dfrac{x}{1+x}$ принимает отрицательные значения?

А. $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$. **Б.** $[0; 1)$. **В.** $(-1; 0)$. **Г.** $(0; 1)\cup(1; +\infty)$.

24. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ на чётность и нечётность.

А. Чётная. **Б.** Нечётная.

В. Ни чётная, ни нечётная. **Г.** Определить невозможно.

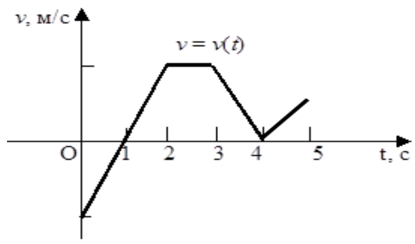
25. Известно, что функция $y = f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной и $f(-2) = 1$. Чему равняется $f(2)$?

А. -1. **Б.** 1. **В.** 2. **Г.** Определить невозможно.

26. Известно, что функция $y = f(x)$ является чётной и $f(2) > f(1)$. Сравните $f(-2)$ и $f(-1)$.

А. $f(-2) < f(-1)$. **Б.** $f(-2) = f(-1)$.

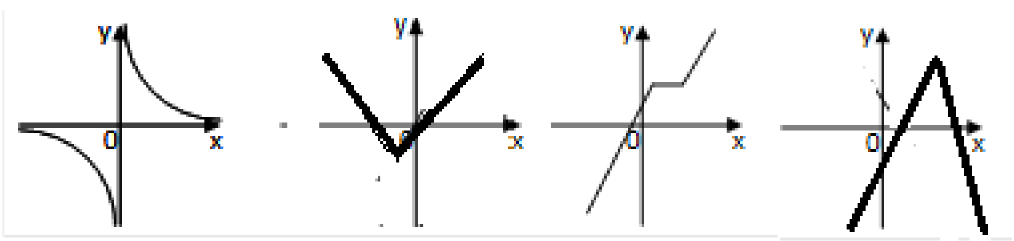
В. $f(-2) > f(-1)$. **Г.** Сравнить невозможно.



27. На каком из следующих промежутков функция, график которой изображен на рисунке, не возрастает?

А. [0;1]. **Б.** [2;4]. **В.** [0;3]. **Г.** [4;5].

28. На каком из рисунков изображен график функции, имеющей обратную?



А. **Б.** **В.** **Г**

29. Найдите функцию, обратную для функции $y = -\dfrac{x}{4} - 1$.

А. $y = 4x - 1$. **Б.** $y = 4x + 4$. **В.** $y = -4x - 4$. **Г.** $y = 4x + 1$.

Подсказки

19. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией возрастания (убывания) функции.

20. Обратите внимание на то, что все заданные функции являются линейными.

21. Обратите внимание на то, что графиком заданной функции является парабола. Установите направление её ветвей по знаку старшего коэффициента. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией наименьшего (наибольшего) значения функции.

22. Используя свойство квадратичной функции, найдите точку x_0, которая разделяет промежутки возрастания и убывания функции. Выясните, от чего зависит возрастание (убывание) функции на каждом из полученных промежутков $(-\infty; x_0), (x_0; +\infty)$.

23. Сформулируйте задачу на языке неравенств.

24. Воспользуйтесь определениями четной и нечетной функций.

25. Воспользуйтесь определениями четной и нечетной функций.

26. Воспользуйтесь определениями четной и нечетной функций..

27. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией убывания, возрастания, неубывания и невозрастания функции на множестве.

28. Обратите внимание на то, что обратимая функция каждое свое значение принимает только в одной точке области определения.

29. Воспользуйтесь правилом нахождения обратной функции

Рекомендации

19. При возрастании аргумента график возрастающей функции поднимается вверх, а график убывающей — опускается вниз.

20. Воспользуйтесь тем, что возрастание или убывание линейных функций $y = kx + b$ зависит от знака коэффициента k. Найдите этот коэффициент для каждой функции.

21. Наименьшее значение функции — это ордината самой низкой точки графика, а наибольшее — его самая высокая точка. У параболы самая низкая (высокая) точка, если они существуют, — ее вершина. Следовательно, указанное наименьшее или наибольшее значение функция принимает.

22. Точка x_0, которая разделяет промежутки возрастания, убывания функции, является абсциссой вершины параболы. Возрастание (убывание) функции на промежутках $(-\infty; x_0), (x_0; +\infty)$ зависит от направления ветвей параболы, т.е. от знака коэффициента при x^2.

23. Обратите внимание на то, что нахождение точек, в которых функция $y = f(x)$ принимает положительные (отрицательные) значения, равносильно решению неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

24. Рассмотрите решение задачи 3 в разделе «Основные свойства функции».

25. Согласно определению четной (нечётной) функции, при противоположных значениях аргумента она принимает равные (противоположные) значения.

26. Обратите внимание на то, что, используя свойство нечётной (чётной) функции $f(-x_2) = -f(x_2), f(-x_1) = -f(x_1)$ $(f(-x_2) = f(x_2), f(-x_1) = f(x_1))$ и неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ или $f(x_2) > f(x_1)$, можно сравнить числа $f(-x_2)$ и $f(-x_1)$.

27. Проанализируйте решение задачи 7 раздела «Основные свойства функции».

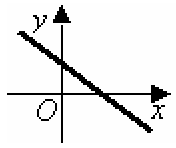
28. График обратимой функции пересекается каждой прямой, параллельной оси x, и ~~с~~ осью x не более, чем в одной точке. Проверьте, обладают ли этим свойством предложенные графики.

29. Воспользуйтесь решением задачи 5 п. 3 «Основные свойства функций».

4. Простейшие функциональные зависимости, их свойства и графики

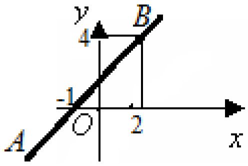
Вариант 1

30. Определите знаки k и b функции $y = kx + b$, график которой изображен на рисунке.



А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

31. Чему равен угловой коэффициент прямой AB, изображенной на рисунке?



А. $\frac{4}{3}$. **Б.** $\frac{3}{4}$. **В.** $-\frac{3}{4}$. **Г.** $-\frac{4}{3}$.

32. При каких значениях k и b возрастает функция $y = -kx + b$?

А. $k > 0$, b — любое. **Б.** k — любое, $b < 0$.

В. k—любое, b>0. **Г.** $k < 0$, b — любое.

33. При каких значениях b графики функций $y = 3x - 2b$ и $y = x + 5$ пересекаются на оси y?

А. –2,5. **Б.** 2,5. **В.** 0,4. **Г.** –0,4.

34. На каком промежутке функция $y = -2(x + 1)(x - 3)$ принимает положительные значения?

А. (–3; 1). **Б.** (–∞; 3). **В.** (–1; 3). **Г.** (–1; +∞).

35*. Укажите наибольшее значение функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

А. 0,2. **Б.** –1. **В.** –0,2. **Г.** 1.

36. Сколько общих точек имеют графики функций $y = 5x^2 + x - 1$ и $y = 3x - 1$?

А. Две. **Б.** Одну. **В.** Ни одной. **Г.** Определить невозможно.

37. Укажите промежутки, на которых функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ возрастает.

А. (–∞; 1). **Б.** (1; +∞). **В.** (–∞; –1). **Г.** (–1; +∞).

38. Укажите все значения k при которых функция $y = x^2 + kx + 1$ принимает только положительные значения.

А. (–∞; –2). **Б.** (–2; 2). **В.** (2; +∞). **Г.** (0; 2).

39*. Известно, что функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) не имеет нулей и $a + b + c > 0$. Определите знаки a и c.

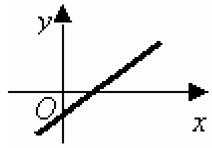
А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

40*. Какие знаки имеют числа a и b, если квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на промежутке $(-\infty;-1]$ и возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$?

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

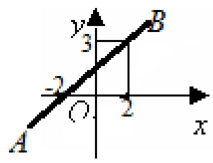
Вариант 2

30. Определите знаки k и b функции $y = kx + b$, график которой изображен на рисунке.



А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

31. Чему равняется угловой коэффициент прямой AB, изображенной на рисунке?



А. $\frac{3}{4}$. **Б.** $\frac{4}{3}$. **В.** $-\frac{3}{4}$. **Г.** $-\frac{4}{3}$.

32. При каких значениях k и b убывает функция $y = -kx + b$?

А. $k > 0$, b — любое. **Б.** k — любое, $b < 0$.

В. k — любое, $b > 0$. **Г.** $k < 0$, b — любое.

33. При каких значениях b графики функций $y = 3x - 2b$ и $y = x + 5$ пересекаются на оси x?

А. 2,5. **Б.** –2,5. **В.** 7,5. **Г.** –7,5.

34. На каком промежутке функция $y = -2(x + 1)(3 - x)$ принимает отрицательные значения?

А. $(-3; 1)$. **Б.** $(-\infty; 3)$. **В.** $(-1; 3)$. **Г.** $(-1; +\infty)$.

35. Укажите наибольшее значение функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$.

А. 1. **Б.** –1. **В.** –0,2. **Г.** 0,2.

36. Сколько общих точек имеют графики функций $y = 5x^2 + x - 1$ и $y = x - 1$?

А. Две. **Б.** Одну. **В.** Ни одной. **Г.** Определить невозможно.

37. Укажите промежутки, на которых функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ убывает.

А. $(-\infty; 1)$. **Б.** $(1; +\infty)$. **В.** $(-\infty; -1)$. **Г.** $(-1; +\infty)$.

38. При каких значениях k функция $y = x^2 - kx + 1$ принимает лишь положительные значения?

А. (–2; 2). **Б.** (–2; 0). **В.** (0; 2). **Г.** (–∞; 0).

39*. Известно, что функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) не имеет нулей и $a + b + c < 0$. Определите знаки a и c.

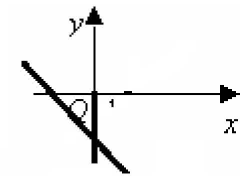
А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

40*. Какие знаки имеют числа a и b, если квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на промежутке (–∞;1] и возрастает на промежутке [1; + ∞)?

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

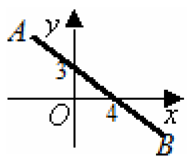
Вариант 3

30. Определите знаки k и b функции $y = kx + b$, график которой изображен на рисунке.



А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

31. Чему равняется угловой коэффициент прямой AB, изображенной на рисунке?



А. $\frac{3}{4}$. **Б.** $\frac{4}{3}$. **В.** $-\frac{3}{4}$. **Г.** $-\frac{4}{3}$.

32. При каких значениях k и b убывает функция $y = –kx – b$?

А. $k > 0$, b — любое. **Б.** k — любое, $b < 0$.

В. k — любое, $b > 0$. **Г.** $k < 0$, b — любое.

33. При каких значениях b графики функций $y = 3x – 2b$ и $y = x + 5$ пересекаются на прямой $x = –5$?

А. 2,5. **Б.** –2,5. **В.** 7,5. **Г.** –7,5.

34. На каком промежутке функция $y = –2(x + 3)(1 – x)$ принимает отрицательные значения?

А. (–3; 1). **Б.** (–∞; 3). **В.** (–1; 3) **Г.** (–1; +∞).

35. Укажите наименьшее значение функции $y = -\dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$.

А. 1. **Б.** –0,2. **В.** –1. **Г.** 0,2.

36. Сколько общих точек имеют графики функций $y = 5x^2 + x – 1$ и $y = –x – 5$?

А. Две. **Б.** Одну. **В.** Ни одной. **Г.** Определить невозможно.

37. Укажите промежутки, на которых функция $y = -\dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$ убывает.

А. $(-\infty; 1)$. **Б.** $(-1; +\infty)$. **В.** $(1; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; -1)$.

38. При каких значениях k функция $y = x^2 - kx + 4$ принимает лишь положительные значения?

А. $(-4; 4)$. **Б.** $(-4; 0)$. **В.** $(0; 4)$. **Г.** $(-\infty; 0)$.

39*. Известно, что функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ не имеет нулей и $a - b + c < 0$. Определите знаки a и c.

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

40*. Какие знаки имеют числа a и b, если квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на промежутке $(-\infty; -2]$ и возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$?

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

Подсказки

30. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией углового коэффициента k и параметра b линейной функции $y = kx + b$.

31. Воспользуйтесь свойствами линейной функции.

32. Обратите внимание на то, что возрастание (убывание) функции $y = kx + b$ определяется знаком углового коэффициента k.

33. Воспользуйтесь тем, что пересечение графиков двух функций происходит тогда и только тогда, когда существует общая точка этих графиков, то есть точка с равными координатами.

34. Установите направление ветвей параболы и абсциссы точек её пересечения с осью абсцисс.

35. Воспользуйтесь тем, что если $m > 0$ — наименьшее значение функции $y = f(x)$, то $\frac{1}{m}$ — наибольшее значение функции $y = \frac{1}{f(x)}$. Определите, какое значение квадратичной функции, стоящей в знаменателе заданной функции, — наименьшее или наибольшее — нужно найти. При необходимости воспользуйтесь также тем, что если $m > 0$ — наибольшее значение функции $y = f(x)$, то $-m$ — наименьшее значение функции $y = -f(x)$.

36. Воспользуйтесь тем, что, если $(x_0;\ y_0)$ — точка пересечения графиков функции, то при $x = x_0$ функции принимают одно и то же значение y_0.

37. Воспользуйтесь тем, что если функция $y = f(x) > 0$ возрастает (убывает) на некотором множестве, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на этом множестве. При необходимости воспользуйтесь также тем, что если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором множестве, то функция $y = -f(x)$ на этом множестве убывает (возрастает).

38. Воспользуйтесь тем, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает при всех $x \in \boldsymbol{R}$ положительные значения тогда и только тогда, когда $a > 0$ и дискриминант $D < 0$.

39. Воспользуйтесь тем, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает при всех $x \in \boldsymbol{R}$ положительные (отрицательные) значения тогда и только тогда, когда $a > 0$ ($a < 0$) и дискриминант $D < 0$. По заданному неравенству установите знак значения квадратичной функции в одной из точек её области определения.

40. По условию постройте эскиз графика квадратичной функции, по которому можно определить знаки a и b.

Рекомендации

30. Обратите внимание на то, является ли угол наклона прямой AB к положительному направлению оси x острым или тупым, а также на то, пересекает график ось ординат выше или ниже оси абсцисс.

31. Обратите внимание на то, что возрастание (убывание) линейной функции $y = kx + b$ зависит только от знака углового коэффициента k.

32. Обратите внимание на то, что возрастание (убывание) функции $y = kx + b$ не зависит от параметра b.

33. Обратите внимание на то, что если графики двух функций пересекаются на оси x (y), то ордината (абсцисса) точки пересечения равна нулю.

34. Постройте схематично график заданной функции.

35. Найдите наименьшее значение квадратичной функции, которая стоит в знаменателе заданной функции. Обратите внимание на его знак.

36. Чтобы определить в скольких точках пересекаются графики функций

$y = f(x)$ и $y = g(x)$, нужно исследовать, сколько корней имеет уравнение $f(x) = g(x)$.

37. Исследуйте на монотонность квадратичную функцию, стоящую в знаменателе заданной функции. Установите знак заданной функции.

38. Воспользовавшись утверждением, сформулированным подсказкой, составьте и решите соответствующее неравенство.

39. Воспользуйтесь тем, что отсутствие корней квадратичной функции равносильно тому, что её дискриминант отрицателен. Вычислите $f(1)$, $f(-1)$, если $f(x) = ax^2 + bx + c$. Знак числа a можно определить по направлению ветвей её графика, а знак c — по знаку ординаты точки пересечения этого графика с осью y.

40. Знак числа a можно определить по направлению ветвей графика заданной функции. Знак числа b можно определить из формулы для абсциссы x_0 вершины соответствующей параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Ответы к заданиям 1 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Г	В	Г	Б	А	В	Б	Г	Б	Б	Б	Б	Б	А	В	В	Б	А	Г	Б
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
А	Г	Б	Б	А	В	Б	В	В	В	А	Г	А	В	Г	А	А	Б	А	А

Ответы к заданиям 2 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Б	В	В	Г	А	В	Г	А	Г	Г	В	В	А	В	Г	А	Б	Г	Б	А
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
А	А	А	В	А	А	Г	Г	Б	Б	А	А	Г	В	А	Б	Б	А	Г	Б

Ответы к заданиям 3 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В	В	Б	Б	Г	В	Г	Г	В	А	Б	Г	Г	Г	А	В	А	Б	В	А
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
А	А	В	Б	Г	В	Б	А	В	Г	В	А	Г	А	В	В	Г	А	Г	А

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		**Контрольный тест**	**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	15 задач	25 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	20 задач	35 задач	12 задач
«отлично»	Решено не менее	25 задач	42 задач	18 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Какая из следующих зависимостей между переменными задает функцию аргумента x?

А. $x^2 + y^2 = 1$. **Б.** $|y| = x$. **В.** $y^2 = x$. **Г.** $y = |x|$.

2. Какие из следующих функций не равны?

А. $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$. **Б.** $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$, $g(x)=x,\ x\geq 0$.

В. $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x)=1$. **Г.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$, $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

3. График функции $y=f(x)$ не может пересекать в нескольких точках прямую …

А. $y = 1$. **Б.** $x = 1$. **В.** $x + y = 1$. **Г.** $y = x$.

4. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-5}$.

А. $[-3;5)\cup(5;+\infty)$. **Б.** $(-\infty; -3]$. **В.** $(-\infty; 5)$. **Г.** $[-3; +\infty)$.

5. График функции $y=\dfrac{x}{2-x}$ проходит через точку с координатами …

А. (0; 1). **Б.** (1; 1). **В.** $(-2;-1)$. **Г.** $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

6. Из формулы $S=\dfrac{at^2}{2}$ найдена зависимость переменной $t > 0$ от переменной S.

Какова область определения полученной функции?

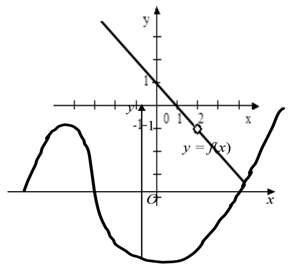
А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $[0; +\infty)$. **В.** $(0; +\infty)$. **Г.** (0; 1).

7. График функции $y = k\sqrt{x}$ проходит через точку $M(4; -4)$. Чему равно k?

А. 2. **Б.** 4. **В.** –2. **Г.** Определить нельзя.

8. На рисунке изображён график функции …

А. $y=x+1$. **Б.** $y=-x+1$. **В.** $y=x-1$. **Г.** $y=-x-1$.



9. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$, если график функции $y=f(x)$ представлен на рисунке?

А. Один. **Б.** Два. **В.** Три. **Г.** Ни одного.

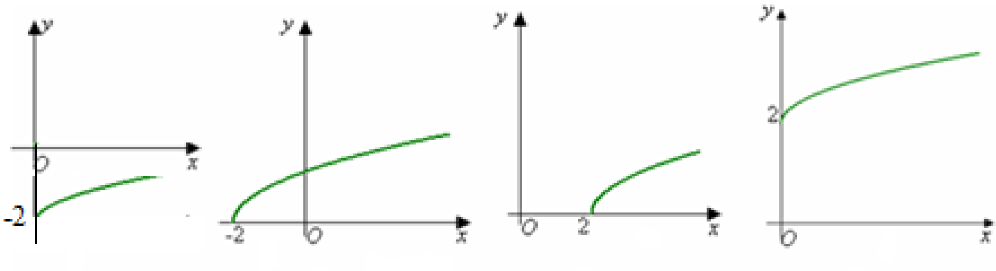
10. График функции $y = 2x$ сдвинут на 2 единицы в положительном направлении оси x. Каково уравнение нового графика?

А. $y = 2x + 2$. **Б.** $y = 2(x + 2)$. **В.** $y = 2x – 2$. **Г.** $y = 2(x – 2)$.

11. Каковы координаты вершины параболы $y = –(x – 2)^2$?

А. (2; 0). **Б.** (–2; 0). **В.** (0; –2). **Г.** (0; 2).

12. На каком из рисунков изображен график функции $y = \sqrt{x} - 2$?

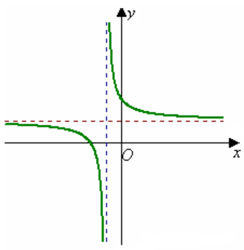


А. **Б.** **В.** **Г.**

13. График функции $y = x^2$ растянули от оси y в два раза и перенесли в направлении оси y на 1 единицу. График какой функции получили в итоге?

А. $y = 4x^2 + 1$. **Б.** $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. **В.** $y = 4x^2 – 1$. **Г.** $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

14. На рисунке изображен график функции $y = \frac{1}{x-a} - b$.



Какие знаки имеют числа a и b?

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

15. Укажите среди приведенных убывающую функцию.

А. $y = –3(1 – 2x)$. **Б.** $y = 3(1 + 2x)$. **В.** $y = -\frac{1}{3}(1+2x)$. **Г.** $y = \frac{1}{3}(2x-1)$.

16. Укажите промежуток возрастания функции $y = x(x+2)$.

А. $(–\infty; + \infty)$. **Б.** $(–\infty; 0]$. **В.** $[–2; 0]$. **Г.** $(–\infty; –1]$.

17. Исследуйте функцию $y = \frac{x^2}{x+1}$ на чётность и нечётность.

А. Чётная. **Б.** Нечётная.

В. Ни чётная, ни нечётная. **Г.** Определить невозможно.

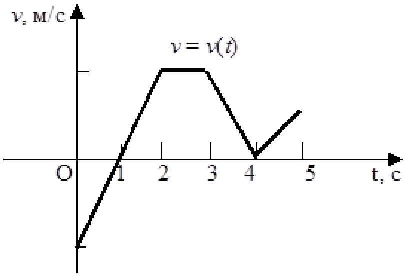
18. Известно, что функция $y = f(x)$ является чётной и $f(-2) = 1$. Чему равняется $f(2)$?

А. 1. **Б.** –1. **В.** 2. **Г.** –2.

19. Известно, что функция $y = f(x)$ является нечётной и $f(2) > f(1)$. Сравните $f(-2)$ и $f(-1)$.

А. $f(-2) < f(-1)$. **Б.** $f(-2) = f(-1)$. **В.** $f(-2) > f(-1)$. **Г.** Сравнить невозможно.

20. На рисунке изображён график зависимости скорости точки *v*, движущейся вдоль координатной прямой, от времени *t*. В течение какого времени она двигалась?



А. 6 с. **Б.** 5 с. **В.** 4 с. **Г.** 3 с.

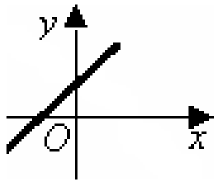
21. Найдите функцию, обратную для функции $y = -\frac{x}{4} + 1$.

А. $y = 4x - 1$. **Б.** $y = -4x + 4$. **В.** $y = 4x - 4$. **Г.** $y = -4x + 1$.

22. Какая из следующих функциональных зависимостей является обратной пропорциональностью?

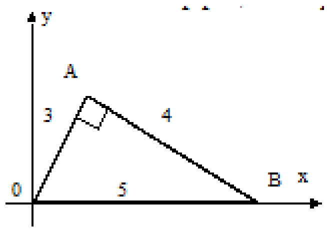
А. $y = 2$. **Б.** $y = \frac{x-3}{x}$. **В.** $y = \sqrt{x^2}$. **Г.** $y = \frac{3-x^2}{2}$.

23. Определите знаки *k* и *b* функции $y = kx + b$, график которой изображен на рисунке.



А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

24. Угловой коэффициент прямой *AB,* изображенной на рисунке, равен …



А. $\frac{3}{4}$. **Б.** $\frac{4}{3}$. **В.** $-\frac{3}{4}$. **Г.** $-\frac{4}{3}$.

25. При каких значениях *b* графики функций $y = 3x - 2b$ и $y = x + 5$ пересекаются на оси *y*?

А. –2,5. **Б.** 2,5. **В.** 7,5. **Г.** –7,5.

26. На каком промежутке функция $y = -2(x + 3)(x - 1)$ принимает положительные значения?

А. $(-3; 1)$. **Б.** $(-\infty; 3)$. **В.** $(-1; 3)$. **Г.** $(-1; +\infty)$.

27. Укажите промежутки, на которых функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ возрастает.

А. (–∞; 1). **Б.** (–∞; –1). **В.** (1; +∞). **Г.** (–1; +∞).

28. При каких значениях k функция $y = -x^2 + kx - 1$ принимает лишь отрицательные значения?

А. (–2; 2). **Б.** (–2; 0). **В.** (0; 2). **Г.** (–∞; 0).

29. Известно, что функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) не имеет нулей и $a - b + c < 0$. Определите знаки a и c.

А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

30. Какие знаки имеют числа a и b, если квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на промежутке (–∞; 2] и возрастает на промежутке [2; + ∞)?

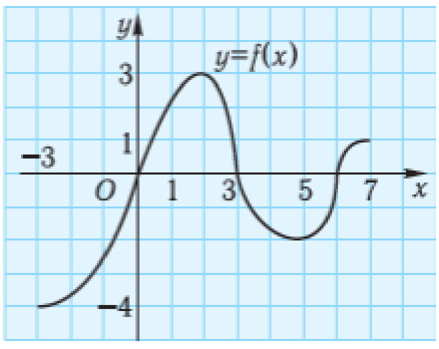
А. + +. **Б.** + –. **В.** – +. **Г.** – –.

Основное задание

1. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}$; 2) $y = \dfrac{2x}{x^2-3}$; 3) $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x}$; 4) $y = \sqrt{2x^2 - 8}$.

2. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, укажите:



1) область определения,
2) множество значений,
3) нули функции,
4) промежутки знакопостоянства,
5) промежутки возрастания,
6) наибольшее и наименьшее значения,
7) число решений уравнения $f(x) = 1$, $f(x) = 1{,}5$, $f(x) = c$.

3. Найдите линейную функцию $y = kx + b$, если известно, что:

1) при $x = 1$ значение $y = -3$, а при $x = 6$ значение $y = 7$;

2) график функции проходит через точку (2; 5) под углом 45° к оси x;

3) график функции параллелен графику функции $y = -x$ и проходит через точку (–3; 1).

4. Найдите линейную функцию, график которой симметричен графику функции $f(x) = -3x + 2$ относительно:

1) оси x; 2) оси y; 3) начала координат; 4)* прямой $y = x$.

5. Задайте формулой функцию, график которой изображен на: 1) рис. 1; 2) рис. 2; 3) рис. 3.

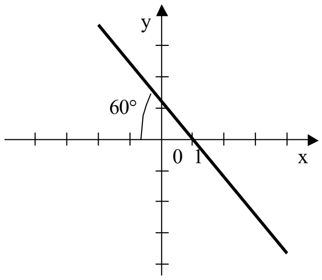


Рис. 1

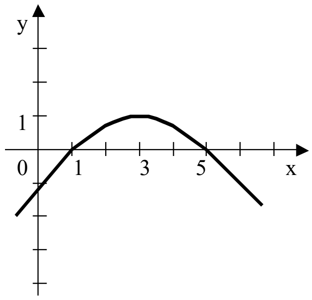


Рис. 2

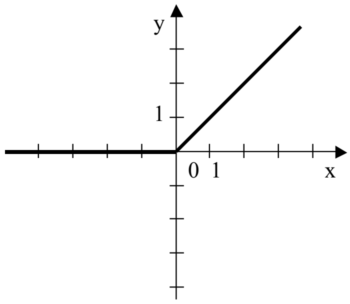


Рис. 3

6. Муравей ползёт по шесту для флага, воткнутому вертикально в землю. Длина шеста 4 м. муравей начал свой путь в 20 см от земли и ползёт вверх с постоянной скоростью 40 см/мин.

1) Задайте формулой расстояние s, на котором находится муравей от земли, как функцию времени его движения t.

2) Укажите область определения этой функции.

3) Постройте график функции, выбрав удобные единицы на осях.

4) Определите по графику, на какой высоте от земли муравей будет через 3 мин и через сколько минут он доползёт до верхушки шеста.

7. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $B(-1; 0)$ и имеет вершину $A(-3; -4)$. Найдите ординату такой точки данной параболы, абсцисса которой равна 5.

8. Постройте график функции:

1) $y=(x+3)^2-4$; 2) $y=2x^2-4x+6$; 3) $y=6x-x^2-7$;

4) $y=-2x^2+4x-1$; 5) $y=|3-x|$; 6) $y=|3-|x||$;

7) $y=-2x^2+4|x|-1$; 8) $y=|-2x^2+4x-1|$; 9) $y=-\dfrac{2}{x+1}$; 10) $y=-\dfrac{2}{|x|+1}$.

9. Футболист на тренировке подбросил головой мяч вертикально вверх, придав ему начальную скорость 10 м/с.

1) Запишите уравнение, описывающее высоту, на которой находится мяч, в зависимости от времени полёта (рост футболиста считайте равным 2 м).

2) Начертите график зависимости высоты от времени.

3) Определите по графику:

а) на какую максимальную высоту поднимется мяч;

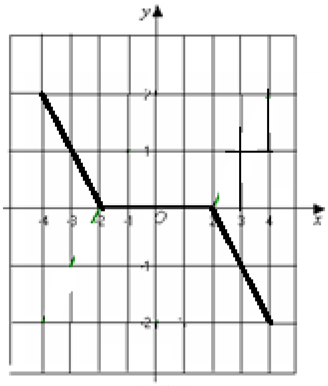
б) через сколько примерно времени мяч окажется на максимальной высоте;

в) когда скорость полёта больше: в начале или в конце первой секунды полёта;

г) через сколько примерно секунд после начала движения мяч упадёт на землю.

10. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x}{1+x} = 2x - x^2 - 1$?

11. На рисунке задан график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:



1) $y = f(2x)$; 2) $y = 2f(x)$;

3) $y = f(x - 1)$; 4) $y = f(x) - 1$.

12. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 6x + 4$ на отрезке: 1) [0; 2]; 2) [1; 2,5].

Указания к выполнению основного задания

1. При решении этих задач учитывайте, что знаменатель дроби не должен равняться нулю, а подкоренное выражение не может принимать отрицательные значения.

2. Воспользуйтесь таблицей в решении задачи 7 из блока «основные свойства функций».

3. Воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Простейшие функциональные зависимости, их свойства и графики», а также примените условие параллельности двух прямых.

4. 1), 2) Воспользуйтесь построением графиков функций $y= -f(x)$, $y= f(-x)$, если известен график функции $y= f(x)$.

3) Обратите внимание на то, что точки, симметричные относительно начала координат, имеют вид $A(x; y)$, $B(-x; -y)$.

4) Используйте тот факт, что точки, симметричные относительно прямой $y = x$, имеют вид $A(x; y)$, $B(y; x)$.

5. 1) Найдите угол наклона искомой прямой с осью x и точку, через которую она проходит.

2) Воспользуйтесь тем, что для восстановления квадратичной функции нужно знать либо три произвольные точки, через которые проходит ее график, либо две точки, одна из которых — ее вершина.

3) Воспользуйтесь теоретическим материалом, посвящённым построению графиков функций, содержащих модуль. Постарайтесь задать функцию одной формулой.

6. Обратите внимание на то, что муравей ползёт с постоянной скоростью.

7. Найдите коэффициенты *a, b, c*, используя заданные условия. Затем найдите значение полученной функции в точке $x = 5$.

8. Используйте построение графиков как по характерным точкам, так и с помощью геометрических преобразований.

9. Воспользуйтесь тем, что высота тела, брошенного вверх, является квадратичной функцией времени полёта.

10. Преобразуйте уравнение так, чтобы воспользоваться графическим способом решения.

11. Воспользуйтесь правилами построения графика с помощью сдвига, растяжения или сжатия.

12. Постройте график заданной функции и рассмотрите его на заданных отрезках.

Дополнительное задание

1. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{2-|x|}$;2) $y=\dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2-4x-12}$; 3) $y=\begin{cases}1, x>0,\\ 3, x=0,\\ -2, x<0.\end{cases}$ 4) $y=\sqrt{x}-\sqrt{-x}$;5) $y=\sqrt{|x|-x}$

2. Найдите множество значений функции:

1) $y=\sqrt{x}+2$; 2) $y=\sqrt{-x^2}$; 3) $y=x^2+4x+8$; 4) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$; 5) $y=\dfrac{1}{x^4-2x^2+2}$.

3. Постройте график функции: 1) $y = |x - 2|(x + 1)$; 2) $y = |x| - \dfrac{1}{|x-1|}$;

3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

4. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

5. Исследуйте функцию на чётность и нечётность:
1) $y=\left|x^5\right|$; 2) $y=x^4-x$; 3) $y=x^3-x^k$, где k — натуральное число.

6. При каких значениях a имеет не более одного нуля функция $y = x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2$?

7. При каких значениях b функция $y = 3x^2 - bx + 1$ возрастает на $[3; +\infty)$?

8. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел, является возрастающей и принимает только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = f^2(x)$ убывает на множестве $\boldsymbol{R}$.

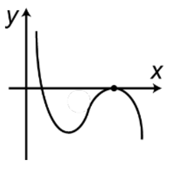
9. Проверьте, имеет ли обратную функция $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Если имеет, то найдите её.

10. Участок земли прямоугольной формы огородили забором длиной 200 м. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок?

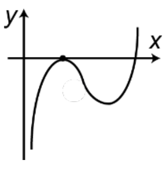
11. График какой из функций $y = x^2, y = x^3, y = x^4, y = -x^4$ имеет наибольшее количество общих точек с графиком функции $y = x$?

12. На каком из следующих рисунков схематично изображён график функции $y(x) = (a - x)(b - x)^2$, если $a < b$?

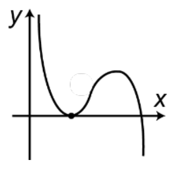
А



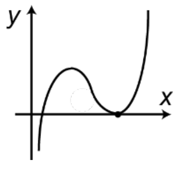
Б



В:



Г:



Указания к выполнению дополнительного задания

1. Составьте и решите уравнение, или неравенство, или их систему, задающие область определения.

2. Можно построить график функции и по графику найти множество её значений.

3. Построение графика начинайте с нахождения области определения. Целесообразно, если это возможно, предварительно исследовать функцию: найти точки его пересечения с осями координат, промежутки возрастания и убывания, исследовать на чётность и т. д.

4. Задайте два произвольных значения из области определения функции, установите знак разности значений функции при этих значениях аргумента.

5. Воспользуйтесь определениями чётной и нечётной функций.

6. Исследуйте знак дискриминанта данного квадратного трёхчлена в зависимости от параметра.

7. Выразите через b абсциссу вершины параболы.

8. Задайте два произвольных значения из области определения функции, установите знак разности значений функции $y = f^2(x)$ при этих значениях аргумента.

9. Выясните, есть ли такое значение данной функции, которое она принимает при двух значениях аргумента.

10. Введите обозначение для одного размера участка, выразите через него и данные второй размер и площадь участка.

11. Используйте графики указанных функций.

12. Укажите, в какой точке a или b функция изменяет знак, а в какой точке касается оси абсцисс.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Функции и их свойства

Пособие для дополнительного обучения математике

обучающихся 10 классов

Учебное пособие