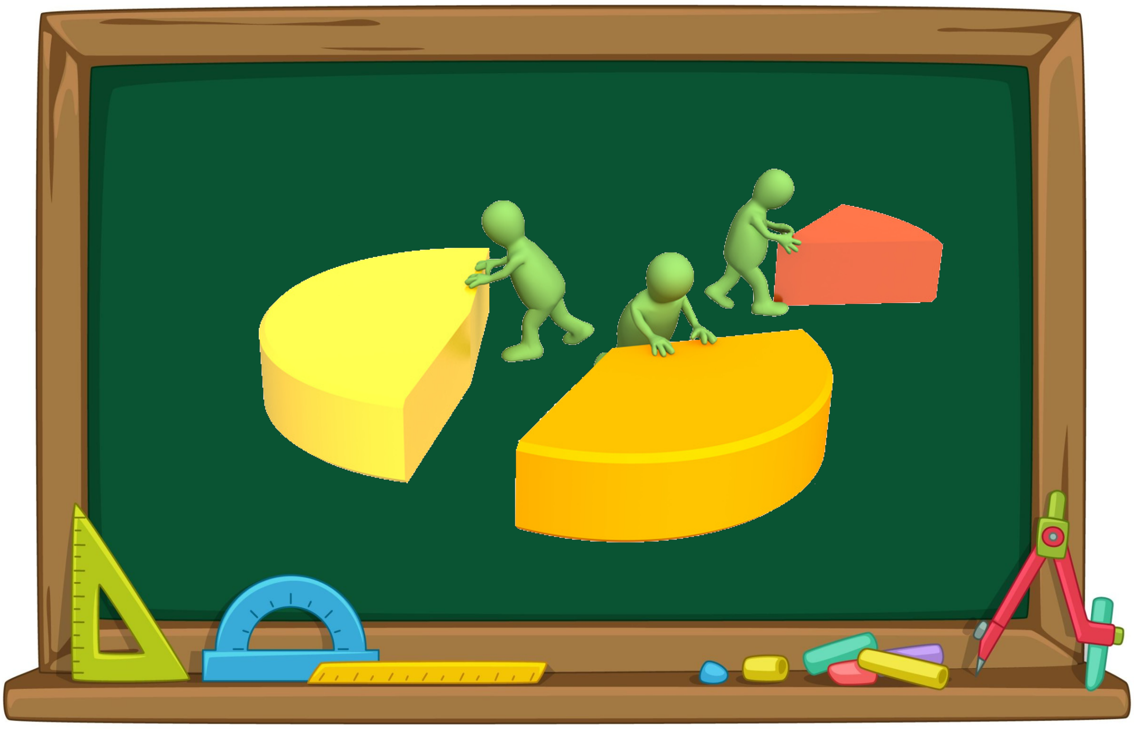
Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Делимость натуральных чисел



Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 5-6 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Делимость натуральных чисел. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 5- 6 классов. — 60 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 5-6 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, совершенствование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 5-6 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено делимости целых чисел. Делимость широко используется при решении практических задач. Конечно, не все приведенные в пособии задачи жизненно важные. Но решение всех задач, безусловно, полезно для совершенствования навыков вычислений и рассуждений.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и нахождения решений предложенных

задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Они предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы их решения.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

В контрольном задании (контрольном тесте, основном и дополнительном заданиях) задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком

В конце приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, используемых в приведенных решениях типовых задач, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно*:*

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение

каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что для них не приводятся ответы, из которых нужно выбрать правильный.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в модуле, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала пособия, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели,

учитывая свою готовность, опыт и способности.

Делимость натуральных чисел

Арифметическое действие деление широко используется в решении практических задач. С его помощью можно найти количество клеток, в которых содержится 125 попугаев. если в каждой клетке 5 попугаев. Воспользовавшись делением, легко доказать, что нельзя 36 деревьев посадить в 5 рядов так, чтобы во всех рядах деревьев было поровну.

Вопрос о делимости одного числа на другое очень важен. Без рассмотрения делимости чисел не удастся в полном объёме изучить обыкновенные дроби. Делимость широко используется при решении практических задач. Цель данного пособия научить решать некоторые из них. Для их решения будем пользоваться следующими правилами.

Количество элементов *s*, находящихся в *n* группах по *a* элементов в каждой группе, равно произведению *n* на *a*. $s = na$

Количество групп *n*, в которых распределено *s* по *a* элементов в каждой группе, равно частному от деления s на *a*. $n = \frac{s}{a}$

Количество элементов *a* в каждой из *n* групп, содержащих всего *s* элементов по одинаковому количеству в каждой группе, равно частному от деления *s* на *n*. $a = \frac{s}{n}$

Помните!

- на нуль делить нельзя; $\boxed{\cancel{a : 0}}$

- на 1 делится любое число;

- всякое число, кроме 0, делится само на себя, при этом в частном получают 1; $a : 1 = a$, $a : a = 1$

- частное от деления нуля на любое число, не равное нулю, равно нулю. $0 : a = 0$

1. Чётные и нечётные числа

Как известно, цифры 0, 2, 4, 6, 8 называются чётными, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — нечётными.

Числа, оканчивающиеся чётной цифрой, называются чётными, оканчивающиеся нечётной цифрой — нечётными.

Каждое чётное число делится на 2. Например, число 7396 — чётное, так как 6 — чётная цифра. Его можно представить в виде 7396 = 2·3698; 2 — делитель, 3698 — частное.

Каждое чётное число можно представить в виде 2*n*, где *n* — частное от деления этого числа на 2.

Никакое нечётное число не делится на 2. Каждое нечётное число при делении на 2 даёт в остатке 1. Например, нечётное число 587 можно представить в виде: 587 = 2·293 + 1. Здесь 293 — неполное частное от деления числа 587 на 2, 1 — остаток от этого деления.

Каждое нечётное число можно представить в виде 2*n* + 1, где *n* — неполное частное от деления этого числа на 2.

Чётные и нечётные числа обладают следующими свойствами.

Сумма двух чётных чисел является чётным числом: $2n + 2k = 2(n + k)$.

Сумма двух нечётных чисел чётна: $(2n + 1) + (2k + 1) = 2(n + k + 1)$.

Сумма чётного и нечётного чисел является нечётным числом:

$$2n + (2k + 1) = 2(n + k) + 1.$$

Готовимся к решению задач

1. Даны числа 42, 58, 73,306, 1017, 224, 99, 2019. Сколько из них являются четными?

А. 3. **Б.** 4. **В**. 5. **Г**. 6.

2. Сколько четных чисел, больших чем 4, но меньших чем 18?

А. 9. **Б.** 8. **В**. 7. **Г**. 6.

3. Сколько нечетных чисел среди 20 идущих подряд натуральных чисел?

А. 11. **Б.** 10. **В**. 9. **Г**. 8.

4. Длины сторон прямоугольника выражаются двумя последовательными натуральными числами сантиметров. Чётным или нечётным числом квадратных сантиметров выражается его площадь?

5. Длины сторон прямоугольника выражаются двумя натуральными числами сантиметров. Чётным или нечётным числом сантиметров выражается его периметр?

6. Длины сторон треугольника выражаются тремя последовательными натуральными числами сантиметров. Верно ли, что его периметр выражается нечётным числом сантиметров?

7. Если число a не делится на 2, то какое утверждение верно для числа $2a+1$?

А. Оно делится на 2. **Б.** Оно нечётное.

В. Оно делится на 3. **Г.** Оно состоит из нечётных цифр.

8. Верно ли, что если сумма двух натуральных чисел чётна, то их разность тоже чётна?

9. Верно ли, что если сумма двух натуральных чисел нечётна, то их разность тоже нечётна?

10. Верно ли, что частное от деления чётного числа на чётное является чётным числом (если деление выполняется без остатка)?

11. Верно ли, что частное от деления чётного числа на нечётное является чётным числом (если деление выполняется без остатка)?

12. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Чётное или нечётное количество прыжков он совершил?

Решение задач

Для решения следующей задачи можно воспользоваться выше сформулированными свойствами чётных и нечётных чисел.

Задача 1. Можно ли 30 орехов разложить на три кучки так, чтобы в каждой было нечётное число орехов?

Анализируем. Фактически в задаче требуется выяснить, можно ли чётное число представить в виде суммы трёх нечётных чисел. Ответ на этот вопрос можно получить, воспользовавшись свойствами чётных и нечётных чисел, приведенными выше.

Решаем. Сумма двух нечётных чисел является чётным числом. Если к этой сумме прибавить любое нечётное число, то получим нечётное число. Таким образом, сумма любых трёх нечётных чисел является нечётным числом, то есть число 30 нельзя представить в виде суммы трёх нечётных чисел. Поэтому 30 орехов нельзя разложить на три кучки так, чтобы в каждой было нечётное число орехов. **Ответ.** Нельзя.

1. *Можно ли 30 орехов разложить на две кучки так, чтобы в каждой кучке было нечётное число орехов?*

2. *Можно ли 30 орехов разложить на четыре кучки так, чтобы в каждой кучке было нечётное число орехов?*

3. *Какое наименьшее число орехов может оказаться в кучке, если 31 орех разложить на три кучки так, чтобы в каждой было нечётное число орехов?*

Для решения следующей задачи используются те же свойства чётности и нечётности целых чисел.

Задача 2. Эстафета состоит из трёх этапов. В каждой ли команде можно из номеров трёх её членов найти два, сумма которых чётна?

Анализируем. Ответ на поставленный вопрос можно получить, рассмотрев всевозможные варианты о количестве чётных чисел среди номеров спортсменов. Возможны 4 случая: количество чётных чисел среди номеров может равняться 0, 1, 2, 3.

Решаем. Пусть числа a, b, c — номера трёх участников эстафеты. Покажем, что из них всегда можно выбрать два, сумма которых чётна.

1) Если все числа a, b, c — чётны, то сумма любых двух из них чётна.

2) Если среди чисел a, b, c два чётных, то их сумма также чётна.

3) Если среди чисел a, b, c одно чётно, то тогда два других нечётны, и их сумма чётна.

4) Если все числа a, b, c нечётные, то сумма любых двух из них чётна.

Итак, во всевозможных наборах номеров трёх участников эстафеты любой команды найдутся два номера, сумма которых чётна.

Ответ. Можно.

1. *Можно ли в условиях предыдущей задачи найти два номера, произведение которых чётно*?

2. *Будут ли среди номеров трёх участников эстафеты любой команды хотя бы два номера одинаковой чётности?*

3. *Если эстафета состоит из четырёх этапов, то можно ли из номеров четырёх участников одной команды всегда найти три, сумма которых чётна?*

В двух предыдущих задачах требовалось установить чётность или нечётность исходных данных. Часто установление чётности или нечётности числа является методом решения задачи.

Задача 3. Шестнадцать корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

Анализируем. Если количества арбузов в двух соседних корзинах отличаются друг от друга на 1, то это два последовательных натуральных числа. Одно из них является чётным числом, а другое — нечётным. Их сумма есть число нечётное. Можно ли разложить арбузы в корзины так, чтобы в любой паре соседних корзин общее количество арбузов было нечётным? 16 корзин образуют 16 : 2 = 8 пар соседних корзин. В каждой паре корзин нечётное количество арбузов, а число пар чётное. Возникает гипотеза о невозможности такого разложения арбузов.

Решаем. Предположим, что требуемое расположение возможно. Тогда будем иметь 8 пар соседних корзин. В каждой паре нечётное число арбузов, так как количества арбузов в них отличаются друг от друга на 1. Так как сумма двух нечётных чисел является чётным числом, то общее число арбузов в любых четырёх, а значит и в 8 парах корзин чётно. Оно не может равняться 55. Сделанное предположение неверно. Следовательно, такое расположение арбузов невозможно.

Ответ. Нельзя.

1. *Можно ли в 16 корзинах, расположенных по кругу, разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 2?*

2. *В скольких корзинах, расположенных по кругу, можно разложить 45 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?*

3. *Можно ли в 16 корзинах, расположенных по кругу, разложить 80 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних отличалось на 1?*

В рассмотренных задачах речь шла о сумме чётных или нечётных чисел. В следующей задаче придётся оценить и произведение. Для этого будем использовать следующие свойства чётных и нечётных чисел.

Произведение любого натурального числа на чётное число — чётно.

Произведение двух нечётных чисел нечётно.

Задача 4. Существует ли прямоугольник, длины сторон которого выражены натуральными числами в сантиметрах, причём одна из них на 1 см длиннее другой, и площадь которого равна 305 см^2?

Анализируем. Если такой прямоугольник существует, то длины его сторон в сантиметрах, по условию, выражаются двумя последовательными натуральными числами. Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон. Таким образом, необходимо выяснить, может ли произведение двух натуральных чисел, одно из которых чётно, а другое нечётно, равняться 305.

Решаем. Предположим, что существует прямоугольник, удовлетворяющий условиям задачи. Поэтому длина одной из его сторон выражается чётным числом, а длина другой — нечётным. Но произведение чётного числа на нечётное является числом чётным, а 305 — число нечётное. Получили противоречие. Таким образом, такого прямоугольника не существует.

Ответ. Не существует.

1. *Существует ли прямоугольник, длины сторон которого выражены натуральными числами в сантиметрах, причём одна из них на 1 см длиннее другой, и площадь которого равна 110 см^2?*

2. *Существует ли прямоугольник, длины сторон которого выражены натуральными числами в сантиметрах, причём одна из них на 1 см длиннее другой, и площадь которого равна 140 см^2?*

3. *Существует ли прямоугольник, длины сторон которого выражены натуральными числами в сантиметрах, причём одна из них на 2 см длиннее другой, и площадь которого равна 143 см^2?*

Проверь себя

1. В прямоугольном кинозале сумма номеров мест в каждом ряду нечётна. Какому из приведенных чисел может равняться число мест в ряду, если нумерация мест начинается с 1?

А. 9. **Б.** 10. **В.** 11. **Г.** 13.

2. Какое из приведенных количеств карандашей можно разложить на 3 кучки так, чтобы в каждой кучке было нечётное количество карандашей?

А. 60. **Б.** 50. **В.** 45. **Г.** 40.

3. В скольких из приведенного числа коробок, расположенных по кругу, можно разложить 91 яблоко так, чтобы количество яблок в любых двух соседних коробках отличалось друг от друга на 1?

А. 14. **Б.** 16. **В.** 20. **Г.** 24.

4. Количество купленных в магазине одинаковых предметов и цена одного предмета в рублях выражаются последовательными натуральными числами. Какому из следующих значений может равняться стоимость покупки в рублях?

А. 121 руб. **Б.** 84 руб. **В.** 75 руб. **Г.** 72 руб.

Реши сам

1. Требуется 33 ореха разложить на три неравные кучки так, чтобы в каждой было нечётное число орехов. Какое наибольшее число орехов может оказаться в наименьшей кучке?

2. Шесть человек обменялись друг с другом рукопожатиями. Определите, чётным или нечётным является число рукопожатий.

3. В скольких корзинах, расположенных по кругу, можно разложить 21 арбуз так, чтобы число арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось друг от друга на 1?

4. Сколько существует различных прямоугольников, длины сторон которых выражаются чётными числами сантиметров, а площади равны 16 см^2?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Воспользуйтесь определением четного числа.

2. В. Попытайтесь найти искомое число, рассуждением, а не пересчетом.

3. Б. Воспользуйтесь тем, что в каждой паре двух идущих подряд натуральных чисел одно число четное, а другое нечетное.

4. Чётным. Воспользуйтесь тем, произведение двух натуральных чисел четно, если хотя бы один множитель четное число.

5. Чётным. Воспользуйтесь тем, периметр прямоугольника равен сумме длин всех его сторон.

6. Нет. Воспользуйтесь тем, что в тройке идущих подряд натуральных чисел может быть ровно одно четное число или ровно два четных чисел.

7. Б. Обратите внимание на четность числа 2*a*.

8. Да. Сначала выясните, какими могут быть два натуральных числа, сумма которых четна.

9. Да. Сначала выясните, какими могут быть два натуральных числа, сумма которых нечетна.

10. Нет. Приведите пример двух четных натуральных чисел, частное от деления которых нечетное число.

11. Да. Воспользуйтесь тем, что нечетное число на 2 не делится.

12. Чётное. Воспользуйтесь тем, что каждому прыжку в одну сторону соответствует прыжок в обратную.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Да. 2) Да. 3) 1.

Задача 2. 1) Нет. 2) Да. 3) Нет.

Задача 3. 1) Нет. 2) Например, в 6-и. 3) Да.

Задача 4. 1) Да. 2) Нет. 3) Да.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Б	В	А	Г

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 9. Рассмотрите различные варианты представления числа 33 в виде суммы трёх различных нечётных чисел.

2. Нечётным. Можно найти число рукопожатий. Воспользуйтесь тем, что первый из шестерых человек пожал руку пятерым, второй — четырём (рукопожатие с первым уже учтено), третий — трём, четвёртый — двум, пятый — одному, а все рукопожатия шестого уже учтены.

3. 2, или 6, или 10, или 14. Обратите внимание на то, что в каждой паре соседних корзин должно быть нечётное число арбузов.

4. 2. Рассмотрите все представления числа 16 в виде произведения чётных чисел.

2. Делимость

Очень часто информация о том, что некоторое число делится на другое, позволяет получить практические выводы. А что значит, что натуральное число a делится на натуральное число b? Это значит, что существует такое натуральное число c, что $a = b\cdot c$. Например, то, что число 66 делится на 11, означает, что существует число, равное 6, такое, что $66 = 11\cdot 6$. На 11 делится каждое 11-е число в натуральном ряду: 11, 22, 33, 44, … .

Готовимся к решению задач

1. На какое из приведенных чисел делится число 45?

А. 2. **Б.** 4. **В**. 5. **Г**. 7.

2. Какое наименьшее число нужно прибавить к 17, чтобы полученное число делилось на 5?

А. 13. **Б.** 8. **В**. 3. **Г**. 2.

3. Какое из приведенных чисел делится на 4?

А. 34. **Б.** 32. **В**. 31 **Г**. 30.

4. Можно ли 34 карандаша разделить поровну между четырьмя учениками?

5. Делится ли число 323 на 5?

6. Какие цифры можно вставить вместо * в 5749*, чтобы полученное число делилось на 5?

7. Сколько чисел, меньших 100, делится на 13?

8. Верно ли, что ровно одно из 13 последовательных натуральных чисел делится на 13?

9. В школе более 80, но менее 100 учеников. Из них седьмая часть играет на скрипке, третья часть катается на велосипеде. Сколько в школе учеников?

10. На доске написаны числа от 1 до 2013. Петя вначале подчеркнул все числа, делящиеся на 2, а потом — делящиеся на 3. Сколько чисел Петя подчеркнул дважды?

Решение задач

Устанавливать делимость небольших чисел можно, пользуясь таблицей умножения.

Задача 1. На школьном дворе 11 девочек и 9 мальчиков. Какое наименьшее число мальчиков и девочек должны к ним присоединиться, чтобы всех их можно было разделить на 5 групп с одинаковым числом мальчиков и одинаковым числом девочек в каждой группе?

Анализируем. Чтобы в 5 группах было одинаковое число девочек, общее число девочек должно делиться на 5. Такой же вывод касается и числа мальчиков. Следовательно, нужно к имеющимся во дворе девочкам присоединить такое наименьшее число девочек, чтобы образовавшееся число девочек делилось на 5. Это касается и числа мальчиков.

Решаем. Число 11 не делится на 5. Ближайшее к нему число, большее его и делящееся на 5, равно 15. Так как 15 – 11 = 4, то присоединив четырёх девочек к находящимся на школьном дворе девочкам, получим группу девочек, которую можно разделить на 5 равных групп.

Число 9 не делится на 5. Ближайшее к нему число, большее его и делящееся на 5, равно 10. Так как 10 – 9 = 1, то присоединив одного мальчика к находящимся на школьном дворе мальчикам, получим группу мальчиков, которую можно разделить на 5 равных групп.

Итак, одного мальчика и четырёх девочек нужно присоединить к находящимся на школьном дворе, чтобы их можно было разделить на 5 групп с одинаковым числом мальчиков и одинаковым числом девочек в каждой группе. Эти числа наименьшие, так как использовались числа, ближайшие к 11 и 9 и делящиеся на 5.

Ответ. Одного мальчика и четырёх девочек.

1. *Сколько мальчиков и сколько девочек должно присоединиться к тем, кто находится на школьном дворе, чтобы всех их можно было разделить на 5 групп, состоящих из трёх мальчиков и четырёх девочек в каждой группе?*

2. *На школьном дворе 11 девочек и 9 мальчиков. Какое наименьшее число мальчиков и девочек должны к ним присоединиться, чтобы всех их можно было разделить на 4 группы с одинаковым количеством мальчиков и одинаковым количеством девочек в каждой группе?*

3. *В классе 15 девочек и 11 мальчиков. Какое наименьшее количество мальчиков и девочек должны уйти после уроков домой, чтобы оставших-*

ся в группе продлённого дня можно было разделить на 4 группы с одинаковым количеством мальчиков и одинаковым количеством девочек в каждой группе?

В задаче 1 мы воспользовались признаком делимости на 5.

На 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулём или цифрой 5.

Что касается делимости на любое натуральное число n, то мы будем пользоваться тем, что на n делится каждое n-е число в натуральном ряду, то есть n, $2 \cdot n$, $3 \cdot n$, $4 \cdot n$, … .

Например, чтобы выписать натуральные числа, делящиеся на 13, достаточно взять наименьшее из них — 13, и к каждому предыдущему числу прибавлять 13.

Задача 2. Ради рекламы фирма «13» премировала тех учащихся школы, чей номер в общем школьном списке, составленном в алфавитном порядке, в 13 раз превосходил сумму его цифр. Сколько человек получили премию в школе, в которой учится 300 детей?

Анализируем. Ясно, что фирма выбирает кандидатов для премирования из тех учащихся, чей номер в общем школьном списке делится на 13. Для решения задачи достаточно из номеров учащихся от 1 до 300 включительно выбрать номера, делящиеся на 13, а затем из них те, которые удовлетворяют условию.

Решаем. Среди натуральных чисел, не превосходящих 300, на 13 делится каждое 13-е число в натуральном ряду, то есть делятся следующие числа: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130, 143, 156, 169, 182, 195, 208, 221, 234, 247, 260, 273, 286, 299. Выясним с помощью следующей таблицы, какие из них при делении на 13 дают в частном сумму своих цифр.

Число	13	26	39	52	65	78	91	104	**117**	130	143	**156**
Частное от деления на 13	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	**12**
Сумма цифр	4	8	12	7	11	15	10	5	**9**	4	8	**12**
Число	169	182	**195**	208	221	234	247	260	273	286	299	

Частное от деления на 13	13	14	**15**	16	17	18	19	20	21	22	23	
Сумма цифр	16	11	**15**	10	5	9	13	8	12	16	18	

В таблице выделены жирным шрифтом те номера учащихся в школьном списке, которые делятся на 13 и при этом делении дают в частном число, равное сумме цифр номера. Таким образом, приз получат трое учащихся, номера которых в общем списке следующие: 117, 156, 195.

Ответ. 3.

1. *Чему равно частное от деления числа 247 на 13?*

2. *Делится ли число 286 на сумму его цифр?*

3. *Сколько человек получили бы премию, если бы в школе училось 400 детей?*

Иногда информацию о делимости можно получить из следующих свойств делимости.

Если a делится на c, b делится на c, то $a + b$ делится на c.

Если a делится на c, то при любом k число ka делится на c.

Если хотя бы одно из чисел a или b делится на c, то ab делится на c.

Если число k - целое, то произведение числа a на k делится на a.

В следующей задаче используется следующее свойство делимости. Оно является обобщением первого из вышеприведенных свойств делимости.

Если каждое из нескольких чисел делится на некоторое число, то их сумма также делится на это число.

Задача 3. Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алёша Попович вступили в бой с великанами. Получив по 3 удара богатырскими палицами, великаны обратились в бегство. Больше всех ударов нанёс Илья Муромец — 7, меньше всех Алёша Попович — 3. Сколько всего было великанов?

Анализируем. Из условия известно, что каждый великан получил по 3 удара. Следовательно, число всех ударов равно произведению числа великанов на 3. Поэтому общее число ударов делится на 3. Зная число ударов, нанесенных двумя из трёх богатырей, учитывая, что общее число ударов делится на 3, а число ударов Добрыни Никитича находится между 3 и 7, можно найти число ударов, нанесенных им. Найдя общее число ударов, полученных великанами, и разделив его на 3, получим число великанов.

Решаем. Общее число ударов, полученных великанами, делится на 3 и равно сумме ударов, нанесенных тремя богатырями. Илья Муромец нанёс 7 ударов, Алёша Попович — 3. Число ударов, нанесенных Добрыней Никитичем, меньше 7, но больше 3. Оно может равняться или 4, или 5, или 6. Проверим, при каком из этих значений общее число ударов делится на 3. Общее число ударов может равняться или 7 + 4 + 3 = 14, или 7 + 5 + 3 = 15, или 7 + 6 + 3 = 16. Из трёх полученных чисел (14, 15, 16) только 15 делится на 3. Число великанов равно частному от деления 15 на 3, то есть 5.

Ответ. 5.

1. *Сколько всего было бы великанов, если бы Илья Муромец нанёс 9 ударов, а Алёша Попович — 5?*

2. *Сколько всего было бы великанов, если бы они получили по 4 удара богатырскими палицами?*

3. *Сколько ударов нанёс бы Добрыня Никитич, если бы богатыри вступили в бой с шестью великанами, а Илья Муромец нанёс бы 9 ударов, Алёша Попович — 4?*

В следующей задаче увидим практическое применение умений решать задачи на делимость.

Задача 4. Покупатель купил в магазине пакет молока стоимостью 30 рублей, пачку творога стоимостью 60 рублей, 6 пирожных и 3 килограмма сахара. Цены одного пирожного и килограмма сахара выражаются целыми числами рублей. Когда кассирша выбила чек на 365 рублей, покупатель потребовал проверить счет и исправить ошибку. Как определил покупатель, что счет неправилен?

Анализируем. Ошибку можно обнаружить, определив по ценам купленных продуктов и их количествам, на какое число должна делиться стоимость покупки, и сравнив её с объявленной стоимостью. Покупатель может определить, что счёт неправилен, на основании свойств делимости целых чисел.

Решаем. Общая стоимость покупки складывается из стоимости пакета молока, пачки творога, 6 пирожных и 3-х килограмм сахара. Пакет молока стоит 30 руб., число 30 делится на 3. Пачка творога стоит 60 руб., число 60 тоже делится на 3. Стоимость 6 пирожных равна произведению цены одного пирожного (а это целое число) на 6. Эта стоимость делится на 3, так как один из множителей — 6 — делится на 3. Точно также стоимость 3 кг сахара равна произведению цены 1 кг сахара (а это тоже целое число) на массу купленного сахара, то есть на 3 кг. Поэтому стоимость сахара тоже делится на 3. Итак, стоимость каждого из 4-х видов купленных товаров делится на 3. Поэтому их сумма, то есть общая стоимость покупки, делится на 3. А число 365, указанное в счёте, на 3 не делится.

Ответ. Стоимость покупки должна делиться на 3, а она не делится.

1. *Может ли стоимость покупки равняться 360 руб.?*
2. *Какой остаток даёт число 365 при делении на 3?*
3. *Может ли стоимость покупки равняться 220 руб., если купили 5 пакетов кефира и несколько килограммов сахара по 20 руб. за 1 кг, если пакет кефира стоит целое число рублей?*

Распространёнными являются задачи, где требуется определить число предметов на основании того, что их можно распределить поровну на некоторые числа групп, и нельзя на другие.

Задача 5. Количество яблок в корзине не превышает 100. Их можно разделить поровну между 2, 3 и 5 детьми, но нельзя разделить поровну между 4 детьми. Сколько яблок может быть в корзине?

Анализируем. Для решения задачи достаточно среди натуральных чисел, не превышающих 100, найти такие, которые делятся на 2, 3, 5 и не делятся на 4.

Решаем. Число яблок в корзине делится на 2, на 3, на 5, но не делится на 4. Среди чисел, не превышающих 100, только 20 чисел делится на 5 (каждое 5-е число). На 5 делятся числа: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100. Половина из них не делится на 2 (нечётные числа), отбросим их. Останутся: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100. Отбросим те из них, которые не делятся на 3, это 10, 20, 40, 50, 70, 80, 100. Останется 3 числа: 30, 60, 90. Из них на 4 делится только число 60. Его нужно отбросить. Следовательно, в корзине может быть или 30 яблок, или 90. И то, и другое число яблок можно поровну разделить между 2, 3, 5 детьми, но нельзя разделить поровну между 4 детьми.

Ответ. 30 или 90.

1. *Сколько среди натуральных чисел, не превышающих 100 и делящихся на 5, делится на 4?*

2. *Сколько среди натуральных чисел, не превышающих 100 и делящихся на 5 и на 2, не делится на 4?*

3. *Сколько среди натуральных чисел, не превышающих 100, делящихся на 5 и на 2 и не делящихся на 4, делится на 3?*

Проверь себя

1. Ко дню учителя пятиклассники принесли 18 гвоздик и 22 хризантемы. Какое наименьшее число гвоздик и хризантем нужно добавить, чтобы из полученных цветов можно было составить букеты для 5 учителей с одинаковым количеством гвоздик и одинаковым количеством хризантем в каждом букете?

А. 2 гвоздики и 3 хризантемы. **Б.** 3 гвоздики и 2 хризантемы. **В.** 2 гвоздики и 2 хризантемы. **Г.** 3 гвоздики и 3 хризантемы.

2. Проводится объединенный урок физкультуры трех классов. В строю выстроилось 90 учеников, на спортивных формах которых значились номера от 10 до 99. Тренер по гимнастике отобрал для занятий тех учеников, номера которых делились на 4. Из них старший тренер по гимнастике отобрал учеников, номера которых делились и на 3. Сколько учеников отобрал старший тренер?

А. 12. **Б.** 9. **В.** 8. **Г.** 7.

3. Три человека А, Б, В покупали в магазине товары нескольких наименований. Каждого наименования товаров было куплено по 4 единицы. Покупатель А купил больше всех единиц товаров — 11, В — меньше всех, 7. Сколько наименований товаров было куплено?

А. 10. **Б.** 9. **В.** 8. **Г.** 7.

4. Покупатель купил в магазине пакет молока стоимостью 30 рублей, коробку сыра стоимостью 60 рублей, 10 пирожных и 5 килограммов сахара. Цены одного пирожного и килограмма сахара выражаются целыми числами рублей. Какому из следующих количеств рублей может равняться стоимость покупки?

А. 362 руб. **Б.** 364 руб. **В.** 365 руб. **Г.** 369 руб.

5. Шестьдесят карандашей не удалось разместить в восьми коробках одинаковой вместимости, но удалось — в девяти. В каждой полной коробке могло быть по …

А. 6 карандашей. **Б.** 7 карандашей. **В.** 5 карандашей. **Г.** 8 карандашей.

Реши сам

1. Для участия в конкурсе подали заявки 10 мальчиков и 17 девочек одной школы. Когда дополнительно изъявили желание участвовать в конкурсе 2 мальчика и 1 девочка, то выяснилось, что в каждой номинации участвовало одинаковое количество мальчиков и одинаковое количество девочек. Укажите наибольшее количество номинаций, в которых могли участвовать ученики этой школы.

2. Фирма «7×7» премировала учащихся школы, чей номер в общем школьном списке в 7 раз превосходил сумму его цифр. Сколько человек получили премию в школе, где училось 200 детей?

3. Три ученика А, Б, В сделали в контрольной работе по несколько типов ошибок. Каждого типа было сделано по 3 ошибки. Ученик А допустил меньше всех ошибок — 3, Б — больше всех, 7. Какое наименьшее число ошибок мог допустить В?

4. В эстафете от одной команды участвовало три мотоциклиста. Один из них ехал со скоростью 60 км/ч некоторое целое число часов. Второй был в пути 3 ч, его скорость выражается целым числом км/ч. Третий проехал 120 км. Могли ли они втроём проехать всего ровно 650 км?

5. Витя сосчитал, что подаренные конфеты можно разделить поровну на пятерых друзей. Если же делить конфеты на троих или четверых друзей, то всякий раз будет оставаться лишняя конфета. Сколько конфет было у Вити, если известно, что их меньше 50?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Воспользуйтесь нечетностью числа 45, чтобы упростить поиск искомого числа, выполняя деления.

2. В. Начинайте проверку делимости сумм 17 и чисел, приведенных в ответах, с наименьшего из них.

3. Б. Воспользуйтесь тем, что $4 = 2 \cdot 2$.

4. Нет. Воспользуйтесь результатом выполнения предыдущего задания.

5 Нет. Воспользуйтесь равенством $323 = 32 \cdot 10 + 3$ и тем, что 10 делится на 5.

6. 0,5. Воспользуйтесь равенством $5749* = 5749 \cdot 10 + *$ и тем, что 10 делится на 5.

7. Воспользуйтесь тем, что числа, делящиеся на 13, имеют вид $13 \cdot k$, где k — натуральное число.

8. Да. Обратите внимание на то, что между числами вида $13 \cdot k$ и $13 \cdot (k + 1)$ находится 12 чисел.

9. 84. Воспользуйтесь тем, что искомое число должно делиться и на 3, и на 7.

10. 335. Установите вид чисел, которые делятся и на 2, и на 3.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) 6 мальчиков и 9 девочек. 2) 3 мальчика и 1 девочка. 3) 3 девочки и 3 мальчика.

Задача 2. 1) 19. 2) Нет. 3) 6.

Задача 3. 1) 7. 2) 4. 3) 5.

Задача 4. 1) Да. 2) 2. 3) Да.

Задача 5. 1) 5. 2) 5. 3) 2.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
А	В	Г	В	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. В 6-и. Найдите число девочек и число мальчиков, участвовавших в конкурсе, и установите наибольшее число, не которое делятся найденные числа.

2. 4. Воспользуйтесь решением задачи 2.

3. 5. Обратите внимание на то, что общее число ошибок делится на 3.

4. Нет. Обратите внимание, на какое число делится общее расстояние, которое проехали мотоциклисты.

5. 25. Среди натуральных чисел, меньших 50, требуется найти числа, делящиеся на 5, а при делении на 3 и на 4 дающие в остатке 1.

3. Делители и кратные

Остаток от деления числа 24 на 6 равен нулю, так как $24 = 6 \cdot 4$. В этом случае говорят, что число 24 делится на 6. Число 6 называют ***делителем*** числа 24, а число 24 — ***кратным*** числа 6. Делителями числа 24 являются числа: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Число 24 не делится на 9. Поэтому 9 не является делителем числа 24, а число 24 не является кратным числу 9.

Если натуральное число, а делится на натуральное число b, то число а называют кратным числа b, число b — делителем числа а.

Число 1 является делителем любого натурального числа a, это наименьший делитель этого числа, наибольшим его делителем является само число a. Число a кратно a, это наименьшее кратное этого числа, наибольшего кратного не существует.

Готовимся к решению задач

1. Сколькими различными способами число 174 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел?

А. Одним. **Б.** Двумя. **В**. Тремя. **Г**. Четырьмя.

2. Сколько делителей у числа $2\cdot 3\cdot 5$?

А. 3. **Б**. 5. **В**. 6. **Г**. 8.

3. Сколько чисел, кратных 5, среди чисел 83, 95, 72, 100, 75, 108, 80?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 5.

4. Сколько общих делителей у чисел $2\cdot3\cdot5$ и $2\cdot5\cdot7$?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 5.

5. Чем является значение цены единицы товара для числа, равного стоимости нескольких единиц этого товара?

6. Несколько одинаковых ручек стоят 80 руб. Может ли одна ручка стоить 12 руб.?

7. Несколько одинаковых ручек стоят 80 руб. Цена одной ручки более 5 руб., но менее 15 руб. Сколько может стоить одна ручка?

8. В коробке 20 карандашей синего, красного и зелёного цветов. Синих карандашей в 6 раз больше, чем зелёных. Может ли в коробке быть 3 зелёных карандаша?

9. Продавец цветов продаёт 24 белые, 42 красные розы и 36 жёлтых роз. Какое наибольшее количество одинаковых букетов он может сделать, если хочет использовать все цветы?

А. 12. **Б.** 8. **В.** 4. **Г.** 6.

10. У Пети 8 конвертов. В трёх из них лежат по 8 меньших конвертов в каждом. Сколько всего конвертов у Пети?

11. У Пети 8 конвертов. В трёх из них лежат по 8 меньших конвертов в каждом, а пяти из которых находится по 8 совсем маленьких конвертов. Сколько всего конвертов у Пети?

Решение задач

Понятие общего делителя двух чисел понадобится для решения следующей задачи.

Задача 1. Для поездки с учащимися за город школа заказала несколько одинаковых автобусов. Известно, что 87 человек поехали в лес, 116 — на море. Все места в автобусах были заняты, и всем хватило места. Сколько было заказано автобусов и сколько мест в каждом автобусе?

Анализируем. Так как все места в автобусах были заняты, всем хватило места и автобусы одинаковы, то число учащихся, разместившихся в автобусах, равно произведению числа автобусов на число мест в одном числа учащихся, поехавших на море. Следовательно, число мест в автобусе является общим делителем чисел 87 и 116.

Решаем. Количество учащихся, поехавших в лес равно произведению числа автобусов их отвозивших на число мест в автобусе. Количество учащихся, поехавших на море равно произведению числа автобусов их отвозивших на число мест в автобусе. Следовательно, число мест в одном автобусе является общим делителем чисел 87 и 116. Так как $87 = 3{\cdot}29$ и $116 = 4{\cdot}29$, то общим делителем этих чисел является число 29. Следовательно, число мест в автобусе равно 29, число автобусов, поехавших в лес равно 3, а на море — 4. Всего было заказано $3 + 4 = 7$ автобусов.

Ответ. 7; 29.

1. *Чем является число мест в автобусе для числа детей во всех автобусах, если все места в автобусах были заняты?*

2. *Какой общий делитель, отличный от 1, имеют числа 87 и 116?*

3. *Какое число автобусов понадобилось бы, если бы на море поехало 135 человек, а в лес — 81?*

Иногда из условия задачи вытекает, что значение величины является кратным некоторого числа, тогда решение задачи сводится к анализу этих кратных.

Задача 2. В корзине лежат 20 грибов: белые, маслята и подберёзовики. Сколько в ней белых грибов, если подберёзовиков в 9 раз больше, чем маслят?

Анализируем. Из условия вытекает, что число подберёзовиков является кратным числа 9. Исходя из этого, можно установить возможные значения для их числа, затем для числа маслят и, наконец, для числа белых грибов. Выбрать из этих значение, удовлетворяющее условию, поможет информация об общем числе грибов в корзине.

Решаем. Число подберёзовиков может равняться 9·1, 9·2, … . Так как общее число грибов равно 20, то остаётся рассмотреть только два случая: число подберёзовиков может равняться или 9·1 = 9 или 9·2 = 18. Если оно равняется 18, то тогда маслят — 2, этих двух видов грибов вместе 18 + 2 = 20. Получается, что в корзине нет белых грибов. Это противоречит условию. Остаётся один случай. Число подберёзовиков равно 9, тогда в корзине 1 маслёнок, а число белых грибов равно 20 – (9 + 1) = 20 – 10 = 10.

Ответ. 10.

1. *Верно ли, что число маслят в корзине является делителем числа подберёзовиков?*
2. *Сколько в корзине могло быть маслят, если бы подберёзовиков было в 8 раз больше, чем маслят?*
3. *Сколько в корзине могло быть белых грибов, если бы подберёзовиков было в 8 раз больше, чем маслят?*

Иногда решение задачи сводится к анализу делителей каких-то величин.

Задача 3. Несколько одинаковых ложек стоят 800 руб., а такое же количество одинаковых вилок — 704 руб. Сколько стоят 5 ложек, если каждая дешевле 200 руб., но дороже 50 руб., а цены ложки и вилки выражаются целыми числами рублей?

Анализируем. Так как стоимость нескольких ложек равно произведению цены одной ложки на число купленных ложек, то цена одной ложки, выражающаяся целым числом рублей, является делителем числа, выражающего стоимость всех ложек. Выписав все делители стоимости всех ложек, найдём всевозможные значения количества купленных ложек. Но вилок купили столько же, сколько и ложек. Поэтому окажутся выписанными и все возможные значения количества купленных вилок. Так как число, равное стоимости купленных вилок, равно произведению цены одной вилки на количество купленных вилок, то количество купленных вилок является делителем числа, выражающего их стоимость. Следовательно, из выписанных возможных значений количества купленных ложек надо будет сохранить те, которые являются делителями этого числа.

Решаем. По условию, куплено равные количества ложек и вилок. Это число является делителем и стоимости всех ложек и стоимости всех вилок. Найдем общие делители чисел 800 и 704. Для этого воспользуемся равенствами

$704 = 2 \cdot 352 = 2 \cdot 2 \cdot 176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 11 = 64 \cdot 11 \cdot$,

$800 = 2 \cdot 400 = 2 \cdot 2 \cdot 200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 100 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 50 = 32 \cdot 25$.

Общие делители: 2,4,8,16,32. Так как цена ложки меньше 200 руб., но больше 50 руб., то искомый общий делитель равен 8, а стоимость одной ложки 100 руб. Тогда 5 ложек стоили $100 \cdot 5 = 500$ (руб.).

Ответ. 500 руб.

1. *Сколько стоит одна вилка?*

2. *Чем является число купленных ложек для стоимости всех ложек, если цена ложки выражается целым числом рублей?*

3. *Сколько стоила бы одна вилка, если бы общая стоимость всех вилок равнялась 696 руб.?*

При решении предыдущей задачи существенно использован следующий факт: если цена одной единицы товара выражается целым числом денежных единиц и куплено целое число единиц этого товара, то стоимость купленного товара является кратным как количества купленных единиц товара, так и цены одной единицы. Этот факт используется и при решении следующей задачи.

Задача 4. На почте к окошку, где продавали марки, подошёл человек, подал 50 руб. и попросил дать ему 50-копеечных марок, в 10 раз меньше рублёвых и на оставшиеся деньги — 5-рублёвых. Можно ли выполнить просьбу этого человека?

Анализируем. Введя обозначение для количества рублёвых марок, можно выразить через это обозначение стоимость этих марок, а также количество и стоимость 50-копеечных марок. Зная общую стоимость покупки, можно найти выражение и для стоимости 5-рублёвых марок. Количество таких марок можно найти, воспользовавшись тем, что их стоимость является кратным цены одной марки.

Решаем. Обозначим количество рублёвых марок через x, их стоимость равна $100x$ коп, тогда количество 50-копеечных марок равно $10x$, а их стоимость — $50\cdot 10x = 500x$ коп. Для покупки 5-рублёвых марок остаётся

50 руб. – ($100x+500x$) коп = 5 000 коп – ($600x$) коп = (5 000 – $600x$) коп.

Так как деньги остались на эту покупку, то x не больше 8.

Число 5 000 – $600x$ должно делиться на стоимость одной 5-рублёвой марки, то есть на 500. Проверим, при каких значениях x оно делится на 500. Так как 5000 делится на 500, то достаточно найти значения x, при которых $600x$ делится 500 или $6x$ на 5. Составим таблицу

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$6x$	6	12	18	24	30	36	42	48
Делится на 5	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Нет	Нет	Нет

Итак, число 5 000 – $600x$ делится на 500 только при $x = 5$. При $x = 5$ оно равно 2000 коп или 20 руб. На них можно купить 4 пятирублёвые марки. Таким образом, клиенту дали пять рублёвых марок (на 5 руб.), пятьдесят 50-копеечных (на 25 руб.) и четыре 5-рублёвых марок (на 20 руб.).

Ответ. Да.

1. *Является ли значение выражения 5 000 – 600x при x = 5 кратным числу 200?*

2. *Верно ли, что число рублёвых марок является делителем числа 50-копеечных?*

3. *Мог ли клиент на всю оставшуюся после приобретения 50-копеечных и рублевых марок сумму вместо 5-рублёвых марок приобрести трёхрублёвые?*

Распределительное свойство умножения относительно сложения

$$ab + ac = a(b + c).$$

можно понимать следующим образом: число $ab + ac$ делится на число a, частное от этого деления равно $b + c$. Такое понимание этого свойства иногда помогает при решении задач.

Задача 5. В комнате стоят 10 больших ящиков. В некоторых из них есть ещё по 10 меньших ящиков, а в некоторых из меньших ящиков есть по 10 совсем маленьких ящиков. Всего заполнено меньшими ящиками 54 ящика. Сколько всего ящиков находится в комнате?

Анализируем. Чтобы разобраться в условии этой задачи и наметить путь её решения, рассмотрим описанную ситуацию на примере. Пусть в трёх из 10 больших ящиков находится по 10 меньших ящиков, то есть в комнате 10 больших и $3 \cdot 10 = 30$ меньших ящиков, всего $10 + 30 = 40$ ящиков. Пусть в 8 меньших ящиках находится по 10 совсем маленьких ящиков, то есть число совсем маленьких ящиков равно $8 \cdot 10 = 80$, а общее число ящиков равно $10 + 30 + 80 = 120$. А сколько ящиков заполнено, то есть в скольких ящиках есть меньшие ящики? В 3-х больших ящиках есть меньшие, и в 8 меньших есть совсем маленькие, всего в $3 + 8 = 11$ ящиках. А общее число ящиков равно $10 + 30 + 80$. Применяя распределительное свойство умножения относительно сложения, получим, что общее число ящиков равно $10(1 + 3 + 8) = 10(1 + 11)$. Теперь видно, что для того, чтобы найти общее число ящиков, если известно число заполненных ящиков, нужно к числу заполненных ящиков прибавить 1 и полученную сумму умножить на число, употребляющееся для всех видов ящиков, в данном случае на 10.

Решаем. В условии дано число заполненных ящиков. Проанализируем, из чего образовалось это количество. Во-первых, из некоторого числа a ($a < 10$) больших ящиков, в которых находится $10a$ меньших. Во-вторых, из некоторого числа b ($b < 10a$) меньших ящиков, в которых находится $10b$ совсем маленьких.

Итак, число заполненных ящиков равно $a + b$, а число всех ящиков в комнате равно $10 + 10a + 10b = 10 + 10\cdot(a + b) = 10(1 + a + b)$.

Итак, для нахождения общего количества ящиков в комнате достаточно к числу заполненных ящиков прибавить 1 и полученную сумму умножить на число больших ящиков в комнате. Число заполненных ящиков равно 54. Поэтому общее число ящиков в комнате равно: $(54 + 1)\cdot 10 = 550$.

Ответ. 550.

1. *Сколько ящиков в комнате не содержат в себе меньшие?*

2. *Сколько больших ящиков содержат меньшие и сколько меньших ящиков содержат совсем маленькие?*

3. *Сколько ящиков содержат в себе меньшие и сколько ящиков содержатся в больших?*

Проверь себя

1. Лимоны одинаковой массы продавали поштучно. Купили больше двух, но меньше 10 лимонов. Масса всей покупки составляет 970 г. Какова масса одного лимона?

А. 97 г. **Б.** 194 г. **В.** 323 г. **Г.** Определить невозможно.

2. В коробке лежат 15 шариков: черных, белых и красных. Красных в семь раз меньше, чем белых. На сколько больше в коробке черных шариков, чем красных?

А. 1. **Б.** 7. **В.** 12. **Г.** 6.

3. Несколько одинаковых тарелок стоят 640 руб., а такое же количество одинаковых вилок — 584 руб. На сколько рублей ложка дороже вилки, если каждая ложка дешевле 100 руб., и цены ложки и вилки выражаются целыми числами рублей?

А. На 4 руб. **Б.** На 5 руб. **В.** На 6 руб. **Г.** На 7 руб.

4. К обменному пункту подошёл человек, подал 500 руб. и попросил дать ему украинские гривны, в 10 раз меньше американских долларов. Сколько рублей ему нужно доплатить, чтобы его просьбу выполнили без сдачи, если за 4 руб. давали 1 грн., за 30 руб. — 1 доллар?

А. 90 руб. **Б.** 80 руб. **В.** 60 руб. **Г.** 6 руб.

5. У Любы 5 больших шкатулок. В трёх из них есть еще по 5 меньших шкатулок, а в шести из меньших — по 5 совсем маленьких шкатулочек. Сколько всего у Любы шкатулок?

А. 50. **Б.** 45. **В.** 35. **Г.** 20.

Реши сам

1. 72 бутерброда и 168 пирожных поровну распределили между собой учащиеся класса. Сколько учеников в классе, если известно, что их больше 20?

2. В коробке лежат 17 конфет: шоколадных, карамелей, ирисок. Шоколадных в 8 раз меньше, чем ирисок. На сколько больше в коробке карамелей, чем шоколадных конфет?

3. Из 48 красных и белых гвоздик составили букеты так, что на каждые 7 красных гвоздик пришлось 5 белых. Сколько было красных и белых гвоздик в отдельности?

4. На рынке покупатель дал продавцу 2 000 рублей и попросил продать ему яблок, в 5 раз меньше по массе груш и на оставшиеся деньги – сливы. Сколько килограммов каждого вида фруктов купил он, если цена 1 кг яблок составляет 50 руб., 1 кг груш – 75 руб., 1 кг слив – 100 руб. и покупатель приобрёл целое число килограммов каждого вида фруктов?

5. У Пети 8 больших конвертов, в некоторых из них по 8 меньших конвертов, а в некоторых из меньших – по 8 совсем маленьких конвертов. Всего у него 80 конвертов. В скольких из них лежат другие конверты?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Г. Не забудьте учесть равенство $174 = 1 \cdot 174$.

2. Г. Не забудьте учесть, что делителями натурального числа являются само число и 1.

3. В. Воспользуйтесь признаком делимости на 5.

4. В. Не забудьте учесть, что делителем натурального числа является 1.

5. Делителем. Воспользуйтесь тем, что значение стоимости нескольких единиц товара равно произведению значения цены единицы этого товара на количество его единиц.

6.Нет. Воспользуйтесь тем, что значение цены единицы товара является делителем значение стоимости нескольких единиц товара.

7. 8 руб. или 10 руб. Найдите делители числа 80.

8. Нет. Предположите, что в коробке 3 зелёных карандаша и сделайте вывод о количестве карандашей в коробке.

9. Г. Воспользуйтесь тем, что количество одинаковых букетов является общим делителем чисел 24, 42 и 36.

10. 32. Считайте отдельно большие и меньшие конверты.

11. 72. Воспользуйтесь ответом к предыдущему заданию и способом его получения.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Делителем. 2) 29. 3) 8.

Задача 2. 1) Да. 2) 11 или 2. 3) 1 или 2.

Задача 3. 1) 88 руб. 2) Делителем. 3) 87 руб.

Задача 4. Да. 2) Да. 3) Нет.

Задача 5. 1) 496. 2) 5 и 49. 3) 54 и 540.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
Б	Г	Г	В	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 24 г. Воспользуйтесь тем, что число учащихся в классе является делителем, как числа бутербродов, так и числа пирожных.

2. На 7. Воспользуйтесь тем, что число ирисок делится на 8.

3. 28 и 20. Воспользуйтесь тем, что число красных гвоздик делится на 7, а число белых – на 5.

4. 4 кг груш, 20 кг яблок, 7 кг слив. Воспользуйтесь решением задачи 4.

5. 9. Воспользуйтесь решением задачи 5.

4. Деление с остатком

Деление одного натурального числа на другое нацело не всегда возможно. Если, например, 25 конфет нужно разделить между тремя детьми, то каждому достанется по 8 конфет, а одна конфета будет лишней. Эта задача решалась делением числа 25 на 3. Здесь 25 — делимое, 3 — делитель, 8 — неполное частное, 1 — остаток: $25 = 3\cdot 8 + 1$.

Если натуральное число *a* не делится нацело на число *b*, то при делении числа *a* на число *b* получается неполное частное *c* и остаток *r*:

$$a = b\cdot c + r,\ r < b$$

Из этого равенства следует важное правило:

Если из делимого вычесть остаток, то получим произведение неполного частного на делитель, то есть разность делимого и остатка делится нацело как на неполное частное, так и на делитель.

$$a - r = b\cdot c$$

Готовимся к решению задач

1. Найдите делимое, если делитель равен 8, неполное частное равно 7, а остаток равен 3.

А. 56. **Б.** 58. **В.** 59. **Г.** 67.

2. Найдите делитель, если делимое равно 113, неполное частное равно 10, а остаток равен 3.

А. 8. **Б.** 9. **В.** 10. **Г.** 11.

3. Найдите остаток от деления 174 на 4.

А. 0. **Б.** 2. **В.** 4. **Г.** 6.

4. Найдите неполное частное , если делимое равно 217, делитель равен 18.

А. 8. **Б.** 11. **В.** 12. **Г.** 13.

5. В кинозале всего 864 места. В каждом ряду по 36 мест. Сколько рядов в кинозале?

6. В кинозале всего 849 мест, полных рядов 23. В каждом полном ряду по 36 мест. Сколько мест в одном неполном ряду?

7. Известно, что 85 телевизоров и 136 компьютеров поровну распределили между всеми школами района. Сколько школ в районе?

8. На каждом дереве в роще сидит не менее чем по 4 воробья. Всего на деревьях в этой роще находится 95 воробьёв. Может ли количество деревьев в роще равняться 27?

9. Листик бумаги разорвали на 4 части, некоторые из образовавшихся частей разорвали каждую на 4 части. Могло ли число листиков увеличиться на 17?

10. Листик бумаги разорвали на 4 части, некоторые из образовавшихся частей разорвали каждую на 4 части. Могло ли число образовавшихся листиков стать равным 19?

Решение задач

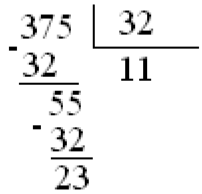
Многие практические задачи сводятся к нахождению неполного частного от деления одного числа на другое.

Задача 1. В кинозале 28 рядов по 32 места в каждом ряду. Все места пронумерованы подряд, начиная с первого ряда. В каком ряду находится место № 375?

Анализируем. Так как в каждом ряду 32 места, то в 2-х рядах $2 \cdot 32 = 64$ места, в 3-х — $3 \cdot 32 = 96$ мест и т. д. Следовательно, числа вида $k \cdot 32$, где k — натуральное число, равны количеству мест в k рядах.

Если число, соответствующее номеру места делится нацело на 32, то частное этого деления равно номеру ряда, в котором находится это место. Если число, соответствующее номеру места, делится на 32 с остатком, то это означает, что рассматриваемое место находится в ряду, номер которого отличается от номера ряда в предыдущем случае.

Решаем. Номер ряда, в котором находится место *N*, равен частному от деления числа *N* на число мест в каждом ряду, если это деление выполняется нацело, и увеличенному на 1 неполному частному от этого деления, если оно выполняется с остатком. Разделим 375 на 32:



Неполное частное равно 11, остаток — 23. Следовательно, $375 = 11 \cdot 32 + 23$. это означает, что при подсчёте места 11 рядов учтены полностью (их 32 в каждом ряду). Но тогда номер искомого ряда равен 12.

Ответ. В 12-м.

1. *В каком ряду находится место № 512?*
2. *В каком ряду находится место № 461?*
3. *С какого места начинается 23 ряд?*
4. *Каков наибольший номер места в 19 ряду?*

В задаче 1 находилось неполное частное и остаток от деления одного числа на другое. Иногда решить задачу помогают те же действия, для нескольких чисел.

Задача 2. Наборы из 122 телевизоров и 190 компьютеров поровну распределили между школами города. При этом остались нераспределёнными 7 телевизоров и 6 компьютеров. Сколько школ в городе?

Анализируем. В данной задаче число распределяемых телевизоров является делимым, число школ — делителем, число телевизоров, полученных каждой школой, неполным частным, число нераспределённых телевизоров — остатком. Разность делимого и остатка делится как на число школ, так и на число компьютеров, полученных каждой школой. Итак, искомое число школ является делителем этой разности. Но искомое число является делителем и разности количества распределённых компьютеров и нераспределённых. Ответом на поставленный вопрос будет общий делитель указанных разностей.

Решаем. Число $122 - 7 = 115$ равно числу распределённых между школами города телевизоров и равно произведению числа школ на число телевизоров, полученных каждой школой. Разность 190 – 6 = 184 равна произведению числа школ на число компьютеров, полученных каждой школой. Искомое количество школ является общим делителем чисел 115 и 184.

Так как 184 = 1·184 = 2·92 = 4·46 = 8·23 и 115 = 5·23, то можно сделать вывод о том, что в городе 23 школы.

Ответ. 23.

1. *Сколько телевизоров и сколько компьютеров получила каждая школа?*

2. *Сколько общих делителей имеют числа 122 и 190?*

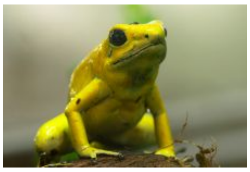
3. *Можно ли было, кроме того, поровну распределить между школами 18 медиа-досок?*

4. *Сколько медиа-досок остались бы нераспределёнными, если бы 30 медиа-досок поровну распределяли между школами?*

Нетрудно заметить справедливость следующего правила.

Если увеличить делитель, оставляя неизменным делимое, то частное или уменьшится, или останется неизменным.

Например, при делении числа 224 на 7 в частном получаем 32, а при делении на 8 — 28. При делении числа 5600 и на 559, и на 560 в частном получаем одно и то же число 10. Для деления нацело сформулированное утверждение вытекает из свойств произведения. Оно остаётся правильным и для деления с остатком.



Задача 3. На каждой кочке в маленьком болотце сидят не меньше, чем по 3 лягушки, а всего лягушек 145. Какому из чисел 24, 36, 55 не может равняться число кочек в этом болотце?

Анализируем. Число всех лягушек в болотце равно сумме их количеств на всех кочках. По условию, на каждой кочке не менее 3-х лягушек. Если примем, что на каждой кочке находится по 3 лягушки, то число всех лягушек будет равно произведению числа кочек на 3. И это число не больше действительного числа лягушек в болотце.

Для нахождения числа кочек в болотце, если на каждой кочке сидит одно и то же число лягушек, нужно общее число лягушек разделить на число лягушек на каждой кочке.

Итак, роль делимого играет число 145 — число лягушек в болотце, число лягушек на каждой кочке может служить делителем, число кочек — оно неизвестно — частным или неполным частным. О делителе нам известно, что он не меньше 3. Следовательно, число кочек не больше частного или неполного частного от деления 145 на 3.

Решаем. Если бы на каждой кочке находилось одно и то же количество лягушек, то для нахождения числа кочек достаточно было бы общее число лягушек разделить на число лягушек на каждой кочке. На каждой кочке не может быть по 3 лягушки, это показывает результат следующего деления:

$$\begin{array}{r|l} 145 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{12} & 48 \\ 25 & \\ -\underline{24} & \\ 1 & \end{array}$$

Отсюда следует, что неполное частное от деления 145 на 3 равно 48, а остаток равен 1. Но по условию, на каждой кочке находится не меньше 3 лягушек, значит, число кочек не больше 48. Из чисел 24, 36, 55 первые два меньше 48, поэтому число кочек может равняться 24, 36. Действительно, $145 = 6 \cdot 24 + 1$, $145 = 4 \cdot 36 + 1$. Эти равенства означают, что на 23 кочках может быть по 6 лягушек, а на одной — 7, или на 35 по 4 лягушки, а на одной — 5. Число 55 больше 48, оно не может равняться числу кочек в болотце.

Ответ. 55.

1. *Может ли на каждой кочке сидеть по 3 лягушки, если всего на болотце 145 лягушек и на каждой кочке сидят не меньше, чем по 3 лягушки, ?*

2. *Может ли число кочек равняться 48?*

3. *На каком числе кочек сидят лягушки, если известно, что на каждой кочке одинаковое число лягушек, не большее 10?*

Часто найти решение задачи помогает просто информация о том, что одно число не делится нацело на другое, или чему может равняться остаток при делении одного числа на другое.

Задача 4. Богдан рвет газету на 8 частей, одну из получившихся частей — еще на 8, и так далее. Сможет ли он разорвать газету на 2012 частей?

Анализируем. Что происходит, когда газету рвут на 8 частей? Была одна газета, станет 8 частей, число частей увеличилось на 8 – 1 = 7 частей. То же самое происходит, когда любую часть газеты рвут на 8 частей. Посмотрим, что происходит с общим числом частей. Была 1 газета, после разрыва её на 8 частей станет 8 частей, если ещё одну часть разорвать на 8 частей, то число частей будет равняться 8 + 7 = 15. После разрыва второй части число частей станет равным 15 + 7 = 22. Итак, после разрыва газеты и её частей на 8 частей число частей будет последовательно равняться 8, 15, 22, 29 и т. д. Что общего у всех этих чисел? Они при делении на 7 дают в остатке 1: $8 = 7 \cdot 1 + 1$, $15 = 7 \cdot 2 + 1$, $22 = 7 \cdot 3 + 1$, $29 = 7 \cdot 4 + 1$ и т. д. Значит, общее число частей обладает тем же свойством: при делении общего числа частей на 7 в остатке от деления должна получаться 1.

Решаем. Если какой-то предмет делится на *n* частей, некоторые из полученных частей делятся на такое же количество меньших частей и т. д, то общее число образовавшихся частей при делении на $n - 1$ дают в остатке 1.

Проверим, обладает ли этим свойством число 2012. Имеем:

$$\begin{array}{r|l} 2012 & 7 \\ \cline{2-2} -14 & 287 \\ \cline{1-1} 61 & \\ -56 & \\ \cline{1-1} 52 & \\ -49 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Число 2012 при делении на 7 даёт в остатке не 1, а 3.

Поэтому число обрывков не может равняться 2012.

Ответ. Не сможет.

1. *Может ли число частей равняться 344?*

2. *Смог бы Богдан разорвать газету на 2012 частей, если бы разрывал газету и её части на 7 частей?*

3. *На какое наименьшее число частей нужно разрывать газету и её части, чтобы получить 421 часть?*

Число 35 можно представить в виде: $35 = 10 \cdot 3 + 5$. Здесь 3 — цифра десятков, 5 — цифра единиц. Но, воспользовавшись тем, что было изложено выше, можно сказать иначе: 3 — это неполное частное от деления числа 35 на 10, 5 — остаток от этого деления. Точно также любое двузначное число $\overline{ab}$ (черта поставлена для того, чтобы не путать эту запись с произведением a на b) можно представить в виде: $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$. Здесь a — цифра десятков, b — цифра единиц. Или иначе: a — неполное частное от деления числа $\overline{ab}$ на 10, b — остаток от этого деления. Такое представление двузначного числа используется при решении некоторых задач.

Задача 5. Найдите наименьшее двузначное число, которое при делении на сумму своих цифр даёт неполное частное 6 и остаток 2, а при делении на произведение своих цифр — неполное частное 5 и остаток — 2.

Анализируем. Для решения задачи нужно предположить, что существует двузначное число, удовлетворяющее условиям задания и воспользоваться тем, что разность делимого и остатка делится как на делитель, так и на неполное частное. После получения результата необходима проверка.

Решаем. Предположим, что существует двузначное число, которое при делении на сумму своих цифр даёт неполное частное 6 и остаток 2, а при делении на произведение своих цифр — неполное частное 5 и остаток — 2. Замечаем, что искомое двузначное число при делении на сумму своих цифр и на их произведение даёт один и тот же остаток 2. Если число 2 вычесть из этого двузначного числа, то получим число, равное произведению суммы цифр на 6 и произведению произведения цифр на 5. Поэтому указанная разность делится как на 5, так и на 6. Наименьшее число, которое делится и на 5, и на 6, — это 30. Прибавив к нему остаток 2, получим: 30 + 2 = 32. Проверка показывает, что полученное число удовлетворяет требованиям задания.

Ответ. 32.

1. *Чему равны сумма и произведение цифр найденного числа?*

2. *Существуют ли другие двузначные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают в частном 6 и в остатке 2, а при делении на произведение своих цифр — в частном 5 и в остатке — 2?*

3. *Чему равно наименьшее трёхзначное число, которое при делении на* *сумму своих цифр даёт неполное частное 6 и остаток 2, а при делении на произведение своих цифр — неполное частное 5 и остаток — 2?*

Проверь себя

1. В прямоугольном кинозале количество рядов в 36 раз меньше общего количества мест и втрое меньше количества мест в каждом ряду. На сколько количество мест в ряду превосходит количество рядов в зале?

А. На 18. **Б.** На 12. **В.** На 24. **Г.** На 48.

2. В детском велосипеде ведущая шестерня, скреплённая с педалями, имеет 44 зубца, а ведомая шестерня, скреплённая с задним колесом велосипеда, имеет 20 зубцов. Сколько оборотов сделает ведомая шестерня за то время, пока ведущая шестерня сделает наименьшее число оборотов для того, чтобы шестерни заняли первоначальное положение?

А. 5. **Б.** 4. **В.** 10. **Г.** 11.

3. В роще на каждом дереве сидит не менее 4 ласточек. Всего 213 ласточек. Какому числу из приведенных может равняться число деревьев в роще?

А. 53. **Б.** 54. **В.** 55. **Г.** 56.

4. Было 6 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 6 частей, потом некоторые из получившихся частей снова разрезали на 6 частей и т. д. Какое из следующих количеств частей могло в результате получиться?

А. 2011. **Б.** 2012. **В.** 2013. **Г.** 2014.

5. Сколько существует двузначных чисел, которые при делении на 12 дают в остатке 5?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 8. **Г.** 9.

Реши сам

1. Юра живёт в квартире № 67 пятиэтажного дома. В каждом подъезде на каждом этаже 3 квартиры: в порядке возрастания номеров одна слева, одна посередине, одна справа.

а) В каком подъезде живёт Юра?

б) На каком этаже он живёт?

в) Где расположена его квартира с слева, посередине, справа?

2. Фермер привёз на рынок огурцы. Когда он стал считать их десятками, то не хватало двух огурцов до полного числа десятков. Когда он стал считать огурцы дюжинами, то оставалось 8 огурцов. Сколько огурцов привёз фермер, если их было больше 300, но меньше 400?

3. В каждом классе школы не более 10 мальчиков. А всего в школе 227 учеников. Какое наименьшее число классов может быть в этой школе?

4. Взяли 6 больших листов бумаги и часть из них разрезали на 7 кусков каждый. Некоторые из этих кусков снова разрезали на 7 кусков и так сделали несколько раз. Может ли в результате получиться 67 кусков бумаги? А 72 куска?

5. Найдите наименьшее двузначное число, которое при делении на сумму своих цифр даёт в частном 8 и в остатке 1, а при делении на произведение своих цифр — в частном 10 и в остатке — 1.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Воспользуйтесь тем , что делимое равно сумме произведения неполного частного на делитель и остатка.

2. Г. Воспользуйтесь тем , что если из делимого вычесть остаток, то получим произведение неполного частного на делитель,

3. Б. Воспользуйтесь правилом деления «уголком».

4. В. Воспользуйтесь правилом деления «уголком».

5. 24. Воспользуйтесь тем, что количество мест в кинозале равно произведению количества рядов на количество мест в ряду.

6. 21. Искомое число равно остатку от деления количества мест в кинозале на количество полных рядов.

7. 17. Воспользуйтесь тем, что число школ является общим делителем чисел 85 и 136.

8. Нет. Предположите, что на каждом дереве сидит 4 воробья и сделайте вывод о количестве воробьев на деревьях.

9. Нет. Проанализируйте изменение количества частей бумаги после разрывания одной части на 4 части.

10. Да. Попробуйте найти закономерность изменения количества частей бумаги после разрывания каждой из нескольких частей на 4 части.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) В 16-м. 2) В 15-м. 3) С 705-го. 4) 608.

Задача 2. 1) 5 телевизоров и 8 компьютеров. 2) 2. 3) Да. 4) 7.

Задача 3. 1) Нет. 2) Да. 3) На 29.

Задача 4. 1) Да. 2) Нет. 3) На 4.

Задача 5. 1) 5 и 6. 2) Да. 3) 122.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
В	Г	А	А	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. а) В 5-м. Подсчитайте число квартир в каждом подъезде. **б) На 3-м.** Найдите общее число квартир в подъездах, предшествующих Юриному подъезду. **в) Слева.** Обратите внимание на то, что нумерация квартир на этаже начинается слева.

2. 368. Найдите число, которое при делении на 10 и при делении на 12 даёт один и тот же остаток — 8.

3. 22. Воспользуйтесь решением задачи 3.

4. Нет; Да. Обратите внимание на то, что полученное число кусков бумаги должно делиться на 6.

5. 41. Используйте тот факт, что разность между искомым числом и общим остатком от деления 1 делится и на 8 и на 10.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Задания для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Основное задание**	**Дополнительное Задание**
«зачтено»	Решено не менее	5 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	9 задач	7 задач
«отлично»	Решено не менее	13 задач	11 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа укажите букву «Д».

1. В классе 35 учеников. Каждый из них дружит с одинаковым количеством одноклассников. Это число может равняться …

А. 7. **Б.** 8. **В.** 9. **Г.** 15.

2. Требуется 34 ореха разложить на три кучки так, чтобы в каждой было чётное количество орехов. Какое наибольшее число орехов может оказаться в одной кучке?

А. 30. **Б.** 24. **В.** 12. **Г.** Такое разложение невозможно.

3. Семь корзин расположили вдоль дороги. Требуется разложить в них 42 арбуза так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось друг от друга на 1 и во всех корзинах было различное количество арбузов. Какое наибольшее количество арбузов в корзине?

А. 8. **Б.** 9. **В.** 10. **Г.** 11.

4. Стороны прямоугольника выражаются целыми числами сантиметров. Его периметр не может равняться …

А. 13 см. **Б.** 12 см. **В.** 14 см. **Г.** 10 см.

5. В пятых классах 36 мальчиков и 48 девочек. Требуется создать из них группы учащихся так, чтобы во всех группах было по одинаковому количеству мальчиков и по одинаковому числу девочек. Каким может быть наибольшее количество таких групп?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 12. **Г.** 14.

6. Сколько существует натуральных чисел, в результате умножения которых на 17 произведение будет больше 560, но меньше 585?

А. Ни одного. **Б.** Одно. **В.** Два. **Г.** Три.

7. Все школы района послали на три районные предметные олимпиады (по математике, информатике и физике), проходившие в один день, по 5 школьников. На олимпиаде по математике было больше всего школьников — 23, на олимпиаде по физике — меньше всего — 14. Сколько школ в районе?

А. 11. **Б.** 10. **В.** 9. **Г.** Определить невозможно.

8. Дети собирали ягоды. Девочек и ребят было поровну. Каждый собрал целое количество килограммов ягод. Когда они выстроились после сбора парами, девочка с мальчиком, то выяснилось, что у каждого мальчика ягод или втрое больше, или втрое меньше, чем у девочки из его пары. Какое количество килограммов ягод из приведенных не могли дети собрать все вместе?

А. 20. **Б.** 24. **В.** 26. **Г.** 28.

9. Груз в 250 т не удалось перевезти по железной дороге в 6 вагонах одинаковой грузоподъемности, но удалось — в 7. Какой из приведенных масс может равняться грузоподъёмность одного вагона?

А. 35 т. **Б.** 40 т. **В.** 45 т. **Г.** 50 т.

10. Коля и Петя купили одинаковые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж купюрами достоинством 3 зеда (зед — условная денежная единица), а Коля — достоинством 5 зедов, а всего они дали в кассу меньше 10 купюр, и не требовалось давать им сдачу?

А. 9 зедов. **Б.** 12 зедов. **В.** 15 зедов. **Г.** 30 зедов.

11. В кошельке лежит 21 монета: полтинники, гривенники и пятаки. Пятаков в 10 раз больше, чем полтинников. На сколько больше в кошельке гривенников, чем полтинников?

А. На 9. **Б.** На 8. **В.** На 10. **Г.** На 1.

12. Отец и сын решили перемерить шагами расстояние между двумя деревьями, пройдя одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца — 70 см, сына — 56 см. Чему равно расстояние между деревьями, если после начала движения 10-й раз их следы совпали у второго дерева?

А. 14 м. **Б.** 21 м. **В.** 28 м. **Г.** 35 м.

13. К продавцу в отделе канцелярских товаров подошёл покупатель и попросил дать ему тонкие тетради в клетку по 10 зедов за одну тетрадь, в 10 раз меньше общих тетрадей по цене 48 зедов за штуку и тонких тетрадей в линию по 12 зедов. за одну тетрадь на 3 штуки меньше, чем тонких тетрадей в клетку (зед — условная денежная единица). Какой из перечисленных ниже сумм не может равняться стоимость покупки?

А. 232 зеда. **Б.** 448 зедов. **В.** 500 зедов. **Г.** 768 зедов.

14. У Любы 5 больших шкатулок. В некоторых из них есть еще по 5 меньших шкатулок, а в некоторых из меньших — по 5 совсем маленьких шкатулочек. Всего шкатулок, содержащих меньшие, — 8. Сколько всего у Любы шкатулок?

А. 45. **Б.** 40. **В.** 42. **Г.** 44.

15. Сколькими способами можно разменять 100 зедов двухзедовыми и пятизедовыми монетами так, чтобы обязательно были использованы хотя бы одна двухзедовая и хотя бы одна пятизедовая монеты (зед — условная денежная единица)?

А. 9. **Б.** 10. **В.** 11. **Г.** Определить невозможно.

16. В бутылку помещается 400 г подсолнечного масла. Какое наименьшее количество таких бутылок понадобится, чтобы разлить 3 кг масла?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 8. **Г.** 9.

17. На международной математической олимпиаде школьников каждая команда получила не менее 5 призов. В олимпиаде приняли участие 183 школьника. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в олимпиаде?

А. 35. **Б.** 36. **В.** 37. **Г.** Определить невозможно.

18. Лист картона разрезали на 4 части, одну из получившихся частей — еще на 4, и так далее. Какое из приведенных количеств кусков могло при этом получиться?

А. 35. **Б.** 33. **В.** 32. **Г.** 31.

19. Найдите сумму цифр наименьшего трёхзначного числа, которое при делении на сумму своих цифр даёт неполное частное 44 и остаток 1, а при делении на произведение своих цифр — неполное частное 55 и остаток 1.

А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 5.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. В конце урока учащиеся сдали тетради для контрольных работ и тетради для упражнений, всего 53 тетради. Все ли учащиеся сдали обе тетради?

2. А у нас в классе 25 человек, и каждый дружит ровно с семью одноклассниками, – сказал Незнайка!

– Не может быть этого, — ответил Знайка. Кто из них прав?

3. Можно ли выбрать из таблицы пять чисел, у которых сумма равна 20?

1	1	1
3	3	3
5	5	5
7	7	7

4. В одной кучке спичек на 1 больше, чем в другой. Можно ли, используя все спички обеих кучек, не ломая спичек, выложить из них контур прямоугольника?

5. На соревнованиях по настольному теннису участвовали равные по составу команды, всего 145 мальчиков и 87 девочек. Во всех командах было одинаковое количество мальчиков и одинаковое количество девочек.

а) Сколько команд участвовало в соревнованиях?

б) Сколько мальчиков и сколько девочек было в каждой команде?

6. Во всех вагонах пассажирского поезда поровну разместили 737 туристов. Сколько было туристов в каждом вагоне?

7. Все члены бригады производят изделия трёх видов. Каждый член бригады изготавливает по 6 изделий. Больше всего за смену изготавливается изделий первого вида — 37, меньше всего — второго вида, 32. Сколько рабочих в бригаде?

8. Оксана приобрела 3 пакета кефира, пачку масла за 126 зедов, несколько булочек по 15 зедов, 6 пачек с коробками спичек по 1 зеду за коробку (зед — условная денежная единица). Пакет кефира стоит целое количество зедов. Может ли её покупка стоить 262 зеда?

9. В шахматном турнире каждый участник играл с каждым по одной партии. У Пешкина в этом турнире побед было вдвое больше, чем поражений, ничьих у него не было. Могло ли в этом турнире участвовать 29 спортсменов?

10. Какое наибольшее количество одинаковых комплектов можно составить из ёлочных игрушек, если имеется: 8 зайцев, 24 лисицы, 16 морковок и 48 яблок, если во всех комплектах по одинаковому количеству зайцев, одинаковому количеству лисиц, одинаковому количеству морковок, одинаковому количеству яблок? По сколько зайцев, лисиц, морковок и яблок будет в каждом комплекте?

11. В коробке лежит 19 карандашей: красных, простых, зеленых. Красных в 9 раз меньше, чем простых. На сколько больше в коробке зеленых карандашей, чем красных?

12. Длина комнаты 575 см, а ширина 375 см. Пол в комнате нужно выложить декоративными плитками в форме квадрата, не разрезая плиток. Сколько плиток наибольшего возможного размера понадобится?

13. На почте, к окошку, где оформляется подписка на периодические издания, подошёл человек, представил чек на 30 000 зедов (зед — условная денежная единица) и попросил оформить ему и его коллегам подписку на несколько экземпляров «Литературной газеты» (стоимость подписки на год — 1000 зедов), в 5 раз меньше экземпляров «Комсомольской правды» (стоимость подписки на год — 2000 зедов) и на оставшиеся деньги — на журнал «Вокруг света» (стоимость подписки на год — 1500 зедов). На сколько экземпляров изданий была оформлена подписка?

14. У Пети есть 5 игрушечных грузовиков. В некоторых из них находится по 5 легковых автомобилей с открытым верхом, а в некоторых из них – по 5 маленьких машинок. Всего в 7 машинах находятся меньшие. Сколько всего автомобилей у Пети?

15. Спортсменов построили в колонну по 6 человек, а затем перестроили, поставив по 4 человека. Сколько всего спортсменов, если их больше 90, но меньше 100?

16. Имелось 122 яблока. Их поровну распределяли между детьми в группе детского сада. При этом 7 яблок остались нераспределёнными, их не хватило для того, чтобы каждый получил ещё по яблоку. Между сколькими детьми распределяли яблоки?

17. На областной математической олимпиаде участвовали школьники не менее, чем по 32 школьника из каждого региона, всего 287 школьников. Какое наибольшее количество регионов могло быть представлено на олимпиаде?

18. Учащихся школы разделили на 9 групп по их интересам для организации внеклассной работы. Некоторые из этих групп разделили на 9 групп для выбора места проведения внеклассной работы. Ряд образовавшихся групп снова разделили на 9 групп для выбора руководителя. Могло ли образоваться в результате этих действий 105 групп?

19. Двузначное число при делении на разность большей и меньшей цифры даёт неполное частное 12 и остаток 1, а при делении на частное от деления большей цифры на меньшую — неполное частное 10 и остаток 1. Найдите это число.

Указания к задачам основного задания

1. Установите чётность числа тетрадей, которые должны были сдать школьники.

2. Воспользуйтесь тем, что если А дружит с Б, то и Б дружит с А.

3. Установите чётность суммы любых пяти чисел, взятых из таблицы.

4. Подумайте, какую чётность должно иметь количество спичек, из которых можно сложить прямоугольник.

5. Найдите число, на которое делятся оба данных числа.

6. Воспользуйтесь тем, что количество пассажиров в поезде равно произведению количества пассажиров в одном вагоне на количество вагонов.

7. Воспользуйтесь тем, что общее количество изделий делится на 6.

8. Подумайте, на какое число должна делиться стоимость покупки в рублях.

9. Найдите, на какое число делится число партий, сыгранных каждым шахматистом.

10. Определите число, на которое делится количество каждого вида ёлочных игрушек.

11. Найдите сначала, сколько красных карандашей может быть в коробке.

12. Найдите наибольшее число, на которое делятся длина и ширина комнаты в сантиметрах.

13. Воспользуйтесь решением задачи 4 из блока «Делители и кратные».

14. Воспользуйтесь решением задачи 5 из блока «Делители и кратные».

15. Воспользуйтесь тем, что количество спортсменов делится и на 4, и на 6.

16. Воспользуйтесь тем, что разность между делимым и остатком делится как на делитель, так и на частное.

17. Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Деление с остатком».

18. Воспользуйтесь решением задачи 4 из блока «Деление с остатком».

19. Обратите внимание на то, что искомое двузначное число при делении на разность цифр и на частное от деления своих цифр даёт одинаковые остатки.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. У семи ребят по два карандаша: красному и синему. Могут ли они обменяться так, чтобы у каждого было по два карандаша одного цвета?

2. Можно ли из книжки в 400 страниц выбрать 25 листов подряд так, чтобы сумма номеров страниц на этих листах равнялась 10 000?

3. Вдоль дороги расположили 7 ящиков. В них разложили 70 арбузов так, что количество арбузов в любых двух соседних ящиках отличалось друг от друга на один арбуз и во всех ящиках было различное количество арбузов. Какое наименьшее количество арбузов в ящике?

4. Имеются два набора одинаковых спичек. Количества спичек в этих наборах имеют одинаковую чётность. Всегда ли их можно разложить в виде квадрата?

5. В соревнованиях принимает участие 90 детей. У каждого на груди табличка с номером от 10 до 99 включительно. Фирма Пинг-Понг вручила призы владельцам тех номеров, которые делятся на каждую цифру в их записи. Сколько человек получили призы?

6. На складе есть ножи и вилки. Общее количество тех и других больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки считать десятками или дюжинами, то в обоих случаях получим целое число десятков и целое число дюжин. Сколько ножей и сколько вилок было на складе, если ножей было в пять раз меньше, чем вилок?

7. Четыре друга участвовали в олимпиаде. Витя решил больше всех задач — восемь, а Петя меньше всех — пять задач. Каждая задача олимпиады была решена ровно тремя из друзей. Сколько задач было на олимпиаде?

8. Дети собирали орехи. Когда они выстроились после сбора тройками, то выяснилось, что в каждой тройке количества собранных орехов равны трём последовательным натуральным числам. Могли ли дети собрать все вместе 853 ореха?

9. Количество яблок в корзине не превышает 100. Из можно распределить поровну между 2, 3, 5 детьми, но нельзя распределить поровну между 4 детьми. Сколько яблок может быть в корзине?

10. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно сделать из 320 орехов, 240 конфет, 200 пряников? Сколько конфет, орехов и пряников будет в каждом пакете?

11. Город расположен на 10 островах. Эти острова и материк соединены мостами. В путеводителе по городу было напечатано, что с 5 островов ведут по одному мосту на материк, на 4 островах берут начало 4 моста, на 3 островах — 3 моста и на одном острове — 1 мост. Докажите, что в этих сведениях содержится ошибка.

12. Маленькая коробка вмещает 24 карандаша, а большая 30 карандашей. Какое наименьшее количество карандашей может быть разложено как в маленькие коробки, так и в большие?

13. К продавцу в отделе канцелярских товаров подошёл человек, подал 500 зедов (зед — условная денежная единица) и попросил дать ему тонкие тетради в клетку по 10 зедов за одну тетрадь, в 10 раз меньше общих тетрадей по цене 48 зедов за штуку и на оставшиеся деньги — тонкие тетради в линию по 12 зедов за одну тетрадь. Всего покупатель получил 39 тетрадей. Сколько тетрадей каждого вида приобрёл покупатель?

14. У Любы 5 больших шкатулок. В некоторых из них есть еще по 5 меньших шкатулок, а в некоторых из меньших — по 5 совсем маленьких шкатулочек. Всего у Любы 45 шкатулок. Можно ли определить, сколько шкатулок и содержат меньшие, и содержатся в больших?

---

15. Яблоки, имеющиеся в корзине, делят поровну между семью детьми. Оказалось, что количество яблок, полученных каждым ребёнком, равнялось количеству яблок, остававшихся в корзине. Сколько яблок могло быть в корзине первоначально, если из оставшихся яблок нельзя было добавить каждому хотя бы по одному яблоку?

16. Родители Богдана купили ему тетрадь из 48 листов и пронумеровали их с двух сторон подряд числами от 1 до 96. Богдан вырвал несколько последних листов и сложил все числа, написанные на них. В качестве суммы он получил число 2445. Сколько листов вырвал Богдан из книги?

17. На тестировании по математике меньше 120 баллов набрали 9 120 абитуриентов, выпускников ряда школ, причём среди них не более 7 учеников из каждой школы. Укажите наименьшее количество школ, которые могли закончить эти учащиеся.

18. Учащихся школы разделили на несколько (меньше 10) групп по их интересам для организации спортивно-массовой работы. Некоторые из этих групп разделили на такое же количество групп для выбора места занятий секций. Ряд образовавшихся групп снова разделили на такое же количество групп для выбора тренера. В результате этих действий образовалось 77 групп. На сколько групп делили каждый раз учащихся?

19. Даны несколько натуральных чисел. Каждое из них разделили на сумму всех данных чисел. Чему равно частное от деления суммы всех остатков на сумму всех данных чисел?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Установите чётность количества карандашей каждого цвета, которая должна быть у всех ребят после обмена.

2. Воспользуйтесь тем, что номера страниц на листе являются соседними натуральными числами.

3. Представьте число 70 в виде суммы 7 последовательных натуральных чисел.

4. Обратите внимание на то, что в квадрате все стороны равны.

5. Обратите внимание на то, что в каждом десятке двузначных чисел есть число, составленное из одинаковых цифр.

6. Приняв количество ножей за 1 часть, можно найти, какие значения может принимать общее количество ножей и вилок на складе. Из этих значений нужно будет выбрать те, которые делятся на 10 и 12 (дюжина — это 12).

7. Подумайте, на какое число делится общее количество задач на олимпиаде.

8. Подумайте, на какое число обязательно делится сумма трёх последовательных натуральных чисел.

9. Установите, какие натуральные числа первой сотни делятся на 2, 3, 5, но не делятся на 4.

10. Найдите наибольшее число, на которое делятся данные в условии числа.

11. Воспользуйтесь тем, что каждый мост соединяет два острова или остров с материком.

12. Найдите наименьшее число, которое делится и на 24, и на 30.

13. Обозначьте какой-нибудь буквой количество заказанных общих тетрадей. Выразите через него количества тонких тетрадей в клетку и тонких тетрадей в линию, стоимости каждого вида тетрадей и их общую стоимость. Составьте и решите уравнение.

14. Воспользуйтесь тем, что для нахождения общего количества шкатулок достаточно увеличенное на 1 количество шкатулок, содержащих меньшие, умножить на 5.

15. Воспользуйтесь связью между делимым, делителем, неполным частным и остатком.

16. Воспользуйтесь тем, что сумма номеров страниц на вырванных листах делится на количество вырванных листов.

17. Воспользуйтесь тем, что если делитель не увеличивается, то частное не уменьшается.

18. Воспользуйтесь тем, что если группу делят на n меньших групп, то количество групп увеличивается на $n - 1$.

19. Обратите внимание на то, что каждое из данных чисел меньше суммы всех данных чисел.

Задачи для исследования

Ниже приведены задания, которые можно использовать для проведения маленьких исследований. В них поставлена цель, не всегда чётко, и нет никаких ограничений на выбор средств. Вы можете самостоятельно планировать исследование, меняя его цель, основные задачи, средства.

1. Арбузы раскладывают в корзины так, что в каждых двух соседних корзинах количества арбузов отличаются друг от друга на 1. Исследуйте, сколько корзин для этого понадобится. Рассмотрите два способа расположения корзин: по кругу и по прямой.

2. В комнате располагается некоторое количество больших ящиков. В нескольких из них находится по такому же количеству меньших ящиков, а в нескольких из меньших располагается по такому же количеству совсем маленьких ящиков. Исследуйте, как зависит общее количество ящиков в комнате от числа больших ящиков. От чего ещё зависит общее количество ящиков в комнате?

3. Имеется несколько экземпляров газеты. Некоторые из них разрезали на количество частей, равное первоначальному количеству экземпляров. Некоторые из полученных частей разрезали на такое же количество частей и т. д. Исследуйте зависимость общего количества частей от первоначального количества экземпляров и от количества частей, на которые разрезали некоторые экземпляры газеты.

4. Исследуйте, сколько существует различных прямоугольников, длины сторон которых выражаются натуральными числами, а площадь численно

а) равна периметру;

б) вдвое больше периметра.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Делимость натуральных чисел

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 5-6 классов

Учебное пособие