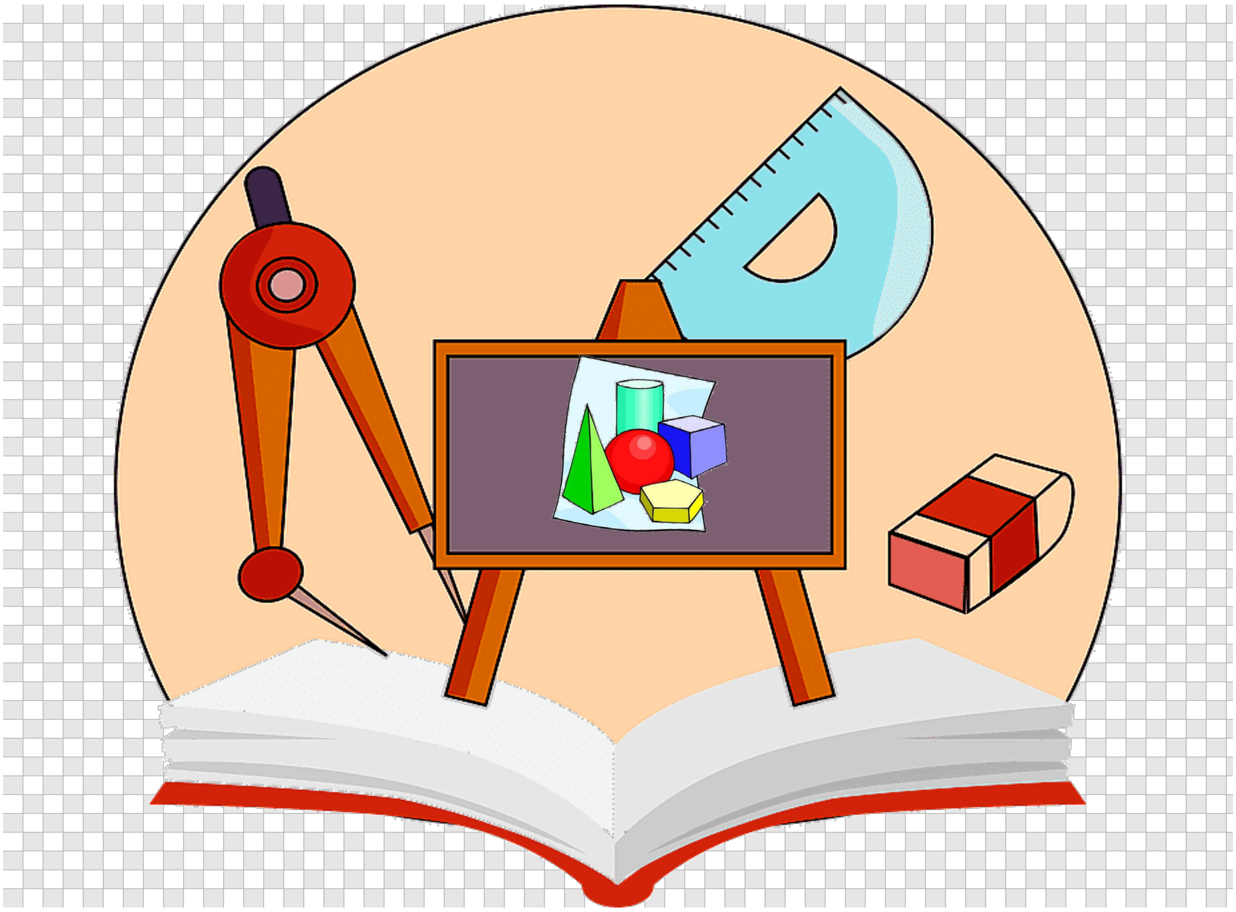
Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Бродский Я. С., Павлов А. Л.

Наглядная геометрия



Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 5-6 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Наглядная геометрия. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 5 – 6 классов. — 51 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 5-6 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, совершенствование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, а также задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 5-6 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено геометрии. Этот раздел математики Вы начнёте изучать систематически в 7 классе. Но формирование геометрических понятий и изучение их свойств началось ещё в начальной школе. Геометрия помогает человеку ориентироваться в окружающем пространстве. Поэтому развитие геометрической интуиции нужно всем.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и нахождения решений предложенных

задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом блоке.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Они предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы их решения.

Контрольное задание состоит из:

- **контрольного теста**, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- **основного задания**, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- **дополнительного задания**, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

В контрольном задании (контрольном тесте, основном и дополнительном заданиях) задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком .

В конце приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, используемых в приведенных решениях типовых задач, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение

каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что для них не приводятся ответы, из которых нужно выбрать правильный.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала пособия, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Наглядная геометрия

1. Геометрические фигуры

Вы уже знакомы со многими геометрическими фигурами. Самые простые из них (отрезок, угол, квадрат, прямоугольник, круг, куб и др.) вы различали ещё в начальной школе.

Фигуры бывают плоские (прямоугольник, круг и др.) и пространственные (куб, шар и др.). Мы будем, в основном, заниматься плоскими фигурами — фигурами, лежащими в плоскости. Их можно изобразить без искажения на листе бумаги.

Изображение сложной фигуры можно получить, размазав на листе бумаги капельку чернил, пасты или краски (сделать кляксу). Сложными фигурами человеку приходится пользоваться не так часто, как простыми. Чаще всего мы имеем дело с предметами, имеющими форму треугольника (рис. 1), четырёхугольника (рис. 2), иногда пятиугольника (рис. 3) и даже шестиугольника (рис. 4).

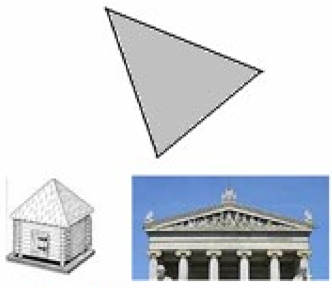


Рис. 1

Рис. 2

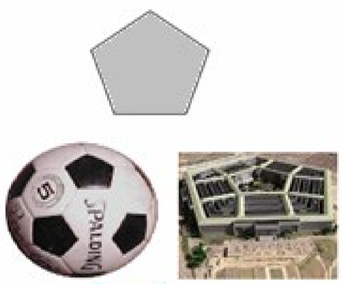


Рис. 3

Рис. 4

В названиях этих фигур указано количество углов, ограничивающих фигуру.

Потренируемся вначале в различении простых фигур.

1. Сколько отрезков изображено на рис. 5?

2. Сколько углов изображено на рис. 6?

3. Сколько прямоугольников изображено на рис. 7?

Рис. 5

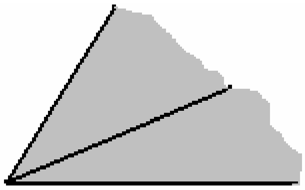


Рис. 6

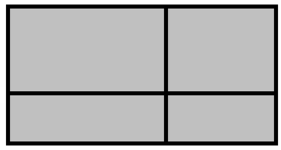


Рис. 7

Если на первый и второй вопросы вы ответили — 3, а на третий — 9, то вы правильно понимаете их смысл. Нужно пользуясь выделенными точками, лучами, отрезками, составить всевозможные варианты фигур указанного вида. Так, на рис. 7 можно выделить четыре маленьких прямоугольника (рис. 8), четыре прямоугольника, составленные из пар перечисленных (рис. 9), и один большой прямоугольник, состоящий из четырёх маленьких (рис. 10).

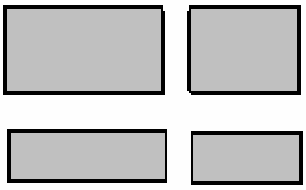


Рис. 8

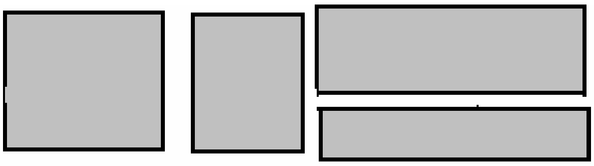


Рис. 9

Рис. 10

Готовимся к решению задач

1. Сколько треугольников можно построить с вершинами в точках, изображённых на рисунке: 1) 1; 2) 2; 3) 3?

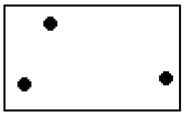


Рис. 1

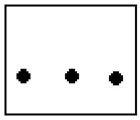


Рис. 2

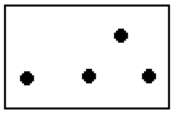
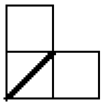


Рис. 3

2. Уголок, составленный из трёх квадратов, разрезан на 2 части (см. рис.). Равны ли эти части?

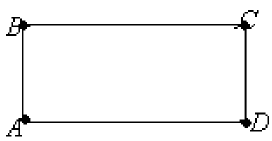


3. Сколько прямых можно провести через пары вершин:

1) треугольника; 2) прямоугольника?

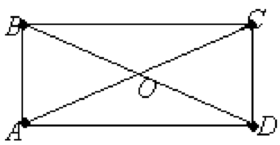
4. Сколько прямых можно провести через концы и середину диагонали прямоугольника?

5. Сколько треугольников можно построить с вершинами в точках A, B, C, D, изображённых на рисунке?



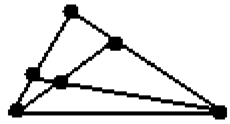
А. 4. **Б**. 5. **В**. 6. **Г**. 8.

6. Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник. Сколько пар равных треугольников изображено на рисунке?



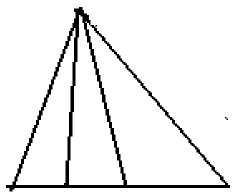
А. 4. **Б**. 5. **В**. 6. **Г**. 8.

7. Сколько отрезков с отмеченными концами изображено на рисунке?



А. 7. **Б**. 9. **В**. 13. **Г.** 15.

8. Сколько треугольников на рисунке?



А. 3. **Б**. 4. **В**. 5. **Г.** 6.

Решение задач

Хорошим способом усовершенствовать умение видеть геометрические фигуры являются задачи такого типа.

Задача 1. В треугольнике отмечены вершины и, кроме того, по одной точке на двух его сторонах (см. рис. 11). Какое наибольшее количество треугольников с вершинами в отмеченных точках можно построить?

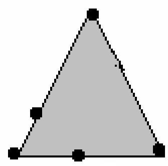


Рис. 11

Анализируем. Треугольник определяется тремя точками. Но эти точки не должны лежать на одной прямой.

Решение задачи сводится к подсчёту количества троек точек, не лежащих на одной прямой, которые можно выбрать из выделенных.

Можно занумеровать выделенные точки, записать все такие тройки и подсчитать их количество.

Важно только не ошибиться, записать все тройки чисел. Для этого нужно выбрать какую-нибудь стратегию перебора. Например, пересчитывать по количеству в тройках точек, лежащих внутри сторон треугольника.

Решаем. Занумеруем выделенные точки как на рис. 12.

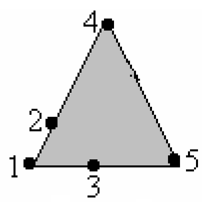


Рис. 12

Треугольников, у которых двумя вершинами являются точки 2 и 3, всего три: 123, 423, 523.

Треугольников, у которых только одна вершина является или точкой 2 или точкой 3, всего четыре: 245, 251, 314, 345.

Треугольников, у которых ни одна из вершин не совпадает с точками 2 или 3, всего один: 145.

Следовательно, треугольников с вершинами в выделенных точках можно построить восемь (3 + 4 + 1 = 8).

Ответ. 8.

1. *Сколько троек точек, выбранных из выделенных на рис. 11, не определяют треугольник*

2. *Сколько всего существует троек точек, выбранных из выделенных на рис. 11?*

3. *Следует ли из ответов на задания 1 и 2 решение задачи?*

Полезно также уметь различать равные фигуры. Например, вершины квадрата на рис. 13 определяют четыре треугольника (рис. 14).

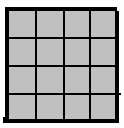


Рис. 13

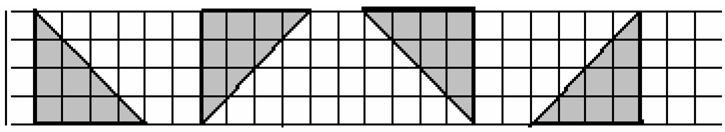


Рис. 14

Эти треугольники равны — каждый из них можно совместить с любым другим, передвигая и поворачивая его.

Две фигуры называются равными, если одну можно наложить на другую так, что они совпадут.

При этом фигуры можно не только передвигать и поворачивать, но и ***переворачивать!***

Задача 2. Сколько попарно неравных треугольников можно построить с вершинами в точках, изображённых на рис. 15?

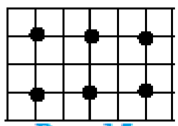


Рис. 15

Анализируем. Как и при решении задачи 1, нам нужно перебрать все тройки точек, выбранных из отмеченных и не лежащих на одной прямой. Отличие состоит в том, что нужно не пересчитать их все, а выяснить, сколько из них определяют неравные треугольники. Учитывая расположение точек, целесообразно воспользоваться приведенным примером с квадратом на рис. 13. И, конечно, же нужно выбрать стратегию просмотра всех возможных вариантов.

Решаем. Занумеруем данные точки, как на рис. 16.

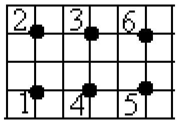


Рис. 16

Точки 1, 2, 3, 4 являются вершинами квадрата. Они определяют четыре равных треугольника (рис. 17 а).

Точки 3, 4, 5, 6 являются вершинами квадрата, равного предыдущему. Поэтому треугольников, не равных указанному на рис. 17 а, они не определяют.

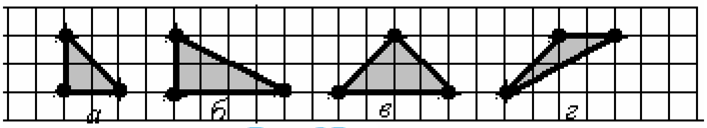


Рис. 17

Осталось рассмотреть треугольники, у которых две вершины выбраны из вершин одного квадрата, а третья является вершиной другого, отличной от вершин первого квадрата.

Такими треугольниками являются, например, треугольники с вершинами: 1, 2, 5; 1, 3, 5; 1, 3, 6 (рис. 17 б – г).

Любой треугольник с вершинами в точках на рис. 15 будет равен одному из треугольников, изображённых на рис. 17. Если его вершины являются вершинами одного из указанных квадратов, то он равен треугольнику на рис. 17 *а*. Если его вершины не являются вершинами квадрата и двумя его вершинами являются или 1 и 2, или 5 и 6, то он равен треугольнику на рис. 17 *б*. Если его две вершины являются противоположными вершинами одного из квадратов (2 и 4,1 и 3,3 и 5,4 и 6), то он равен треугольнику или на рис.17*в*, или на рис.17 *г*.

Ответ. 4.

1. *Сколько треугольников, изображённых на: а) рис. 17а; б) 17б; в) 17в; г)17г, определяют точки на рис. 16?*

2. *Равны ли треугольники с вершинами 2, 3, 5 и 1, 4, 6?*

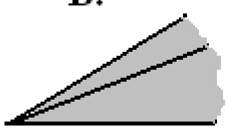
3. *Сколько попарно неравных прямоугольников можно построить с вершинами в точках, изображённых на рис. 15?*

Проверь себя

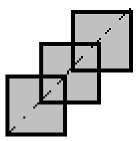
1. На каком из рисунков изображено больше всего фигур одного вида?

А.

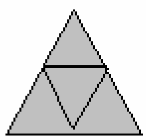
Б.



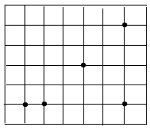
В.



Г.

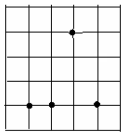


2. Сколько различных прямых можно провести через точки, отмеченные на рисунке?



А. 10. **Б.** 8. **В.** 6. **Г.** 5.

3. Сколько треугольников определяют точки, отмеченные на рисунке?

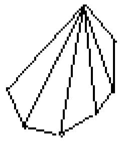


А. 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** Другой ответ.

4. Сколько различных троек точек можно выбрать из пяти точек?

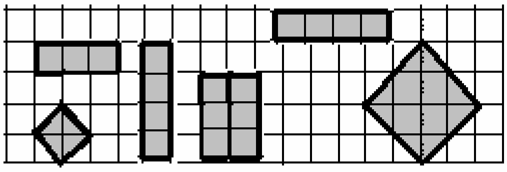
А. 5. **Б.** 6. **В.** 8. **Г.** 10

5. Сколько четырёхугольников изображено на рисунке?



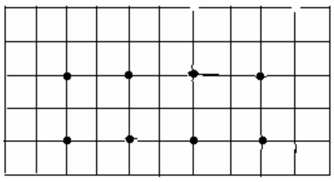
А. 3. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 6.

6. Сколько попарно неравных прямоугольников изображено на рисунке?



А. 6. **Б.** 5. **В.** 4. **Г.** 3.

7. Какое наибольшее количество прямоугольников с вершинами в точках, изображённых на рисунке, можно построить?



А. 10. **Б.** 8. **В.** 6. **Г.** 4.

Реши сам

1. В квадрате выделены вершины, а кроме того, точки на его сторонах на: а) рис. 1; б) рис. 2); в) рис. 3; г) рис. 4. Какое наибольшее количество различных четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках можно построить?

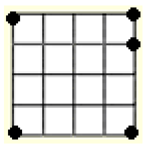


Рис. 1

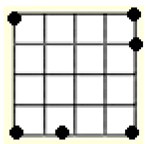


Рис. 2

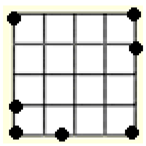


Рис. 3

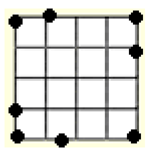
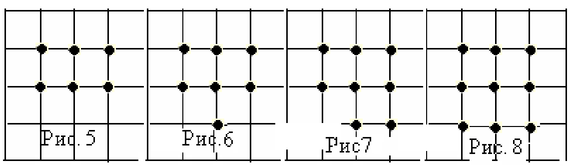


Рис. 4

2. Сколько можно построить попарно неравных квадратов с вершинами в точках, изображённых на: а) рис. 5; б) рис. 6; в) рис. 7; г) рис. 8?



Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. 1) 14 2) 0; 3) 3. Воспользуйтесь тем, что вершинами треугольника могут быть три точки, не лежащие на одной прямой.

2. Равны. Воспользуйтесь тем, что две фигуры называются равными, если одну можно наложить на другую так, что они совпадут.

3. 1) 3. 2) 6. Подсчитайте количество пар вершин.

4. Одну. Обратите внимание на то, что концы и середина диагонали прямоугольника лежат на одной прямой.

5. А. Подсчитайте количество «троек», которые можно образовать из перечисленных точек.

6. В. Воспользуйтесь тем, что две фигуры называются равными, если одну можно наложить на другую так, что они совпадут.

7. В. Подсчитайте количество пар точек, которые можно образовать из отмеченных точек.

8. Г. Не забудьте учесть треугольники, содержащие меньшие треугольники.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) 2. 2) 10. 3) Да.

Задача 2. 1а) 8; 1б) 4; 1в) 2; 1г) 4. 2) Да. 3) 2.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6	7
А	В	В	Г	Б	Б	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1.а) 3; б) 9; в) 23; г) 50. Обратите внимание на то, что у четырёхугольника никакие три вершины не лежат на одной прямой.

2.а) 1; б) 2; в) 2; г) 3. Обратите внимание на то, что считать нужно количество неравных квадратов. Воспользуйтесь тем, что у квадрата стороны равны, а диагонали перпендикулярны.

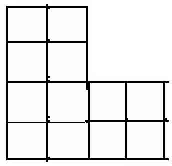
2.Задачи на разрезание

Часто приходится простейшие фигуры (отрезки, прямоугольники, круги и др.) разрезать на равные части. Например, при делении палки колбасы на четверых, буханки хлеба на двоих, торта на восьмерых.

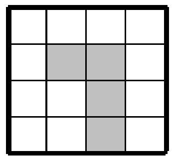
Чтобы убедиться, что плоские фигуры равны, нужно наложить одну фигуру на другую так, чтобы они совпали.

Готовимся к решению задач

1. Можно ли уголок, составленный из 12 квадратов (см. рис.), разрезать на: 1) три равные части; 2) шесть равных частей; 3) четыре равные части?

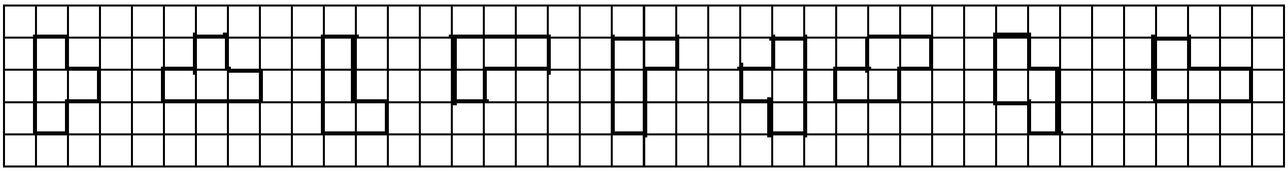


2. Разрежьте квадрат, изображённый на рисунке, на четыре равные части так, чтобы каждая из них содержала по одному закрашенному квадратику.



3. Наибольшее количество равных фигур на рисунке равно …

А. 5. **Б**. 4. **В**. 3. **Г.** 2.



4. Сколько различных фигур можно составить из трёх равных квадратиков так, чтобы квадратики соединились по сторонам?

А. 3. **Б**. 2. **В**. 1. **Г.** 0.

5. На какое наибольшее количество равных частей можно разрезать вдоль сторон клеток фигуру, изображённую на: 1) рис. 1; 2) рис. 2; 3) рис. 3?

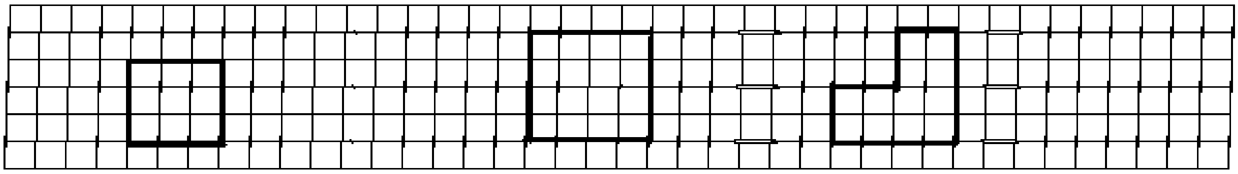


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Решение задач

В задачах на разрезание на равные части мы будем рассматривать фигуры, состоящие из клеток. Разрезы можно делать только по сторонам клеток. Такие ограничения позволят нам сравнивать фигуры, полученные при разрезании.

Задача 1. Разрезать фигуру, изображённую на рис. 18, вдоль сторон клеток на четыре равные части.

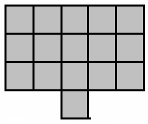


Рис. 18

Анализируем. Равные части должны содержать одинаковое количество квадратиков. Данная фигура содержит всего 16 квадратиков. Следовательно, каждая из четырёх равных частей должна состоять из четырёх квадратиков.

Из четырёх квадратиков можно составить пять видов фигур («плиток»), изображённых на рис. 19 (квадратики можно соединять только по общей стороне).

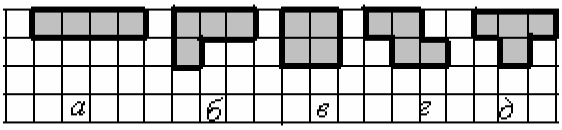


Рис. 19

Задача сводится к покрытию фигуры на рис. 18 четырьмя плитками одного из видов, приведенных на рис. 19.

Очевидно, что плитки вида *а* и *в* не годятся для этих целей. Плитки вида *б* удобнее, так как из двух таких плиток можно составить прямоугольник.

Решаем. Так как данная фигура состоит из 16 клеток, то искомые части должны состоять из четырёх клеток.

Рассмотрим рис. 20. На нём выделены две равные фигуры из четырёх клеток. Прямоугольник размерами 2×4 клетки состоит из двух таких фигур.

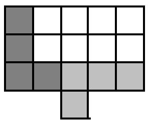


Рис. 20

Искомое разбиение данной фигуры изображено на рис. 21.

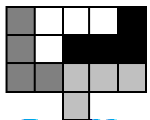


Рис. 21

1. *Можно ли фигуру на рис. 18 разрезать вдоль сторон клеток на: а) три равные части; б) пять равных частей?*

2. *Можно ли разрезать вдоль сторон клеток фигуру на рис. 18 на четыре равные части другим способом?*

3. *Можно ли фигуру на рис. 18 разрезать вдоль сторон клеток на: а) во-*

семь равных частей; б) две равные части?

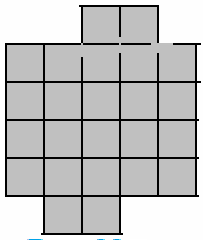


Рис. 22

Задача 2. Разрезать фигуру, изображённую на рис. 22, вдоль сторон клеток на четыре равные части.

Анализируем. Данная фигура содержит 24 квадрата. Поэтому четыре равные части должны содержать по 6 квадратов.

Очевидно, что искать форму искомых частей нужно начинать с квадратиков, которые выделяются. На их основе можно рассмотреть различные формы плиток, состоящих из шести квадратиков. На рис. 23 приведена часть из них.

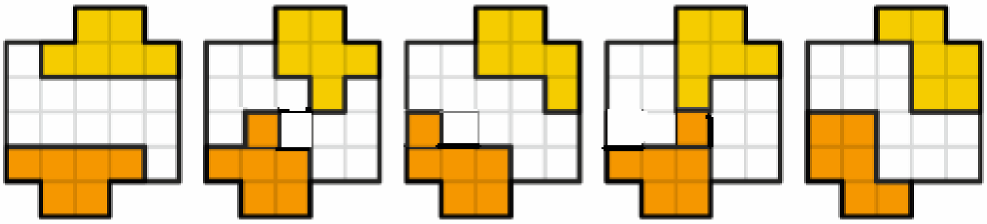


Рис. 23

Решаем. Анализируя различные плитки, состоящие из шести квадратиков, можно придти к выводу, что плитками, изображёнными на рис. 24, можно вымостить данную фигуру (см. рис. 25).

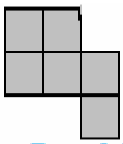


Рис. 24

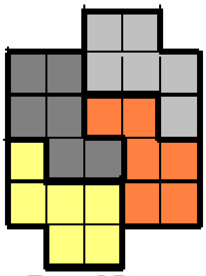


Рис. 25

?

1. *Можно ли по другому разместить указанные плитки?*
2. *Можно ли данную фигуру разрезать вдоль сторон клеток на: а) 5 равных частей; б) 6 равных частей?*

Проверь себя

1. Сколько «плиток», изображённых на рис. 2, потребуется, чтобы покрыть квадрат на рис. 1 без наложения?

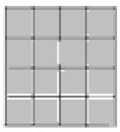


Рис. 1

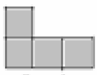


Рис. 2

А. 6. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 3.

2. Сколько «плиток», изображённых на рис. 2, потребуется, чтобы покрыть фигуру на рис. 1 без наложения?

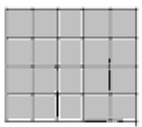


Рис. 1

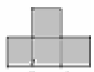


Рис. 2

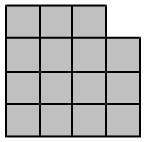
А. 6. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

3. Сколько видов «плиток» можно составить из 5 квадратиков (квадратики можно соединять совмещением их сторон)?

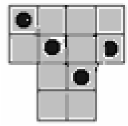
А. 10. **Б.** 12. **В.** 14. **Г.** 15.

Реши сам

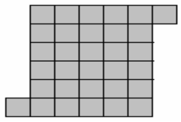
1. На сколько равных частей можно разрезать вдоль сторон клеток фигуру, изображённую на рисунке?



2. Разрежьте вдоль сторон клеток фигуру, изображённую на рисунке, на 4 равные части так, чтобы в каждой части была клетка с точкой.

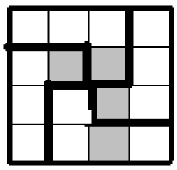


3. Разрежьте вдоль сторон клеток фигуру, изображённую на рисунке, на 4 равные части.



Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. 1) Да. 2) Да. 3) Нет. Возможность и невозможность разрезания можно установить опытным путём.



2. См. рис. Обратите внимание на то, что части должны быть равны, а закрашенные квадратики могут располагаться в разных местах этих частей.

3. Б. Воспользуйтесь определением равных фигур.

4. Б. Обратите внимание на то, что составленные фигуры должны быть различными.

5. 1) На 9. 2) На 16. 3) На 12. Обратите внимание на то, что наибольшим будет количество частей, если части будут наименьшими.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) а) Нет; б) нет. 2) Да. 3) а) да; б) нет.

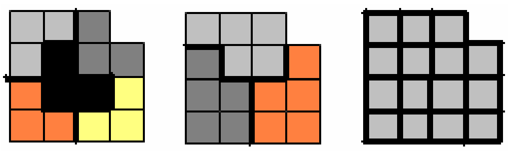
Задача 2. 1) Нет. 2) а) Нет; б) да.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

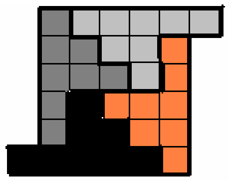
1	2	3
Б	Г	Б

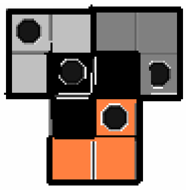
Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. На 3, 5 и 15 (см. рис.). Учтите, что количество клеток в равных частях является делите-



лем числа клеток, из которых составлена фигура. Но это условие необходимое, но не достаточное. Нужно ещё показать, как можно разрезать фигуру.





2. Воспользуйтесь тем, что искомые части состоят из трёх клеток (см. рис.).

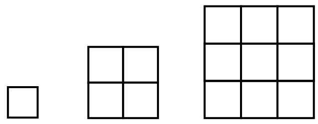
3. Воспользуйтесь решением задачи 2 (см. рис.).

3. Поиск закономерностей

Развитию мышления, в частности образного, способствуют задания, в которых нужно найти закономерность в образовании последовательности объектов (чисел, фигур, рисунков), а затем дать ответ на поставленный вопрос.

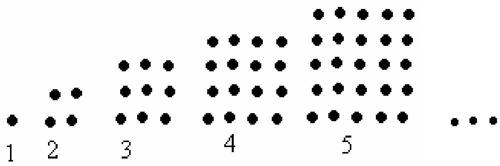
Готовимся к решению задач

1. Мальчик каждый день он достраивает квадратик, полученный накануне так, как это показано на рисунке. Сколько маленьких квадратиков в квадрате, построенном в десятый день?



А. 10. **Б**. 81. **В**. 100. **Г. 1**21.

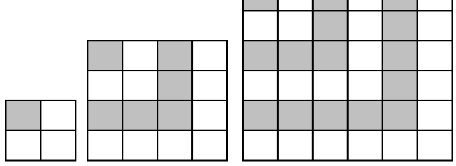
2. Каждый следующий набор кружочков строится из предыдущего так, как это показано на рисунке. Сколько кружочков нужно добавить к 5-му набору, чтобы получить 6-й?



А. 5. **Б**. 6. **В**. 10. **Г.** 11.

3. Каждый последующий набор кружочков строится из предыдущего, как это показано на рисунке к предыдущему заданию. Сколько кружочков содержит 7-й набор?

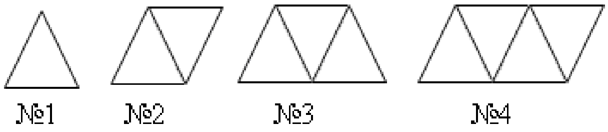
4. На рисунке изображены три первые фигуры последовательности фигур, составленных из равных квадратиков. Каждая следующая фигура этой последовательности получается из предыдущей, как 2-я из 1-й, 3-я из 2-й.



На сколько больше не закрашенных квадратиков, чем закрашенных в фигуре с номером 5?

А. На 8. **Б.** На 10. **В.** На 12. **Г.** На 16.

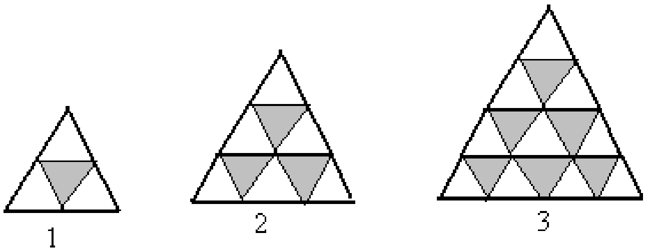
5.Имеется набор фигур, составленных из спичек. На рис. показано, как следующая фигура составляется из предыдущей. Длина каждой стороны треугольника равна длине спички. Сколько спичек нужно добавить к 4-й фигуре для составления 5-й фигуры?



А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 5.

6. На рисунке к предыдущему заданию показано, как следующая фигура составляется из предыдущей. Длина каждой стороны треугольника равна длине спички. Сколько спичек потребовалось для составления 6-й фигуры?

7. На рисунке изображены три первые фигуры последовательности фигур, образованных из равных треугольников так, как 2-я фигура образована из 1-й, 3-я — из 2-й. На сколько меньше закрашенных треугольников, чем незакрашенных, в 4-й фигуре этой последовательности?



А. На 3. **Б.** На 4. **В.** На 5. **Г.** На 6.

8. На рисунке к предыдущему заданию изображены три первые фигуры последовательности фигур, образованных из равных треугольников так, как 2-я фигура образована из 1-й, 3-я — из 2-й. Сколько незакрашенных треугольников в 5-й фигуре этой последовательности?

Решение задач

Задача 1. На рис. 26 а) изображены четыре фигуры, составленные из равных кругов.

1) Изобразите фигуру, которая

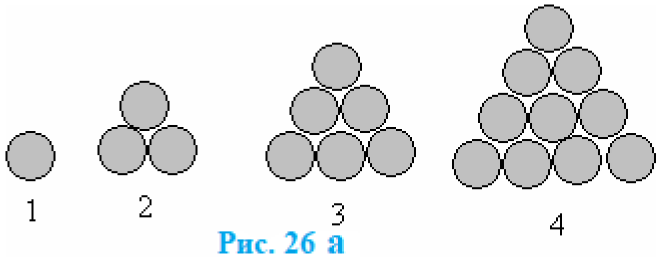


Рис. 26 а

получается из четвёртой фигуры, как четвёртая из третьей, как третья из второй, как вторая из первой.

2) Сколько понадобится кругов для составления десятой фигуры по указанному правилу?

Анализируем. Способ образования фигуры из предыдущей нетрудно обнаружить. Добавляется ряд кругов, на один больше, чем в ряду, к которому эти круги прилегают (см. рис. 26 б).

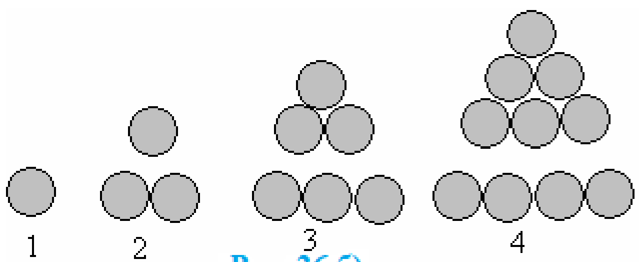
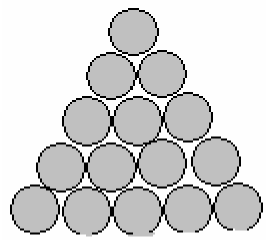


Рис. 26 б)

Соответственно количество кругов, которое пойдёт на построение следующей за данной фигуры, равно сумме количества кругов, которые пошли на построение данной и количества кругов в добавленном ряду.

Решаем. 1)



2)

№ фигуры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество кругов в добавленном ряду	-	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Всего	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Ответ. 2) 55.

1. *Сколько понадобится кругов для составления по указанному правилу: а) двенадцатой фигуры; б) пятнадцатой фигуры?*

2. *Если обозначить буквой n номер фигуры, то как можно выразить через n количество кругов в этой фигуре, добавленных к фигуре с номером n – 1?*

3. *Если обозначить буквой n номер фигуры, то как можно записать количество кругов в этой фигуре?*

Задача 2. На рис. 27 изображены первые четыре фигуры последовательности, составленные из равных ромбиков. Следующие фигуры образуются так, как четвёртая из третьей, третья из второй, вторая из первой. Сколько ромбиков понадобится, чтобы достроить по указанному правилу 9-ю фигуру до 10-й?

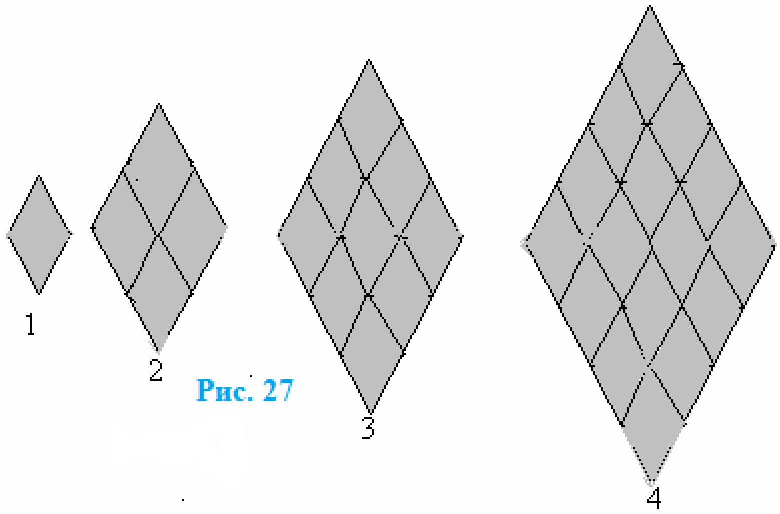


Рис. 27

Анализируем. Нужно сначала выявить закономерность в образовании каждой приведенной фигуры.

Фигура 1 на рис. 27 состоит из одного ромбика, фигура 2 — из 4-х, фигура 3 — из 9-и, а фигура 4 — из 16-и ромбиков. Каждая из фигур 2, 3, 4 состоит из полос, составленных из ромбиков, причём количество ромбиков в полосе равно количеству полос. При переходе от одной фигуры к следующей эти количества увеличиваются на 1. Это позволяет вычислять количество ромбиков для фигуры с любым номером.

Решаем. Фигура с номером n состоит из n полос, каждая из которых состоит из n ромбиков. Следовательно, фигура с номером n состоит из $n \cdot n$ ромбиков.

Так как 10-я фигура состоит из $10 \cdot 10 = 100$ ромбиков, а 9-я — из $9 \cdot 9 = 81$ ромбика, то требуется 19 ромбиков, чтобы 9-ю фигуру достроить до 10-й по указанному правилу.

Ответ. 19 ромбиков.

1. *Сколько понадобится ромбиков для составления 25-й фигуры по указанному правилу?*

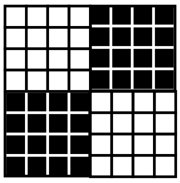
2. *Сколько понадобится ромбиков для составления 25-й фигуры из 24-й?*

3. *Если обозначить буквой n номер фигуры, то чему равно количество ромбиков в этой фигуре, добавленных к фигуре с номером n – 1 при:*

а) n = 20; б) n = 40?

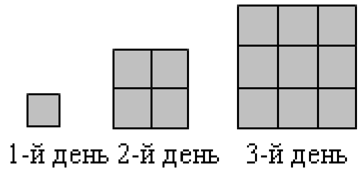
Проверь себя

1. Клеточки доски размером 8 × 8 закрашены так, как показано на рисунке. Сколько попарно неравных квадратов, состоящих из клеточек, имеют одинаковое число черных и белых клеточек?



А. 4. **Б.** 13. **В.** 25. **Г.** 28.

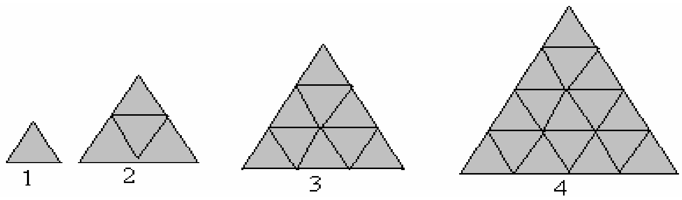
2. Мальчик строит квадратики из спичек. Ежедневно он достраивает квадратик, полученный накануне, до большего. Сколько новых спичек придется ему потратить на 11-й день?



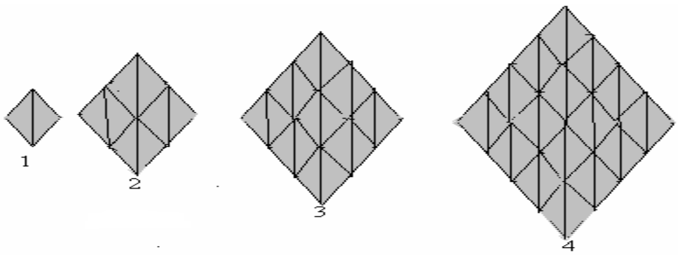
А. 48 **Б.** 44. **В.** 22. **Г.** 88.

Реши сам

1. На рисунке изображены первые четыре фигуры последовательности, составленные из равных маленьких треугольников. Следующие фигуры образуются так, как четвёртая из третьей, третья из второй, вторая из первой. Сколько маленьких треугольников понадобится для составления: а) 10-й фигуры; б) 20-й фигуры?



2. На рисунке изображены первые четыре фигуры последовательности, составленные из равных треугольников. Следующие фигуры



образуются так, как четвёртая из третьей, третья из второй, вторая из первой. Сколько треугольников понадобится для того, чтобы достроить по указанному правилу 20-ю фигуру из 10-й?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Обратите внимание на то, что количество маленьких квадратиков в квадрате равно квадрату номера дня.

2. Г. Обратите внимание на то, что количество кружочков в наборе равно квадрату номера набора.

3. 49. Обратите внимание на то, что количество кружочков в наборе равно квадрату номера набора.

4. Г. Воспользуйтесь тем, что незакрашенных квадратиков больше, чем закрашенных, в фигуре: с номером 1 на 2, с номером 2 — на 4, с номером 3 — на 6, то есть на число, вдвое большее номера фигуры.

5. А. Обратите внимание на то, что для получения каждой следующей фигуре к предыдущей добавляется одно и то же количество спичек.

6. 13. Сравните количество спичек, из которых составлена каждая фигура с её номером.

7. В. Обратите внимание на то, что закрашенных треугольников меньше, чем незакрашенных: в 1-й фигуре на 2, во 2-й фигуре на 3, в 3-й фигуре на 4.

8. 21. Воспользуйтесь закономерностью, которой удовлетворяют количества незакрашенных треугольников в фигурах 1, 2, 3: 3, 6, 10.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) а) 78; б) 120 2) п. 3) $\frac{n(n+1)}{2}$.

Задача 2. 1) 625. 2) 49. 3) а) 39; б) 79.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2
А	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. а) 100; б) 400. Обратите внимание на то, сколько треугольников добавляется к треугольникам предыдущей фигуры при составлении следующей. Ответ на задание а) можно получить непосредственным подсчётом. А вот задание б) трудно так выполнить. Попытайтесь найти зависимость количества треугольников, из которых составлена фигура, от номера фигуры.
2. 600. Обратите внимание на связь между фигурами на рисунках к этой задаче и к задаче 2.

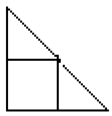
4. Складывание фигур

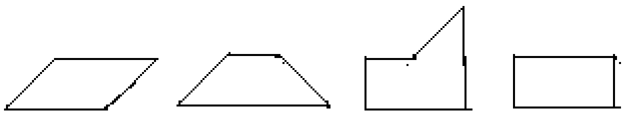
Из нескольких фигур можно составить много новых фигур. В некоторых задачах требуется, чтобы новая фигура имела определённый вид.

Есть даже такая игра «Пентамино». Она заключается в складывании различных фигур из заданного набора фигурок. Их 12 и каждая составлена из пяти одинаковых квадратов. Кстати «пента» по-гречески означает «пять».

Готовимся к решению задач

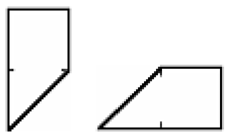
1. Треугольник разделён на три части, как это показано на рисунке. Какая из фигур, приведенных в ответах, не может быть составлена из этих частей?

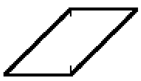
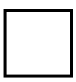
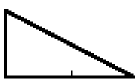
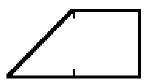




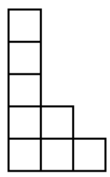
А **Б** **В** **Г**

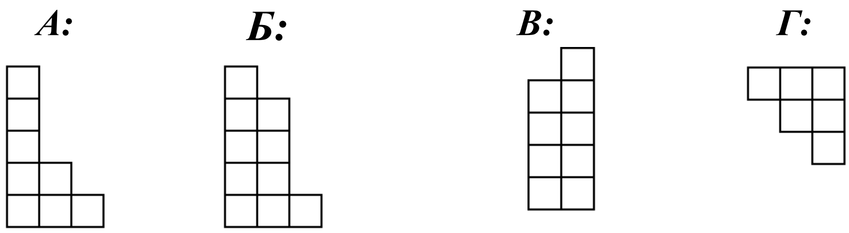
2. Квадратный лист бумаги разрезали на три части. Две из них расположены на рисунке справа. Какая из предложенных в ответах частей была третьей?



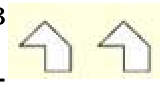
А:  Б:  **В:**  **Г:** 

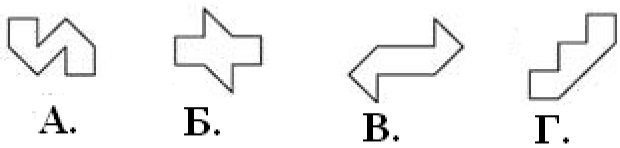
3. Какая из фигур, предложенных в ответах, дополняет до прямоугольника фигуру, указанную справа?



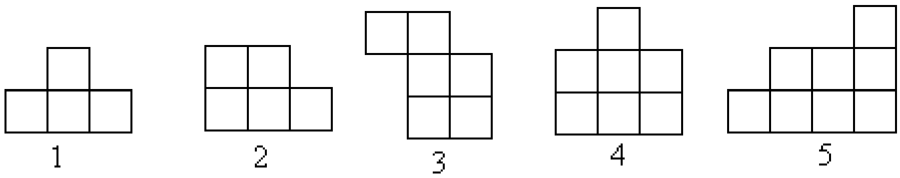


4. Какую из фигурок, приведенных в ответах, нельзя составить из двух одинаковых деталей, изображённых справа? Детали нельзя переворачивать тыльной стороной вверх.





5. Квадрат можно составить, используя четыре из пяти фигур, приведенных на рисунке. Какая фигура лишняя?



Решение задач

В задачах на складывание фигур из данных нельзя накладывать фигурки друг на друга, их можно только прикладывать друг к другу.

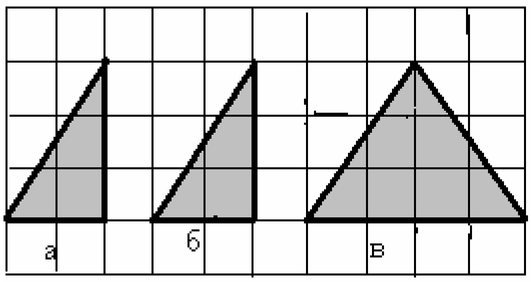


Рис. 28

Задача 1. Сколько различных четырёхугольников можно сложить из всех трёх фигурок, изображённых на рис. 28?

Анализируем. Самый лучший способ поиска ответа — экспериментальный. Он состоит в том, что фигурки вырезают из бумаги и, перемещая их, пытаются составить всевозможные виды четырёхугольников.

Такой эксперимент приводит к выводу, что четырёхугольник получается при прикладывании фигурок, изображённых на рис. 28, друг к другу так, чтобы вершины и стороны совместились.В завершении нужно обосновать, что четырёхугольников, не равных обнаруженным, сложить из данных фигурок нельзя.

Решаем. Из фигурок, изображённых на рис. 28, можно составить 5 различных четырёхугольников. Они приведены на рис. 29.

Они попарно не равны, так как ни один из них нельзя наложить на другой

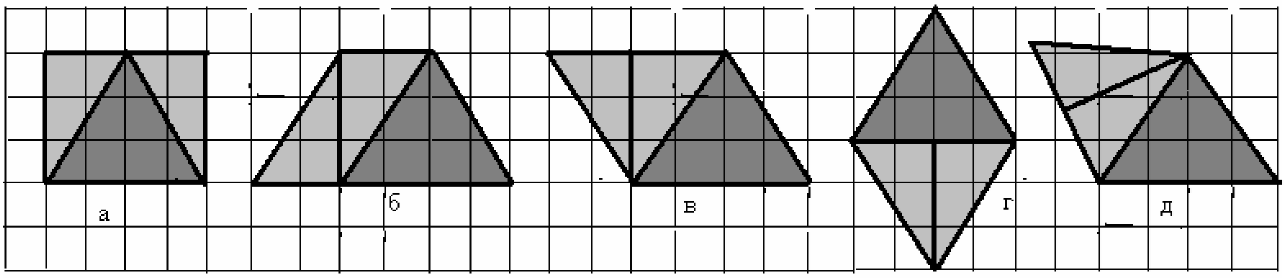


Рис. 29

так, чтобы они совпали. Это можно установить, сравнивая стороны. Например, у четырёхугольника на рис 29 в противоположные стороны равны, а смежные — нет. А у четырёхугольника на рис. 29 д наоборот. Эти четырёхугольники не могут быть равными.

Убедиться в том, что четырёхугольников, отличных от приведенных, не может быть, можно, рассматривая способы присоединения к треугольнику на рис. 28 в сначала одного, а потом и другого из оставшихся треугольников. Например, к боковой стороне треугольника на рис. 28 в можно приложить один из двух оставшихся треугольников либо как на рис. 29 б, либо как на рис. 29 д. А тогда присоединение третьего треугольника легко определяется.

Ответ. 5.

1. *А можно ли из всех фигурок на рис. 28 сложить треугольник?*

2. *А можно ли из всех фигурок на рис. 28 сложить пятиугольник?*

3. *Сколько различных фигур можно сложить из всех фигурок на рис. 28, если можно присоединять одну фигуру к другой по их общей стороне?*

Часто приходится складывать нужные фигуры из частей, полученных разрезанием данной.

Задача 2. Разрежьте квадрат на 4 части, из которых можно было бы получить (сложить) 3 квадрата.

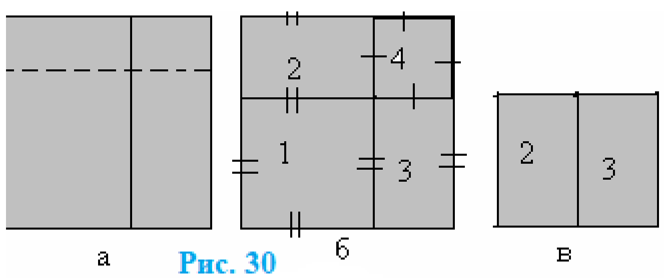


Рис. 30

Анализируем. Очевидно, что разрезы должны быть параллельны сторонам квадрата (см. рис. 30 а). Нетрудно видеть, что два квадрата легко получить (см. рис. 30 б). Так можно получить любой квадрат со стороной, длина которой меньше длины стороны данного квадрата.

Осталось выбрать места разрезов так, чтобы из прямоугольников 2 и 3 на рис. 30 б можно было сложить квадрат, изображённый на рис. 30 в.

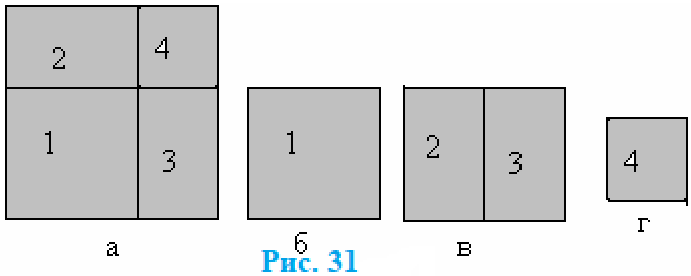


Рис. 31

Решаем. Разрежем квадрат на четыре части (рис. 31 а) так, чтобы две части были квадратами (рис. 31 б, 31 г), а две — равными прямоугольниками, у которых одна сторона вдвое больше другой. Тогда из этих прямоугольников можно составить квадрат (см. рис. 31 в).

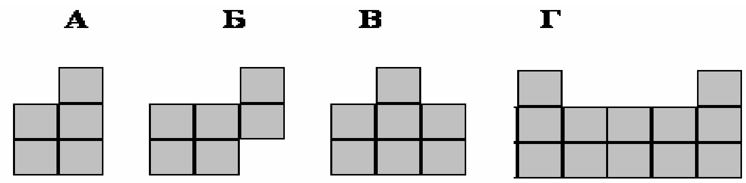
1. *Чему равны площади трёх полученных квадратов, если сторона данного квадрата равна 3 см?*

2. *Равны ли квадраты, изображённые на рис. 31 б и 31 в?*

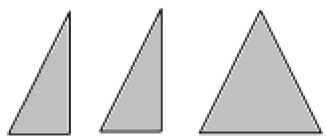
3. *Можно ли квадрат разрезать на 7 частей, из которых можно было получить 6 квадратов?*

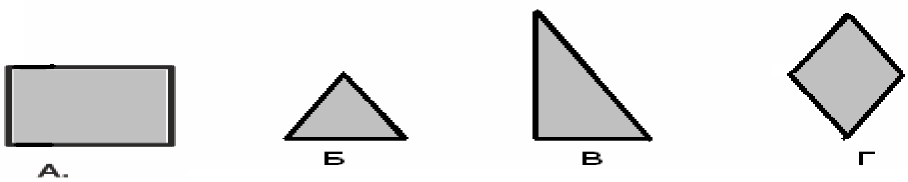
Проверь себя

1. Используя три из четырёх изображенных фигурок, можно составить квадрат. Какая фигурка останется лишней?



2. Фигуру какой из приведенных в ответах форм нельзя получить соединением всех данных фигур?

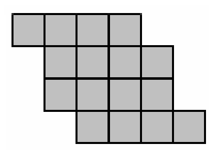




Реши сам

1. Сколько существует различных фигурок, состоящих из пяти одинаковых квадратов, если два квадрата, имеющие две общие точки, имеют общую сторону?

2. Прямоугольник, длина которого в два раза больше ширины, разрежьте на 3 части, из которых можно было бы составить квадрат.



3. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две такие равные фигуры, из которых можно было бы составить квадрат.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Разделите каждую из фигур, приведенных в ответах, на части, соответствующие частям разделённого треугольника.

2. Б. Ответ находите путём проб и ошибок.

3. Б. Ответ находите путём проб и ошибок.

4. Б. Ответ находите путём проб и ошибок.

5. 2. Можно посчитать количество клеток, из которых составлены фигуры, а затем проверить полученную гипотезу.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Да. 2) Да. 3) 8.

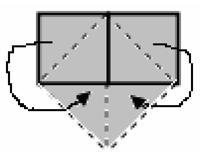
Задача 2. 1) 4 см^2, 4 см^2, 1 см^2. 2) Да. 3) Да.

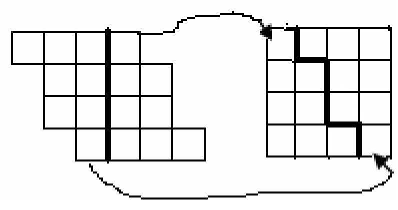
Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2
А	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 12. Воспользуйтесь описанием плиток, составленных из четырёх квадратиков на рис. 19.

2.  Воспользуйтесь тем, что данный прямоугольник состоит из двух квадратов.



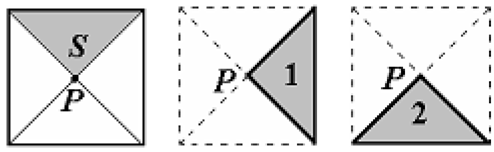
3.

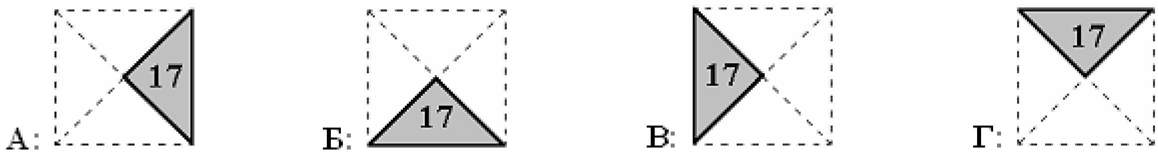
5. Преобразование фигур

Наиболее сложными геометрическими задачами являются задачи, в которых нужно преобразовывать фигуры: перемещать, сгибать, поворачивать и т. д.

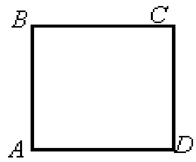
Готовимся к решению задач

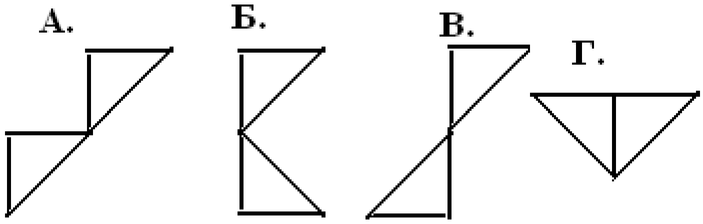
1. Петя вращает треугольник *S* вокруг вершины *P* так, как это показано на рисунке справа. В какой позиции будет находиться треугольник после 17-го вращения?



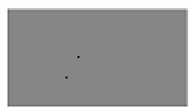


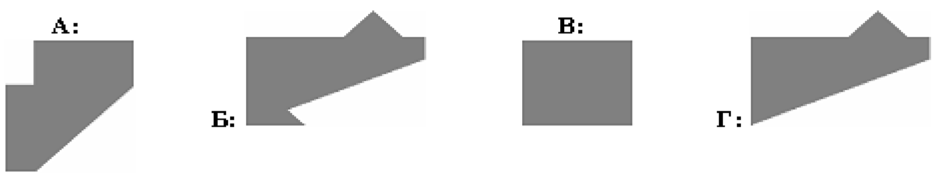
2. Квадрат *ABCD* разрезали по диагонали *BD* на две части. Треугольник *BCD* повернули на 270° по часовой стрелке вокруг точки *D*. Какую фигуру при этом получили?





3. Петя сгибает прямоугольный лист бумаги по прямой линии один раз. Какой из вариантов, представленных в ответах, он не сможет получить?





4. Квадратный лист бумаги перегнули по прямой так, что получили невыпуклый многоугольник. Какое наибольшее количество сторон может у него быть?

А. 7. **Б.** 8. **В.** 9. **Г.** 10.

Решение задач

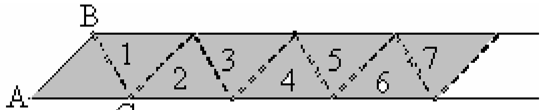


Рис. 32

Одним из типов задач на преобразование фигур являются задачи, в кото
рых нужно определить положение части фигуры после некоторых однотипных преобразований.

Задача 1. Длинная полоска бумаги разделена пунктирными линиями так, как это показано на рис. 32. Полоску складывают сгибанием по пунктирным линиям в последовательности, указанной числами. При этом полоска всегда занимает горизонтальное положение, а треугольники слева после складывания должны лежать сверху треугольника, находящегося далее. В каком положении окажутся вершины *A, B*, *C* после: а) 10 складываний; б) 1000 складываний?

Анализируем. Ответ в задании а) легко получить, непосредственно складывая 10 раз полоску, как указано в условии.

Но хорошо бы найти закономерность, которая позволила бы дать ответ и в случае б). Очевидно, что после нескольких складываний треугольник *ABC* вернётся в исходное положение и как бы всё начнёт повторяться. Найти это число складываний можно, выполнив складывания. Результаты представлены в следующей таблице.

Номер складывания	1	2	3	4	5	6	
Положение букв	B A C	A C B	A C B	C A B	C B A	B A C	Стоп!

Теперь понятно, как дать ответ для любого числа складываний. Надо указать положение вершин A, B, C, после числа складываний, равного остатку от деления заданного числа складываний на 6.

Решаем. Проведя складывания по правилу, указанному в условии, убеждаемся, что после 6 складываний треугольник возвращается в исходное положение.

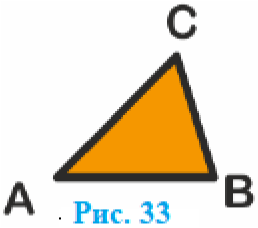


Рис. 33

а) Так как $10 = 6 \cdot 1 + 4$, то после 10 складываний вершины треугольников будут в таком же положении, как и при 4-х складываниях, то есть как на рис. 33.

б) Так как $1000 = 6 \cdot 166 + 4$, то ответ такой же, как и в задании а).

1. *Какое наименьшее количество складываний нужно сделать, чтобы вершины треугольника были в положении: а)* C B / A *б)* A / C B *в)* B / A C

3. *В каком положении окажутся вершины треугольника после а) 999 складываний; б) 1001 складывания; в) 1007 складываний?*

В следующей задаче рассматривается преобразование, состоящее из складывания фигуры и её разрезания.

Задача 2. Прямоугольный лист бумаги сложили пополам, потом ещё раз пополам так, что линии сгибов пересеклись. Полученный прямоугольник разрезали по двум диагоналям. На сколько частей распался при этом лист бумаги и сколько из них имеют треугольную форму?

Анализируем. Возьмём прямоугольный лист бумаги и проделаем все действия, указанные в условии.

Рассматривая полученные после указанного разрезания части, можно дать ответ и понять, почему он такой.

Решаем. Сложенный лист состоит из 4-х слоёв. Если разрезать по диагоналям каждый слой, то получим 16 частей треугольной формы. Но некоторые из этих частей соединены по отрезкам, принадлежащим линиям сгиба листа. На рис. 34 а показан развёрнутый лист после двух сгибаний. Отрезок AB изображает линию первого сгиба, а отрезки CK и KD —

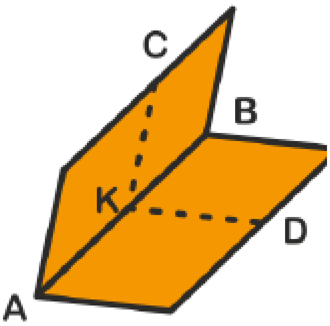


Рис. 34 а

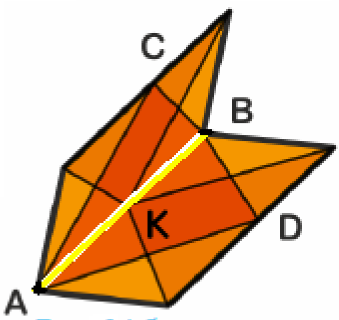


Рис. 34 б

второго. При разрезании полученного прямоугольника по двум диагоналям образуется 4 отрезка линий сгиба (AK, KB, CK, KD на рис. 34 б). Каждый из них является общим для двух частей треугольной формы. Поэтому они порождают 4 части четырёхугольной формы. Осталось 16 – 8 = 8 частей. Они имеют треугольную форму. Всего образовалось 12 частей.

Ответ. 12; 8.

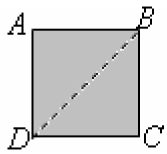
1. *Сколько частей образуется при разрезании по диагоналям сложенного пополам прямоугольного листа бумаги?*

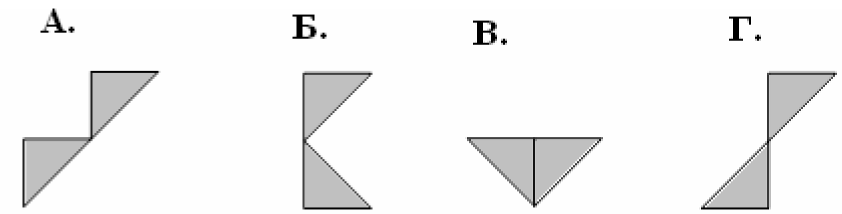
2. *Сколько слоёв содержит прямоугольник, полученный складыванием пополам трижды прямоугольного листа бумаги?*

3. *Зависит ли количество частей, на которые распадается прямоугольник, полученный складыванием пополам несколько раз прямоугольного листа бумаги, при его разрезании по диагоналям от способа складывания?*

Проверь себя

1. Квадрат $ABCD$ разрезали по диагонали BD и треугольник BCD повернули на 90° против часовой стрелке вокруг точки D. Какую фигуру получили?



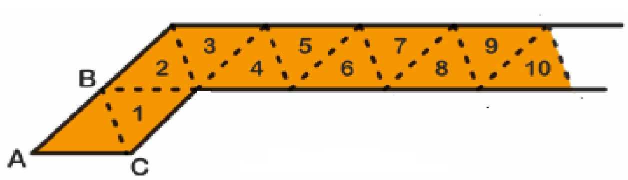


2. Газетный лист сложили пополам 5 раз, каждый раз изменяя направление изгиба. Потом отрезали от полученного прямоугольника 4 угла и развернули лист. Сколько в нем дыр?

А. 21. **Б.** 25. **В.** 32. **Г.** 45.

Реши сам

1. Длинная полоска бумаги разделена пунктирными линиями так, как это показано на рисунке. Полоску скла-



дывают сгибанием по пунктирным линиям в последовательности, указанной числами. При этом полоска всегда занимает горизонтальное положение, а треугольники слева после складывания должны лежать сверху треугольников, находящихся далее. В каком положении очутятся вершины *A, B*, *C* после: а) 10 складываний; б) 1000 складываний?

2. Лист бумаги сложили пополам, потом ещё раз. В двух местах того, что получилось, проделали две дырки. Затем лист развернули.

а) Сколько в нём дырок?

б) Как изменится ответ, если складываний было не два, а 10?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1.А. Обратите внимание на то, что после 4-х вращений треугольник *S* будет находиться в исходном положении.

2. Г. Сначала поверните луч *DC* на 270° по часовой стрелке вокруг точки *D.*

3. Б. Обратите внимание на то, что линия сгиба — отрезок.

4. В. Обратите внимание на то, что при сгибании квадратного листка по линии, пересекающей противоположные края, получаются невыпуклые многоугольники с одним и тем числом вершин, кроме одного случая.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) а) 5; б) 2; в) 1. 2) а) A C б) C B в) C B

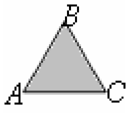
B A A

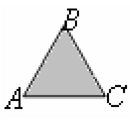
Задача 2. 1) 7. 2) 8. 3) Да.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2
В	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. а) 



б) Воспользуйтесь решением задачи 1.

2. а) **8; б) 2048.** Обратите внимание на то, что при очередном складывании пополам количество «слоёв» удваивается.

6. Пространственные конструкции

Окружающие нас предметы, тела, объекты характеризуются часто тремя измерениями: длиной, шириной, высотой, следовательно, и тем, что называют объёмом.

Наиболее простым геометрическим телом, которое полностью определяется длиной, шириной и высотой, является прямоугольный параллелепипед (просто параллелепипед в дальнейшем).

На рис. 35 изображён параллелепипед. Он имеет 6 ***граней***, являющиеся прямоугольниками, 8 ***вершин*** — вершины граней, 12 ***рёбер*** — стороны граней. Противоположные грани параллелепипеда — равные прямоугольники.

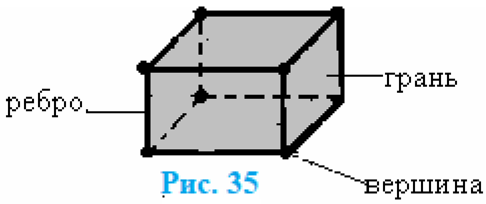
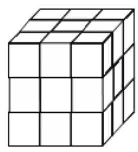


Рис. 35

Готовимся к решению задач

1. Из скольких кубиков построена фигура, изображённая на рисунке?

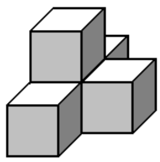


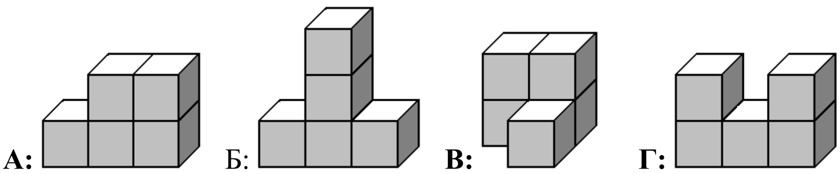
А. Из 27. **Б**. Из 18. **В**. Из 12. **Г.** Из 9.

2. Куб со стороной 1 м разрезали на кубики со стороной 1 см, которые поставили друг на друга. Какой высоты столб при этом получится?

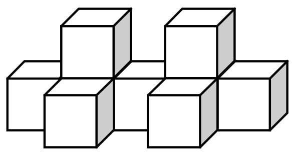
А. 100 м. **Б**. 1 км. **В**. 10 км. **Г.** 100 км.

3. Какую из фигур, изображённых в ответах, нельзя получить из фигуры на рисунке справа перестановкой лишь одного кубика?





4. Построенная из маленьких одинаковых кубиков фигурка на столе (рисунок справа) весит 189 грамм. Сколько весит один маленький кубик?



А: 29 грамм. **Б:** 27 грамм. **В:** 25 грамм. **Г:**21 грамм.

5. Сколько нужно взять маленьких кубиков со стороной 1 см, чтобы из них составить кубик со стороной 4 см?

А. 64. **Б.** 48. **В.** 32. **Г.** 16.

6. На рис. 1 изображена конструкция из одинаковых кубиков — «колодец» (без дна), а на рис. 2 — конструкция «башня» из таких же кубиков. На сколько больше кубиков использовано для «колодца» чем для «башни»?

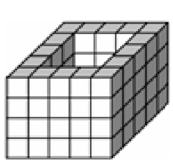


Рис. 1

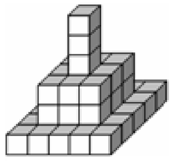


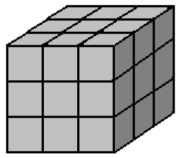
Рис. 2

А: На 34. **Б:** На 24. **В:** На 18. **Г:** На 12.

7.Большой куб состоит из восьми одинаковых маленьких кубиков. Пять граней большого куба покрасили зеленой краской. Сколько маленьких кубиков имеют по три зеленые грани?

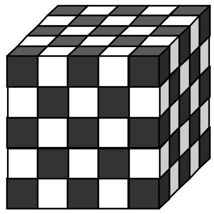
А: 2. **Б:** 4. **В:** 6. **Г:** 7.

8. Куб с ребром 3 см окрасили в серый цвет и разрезали на маленькие кубики, ребро каждого из которых равняется 1 см. Сколько кубиков имеют ровно две окрашенные грани?



А: 4. **Б: 6.** **В:** 8. **Г:** 12.

9. Куб составлен из 125 белых и черных кубиков так, что любые два соседние (по граням) кубики имеют разный цвет. Угловые кубики (кубики в вершинах) черные. Сколько белых кубиков было использовано?

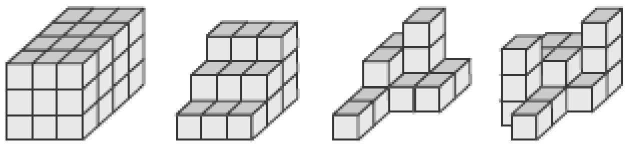


А: 63. **Б:** 62. **В:** 60. **Г:** 55.

Решение задач

Рассмотрим задачу на конструирование параллелепипеда из кубиков.

Задача 1. Сколько кубиков понадобится, чтобы получился параллелепипед, изображённый на рис. 36 а), из конструкции, составленной из таких же кубиков на: а) рис. 36 б); б) рис. 36 в); в) рис. 36 г)?



а б Рис. 36 в г

Анализируем. В верхнем слое параллелепипеда, изображённого на рис. 36 а) лежит 3·4 = 12 кубиков. Столько же кубиков в каждом из следующих слоёв — среднем и нижнем. Всего 12·3 = 36 кубиков.

Чтобы ответить на вопрос задачи, есть два пути:

1) подсчитать непосредственно сколько не хватает кубиков;

2) подсчитать, сколько в конструкции кубиков уже есть, а затем из числа 36 вычесть это число.

В любом случае подсчёт нужно делать по определённой стратегии, например, подсчитывать число кубиков по слоям. Выбор пути зависит от того, что легче подсчитать в каждом слое: имеющиеся там кубики или недостающие.

При этом мы предполагаем, что конструкции на рис. 36 б), в), г) могут быть составлены из реальных кубиков. Поэтому кубик не может висеть в воздухе.

Решаем. а) На рис. 36 б) в нижнем слое не хватает 3-х кубиков, в среднем — 6-и кубиков, в верхнем 9-и кубиков. Всего понадобится $3 + 6 + 9 = 18$ кубиков.

б) В конструкции на рис. 36 в) в верхнем слое — 1 кубик, в среднем — 3 кубика, в нижнем слое 8 кубиков. Всего $1 + 3 + 8 = 12$ кубиков. В параллелепипеде на рис. 36 а имеется $3\cdot3\cdot4 = 36$ кубиков. Следовательно, в конструкции на рис. 36 в не хватает $36 – 12 = 24$ кубика.

в) В конструкции на рис 36 г) в верхнем слое 2 кубика, в среднем 6 кубиков, в нижнем слое не хватает 3-х кубиков, значит, имеется $12 – 3 = 9$ кубиков. Всего $2 + 6 + 9 = 17$ кубиков. Должно быть $3\cdot3\cdot4 = 36$ кубиков. Следовательно, в конструкции на рис. 36 г не хватает $36 – 17 = 19$ кубиков.

Ответ. а) 18; б) 24; в) 19.

1. *Сколько кубиков в конструкции на рис. 36 а) в задней стенке?*

2. *Сколько кубиков в конструкции на рис. 36 в) в задней стенке?*

3. *Можно ли из кубиков в конструкциях на рис. 36 б) и 36 г) составить параллелепипед, изображённый на рис. 36 а)?*

4. *Сколько кубиков видно, если смотреть на конструкцию на рис. 36 в): а) сверху; б) спереди; в) сбоку?*

Важнейшим видом прямоугольных параллелепипедов является куб — прямоугольный параллелепипед, все измерения которого равны. Это геометрическое тело знакомо вам с детства. У куба много замечательных свойств. Поэтому его удобно использовать для задач на развитие пространственного воображения.

Задача 2. Куб размерами 4 см × 4 см × 4 см сначала покрасили, а затем разрезали на кубики с ребром 1 см. Каких кубиков больше: тех, у которых окрашена одна грань или тех, у которых окрашены две грани?

Анализируем. У кубика, полученного разрезанием данного куба на единичные, окрашенной будет хотя бы одна грань, только если эта грань лежит на поверхности куба.

Рассмотрим куб размерами 4×4×4 (см), сложенный из кубиков с ребром 1 см (см. рис. 37). На его гранях закрасим клетки, являющиеся гранями кубиков, не имеющих других окрашенных граней. Их количество в каждой из 6 граней куба одинаково. Поэтому подсчитать их количество на всей поверхности куба несложно.

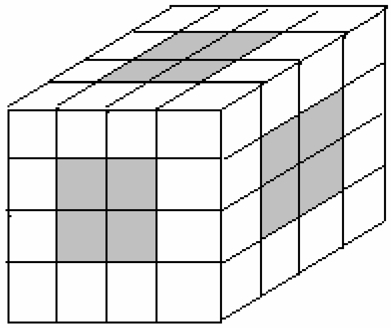


Рис. 37

Две грани будут окрашены у кубиков, у которых только одно ребро принадлежит ребру куба. Их можно пересчитать непосредственно, рассматривая кубики. А можно подсчитать в каждой грани, сложить полученные числа и разделить сумму на 2, так как каждый такой кубик мы считали дважды.

Решаем. Ровно одну окрашенную грань будут иметь кубики, одна из граней которых лежит внутри грани большого куба. На рис. 38 закрашены клетки, соответствующие этим граням. Таких кубиков 4 для каждой из 6 граней. Следовательно, всего 4·6 = 24 кубика имеют ровно одну окрашенную грань.

Точками на рис. 38 обозначены квадратики, являющиеся гранями кубиков с двумя окрашенными гранями. Таких квадратиков 8 в каждой из 6 граней. Всего 6·8 = 48. Но им соответствует 24 кубика с двумя окрашенными гранями, так как при нахождении числа 48 каждый такой кубик мы считали дважды.

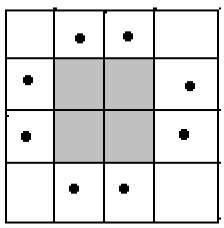


Рис. 38

Количества кубиков с одной и двумя окрашенными гранями равны для данного куба.

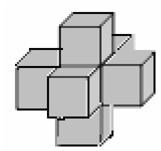
Ответ. Одинаково.

1. *Сколько получилось кубиков, у которых нет ни одной окрашенной грани?*

2. *На сколько будет больше кубиков с двумя окрашенными гранями, чем с одной, если данный куб будет иметь размеры 3 см $\times$ 3 см $\times$ 3 см?*

3. *Может ли количество кубиков с одной окрашенной гранью быть больше количества кубиков с двумя окрашенными гранями?*

Проверь себя

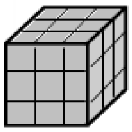


1. Из скольких кубиков составлена фигура, изображённая на рисунке?

А. Из 6. **Б.** Из 7. **В.** Из 8. **Г.** Из 9.

2. Буханку хлеба нужно разрезать на 12 частей. Какое минимальное количество разрезов для этого необходимо сделать?

А. 3. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 6.

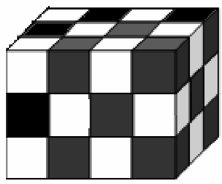


3. На рисунке изображена фигура, составленная из кубиков. Сколько всего кубиков, к которым прилегает не менее пяти кубиков?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 19. **Г.** 8.

4. Деревянный параллелепипед с измерениями 6 см, 12 см и 8 см распилили на кубики с ребром 1 см и сложили их в ряд. Какой длины получился ряд?

А. 5 м 66 см. **Б.** 57 м 60 см. **В.** 5 м 76 см. **Г.** 586 см.



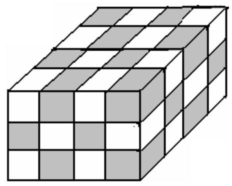
5. Из чёрных и белых одинаковых кубиков сложили фигуру так, как это показано на рисунке. Площадь какой части её поверхности больше: состоящей из белых квадратиков или состоящей из чёрных квадратиков?

А. Из белых. **Б.** Из чёрных. **В.** Площади равны.

Г. Определить нельзя, так как не вся поверхность видна.

Реши сам

1. Куб составлен из 64 одинаковых кубиков. Сколько кубиков имеют общую грань не более чем с пятью кубиками?



2. Из чёрных и белых кубиков со стороной 1 дм сложили параллелепипед так, как это показано на рисунке. Чему равна площадь части его поверхности, состоящей из белых квадратиков?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. А. Подсчитайте, сколько кубиков в одном «слое».

2. В. Установите, сколько кубиков получилось в результате разрезания.

3. Г. Ответ можно получить путём проб и ошибок.

4. Г. Посчитайте, из скольких маленьких кубиков состоит фигурка.

5. А. Обратите внимание на то, что искомый кубик будет состоять из 4-х слоёв.

6. В. Подсчитайте, из скольких маленьких кубиков состоит каждая конструкция.

7. Б. Обратите внимание на то, где расположены кубики у которых видны три грани.

8. В. Обратите внимание на то, где расположены кубики, у которых видны ровно две грани.

9. Б. Сравните количества белых и черных кубиков в каждом слое.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) 9. 2) 6. 3) Нет. 4) а) 8; б) 6; в) 7.

Задача 2. 1) 8. 2) На 6. 3) Да.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
Б	Б	Б	В	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 56. Воспользуйтесь тем, что $64 = 4\times4\times4$.

2. 40 дм^2. Подсчитайте число белых квадратиков на невидимых гранях, пользуясь тем, что число всех квадратиков на этих гранях чётно.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Задания для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

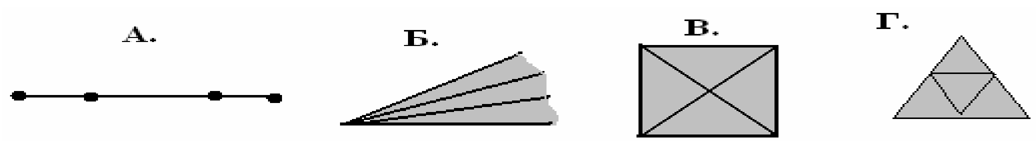
Оценка		**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	3 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	5 задач	4 задач
«отлично»	Решено не менее	7 задач	6 задач

Контрольный тест

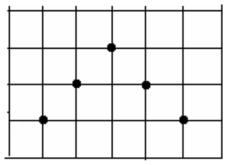
Настоящее задание предназначено для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям теста для самоконтроля, к которому приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа выберите букву «Д».

1. На каком из рисунков изображено больше всего фигур одного вида?

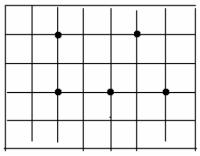


2. Сколько различных прямых можно провести через точки, отмеченные на рисунке?



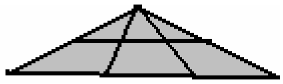
А. 4. **Б.** 6. **В.** 8. **Г.** 12.

3. Сколько различных четырёхугольников определяют точки, отмеченные на рисунке?



А. 3. **Б.** 4. **В.** 6. **Г.** Другой ответ.

4. Сколько треугольников изображено на рисунке?

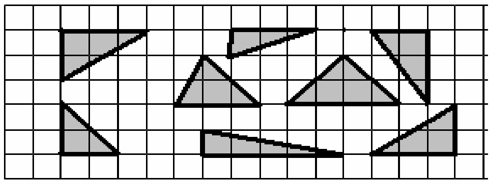


А. 6. **Б.** 8. **В.** 10. **Г.** 12.

5. Сколько различных четвёрок точек можно выбрать из пяти точек?

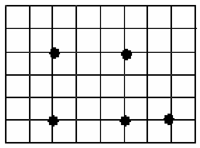
А. 5. **Б.** 6. **В.** 8. **Г.** 10.

6. Сколько попарно неравных треугольников изображено на рисунке?



А. 8. **Б.** 7. **В.** 6. **Г.** 5.

7. Какое наибольшее количество различных треугольников с вершинами в точках, изображённых на рисунке, можно построить?



А.20. **Б.** 18. **В.** 14. **Г.** 9.

8. Сколько плиток, изображённых на рис. 2, потребуется, чтобы покрыть фигуру на рис. 1 без наложения?

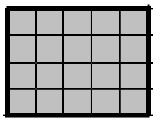


Рис. 1

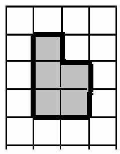


Рис. 2

А. 5. **Б.** 4. **В.** 3.

Г. Ответ отличен от приведённых.

9. Сколько плиток, изображённых на рис. 2, потребуется, чтобы покрыть фигуру на рис. 1 без наложения?

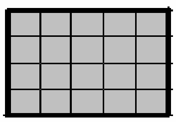


Рис. 1

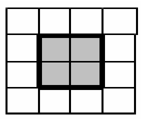


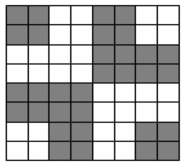
Рис. 2

А. 7. **Б.** 5. **В.** 4. **Г.** Ответ отличен от приведённых.

10. Квадрат шестью прямолинейными линиями разделили на квадратики. Сколько получилось квадратиков?

А. 32. **Б.** 16. **В.** 9. **Г.** 6.

11. Клеточки доски размерами 8×8 закрашены так, как это показано на рисунке. Сколько попарно неравных квадратов, состоящих из этих клеточек, имеют одинаковое количество белых и чёрных клеточек?



А. 4. **Б.** 8. **В.** 24. **Г.** 32.

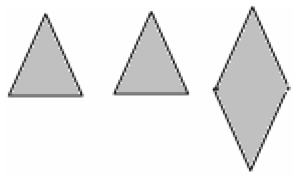
12. Шнур сложили пополам, а потом ещё 4 раза пополам. Затем его разрезали по линии сгиба. На сколько частей распался шнур?

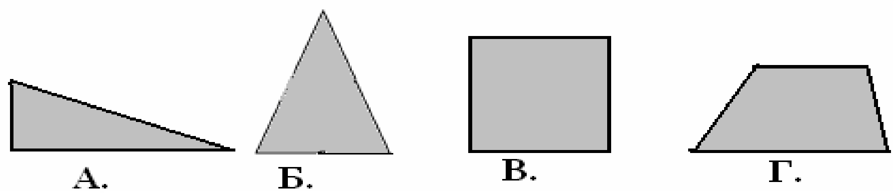
А. 5. **Б.** 9. **В.** 17. **Г.** 33.

13. Какое наименьшее количество одинаковых спичек нужно взять, чтобы образовать три одинаковых квадрата?

А. 8. **Б.** 10. **В.** 11. **Г.** 12.

14. Фигуру какой из форм, приведенных в ответах, можно получить из всех данных трёх фигур?

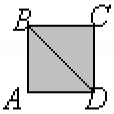


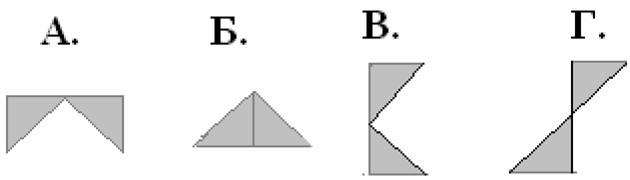


15. Газетный лист сложили пополам 5 раз, каждый раз изменяя направление изгиба. Потом полученный прямоугольник разрезали пополам и развернули. Сколько получилось прямоугольников?

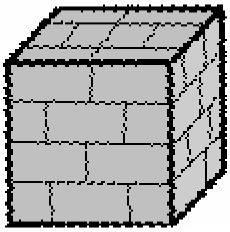
А. 5. **Б.** 7. **В.** 9. **Г.** Ответ отличен от приведённых.

16. Квадрат *ABCD* разрезали по диагонали *BD* и треугольник *ABD* повернули на 90° по часовой стрелке вокруг точки *B*. Какую фигуру получили?





17. Сколько кирпичей в штабеле на рисунке?

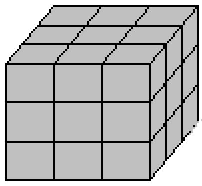


А. 16. **Б.** 32. **В.** 64. **Г.** 256.

18. Какое наименьшее количество плоских разрезов необходимо сделать, чтобы разрезать куб на 64 равных кубика? После каждого разреза полученные части можно как угодно перекладывать.

А. 4. **Б.** 5. **В.** 6. **Г.** Ответ отличен от приведённых.

19. На рисунке изображена фигура, составленная из кубиков. Сколько всего кубиков имеют общую грань не более чем с четырьмя кубиками?



А. 21. **Б.** 20. **В.** 19. **Г.** 7.

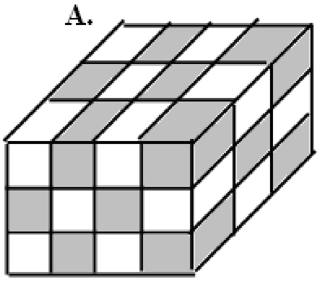
20. Если кубики с ребром в 1 см поставить в ряд, то длина ряда будет равняться 24 м 64 см. Из этих кубиков можно сложить прямоугольный параллелепипед с размерами …

А. 16 см × 7 см × 20 см. **Б.** 8 см × 14 см × 22 см.

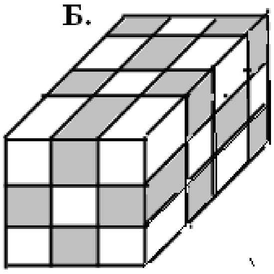
В. 10 см × 12 см × 24 см. **Г.** 6 см × 16 см × 24 см.

21. На каком из рисунков площадь закрашенной части поверхности параллелепипеда, состоящего из белых и черных одинаковых кубиков, меньше площади не закрашенной?

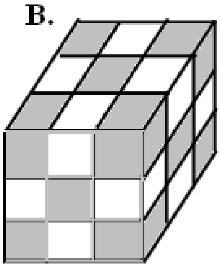
А.



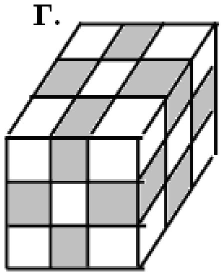
Б.



В.



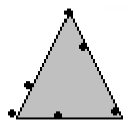
Г.



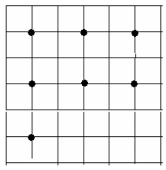
Основное задание

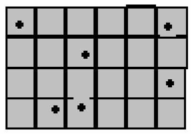
Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. В треугольнике отмечены вершины и, кроме того, по одной точке на каждой из сторон. Какое наибольшее количество треугольников с вершинами в отмеченных точках можно построить?



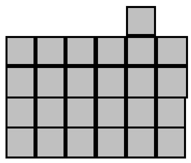
2. Сколько попарно неравных треугольников можно построить с вершинами в точках, изображённых на рисунке?



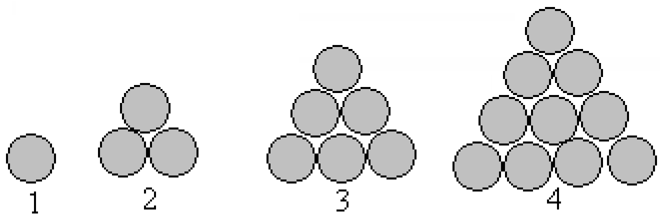


3. Сколькими видами «плиток» из четырёх квадратиков можно покрыть фигуру, изображённую на рисунке, так, чтобы каждая плитка покрывала ровно одну клетку с точкой?

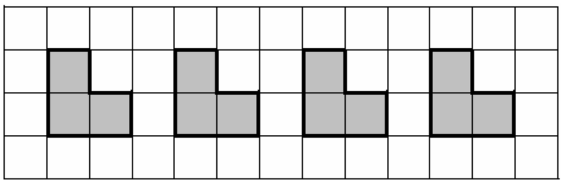
4. Можно ли разрезать вдоль сторон квадратиков фигуру, изображённую на рисунке, на пять равных частей.



5. На рисунке изображены первые четыре фигуры, составленные из равных кругов. Следующие фигуры последовательности образуются так, как четвёртая фигура из третьей, третья из второй, вторая из первой. Сколько кругов понадобится для составления по указанному правилу фигуры с номером 20?

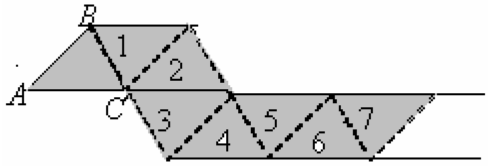


6. Сколько попарно неравных прямоугольников можно составить из всех четырёх уголков, изображённых на рисунке?



7. Можно ли квадрат разрезать на 6 квадратиков?

8. Длинная полоска бумаги разделена пунктирными линиями так, как это показано на рисунке. Полоску складывают сгибанием по пунктирным линиям в последовательности, указанной числами. При этом полоска всегда занимает горизонтальное положение, а треугольники слева после складывания должны лежать сверху треугольников, находящихся дело. В каком положении очутятся вершины *A, B*, *C* после: а) 10 складываний; б) 1000 складываний?



9. Листок бумаги сложили пополам, потом ещё раз и ещё раз. В центре того, что получилось, проделали дырку, а потом развернули лист. Сколько дырок оказалось в листе?

10. Куб составлен из 64 одинаковых кубиков. Сколько кубиков имеют общие грани с пятью или шестью кубиками?

Указания к задачам основного задания

1. Воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Геометрические фигуры». Подсчитайте число треугольников, одной из вершин которых является точка, добавленная к точкам на рис. 11.

2. Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Геометрические фигуры». Треугольники, не равные приведенным там, могут образовывать три точки, не лежащие на соседних вертикальных и на соседних горизонтальных линиях.

3. Виды плиток из четырёх квадратиков изображены на рис. 19.

4. Воспользуйтесь тем, что количество клеток в равных частях является делителем числа клеток, из которых составлена фигура. Выбор формы искомых частей начните с квадратика, который выступает (см. решение задачи 2 из блока «Задачи на разрезание»).

5. Воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Поиск закономерностей».

6. Обратите внимание на то, что из двух уголков можно сложить прямоугольник.

7. Воспользуйтесь разрезанием квадрата на четыре части на рис. 30 б).

8. Воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Преобразование фигур».

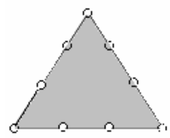
9. Установите результат экспериментально, а потом подумайте над тем, как он получается рассуждениями.

10. Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Пространственные фигуры».

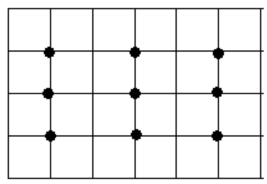
Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. На каждой стороне равностороннего треугольника, то есть треугольника, стороны которого равны, отмечено по 4 точки, включая вершины, которые разделяют каждую сторону на 3 равные части. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках, у которых стороны равны?



2. На рисунке изображены 9 точек.

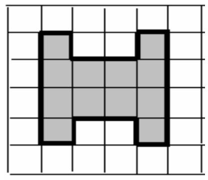


1) Сколько попарно неравных треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

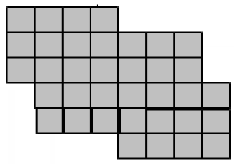
2) Какое наибольшее количество прямоугольников с вершинами в этих точках можно построить?

3) Сколько попарно неравных четырёхугольников с вершинами в этих точках можно построить?

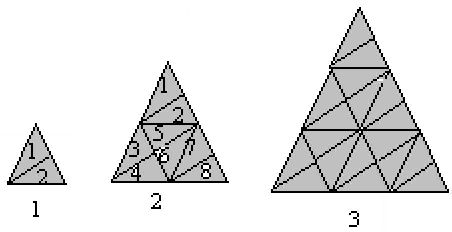
3. Сколькими способы можно разрезать фигуру, изображённую на рисунке, вдоль сторон клеточек на две равные части?



4. Можно ли фигуру, изображенную на рисунке, разрезать вдоль сторон клеточек на: а) четыре равные фигуры; б) шесть равных фигур?

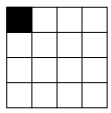


5. Три фигуры, изображенные на рисунке, разделены на маленькие равные треугольники. Если продолжить эту последовательность, то сколько получится маленьких треугольников в 20-й фигуре?



6. Какое наименьшее количество фигур-уголков, состоящих из трёх клеток, нужно использовать, чтобы покрыть ими все клетки прямоугольника размерами 5×8? При этом не исключается и частичное наложение «уголков».

7. Квадрат разделен на 16 маленьких квадратов, и один из них окрашен. Будем считать, что краска, которой он окрашен, не засыхает. Больший квадрат перегибается по любой из проведенных линий, после чего окрашенная часть увеличивается. Потом квадрат переводится в исходное положение. Какое наименьшее число перегибов нужно сделать, чтобы закрасить весь квадрат?



8. Лист бумаги сложили вчетверо (пополам, а потом снова пополам), прокололи в двух местах, развернули и через каждые две полученные точки провели прямую. Сколько прямых при этом вышло?

9. У Малыша очень много одинаковых кубиков. Какое наибольшее количество различных фигур мог составить Малыш, если кубики можно соединять только гранями и каждая сложенная фигура содержит четыре кубика (две фигуры равны, если одну из них можно получить из другой, перемещая её в пространстве).

10. Куб составлен из 125 одинаковых кубиков. Сколько кубиков имеют общую грань не менее чем с пятью кубиками?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Воспользуйтесь тем, что углы треугольника равны.

2. 1) Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Геометрические фигуры», а также результатом решения задачи2 основного задания. Обратите внимание на симметричность расположения точек.

2) Не забудьте, что квадраты являются прямоугольниками.

3) Учтите, что четырёхугольник имеет четыре вершины.

3. Воспользуйтесь симметричностью фигуры.

4. Воспользуйтесь тем, что число клеток в каждой полученной фигуре одно и то же и является частным от деления числа всех клеток на количество полученных фигур.

5. Обратите внимание на то, что у каждой фигуры количество треугольников вдвое больше количества треугольников у соответствующей фигуры на рисунке к задаче 1 подраздела «Реши сам» из блока «Поиск закономерностей».

6. Чтобы обосновать ответ, нужно привести пример покрытия прямоугольника уголками. Воспользуйтесь тем, что из двух уголков можно сложить прямоугольник.

7. Воспользуйтесь симметричностью квадрата.

8. Обратите внимание на зависимость расположения полученных точек от расположения проколов.

9. Воспользуйтесь обычными детскими кубиками для составления указанных фигур. Считайте, что если два кубика соединили гранями, то они склеились.

10. Воспользуйтесь тем, что куб имеет размеры 5 кубиков × 5 кубиков × 5 кубиков.

Задачи для исследования

Ниже приведены задания, которые можно использовать для проведения маленьких исследований. В них поставлена цель, не всегда чётко, и нет никаких ограничений на выбор средств. Вы можете самостоятельно планировать исследование, меняя его цель, основные задачи, средства.

1. Составьте из 5 квадратов всевозможные «плитки» (их называют пентамино, «пента» — пять). Изготовьте набор пентамино из картона. Сколько различных прямоугольников можно сложить, пользуясь пентамино (каждым не больше одного раза).

2. Исследуйте зависимость количества частей, на которые распадается сложенный пополам несколько раз прямоугольный лист бумаги и разрезанный по диагоналям полученного прямоугольника от количества сгибаний.

3. Сколько различных тел Вы можете сложить из 5-и одинаковых кубиков, если кубики можно склеивать только по граням?

4. Покрытие плоскости одинаковыми фигурами (плитками), которые не перекрывают друг друга и не оставляют пустых мест, называют паркетом. Придумайте как можно больше плиток для паркета.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Наглядная геометрия

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 5-6 классов

Учебное пособие