



Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Бродский Я. С., Павлов А. Л.

Учимся рассуждать



**Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 5-6 классов**

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Учимся рассуждать. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 5 – 6 классов. — 56 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 5-6 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, совершенствование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 5-6 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения

Содержание

Рекомендации для обучающихся	6
Учимся рассуждать	8
1. Кто за кем, что за чем	8
Решение задач	9
Проверь себя	14
Реши сам	14
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»	14
2. Кто в чём, что в чём, кто на чём	15
Готовимся к решению задач	15
Решение задач	16
Проверь себя	19
Реши сам	19
Ответы и указания «Готовимся к решению задач»	20
3. Задачи, в которых наряду с правдивой имеется ложная информация	20
Готовимся к решению задач	21
Решение задач	22
Проверь себя	24
Реши сам	24
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»	25
4. Восстановление результатов спортивных соревнований	25
Готовимся к решению задач	25
Решение задач	26
Проверь себя	29
Реши сам	29
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»	29
5. Разгадывание числовых ребусов	30
Готовимся к решению задач	30
Решение задач	31
Проверь себя	32
Реши сам	33
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»	33
6. Доказательство от противного	33
Готовимся к решению задач	34
Решение задач	35
Проверь себя	37
Реши сам	37
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»	37
Контрольное задание	38
Контрольный тест	39
Основное задание	41
Указания к задачам основного задания	44
Дополнительное задание	45
Указания к задачам дополнительного задания	47
Задачи на исследование	49

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют *математическим моделированием*. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено задачам, для решения которых нужно проводить рассуждения. Умение рассуждать необходимо и при обучении, и в повседневной жизни.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы *контрольным заданием*. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и нахождения решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком ?);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Они предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы их решения.

Контрольное задание состоит из:

- **контрольного теста**, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- **основного задания**, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- **дополнительного задания**, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

В контрольном задании (контрольном тесте, основном и дополнительном заданиях) задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком .

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, используемых в приведенных решениях типовых задач, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно:

- *сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;*
- *уяснить требования задачи;*
- *попытаться найти путь к выполнению требований задачи.*

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- *разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;*
- *поняли ли вы приведенное решение задачи;*
- *можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.*

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение

каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что для них не приводятся ответы, из которых нужно выбрать правильный.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в модуле, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

**Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели,
учитывая свою готовность, опыт и способности.**

Учимся рассуждать

Рассуждать нам приходится постоянно. Есть различные способы проведения рассуждений. Настоящее пособие познакомит вас с некоторыми приёмами логических рассуждений. С большинством из них вы уже встречались, правда, не всегда осознавая это.

Умение рассуждать необходимо при обосновании утверждений, изучаемых в математике. Пока вы обосновывали эти утверждения, в основном, рассматривая достаточное число примеров. Но не всегда утверждение справедливое для нескольких примеров, будет выполняться во всех случаях.

Итак, нужно уметь рассуждать. Это необходимо и в повседневной жизни, и в обучении. А чтобы научиться рассуждать, нужно владеть правилами проведения рассуждений.

1. Кто за кем, что за чем

Есть много задач, где предлагается определённая информация о расположении людей или предметов (по прямой или по окружности). По этой информации необходимо установить, в каком порядке расположены эти объекты.

Готовимся к решению задач

1. На книжной полке стоят три учебника: по математике (М), истории (И) и ботанике (Б). Укажите все их возможные расположения.
2. При скольких расположениях, рассмотренных в задании 1, учебники М и Б стоят рядом?
3. Если на полке появится учебник по литературе (Л), то на каких местах его можно поставить в каждом расположении, рассмотренных в задании 1?
4. В шахматном турнире игрок А выиграл у Б, Б обыграл В, А проиграл В. Можно ли расположить эту тройку игроков по их силе в шахматной игре?
5. В шахматном турнире участвовало 4 человека: А, Б, В и Г. Оказалось, что А выиграл у Б, В выиграл у Б, Б обыграл Г, В проиграл А, Г обыграл А, а В и Г сыграли вничью. Кто занял первое место, а кто последнее?
6. Есть ли в турнире, описанном в предыдущем задании, участники, набравшие одинаковое количество очков?

7. Четыре спортсмена А, Б, В и Г построились в одну колонну. Оказалось, что А не стоит первым, В находится между А и Б, Б стоит рядом с В, а Г — рядом с Б. В каком порядке стоят указанные спортсмены?

8. Сколько будет возможных расположений в ситуации, описанной в предыдущем задании, если отбросить последнее условие?

Решение задач

В следующей задаче нужно расположить несколько объектов на прямой.

Задача 1. Бабушка сидит рядом с внучкой Дашей, но не рядом с куклой. Кукла не сидит рядом с мамой Даши. Кто сидит рядом с мамой Даши?



Анализируем. Решение этой задачи состоит в рассмотрении всех возможных расположений бабушки, внучки Даши, куклы и Дашиной мамы. Всех этих расположений много, можно подсчитать, что их число равно 24. Но нет необходимости выписывать все, нужно рассматривать те, которые удовлетворяют условию. Важно только при переборе всевозможных взаимных расположений действующих лиц не пропустить ни одного. Для этого целесообразно ввести обозначения для всех действующих лиц. Вначале нужно рассмотреть те их расположения, которые удовлетворяют одному из требований, а затем отбросить те, которые не удовлетворяют остальным. Если их несколько, то последовательно рассмотреть их по одному. После этого сделать требуемый вывод.

Решаем. Введём следующие обозначения: Б — бабушка, Д — Даша, К — кукла, М — мама. Условию «бабушка сидит рядом с внучкой Дашей, но не рядом с куклой» удовлетворяют следующие расположения:

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1) Б, Д, К, М | 2) Б, Д, М, К | 3) Д, Б, М, К | 4) К, Д, Б, М |
| 5) М, Б, Д, К | 6) К, М, Д, Б | 7) К, М, Б, Д | 8) М, К, Д, Б |

Этих расположений оказалось 8.

Условию «кукла не сидит рядом с мамой Даши» не удовлетворяют расположения 1), 2), 3) 6), 7), 8). Остались расположения 4) и 5). Нам требуется

выяснить, кто сидит рядом с мамой Маши. В обоих оставшихся расположениях рядом с мамой сидит бабушка.

Ответ. Бабушка.



1. Кто сидит рядом с куклой?
2. Сколько расположений удовлетворяет условию «Кукла не сидит рядом с мамой Маши»?
3. Можно ли было начинать решение задачи с рассмотрения расположений, удовлетворяющих условию «Кукла не сидит рядом с мамой Маши»?

Конечно, далеко не всегда удаётся найти требуемое расположение так легко. В этом мы убедимся, рассматривая следующий пример.

Задача 2. Четверо друзей Алексей, Богдан, Владимир, Григорий соревновались в перетягивании каната. Богдан с Григорием легко победили Алексея с Владимиром. Но когда Богдан стал в паре с Алексеем, то победа над Владимиром с Григорием досталась им уже не так легко. А когда Богдан с Владимиром оказались против Алексея с Григорием, то ни одна из этих пар не могла победить другую. Расположите друзей по убыванию их силы.



Анализируем. В этом задании тоже нужно расположить в определённом порядке четырёх друзей, но не на скамейке, а по их силе. Речь идёт о фразах «легко победили», «победа досталась не так легко», «ни одна пара не могла победить другую». Нахождение ответа на поставленный вопрос потребует тщательного анализа не только условия, но и промежуточных выводов.

Решаем. Обозначим друзей первыми буквами их имён, то есть А, Б, В, Г. Тот факт, что один из друзей сильнее другого, будем обозначать символом $\succ$. Тот факт, что Богдан с Григорием победили Алексея с Владимиром, символически можно записать так: $Б + Г \succ А + В$. Победа Богдана с Алексеем над Владимиром с Григорием запишется так: $Б + А \succ В + Г$. Информация о том, что эта победа досталась не так легко, как предыдущая, означает, что Владимир с Гри-

горием сильнее Алексея с Владимиром, то есть $B + Г > A + В$. А это означает, что Григорий сильнее Алексея, то есть $Г > А$.

Из предпоследнего предложения получаем: $Б + В = Г + А$. Сравним это соотношение с соотношением $Б + А > В + Г$. Сравнение показывает, что перемена местами Владимира и Алексея ослабила пару, в которой находился Богдан и усилила пару, в которой находился Григорий. А это означает, что $А > В$. Точно также сравнение соотношений $Б + Г > А + В$ и $Б + В = Г + А$ показывает, что перемена местами Владимира и Григория ослабила пару, в которой находился Богдан и усилила пару, в которой находился Алексей. А это означает, что $Г > В$. Так как $Б + В = Г + А$, а $А > В$, то $Б > Г$. Так как $Б > Г$, а $Г > А$, то $Б > А$. А так как $А > В$, то $Б > В$, то есть Богдан — самый сильный, следующий по силе Григорий: $Г > А$, $Г > В$. Далее идёт Алексей, за ним Владимир.

Ответ: $Б > Г > А > В$.

1. На левой чашке чашечных весов лежат груша и яблоко, на правой — такая же груша и банан. Левая чашка перевешивает правую. Что тяжелее: яблоко или банан?

2. На левой чашке чашечных весов лежат груша и банан, на правой — яблоко и киви (груша, банан и яблоко те же, что в вопросе 1). Весы уравновешены. Что тяжелее: груша или киви?

3. Если груша тяжелее яблока, а яблоко тяжелее банана, то что тяжелее: груша или банан?

Число всевозможных расположений объектов может быть очень большим, рассмотреть все невозможно или утомительно, приходится тщательно анализировать всю имеющуюся информацию.

Задача 3. Вдоль аллеи, которая расположена с юга на север, растут вишня, груша, абрикосовое дерево, персиковое дерево, слива и яблоня. Известно, что яблоня расположена севернее груши, но южнее абрикосового дерева. Груша растёт рядом со сливой, а абрикосовое дерево — рядом с персиковым. Между вишней и персиковым деревом



есть ещё одно дерево, а между яблоней и персиковым деревом — два дерева; столько же деревьев между грушей и вишней. В каком порядке растут деревья?

Анализируем. Разместить 6 деревьев вдоль аллеи можно 720 способами (в этом мы сможем убедиться при изучении следующих пособий). Проверка всех этих вариантов была б очень длительной процедурой. Будем анализировать все условия задания с помощью таблицы, строки которой будут соответствовать названиям деревьев, а столбцы — местам, которые они занимают при расположении с севера на юг. В клетках на пересечении строк и столбцов знаком «–» будем обозначать то, что дерево не может занимать этого места, а знаком «+» — занимает именно это место.

Решаем. Обозначим фруктовые деревья первыми буквами названий их плодов, а места деревьев с севера на юг цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6. По первому условию, яблоня не на первом месте, так как она растёт южнее абрикосового дерева. Она не может быть и на шестом месте, ибо расположена севернее груши. Поэтому груша не может быть ни на первом, ни на втором местах. Так как абрикосовое дерево растёт севернее яблони, то оно не может быть ни на шестом, ни на пятом местах. Результаты использования первого условия можно занести в следующую таблицу.

Дерево Место	1	2	3	4	5	6
В.						
Г.	–	–				
А.					–	–
П.						
С.						
Я.	–					–

Согласно второму условию, груша растёт рядом со сливой, поэтому слива не может быть на первом месте (ведь груши нет ни на первом, ни на втором местах). Так как абрикосовое дерево растёт рядом с персиковым деревом, то персиковое дерево не может быть шестым. Результаты использования

Дерево Место	1	2	3	4	5	6
В.						
Г.	–	–				
А.					–	–
П.						–
С.	–					
Я.	–					–

первого и второго условий можно занести в следующую таблицу.

Согласно третьему условию, между яблоней и персиковым деревом растут два дерева, поэтому персиковое дерево не может быть ни на третьем, ни на четвёртом местах. Так как между грушей и вишней два дерева и между вишней и персиковым деревом растёт одно дерево, то вишня не может быть ни на первом, ни на шестом местах. Результаты использования всех трёх условий занесены в следующую таблицу.

Дерево Место	1	2	3	4	5	6
В.	—					—
Г.	—	—				
А.					—	—
П.			—	—		—
С.	—					
Я.	—					—

Из таблицы видно, что на первом месте растёт или абрикосовое, или персиковое дерево.

Если абрикосовое дерево на первом месте, то персиковое на втором (они растут рядом). Поэтому вишня на четвёртом месте (между вишней и персиковым деревом растёт одно дерево), а яблоня на пятом (между яблоней и персиковым деревом — два дерева). Для груши и сливы остались третье и шестое места. Но по условию эти деревья растут рядом. Итак, абрикосовое дерево растёт не на первом месте, поэтому на первом месте может быть только персиковое дерево. Тогда на втором месте абрикосовое дерево, вишня на третьем месте, яблоня на четвёртом, груша на шестом, слива на пятом.

Ответ: П, А, В, Я, С, Г.

1. На занятии спортивной секции в шеренгу выстроились по росту пятеро спортсменов. Алексей — самый высокий, Дмитрий — самый низкий. Между Алексеем и Григорием стоят два человека. На каком месте может стоять Владимир?

2. На занятии спортивной секции в шеренгу выстроились пятеро спортсменов. По обе стороны от Алексея стоят Борис и Дмитрий. Какие места не может занимать Алексей?

3. На занятии спортивной секции в шеренгу выстроились пятеро спортсменов. Алексей занимает третье место. По обе стороны от Алексея стоят Борис и Дмитрий. Какие места может занимать Дмитрий?

4. На занятии спортивной секции в шеренгу выстроились пятеро спортсменов. Известно, что между двумя из них стоят два человека. Какие места могут занимать остальные три спортсмена?

Проверь себя

1. Мальчик, его папа и дедушка выстроились в колонну по одному по возрасту (старший по возрасту стоит позади младшего). Кто стоит на первом месте?

А. Дедушка. Б. Папа. В. Мальчик. Г. Не хватает данных.

2. Известно, что груша тяжелее яблока, а яблоко легче банана. Какой плод самый тяжёлый?

А. Яблоко. Б. Банан. В. Груша. Г. Определить нельзя.

3. Моя остановка трамвая седьмая от одного конца маршрута и двенадцатая — от другого. Сколько на этом маршруте всего остановок?

А. 17. Б. 18. В. 19. Г. 20.

Реши сам

1. Аня, Катя, Вера, Надя и Люба стоят в очереди в театральную кассу. Если бы Аня стояла посередине очереди, то она оказалась бы между Катей и Любой, а если бы Аня стала в конец очереди, то рядом с ней могла бы быть Надя. Но Аня встала перед всеми своими подругами. Кто стоит третьей?

2. Составьте последовательность из 8 букв с помощью букв а, б, в, г, взяв каждую из них по два раза, так, чтобы между буквами «а» стояла одна буква, между буквами «б» — две, между буквами «в» — три, между буквами «г» — четыре.

3. В одном дворе живут четверо юношей. Известно, что Вадим и шофёр старше Сергея; Николай и слесарь увлекаются плаванием; библиотекарь — самый младший из этих юношей; по вечерам Антон и парикмахер играют в домино против Сергея и библиотекаря. Определите профессию каждого из этих юношей.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. МИБ, МБИ, ИМБ, ИБМ, БМИ, БИМ. 2. При 4-х. 3. Перед первым, между

первым и вторым, между вторым и третьим, после третьего. 4. Нет. 5. А — первое место, Б — последнее. 6. Есть В и Г. 7. ГБВА. 8. Два.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Даша. 2) 12. 3) Да.

Задача 2. 1) Яблоко. 2) Груша. 3) Груша.

Задача 3. 1) На 2-м или на 3-м. 2) 2-е или 4-е. 3) 2-е, 3-е, 5-е или 1-е, 3-е, 4-е

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1.В 2.Г 3.Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Катя или Люба. Выясните, кто может занимать 2-е и 3-е места.

2. Например, б в г б а в а г. Попробуйте найти другие решения.

3. Вадим – парикмахер, Сергей – слесарь, Николай – библиотекарь, Антон – шофёр. Проведите рассуждения с помощью таблицы, подобной рассмотренным в задачах.

2. Кто в чём, что в чём, кто на чём

Распространёнными являются задачи, где встречаются две группы объектов, связанные между собой. Например, имена людей и места их жительства, или имена людей и их профессии, или названия видов посуды и их содержимого и т. д. Как правило, в этих задачах требуется установить соответствие между этими группами объектов. Фактически и в задачах 1 – 3 предыдущего блока устанавливалось соответствие между людьми, деревьями, игрушками (первая группа) и местами, которые они занимают (на скамейке, по своей силе, на аллее) — это вторая группа. При решении этих задач удобно применять таблицы, подобные использованной при решении примера 3.

Готовимся к решению задач

1. В семье три девочки: Вера, Надя и Люба. Они занимаются разными видами спорта: гимнастикой, баскетболом и плаванием. Плаванием занимается не Вера. Дни занятий пловчихи между днями занятий баскетболистки и Нади. Определите, кто каким видом спорта занимается.

2. В спортивном лагере подружались Алёша, Боря и Володя. Они закончили 5-й, 6-й и 7-й классы. Боря младше Алеши на год, а Володя закончил на класс больше, чем Володя. Кто какой класс закончил?

Решение задач

В следующей задаче нужно установить соответствие между четырьмя жидкостями и четырьмя посудами.

Задача 1. В бутылке, стакане, кувшине и банке находится молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, а



сосуд с лимонадом находится между кувшином и сосудом с квасом, в банке — не лимонад и не вода. Стакан находится около банки и сосуда с молоком. Как распределены эти жидкости по сосудам?

Анализируем. Для решения задачи удобно проводить анализ условия с помощью таблицы такого вида.

	Вода	Молоко	Лимонад	Квас
Бутылка				
Стакан				
Кувшин				
Банка				

Пользуясь условием можно в ней поставить прочерк в каких сосудах не содержится та или иная жидкость. Если окажется, что в каком-то столбце только одна клетка не отмеченная, то это означает, что сосуд соответствующий этой клетке содержит жидкость, соответствующую этой клетке. Эту клетку отметим крестиком в таблице и поставим прочерки во всех клетках строки, содержащий крестик. Это может позволить определить содержимое еще одного сосуда. А потом еще одного.

Решаем. По условию вода и молоко не в бутылке, а в банке — не лимонад и не вода. Так как сосуд с лимонадом находится между кувшином и сосудом с квасом, то ли-

	Вода	Молоко	Лимонад	Квас
Бутылка	-	-		
Стакан		-		
Кувшин			-	-
Банка	-	-	-	

монад и квас не могут быть в кувшине. Так как стакан находится около банки и сосуда с молоком, то молоко — не в стакане и не в банке. Отмечаем это в таблице.

Оказалось, что во втором столбце не вычеркнута только одна клетка. Получаем, что молоко в кувшине. Отмечаем это крестиком в таблице. Но тогда в кувшине не может быть вода. Отмечаем это прочерком в третьей строке и в первом столбце.

	Вода	Молоко	Лимонад	Квас
Бутылка	-	-		
Стакан		-		
Кувшин	-	×	-	-
Банка	-	-	-	

Теперь ясно, что вода может быть только в стакане. В стакане не могут быть лимонад и квас. Лимонад поэтому в бутылке, а квас — в банке.

	Вода	Молоко	Лимонад	Квас
Бутылка	-	-	×	-
Стакан	×	-	-	-
Кувшин	-	×	-	-
Банка	-	-	-	×



Ответ: Вода в стакане, молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке

1. Из условия о том, что стакан находится около банки и сосуда с молоком, можно ли сделать вывод о том, что молоко находится в банке?
2. Можно ли решить задачу, исключив информацию о том, что лимонад не в кувшине?
3. Можно ли решить задачу, исключив информацию о том, что квас и лимонад не в кувшине?

В задаче 1 рассматривалось соответствие между двумя объектами: видами сосудов и их содержимым. Сложнее рассматриваются ситуации, где нужно установить соответствие между тремя объектами. О такой ситуации идёт речь в следующем примере.

Задача 2. Пять велогонщиков А, Б, В, Г, Д, родившиеся в Киеве, Львове, Одессе, Харькове и Черкассах,



прибыли на соревнования на велосипедах, изготовленных в перечисленных городах, причём никто из гонщиков не прибыл на велосипеде, изготовленном в его родном городе. Львовянин выступал на машине из Харькова, Г — на машине из Одессы, Д — на машине Львовского завода, А — на машине, изготовленной в том городе, в котором родился Б; В родился в Черкассах. Установить, кто на каких машинах ехал.

Анализируем. В этой задаче речь идёт о трёх группах объектов: о гонщиках, о городах, в которых они родились, о городах, в которых изготовлены их велосипеды. Нецелесообразно пытаться устанавливать соответствие между всеми тремя группами. Полезнее вначале попытаться установить соответствие между какими-то двумя. Какими? Так как в задании требуется установить, кто на каких машинах ехал, то целесообразно установить соответствие между гонщиками и городами, в которых изготовлены их велосипеды (обозначим их первыми буквами их названий: К, Л, О, Х, Ч). Результаты рассмотрения условий удобно поместить в таблицу, подобную рассмотренным в предыдущем задании, сохранив обозначения.

Решаем. Обозначим города, в которых изготовлены велосипеды первыми буквами их названий: К, Л, О, Х, Ч. Отметим в таблице условия: Г — на машине из Одессы и поэтому не может быть на машинах, изготовленных в других городах, Д — на машине Львовского завода и поэтому не может быть на машинах, изготовленных в других городах.

	К	Л	О	Х	Ч
А		—	—		
Б		—	—		
В		—	—		
Г	—	—	×	—	—
Д	—	×	—	—	—

Так как В родился в Черкассах, то его машина не может быть изготовлена в Черкассах. Отметим это в таблице.

Из таблицы видно, что на Черкасской машине мог быть или А, или Б. Предположим, что А приехал на Черкасской машине. Но в этом случае Б родился в Черкассах (А приехал на машине, изготовленной в том городе, в котором ро-

	К	Л	О	Х	Ч
А		—	—		
Б		—	—		
В		—	—		—
Г	—	—	×	—	—
Д	—	×	—	—	—

дился Б). Это невозможно, так как в этом городе, по условию родился В. Итак, на Черкасской машине приехал Б. Отмечаем это в таблице.

Из таблицы видно, что на Киевской машине приехал или А, или В. Если А приехал на Киевской машине, то В приехал на Харьковской. Это значит, что В родился во Львове (Львовянин выступал на машине из Харькова), а это противоречит тому, что В родился в Черкассах). Итак, на Киевской машине приехал В, но тогда на Харьковской приехал А. Занесём эти результаты в таблицу.

	К	Л	О	Х	Ч
А		—	—		—
Б	—	—	—	—	×
В		—	—		—
Г	—	—	×	—	—
Д	—	×	—	—	—

1. В каком городе родился каждый из гонимых?



2. Можно ли, не находя, на какой машине приехал каждый гонимый, установить, в каком городе родился каждый из гонимых?

Проверь себя

1. Из трёх учеников (Антон, Богдан и Виталий) двое — отличники. Определите отличников, если в паре Антон и Богдан — один отличник, в паре Богдан и Виталий — тоже один отличник.

А. Антон и Виталий Б. Антон и Богдан.

В. Богдан и Виталий. Г. Определить нельзя.

2. Три подружки Рая, Майя и Галя летом были в спортивном лагере. Каждая из них увлекается одним из видов спорта: теннисом, плаванием, волейболом. В первый же день Галя и волейболистка ходили любоваться водопадом. Майя старше теннисистки, а волейболистка ровесница одной из девочек. Каким видом спорта занималась Рая?

А. Теннисом. Б. Плаванием. В. Волейболом. Г. Определить невозможно.

Реши сам

1. На улице, став в кружок, беседуют 4 девочки: Аня, Валя, Галя и Надя. Девочка в зелёном платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. В каком платье была Аня?

2. Иванов, Карпов, Петров и Сидоров члены добровольных спортивных обществ «Авангард», «Динамо», «Локомотив» и «Спартак». При этом: спартаковец — чемпион по шахматам, а Петров совсем не умеет играть в шахматы; хотя динамовец и занимается плаванием, но теннисист и Иванов мало уступают ему; футболист и Петров живут в одном доме, а Карпов — совсем на другой улице; шахматист и теннисист — старые друзья авангардовца; Козлов и динамовец — однолетки, они старше Петрова. Кто находится в каком спортивном обществе и каким видом спорта занимается?

Ответы и указания «Готовимся к решению задач»

1. Вера — баскетболом, Надя — гимнастикой, Люба — плаванием. **2.** Алёша закончил 6-й класс, Боря закончил 5-й класс, Володя закончил 7-й класс.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Нет. 2) Нет. 3) Нет.

Задача 2. 1) А — во Львове, Б — в Харькове, В — в Черкассах, Г — в Киеве, Д — в Одессе. 2) Нет.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1, А. 2. Г.

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. В белом. Проанализируйте каждое условие задания.

2. Иванов в Авангарде, футболист; б) Карпов в Спартаке, шахматист; в) Петров во Львове, теннисист, Сидоров в Динамо, пловец. Воспользуйтесь решением задачи 2.

3. Задачи, в которых наряду с правдивой имеется и ложная информация

Во всех рассмотренных ранее примерах решение задачи находилось путём анализа информации, приводимой в условии, часто в завуалированном виде. Но вся эта информация была верной. Нередко встречаются задачи, в которых часть информации, правда, неизвестно какая, является ложной. Для решения таких задач бывает полезным предположить, что та или иная информация

ложна. Если логические рассуждения, выполненные при этом предположении, приведут к противоречию, то можно будет сделать вывод о том, что наше предположение неверно. Если же эти логические рассуждения не приводят к противоречию, то мы не можем сделать вывод о том, ложна ли или верна рассматриваемая информация. Мы высказываем предположение о ложности другой части информации. Продолжаем это до обнаружения ложной информации. После этого задача решается приёмами, рассмотренными в предыдущих пунктах.

Готовимся к решению задач

1. Двух ребят спросили, какого цвета автомобиль стоял во дворе и какой номер у него? Ребята дали следующие ответы:

1. Автомобиль — чёрный, его номер — 6954.
2. Автомобиль — не чёрный, его номер оканчивался на 4.

Выяснилось, что каждый один раз сказал правду, а другой раз — нет. Можно ли по этим ответам установить номер автомобиля?

2. Трёх ребят спросили, какого цвета автомобиль стоял во дворе и какой номер у него? Ребята дали следующие ответы:

1. Автомобиль — чёрный, его номер — 6954.
2. Автомобиль — не чёрный и не зелёный, его номер оканчивался на 4.
3. Автомобиль — зелёный. Его номер — 4596.

Выяснилось, что каждый один раз сказал правду, а другой раз — нет. Какого цвета автомобиль?

3. Борис, Дмитрий и Сергей — свидетели аварии на дороге. Борис показал, что виновники аварии скрылись на синем «Москвиче». Дмитрий утверждал, что это была черная «Лада», а Сергей — что это была «Волга», но не синяя. По рассеянности каждый из них указал правильно либо только марку, либо только цвет машины. На какой машине уехали нарушители?

4. Четыре спортсменки: Аня, Валя, Галя и Даша — заняли первые четыре места в соревновании по гимнастике, причём никто из них не делил между собой эти места. На вопрос, какое место заняла каждая из них, трое болельщиков ответили:

- «Аня — второе место, Даша — третье место».
- «Аня — первое место, Валя — второе место».
- «Галя — второе место, Даша — четвёртое место».

Оказалось, что каждый из болельщиков ошибся один раз. Какое место заняла каждая спортсменка?

Решение задач

В следующей задаче приведено 5 прогнозов, из которых ровно один оказался полностью неверным.

Задача 1. Футбольные команды пяти школ города принимают участие в розыгрыше кубка. Тренерами команд этих школ, были высказаны прогнозы об участниках финала. Если занумеровать команды, то прогнозы были такими: №1 и №4; №3 и №5; №2 и №3; №2 и №4; №4 и №5. После завершения полуфинальных матчей оказалось, что в одном из этих прогнозов ни одна из названных команд не вышла в финал, а в остальных правильно названа только одна команда. Какие же две команды вышли в финал?



Анализируем. Для решения задачи полезно предположить, что какая-то информация ложна. Проводим логические рассуждения с учётом этого предположения. Если они приведут к противоречию, то можно будет сделать вывод о том, что наше предположение неверно. В противном случае высказываем предположение о ложности другой части информации. Продолжаем это до обнаружения ложной информации.

Решаем. Предположим, что первый из названных прогнозов (№1 и №4) полностью неверен, то есть команды №1 и №4 не вышли в финал. Теперь рассмотрим прогнозы, в которых фигурирует одна из этих команд. По условию в них правильно названа только одна команда. Из прогноза №4 и №5 следует, что команда №5 вышла в финал. Точно также из прогноза №2 и №4 следует, что команда №2 вышла в финал. У нас пока получилось, что в финал вышли команды №2 и №5. Проверим, согласуется ли это с двумя остальными прогнозами. Используя эти результаты, из прогноза №3 и №5 заключаем, что команда

№3 не вышла в финал, а из прогноза №2 и №3 получаем снова, что команда №3 не вышла в финал. Никаких противоречий не получено.

Ответ. В финал вышли команды №2 и №5.



1. К какому выводу Вы придёте, если с самого начала предположите, что полностью неверным является прогноз: а) №3 и №5; б) №2 и №3?
2. К какому выводу Вы придёте, если с самого начала предположите, что в прогнозе: а) №1 и №4; б) №3 и №5 правильно названа только одна команда?

Иногда вся приводимая в задаче информация неверна. Тогда, как правило, в условии приводятся какие-то действия, которые позволяют перейти к логическим рассуждениям. И снова приходится высказывать какие-то предположения.

Задача 2. На столе расставлены три закрытые коробки. В одной из них находится две монеты по 25 коп., в другой — 2 монеты по 50 коп., в третьей одна двадцати пятикопеечная и одна пятидесятикопеечная монета. На крышках коробок написано: 50 коп., 75 коп., 1 руб., но ни одна из надписей не соответствует содержимому коробки. Из коробки с надписью «75 коп.» извлекли одну монету и положили на стол перед коробкой. Можно ли, взглянув на эту монету, сказать, какие монеты находятся в каждой из коробок?



Анализируем. При анализе различных вариантов содержимого коробок можно использовать, что для каждой коробки есть только два варианта: ведь вариант, вытекающий из надписей, неверен. Для решения задачи нужно проанализировать варианты содержимого коробки с надписью «75 коп.».

Решаем. В коробке с надписью «75 коп.» могут находиться или две монеты по 25 коп. или 2 монеты по 50 коп. Когда из неё извлекли одну монету и положили на стол перед коробкой, то, взглянув на эту монету, можно сразу определить, какие монеты находятся в этой коробке. Пусть, например, это будут две монеты по 25 коп. Тогда в коробке с надписью «1 руб.» не могут лежать две

монеты по 50 коп, так как ни одна из надписей не соответствует содержимому коробки. Остаётся единственный вариант: одна двадцатипятикопеечная и одна пятидесятикопеечная монета. В коробке с надписью «50 коп.» — две монеты по 50 коп. Точно также рассматривается случай, когда в коробке с надписью «75 коп.» находятся 2 монеты по 50 коп.

Ответ. Можно.



1. Какой вывод вы сделаете, предположив, что в коробке с надписью «75 коп.» находятся 2 монеты по 50 коп?

2. Какой вывод вы сделаете, предположив, что в коробке с надписью «1 руб.» находятся 2 монеты по 25 коп?

3. Какой вывод вы сделаете, предположив, что в коробке с надписью «50 коп.» находятся 2 монеты по 50 коп?

Проверь себя

1. В квартирах № 1, 2, 3 жили трое котят: белый, чёрный и рыжий. В квартирах № 1 и № 2 жил не чёрный котёнок. Белый котёнок жил не в квартире № 1. В какой квартире жил рыжий котёнок?

А. № 1.

Б. № 2.

В. № 3.

Г. Определить нельзя.

2. Сколькими способами можно записать в строку первые 4 буквы русского алфавита так, чтобы ни одна буква не стояла на месте с номером, совпадающим с номером этой буквы в алфавите?

А. 24.

Б. 12.

В. 9.

Г. 6.

Реши сам

1. Один из трёх братьев поставил на скатерть кляксу.

— Кто испачкал скатерть? — спросила бабушка?

— Витя не ставил кляксу, — сказал Алёша. — Это сделал Боря.

— Это Витя поставил кляксу, — сказал Боря. — А Алёша не пачкал скатерть.

— Боря не мог это сделать, а я сегодня не готовил уроки, сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух своих заявлений сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

2. В трёх коробках лежит по два шарика — белые, синие или красные. На крышках коробок написаны цвета вложенных шариков: БЧ, БС, СЧ, но ни одна из надписей не соответствует содержимому коробки. Можно ли, вынув из одной коробки один шарик, определить, какого цвета шарики в каждой из коробок?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Нет. 2. Автомобиль зелёный. 3. На чёрном «Москвиче». 4. Аня — первое место; Галя — второе; Даша — третье; Валя — четвертое место.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) а) Будет ещё один полностью неверный прогноз; б) один прогноз будет полностью верным. 2) а) будет полностью верный прогноз; б) не будет полностью неверного прогноза. **Задача 2.** 1) В коробке с надписью «1 руб.» — 25 коп. и 25 коп., в коробке «50» — 25 коп. и 50 коп. 2) В коробке «50» — 25 коп. и 50 коп., в коробке «75» — 50 коп. и 50 коп. 3) В коробке с надписью «1 руб.» — 25 коп. и 25 коп., в коробке «75» — 50 коп. и 50 коп.».

Ответы к заданиям «Проверь себя» 1. А. 2. В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. **Боря.** Предположите, что кто-то из мальчиков соврал.

2. **Да.** Воспользуйтесь решением задачи 2.

4. Восстановление результатов спортивных соревнований

Приёмы рассуждений, использованных при решении примеров в предыдущих пунктах, могут быть успешно использованы при восстановлении утраченной информации, в частности при восстановлении результатов спортивных соревнований.

Готовимся к решению задач

В футболе за победу дают 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

1. В футбольном турнире некоторая команда забила всего один мяч, при этом выиграла только одну игру. Каков счёт этой игры?

2. В футбольном турнире некоторая команда пропустила всего один мяч, при этом проиграла только одну игру. Каков счёт этой игры?
3. В футбольном турнире некоторая команда провела 3 игры, выиграв одну игру, забив 2 мяча и пропустив один мяч. Верно ли, что по крайней мере одна игра закончилась нулевой ничьей?
4. В футбольном турнире некоторая команда провела 3 игры, выиграв одну игру, забив 2 мяча и пропустив один мяч. Могла ли эта команда не проиграть ни одной игры?
5. В футбольном турнире некоторая команда провела 3 игры, выиграв одну игру, забив 2 мяча и пропустив один мяч. Сколько игр могла проиграть эта команда?

В шахматном турнире за победу начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение.

6. Чему равна сумма очков, набранных обоими участниками в каждой шахматной партии?
7. В однокруговом шахматном турнире с восемью участниками все партии закончились вничью. Сколько всего было сыграно партий?
8. Проведен шахматный турнир с десятью участниками. Сколько всего очков набрали все участники?

Решение задач

В следующей задаче необходимо восстановить часть результатов проведенных хоккейных матчей.

Задача 1. Хоккейная команда провела три матча, забив в ворота противника всего 3 шайбы и пропустив 1 шайбу. Один из матчей она выиграла, второй свела вничью, а третий проиграла. С каким счетом она выиграла матч?



Анализируем. Для решения задачи необходимо сделать выводы из того, что команда пропустила 1 шайбу, проиграла один матч, один матч свела вничью и один матч выиграла.

Решаем. Команда один матч проиграла. В проигранном матче обязатель

но пропускаются шайбы. Так как пропущенных шайб только одна, то она как раз была пропущена в этом матче. Поскольку пропущенных шайб в проигранном матче только одна, то в этом матче забитых не было. Следовательно, счёт в этом матче 0:1. В матче, сведенном вничью, пропущенных шайб не было, единственным его результатом может быть 0:0. Тогда на выигранный матч остаётся 3 забитые шайбы и ни одной пропущенной. Его счёт 3:0.

Ответ. 3:0.



1. *Мог ли матч, сведенный вничью, завершиться со счётом 1:1?*
2. *Могла ли команда проиграть матч со счётом 0:2?*
3. *Могла ли команда выиграть со счётом 3:1?*

В следующей задаче значительно больше, по сравнению с предыдущей, информации нужно восстановить, но и значительно больше сохранено.

Задача 2. Восстановите итоговую таблицу футбольного турнира четырех студенческих команд, который проходил в один круг. Известна часть таблицы и то, что биологи выиграли у химиков, а после первого тайма в игре математиков и физиков счет был 1:1. В таблице буквой



В обозначено количество выигранных встреч, Н — ничьих, П — поражений, а запись $a:b$ означает, что забито a и пропущено b мячей.

	Команды	1	2	3	4	В	Н	П	$a:b$
1	Биологи					1	0	2	7:6
2	Математики								2:1
3	Физики								6:5
4	Химики								0:3

Анализируем. Информации для анализа немного, поэтому использовать её надо полностью. Больше всего информации о команде биологов. Можно установить, как они сыграли с химиками, затем с математиками и физиками, правда вначале без установления количеств забитых и пропущенных мячей. Затем можно проанализировать информацию о команде математиков, а затем химиков и физиков.

Решаем. Анализ имеющейся информации начнём со 2-й строки и 2-го столбца, соответствующих математикам. Они всего забили 2 мяча (один из них физикам) и пропустили 1 мяч (физикам). Так как математики выиграли у биологов (биологи выиграли только 1 матч, именно у химиков, а ничьих у них не было), то второй мяч они забили биологам, то есть матч математиков с биологами закончился со счётом 1:0. Отсюда следует, что матч с химиками математики свели вничью, со счётом 0:0. Занесём эти результаты в таблицу.

	Команды	1	2	3	4	В	Н	П	$a:b$
1	Биологи		0:1			1	0	2	7:6
2	Математики	1:0		1:1	0:0	1	2	0	2:1
3	Физики		1:1						6:5
4	Химики		0:0						0:3

Биологи могли выиграть у химиков со счётом 1:0 или 2:0 или 3:0 (ведь химики пропустили 3 мяча и ни одного не забили). Проанализируем каждый из этих вариантов. Если биологи выиграли со счётом 1:0, то учитывая, что они забили 7 мячей и пропустили 2, получим, что они сыграли с физиками со счётом 6:5, что невозможно, так как биологи выиграли всего одну игру. Предположим, что биологи выиграли у химиков со счётом 2:0. Тогда игра с физиками закончилась бы со счётом 5:5, у физиков бы было 6 пропущенных мячей. Это противоречит тому, что у физиков соотношение забитых и пропущенных мячей составляет 6:5 (они же один мяч пропустили в матче с математиками). Остаётся последний вариант: биологи выиграли у химиков со счётом 3:0. Тогда их матч с физиками закончился со счётом 4:5, физики матч с химиками свели вничью со счётом 0:0. Окончательно итоговая таблица имеет следующий вид.

	Команды	1	2	3	4	В	Н	П	$a:b$
1	Биологи		0:1	4:5	3:0	1	0	2	7:6
2	Математики	1:0		1:1	0:0	1	2	0	2:1
3	Физики	5:4	1:1		0:0	1	2	0	6:5
4	Химики	0:3	0:0	0:0		0	2	1	0:3



1. Какой вывод можно сделать из того, что у биологов одна победа??
2. Из чего вытекает, что биологи выиграли только у химиков?
3. Из чего вытекает, что математики не имеют поражений?

Проверь себя

1. Из четырех пловцов А, Б, В, Г третье место занял самый младший. При этом А проплыл дистанцию медленнее, чем В, а Г – медленнее, чем Б и В. Известно также, что Б младше А, а В младше Г. Разместите пловцов в порядке занятых ими мест.

А. В, А, Г, Б. Б. Б, А, В, Г. В. Б, А, Г, В. Г. В, А, Б, Г.

2. Хоккейная команда провела три матча, забив в ворота противника всего 3 шайбы и пропустив 2 шайбы. Один из матчей она выиграла, второй свела вничью, а третий проиграла. Сколько вариантов есть для счёта, с которым она выиграла матч?

А. 1. Б. 2. В. 3. Г. 4.

Реши сам

1. Футбольные команды школ № 1, 2, 3, 4 провели между собой турнир в один круг. Первое место заняла команда школы № 1, которая, как и команда школы № 2, не проиграла ни одной игры. Последнее место заняла команда школы № 4, которая, как и команда школы № 3, ни разу не выиграла. Составьте турнирную таблицу, в клетках которой укажите число очков, набранных каждой командой в играх с каждой из остальных. В футболе за победу дают 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

2. В однокруговом турнире по футболу участвовали 4 команды. «Чистое» второе место заняла команда, набравшая 3 очка. Восстановите результаты всех матчей. «Чистое» второе место означает, что больше нет команд, набравших столько же очков, и есть ровно одна команда, набравшая больше очков. За выигрыш даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. 1:0. 2. 0:1. 3. Да. 4. Могла. 5. Не более одной. 6. 1. 7. 28. 8. 45.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Нет. 2) Нет. 3) нет.

Задача 2. 1) Остальные игры они проиграли. 2) Химики ни у кого не могли выиграть, так как у них нет забитых мячей, у биологов нет ничьих, следовательно, биологи выиграли у химиков. 3) Биологи проиграли математикам со счётом 1:0, химики свели с математиками ничью 0:0.

	1	2	3	4
1		1	3	3
2	1		1	3
3	0	1		1
4	0	0	1	

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1.Г. 2.Г.

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Воспользуйтесь решениями задач 1 и 2.

	1	2	3	4
1		1	3	3
2	1		1	1
3	0	1		1
4	0	1	1	

5. Разгадывание числовых ребусов

Рассмотренные приёмы логических рассуждений с успехом могут быть использованы при разгадывании числовых ребусов. Схема рассуждений остаётся прежней: анализируя имеющиеся данные, сокращают число возможных вариантов решений. Затем, предполагая правильным, анализируют последовательно по одному оставшиеся варианты. При этом или приходят к противоречию, и тогда соответствующий вариант отбрасывается, или противоречия не обнаруживают и тогда анализируют следующий вариант с целью убедиться, что найденный вариант является единственным решением задачи.

Готовимся к решению задач

1. Может ли сумма двух одинаковых однозначных чисел равняться тому же числу?
2. Может ли сумма двух одинаковых однозначных чисел, увеличенная на 1, равняться тому же числу?
3. Сумма каких трёх одинаковых однозначных чисел может оканчиваться той же цифрой?
4. Разность каких четырёхзначного числа и трёхзначного равна 1?
5. Сумма каких трёх одинаковых однозначных чисел, увеличенная на 1, может быть однозначным числом?

Решение задач

В следующей задаче для ответа на поставленный вопрос предварительно необходимо разгадать ребус.

Задача 1. Чему равна сумма $A + Y + O$, если $\overline{AA} + \overline{AY} = \overline{OOO}$ (разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые буквы — одинаковые цифры; через $\overline{AB}$ обозначено двузначное число, состоящее из A десятков и B единиц).

Анализируем. Для решения задачи нужно использовать, что в условии рассматривается равенство, в котором сумма двух двузначных чисел, цифры десятков которых одинаковые, равна трёхзначному числу с одинаковыми цифрами.

Решаем. Нам известно, что $\overline{AA} + \overline{AY} = \overline{OOO}$, то есть сумма двух двузначных чисел равна трёхзначному. Отсюда можно сразу сделать вывод о том, что буква A может обозначать 5, или 6, или 7, или 8, или 9, а буква O — только единицу. Поэтому число $\overline{OOO}$ равно 111. Тогда $A = 5$, $Y = 6$: $55 + 56 = 111$. Искомая сумма $A + Y + O$ равна 12.

Ответ. 12.

1. *Может ли сумма двух двузначных чисел равняться трёхзначному числу, содержащему 2 сотни?*

2. *Может ли сумма $\overline{AA} + \overline{AY}$ со значением A , равным 6, равняться трёхзначному числу с тремя одинаковыми цифрами?*

3. *Каким будет ответ, если $\overline{OOO}$ заменить на OOA ?*

В следующей задаче постановка та же, что и в предыдущей, но сложнее ребус.

Задача 2. Чему равна сумма $P + A + Y + O + H + G + D$, если $\text{РАЙОН} + \text{РАЙОН} = \text{ГОРОД}$ (каждая буква обозначает одну цифру и разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые буквы — одинаковые цифры)?

Анализируем. Для решения задачи необходимо вначале расшифровать предложенный в условии ребус. При его расшифровке необходимо рассматри

вать случаи, когда сумма одинаковых цифр меньше 10 и больше 10.

Решаем. Расшифруем вначале ребус

$$\begin{array}{r}
 \text{Р} \text{ А} \text{ Й} \text{ О} \text{ Н} \\
 + \text{Р} \text{ А} \text{ Й} \text{ О} \text{ Н} \\
 \hline
 \text{Г} \text{ О} \text{ Р} \text{ О} \text{ Д}
 \end{array}$$

Предположим сначала, что сумма $\text{Н} + \text{Н}$ меньше 10.

Тогда $\text{О} + \text{О} = \text{О}$ означает, что $\text{О} = 0$. В этом случае

$\text{А} + \text{А} = 10$, то есть $\text{А} = 5$. Так как $\text{Р} + \text{Р}$ — однозначное число, то Р не может принимать значение, большее 4-х. Поскольку $\text{Й} + \text{Й} = \text{Р}$, то Й может равняться или 1, или 2. Но Й не может равняться 1, ибо в этом случае $\text{Р} = 2$, $\text{Г} = \text{Р} + \text{Р} + 1 = 5$, что невозможно, поскольку $\text{А} = 5$. Следовательно, $\text{Й} = 2$, $\text{Р} = 4$, $\text{Г} = 9$. Осталось найти Н и Д . Н не может равняться 1, поскольку в этом случае $\text{Д} = 2$, что невозможно, потому что $\text{Й} = 2$. Остается единственная возможность для Н : $\text{Н} = 3$, тогда $\text{Д} = 6$. Следовательно, $\text{Р} + \text{А} + \text{Й} + \text{О} + \text{Н} + \text{Г} + \text{Д} = 4 + 5 + 2 + 0 + 3 + 9 + 6 = 29$.

Предположим теперь, что сумма $\text{Н} + \text{Н}$ больше 9. Тогда $\text{О} = 9$ ($9 + 9 + 1 = 10 + 9$). Так как $\text{А} + \text{А}$ — четное число и $\text{О} = 9$, то $\text{А} = 4$ ($\text{А} + \text{А} + 1 = 9$). В этом случае сумма $\text{Й} + \text{Й}$ больше 9. Поскольку $\text{Р} + \text{Р}$ — однозначное число, а, кроме того, Р — нечётное ($\text{Й} + \text{Й} + 1 = \text{Р}$), то Р может принимать только значения 1 или 3. Если $\text{Р} = 1$, то $\text{Г} = 2$ и $\text{Й} = 5$. При этом Н может равняться только 8. Действительно, если Н равно 6 или 7, то Д будет равняться 2 или 4, что невозможно, поскольку $\text{Г} = 3$, $\text{А} = 4$. Таким образом, $\text{Р} + \text{А} + \text{Й} + \text{О} + \text{Н} + \text{Г} + \text{Д} = 1 + 4 + 5 + 9 + 8 + 2 + 6 = 35$. Если же $\text{Р} = 3$, то $\text{Г} = 6$ и $\text{Й} = 6$, но это не соответствует условию задачи.

Ответ: 29 или 35.

1. Почему в случае, когда $\text{Н} + \text{Н}$ меньше 10, $\text{О} = 0$?
2. Почему в случае, когда $\text{Н} + \text{Н}$ больше 9, $\text{О} = 9$?
3. Почему невозможен случай $\text{Р} = 3$?

Проверь себя

1. В примере $\overline{\text{ОДИН}} + \overline{\text{ОДИН}} = \overline{\text{МНОГО}}$ одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Чему равна сумма $\text{О} + \text{Д} + \text{И} + \text{Н}$?

А. 16.

Б. 18.

В. 17.

Г. 19.

2. В пустых клетках на рисунке поставьте такие числа, чтобы все четыре горизонтальные и четыре вертикальные равенства были правильными. Укажите сумму этих чисел.

$$\begin{array}{ccccccc}
 4 & + & \square & - & \square & = & 2 \\
 + & & & - & + & & \\
 \square & - & 2 & + & 0 & = & \square \\
 - & & + & & - & & \\
 \square & + & \square & - & 6 & = & 6 \\
 = & & = & & = & & \\
 1 & + & 5 & - & \square & = & 3
 \end{array}$$

А. 47. Б. 41. В. 26. Г. 23.

Реши сам

1. В примере $\overline{ЛЕТО} + \overline{ЛЕТО} = \overline{ПОЛЕТ}$ одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Чему равна сумма $L + E + T + O$?

2. Расшифруйте ребус: $\overline{БАВ} \cdot \overline{ББ} \cdot B = 2013$.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Может. 2. Может. 3. $0 + 0 + 0 = 0$, $5 + 5 + 5 = 15$. 4. $1000 - 999 = 1$. 5. $0 + 0 + 0 + 1 = 1$, $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, $2 + 2 + 2 + 1 = 7$.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Нет. 2) Нет. 3) Нет.

Задача 2. 1) Сумма двух одинаковых однозначных чисел равна слагаемому только в случае, когда $0 + 0 = 0$. 2) Сумма двух одинаковых однозначных чисел, увеличенная на 1, равна двузначному числу, оканчивающемуся цифрой, изображающей слагаемое, отличное от 1, только когда $9 + 9 + 1 = 19$.

3) Если $P = 3$, то $\Gamma = 6$, $\text{Й} = 6$, но различные буквы изображают разные числа.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1. Г. 2. А.

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 29. Воспользуйтесь решением задач 1 и 2.

2. $183 \cdot 11 \cdot 1 = 2013$. Воспользуйтесь решением задач 1 и 2.

6. Доказательство от противного

Любое утверждение должно быть обосновано. Один из распространённых приёмов обоснования утверждений является ссылка на ранее полученные выводы. Например, утверждая, что число 3867 меньше числа 63 542, вы ссылаетесь на ранее полученное правило сравнения натуральных чисел: *из двух нату-*

ральных чисел, имеющих различное количество цифр, большим является то, у которого цифр больше. Утверждая, что число 2396 больше числа 2369, вы ссылаетесь на другое правило сравнения натуральных чисел: *из двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество цифр и одинаковое число в наивысшем разряде, большим является то, у которого больше единиц в следующем, низшем, разряде и т. д.*

Вывод о справедливости, например, переместительного свойства сложения натуральных чисел вы делаете после рассмотрения нескольких примеров. Конечно, этот способ обоснования не является строгим, но он иногда достаточно убедителен. Хотя к нему нужно относиться очень осторожно: ведь может оказаться, что утверждение выполняется для одних примеров и не выполняется для других.

Строгим методом обоснования является проверка правильности утверждения для всех возможных случаев. Например, в правильности утверждения *если к однозначному числу, отличному от нуля, приписать это же число, то полученное двузначное число будет больше данного в 11 раз* можно убедиться, проверив его для 9 чисел 1, 2, 3, ..., 9.

В этом пункте мы познакомимся ещё с одним методом доказательства. Рассмотрим его вначале на примере.

Готовимся к решению задач

1. Укажите утверждение, противоположное следующим:

- 1) Число a больше числа a^2 .
- 2) Олег старше Юрия.
- 3) Число 734 делится на число 5.
- 4) Противоположные стороны прямоугольника пересекаются.
- 5) Смежные стороны прямоугольника перпендикулярны.
- 6) Диагональ прямоугольника больше его стороны.
- 7) Прямая и окружность имеют не более двух общих точек.

2. Какие из утверждений задания 1 верны?

3. Какие из утверждений, противоположных утверждениям задания 1 верны?
4. Какой вывод можно сделать о справедливости утверждений 1) и 2) задания 1?

Решение задач

Фактически для решения следующей задачи применяется так называемый принцип Дирихле. Рекомендуем познакомиться с ним.

Задача 1. 50 лошадей разместили в 7 конюшнях. Докажите, что хотя бы в одной конюшне больше 7 лошадей.



Анализируем. Рассмотреть все возможные варианты размещения лошадей невозможно, это число огромное, в нём больше 40 цифр. Что означает словосочетание «хотя бы в одной конюшне больше 7 лошадей»? Другими словами, нужно доказать, что не во всех конюшнях число лошадей не превышает 7, или, что найдётся конюшня, в которой больше 7 лошадей. Непосредственно доказать это утверждение не удаётся. Прибегают к такому приёму. Предполагают, что утверждение, которое требуется доказать, неверно. Если удастся найти противоречие, то данное утверждение будет доказано.

Решаем. Предположим, что утверждение «хотя бы в одной конюшне больше 7 лошадей» неверно. То есть верным является следующее утверждение: в каждой из семи конюшен число лошадей не больше 7. Но тогда число лошадей во всех семи конюшнях не больше $7 \cdot 7 = 49$. Но в условии сказано, что число лошадей равно 50. Принятое предположение о том, что в каждой из семи конюшен число лошадей не больше 7, привело к противоречию. Это значит, что предположение неверно, а справедливым является утверждение, которое требовалось доказать.



1. Можно ли разместить в 7 конюшнях 48 лошадей так, чтобы в каждой конюшне было не более 7 лошадей?

2. Можно ли разместить в 8 конюшнях 65 лошадей так, чтобы в каждой конюшне было не более 8 лошадей?

Рассмотренный метод доказательства называют **доказательством от противного**. Это название этот способ получил потому, что в начале рассуждений

делается предположение, противоположное тому, которое требуется доказать. Сущность его заключается в следующем.

1) Анализируя утверждение, убеждаемся в том, что для отдельных случаев оно верно, но не удаётся убедиться в его правильности в общем случае. Приходим к выводу о целесообразности применения метода доказательства от противного.

2) Формулируем утверждение, противоположное тому, которое требуется доказать, и предполагаем, что оно правильно.

3) Опираясь на это предположение логическими рассуждениями приходим к выводу, противоречащему условию.

4) Сделать вывод о том, что сделанное предположение неверно, его следует отбросить и принять то утверждение, которое требовалось доказать.

Задача 2. В школе учится 390 учеников. а) Докажите, что найдутся 2 ученика, родившиеся в один и тот же день. б) Обязательно ли найдутся 3 таких ученика?

Анализируем. Для доказательства утверждения а) можно применить метод от противного. Если утверждение «обязательно найдутся 3 ученика, родившиеся в один и тот же день» справедливо, то его нужно доказать. Если же оно неверно, то достаточно привести пример, опровергающий его.

Решаем. а) Предположим, что не найдутся 2 ученика, родившиеся в один и тот же день. Но всех учащихся 390, а дней в году не более 366. Поэтому все учащиеся школы не могли родиться в разные дни.

б) Здравый смысл подсказывает, что трёх учащихся, родившихся в один день может не оказаться. Как убедиться в правильности этого утверждения? Нужно понять, что мы опровергаем утверждение: найдутся 3 ученика, родившиеся в один и тот же день. Приведём пример, его опровергающий. Например, все учащиеся могли родиться по 2 в определённые 195 дней : $2 \cdot 195 = 390$. Это и доказывает, что трёх учащихся, родившихся в один день может не оказаться.

Ответ. б) Нет.



1. Приведите пример, опровергающий утверждение: найдутся 3 ученика, родившиеся в один и тот же день.
2. Можно ли методом от противного доказать утверждение: не обязательно найдутся 3 ученика, родившиеся в один и тот же день?
3. Обязательно ли найдутся в школе 3 ученика, родившиеся в один и тот же день, если в школе учится 750 учеников?

Проверь себя

1. В некоторой компании нет трёх человек, родившихся в одном и том же месяце. Какой может быть наибольшее число людей в этой компании?
А. 8. Б. 22. В. 24. Г. 25.
2. В школе 400 учащихся. Обязательно ли найдётся месяц, в котором родилось не менее ...
А. 33 учащихся. Б. 34 учащихся. В. 35 учащихся. Г. 36 учащихся
3. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трёх сортов, причём в каждом ящике лежали яблоки какого-то одного сорта. Какое наибольшее число ящиков с яблоками одного сорта обязательно найдётся среди этих ящиков?
А. 7. Б. 8. В. 9. Г. 10.

Реши сам

1. 99 лошадей разместили в 15 конюшнях. Докажите, что хотя бы в одной конюшне нечётное число лошадей.
2. Докажите, что если объём прямоугольного параллелепипеда равен 1 см^3 , то длина хотя бы одного ребра не меньше 1.
3. На встречу Нового года собрались 5 человек. Какое наибольшее число людей из них обязательно имеют одинаковое число знакомых среди собравшихся?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. 1) Число a не больше числа a^2 . 2) Олег не старше Юрия. 3) Число $734a$ не делится на число 5. 4) Противоположные стороны прямоугольника не пересекаются. 5) Смежные стороны прямоугольника не перпендикулярны. 6) Диаго-

наль прямоугольника не больше его стороны. 7) Прямая и окружность имеют более двух общих точек. 2. 5),6),7). 3. 3) Число $734a$ не делится на число 5. 4) Противоположные стороны прямоугольника не пересекаются. 4. Справедливость утверждения 1) зависит от числа a , а справедливость утверждения 2) от возраста Олега и возраста Юры.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1) Да. 2) Нет.

Задача 2. и1) Нет. 2) $0,1 = 1 - 0,9$. 3) Да. 4) Да.

Задача 3. 1) Например, в определённые 190 дней родились по 2 человека, а в определённые 10 дней – по 1 человеку: $2 \cdot 190 + 1 \cdot 10 = 390$. 2) Нет. 3) Да.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1. Г. 2. Б. 3. В.

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Предположите, что в каждой из 15 конюшен содержится чётное число лошадей.

2. Воспользуйтесь тем, что объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений и предположите, что все измерения меньше 1.

3. Рассмотрите два случая: есть человек, не знакомый ни с кем из остальных, или такого человека нет. В первом случае число знакомств у собравшихся может равняться одному из чисел 0, 1, 2, 3, а во втором — 1, 2, 3, 4. В обоих случаях число знакомств не более 4-х.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Задания для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком  на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	5 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	8 задач	6 задач
«отлично»	Решено не менее	10 задач	9 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа укажите букву «Д».

1. Девочка, её мама и бабушка выстроились в колонну по одному по возрасту (старший по возрасту стоит впереди младшего). Кто стоит на втором месте?

А. Бабушка. Б. Мама. В. Девочка. Г. Не хватает данных.

2. На весах, которые находятся в равновесии, на одной чашке лежит 1 морковь и 2 одинаковые редиски. На другой чашке — 2 такие же морковки и 1 такая же редиска. Что легче, морковь или редиска?

А. Определить нельзя. Б. Морковка. В. Редиска. Г. Их массы одинаковы.

3. Петя и Вася едут в соседних вагонах поезда. Вагон, в котором едет Петя, — пятый от «головы» поезда, а вагон, в котором едет Вася, — седьмой с «хвоста». Сколько вагонов в поезде?

А. 10. Б. 12. В. 11 или 12. Г. 10 или 12.



4. В квартирах № 1, 2, 3 жили по одному три котёнка: два белых и один чёрный. Определите в каких квартирах жили белые котята, если в квартирах № 1 и 2 — один белый котёнок, в квартирах № 2 и 3 — тоже один белый котёнок.

А. № 1 и 3. Б. № 1 и 2. В. № 2 и 3. Г. Определить нельзя.

5. Три подруги вышли в белом, зеленом и синем платьях и в туфлях тех же цветов. Только у Анны цвет платья и туфель один и тот же. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми. Наталья была в зеленых туфлях. Определите цвет платья Анны.

А. Белый. Б. Синий. В. Зелёный. Г. Определить невозможно.

6. Во время завтрака дети разбили любимую мамину чашку. Когда вошла мама, она спросила, кто это сделал. Саша сказал: «Митя не разбивал, это сделал Петя». Митя отрицал: «Петя этого не делал, а сам я даже за стол не садился». Наконец, Петя утверждал: «Саша не разбивал чашку, а виноватый в этом Митя». При этом двое детей оба раза говорили правду, а один оба раза солгал. Кто же из них разбил чашку?

А. Митя. Б. Саша. В. Петя. Г. Определить невозможно

7. Сколькими способами можно записать в строку первые 3 буквы русского алфавита так, чтобы ни одна буква не стояла на месте с номером, совпадающим с номером этой буквы в алфавите?

А. 6. Б. 4. В. 3. Г. 2.

8. Из четырех бегунов А, Б, В, Г второе место занял самый старший. При этом А пробежал дистанцию быстрее, чем В, а Г — быстрее, чем Б и В. Известно также, что Б старше А, а В старше Г. Разместите бегунов в порядке занятых ими мест.

А. Г, Б, А, В. Б. Г, Б, В, А. В. А, Г, Б, В. Г. А, Б, Г, В.

9. Хоккейная команда провела три матча, забив в ворота противника всего 3 шайбы и пропустив 3 шайбы. Один из матчей она выиграла, второй свела вни-

чью, а третий проиграла. Сколько вариантов есть для счёта, с которым она проиграла матч?

- А. 3. Б. 4. В. 6. Г. 10.
-

10. В примере $КИС + КСИ = ИСК$ одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, различным — различные. Чему равна сумма $К + И + С$?

- А. 9. Б. 14. В. 15. Г. 18.

11. В примере $ТОРГ \cdot Г = ГРОТ$ одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, различным — различные. Чему равна сумма $О + Р + Г$?

- А. 9. Б. 18. В. 17. Г. 15.
-

12. В некоторой компании нет четырёх человек, родившихся в одном и том же месяце. Какой может быть наибольшее число людей в этой компании?

- А. 16. Б. 35. В. 37. Г. 36.

13. В школе 800 учащихся. Обязательно найдётся месяц, в котором родилось не менее ...

- А. 68 учащихся. Б. 67 учащихся. В. 66 учащихся. Г. 65 учащихся.

14. В магазин привезли 40 ящиков с красками трёх цветов, причём в каждом ящике находилась краска какого-то одного цвета. Какое наибольшее число ящиков с краской одного цвета обязательно найдётся среди этих ящиков?

- А. 13. Б. 14. В. 15. Г. 16.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания

1. Восемь мальчиков выстроились так, что А стоит перед Б и В, Б — за К через одного; Л — перед А, но после Д, В — за М через одного, Д — между Б и Г, М — за К, но перед В. Кто стоит пятым по счёту в шеренге?

2. Толя сильнее, чем Миша. Миша младше, чем Вова. Вова ниже, чем Толя. Толя старше, чем Вова. Вова слабее, чем Миша. Миша выше, чем Толя. Кто из ребят самый сильный, кто самый старший и кто самый высокий?

3. Толя решил усовершенствовать расстановку фигур на шахматной доске. У него сохранилось по 16 фигур у каждой стороны: 8 пешек, 2 ладьи, 2 слона, 2 коня и 2 правителя (вместо ферзя и короля). Он предложил их расставить так, чтобы между двумя конями стояла одна фигура, между двумя слонами — две, между двумя ладьями — три, между двумя правителями — четыре фигуры. Может ли Толя осуществить такую расстановку?

4. В трех карманах лежат три монетки — одна золотая, другая серебряная, а третья — бронзовая. Монета, которая лежит в самом большом кармане не золотая, серебряная монетка находится не в среднем кармане. А в самом маленьком кармане лежит не золотая и не серебряная монета. Какая из них где лежит?

5. В летнем лагере встретились четверо юношей, прибывшие из Донецка, Киева, Луганска и Симферополя. У себя в школах они увлекались различными видами спорта. Известно, что Андрей и акробат приехали не из Донецка, Виктор и шашкист приехали не из Симферополя. Луганчанин и киевлянин младше Олега. Тимофей и луганчанин не увлекаются плаванием. Пловец и шашкист обыграли в Домино Андрея и луганчанина. Волейболист никогда не был в Киеве. Кто из какого города приехал и каким видом спорта занимались?

6. В преступлении заподозрены X, Y и Z. В процессе следствия они утверждали:

X — «Я не виновен. Y также не виновен».

Y — «X — не преступник. Это сделал Z».

Z — «Я не преступник. Это сделал X».

Было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий – раз солгал и раз сказал правду. Кто совершил преступление?

7. В трёх коробочках лежат спички, кнопки и скрепки. На них имеются также надписи: СПИЧКИ, КНОПКИ и СКРЕПКИ. Но ни одна из надписей не соответствует содержимому. Разрешается открыть всего одну коробку, и при этом требуется узнать содержимое всех трёх коробок.

8. Шахматисты А, Б, В, Г провели между собой турнир в один круг. Первое место занял А, который, как и Б, не проиграл ни одной игры. Последнее место занял Г, который, как и В, ни разу не выиграл. Сколько очков набрал каждый из шахматистов, если за победу дают 1 очко, за ничью — половину очка, за поражение — 0 очков?

9. Футбольная команда провела три матча, забив в ворота противника всего 3 гола и пропустив 4 гола. Один из матчей она выиграла, второй свела вничью, а третий проиграла. Как мог закончиться выигранный ею матч?

10. Чему равна сумма $A + B + B + \Gamma + D$, если $AB\bar{B}\Gamma$

$$\begin{array}{r} +AB\bar{D}\Gamma \\ \hline B\bar{G}DA\bar{G}? \end{array}$$

11. Восстановите цифры и знаки действий, укажите результат их выполнения.

$$\begin{array}{r} \bullet \bullet 8 \\ \bullet \bullet \bullet \\ \hline 7 \bullet \bullet 4 \\ 7 \bullet \bullet 4 \\ 7 \bullet \bullet 4 \\ \hline \bullet \bullet 8 \bullet \bullet \bullet \end{array}$$

12. Какое наименьшее число детей должно быть в семье, чтобы среди них обязательно были дети одного пола?

13. Докажите, что если площадь прямоугольника, не являющегося квадратом, равна 4 дм^2 , то длина хотя бы одной его стороны больше 2 дм.

14. На собрании присутствует 100 человек. Какое наибольшее число из них обязательно имеют одинаковое количество знакомых среди присутствующих?

Указания к задачам основного задания

- 1.** Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Кто за кем, что за чем».
- 2.** Рассмотрите отдельно каждое из отношений «сильнее», «старше», «выше». Воспользуйтесь вопросом 3 к задаче 2 из блока «Кто за кем, что за чем».
- 3.** Воспользуйтесь решением задачи 2 из подраздела «Реши сам» к блоку «Кто за кем, что за чем».
- 4.** Определите сначала, какая монета лежит в маленьком кармане.
- 5.** Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Кто в чём, что в чём, кто на чём».
- 6.** Предположите, например, что кто-то из подозреваемых дважды сказал неправду. Воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Задачи, в которых наряду с правдивой имеется и ложная информация».
- 7.** Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Задачи, в которых наряду с правдивой имеется и ложная информация».
- 8.** Воспользуйтесь решением задачи 1 из подраздела «Реши сам» к блоку «Восстановление результатов спортивных соревнований».
- 9.** Воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Восстановление результатов спортивных соревнований».
- 10.** Проанализируйте возможные результаты сложения двух одинаковых однозначных чисел. Воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Разгадывание числовых ребусов».
- 11.** Восстановите сначала последнюю цифру множимого и произведения. Установите возможные значения первой цифры множимого. Обратите внимание на результаты умножения каждой цифры множителя на множимое.

12. Выясните, обеспечивает ли выполнение требований задания наличие двух детей в семье.

13. Воспользуйтесь методом доказательства от противного.

14. Рассмотрите два случая: среди собравшихся есть человек, не знакомый ни с кем из остальных, или такого человека нет. Воспользуйтесь решением задачи 3 из подраздела «Реши сам» блока «Доказательство от противного».

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. В очереди стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Юра стоит перед Мишей, но позади Олега. Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не стоит рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто стоит посередине?

2. Восемь мальчиков выстроились по кругу. Если обходить их, двигаясь по часовой стрелке, то окажется, что А мы встретим раньше Б и В, Б — после К через одного; Л — раньше А, но после Д, В — после М через одного, Д — раньше Б и Г, М — после К, но раньше В. Кого мы встретим первым и кого последним?

3. Напишите наибольшее восьмизначное число, содержащее 4 цифры 1, 2, 3, 4, каждую по 2 раза, так что между двумя 1 стоит одна цифра, между двумя 2 — две цифры, между двумя 3 — три цифры, между двумя 4 — четыре цифры.

4. Среди офицеров А, Б, В, Г, Д и К три полковника, два майора и капитан. Известно, что А первым приветствует Б; Г и Д в одном звании, В и К — в одном роде войск. Полковник, майор и Г — танкисты, Б и капитан — артиллеристы. Один из офицеров — связист. Кто связист и в каком он звании?

5. В забеге шести спортсменов Адам отстал от Богдана и ещё от двух спортсменов. Виктор финишировал после Дмитрия, но ранее Геннадия. Дмитрий опере-

дил Богдана, но всё же пришёл после Евгения. Какое место занял каждый спортсмен?

6. Четыре мальчика — Игорь, Сережа, Миша и Юра — играли во дворе в футбол и разбили окно.

— Кто разбил окно? — спросила тётя Даша.

— Окно разбил или ваш Юра, или Миша, — сказал Серёжа.

— Я окно не разбивал, — возразил Юра.

— Это сделал Миша, — сказал Игорь.

— Нет, Игорь, ты ошибся, заметил Миша.

— Ну что, задали они тебе задачу? — сказал дядя Вася, наблюдавший эту беседу. — Могу ещё добавить, что трое из этих футболистов говорят всегда только правду. А вот четвёртого я плохо знаю.

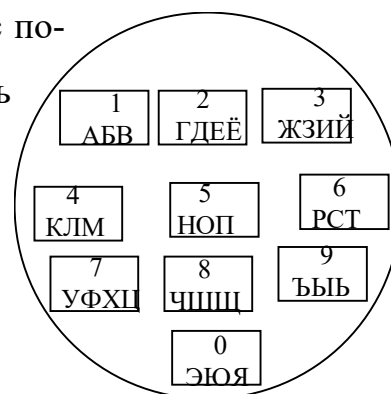
Кто разбил окно?

7. Сколькими способами можно записать в строку первые 5 букв русского алфавита так, чтобы ни одна буква не стояла на месте с номером, совпадающим с номером этой буквы в алфавите?

8. Трое школьников провели между собой шахматный турнир в несколько кругов, и первым стал Андрей, вторым — Борис, третьим — Василий. Может ли случиться так, что по количеству одержанных побед они разместились в обратном порядке, если за победу, ничью и поражение в шахматной партии насчитывают, соответственно, $1, \frac{1}{2}, 0$ очков?

9. На чемпионате мира по футболу в одной из групп 4 команды разыграли право на выход в одну восьмую финала, сыграв друг с другом по одной игре. Команда, занявшая I-е место, набрала 7 очков, II-е — 6 очков, III-е — 3 очка. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (За выигрыш в игре команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков)

10. На рисунке изображена панель телефона. Пусть с помощью цифр зашифровано слово. Чтобы расшифровать его, нужно вместо каждой цифры записать одну из букв соответствующей клавиши. Например, число 5 161 755 расшифровывается словом МАРАФОН. Расшифруйте поговорку:



6249122 – 5235 56126.

11. Расшифруйте ребус: ***

$$\begin{array}{r}
 \times \quad ** \\
 \hline
 2005 \\
 + \quad *** \\
 \hline

 \end{array}$$

12. В классе учится 35 учеников. Больше всех ошибок в диктанте сделал Петя — 14.

а) Докажите, что найдутся 3 ученика, сделавшие в диктанте одинаковое количество ошибок.

б) Обязательно ли найдутся 4 таких ученика?

в) Какое наименьшее число учеников должно быть в классе, чтобы нашлось 4 таких ученика?

13. Длины сторон прямоугольника выражаются целыми числами. Докажите, что если периметр прямоугольника меньше 30 см, то его площадь не больше 49 см².

14. В первенстве региона по футболу участвует 10 команд. Каждые две из них должны сыграть матч между собой. Докажите, что в любой момент состязаний найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

Указания к задачам дополнительного задания

1. Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Кто за кем, что за чем».

2. Используйте отличие в расположениях по прямой и по кругу.
3. Воспользуйтесь решением задачи 3 из основного задания.
4. Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Кто в чём, что в чём, кто на чём».
5. Воспользуйтесь решением задачи 3 из подраздела «Реши сам» из блока «Кто в чём, что в чём, кто на чём».
6. Воспользуйтесь решением задачи 6 из основного задания.
7. Воспользуйтесь решением задачи 2 из подраздела «Проверь себя» из блока «Задачи, в которых наряду с правдивой имеется и ложная информация».
8. Рассмотрите, например, случай, когда шахматисты провели турнир в 4 круга.
9. Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Восстановление результатов спортивных соревнований».
10. Для расшифровки каждого слова целесообразно под каждой цифрой записать соответствующие ей буквы.
11. Установите возможные значения последней цифры множителя, а затем и множимого.
12. а) Обратите внимание на то, что число ошибок может равняться и 0. б) Приведите пример, когда может и не быть 4-х учеников, сделавших одинаковое число ошибок. в) Воспользуйтесь тем, что имеется 15 возможных значений для числа ошибок в диктанте.
13. Воспользуйтесь методом от противного.
14. Рассмотрите два случая: среди 10 команд есть команда, не сыгравшая ни одного матча, или такой команды нет. Воспользуйтесь решением задачи 3 из подраздела «Реши сам» блока «Доказательство от противного».

Задачи на исследование

1. В пособии «Делимость натуральных чисел» рассматриваются или используются следующие утверждения.

- 1) Если натуральное число оканчивается чётной цифрой, то оно делится на 2.
- 2) Если натуральное число оканчивается нечётной цифрой, то оно не делится на 2.
- 3) Количество элементов s , находящихся в n группах по a элементов в каждой группе, равно произведению n на a .
- 4) Частное от деления нуля на любое число, не равное нулю, равно нулю.
- 5) Сумма двух чётных чисел является чётным числом.
- 6) Сумма двух нечётных чисел чётна.
- 7) Сумма чётного и нечётного чисел является нечётным числом.
- 8) Произведение любого натурального числа на чётное число — чётно.
- 9) Произведение двух нечётных чисел нечётно.
- 10) На 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулём или цифрой 5.
- 11) Если каждое из нескольких натуральных чисел делится на некоторое число, то их сумма также делится на это число.
- 12) Разность делимого и остатка делится нацело как на неполное частное, так и на делитель.

Исследуйте, какие из следующих утверждений можно, используя только перечисленные, доказать методом от противного. Если такое доказательство невозможно, то определите, справедливо это утверждение или нет.

- 1) Если натуральное число делится на 2, то оно оканчивается чётной цифрой.
- 2) Если количество элементов в некоторой совокупности равно na , то эта совокупность состоит из n групп по a элементов в каждой группе.
- 3) Если частное от деления некоторого числа на любое число, не равное нулю, равно нулю, то делимое равно нулю.

4) Если сумма двух натуральных чисел является чётным числом, то эти числа одинаковой точности.

5) Если произведение двух натуральных чисел чётно, то хотя бы один из сомножителей является чётным числом.

6) Если натуральное число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

7) Если сумма нескольких натуральных чисел делится на некоторое число, то каждое слагаемое делится на это число.

8) Если разность двух натуральных чисел делится нацело на два натуральных числа, то первая пара является соответственно делимым и остатком, а вторая — делителем и неполным частным.

2. Рассмотрите так называемое «доказательство» того, что $2 = 3$.

Имеем правильное равенство $10 - 10 = 15 - 15$.

Разложим 10 и 15 на простые множители: $5 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 3$.

Применим распределительное свойство умножения: $2 \cdot (5 - 5) = 3 \cdot (5 - 5)$.

Разделим обе части полученного равенства на одно и то же число $5 - 5$.

Получим: $2 = 3$.

Найдя ошибку в предложенном доказательстве, предложите «доказательства» подобных «утверждений».

Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович

Учимся рассуждать

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 5-6 классов

Учебное пособие