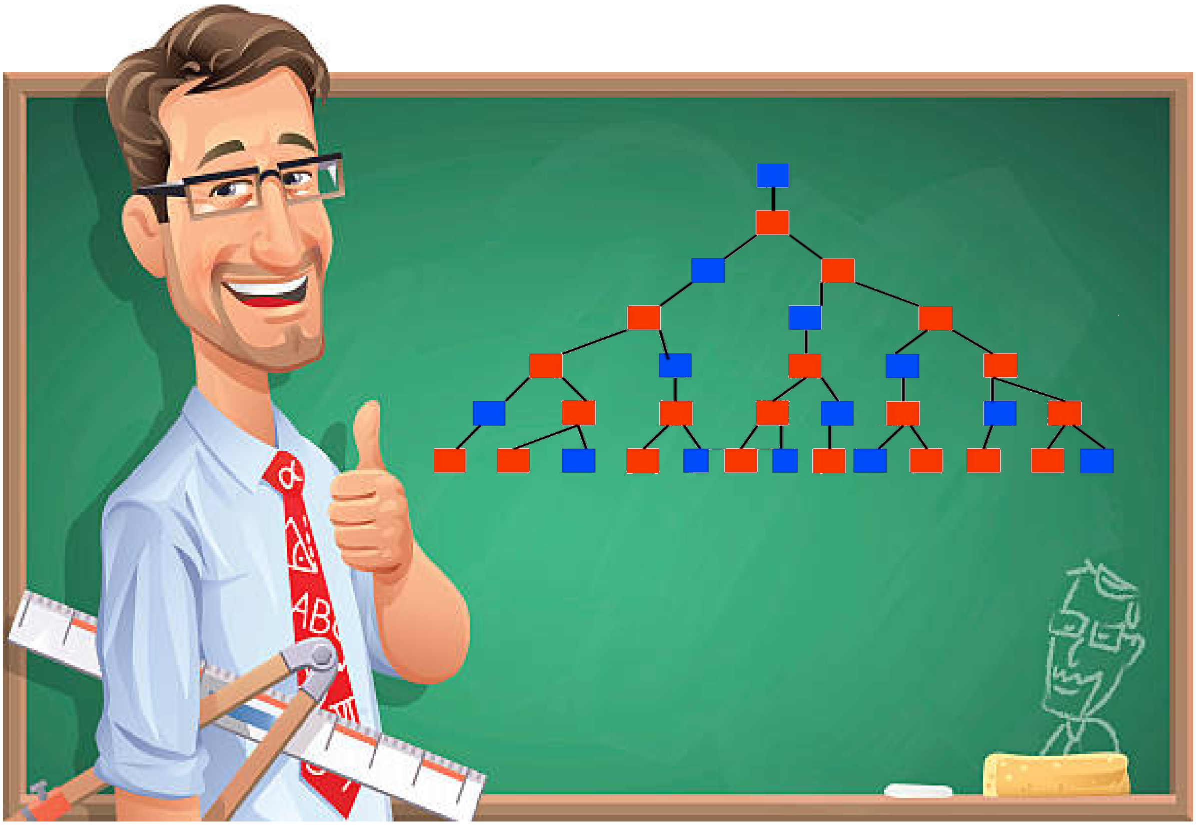
Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Перебираем варианты



Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 7-8 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Перебираем варианты. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 7-8 классов. – 51 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 7-8 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 от 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, формирование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 7-8 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для решения различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено перебору всех возможных вариантов выбора заданного количества элементов из определенной совокупности и подсчету их количества. Конечно, не все приведенные в пособии задачи жизненно важные. Но решение всех задач, безусловно, полезно для совершенствования комбинаторных навыков и логических рассуждений.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и поиска решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, используемых в приведенных решениях типовых задач, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после решения каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить или приобрести тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение

каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание. Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Перебираем варианты

В повседневной жизни часто возникают проблемы, имеющие не один, а несколько вариантов решения. При этом нужно выбрать лучший в определённом смысле вариант. Чтобы сделать правильный выбор, очень важно не упустить ни один из них. Для этого нужно уметь осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их количество. Такого рода задачи называют **комбинаторными.**

Этот раздел посвящен решению комбинаторных задач. **Комбинаторика** — важный раздел математики, знание которого необходимо представителям самих различных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, экономистам, специалистам по электронным вычислительным машинам и другим. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

1. Методы перебора

Многие комбинаторные задачи сводятся к подсчёту числа вариантов выбора заданного количества элементов из определенной совокупности. Эти задачи мы будем решать методом перебора.

Готовимся к решению задач

1. В кафе есть пирожные трёх видов: “песочные”, “слоёные” и “заварные”. Сколькими способами Аня может выбрать себе два пирожных, среди которых ровно одно будет «песочное»?

А. 1-м. **Б**. 2-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 4-мя.

2. В кафе есть пирожные трёх видов: “песочные”, “слоёные” и “заварные”. Сколькими способами Аня и Вера могут выбрать себе по два пирожных, среди которых у каждой ровно одно будет «песочное»?

А. 1-м. **Б**. 2-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 4-мя.

3. В кафе есть пирожные двух видов: “песочные” и “заварные”. Сколькими способами Аня может выбрать себе два пирожных?

А. 1-м. **Б**. 2-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 4-мя.

4. В магазине имеется два вида тетрадей в клетку и один вид тетрадей в линию. Сколько существует вариантов покупки тетради в клетку и тетради в линию?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 6.

5. В магазине имеется два вида тетрадей в клетку и два вида тетрадей в линию. Сколько существует вариантов покупки тетради в клетку и тетради в линию?

А. 6 **Б**. 4. **В**. 3. **Г**. 2.

6. Какое наибольшее число точек пересечения могут иметь три различные прямые?

А. 1. **Б**. 2. **В**. 3. **Г**. 4.

7. Сколькими способами два одинаковых яблока могут быть распределены между двумя детьми?

А. 2-мя. **Б**. 1-м. **В**. 4-мя. **Г**. 3-мя.

8. Сколькими способами два различных яблока могут быть распределены между двумя детьми?

А. 1-м. **Б**. 2-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 4-мя.

9. Сколькими способами три одинаковых яблока могут быть распределены между двумя детьми?

А. 1-м. **Б**. 2-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 4-мя.

10. Сколько существует вариантов распределения трёх одинаковых яблок между двумя детьми, при которых каждый ребёнок получит хотя бы одно яблоко?

А. 1. **Б**. 2. **В**. 3. **Г**. 4.

Решение задач

Рассмотрим различные методы перебора элементов совокупности.

Метод перебора расположений закодированных элементов

Он заключается в том, что элементы, о которых идет речь в условии, кодируются с помощью букв или чисел. Далее из полученных символов строятся последовательности расположений элементов, которые удовлетворяют условиям задачи. Очень важно научиться упорядоченному перебору вариантов.

Если элементы обозначены цифрами, то целесообразно последова-

тельности вариантов строить так, чтобы им соответствовали числа в возрастающем или убывающем порядке.

Если элементы закодированы буквами, то последовательности образованных “слов” должны размещаться в порядке, который подсказан размещением слов в словарях: сначала идут слова, в которых первая буква в азбуке стоит раньше других; если первые буквы одинаковы, то сначала идет слово, где вторая буква расположена в азбуке раньше других и т. д. Такой способ обычно называют ***лексикографическим***.

Соблюдение упорядоченного перебора помогает не пропустить ни один вариант.

Задача 1. В кондитерской есть мороженое четырех видов: “каштан”, “пломбир”, “сливочное” и “фруктовое”. Богдан и Олеся решили купить себе по одной порции мороженого. Сколько существует вариантов покупки ими: 1) двух порций; 2) двух порций одного вида; 3) двух порций разных видов?

Анализируем. В задаче говорится о выборе двух порций мороженого из четырёх имеющихся видов. Богдан и Олеся выбирают две порции мороженого, по одной каждому из них. Для подсчёта количества способов такого выбора можно закодировать буквами все виды мороженого и с их помощью составить все возможные варианты этого выбора и подсчитать их количество.

Решаем. Закодируем виды мороженого первыми буквами их названий: К, П, С, Ф соответственно. Будем считать, что запись «КП» означает, что Богдану достался каштан, а Олесе — пломбир, а запись «ПК» — Богдану достался пломбир, а Олесе — каштан. Совокупность всех вариантов выбора имеет следующий вид:

КК КП КС КФ

ПК ПП ПС ПФ

СК СП СС СФ

ФК ФП ФС ФФ

1) Всего 16 вариантов, и все они различные, то есть каждый результат исключает все другие. Итак, две порции можно выбрать 16-ю способами.

2) Выбору одного и того же вида мороженого для Богдана и Олеси соответствуют такие варианты: КК, ПП, СС, ФФ. Этих вариантов 4.

3) Выбору различных видов мороженого для Богдана и Олеси соответствуют все остальные варианты выбора. Их 16 – 4 = 12.

Ответ. 1) 16; 2) 4; 3) 12.

1. *В скольких вариантах обязательно указан пломбир?*

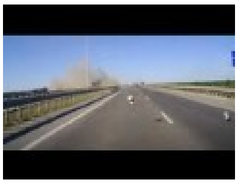
2. *Различаются ли варианты ПФ и ФП при покупке двух порций одним человеком?*

3. *Сколько существует вариантов покупки двух различных порций мороженого для Олеси?*

Построение дерева возможных вариантов

Сущность этого способа решения комбинаторных задач рассмотрим на примере.

Задача 2. Из города А в город В можно добраться пятью путями: одной из двух автодорог, железной дорогой, самолетом и речным транспортом. Из города В к городу С ведут четыре пути: автомобильный, воздушный, железнодорожный и речной. Сколькими способами можно добраться из города А в город С, делая остановку в городе В?



Анализируем. В задаче одно за другим выполняются два действия: вначале выбирается путь из А в В, затем — путь из В в С. Начало выполнения этих действий будем изображать в виде звёздочки (корня дерева). Варианты выполнения первого действия изображаются отрезками (ветками), исходящими из звёздочки (корня дерева), а отрезки (ветки), исходящие из концов построенных отрезков (веток), — варианты выполнения второго действия. Для ответа на поставленный вопрос нужно будет подсчитать количество концов последней группы отрезков (веток).

Решаем. Изобразим на рисунке 1 пути из А в В отрезками, выходящими из точки А, и обозначим их через 1, 2, 3, 4, 5, а пути из В в С — через а, б, в, г. Знак * (корень дерева) изображает город А. Чтобы добраться из А в С, можно сначала добраться из А в В, а для этого есть пять вариантов (см. рис. 1).

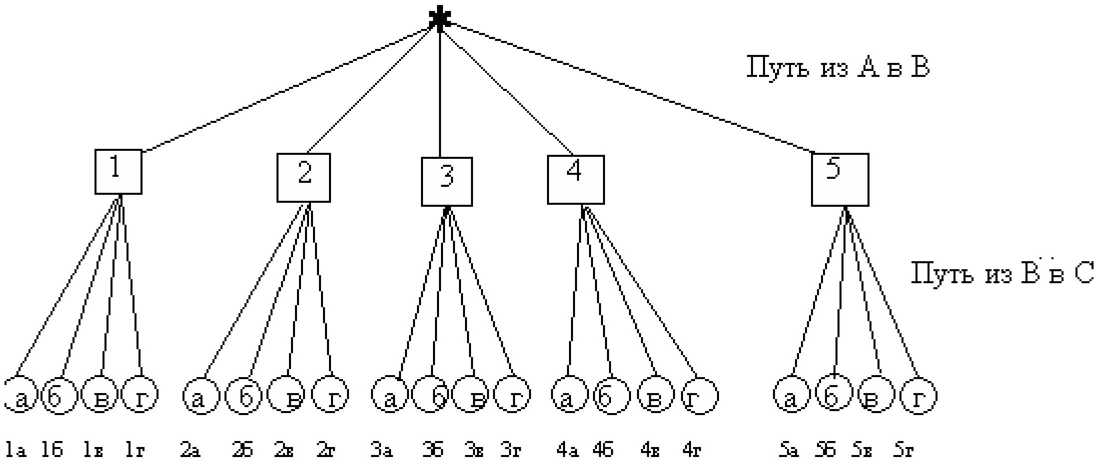


Рис. 1

Потом для каждого варианта передвижения из А в В нужно выбрать один путь из четырех, которыми можно добраться из В в С. Поэтому от конца каждого отрезка проведено по четыре отрезка, на концах которых написаны обозначения путей. Получено $5 \cdot 4 = 20$ различных вариантов путей.

Ответ. 20.

1. *Сколькими способами можно добраться из С в А, делая остановку в В?*

2. *Сколькими способами можно было бы добраться из города А в город С, делая остановку в В, если бы из А в В можно было добраться тремя путями, а из В в С — двумя?*

3. *Сколькими различными видами транспорта можно было добраться из А в В, если из В в С можно было добраться тремя видами, а из А в С через В — 18 способами?*

Если приходится выполнять три действия, то добавляется ещё одна группа отрезков (слой веток).

Задача 3. Из города M в город N можно добраться двумя видами транспорта: автобусом или поездом. Из города N в город P — тремя видами: автобусом, поездом или самолётом. Из города P в город Q — двумя видами: автобусом или вертолётом. Сколькими способами можно добраться из города M в город

Q, делая остановку в городах N и P?

Анализируем. Задача решается аналогично предыдущей. Она отличается от предыдущей тем, что в задаче 2 речь шла о двух действиях: выборе пути из А в В и из В в С. А в данной задаче рассматриваются три действия: выбор вида транспорта для переезда из M в N, из N в P, из P в Q. В дереве возможных вариантов добавится ещё один слой веток.

Решаем. Обозначим виды транспорта в M через А и П, виды транспорта в N – через 1, 2, 3 и виды транспорта в P – через *а* и *в*. Построим дерево возможных вариантов (см. рис. 2).

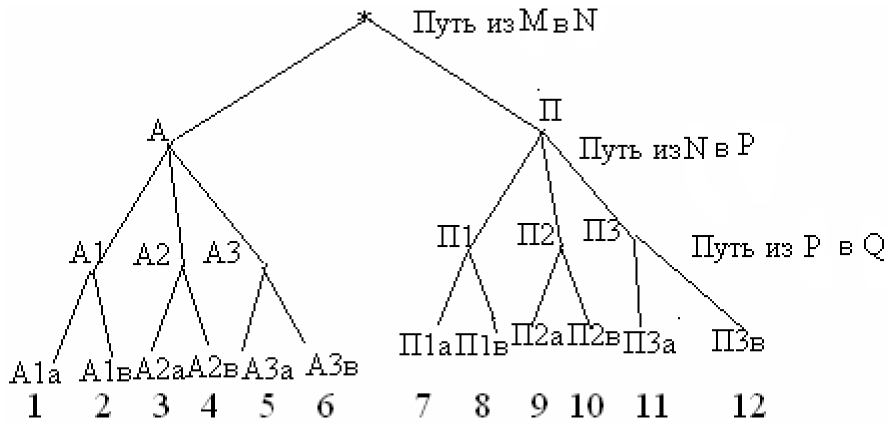


Рис. 2

Получено $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ способов добраться из M в Q через N и P.

Ответ. 12.

1. *Сколькими способами можно добраться из N в Q?*

2. *Сколькими способами можно добраться из M в Q через N и P, если в N нелётная погода?*

3. *Сколькими способами можно добраться из M в Q через N и P, пользуясь различными видами транспорта?*

Способ точек и отрезков

Его можно применить в том случае, когда из некоторой совокупности предметов выбираются два предмета. Изображаем элементы точками, расположенными так, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Потом соединяем каждые две точки отрезком прямой. Каждый из этих отрезков изображает вариант выбора двух элементов.

Задача 4. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь пять различных прямых?

Анализируем. Наибольшее количество точек пересечения будет в том случае, когда прямые попарно пересекаются, и все точки пересечения различны. Следовательно, задача сводится к вычислению количества способов выбора двух прямых из пяти данных. Каждая пара прямых даст одну точку пересечения. Воспользуемся указанным способом перебора.

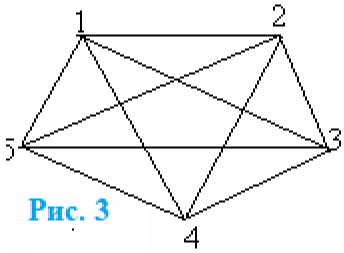


Рис. 3

Решаем. Изобразим прямые точками с номерами 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Соединим эти точки отрезками (см. рис. 3). Получим 10 отрезков. Каждый из них определяет две прямые и точку их пересечения. Следовательно, существует 10 точек пересечения у пяти прямых. На рис. 4 показано такое расположение прямых, при котором никакие две точки пересечения не совпали.

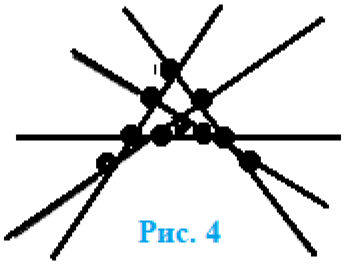
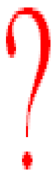


Рис. 4

Ответ. 10.



1. *Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь четыре различные прямые?*

2. *Могут ли пять различных прямых иметь 6 точек пересечения?*

3. *Могут ли пять различных прямых иметь 2 точки пересечения?*

Перебор вариантов с помощью таблиц

Таблицы удобно использовать при решении задач на разбиение совокупности различных или одинаковых предметов на заданное число групп.

Задача 5. Сколько существует вариантов распределения четырёх одинаковых карандашей между тремя детьми, если каждый ребенок может получить произвольное количество карандашей от 0 до 4?

Анализируем. Так как карандаши ***одинаковы***, то варианты, при которых ребенок получает, например, первый и второй карандаши или второй и четвертый, ничем не отличаются друг от друга. Поэтому нет смысла обозначать карандаши какими-то числами или буквами. Два варианта распределения карандашей между детьми естественно считать различными, если они отличаются лишь количеством карандашей, полученных, по крайней мере, двумя детьми.

Для подсчёта количества различных вариантов целесообразно составить таблицу, в которой указать для каждого ребёнка возможные количества полученных карандашей. При этом каждое представление числа 4 в виде суммы трёх слагаемых нужно рассматривать столько раз, сколько существует вариантов перестановки слагаемых в этом представлении.

Решаем. Обозначим детей буквами А, Б, В. Составим таблицу, на пересечении столбца и строки которой указывается количество карандашей, получаемых соответствующим ребенком. Каждый столбец этой таблицы изображает вариант распределения карандашей.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ребенок															
А.	4	0	0	3	3	1	1	0	0	2	2	0	2	1	1
Б.	0	4	0	1	0	3	0	3	1	2	0	2	1	2	1
В.	0	0	4	0	1	0	3	1	3	0	2	2	1	1	2

Всего получили 15 различных вариантов распределения.

Ответ. 15.

1. *При скольких вариантах распределения каждый ребёнок получит хотя бы один карандаш?*

2. *Сколько существует вариантов распределения трёх одинаковых карандашей между тремя детьми, если каждый ребенок может получить произвольное количество карандашей от 0 до 3?*

3. *При скольких вариантах распределения 4-х одинаковых карандашей каждый ребёнок получит не более 2-х карандашей?*

Следующая задача отличается от предыдущей тем, что здесь подсчитывается количество вариантов распределения ***различных*** предметов.

Задача 6. Сколько существует вариантов распределения 2-х различных карандашей между тремя детьми, если каждый ребенок может получить произвольное количество карандашей от 0 до 2?

Анализируем. В отличие от предыдущей задачи, в этой нужно вводить обозначения не только для детей, но и для карандашей. В предыдущей задаче обозначения для карандашей не вводились, так как они были неразличимыми, одинаковыми. Снова варианты распределения удобно рассмотреть в таблице.

Теперь различные варианты распределения отличаются не только количеством карандашей у каждого ребёнка, но и самими карандашами.

Решаем. Обозначим карандаши буквами *а* и *б*, а детей — буквами А, Б, В. Составим таблицу, в клетках которой укажем обозначения карандашей, полученных соответствующим ребенком.

№ варианта № ребенка	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А.	*а, б*	*а*	*б*	-	-	-	-	*а*	*б*
Б.	-	*б*	*а*	*а, б*	*а*	*б*	-	-	-
В.	-	-	-	-	*б*	*а*	*а, б*	*б*	*а*

Каждый столбик этой таблицы изображает вариант распределения карандашей. Количество вариантов распределения равно количеству столбцов в таблице. Всего имеем 9 вариантов распределения.

Ответ. 9.

1. *Существует ли такое распределение, при котором каждый ребёнок получит хотя бы один карандаш?*

2. *Сколько существует вариантов распределения 2-х одинаковых карандашей между тремя детьми?*

3. *Сколько существует вариантов распределения 2-х различных карандашей между двумя детьми, если каждый ребенок может получить произвольное количество карандашей от 0 до 2?*

Проверь себя

1. В кафе имеется три вида пирожных: песочные, слоёные и заварные. Сколько существует вариантов покупки Игорем и Таней по одному пирожному?

А. 3. **Б**. 6. **В**. 8. **Г**. 9.

2. В магазине имеется четыре вида блюдец и три вида чашек. Сколько существует вариантов покупки блюдца и чашки?

А. 7. **Б**. 8. **В**. 12. **Г**. 16.

3. В магазине “Все для чая” продается 2 разных вида блюдец, 3 разных вида чашек и 2 разных вида чайных ложек. Сколько существует вариантов покупки комплекта из чашки, блюдца и ложки?

А. 7. **Б**. 9. **В**. 12. **Г**. 18.

4. Сколько существует вариантов выбора двух пирожных из четырёх различных?

А. 12. **Б**. 6. **В**. 4. **Г**. 2.

5. Сколько существует вариантов распределения четырёх одинаковых яблок между двумя детьми?

А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 5.

6. Сколько существует вариантов распределения четырёх различных фруктов между двумя детьми?

А. 16. **Б.** 12. **В.** 8. **Г.** 6.

Реши сам

1. Сколько двузначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

2. Сколько можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 двузначных чисел с нечётными цифрами?

3. Сколькими способами можно поселить трёх студентов в двух комнатах общежития так, чтобы обе комнаты были использованы?

4. В ящике пять различных игрушек. Сколько существует вариантов извлечения двух игрушек?

5. Сколько существует вариантов распределения пяти одинаковых монет между двумя детьми, при которых каждому достанется хотя бы одна монета?

6. Сколько существует вариантов распределения трёх различных монет между двумя детьми, при которых каждому достанется хотя бы одна монета?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Введите обозначения для видов пирожных и составьте всевозможные варианты выбора, удовлетворяющие условию.

2. Г. Используйте указание к предыдущему заданию.

3. В. Выясните, есть ли у Ани выбор.

4. А. Введите обозначения для видов тетрадей и составьте всевозможные варианты выбора, удовлетворяющие условию.

5. Б. Используйте указание к предыдущему заданию.

6. В. Рассмотрите различные возможные взаимные расположения прямых.

7. Г. Обратите внимание на то, что различные способы распределения яблок могут отличаться как количеством яблок, так и самими яблоками.

8. Г. Обратите внимание на то, что различные способы распределения яблок могут отличаться только количеством яблок.

9. Г. Воспользуйтесь способом, использующем составление таблицы.

10. Б. Используйте таблицу, составленную при решении предыдущего задания.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 7. **2.** Нет. **3.** 6.

Задача 2. 1. 20. **2.** 6. **3.** 6.

Задача 3. 1. 6. **2.** 8. **3.** 4.

Задача 4. 1. 6. **2.** Да. **3.** Нет.

Задача 5. 1. При 3-х. **2.** 10-ю. **3.** При 6.

Задача 6. 1. Нет. **2.** 6-ю. **3.** 4-мя.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6
Г	В	В	Б	Г	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 12. Можно выписать все искомые двузначные числа.

2. 4. Можно воспользоваться построением дерева возможных вариантов. Обратите внимание на то, что цифры могут быть одинаковыми.

3. 6-ю. Можно выписать все возможные варианты.

4. 10. Можно воспользоваться методом точек и отрезков.

5. 4. Можно воспользоваться методом таблиц.

6. 6. Можно воспользоваться методом таблиц.

2. Выбор элементов из одного множества с возвращением и без возвращения

В данном блоке продолжим перебирать варианты выбора нескольких элементов из данной совокупности или варианты разбиения совокупности на группы и подсчитывать их количество. При этом будем обращать внимание на то, возвращается ли извлечённый элемент в заданную совокупность или нет.

Многие задачи, которые мы рассматривали выше и решали с помощью перебора вариантов, сводились к выбору определенного количества объектов из заданной совокупности. Выбирались пирожные, цифры, карандаши, блюдца и т. д. Иногда выбранный объект возвращался в данную совокупность. Например, если из цифр 1, 2, 3 образовывать трёхзначные числа, то после выбора некоторой цифры следующую можно выбирать из данной совокупности. В итоге могли получиться числа 131, 222, содержащие одинаковые цифры. Такой выбор будем называть ***выбором с возвращением***.

Если же из цифр 1, 2, 3 образовывать трёхзначные числа с различными цифрами, то после выбора некоторой цифры следующая выбирается из оставшейся совокупности. Результатом такого выбора могли быть только числа с различными цифрами 123, 312. Такой выбор будем называть ***выбором без возвращения.***

Готовимся к решению задач

1. Из пункта А в пункт В ведут две дороги. Сколькими способами можно до браться из A в B и возвратиться из B в A?

А. 6-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 2-мя.

2. Из пункта A в пункт B ведут две дороги. Сколькими способами можно добраться из A в B и возвратиться из B в A той же дорогой?

А. 6-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 2-мя.

3. Из пункта A в пункт B ведут две дороги. Сколькими способами можно добраться из A в B и возвратиться из B в A дорогой, отличной от той, которой добирались из A в B?

А. 6-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 2-мя.

4. В семье двое детей, у родителей есть возможность отправить их с 1-го по 15-е июня в два лагеря. Сколько имеется вариантов выбора лагерей для детей?

А. 4. **Б**. 3. **В**. 2. **Г**. 1.

5. В семье двое детей, у родителей есть возможность отправить их с 1-го по 15-е июня в два лагеря. Сколько имеется вариантов выбора одного и того же лагеря для двух детей?

А. 4. **Б**. 3. **В**. 2. **Г**. 1.

6. В семье двое детей, у родителей есть возможность отправить их с 1-го по 15-е июня в два лагеря. Сколько имеется вариантов выбора различных лагерей для двух детей?

А. 1. **Б**. 2. **В**. 3. **Г**. 4.

Решение задач

При решении задач, при переборе различных вариантов следует обращать внимание на то, как осуществляется выбор: с возвращением или без. От этого существенно зависит результат решения задачи.

Задача 1. На вершину горы ведут пять дорог.

1) Сколько у туриста существует вариантов для подъёма на гору и спуска с неё?

2) Сколько у туриста существует вариантов для подъ-

ёма на гору и спуска с неё, если подъём и спуск происходят по разным путям?

Анализируем. По дорогам, ведущим на вершину горы, можно и спуститься с горы. Если пронумеровать эти дороги, то подъём на вершину горы и спуск с горы будет описываться парой цифр, использованных для нумерации дорог. Первой цифрой в каждой паре обозначена дорога для подъёма, второй — дорога для спуска. В этих парах могут быть как одинаковые цифры (если подъём и спуск совершались по одной и той же дороге), так и различные (если подъём и спуск совершались по различным дорогам). Для решения задачи нужно подсчитать количество соответствующих пар. Для подсчёта можно применить метод перебора вариантов закодированных элементов.

Решаем. Обозначим дороги цифрами 1, 2, 3, 4, 5.

1) Рассмотрим все варианты подъёма на вершину и спуска с неё. Для этого достаточно выписать все двузначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, 4, 5:

11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55

Всего имеем 25 вариантов.

2) В данном задании требуется, чтобы подъём на вершину и спуск с неё совершались различными дорогами. Из пар, выписанных в задании 1), нужно исключить пары с одинаковыми цифрами, то есть пары: 11, 22, 33, 44, 55. Останется 25 – 5 = 20 пар и соответственно 20 вариантов.

Ответ. 1) 25; 2) 20.

?

1. *Описывают пары 34 и 43 одинаковые пути подъёма и спуска или различные?*

2. *Сколько имеется вариантов подъёма на вершину горы и спуска с неё, если они совершаются по одной и той же дороге?*

3. *Сколько дорог ведёт на вершину горы, если существует 12 вариантов подъёма на гору и спуска с неё различными дорогами?*

При решении задания 1) имел место выбор с возвращением: имелись 5 карточек с номерами путей, из них выбиралась карточка с номером пути для подъёма, эта карточка возвращалась в исходный набор, и карточка с номером пути для спуска извлекалась из полного набора.

А при решении задания 2) имел место выбор без возвращения: имелись 5 карточек с номерами путей, из них выбиралась карточка с номером пути для подъёма, эта карточка не возвращалась в исходный набор, и карточка с номером пути для спуска извлекалась из оставшегося набора.

В некоторых задачах не вызывает трудностей нахождение ответа на вопрос о том, как осуществляется выбор: с возвращением или без возвращения. Например, если на полке расставляются три книги, то понятно, что выбор следующей книги проводится без возвращения предыдущей, и размещение трех книг (обозначим их через *а, б, в*) можно выполнить шестью способами: *абв*, *авб*, *бав*, *бва*, *ваб*, *вба*.

А вот если нужно подсчитать, сколькими способами два человека могут разместиться в трех вагонах поезда, то необходимо знать, разрешено ли пассажирам выбирать один и тот же вагон или нет.

Задача 2. Два человека независимо друг от друга покупают билеты на поезд, состоящий из трёх вагонов.

1) Сколько существует вариантов размещения их в вагонах поезда?

2) Сколько существует вариантов того, что они окажутся: а) в одном вагоне; б) в разных вагонах?

Анализируем. Если пронумеровать вагоны, то каждый вариант размещения двух пассажиров в вагонах поезда будет описываться парой цифр, где первая цифра указывает номер вагона, выбранного первым пассажиром, а вторая — вторым. При рассмотрении всех вариантов размещения пассажиров обе цифры в парах могут быть любыми из трёх, характеризующих номера вагонов. При подсчёте количества вариантов, при которых пассажиры окажутся в разных вагонах, нужно учесть, что в соответствующих парах цифры должны быть различными. При подсчёте количества вариантов, при которых пассажиры окажутся в одном вагоне, нужно учесть, что в соответствующих парах цифры должны быть одинаковыми. Для ответа на вопросы задания необходимо подсчитать количество соответствующих пар. Для подсчётов можно воспользоваться методом перебора вариантов закодированных элементов.

Решаем. Обозначим вагоны через 1, 2, 3.

1) Составим все варианты выбора вагонов пассажирами:

11 12 13

21 22 23

31 32 33

Всего 9 вариантов.

2) а) Подсчитаем количество вариантов выбора, когда пассажиры окажутся в одном вагоне. Все варианты расположения пассажиров имеют вид:

11 22 33.

Всего три варианта.

б) Вариантов выбора вагонов пассажирами с учётом того, что они должны оказаться в разных вагонах, всего 9 – 3 = 6.

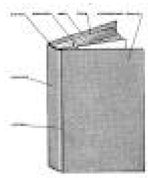
Ответ. 1) 9; 2) а) 3; б) 6.

1. *Пары 13 и 31 описывают одинаковые или различные варианты выбора вагонов?*

2. *Сколько существует вариантов размещения двух пассажиров в двух вагонах так, чтобы они оказались: а) в разных вагонах; б) в одном вагоне?*

3. *Сколько существует вариантов размещения трёх пассажиров в двух вагонах поезда: а) всего; б) таких, чтобы все пассажиры оказались в разных вагонах; в) таких, чтобы все пассажиры оказались в одном вагоне?*

В следующей задаче также придётся учитывать, осуществляется ли выбор с возвращением или без возвращения.



Задача 3. Переплётчик может переплести книгу в один из трёх цветов: жёлтый, зелёный, красный. Ему необходимо переплести две книги. Сколькими способами он может это сделать, если:

1) книги должны быть переплетены в один цвет;

2) книги должны быть переплетены в разные цвета;

3) нет никаких ограничений на выбор цветов переплёта?

Анализируем. Задача сводится к выбору двух цветов переплёта из трёх: цвет для первой книги и для второй. Для выбора цвета каждой книги есть три возможности. При выполнении заданий следует установить, о каком выборе идёт речь: с возвращением или без возвращения.

Решаем. Обозначим цвета переплётов первыми буквами их названий: ж, з, к.

1) Выбор цвета переплёта для обеих книг, если цвет переплёта одинаковый, имеет такие результаты: жж, зз, кк. Всего 3 варианта.

2) Выбор цвета переплёта для обеих книг, если книги должны быть переплетены в разные цвета, сводится к выбору без возвращения двух элементов из трёх. Результаты этого выбора: жз, жк, зж, зк, кж, кз. Всего 6 вариантов.

3) Количество всех вариантов выбора цвета переплёта для двух книг состоит из количества вариантов выбора цветов переплёта для двух книг, когда книги переплетаются в один цвет, и количества всех вариантов выбора цветов переплёта, когда книги переплетаются в разные цвета, $9 = 3 + 6$.

Ответ. 1) 3; 2) 6; 3) 9.

1. *Сколькими способами можно переплести две книги, если у переплётчика есть возможность переплести книги в два цвета?*

2. *Во сколько цветов переплётчик может переплести книги, если переплёт двух книг он может осуществить 16 способами?*

3. *Сколькими способами можно переплести три книги, если у переплётчика есть возможность переплести книги в два цвета?*

Проверь себя

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

А.10. **Б.** 20. **В.** 25. **Г.** 32.

2. Сколько двузначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

А. 5. **Б**. 10. **В**. 15. **Г**. 20.

3. Сколькими способами трём студентам можно поставить оценки 3, 4, 5, если никакие два студента не должны получить одинаковые оценки?

А. 3-мя. **Б**. 6-ю. **В**. 8-ю. **Г**. 9-ю.

Реши сам

1. Сколько существует различных вариантов ответа на три вопроса, если для каждого вопроса имеется два возможных ответа: «да» и «нет»?

2. Сколько существует различных вариантов ответа на три вопроса, если для каждого вопроса имеется три возможных ответа: «да», «нет» и «не знаю» и ни на какие два вопроса не могут быть даны одинаковые ответы?

3. Сколько существует различных вариантов ответа на три вопроса, если для каждого вопроса имеется три возможных ответа: «да», «нет» и «не знаю»?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Выясните, выбор дороги для перехода из В в А осуществляется с возвращением или без возвращения.

2. Г. Установите, сколькими способами осуществляется выбор дороги из В в А.

3. Г. Выясните, выбор дороги для перехода из В в А осуществляется с возвращением или без возвращения.

4. А. Выясните, выбор лагеря для второго ребёнка осуществляется с возвращением или без возвращения.

5. В. Установите, сколькими способами осуществляется выбор лагеря для второго ребёнка.

6. Б. Установите, сколькими способами осуществляется выбор лагеря для пер вого ребёнка.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. Различные. **2.** 5. **3.** 4.

Задача 2. 1. Различные. **2.** а) 2; б) 2. **3.** а) 8; б) 0; в) 2.

Задача 3. 1. 4-мя. **2.** В 4. **3.** 8-ю.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
В	Г	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 8. Например, один из результатов ответа имеет вид: 1 да, 2 нет, 3 нет. Выпишите все варианты.

2. 6. Можно ввести обозначения для вопросов и перебрать всевозможные наборы из выбранных символов, не содержащие одинаковых символов.

3. 27. Можно ввести обозначения для вопросов и перебрать всевозможные наборы из выбранных символов.

3.Упорядоченный и неупорядоченный выбор элементов из одного множества

В задачах, которые рассматривались выше, было безразлично, в каком порядке появлялись эти элементы. Варианты, которые описывались наборами одних и тех же элементов, но отличались порядком их следования, не считались различными. Например, если из четырех учащихся А, Б, В, Г выбираются двое для выполнения одного поручения (принести скамейку из другой комнаты), то выборы учащихся БВ и ВБ являются одинаковыми, так как скамейку они несут вдвоём. Такой выбор будем называть ***неупорядоченным*** (порядок выбора не влияет на результаты).

Но если из этих учащихся выбираются два учащихся для ответа на уроке, причём первый для устного ответа, а второй для письменного, то выборы БВ и ВБ естественно считать различными. Подобный выбор будем называть ***упорядоченным*** (порядок выбора влияет на результаты).

Готовимся к решению задач

1. Трое друзей решили сыграть друг с другом по одной партии в теннис. Сколько будет сыграно партий?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 6.

2. Сколькими способами руководитель кружка по информатике может выбрать из трёх учащихся, явившихся на занятие кружка, двух для переноски компьютеров, полученных школой?

А. 6-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 2-мя.

3. Сколькими способами руководитель кружка по информатике может выбрать из трёх учащихся, явившихся на занятие кружка, двух: одного для разработки алгоритма решения новой задачи, другого — для составления программы по разработанному алгоритму?

А. 6-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 2-мя.

4. В первенстве класса по шахматам приняло участие трое учащихся. По условиям соревнования, призами награждаются двое учащихся, занявшие первые два места. Сколько существует вариантов распределения призов?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 6.

5. В первенстве класса по шахматам приняло участие трое учащихся. По условиям соревнования, занявший первое место получает ценный подарок, занявший второе месть — почётную грамоту. Сколькими способами могут определиться учащиеся, занявшие первое и второе места?

А. 2-мя. **Б**. 3-мя. **В**. 4-мя. **Г**. 6-ю.

6. В семье трое мальчиков. Мама выбирает двух из них для того, чтобы занести привезенный мешок с картошкой с улицы в квартиру. Сколькими способами она может осуществить этот выбор?

А. 6-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 2-мя.

7. В семье трое мальчиков. Мама выбирает двух из них: одного из них для покупки хлеба в магазине, другого — для покупки фруктов на рынке. Сколькими способами она может осуществить этот выбор?

А. 6-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 3-мя. **Г**. 2-мя.

Решение задач

В задачах при переборе вариантов следует различать случаи, когда порядок извлечения элементов влияет и когда не влияет на результаты выбора.

Задача 1. Четверо друзей Андрей, Борис, Владимир, Григорий, обрадовавшись встрече после каникул, пожали друг другу руки. Сколько всего рукопожатий было сделано?

Анализируем. В рукопожатии участвует два человека. Поэтому для решения задачи нужно перебрать всевозможные пары друзей, а затем учесть, что порядок расположения друзей в паре не существенен для подсчёта количества рукопожатий. Действительно, если *X* и *Y* пожали друг другу руки, то пары *XY* и *YX* дают одно и то же рукопожатие.

Решаем. Закодируем друзей первыми буквами их имен: А, Б, В, Г. Каждые два из них пожали друг другу руки. Перечислим всевозможные пары этих учащихся:

АБ	БА
АВ БВ	ВА ВБ
АГ БГ ВГ	ГА ГБ ГВ

Пары, указанные во втором столбце, обозначают те же рукопожатия, что и соответствующие пары в первом столбце, отличающиеся от них порядком указания друзей. Следовательно, всего было сделано 6 различных рукопожатий.

Ответ. 6.

?

1. *Сколькими рукопожатиями обмениваются три человека при встрече?*

2. *Совпадает ли количество рукопожатий, которыми обменялись при встрече четверо друзей, с количеством фотографий, которыми они об-*

менялись?

3. *Сколько на встрече было друзей, если все они обменялись 10-ю рукопожатиями?*

Внешне подобная ситуация, но отличная от рассмотренной в предыдущей задаче, представлена в следующей.

Задача 2. По окончании школы пятеро друзей Андрей, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий в память о совместной учебе обменялись сувенирами. Сколько всего сувениров понадобилось для этого?

Анализируем. В обмене сувенирами участвует два человека. Поэтому для решения задачи нужно перебрать всевозможные пары друзей, а затем учесть, что порядок расположения друзей в паре существенен для подсчёта количества сувениров. Действительно, если X дал сувенир Y, а Y дал сувенир X, то пары XY и YX означают два сувенира.

Решаем. Закодируем друзей первыми буквами их имён: А, Б, В, Г, Д. Получим следующие пары друзей для обмена сувенирами:

АБ	БА
АВ БВ	ВА ВБ
АГ БГ ВГ	ГА ГБ ГВ
АД БД ВД ГД	ДА ДБ ДВ ДГ

Пары, указанные выше, обозначают сувенир, который первый человек, указанный в паре, передал второму. Следовательно, всего для обмена понадобится 20 сувениров.

Ответ. 20.

1. *Четверо друзей обменялись визитными карточками. Сколько карточек было роздано?*

2. *Четверо друзей обменялись визитными карточками. У одного из них не было с собой визитной карточки. Сколько карточек было роздано, если визитные карточки друзей получили все четверо?*

3. *Сколько было на встрече друзей, если каждый из них дал визитную* *карточку каждому из остальных и всего было роздано 30 визитных карточек?*

Как показывают решения этих задач, при переборе вариантов нужно обязательно ответить на вопрос, существенным ли является порядок элементов, которые выбираются из совокупности при подсчете всех вариантов или нет. Игнорирование этого вопроса может привести к ошибкам.

Анализ решения задач 1 и 2 показывает справедливость следующего правила.

Количество способов образования пар в случае, когда порядок выбора элементов несущественен по содержанию задачи, можно получить из количества способов образования пар при существенном порядке выбора элементов делением на 2.

В данном случае 2 — это количество способов размещения элементов в паре, например, АВ, ВА — 2 способа размещения элементов в паре.

Рассмотрим еще такую задачу, чтобы научиться различать, когда порядок элементов нужно учитывать, а когда не нужно, то есть, когда наборы, отличающиеся только порядком извлечения элементов, характеризуют различные результаты выбора, а когда одинаковые.

Задача 3. В семье пятеро детей: Андрюша, Гриша, Коля, Митя и Петя. Сколько у мамы есть вариантов выбора двух детей для того, чтобы послать:

1) их вдвоём в лес за ягодами;

2) одного в магазин, а другого на почту?

Анализируем. В данной задаче осуществляется выбор двух детей из пяти. После перечисления всех результатов выбора предстоит решить, какие пары удовлетворяют каждому из заданий 1) и 2).

Решаем. Решение подобно решениям предыдущих задач. Закодируем детей первыми буквами их имён: А, Г, К, М, П. Имеем следующие пары детей для выполнения маминого задания:

	ГА	КА	МА	ПА
АГ		КГ	МГ	ПГ

АК	ГК		МК	ПК
АМ	ГМ	КМ		ПМ
АП	ГП	КП	МП	

1) Всего получилось 20 вариантов. Порядок выбора детей при походе за ягодами в лес роли не играет. Поэтому в этом случае мы каждую возможную пару учитывали дважды. Всего у мамы 20:2 = 10 возможностей для выбора двух детей для похода в лес.

2) Для выполнения второго поручения порядок указания детей в парах существенен. В этом случае у мамы 20 возможностей для выбора двух детей.

Ответ. 1) 10; 2) 20.

1. *Сколько у мамы вариантов выбора двух детей из пяти для выполнения двух различных поручений?*

2. *Сколько у мамы вариантов выбора трёх своих детей для похода в лес за ягодами?*

3. *Сколько у мамы детей, если она может выбрать двух для выполнения двух различных поручений 12-ю способами?*

Проверь себя

1. Сколько понадобится листиков бумаги для записи адресов, которыми обмениваются четыре подруги?

А. 4. **Б.** 6. **В.** 12. **Г.** 24.

2. Военнослужащие приветствуют друг друга отданием чести — прикладыванием правой руки к голове. Сколько будет прикладываний рук к головам, если четыре военнослужащих при встрече отдадут честь друг другу?

А. 12. **Б.** 6. **В.** 4. **Г.** 3.

3. В первенстве школы по футболу принимает участие четыре команды. Сколько есть вариантов для предсказания первых двух призёров соревнования без учёта мест, занятых ими?

А. 4. **Б.** 6. **В.** 8. **Г.** 12.

Реши сам

1. На уроке физической культуры каждый из четырёх учащихся передаёт мяч каждому из остальных по одному разу. Сколько всего было передач?

2. Сколько существует вариантов выбора из четырех учащихся трёх для переноски компьютеров?

3. Сколько существует вариантов выбора из четырех учащихся трёх для выполнения трёх различных видов самостоятельной работы?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Установите, влияет или нет порядок выбора друзей на результаты выбора пар для игры в теннис.

2. В. Выясните, является ли выбор учащихся упорядоченным или неупорядоченным.

3. А. Введите обозначения для учащихся и переберите всевозможные варианты.

4. Б. Установите, влияет или нет порядок выбора учащихся на результаты выбора пар призёров.

5. Г. Выясните, является ли выбор учащихся упорядоченным или неупорядоченным.

6. В. Выясните, являются ли пары выбранных мальчиков, состоящие из одних и тех же мальчиков, различными или одинаковыми результатами выбора.

7. А. Выясните, являются ли пары выбранных мальчиков, состоящие из одних и тех же мальчиков, различными или одинаковыми результатами выбора.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 3-мя. **2.** Нет. **3.** 5.

Задача 2. 1. 12. **2.** 9. **3.** 6.

Задача 3. 1. 20. **2.** 10. **3.** 4.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
В	А	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 12. Закодируйте учащихся и выпишите всевозможные пары, удовлетворяющие условию.

2. 4. Выясните, изменится ли результат выбора, если учащиеся поменяются местами при переноске компьютеров.

3. 24. Выясните, изменится ли результат выбора, если учащиеся поменяются заданиями.

4. Разбиение на группы совокупности одинаковых или различных элементов

В большинстве из ранее рассмотренных задач элементы, из которых осуществлялся выбор или которые распределялись по разным группам, были различными. Решение задачи существенно меняется, если некоторые элементы являются одинаковыми. Например, из пяти различных букв *а, б*, *в*, *г*, *д* две буквы можно выбрать 10 способами:

аб

ав бв

аг бг вг

ад, бд вд гд

а из пяти одинаковых *а, а, а, а, а* — фактически только одним: все выбранные пары букв будут иметь вид *аа*.

Готовимся к решению задач

1. Сколько существует вариантов для распределения 2-х различных книг между двумя детьми?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 6.

2. Сколько существует вариантов для распределения 2-х различных книг между двумя детьми таких, при которых каждый ребёнок получит хотя бы одну книгу?

А. 4. **Б**. 3. **В**. 2. **Г**. 1.

3. Сколько существует вариантов для распределения 2-х одинаковых книг между двумя детьми?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 6.

4. Сколько существует вариантов для распределения 2-х одинаковых книг между двумя детьми таких, при которых каждый ребёнок получит хотя бы одну книгу?

А. 1. **Б**. 2. **В**. 3. **Г**. 4.

5. Сколько существует вариантов для распределения 3-х одинаковых книг между двумя детьми?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г**. 6.

6. Сколькими способами две одинаковые книги можно разложить на две стопки?

А. 2-мя. **Б**. 3-мя. **В**. 4-мя. **Г**. 5-ю.

7. Сколькими способами две различные книги можно разложить на две стопки?

А. 2-мя. **Б**. 3-мя. **В**. 4-мя. **Г**. 5-ю.

8. Сколько существует вариантов для разложения 2-х одинаковых книг на две стопки таких, при которых ни одна стопка не является пустой?

А. 4. **Б**. 3. **В**. 2. **Г**. 1.

9. Сколько существует вариантов для разложения 2-х различных книг на две стопки таких, при которых ни одна стопка не является пустой?

А. 4. **Б**. 3. **В**. 2. **Г**. 1.

10. Четыре теннисиста разделяются на две группы по два теннисиста в каждой для проведения парной игры между ними. Различимы ли эти группы?

11.Четыре теннисиста разделяются на две группы по два теннисиста в каждой для участия в соревнованиях, которые проводятся в различных городах. Различимы ли эти группы?

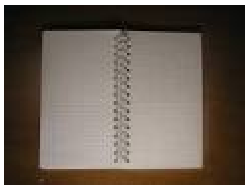
12. Шесть туристов разделяются на две группы по три туриста в каждой для поиска заблудившегося участника похода. Различимы ли эти группы?

13.Шесть туристов разделяются на две группы по три туриста в каждой: одна для осмотра храма, другая — для похода в горы. Различимы ли эти группы?

Решение задач

При переборе вариантов следует обращать внимание на то, о совокупности различных или одинаковых элементов идет речь в задаче.

Для сравнения этих ситуаций рассмотрим следующую задачу.



Задача 1. Сколько существует вариантов для распределения 3-х блокнотов между двумя детьми, если блокноты: 1) различные; 2) одинаковые?

Анализируем. Подобные задачи мы решали, используя таблицы. Если распределяются одинаковые предметы, то различные варианты распределения отличаются только количеством полученных предметов. Вводить обозначения для предметов не нужно.

Если же распределяются различные предметы, то различные варианты распределения отличаются как количеством полученных предметов, так и самими предметами.

Решаем. 1) Обозначим блокноты числами 1, 2, 3. Все варианты их распределения между двумя детьми представим в таблице:

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
№ ребенка								
Первый	123	-	12	13	23	1	2	3
Второй	-	123	3	2	1	23	13	12

Следовательно, есть восемь вариантов распределения трёх различных блокнотов между двумя детьми.

2) Пусть блокноты одинаковы. Представим варианты распределения блокнотов в таблице, указав их количество, полученное каждым ребёнком.

№ варианта	1	2	3	4
№ ребенка				
Первый	3	-	2	1
Второй	-	3	1	2

Таким образом, есть четыре варианта распределения трех одинаковых блокнотов между двумя детьми.

Ответ. 1) 8. 2) 4.

1. *Сколько существует вариантов распределения трёх различных блокнотов между двумя детьми, при которых каждый ребенок получит по крайней мере один блокнот?*

2. *Сколько существует вариантов распределения трёх одинаковых блокнотов между двумя детьми, при которых каждый ребенок получит по крайней мере один блокнот?*

3. *Сколько имеется одинаковых блокнотов, если между двумя детьми их можно распределить 5-ю способами?*

В предыдущей задаче элементы распределялись между двумя детьми, то есть распределялись на две группы. Эти группы были различны: дети же разные. В следующей задаче эти группы будут неразличимыми. Посмотрим, что изменится при её решении по сравнению с предыдущей.

Задача 2. Сколько существует вариантов для размещения 3-х блокнотов на двух неразличимых подставках, если блокноты: 1) различные; 2) одинаковые?

Анализируем. В предыдущей задаче мы распределяли три блокнота между двумя детьми. Поэтому распределение, при котором первому ребенку достались блокноты 1 и 2, а второму — блокнот 3, отличалось от распределения, при котором первому ребенку достался блокнот 3, а второму — блокноты 1 и 2. А вот если мы размещаем блокноты на двух неразличимых подставках, то два размещения 12 и 3, 3 и 12 ничем не отличаются одно от другого.

Решаем. 1) Составим таблицу размещения блокнотов на двух подставках, учитывая, что блокноты различны, а порядок размещения блокнотов на подставках не существенен. При этом одна из подставок может оказаться пустой.

№ варианта № подставки	1	2	3	4
Первая	123	12	13	23
Вторая	-	3	2	1

Имеется четыре способа размещения трёх различных блокнотов, в одном из способов одна из подставок пустая.

2) Составим таблицу размещения 3-х одинаковых блокнотов на двух подставках. Содержимое на подставках будет отличаться только количеством блокнотов в них. При этом, как и в предыдущей задаче, одна из подставок может оказаться пустой.

№ варианта	1	2
№ подставки		
Первая	3	2
Вторая	-	1

Следовательно, имеем два варианта размещения на двух подставках трех одинаковых блокнотов. Обратите внимание на то, что по сравнению с задачей 1 (где группы отличались одна от другой) количество вариантов уменьшилось вдвое, то есть в количество перестановок двух элементов (количество групп).

Ответ. 1) 4; 2) 2.

1. *Сколько существует вариантов для размещения трёх блокнотов на двух неразличимых подставках таких, что среди подставок нет пустых, если блокноты: а) различны; б) одинаковы?*

2. *Сколько существует вариантов для размещения трёх одинаковых блокнотов на трёх неразличимых подставках?*

3. *Сколько существует вариантов для размещения четырёх различных блокнотов на двух неразличимых подставках?*

В двух предыдущих задачах из условия было ясно, на какие группы — различимые и неразличимые — распределялись элементы. В следующей это надо будет установить самостоятельно.

Задача 3. Сколько существует вариантов для разделения шести шахматистов из шахматного клуба, среди которых есть два мастера спорта, на две команды по 3 спортсмена в каждой так, чтобы в каждой было по одному мастеру спорта, если:

1) эти команды будут представлять свой клуб на командных соревнованиях в двух городах;

2) если эти команды будут играть между собой?

Анализируем. Если команды будут представлять свой клуб на командных соревнованиях в двух городах, то понятно, что шахматисты распределяются на две различные группы: в одном городе может быть более престижное соревнование по сравнению с другим городом, там больше может быть возможностей стать мастером спорта. Если же команды будут играть между собой, то шахматисты распределяются на две неразличимые группы. В последнем случае количество вариантов вдвое меньше, чем в первом: от перестановки команд не меняется разделение.

Решаем. Обозначим шахматистов — мастеров спорта буквами м и н, а других — числами 1, 2, 3, 4.

1) Их распределение на две команды представим в следующей таблице.

№ варианта № команды	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Первая	12м	12н	13м	13н	14м	14н	23м	23н	24м	24н	34м	34н
Вторая	34н	34м	24н	24м	23н	23м	14н	14м	13н	13м	12н	12м

Всего имеем 12 вариантов распределения 6 шахматистов на две команды.

2) Если команды будут играть между собой, то порядок команд не существенен и, следовательно, вариантов вдвое меньше. Всего имеем 6 различных вариантов распределения.

Ответ. 1) 12; 2) 6.

1. *Сколько существует вариантов разделения четырёх шахматистов на две команды по 2 человека в каждой, если команды создаются для одновременного участия в командных соревнованиях в двух городах?*

2. *Сколько существует вариантов разделения четырёх шахматистов на две команды по 2 человека в каждой, если две команды создаются* *для игры между собой?*

3. *Сколько существует вариантов разделения шести шахматистов, среди которых есть четыре мастера спорта, на две команды по 3 спортсмена в каждой таких, что в каждой оказалось по два мастера спорта, если эти команды будут представлять свой клуб на командных соревнованиях в двух городах?*

Проверь себя

1. Сколько существует вариантов распределения 2-х фломастеров между тремя детьми, если фломастеры: различные; одинаковые?

А. 8; 9. **Б**. 6; 9. **В**. 8; 6. **Г**. 9; 6.

2. Сколько существует вариантов распределения 4-х монет в двух неразличимых карманах, если монеты: различные; одинаковые?

А. 8; 3. **Б**. 16; 3. **В**. 8; 6. **Г**. 16; 6.

3. Группа детей, среди которых 2 мальчика и 2 девочки, случайно разделились на две равные группы так, что в каждой группе оказалось по одному мальчику и по одной девочке. Сколько существует вариантов разделения на группы, если оно проведено: для организации парной встречи между ними по теннису; с целью пополнения двух школьных команд по стрельбе?

А. 4; 2. **Б**. 2; 4. **В**. 4; 4. **Г**. 2; 2.

Реши сам

1. Сколько существует вариантов распределения 3-х фломастеров между двумя детьми таких, при которых каждому ребёнку достанется хотя бы один фломастер, если фломастеры: 1) разные; 2) одинаковые?

2. Сколько существует вариантов распределения 4-х марок в двух неразличимых конвертах, если марки: 1) разные; 2) одинаковые?

3. Сколькими способами четырёх детей можно разделить на две группы для организации парной игры в теннис между ними?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Обратите внимание на то, что различные варианты распределения отличаются как количеством книг, так и самими книгами.

2. В. Воспользуйтесь ходом решения предыдущего задания.

3. Б. Обратите внимание на то, что различные варианты распределения отличаются только количеством книг.

4. А. Воспользуйтесь ходом решения предыдущего задания.

5. В. Воспользовавшись методом составления таблиц, обратите внимание на то, что различные варианты распределения отличаются только количеством книг.

6. Б. Обратите внимание на то, что стопки книг являются неразличимыми группами.

7. В. Обратите внимание на то, что в отличие от предыдущего задания книги различны.

8. Г. Воспользуйтесь ходом решения задания 6.

9. В. Воспользуйтесь ходом решения задания 6.

10. Нет. Обратите внимание на то, что пары теннисистов играют между собой.

11. Да. Обратите внимание на то, что пары теннисистов играют в различных турнирах.

12. Нет. Обратите внимание на то, что группы туристов должны заниматься одним и тем же делом.

13. Да. Обратите внимание на то, что группы туристов должны заниматься различными делами.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 6. **2.** 2. **3.** 4.

Задача 2. 1. а) 3-мя; б) 1-м. **2.** 3-мя. **3.** 8-ю.

Задача 3. 1. 6. **2.** 3. **3.** 12-ю.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
В	А	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 1) 6. Закодируйте фломастеры и переберите всевозможные варианты, удовлетворяющие условию задачи. **2) 2.** Обратите внимание на то, что различные варианты распределения фломастеров отличаются только их количеством у каждого ребёнка.

2. 1) 8. Воспользуйтесь тем, что конверты неразличимы. **2) 3.** Обратите внимание на то, что различные варианты разложения марок в конвертах отличаются только их количеством в каждом конверте.

3. 3-мя. Воспользуйтесь тем, что порядок групп не существенен.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Выполнение заданий для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	5 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	7 задач	7 задач
«отлично»	Решено не менее	11 задач	10 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа напишите букву «*Д*».

1. В кафе имеется два вида пирожных: песочные и слоёные. Сколько существует вариантов для выбора Игорем, Максимом и Таней по одному пирожному?

А. 3. **Б**. 6. **В**. 8. **Г**. 9.

2. В магазине 6 разных видов чашек и 3 разных вида чайных ложечек. Сколько существует вариантов покупки комплекта из чашки и ложечки?

А. 20. **Б**. 18. **В**. 12. **Г**. 9.

3. В магазине “Все для чая” продается 3 разных вида блюдец, 2 разных вида чашек и 3 разных вида чайных ложечек. Сколько существует вариантов покупки комплекта из блюдца, чашки и ложечки?

А. 18 **Б**. 12. **В**. 9. **Г**. 8.

4. Сколько существует вариантов выбора двух пирожных из имеющихся пяти разных пирожных?

А. 15. **Б.** 12. **В.**10 **Г.** 8.

5. Сколько существует вариантов распределения четырёх одинаковых конфет между двумя детьми?

А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 5.

6. Сколько существует вариантов распределения четырёх различных конфет между двумя детьми?

А. 16. **Б.** 12. **В.** 8. **Г.** 6.

---

7. Сколько существует вариантов выбора вагонов двумя лицами из 4-х имеющихся вагонов?

А. 16. **Б.** 12. **В.** 4. **Г.** Однозначного ответа нет.

8. Нужно послать три срочных письма. Сколько существует вариантов выбора для этой цели курьеров, если имеется два курьера и каждое письмо можно дать любому из них?

А. 8. **Б**. 6. **В**. 4. **Г**. 3.

9. Вратарь три раза выбрасывает мяч в игру. Тренер рекомендовал ему выбивать мяч на одного из трёх нападающих. Сколько возможных вариантов может выбрать вратарь, если каждый раз будет выбирать другого нападающего?

А. 27. **Б**. 9. **В**. 8. **Г**. 6.

10. В футбольной команде 4 защитника. Необходимо, чтобы каждый мог выполнять функции всех остальных. Сколько существует вариантов для взаимного обмена четырьмя защитниками функциями во время матчей?

А. 4. **Б**. 6. **В**. 12. **Г**. 24.

11. В первенстве школы по футболу принимает участие четыре команды. Сколько игр будет сыграно в этом чемпионате, если каждая команда играет с каждой другой по одной игре?

А. 4. **Б**. 6. **В**. 12. **Г**. 24.

12. В комнате 5 лампочек. Сколько всего существует различных вариантов включения лампочек, при которых горят ровно две лампочки?

А. 25. **Б**. 20. **В**. 15. **Г**. 10.

13. Сколько существует вариантов для распределения 4-х монет между двумя детьми, если монеты: 1) различные; 2) одинаковые?

А. 1) 12; 2) 5. **Б**. 1) 8; 2) 4. **В**. 1) 16; 2) 5. **Г**. 1) 16; 2) 6.

14. Сколько существует вариантов размещения 3-х карандашей в двух неразличимых стаканах, если карандаши: 1) различные; 2) одинаковые?

А. 1) 12; 2) 4. **Б**. 1) 6; 2) 2. **В**. 1) 8; 2) 4. **Г**. 1) 4; 2) 2.

15. Шесть туристов, среди которых было двое уроженцев тех мест, где проходил туристский поход, распределились на две равные группы, в каждой из которых было по одному уроженцу этих мест. Сколько для этого существует вариантов, если группы:

1) отправятся на экскурсии в разные населенные пункты;

2) должны заняться поисками одного исчезнувшего туриста?

А. 1) 6; 2) 12. **Б**. 1) 24; 2) 12. **В**. 1) 12; 2) 6. **Г**. 1) 3; 2) 6.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части посо-

бия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые там рассматривались. Чтобы получить положительный ответ на этот вопрос, пользуйтесь образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. У Пети имеется 4 различные книги. Сколько существует вариантов для выдачи двум друзьям по одной книге?

2. В компьютерной игре есть 3 варианта завершения первого этапа игры и 4 — второго. Сколько имеется вариантов завершения этой игры?

3. Сколько существует вариантов для выбора группой учащихся из четырёх человек, отправившихся в туристский поход, из своего состава командира, его заместителя и завхоза?

4. Азбука некоторого языка содержит 5 букв. Словом будем называть любую последовательность букв. Сколько можно составить из них двухбуквенных слов с различными буквами?

5. Сколько имеется вариантов распределения 5 одинаковых монет между двумя детьми?

6. Сколько имеется вариантов распределения 4-х различных монет между двумя детьми таких, при которых каждому достанется хотя бы одна монета?

7. Нужно послать два срочных письма. Сколько существует вариантов выбора для этой цели курьеров, если имеется три курьера и каждое письмо можно дать любому из них?

8. Азбука некоторого языка содержит 3 буквы. Словом будем называть любую последовательность букв. Сколько можно составить из них двухбуквенных слов?

9. Сколько существует вариантов для получения двумя студентами оценок по одному предмету, если им можно поставить оценки 3, 4, 5?

10. Сколько имеется вариантов для рассаживания четырёх учащихся на двух двуместных партах, если двое из них хотят сидеть только слева, а двое — только справа?

11. Сколько имеется вариантов для рассаживания четырёх учащихся на двух двуместных партах, если несущественно, кто из них сидит слева, а кто справа?

12. Сколько имеется вариантов для выбора из четырёх шахматистов двух для участия в матче между собой?

13. Три яблока распределяются между двумя детьми так, чтобы каждый получил хотя бы одно яблоко. В каком случае количество вариантов распределения будет больше: когда яблоки различны или одинаковы и на сколько?

14. Четыре колечка размещаются в двух одинаковых шкатулках. В каком случае количество вариантов размещения будет больше — когда колечки различны или одинаковы — и на сколько?

15. Четыре футболиста, среди которых есть два нападающих, распределяются на две равные группы так, чтобы в каждой группе было по одному нападающему. В каком случае количество вариантов распределения будет больше — когда группы будут участвовать в игре друг с другом или когда одна группа будет играть в основном составе, а другая в дублирующем — и на сколько?

Указания к задачам основного задания

1. Воспользуйтесь методом перебора вариантов расположения закодированных элементов. Пронумеруйте книги. Выпишите все возможные пары книг, которые Петя может дать своим друзьям.

2. Воспользуйтесь построением дерева возможных вариантов. Обратите внимание на то, что для завершения компьютерной игры должен завершиться каждый из её двух этапов.

3. Воспользуйтесь построением дерева возможных вариантов. Обратите внимание на то, что каждый может быть выбран на любую должность.

4. Можно воспользоваться методом точек и отрезков. Обратите внимание на то, что никакие три точки на должны лежать на одной прямой.

5. Постройте таблицу распределения 5 одинаковых монет между двумя детьми. Обратите внимание на то, что различные распределения монет отличаются друг от друга только количеством монет.

6. Введите обозначения для монет и примите во внимание, что различные распределения монет отличаются друг от друга как количеством монет у детей, так и самими монетами.

7. Воспользуйтесь методом перебора вариантов расположения закодированных элементов. Введите обозначения для курьеров и воспользуйтесь тем, что каждый способ передачи писем представляет собой последовательность двух из этих обозначений.

8. Воспользуйтесь методом перебора вариантов расположения закодированных элементов. Обозначьте буквы какими-нибудь символами и воспользуйтесь тем, что каждое слово представляет собой последовательность двух из этих символов.

9. Воспользуйтесь методом перебора вариантов расположения закодированных элементов.

10. Воспользуйтесь методом перебора вариантов расположения закодированных элементов. Введите обозначения для мест на партах, указав места слева и места справа.

11. Воспользуйтесь методом перебора вариантов расположения закодированных элементов. Введите обозначения для мест на партах, выпишите всевозможные расположения учащихся на этих местах.

12. Воспользуйтесь тем, что на результат выбора не влияет порядок выбора шахматистов.

13. Воспользуйтесь таблицей для подсчёта количества искомых вариантов. Подсчитайте количество вариантов распределения яблок в обоих случаях и сравните их.

14. Подсчитайте количество вариантов размещения значков в двух карманах в обоих случаях и сравните их.

15. Воспользуйтесь тем, что при игре друг с другом порядок групп не существенен, а при игре в разных составах — существенен.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. В кафе имеется три вида пирожных: песочные, слоёные и заварные. Сколько существует вариантов для выбора Игорем, Максимом и Таней по одному пирожному?

2. Сколькими способами можно из 5-и ребят выделить двоих для дежурства по классу?

3. Есть 4 занумерованные карточки. Сколькими способами из них можно выбрать три различные карточки?

4. В стране 5 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

5. Сколько существует вариантов для распределения 5-и одинаковых монет между тремя детьми таких, при которых каждому ребёнку достанется хотя бы одна монета?

6. Сколько существует вариантов для распределения 5-и различных монет между двумя детьми таких, при которых каждому ребёнку достанутся хотя бы две монеты?

7. Три письма направляются по трём адресам. Сколько существует вариантов для отправки писем, если по одному адресу можно посылать более одного письма?

8. Сколько можно составить из цифр 1, 2, 3 нечётных трёхзначных чисел?

9. Сколько существует различных вариантов ответов на тест, состоящий из трёх вопросов, если для каждого вопроса имеется два возможных ответа: «да» и «нет» и на любые два последовательные вопроса должны быть даны различные ответы?

10. Пять шахматистов играют между собой по две партии. Сколько всего будет сыграно партий?

11. Пять шахматистов играют между собой по одной партии. Сколькими способами могут определиться двое лучших на этих соревнованиях, если все шахматисты наберут разное количество очков?

12. Сколько имеется вариантов для выбора из пяти шахматистов двух для участия по одному в двух разных соревнованиях?

13. Четыре яблока распределяются между двумя детьми так, чтобы каждый получил хотя бы одно яблоко. В каком случае количество вариантов распределения будет больше — когда яблоки различны или одинаковы — и на сколько?

14. Пять конфет раскладываются в два неразличимых пакетика. В каком случае количество вариантов распределения будет больше — когда конфеты различны или одинаковы — и на сколько?

15. Шесть футболистов, среди которых есть два нападающих, распределяются на две равные группы так, чтобы в каждой группе было по одному нападающему. В каком случае количество вариантов распределения будет больше — когда группы будут участвовать в игре друг с другом или когда одна группа будет играть в основном составе, а другая в дублирующем — и на сколько?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Введите обозначения для пирожных. Воспользуйтесь тем, что каждый выбор представляет последовательность трёх этих обозначений, причём на первом месте стоит пирожное, предназначенное для Игоря, на втором — для Максима, на третьем — для Тани.

2. Можно воспользоваться построением дерева возможных вариантов. Обратите внимание на то, что порядок выбора дежурных несущественен.

3. Можно воспользоваться построением дерева возможных вариантов.

4. Можно воспользоваться методом точек и отрезков. Обратите внимание на то, что никакие три точки на должны лежать на одной прямой.

5. Обратите внимание на то, что при каждом распределении каждому ребёнку должна достаться хотя бы одна монета.

6. Введите обозначения для монет и обратите внимание на то, что при каждом распределении каждому ребёнку должна достаться хотя бы одна монета.

7. Введите обозначения для адресов и воспользуйтесь тем, что каждый способ отправления писем представляет собой последовательность трёх обозначений, выбранных из введенных; номер места, где они стоят, указывает на номер письма.

8. Выпишите все трёхзначные числа, удовлетворяющие условиям задания.

9. Обозначьте номера заданий, например, числами 1, 2, 3 и выпишите варианты ответов, удовлетворяющих условию.

10. Учтите, что партии между шахматистами А и Б и между шахматистами Б и А — это одна и та же партия.

11. Обратите внимание на то, что в условии речь идёт о двух лучших, то есть не обязательно разделять их на тех, кто занял первое место, а кто — второе.

12. Обратите внимание на то, что порядок выбора шахматистов существенен.

13. Подсчитайте количество вариантов распределения яблок в 2-х случаях и сравните их.

14. Подсчитайте количество способов разложения конфет в двух пакетиках в обоих случаях и сравните их.

15. Воспользуйтесь тем, что при игре друг с другом порядок групп не существенен, а при игре в разных составах — существенен.

Задачи для исследования

1. Сколькими способами n ладей можно расположить на шахматной доске размерами $n \times n$, $n = 2, 3, 4, 5$, если ладьи: а) одинаковые; б) занумерованные?

2. Сколькими способами n ладей можно расположить на шахматной доске размерами $n \times n$, $n = 2, 3, 4, 5$, так, чтобы они не могли бить друг друга, если ладьи: а) одинаковые; б) занумерованные?

3. Сколькими способами k ладей можно расположить на шахматной доске размерами $n \times m$, n, $m = 2, 3, 4$, $k \leq n$, $k \leq m$, так, чтобы они не могли бить друг друга, если ладьи: а) одинаковые; б) занумерованные?

4. Рассмотрим наборы детских домино, состоящих из n картинок, одна из которых пустая, $n = 3, 4, 5$.

1) Сколько пластинок содержит каждый из этих наборов?
2) Сколько человек может играть этими наборами, если распределяются сразу все пластинки поровну?
3) Сколькими способами можно поровну разделить все пластинки?

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Перебираем варианты

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 7-8 классов

Учебное пособие