



Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Поиск неизвестного



**Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 7-8 классов**

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Поиск неизвестного. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 7 - 8 классов. – 57 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 7-8 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, формирование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 7-8 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Рекомендации для обучающихся	6
1. Нахождение неизвестного количества	8
Готовимся к решению задач	8
Решение задач	10
Проверь себя	15
Реши сам	16
2. Нахождение неизвестных значений величин	18
Готовимся к решению задач	19
Решение задач	20
Проверь себя	24
Реши сам	25
3. Поиск среднего	27
Готовимся к решению задач	27
Решение задач	28
Проверь себя	33
Реши сам	34
4. Сравнение количеств и значений величин	36
Готовимся к решению задач	36
Решение задач	37
Проверь себя	41
Реши сам	42
Контрольное задание	43
Контрольный тест	44
Основное задание	47
Указания к задачам основного задания	50
Дополнительное задание	51
Указания к задачам дополнительного задания	54
Задачи для исследования	55

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для решения различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют *математическим моделированием*. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено нахождению неизвестных количеств, значений величин, часто встречающихся в жизни каждого человека. Конечно, не все приведенные в пособии задачи жизненно важные. Но решение всех задач, безусловно, полезно для совершенствования навыков вычислений и рассуждений.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы **контрольным заданием**. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и нахождения решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком?);


3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- **контрольного теста**, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;
- **основного задания**, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;
- **дополнительного задания**, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

В контрольном задании (контрольном тесте, основном и дополнительном заданиях) задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком  .

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, используемых в приведенных решениях типовых задач, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно:

- *сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;*
- *уяснить требования задачи;*
- *попытаться найти путь к выполнению требований задачи.*

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- *разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;*
- *поняли ли вы приведенное решение задачи;*
- *можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.*

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение

каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала пособия, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Поиск неизвестного

Задач, в которых нужно найти неизвестное, очень много в любой области деятельности человека. Математика помогает решить эти задачи.

Во многих случаях поиск неизвестных количеств или неизвестных значений величин в задаче целесообразно начинать с обозначения их буквами. Затем следует записать связи между ними, вытекающие из условия в виде одного или нескольких равенств. Преобразовывая их, иногда удаётся найти искомую величину. Приём составления равенств, содержащих неизвестные, является одним из основных приёмов поиска неизвестного. Но есть, конечно, и другие приёмы. В данном разделе они представлены.

1. Нахождение неизвестного количества

Здесь речь будет идти о подсчёте количества элементов совокупности либо о порядке элементов в некоторой их последовательности, расположенной на прямой или на окружности. Для этого понадобятся несложные арифметические вычисления, умения моделировать расположения объектов, а главное рассуждать, используя смысл слов «по крайней мере», «не более», «менее» и т.п.

Готовимся к решению задач

1. На окружности расположено 15 точек, пронумерованных по часовой стрелке числами от 1 до 15. Если считать точки против часовой стрелки, начиная с точки №15, какой номер будет иметь восьмая по счёту точка?

А. 8-й. Б. 9-й. В. 10-й. Г. 11-й.

2. В детском саду во время игры детей расположили по кругу, пронумеровав их по часовой стрелке от номера 1 до номера, равного количеству детей. У Лены номер 5, у Светы номер 11. Чему равно количество детей, стоящих между Леной и Светой, если считать детей от Лены до Светы против часовой стрелки?

А. 6. Б. 5. В. 4. Г. Определить невозможно.

3. В ящике двадцать шариков — белых и желтых. Среди них, по крайней мере, три белых. Сколько в ящике желтых шариков?

А. 17 **Б.** Не менее 17 **В.** Не более 17. **Г.** Менее 17.

4. В ящике двадцать шариков — белых и желтых. Среди любых 10 шариков есть хотя бы один белый. Сколько в ящике желтых шариков?

А. 9 **Б.** Не менее 8 **В.** Не менее 9. **Г.** Менее 10.

5. В шкатулке находится 5 красных шариков и 2 синих шарика. Какое наименьшее количество шариков нужно взять из шкатулки, не глядя, чтобы среди них был:

- 1) хотя бы один синий шарик; 2) хотя бы один красный шарик;
- 3) хотя бы по одному синему и красному шарика?

6. В классе 15 мальчиков и 10 девочек. Сколько учащихся надо опросить на уроке, чтобы среди опрошенных обязательно:

- 1) была хотя бы одна девочка;
- 2) был хотя бы один мальчик;
- 3) были хотя бы 1 мальчик и 1 девочка?

7. В лыжной гонке участвовали 3 мальчика и несколько девочек. Саша пришёл последним из мальчиков, после него пришли 3 девочки, после Бори — 4 девочки, после Васи — 6 девочек. Сколько девочек пришло между Сашей и Васей?

А. Одна. **Б.** Две. **В.** Три. **Г.** Десять.

8. В лыжной гонке участвовали 3 мальчика и несколько девочек. Антон пришёл последним из мальчиков, после него пришли 5 девочек, после Бориса — 6 девочек, после Васи, победителя гонки, — 7 девочек. Сколько человек участвовало в гонке?

А. 9. **Б.** 10. **В.** 18. **Г.** 21

9. Какому числу из приведенных в ответах может равняться сумма номеров страниц на развёрнутых страницах книги?

А. 127. **Б.** 99. **В.** 67. **Г.** 65.

10. Какой остаток при делении на 4 даёт сумма номеров страниц на развёрнутых страницах книги?

А. 3. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** 0.

11. Сколько трёхзначных чисел с различными цифрами, больших 400, можно составить из цифр 4, 5, 6?

- А. 9. Б. 6. В. 4. Г. 3.

Решение задач

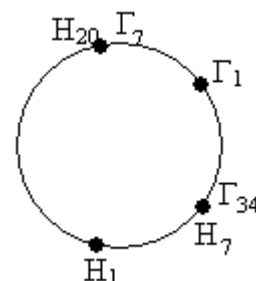
В следующей задаче речь будет идти о порядке элементов в некоторой их последовательности.

Задача 1. Николай обошел опушку леса, считая деревья по ее краю. Григорий сделал то же самое, но начал с другого дерева, хотя пошел в том же направлении. Дерево, которое у Николая было 20-м, у Григория было 7-м, а дерево, которое у Николая было 7-м, у Григория было 34-м. Сколько деревьев росло вокруг опушки?



Анализируем. Будем считать, что деревья расположены по окружности, а Григорий и Николай двигаются против часовой стрелки. Из условия можно найти, на сколько номер дерева, указанный Николаем, превышает номер того же дерева, указанный Григорием.

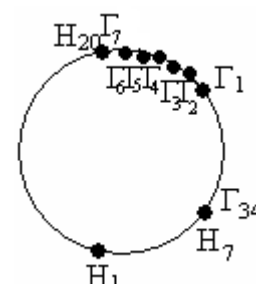
Дерево, с которого начал подсчёт Николай, можно принять за 1-е. Дерево, которое было 1-м для Григория, находится между 7-м и 20-м деревьями Николая. Эти соображения можно использовать для решения задачи.



Полезно изобразить условие графически, как это показано на рисунке. Здесь точки $H_1, Г_1$ обозначают деревья, с которых начали подсчёт Николай и Григорий соответственно. Остальные обозначения аналогичны и соответствуют условию.

Решаем.

1-й способ. Пользуясь изображением условия на рисунке, можно сделать вывод, что между точками $Г_1$ и $Г_7$ находится $7 - 1 - 1 = 5$ точек (деревьев), а между точками H_7 и H_{20} — $20 - 7 - 1 = 12$ точек (деревьев). Тогда между точками $Г_{34}$ и $Г_1$ расположено $12 - 5 - 1 = 6$ точек (деревьев). Следовательно, всего по окружности расположено $34 + 6 = 40$ точек (деревьев).



Решение задачи сведено к исследованию «графической модели» условия, то есть к изображению условия на картинке. Это очень важный приём, используемый при решении многих задач.

2-й способ. Номер дерева, указанный Николаем, превышает номер того же дерева, указанный Григорием, на $20 - 7 = 13$.

Обозначим количество деревьев, растущих вокруг опушки леса, через a . Тогда a — это номер последнего дерева у Николая. Это дерево у Григория имеет номер $a - 13$. Тогда дерево, имеющее у Николая номер 7, у Григория имеет номер $a - 13 + 7 = a - 6$, что равно, по условию, 34. Итак, $a - 6 = 34$, $a = 40$.

Решение задачи вторым способом сведено к нахождению неизвестного из равенства. Такие равенства называются **уравнениями**. Составление уравнений — самый распространённый приём для нахождения неизвестного.

Ответ. 40.

1. Какой номер у Григория имеет дерево, которое у Николая имеет номер: а) 26; б) 38; в) 3?

2. Какой номер у Николая имеет дерево, которое у Григория имеет номер: а) 15; б) 27; в) 39?

3. Мог ли Григорий подсчитать количество деревьев, идя в противоположном направлении при указанных в задании остальных условиях?

Неизвестное количество иногда можно найти простыми рассуждениями или, как говорят, пользуясь здравым смыслом.

Задача 2. В корзине лежат 30 грибов — маслят и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов, взятых наугад, есть хотя бы один масленок, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько маслят в корзине?



Анализируем. При проведении рассуждений нужно иметь в виду, что общее число грибов — маслят и груздей — 30. Кроме того, нужно учесть, что если среди любых 12 (20) грибов есть гриб определённого вида, то грибов другого вида меньше 12 (20).

Решаем. Так как среди 12 грибов есть всегда маслёнок, то груздей среди них не больше 11. Следовательно, их не больше 11 и в корзине, так как брать можно любые 12 грибов.

Так как среди 20 грибов всегда есть груздь, то маслят среди них не больше 19. Следовательно, их не больше 19 и в корзине, так как брать можно любые 20 грибов.

Маслят и груздей вместе 30. Если предположить, что количество маслят меньше 19 или груздей меньше 11, то в сумме не получим 30. Следовательно, в корзине 19 маслят и 11 груздей.

Ответ. 19.

1. В корзине 20 грибов: маслят и груздей. Маслят — не больше 12, груздей — не больше 8. Сколько маслят и сколько груздей в корзине?

2. Сколько маслят было бы в корзине, если бы в корзине было бы 29 грибов?

3. Сколько груздей было бы в корзине, если бы в корзине было бы всего 30 грибов и среди любых 13 грибов был хотя бы один маслёнок?

При решении задачи 2 мы воспользовались такими рассуждениями.

«Если бы груздей было бы больше 11, то можно было бы выбрать 12 грибов, среди которых нет маслёнка. А это противоречит условию. Следовательно, груздей в корзине не больше 11». Такой приём называют **«рассуждением от противного»**. Он часто применяется в математике.

Рассуждения от противного применимы при решении задач, в которых рассматриваемая совокупность содержит несколько групп элементов, причём известны количества элементов во всех группах. Требуется найти наименьшее количество элементов, наугад извлеченных из данной совокупности, чтобы среди них оказалось заданное число элементов определённой группы.

Задача 3. В коробке лежат 10 красных и 5 синих карандашей. Какое наименьшее количество карандашей нужно взять в темноте из коробки, чтобы среди них оказалось не меньше 2-х красных и 3-х синих карандашей?



Анализируем. Здесь совокупность карандашей в коробке состоит из двух групп: красных и синих карандашей. Известны количества карандашей каждого цвета. Требуется найти наименьшее количество карандашей, которое нужно извлечь в темноте из этой совокупности, чтобы среди них оказалось не менее двух красных и трёх синих.

Ясно, что если извлечём все карандаши, то все условия будут выполнены, кроме одного: количество извлечённых карандашей не будет наименьшим. Очевидно, что количество извлечённых карандашей должно превосходить количество карандашей каждого вида. Остается только уточнить — на сколько.

Решаем. Надо извлечь $10 + 3 = 13$ карандашей. Среди них обязательно окажется не менее 2-х красных и 3-х синих.

Если же извлечь 12 карандашей, то может оказаться, что среди них 10 красных и только два синих карандаша.

Ответ. 13.

1. *Может ли среди 12 извлеченных карандашей быть: а) не менее 2-х красных и 3-х синих; б) 7 красных и 5 синих; в) 7 красных и более 5 синих?*
2. *Каким будет ответ, если в коробке будет 8 красных и 6 синих карандашей?*
3. *Какое наибольшее количество карандашей можно взять, чтобы в коробке осталось не менее 2-х красных и 3-х синих?*

Решение ряда задач может быть сведено к задаче на нахождение двух количеств по их сумме и разности. Такие задачи решаются приёмом **уравнивания**.

Предполагается, что рассматриваемые количества равны. Тогда их сумма равнялась бы удвоенному одному из количеств.

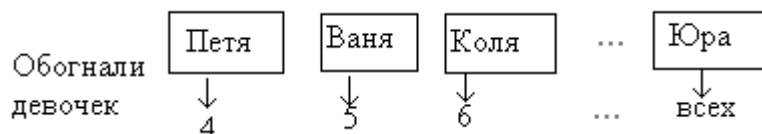
Задача 4. В забеге принимали участие все учащиеся класса, а их 31. Петя отстал от всех мальчиков, но обогнал четырёх девочек, Ваня обогнал пять девочек, Коля — шестерых и т. д. до победителя забега Юры. Сколько девочек учится в классе?



Анализируем. В условии задачи указано соответствие между мальчиками класса и количеством девочек, которых они обогнали. Отсюда можно найти

разность между количеством девочек и мальчиков в классе. Их сумма известна. Задача сводится к нахождению количества мальчиков и количества девочек по их сумме и разности.

Решаем. На следующей схеме представлено соответствие между мальчиками и количеством девочек, которых они обогнали.



Из этой схемы видно, за каждым мальчиком, кроме Пети, бежало на одну девочку больше, чем за мальчиком, бежавшим непосредственно сзади него. Следовательно, девочек на три больше, чем мальчиков. А сумма количеств девочек и мальчиков равна 31.

Если бы в классе было бы мальчиков столько же, сколько и девочек, то есть на 3 больше, чем в действительности, то в классе было бы $31 + 3 = 34$ учащихся. Тогда в классе было бы $31 + 3 = 34$ учащихся. Это число равно удвоенному числу девочек в классе. В классе $34:2 = 17$ девочек.

Ответ. 17.



1. Каким по счёту прибежал: а) Петя; б) Ваня?
2. Сколько девочек обогнал мальчик, прибежавший 15-м??
3. Сколько мальчиков прибежало после девочки, прибежавшей 10-й?

Иногда неизвестное количество можно найти методом перебора. При этом желательно сократить перебор, пользуясь некоторыми соображениями, например, свойствами делимости целых чисел.

Следующая задача связана с нумерацией страниц в книге. При решении таких задач нужно помнить, что если страницы пронумерованы последовательными натуральными числами, то количество страниц в книге (или в какой-то её части), равно разности наибольшего номера страницы и наименьшего номера, уменьшенного на 1. Например, если в части книги наименьший и наибольший номера страниц равны 43 и 212, то в этой части книги $212 - (43 - 1) = 170$ страниц.

Задача 5. Из поврежденной книги выпала часть сшитых вместе листов. Наименьшей номер страницы выпавшей части книги — 143. Наибольший номер страницы этой части книги записан теми же цифрами, но в ином порядке. Сколько листов выпало из книги?




Анализируем. Для решения задачи необходимо установить номер последней выпавшей страницы. Для этого известны цифры, из которых составлен этот номер. Кроме того, нужно учесть, что номера первой и последней выпавшей страниц имеют различную чётность.

Если известен номер последней выпавшей страницы, то, вычтя из него число, предшествующее номеру первой выпавшей таблицы, узнаем число выпавших страниц. Так как лист состоит из двух страниц, то останется это число разделить на 2.

Решаем. Так как номер последней страницы записан теми же цифрами, что и номер первой страницы, то он может равняться одному из следующих чисел: 134, 341, 314, 413, 431. Число 134 отбрасываем сразу: оно меньше 143.

Так как каждый лист занумерован двумя последовательными числами, и первый лист начинается с нечётного номера, то вторая страница последнего занумерована чётным числом. Среди приведенных лишь одно чётное число — 314. Следовательно, количество выпавших листов равно $(314 - 142):2 = 86$.

Ответ. 86.

- 
- 1. Первая страница части книги имеет номер 23, а последняя — 174. Сколько страниц в этой части книги?*
 - 2. Сколько листов в книге, номер последней страницы которой равен 474?*
 - 3. Каким будет номер последней страницы выпавшей части книги, если номер первой 143, а выпало 54 листа?*

Проверь себя

1. Звери организовали в лесу соревнование по бегу. Они должны были бежать по круговой дорожке и после каждого круга зверь, прибежавший последним,

3. В погребе стоит 20 одинаковых банок с вареньем. В 8 банках клубничное варенье, в 7 — малиновое, в 5 — вишневое. Какое наименьшее количество банок нужно взять в темноте с уверенностью, что среди них будут 4 банки одного вида варенья и 3 банки другого?
4. Участники шахматной секции (всего 20 человек) провели турнир между командой девочек и командой мальчиков. Одна девочка обыграла всех мальчиков, другая — всех, кроме одного, третья — всех, кроме двух, и т. д. Девочка, наименее успешно выступившая в команде, выиграла у пяти мальчиков. Сколько всего девочек было в секции?
5. Имеем большое количество цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и только двадцать две цифры 2. Сколько страниц альбома можно пронумеровать подряд этими цифрами, начиная со страницы 1?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. А. Обратите внимание на то, что вторая по счёту точка будет иметь номер 14.
2. Б. Установите, какие номера имеют дети, стоящие между Леной и Светой.
3. В. Воспользуйтесь тем, что словосочетание «по крайней мере три» (или «хотя бы три») означает: или 3, или 4, или и т. д., или все; словосочетание «Не менее» означает: «столько или больше»; словосочетание «Не более» означает: «столько или меньше».
4. Г. Воспользуйтесь тем, что среди любых 10 шариков есть хотя бы один белый.
5. 1) 6; 2) 3; 3) 6. Можно воспользоваться методом от противного.
6. 1) 16; 2) 11; 3) 16. Можно воспользоваться методом от противного.
7. Б. Можно расположить участников гонки от победителя до аутсайдеров.
8. Б. Обратите внимание на то, что между двумя мальчиками на финиш пришла ровно одна девочка.
9. Г. Обратите внимание на то, что на развёрнутом листе левая страница имеет чётный номер, а правая — нечётный, на 1 превосходящий номер левой страницы.
10. В. См. указание к заданию 9.

11. Б. Воспользуйтесь тем, что на первом месте может стоять любая из трёх указанных цифр.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. а) 13; б) 25; в) 30. 2. а) 28; б) 40; в) 12. 3. Нет.

Задача 2. 1. 12 и 8. 2. 18 или 19. 3. Не больше 12.

Задача 3. 1. а) Да; б) да; в) нет. 2. 11. 3. 2.

Задача 4. 1. а) 27-м; б) 25-м. 2. 10. 3. 9.

Задача 5. 1. 152. 2. 237. 3. 250.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
Г	В	В	В	Г

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. № 37. Подсчитайте, сколько кресел находится между креслами, находящимися в самом верхнем и самом нижнем положениях колеса обозрения.

2. 18 юношей и 14 девушек. При проведении рассуждений нужно воспользоваться тем, что в группе 32 студента.

3. 13 банок. Подберите сначала 12 банок так, чтобы условия задания не выполнялись.

4. 8. Выясните, на сколько девочек в секции больше, чем мальчиков.

5. 120. Подсчитайте количество натуральных чисел, начиная с 1, в записи которых есть цифра 2.

2. Нахождение неизвестных значений величин

В задачах данного блока требуется найти неизвестное значение искомой величины (стоимости, времени, массы и др.). Математической моделью может служить уравнение, арифметическая задача, задача на измерение углов и др. Целесообразно использовать свойства приборов, служащих для измерения величин (часы, весы, геодезические приборы).

Для составления уравнения нужно:

– выбрать обозначение для неизвестного значения величины;

- выразить другие значения величин через выбранное обозначение;
- составить два выражения, содержащие обозначение искомого значения величины;
- приравнять составленные выражения, пользуясь условием задачи.

Готовимся к решению задач

1. В 7-А и 7-Б вместе 48 учащихся, в 7-Б и в 7-В — 52 учащихся, в 7-В и в 7-А — 50 учащихся. Сколько учащихся всего во всех трёх классах?

А. 73. **Б.** 75. **В.** 77. **Г.** 150.

2. В 7-А и 7-Б вместе 48 учащихся, в 7-Б и в 7-В — 52 учащихся, в 7-В и в 7-А — 50 учащихся. Сколько учащихся в 7-Б классе?

А. 23. **Б.** 25. **В.** 27. **Г.** 29

3. Книга с гирей весит 2 килограмма, а две такие же книги с этой гирей весят 3 килограмма. Каков вес гири?

А. 1,5 кг **Б.** 1 кг. **В.** 0,5 кг. **Г.** Определить нельзя.

4. Когда купленные пакет с мукой и пакет с крупой отдельно поставили на весы, весы показали соответственно 3 кг и 2 кг. Когда эти пакеты вместе поставили на весы, весы показали 5,5 кг. В чью пользу ошибка, допущенная весами: в пользу покупателя или в пользу продавца?

5. Если механические часы завести, сделав 8 оборотов, то они остановятся через 16 часов. Сколько оборотов нужно сделать, чтобы завода хватило на сутки, если равные количества оборотов обеспечивают равное время работы часов?

А. 12. **Б.** 10. **В.** 14. **Г.** 16.

6. Если механические часы завести, сделав 8 оборотов, то они остановятся через 20 часов. Сколько оборотов нужно сделать, чтобы они шли более суток, если равные количества оборотов обеспечивают равное время работы часов?

А. 9. **Б.** Не менее 9. **В.** Не более 9. **Г.** Более 9.

7. Чтобы механические часы шли ровно сутки, нужно завести их, сделав 16 оборотов.

1) Сколько оборотов нужно сделать, чтобы завода хватило на 6 ч, если равные количества оборотов обеспечивают равное время работы часов?

- 2) Сколько времени будут идти часы, если сделать 12 оборотов, заводя их?
- 3) Наибольшее количество оборотов, которое можно сделать, заводя эти часы, равно 24. Через какое время часы остановятся?
8. Чему равна градусная мера угла, на который поворачивается часовая стрелка за: 1) 1 ч; 2) 3 ч; 3) 12 ч; 4) сутки?
9. Чему равна градусная мера угла, на который поворачивается минутная стрелка за: 1) 1 ч; 2) 30 мин; 3) 10 мин; 4) 1 мин?

Решение задач

В следующей задаче составляются равенства, связывающие неизвестные величины.

Задача 1. Коллекционер купил для коллекции четыре марки: кубинскую, монгольскую, болгарскую и польскую. Стоимость приобретенного без кубинской марки 40 зедов, без монгольской — 45 зедов, без болгарской — 44 зеда, а без польской — 27 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько стоит болгарская марка?



Анализируем. В условии задачи даны 4 различные значения стоимости марок, причём количество этих значений равно количеству марок, которые купил коллекционер. Так как каждая эта стоимость равна сумме стоимостей всех марок, кроме одной, то сложив эти стоимости, получим утроенную стоимость купленных марок. А тогда легко найти ответ на поставленный вопрос, зная стоимость всех марок без болгарской.

Решаем. Обозначив стоимость марок первыми буквами названия страны — их принадлежности, условие можно записать так:

$$M + Б + П = 40, K + Б + П = 45, K + М + П = 44, K + М + Б = 27.$$

Если сложить левые части этих равенств и правые, то получим, что утроенная стоимость всех купленных марок равна $3M + 3Б + 3П + 3K = 40 + 45 + 44 + 27 = 156$ (зедов). Следовательно, все марки стоили $156 : 3 = 52$ (зеда). Так как все марки без болгарской стоили 44 зеда, то цена болгарской марки равна $52 - 44 = 8$ (зедов).

Ответ. 8 зедов.



1. *Какая марка самая: а) дешёвая; б) самая дорогая?*
2. *Сколько стоит: а) кубинская марка; б) монгольская марка?*
3. *Сколько стоят все марки без болгарской и польской?*

Для измерения массы предмета используются чашечные весы. С помощью чашечных весов можно сравнивать массы предметов, не находя самих масс. На практике нередко возникает проблема взвешивания на чашечных весах, когда набор имеющихся гирь ограничен или гирь нет вовсе. Тогда приходится или использовать имеющиеся предметы с известной массой, или с помощью имеющихся гирь подготовить такие предметы и использовать их в качестве гирь.

Задача 2. Поставщик привёз в магазин для продажи два мешка с мукой. Весы показали, что массы мешков 50 кг и 40 кг. Когда продавец магазина поставил на весы оба мешка, весы показали 80 кг. Продавец понял, что у весов сдвинута стрелка. Так сколько же весили мешки на самом деле?



Анализируем. Весы имеют сдвиг точки отсчёта. Поэтому для всех измеренных масс нужно учесть массу, соответствующую этому сдвигу, то есть ошибку измерения. Тогда можно составить уравнение приравниванием суммы истинных масс отдельных мешков истинной совместной массе мешков.

Решаем. Пусть x — ошибка измерения массы, вызванная сдвигом точки отсчёта. Тогда массы мешков $(50 + x)$ кг и $(40 + x)$ кг, а масса обоих мешков — $(80 + x)$ кг. Имеем уравнение: $50 + x + 40 + x = 80 + x$, или $90 + 2x = 80 + x$, или $x = -10$. Следовательно, показания весов были на 10 кг меньше истинной массы. Тогда истинные массы мешков 40 кг и 30 кг.

Ответ. 40 кг и 30 кг.

Из решения этой задачи следует полезный практический совет. Чтобы проверить правильность весов, нужно на них взвесить два предмета вместе и по отдельности и сравнить общую массу с суммой масс.

1. Если бы указанные весы для мешков показали 70 кг и 60 кг, то что бы показали весы, когда на них поставили бы оба мешка?

2. Если бы весы для отдельных мешков показали 50 кг и 40 кг, а для обоих мешков вместе 95 кг, то какова была бы ошибка измерения на этих весах?

3. Если бы весы для отдельных мешков показали 70 кг и 60 кг, а для обоих мешков вместе 125 кг, то какова была бы ошибка измерения на этих весах?

Часы, как прибор для измерения времени, имеют огромную историю развития. Это путь от древних грубых часов до современных часов, позволяющих измерять время с точностью до тысячных долей секунды. В быту используются механические и электронные часы. В механических часах заводят пружину. Для этого от руки вращают заводную головку часов.

Задача 3. У моего дедушки были механические часы. Полного завода часам на сутки не хватало. Поэтому дедушка заводил их полностью дважды в сутки: утром в 8 часов и перед сном в 23 часа. Утром приходилось делать 10 полных оборотов головки часов. Сколько полных оборотов ему приходилось делать перед сном?



Анализируем. Из условия можно найти, на сколько времени хватало 10 оборотов головки часов, сколько оборотов требуется, чтобы часы бесперебойно работали 1 час, продолжительность времени между двумя заводами часов. Пользуясь этим, можно найти число требуемых оборотов для промежутка между ночным и утренним заводами часов.

Решаем. Так как утром делается 10 полных оборотов, продолжительность времени между утренним и ночным заводами составляет $23 - 8 = 15$ (ч), то на 1 час требуется $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ оборота. Так как промежуток времени между ночным и утренним заводами составляет $24 + 8 - 23 = 9$ часов, то для перебойной

работы часов в течение этого времени требуется $\frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ оборотов.

Ответ. 6 оборотов.

1. Сколько полных оборотов требовалось для бесперебойной работы дедушкиных часов в течение суток?

2. Сколько оборотов головки часов требовалось бы для бесперебойной работы часов на 1 ч, если бы в 8 часов приходилось делать 15 оборотов, а при этом в 23 часа часы были бы полностью заведены?

3. В какое время нужно было бы заводить дедушкины часы вечером, если бы утром часы заводились в 6 ч утра и при этом делалось бы 10 оборотов?

Удобным прибором для изучения углов являются часы. Минутная и часовая стрелки в каждый момент времени образуют друг с другом некоторый угол.

Часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом, называется углом.

Луч, делящий угол пополам, называется биссектрисой угла.

Угол, образованный двумя лучами, составляющими прямую, называется развёрнутым.

Половина развёрнутого угла называется прямым углом. Угол, меньший прямого, называется острым углом, а угол, больший прямого, — тупым.

Задача 4. Часы показывают 1 час. Какой угол будет между стрелками через 20 минут?



Анализируем. Часовая стрелка за 12 час совершает полный оборот, равный двум развёрнутым углам или $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$, а за 1 час она поворачивается на угол, равный $360^\circ : 12 = 30^\circ$. В 1 час дня часовая и минутная стрелки образуют угол 30° . Минутная стрелка за 1 час совершает полный оборот. Известно, какой угол образуют стрелки в 1 час дня. Можно найти, на какой угол повернутся стрелки за 20 мин, а это даст возможность найти искомый угол.

Решаем. Так как 20 мин — это $\frac{1}{3}$ часа, то часовая стрелка за 20 мин повернётся на угол, равный $30^\circ \cdot \frac{1}{3} = 10^\circ$, а минутная — на угол, равный $360^\circ \cdot \frac{1}{3} = 120^\circ$. Новое положение часовой стрелки с положением минутной стрелки в 1 ч дня будет составлять $30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$, а новое положение минутной стрелки с её положением в 1 ч дня — 120° . Следовательно, угол между стрелками равен $120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

Ответ. 80° .

1. Какой угол составляют между собой часовая и минутная стрелки в: а)

3 ч; б) 6 ч; в) 9 ч; г) 5 ч?

2. На какой угол поворачиваются часовая и минутная стрелка за 30 минут?

3. Через сколько минут после 1 ч угол между стрелками будет равен 102° ?

Проверь себя

1. Пятеро друзей, проживающие в одном дворе, решили приобрести мяч. Известно, что Олег с Дмитрием внесли 14 зедов, Дмитрий и Тарас — 12 зедов, Тарас и Николай — 18 зедов, Николай и Петр — 16 зедов, Петр и Олег — 8 зедов (зед — условная денежная единица). Собранных денег как раз хватило для приобретения мяча. Сколько стоит мяч?

А. 68 зедов.

Б. 34 зеда.

В. 32 зеда.

Г. 28 зедов.

2. Два предмета взвешивали на весах, ошибка измерения которых равна +1 кг. Весы показали, что массы этих предметов равны 12 кг и 16 кг. Какую массу покажут весы, если на них положить оба предмета?

А. 27 кг.

Б. 31 кг.

В. 33 кг.

Г. Ответ отличен от приведенных

3. Когда часы показывают целое число часов, они бьют столько раз, сколько часов они показывают. В моменты, которые находятся посередине между двумя целыми показаниями часов, они бьют по одному разу. Утром часы пустили. Сделав 29 ударов, они остановились. Когда это случилось?

А. В 7 ч. Б. В 7 ч 30 мин. В. В 8 ч. Г. Другой ответ.

4. Найдите угол, который образуют часовая и минутная стрелки часов в 6 ч 20 мин.

А. 60° . Б. 70° . В. 75° . Г. 85° .

Реши сам

1. У Малыша есть карандаши: зелёные, красные и жёлтые. Из этих карандашей 17 — не зелёные, 15 — не красные, 12 — не жёлтые. Сколько карандашей у Малыша?

2. Фермер привёз на приёмный пункт кооперативного магазина творог в двух пакетах. Весы магазина показали, что в этих пакетах соответственно 15 кг и 20 кг творога. Когда фермер поставил на весы оба пакета с творогом, весы показали 36 кг. Какова в действительности масса творога в меньшем пакете?

3. У моего дедушки были механические часы. Полного завода часов на сутки не хватало. Поэтому дедушка заводил их полностью дважды в сутки: утром в 7 часов утра и перед сном. Утром он делал 8 полных оборотов, а перед сном — 4. В котором часу дедушка ложился спать?

4. В какое время на большой угол нужно повернуть минутную стрелку против часовой стрелки до совпадения с часовой: в 5 часов 10 минут или в 21 час 20 минут?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Выясните, что означает сумма трёх приведенных в условии чисел.

2. Б. Воспользуйтесь решением и результатом задания 1.

3. Б. Найдите вначале вес одной книги.

4. В пользу покупателя. Можно ввести обозначение для неизвестной погрешности весов, выразить через него истинные массы купленных товаров, составить уравнение относительно введенной погрешности.

5. А. Воспользуйтесь тем, что количество оборотов заводного механизма часов прямо пропорционально времени, которое часы будут идти.

6. Г. Воспользуйтесь тем, что количество оборотов заводного механизма часов прямо пропорционально времени, которое часы будут идти.

7. 1) 4; 2) 18 ч; 3) Через 36 ч. Воспользуйтесь тем, что количество оборотов заводного механизма часов прямо пропорционально времени, которое часы будут идти.

8. 1) 30° ; 2) 90° ; 3) 360° ; 4) 720° . Можно воспользоваться тем, что полный оборот часовая стрелка совершает за 12 ч.

9. 1) 360° ; 2) 180° ; 3) 60° ; 4) 6° . Можно воспользоваться тем, что полный оборот минутная стрелка совершает за 1 ч.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. а) Монгольская; б) польская. 2. а) 12 зедов; б) 7 зедов; в) 25 зедов.

3. 19 зедов.

Задача 2. 1. 120 кг. 2. +5 кг. 3. -5 кг.

Задача 3. 1. 16. 2. 1 оборот. 3. 21 ч.

Задача 4. 1. а) 90° ; б) 180° ; в) 270° ; г) 150° . 2. 15° ; 180° . 3. 24 мин.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Б	Б	В	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 22. Воспользуйтесь тем, что известны количества карандашей любой пары цветов: красных и жёлтых, зелёных и жёлтых, красных и зелёных.

2. 16 кг. Найдите ошибку измерения, составив уравнение, в котором неизвестной является ошибка. (величиной)

3. В 23 ч. Воспользуйтесь тем, что отношение времени между утренним и вечерним заводами ко времени между вечерним и утренним заводами равно отношению соответствующих количеств оборотов, то есть 8:4.

4. В 5 ч 10 мин. Оцените сначала углы, которые образуют часовая и минутная стрелки в указанный момент времени, пользуясь схематическим изображением часов.

3. Поиск среднего

С понятием среднего арифметического двух или нескольких чисел вы знакомы.

Средним арифметическим нескольких чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

Если a_1, a_2, \dots, a_n — данные числа, то их среднее арифметическое \bar{a} вычисляется по формуле:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Во многих задачах данного блока даны или требуется найти значение средней стоимости, средней скорости, средней производительности и т. д. Их математическая модель связана с понятием среднего арифметического двух или нескольких чисел.

Готовимся к решению задач

1. Найдите среднее арифметическое чисел 54, 72, 93.
2. Среднее арифметическое 5 чисел равно 83. Чему равна сумма этих чисел?
3. Среднее арифметическое какого количества чисел равна 7,8, если сумма этих чисел равна 62,4?
4. Среднее арифметическое четырёх чисел равно 80. Какое число нужно присоединить к ним, чтобы среднее арифметическое равнялось 84?
А. 84. Б. 92. В. 96. Г. 100.
5. В классе 16 девочек и 9 мальчиков. Средняя масса одной девочки равна 35 кг, а одного мальчика — 40 кг. Какова средняя масса одного учащегося в классе?
А. 36 кг. Б. 36,8 кг. В. 37,4 кг. Г. 37,8 кг.
6. Купили 2 кг конфет по 90 руб. за 1 кг и 4 кг конфет по 60 руб. за 1 кг. Смешала эти конфеты. Во сколько рублей в среднем обошёлся 1 кг смеси конфет?
7. Если среднее арифметическое чисел 5, 6, 7, a равно 8, то чему равно a ?
А. 8. Б. 12. В. 14. Г. 16.
8. Среднее арифметическое какого наименьшего количества целых чисел может равняться 5,2?

9. На олимпиаде по математике участвовало 15 учащихся 6 класса и 20 семиклассников. Средний балл, набранный шестиклассниками, равнялся 6, набранный семиклассниками — 13. Какой средний балл набрали указанные участники олимпиады?

- А. 8,5 Б. 9. В. 9,5. Г. 10.

10. На олимпиаде по математике участвовали учащиеся 6-го и 7-го классов. Средний балл, набранный шестиклассниками, равнялся 8, набранный семиклассниками — 12, набранный всеми указанными участниками олимпиады — 9. Кого больше было среди участников олимпиады — шестиклассников или семиклассников?

- А. Шестиклассников. Б. Семиклассников.
В. Одинаковое количество. Г. Невозможно определить

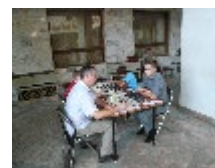
11. Если $x + y = 6$, $y + z = 7$, $z + x = 9$, то чему равно среднее арифметическое чисел x , y и z ?

- А. $\frac{11}{3}$. Б. $\frac{11}{2}$. В. $\frac{22}{3}$. Г. 11.

Решение задач

Знание среднего арифметического нескольких чисел даёт возможность найти одно из этих чисел, если известно среднее всех остальных чисел.

Задача 1. Средний возраст всех 10 детей, посещающих шахматную секцию, равен 12 годам, а средний возраст участников секции, включая тренера, равен 14 годам. Определите возраст тренера.



Анализируем. Зная среднее значение нескольких чисел и их количество, можно найти их сумму. Сумма нескольких чисел равна произведению их среднего арифметического на количество этих чисел. Пользуясь этим, из условия можно найти сумму возрастов всех участников секции, включая тренера, и сумму возрастов детей, посещающих секцию. Тогда разность этих сумм будет равна возрасту тренера.

Решаем. Так как средний возраст 10 детей, посещающих шахматную

секцию, равен 12 годам, то сумма возрастов всех этих детей равна $12 \cdot 10 = 120$ (годам). Аналогично, сумма возрастов всех членов секции (а их вместе с тренером 11) равна $14 \cdot 11 = 154$ (годам). Следовательно, возраст тренера равен $154 - 120 = 34$ (годам).

Ответ. 34 года.

1. Если бы средний возраст участников секции, включая тренера, равнялся 13 годам, то чему равнялся бы возраст тренера?

2. Чему равнялся бы средний возраст участников секции, включая тренера, если бы тренеру было 45 лет?

3. Чему равнялся бы средний возраст детей, посещающих секцию, если их возрасты равнялись бы 10, 15, 9, 12, 13, 12, 12, 9, 14, 14 годам?

Среднее арифметическое нескольких чисел обладает рядом интересных свойств. Вот одно из них, часто применяемое на практике.

Если совокупность данных чисел разбить на несколько частей и для каждой части вычислить среднее арифметическое чисел, входящих в эту часть, то среднее арифметическое всех чисел будет равняться среднему арифметическому средних, вычисленных для каждой части, считая, что в каждой части все элементы одинаковы и каждый из них равен среднему этой части.

Задача 2. Средний возраст сотрудников одной компании 40 лет, средний возраст женщин этой компании 35 лет, а мужчин — 50 лет. Кого больше в компании — мужчин или женщин, и во сколько раз?



Анализируем. В данной задаче совокупность всех сотрудников разделена на две группы: женщины и мужчины. Средний возраст сотрудников в каждой из этих групп известен. Введя обозначения для числа элементов этих групп, сможем двумя способами найти средний возраст сотрудников компании. Приравняв полученные результаты, сможем найти ответ на поставленные вопросы.

Решаем. Обозначим количество женщин через x , а количество мужчин через y . Так как средний возраст женщин этой компании 35 лет, а мужчин — 50

лет, то сумма возрастов всех женщин равна $35x$, а мужчин — $50y$. Сумма возрастов всех сотрудников компании равна $35x + 50y$.

Так как средний возраст сотрудников компании равен 40 лет, а число сотрудников — $x + y$, то сумма возрастов всех сотрудников компании равна $40(x + y)$. Следовательно, $35x + 50y = 40(x + y)$, или $35x + 50y = 40x + 40y$, или $10y = 5x$, или $x = 2y$, то есть женщин больше вдвое, чем мужчин.

Ответ. Женщин больше вдвое, чем мужчин.

1. *Может ли средний возраст сотрудников компании, в которой средний возраст женщин равен 36 годам, мужчин — 50 годам, равняться: а) 36 годам; б) 45 годам; в) 55 годам?*

2. *Каков бы был средний возраст всех сотрудников компании, если бы средний возраст всех женщин равнялся 36 годам, а мужчин — 50 годам и количество мужчин равнялось бы количеству женщин?*

3. *Верно ли, что если количества мужчин и женщин в компании были одинаковыми, то средний возраст сотрудников компании равнялся среднему арифметическому средних возрастов мужчин и женщин?*

Понятие среднего широко используется при нахождении:

- средней цены при смешении нескольких продуктов;
- средней скорости при движении с различными скоростями;
- средней производительности труда, когда работа выполняется в течение некоторого времени;
- средней всхожести семян при посадке некоторого количества семян и т. д.

Средняя цена — это отношение общей стоимости к общему количеству товара.

Средняя скорость — это отношение общего расстояния к суммарному затраченному времени.

Средняя производительность труда — это отношение общего объёма работы к суммарному затраченному времени.

Средняя всхожесть семян — это отношение количества взошедших семян к общему количеству посеянных семян.

Нетрудно заметить сходство с определением среднего арифметического. Роль суммы значений чисел играет сумма значений рассматриваемой величины, роль числа слагаемых — масса продукции, время, затраченное на движение или на работу.

Задача 3. В магазине имеются конфеты ценой 8 зедов за килограмм на сумму 240 зедов и ценой 12 зедов за килограмм на такую же сумму (зед — условная денежная единица). По какой справедливой цене надо продавать смесь из этих конфет?



Анализируем. Что такое справедливая цена смеси конфет? Это такая цена, что если по этой цене продавать смесь конфет, то выручка будет такой же, как если бы продавали конфеты каждого сорта отдельно.

Для нахождения цены единицы продукции нужно стоимость всей продукции разделить на её массу. Представим, что конфеты смешали. Мы по условию задачи можем найти общую стоимость конфет и общую массу конфет. А тогда мы сможем найти цену 1 кг смеси, то есть справедливую цену конфет.

Решаем. Стоимость всех конфет равна $240 \text{ зедов} + 240 \text{ зедов} = 480 \text{ зедов}$. Для нахождения справедливой цены конфет нужно найти общую массу конфет двух сортов.

Конфет первого вида было $240:8 = 30$ (кг), конфет второго вида: $240:12 = 20$ (кг). Общая масса конфет равна $30 + 20 = 50$ (кг).

Найдём цену одного килограмма смеси: $480 \text{ зедов} : 50 \text{ кг} = 9,6 \text{ зеда} = 9 \text{ зедов } 60 \text{ кетов}$ (кет — $\frac{1}{100}$ зеда). Это и есть справедливая цена килограмма смеси.

Ответ. 9 зедов 60 кетов.

1. *Каким будет убыток магазина, если указанную смесь конфет продавать по 9 зедов за 1 кг?*
2. *Сколько примерно грамм более дорогих конфет должно быть в 1 кг указанной смеси?*
3. *При каком условии справедливую цену конфет можно найти следующим образом: $(8 + 12):2 = 10$ (зедов)?*

Если среди данных чисел некоторые числа повторяются несколько раз, то среднее арифметическое вычисляется по формуле:

$$\bar{a} = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

Здесь k — количество различных чисел среди данных, n_i — количество раз, которое встречается a_i , $i = 1, 2, \dots, k$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Такую форму среднего арифметического иногда называют **средним взвешенным**.

Задача 4. У группы шестиклассников спросили, сколько примерно часов в день они тратят на приготовление домашних заданий. Трое ответили, что они не выполняют домашние задания, пятеро затрачивают 1 час, семеро — 2 часа, четверо — 3 часа и один — 4 часа. Сколько времени в среднем тратит учащийся из этой группы на приготовление домашних заданий?



Анализируем. В задаче рассматривается следующая величина: время, затрачиваемое шестиклассником на приготовление уроков. Эта величина, по условию, принимает значения 0, 1, 2, 3, 4. Эти значения повторяются, соответственно, следующее количество раз: 3, 5, 7, 4, 1. Для удобства вычислений эти данные удобно представить в следующей таблице:

a_i , ч	0	1	2	3	4
n_i	3	5	7	4	1

Для решения задачи можно воспользоваться приведенной формулой среднего взвешенного.

Решаем. Воспользовавшись формулой среднего взвешенного, получим:

$$\bar{a} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{3 + 5 + 7 + 4 + 1} = \frac{35}{20} = 1,75 \text{ (ч)} = 1 \text{ ч } 45 \text{ мин.}$$

Итак, в среднем один учащийся из рассматриваемой группы тратит на приготовление домашних заданий 1 час 45 минут.

Ответ. 1 ч 45 мин.

1. Сколько всего времени тратят все шестиклассники из опрошенной группы на приготовление домашних заданий?

2. Если бы трое учащихся, заявивших, что не тратят времени на приготовление домашних заданий, тратили по 20 мин, то чему равнялось бы среднее время, необходимое одному учащемуся из этой группы на приготовление домашних заданий?

3. Если бы по 1 ч тратили на приготовление домашних заданий не 5 учащихся, а 7, а по 2 ч не семеро, а пятеро, то чему равнялось бы среднее время, необходимое одному учащемуся из этой группы на приготовление домашних заданий?

Проверь себя

1. Средний возраст шести хоккеистов команды «Сокол», находящихся на площадке, равен 25 годам. Когда один из игроков нарушил правила и был удалён на 2 минуты, средний возраст оставшихся спортсменов стал равняться 26 годам. Сколько лет удалённому хоккеисту?

А. 18.

Б. 20.

В. 24.

Г. 30.

2. Средний балл, полученный в классе по контрольной работе по математике, равен 8, средний балл девочек равен 7, а мальчиков — 10. Кого больше в классе — девочек или мальчиков, и во сколько раз?

А. Мальчиков, в 2 раза.

Б. Мальчиков, в 3 раза

В. Девочек, в 2 раза.

Г. Девочек, в 3 раза.

3. Смешали три сорта муки: 3 кг по 8 зедов, 4 кг по 4 зеда и 5 кг по 6 зедов за килограмм (зед — условная денежная единица). Сколько стоит килограмм смеси?

А. 7 зедов. Б. 6 зедов. В. 5 зедов. Г. Ответ отличен от приведенных.

4. С января по апрель включительно завод выпускал по 9 изделий ежемесячно, в мае — 10 изделий, в июне — 12, в июле — 14, в августе — 16 изделий. Найдите среднее количество изделий, выпущенных заводом за месяц в указанный период.

А. 14.

Б. 13.

В. 12.

Г. 11.

Реши сам

1. Средний возраст членов гимнастической секции равен 11 годам. Старшему — 17 лет, а средний возраст остальных членов секции — 10 лет. Сколько детей посещают секцию?
2. Средняя масса собранной макулатуры, приходящаяся на 1 учащегося в 6-А и 6-Б классах, равна 40 кг. 6-А класс в среднем собрал 30 кг на одного человека, а 6-Б — 51 кг. В каком классе больше учащихся и во сколько раз?
3. Стрелок из лука сделал три серии по пять выстрелов в каждой серии. В первой серии он дважды выбил 8 очков, один раз — 9 очков и два раза — 10 очков. Во второй серии — три раза 9 очков и дважды 10 очков. В третьей серии — один раз 8 очков, дважды 9 очков и дважды 10 очков. Найдите среднее количество очков, выбитых стрелком при одном выстреле.
4. Для проверки семян на всхожесть посеяли 4 сотни семян, отдельно друг от друга. Из первой сотни взошли 92 семени, из второй — 90, из третьей — 93, из четвертой — 89. Найдите среднюю всхожесть семян.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. **73.** Воспользуйтесь определением среднего арифметического нескольких чисел.
2. **415.** Обратите внимание на то, что сумма нескольких чисел равна произведению их среднего арифметического на их количество.
3. **8-и.** Воспользуйтесь указанием к предыдущему заданию.
4. **Г.** Воспользовавшись значениями средних арифметических четырёх чисел и пяти чисел, найдите их суммы.
5. **Б.** Найдите общий вес всех детей и их количество.
6. **70 руб.** Найдите общую стоимость конфет и их массу.
7. **В.** Воспользовавшись определением среднего арифметического нескольких чисел, составьте уравнение относительно a и решите его.
8. **5 -и.** Обратите внимание на то, что сумма нескольких целых чисел является целым числом.

9. Г. Найдите общее количество баллов, набранных участниками олимпиады, и их количество.

10. В. Введите обозначения для количества шестиклассников и количества семиклассников, выразите через них двумя способами общее количество баллов, набранных участниками олимпиады, и приравняйте их.

11. А. Сложив почленно три данных равенства, можно найти сумму трёх указанных чисел, затем каждое из этих чисел.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 23 года. 2. 15 лет. 3. 12 годам.

Задача 2. 1. а) Нет; б) да; в) нет. 2. 43 года. 3. Да.

Задача 3. 1. 30 зедов. 2. 400 г. 3. Если бы купили одинаковую массу конфет каждого вида.

Задача 4. 1. 35 ч. 2. 1 ч 48 мин. 3. 1 ч 39 мин.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Б	В	А	Г

Ответы и указания у заданиям «Реши сам»

1. 7. Введите обозначение для количества детей в секции и выразите двумя способами через него сумму возрастов членов секции.

2. В 6-А классе, в 1,1 раза. Введите обозначения для количеств учащихся в обоих классах и выразите через них массу макулатуры, собранную двумя классами.

3. 9,2. Найдите общее количество выбитых очков и количество сделанных выстрелов.

4. 0,91. Воспользуйтесь тем, что средняя всхожесть семян равна отношению количества взошедших семян к количеству посеянных семян.

4. Сравнение количеств и значений величин

Очень часто в жизни приходится сравнивать количества предметов в двух совокупностях. Ответы на вопросы «Кого больше?», «Что дороже?», «Кто быстрее?» и т. п. позволяют принять решение, сделать выбор.

Математической моделью большинства задач данного блока является равенство или неравенство между значениями количеств двух совокупностей или между значениями двух величин. Для исследования соответствующей модели, то есть решения соответствующей математической задачи, используются различные приёмы. Самым общим является нахождение этих количеств и значений с последующим сравнением полученных чисел. Применяются и частные приёмы: сравнение общей части двух совокупностей, разбиение двух совокупностей на две группы с общей частью, сравнение со значением третьей величины и др.

Готовимся к решению задач

1. В шестых классах 28 человек увлекается футболом, 18 человек — хоккеем. Четвёртая часть футболистов играет и в хоккей, третья часть хоккеистов играет и в футбол. Кого больше в шестых классах: футболистов, играющих в хоккей, или хоккеистов, играющих в футбол?

- А. Футболистов, играющих в хоккей. Б. Хоккеистов, играющих в футбол.
В. Одинаковое количество. Г. Определить нельзя.

2. В шестых классах a человек увлекается футболом, c человек — хоккеем. Четвёртая часть футболистов играет и в хоккей, третья часть хоккеистов играет и в футбол. Кого больше в шестых классах: футболистов, играющих в хоккей, или хоккеистов, играющих в футбол?

- А. Футболистов, играющих в хоккей. Б. Хоккеистов, играющих в футбол.
В. Одинаковое количество. Г. Определить нельзя.

3. В одном ящике только белые шарики, а в другом только красные. Взяли из первого ящика 10 белых шариков, часть из них поменяли на красные из второго ящика и полученный набор поместили в первый ящик. Каких шариков стало больше: красных в первом ящике или белых во втором?

А. Одинаковое количество.

Б. Красных шариков в первом ящике.

В. Белых шариков во втором ящике.

Г. Определить нельзя.

4. В классе мальчиков, освоивших компьютер столько, сколько девочек, не освоивших компьютер.

1) Верно ли, что количество девочек в классе совпадает с количеством учащихся класса, освоивших компьютер?

2) Сравните количество мальчиков в классе с количеством учащихся класса, не освоивших компьютер.

5. В 2018 году 20 марта на всей Земле был день весеннего равноденствия (длительность светового дня равнялась длительности ночи), 21 июня — самая короткая ночь, 23 сентября — день осеннего равноденствия, 21 декабря — самая длинная ночь.

1) Что длиннее в октябре: световой день или ночь?

2) Что длиннее в апреле: световой день или ночь?

3) Когда длиннее световой день: в мае или в июле?

Решение задач

В следующей задаче полезно будет сравнить общие части двух совокупностей, которые требуется сравнить.

Задача 1. В некотором университете каждый пятый математик — шахматист, каждый десятый шахматист — математик. Кого больше в университете: математиков или шахматистов и во сколько раз?



Анализируем. В задаче рассматриваются две совокупности: математиков и шахматистов. Они имеют общую часть: математики, являющиеся шахматистами или шахматисты, являющиеся математиками. По условию задачи известно, какую часть от численности каждой из указанных двух совокупностей составляет численность их общей части. Сравнив эти части, можно будет сравнить и численности обеих совокупностей.

Решаем. Обозначим через a количество математиков в университете, а через b — количество шахматистов. Из условия следует равенство $\frac{1}{5}a = \frac{1}{10}b$

или $b = 2a$, то есть шахматистов в университете больше в два раза.

Ответ. Шахматистов, в два раза.

1. *Может ли количество шахматистов равняться 15?*

2. *Может ли количество математиков, являющихся шахматистами, равняться 3?*

3. *Если бы каждый четвёртый математик был шахматистом, а каждый третий шахматист был математиком, то, кого было бы больше: математиков или шахматистов?*

Для сравнения количеств в двух совокупностях можно применить и следующий приём. Две совокупности разбиваются на две части так, чтобы каждое разбиение состояло из их общей части и некоторой новой группы. Если эти две новые образованные группы окажутся равными, то равными будут и данные совокупности.

Задача 2. В классе послушных девочек столько же, сколько непослушных мальчиков. Кого в классе больше: послушных детей или мальчиков?



Анализируем. Рассмотрим две совокупности: совокупность мальчиков класса и совокупность послушных детей. Первую из них можно разделить на послушных и непослушных мальчиков, вторую — на послушных мальчиков и послушных девочек. Эти две совокупности имеют общую часть — послушных мальчиков. Останется сравнить две другие части. Это даст возможность сравнить разбиваемые совокупности.

Решаем. Всех мальчиков можно разделить на две группы: послушных и непослушных. Поэтому:

Количество мальчиков = количеству послушных мальчиков + количество непослушных мальчиков. $M = ПМ + НМ$

Но, по условию, число непослушных мальчиков в классе равно числу послушных девочек. Произведя замену в предыдущем равенстве, получим:

Количество мальчиков = количеству послушных мальчиков + количеству послушных девочек. $M = ПМ + ПД = П(М + Д)$

Сумма, стоящая в правой части последнего равенства, равна числу послушных детей в классе. Поэтому

Количество мальчиков = количеству послушных детей в классе. $M = П$

Ответ на поставленный вопрос получен.

Ответ. В классе одинаковое количество мальчиков и послушных детей.

1. Кого в классе больше: девочек или непослушных детей?

2. Можно ли сравнить, исходя из условия, количество мальчиков и количество девочек в классе?

3. Можно ли сравнить, исходя из условия, количество послушных и количество непослушных детей в классе?

Приём разбиения совокупности на две части является эффективным при решении многих задач на сравнение количеств или значений величины при «перемешивании».

Задача 3. В одном автобусе сидели 40 юношей, а во втором — 50 девушек. Из 1-го автобуса во 2-й перешли 10 человек. Из-за тесноты 10 человек (юношей и девушек) перешли из 2-го автобуса в 1-й. Кого стало больше: девушек в 1-ом автобусе или юношей во 2-ом?



Анализируем. Рассмотрим две совокупности: лица, перешедшие из второго автобуса в первый, и юноши, появившиеся во втором автобусе. Численно эти совокупности равны: они содержат по 10 человек. Каждую из них мы разбиваем на две части так, чтобы одна часть в обоих разбиениях была общей. Благодаря численному равенству совокупностей и равенству одной из составляющих разбиений, можно сравнить вторые составляющие.

Решаем. Девушки в первом автобусе и юноши во втором появились благодаря переходу 10 человек из одного автобуса в другой. Во втором автобусе было 10 юношей (они перешли из первого автобуса во второй). Совокупность перешедших из второго автобуса (их 10) в первый разобьём на 2 группы: юно-

Перешедшие из 2-го в 1-й

Юноши	Девушки
-------	---------

Рис. 1

Юноши во 2 автобусе

Перешедшие в 1-й	Оставшиеся во 2-м
------------------	-------------------

Рис. 2

ши и девушки (см. рис. 1). Совокупность юношей, появившихся во втором автобусе (их тоже 10) разделим на перешедших из второго автобуса в первый и оставшихся во втором автобусе. Так как первая составляющая в обоих разбиениях одинакова (на рисунках эти части закрашены), то количество девушек, перешедших из второго автобуса в первый, равно количеству юношей, оставшихся во втором автобусе (см. рис. 2).

Ответ. Девушек в 1-ом автобусе и юношей во 2-ом одинаковое количество.

1. Если бы из второго автобуса в первый перешло 12 человек, то, кого было бы больше: девушек, перешедших из второго автобуса в первый, или юношей, оставшихся во втором автобусе?

2. Если бы из второго автобуса в первый перешло 8 человек, то, кого было бы больше: девушек, перешедших из второго автобуса в первый, или юношей, оставшихся во втором автобусе?

3. Если снова из первого автобуса во второй перейдет 10 человек, то, кого будет больше: девушек в первом автобусе или юношей во втором автобусе?

Иногда для сравнения двух значений величины удобно каждое сравнить с каким-то третьим значением. Если окажется, что первое из них меньше третьего, а второе больше третьего, то первое значение меньше второго. Если же оба данные значения величины окажутся больше или меньше третьего, то сравнить два данных значения величины нельзя, целесообразно заменить третье значение.

Задача 4. Известно, что в некотором регионе февральская ночь длиннее дня, апрельская короче. Что длиннее в этом регионе: ночь в феврале или ночь в апреле?



Анализируем. Требуется сравнить длительности февральской и апрельской ночей. Это те два значения величины, которые необходимо сравнить. Что выбрать в качестве третьего значения? В условии задачи длительность ночи сравнивается с длительностью дня. Ночь и день образуют сутки. Поэтому в качестве третьего значения величины удобно выбрать половину суток. Для срав

нения три указанных значения величины можно изобразить наглядно.

Сутки	
Февральская ночь	Февральский день
Половина суток	Половина суток

Сутки	
Апрельский день	Апрельская ночь
Половина суток	Половина суток

Решаем. Так как февральская ночь длиннее февральского дня, то февральская ночь длиннее половины суток (а февральский день короче половины суток).

Поскольку апрельская ночь короче апрельского дня, то апрельская ночь короче половины суток (апрельский день длиннее половины суток).

Итак, февральская ночь длиннее апрельской ночи.

Ответ. Ночь в феврале.

1. Что длиннее: день в феврале или день в апреле?
2. Что длиннее: день 1 января или день 1 декабря?
3. Что длиннее: ночь 1 января или ночь 1 декабря?

Проверь себя

1. Все учащиеся класса занимаются гимнастикой или легкой атлетикой, а некоторые — и тем, и другим видом спорта. Среди гимнастов каждый пятый — легкоатлет, а среди легкоатлетов каждый шестой — гимнаст. Кого в классе больше: гимнастов или легкоатлетов?

А. Гимнастов. Б. Легкоатлетов. В. Одинаково. Г. Определить нельзя.

2. На поле среди полевых цветов фиолетовых пахучих цветов столько же, сколько не фиолетовых не пахучих. Каких цветов на поле больше: фиолетовых или непахучих?

А. Фиолетовых. Б. Непахучих. В. Одинаково. Г. Определить невозможно.

3. Есть две бочки с медом и дегтем. В бочку с медом вылили ложку с дегтем и тщательно перемешали. Потом в бочку с дегтем вылили ложку смеси. Чего получилось больше: дегтя в меде или меда в дегте?

- А. Ответ зависит от размера ложки. Б. Дегтя в меде.
 В. Мёда в дегте. Г. Одинаково.

4. Если августовский день длиннее ночи, а октябрьский — короче, то что длиннее: день в августе или день в октябре?

А. День в августе.

Б. День в октябре.

В. Одинаковы.

Г. Определить невозможно.

Реши сам

1. На дискотеке каждый юноша танцевал с тремя девушками, а каждая девушка — с тремя юношами. Сравните количество девушек и количество юношей на дискотеке.

2. На поле среди полевых цветов фиолетовых непахучих цветов больше, чем не фиолетовых пахучих. Каких цветов на поле больше: фиолетовых или пахучих?

3. Есть два одинаковых и одинаково заполненных стакана с кофе и молоком. В стакан с кофе вылили ложку с молоком и тщательно перемешали. Потом в стакан с молоком вылили ложку смеси. Эту процедуру повторили несколько раз. Чего получилось больше: кофе в молоке или молока в кофе?

4. Известно, что 22 июня и 22 декабря — дни с самой короткой и самой длинной ночами соответственно. Что продолжительнее: день 1 июля или ночь 1 декабря, если считать, что длительности дней и ночей изменяются примерно равномерно с течением времени?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Найдите количество футболистов, играющих в хоккей, и количество хоккеистов, играющих в футбол.

2. Г. Для определённого ответа на поставленный вопрос не хватает данных.

3. А. Введите обозначение для количества белых шариков из первого ящика, замененных на красные из второго, и выразите через него количество красных шариков в первом ящике и количество белых во втором.

4. 1) Верно; 2) количество мальчиков в классе равно количеству учащихся класса, не освоивших компьютер. 1) Представьте общее количество девочек в классе в виде суммы количества девочек, освоивших компьютер, и количества девочек, не освоивших компьютер. 2) Аналогично представьте количество

мальчиков в классе.

5. 1) Ночь; 2) световой день; 3) в июле. Воспользуйтесь тем, что в дни весеннего и осеннего равноденствия длина светового дня равна длине ночи.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. Нет. **2.** Да. **3.** Математиков.

Задача 2. 1. Одинаково. **2.** Нет. **3.** Нет.

Задача 3. 1. Девушек, перешедших в первый автобус. **2.** Юношей, оставшихся во втором автобусе. **3.** Юношей во втором автобусе.

Задача 4. 1. День в апреле. **2.** День 1 декабря. **3.** Ночь 1 января.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Б	В	Г	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Одинаково. Введите обозначения для количества девушек и количества юношей, выразите через них двумя способами количество танцевальных пар.


2. Фиолетовых. Разделите совокупность фиолетовых цветов на фиолетовые пахучие и фиолетовые не пахучие и воспользуйтесь условием задания.

3. Одинаково. Обратите внимание на то, что объёмы жидкостей в стаканах одинаковые и смеси тщательно перемешивались.

4. Ночь 1 декабря. Подсчитайте, сколько дней прошло от 22 июня до 1 июля и от 1 декабря до 22 декабря.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Выполнение заданий для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком  на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	6 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	10 задач	7 задач
«отлично»	Решено не менее	12 задач	10 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа напишите букву «Д».

1. На канатной дороге кресла расположены на одинаковом расстоянии друг от друга и пронумерованы числами 0, 1, 2, ..., 95. Номер Вашего кресла 66. Каков номер кресла, которое Вы встретите, проехав половину пути?

А. 16. Б. 17. В. 18. Г. 19.

2. Во фруктовой вазе всего 20 яблок и груш. Известно, что среди любых 8 фруктов, взятых из вазы, есть, по крайней мере, два яблока, а среди любых 16 — есть, по крайней мере, две груши. Сколько груш в вазе?

А. 7. Б. 6. В. 5. Г. 4.

3. Осьминог захотел подобрать восемь ластов для плавания. В подводной пещере он хранит много ластов двух цветов. Какое наименьшее количество ластов он должен вынуть наугад, чтобы обязательно иметь лапы одного цвета?

А. 3. Б. 15. В. 16. Г. Другой ответ.

4. На танцевальном вечере присутствовали 10 юношей и 9 девушек. При этом юноши приглашали к танцу по очереди всех незнакомых девушек, а девушки — только знакомых ребят. Сколько всего разных пар образовали молодые люди?

А. 10. Б. 19. В. 45. Г. 90.

5. Из книги выпала часть, начиная со страницы номер 287, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в обратном порядке. Сколько листов выпало из книги?

А. 496. Б. 494. В. 248. Г. 247.

6. Стоимость 3 бутербродов, 7 чашек кофе и 1 гамбургера составляет 42 зед (зед — условная денежная единица). Стоимость 4 бутербродов, 8 чашек кофе и 2 гамбургеров — 60 зедов. Сколько стоит 1 бутерброд, 1 чашка кофе и 1 гамбургер вместе?

А. 16 зедов. Б. 18 зедов. В. 20 зедов. Г. Определить невозможно.

7. Вера и Надя покупали картофель на рынке. Вера купила 4 кг, Надя — 2 кг. Наде показалось, что картофеля взвешенно мало, и она попросила перевесить покупки. Продавец взвесил обе покупки вместе, и весы показали 5,5 кг. Сколько картофеля отпустили Наде в действительности?

А. 1,5 кг. Б. 2,5 кг. В. 3 кг. Г. Определить невозможно.

8. Если на кольцевом маршруте работают 5 автобусов, то интервал движения составляет 18 мин. Каким будет интервал движения, если пустить еще один автобус?

А. 12 мин. Б. 14 мин. В. 15 мин. Г. 16 мин.

9. Минутная стрелка за 15 мин повернулась на некоторый угол. За какое время на тот же угол повернется часовая стрелка?

А. За 1 ч. Б. За 3 ч. В. За 4 ч. Г. За 6 ч.

10. Средний возраст 11 игроков футбольной команды равен 22 годам. Во время матча один игрок был удалён с поля. Средний возраст оставшихся игроков составил 21 год. Сколько лет удалённому с поля игроку?

- А. 21. Б. 22. В. 32. Г. 35.

11. Средний рост учащихся класса равен 150 см, средний рост девочек равен 145 см, а мальчиков — 160 см. Кого больше в классе — девочек или мальчиков, и во сколько раз?

- А. Девочек, в 2 раза. Б. Мальчиков, в 2 раза.
В. Мальчиков, в 3 раза. Г. Девочек, в 3 раза.

12. Первую половину рукописи машинистка печатала по 6 страниц в час, а вторую — по 12 страниц. Сколько страниц в среднем машинистка печатала за 1 час?

- А. 8. Б. 8,5. В. 9. Г. 9,5.

13. Учащихся одной школы опросили: сколько раз в жизни они летали на самолёте. Полученные ответы представлены в таблице.

Количество совершённых полётов	0	1	2	3	4	5
Количество учащихся	530	92	46	30	18	4

Сколько примерно раз в среднем летал на самолёте один учащийся этой школы? Выберите наиболее точный результат.

- А. 3. Б. 2,5. В. 1,5. Г. 0,5.

14. Все учащиеся класса во внеурочное время занимаются изучением компьютеров или совершенствуются во владении иностранным языком. Среди увлекающихся компьютерами каждый седьмой совершенствуется в иностранном языке, а среди совершенствующихся во владении иностранным языком каждый восьмой — «компьютерщик». Кого в классе больше: «компьютерщиков» или совершенствующихся в иностранном языке?

- А. «Компьютерщиков» Б. Совершенствующихся в иностранном языке.
В. Одинаково. Г. Определить нельзя.

15. В классе девочек, занимающихся спортом, столько же, сколько мальчиков, не занимающихся спортом. Кого в классе больше: мальчиков или детей, занимающихся спортом?

А. Определить невозможно. **Б.** Детей, занимающихся спортом.

В. Мальчиков. **Г.** Одинаково.

16. Много лет назад в школах было раздельное обучение: мальчики учились в мужских школах, а девочки — в женских. Когда начали объединять школы, 100 мальчиков из мужской школы перевели в женскую, женская школа оказалась переполненной. Так как администрация мужской школы передала в женскую не лучших своих учащихся, то администрация женской, передавая своих 100 учащихся в мужскую школу, передала и мальчиков, и девочек, тоже не отличавшихся успехами в учёбе. Кого оказалось больше: девочек в бывшей мужской школе или мальчиков в бывшей женской?

А. Девочек. **Б.** Мальчиков. **В.** Одинаково. **Г.** Определить невозможно.

17. Известно, что 22 марта и 22 сентября — дни весеннего и осеннего равноденствия: в эти дни длительности дня и ночи равны. Когда ночь длиннее: 1 апреля или 1 октября, если считать, что длительности дней и ночей изменяются примерно равномерно со временем?

А. 1 апреля. **Б.** 1 октября. **В.** Одинаковы. **Г.** Определить невозможно.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому при необходимости следует пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания, приведенными после задач.

1. Вокруг цветочной клумбы посажены розы. Лена обошла клумбу, считая розы. Наташа сделала то же самое, но начала с другого цветка, хотя пошла в том

же направлении. Роза, которая у Лены было 15-й, у Наташи была 4-й, а роза, которая у Лены была 4-й, у Наташи была 43-й. Сколько роз вокруг клумбы?

2. В футбольном клубе 28 игроков, воспитанников этого клуба и легионеров. Известно, что среди любых 14 игроков этого клуба есть, по крайней мере, один воспитанник клуба, а среди любых 20-и есть, по крайней мере, один легионер. Кого больше в футбольном клубе: легионеров или воспитанников клуба?

3. В погребе стоит 20 одинаковых банок с вареньем. В 8 банках клубничное варенье, в 7 — малиновое, в 5 — вишневое. Какое наибольшее количество банок можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там осталось еще хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

4. В выпускном классе 28 человек. У Кати средний балл аттестата самый низкий среди девочек, но выше, чем у трёх мальчиков. Средний балл аттестата у Вали выше, чем у четырёх мальчиков, у Лены — выше, чем у пяти мальчиков, и т. д. до Тани, у которой в классе самый высокий средний балл аттестата. Сколько девочек и сколько мальчиков в классе?

5. Петя купил тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради какие-то 25 листов и сложил все 50 чисел, написанные на них. В сумме он получил 2000. Правильно ли Вася сложил числа?

6. Аня и Таня весят вместе 70 кг, Таня и Маня — 65 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Могут ли они все вместе подняться на лифте грузоподъемностью 200 кг?

7. Геодезист, находясь в одной точке, измеряет углы, под которыми он видит расстояния между каждой парой из трёх ориентиров. Его прибор показал, что угол между первым и вторым ориентирами равен 30° , между вторым и третьим — 40° , а между первым и третьим — 68° . Он понял, что прибор даёт ошибочные показания. Каковы в действительности углы между ориентирами?

8. На кольцевом маршруте работает 5 автобусов, интервал движения которых составляет 18 минут. Сколько автобусов нужно добавить на этом маршруте,

чтобы интервал движения стал равняться 6 минутам?

9. Часы показывают 4 часа. Найдите угол между стрелками через 40 минут.

10. Средний возраст молодёжной бригады 23 года, причём возраст бригадира 37 лет. Средний возраст бригады без учёта возраста бригадира 22 года. Сколько человек в молодёжной бригаде?

11. Средняя цена фруктов, купленных домохозяйкой, равна 25 зедов за 1 килограмм (зед — условная денежная единица). При этом средняя цена купленных фруктов, выращенных в регионе, где она проживает, составляет 10 зедов, а привезенных из-за рубежа, — 55 зедов. Каких фруктов — выращенных в регионе, где она проживает, или привезенных из-за рубежа — домохозяйка купила больше и во сколько раз?

12. Из двух сортов чая составлено 8 кг смеси. Килограмм первого сорта стоит 120 зедов (зед — условная денежная единица), килограмм второго сорта — 96 зедов. Сколько килограмм взято того и другого сорта, если килограмм смешанного чая стоит 114 зедов?

13. За период с 1993 года по 2008 команда школьников на Международных математических олимпиадах один раз завоевала 3 медали, три раза по 4 медали, три раза по 5 медалей и девять раз по 6 медалей. Сколько в среднем медалей завоевывала команда на Международных математических олимпиадах ежегодно?

14. На дискотеке каждый юноша танцевал с пятью девушками, а каждая девушка — с четырьмя юношами. Сравните количество девушек и количество юношей на дискотеке.

15. В классе послушных девочек меньше, чем непослушных мальчиков. Кого в классе больше: послушных детей или мальчиков?

16. Имеется стакан воды и полстакана молока. Три ложки воды долили в молоко, а потом три ложки смеси снова перелили в стакан с водой. Чего оказалось больше в результате этих переливаний: воды в молоке или молока в воде?

17. Известно, что 22 марта и 22 сентября — дни весеннего и осеннего равноденствия: в эти дни длительности дня и ночи равны. Когда день длиннее: 1 марта или 1 октября, если считать, что длительности дней и ночей изменяются примерно равномерно со временем?

Указания к задачам основного задания

1. Воспользуйтесь графическим изображением условия, как это сделано при решении задачи 1 блока «Нахождение неизвестного количества». Пользуясь этим изображением, нетрудно найти количество роз между розами, которые были для Наташи 43-й и 4-й.
2. Оцените количество легионеров и воспитанников клуба, пользуясь условием задачи, а затем воспользуйтесь тем, что в клубе 28 игроков.
3. Убедитесь в том, что наибольшее количество банок в погребе, при котором условие не выполняется, равно 12 (8 банок клубничного варенья и по две малинового и вишнёвого).
4. Сравните сначала, пользуясь условием, количество девочек с количеством мальчиков в классе, а затем воспользуйтесь тем, что вместе их 28.
5. Воспользуйтесь тем, что сумма номеров страниц на одном листе нечётна и количество вырванных листов нечётно.
6. Воспользуйтесь тем, что сумма всех масс, приведенных в условии, равна удвоенной сумме масс всех перечисленных детей.
7. Запишите угловые меры с учётом ошибки измерения и составьте уравнение для их нахождения.
8. Найдите сначала общее время движения по маршруту, а затем найдите, на сколько временных промежутков делит общее время движения по маршруту промежуток длиной 6 минут.
9. Найдите вначале, какой угол образуют часовая и минутная стрелка в 4 часа, а затем определите, на какой угол сместилась за 40 минут часовая стрелка и на какой угол — минутная.
10. Введите обозначение для количества членов бригады, выразите через него двумя способами сумму возрастов всех членов бригады.

11. Введите обозначения для массы купленных фруктов, выращенных в разных местах, и выразите через них стоимость покупки двумя способами.
12. Введите обозначение для массы одного сорта чая в смеси, выразите через него массу другого сорта, стоимости обоих сортов чая в смеси.
13. Воспользуйтесь тем, что ежегодное среднее количество медалей равно отношению количества медалей, полученных за период с 1993 г. по 2008 г, к количеству лет в этом периоде.
14. Введите обозначения для количества девушек и для количества юношей, выразите через них двумя способами количество танцевальных пар.
15. Разделите совокупности девочек и мальчиков в классе на непослушных и послушных и воспользуйтесь условием задачи для сравнения количеств послушных детей и мальчиков.
16. Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Сравнение количеств и значений величин».
17. Подсчитайте, сколько дней прошло с 1 марта до 22 марта и с 22 сентября до 1 октября.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. Кабинки развлекательного аттракциона «Колесо обозрения» последовательно пронумерованы числами 1, 2, 3 и т. д. Сколько всего кабинок, если известно, что когда кабинка 30 занимает самую высокую позицию, то кабинка 12 — самую низкую?
2. Во фруктовой вазе всего 25 яблок, груш и апельсин. Известно, что среди любых 9 фруктов, взятых из вазы, есть, по крайней мере, одно яблоко, а среди любых 19 есть, по крайней мере, два, отличных от яблока. Сколько груш в вазе?

3. В тёмной кладовой лежат ботинки одного размера: 10 пар чёрных и 10 пар коричневых. Найдите наименьшее число ботинок, которое нужно взять из кладовой, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета (считать, что в темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого).

4. Каждая из присутствующих на дискотеке девушек в течение вечера танцевала с 5 ребятами, а каждый парень — с 7 девушками. Сколько девушек было на дискотеке, если ребят было больше 20, но менее 30?

5. В 5-томном справочнике сквозная нумерация страниц. Сколько страниц в одном томе, если в каждом томе их одинаковое количество, а сумма номеров всех первых и последних страниц равняется 8 505?

6. Известно, что 10 одинаковых ручек стоят больше, чем 11 зедов, а 9 таких же ручек стоят меньше 10 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько кетов стоит одна ручка, если кет — $\frac{1}{100}$ зеда?

7. Геодезист, находясь в одной точке, измеряет углы, под которыми он видит расстояния между каждой парой из трёх ориентиров. Его прибор показал, что угол между первым и вторым ориентирами равен 130° , между вторым и третьим — 120° , а между первым и третьим — 116° . Он понял, что прибор даёт ошибочные показания. Каковы в действительности углы между ориентирами?

8. Двое механических часов одновременно показали полдень. Первые из них спешат на 6 минут, вторые отстают на 3 минуты в сутки. Через какое время они впервые снова покажут одинаковое время?

9. В 12 часов часовая и минутная стрелка совпадают. Через какое наименьшее число минут стрелки опять совпадут?

10. Если бы Петя на тестировании по последнему предмету набрал 180 баллов, то средний балл его по всем предметам составил бы 156, но Петя набрал всего

140 балла за последний предмет и 148 баллов в среднем. По скольким предметам тестировался Петя?

11. Средний возраст сотрудников одной компании 40 лет, средний возраст женщин этой компании 35 лет, женщин в компании вдвое больше, чем мужчин. Каков средний возраст мужчин в компании?

12. В салат «Витаминный» хозяйка вкладывает следующие продукты: свеклу массой 0,4 кг по цене 5 зедов за 1 кг, морковь массой 0,5 кг по цене 9 зедов за 1 кг, яблоки массой 0,6 кг по цене 12 зедов за 1 кг, сметану массой 0,2 кг по цене 25 зедов за 1 кг (зед — условная денежная единица). Во сколько зедов обходится хозяйке 200 г такого салата?

13. У пасечника была 2 улья, в которых жило 100 и 75 пчёл соответственно. За 10 дней из первого улья он снял 11,6 кг мёда, а со второго 12 кг.

а) Сколько в среднем мёда добыла за день каждая пчела 1-го улья и сколько пчела 2-го?

б) Сколько килограмм мёда в среднем снимал пасечник в день?

14. Автобус назовём переполненным, если в нём более 50 пассажиров. Идёт колонна автобусов. Что больше — процент переполненных автобусов или процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах?

15. В классе девочек, занимающихся спортом, больше, чем мальчиков, не занимающихся спортом. Кого в классе больше: мальчиков или детей, занимающихся спортом?

16. В первом стакане налито некоторое количество чёрного кофе, а во втором — такое же количество молока. Разрешается переливать из одного стакана в другой любое количество жидкости, тщательно размешивая содержимое стаканов. Можно ли с помощью нескольких таких переливаний добиться того, чтобы в первом стакане молока стало больше, чем кофе?

17. Известно, что 22 июня и 22 декабря — дни с самой короткой и самой длинной ночами. Что продолжительнее: ночь 1 июля или день 1 декабря, если считать, что длительности дней и ночей изменяются примерно равномерно со вре-

менем?

Указания к задачам дополнительного задания

- 1.** Подсчитайте количество кабинок, находящихся между самой высокой и самой низкой кабинками.
- 2.** Пользуясь условием, оцените количество груш и апельсинов вместе и количество яблок.
- 3.** Убедитесь в том, что извлечение 20 ботинок не удовлетворяет условию задания.
- 4.** Введите обозначения для количества девушек и для количества юношей на дискотеке, выразите через них двумя способами количество танцевальных пар. Воспользуйтесь свойствами делимости.
- 5.** Введите обозначение для количества страниц в каждом томе, выразите через него сумму номеров всех первых и последних страниц. Обратите внимание на то, что номер последней страницы первого тома совпадает с количеством страниц в каждом томе.
- 6.** Оцените цену одной ручки, используя условие задачи. Обратите внимание на то, что цена ручки может содержать только целое число копеек.
- 7.** Введите обозначение для ошибки измерения углов, выразите через него истинные значения углов.
- 8.** Установите, чему равна разность между показаниями часов через сутки после того, как они показывали одинаковое время.
- 9.** Найдите углы, на которые поворачиваются часовая и минутная стрелки за минуту. Воспользуйтесь тем, что до следующего совпадения стрелок минутная стрелка делает на один оборот больше часовой.
- 10.** Введите обозначение для количества предметов, по которым тестировался Петя, выразите через него Петин средний балл по всем предметам.
- 11.** Введите обозначение для количества мужчин в кампании, выразите через него количество женщин, общее число сотрудников, сумму возрастов всех сотрудников, сумму возрастов всех женщин, сумму возрастов всех мужчин. Вос-

пользуйтесь тем, что сумма нескольких чисел равна произведению их среднего арифметического на количество чисел.

12. Пользуясь условием, найдите общую массу и общую стоимость салата.

13. Обратите внимание на то, что средняя масса снятого мёда за день равна частному от деления массы мёда, снятой за несколько дней, на количество дней; а средняя масса мёда, добытой пчелой за несколько дней, равна частному от деления общей массы, добытой всеми пчёлами за эти дни, на количество пчёл.

14. Введите обозначения для количества переполненных автобусов и для количества непереполненных автобусов. Выразите через них количество пассажиров в переполненных автобусах и количество пассажиров в непереполненных автобусах. Воспользуйтесь тем, что количество пассажиров в переполненных автобусах более чем в 50 раз больше количества таких автобусов

15. Рассмотрите две совокупности: совокупность мальчиков класса и совокупность детей, занимающихся спортом. Первую из них можно разделить на занимающихся спортом и не занимающихся спортом мальчиков, вторую — на занимающихся спортом мальчиков и занимающихся спортом девочек.

16. Рассмотрите объём кофе, перелитого из первого стакана во второй, и объём кофе, появившегося во втором стакане. Эти объёмы равны.

17. Подсчитайте количество дней от 22 июня до 1 июля и от 1 декабря до 22 декабря.

Задачи для исследования

1. Имеется m красных карандашей и n синих. Разработайте стратегию поиска ответов на следующие вопросы.

а) Какое наименьшее число карандашей нужно взять, чтобы среди них было p красных и q синих?

б) Какое наибольшее число карандашей можно взять, чтобы осталось не менее r красных и s синих?

2. По окружности расположено n кружочков, занумерованных числами $1, 2, \dots, n$. Начиная с k -го, закрашивается каждый второй незакрашенный кружочек до

3. тех пор, пока останется один незакрашенный. Какой его номер?
4. Есть несколько групп людей. Рассмотрим те из них, в которых не менее m человек старше 18 лет. Назовём эти группы «взрослыми». При каких значениях m процент «взрослых» групп больше (меньше) процента людей старше 18 лет в этих группах?
5. В кружке 25 школьников. Средний возраст всех мальчиков равен среднему возрасту всех девочек, а средний возраст всех участников кружка равен 14 годам. Какой может быть сумма возрастов самого младшего среди мальчиков и самой младшей среди девочек?
6. Исследуйте зависимость продолжительности дня и ночи в зависимости от времени года и местоположения региона.
7. Исследуйте свойства средних нескольких чисел.
- а) Как изменяется среднее нескольких чисел, если ко всем этим числам прибавить (от всех этих чисел отнять) одно и то же число?
- б) Как изменяется среднее нескольких чисел, если все эти числа умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля?
- в) Как найти среднее нескольких чисел, если они разбиты на несколько групп и известны средние этих групп?
- г) Может ли среднее нескольких чисел быть больше (меньше) наибольшего (наименьшего) из этих чисел? д) Можно ли обнаружить, что механические часы идут неточно, измерив несколько раз углы между стрелками?

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Поиск неизвестного

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 7-8 классов

Учебное пособие