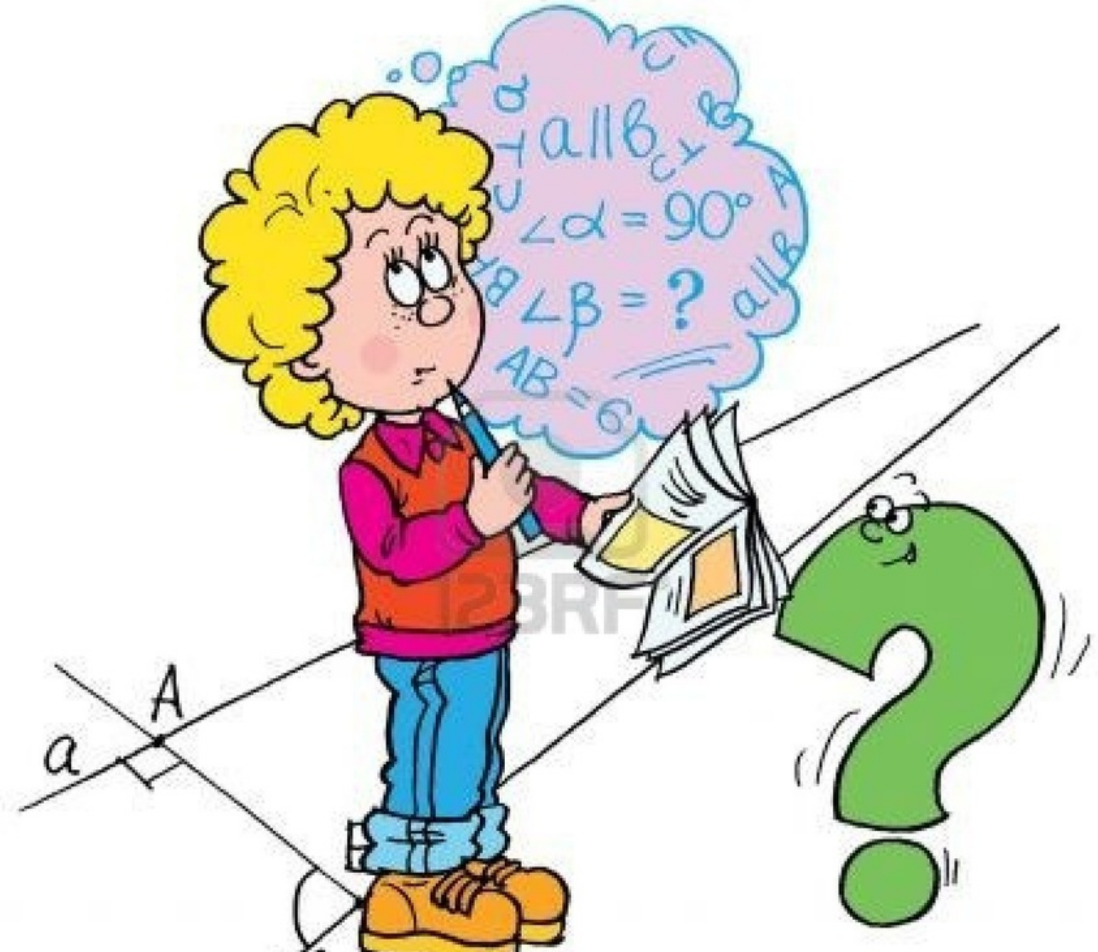
Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

# Примени математику




**Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 7-8 классов**

Донецк 2023

**УДК 519 11**

**ББК 74.262я 72**

**Б 881**

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Примени математику. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 7-8 классов. — 57 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 7-8 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, совершенствование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 7-8 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

## Содержание

## Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

**1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).**

**2 этап. Решение математической задачи.**

**3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.**

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и нахождения решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

В контрольном задании (контрольном тесте, основном и дополнительном заданиях) задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач

**Желаем успехов!**

## Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью каждого блока состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого блока, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

***- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;***

***- уяснить требования задачи;***

***- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.***

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после каждой задачи. Они позволяют выяснить:

***- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;***

***- поняли ли вы приведенное решение задачи;***

***- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.***

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

***Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.***

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

***Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение***

***каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.***

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

***Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.***

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

***Сначала выполните контрольный тест и проведите анализ допущенных ошибок.***

***Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.***

***Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.***

***При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.***

**Помните!**

**Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание. Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.**

# Примени математику

Математика исторически возникла и развивалась благодаря тому, что человеку нужно было считать, измерять, сравнивать, вычислять, и т. д. А сегодня без математики не может обойтись не только ни одна отрасль человеческой деятельности, а даже и любой современный человек, который делает выбор, принимает решение, оценивает, просто думает. Поэтому так важно уже в школьные годы научиться применять математику.

Математику нужно учить так, чтобы уметь её применять к решению задач, встречающихся в реальной жизни. А таких задач немало.

Применение математики требует специальных умений. Среди них главным является умение «моделировать», то есть переводить задачу на язык математики.

В результате такого перевода получаем математическую задачу о числах, фигурах, уравнениях и других математических объектах.

Для её решения нужны прочные знания и умения по математике. Без них решения математической задачи не найти.

Нахождением решения математической задачи дело не заканчивается. Нужно ещё осознать, имеет ли полученный ответ смысл в нашей исходной задаче (например, получилось два с половиной зайца!). Возможно, мы плохо перевели нашу задачу на язык математики. На этом этапе происходит осмысление решения математической задачи.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде следующих трёх этапов:

1) **выбор или построение математической модели для описания данной задачи;**
2) **исследование построенной модели, то есть решение математической задачи;**
3) **интерпретация результатов исследования, установление соответствия полученного результата целям исследований.**

# 1. Нахождение неизвестного количества

Здесь речь будет идти о подсчёте количества элементов совокупности либо о порядке элементов в некоторой их последовательности. В реальных ситуациях, для решения житейских вопросов, для освоения других предметов, в будущей профессиональной деятельности приходится подсчитывать количество элементов в некоторой совокупности, количество способов осуществить то или иное действие.

Часто для этого достаточно воспользоваться здравым смыслом, умением выполнять вычисления, свойствами этих совокупностей, методами решения арифметических задач, поиском закономерностей образования совокупности, графическими моделями и т. д.

**Готовимся к решению задач**

**1.** На уроке физкультуры в шеренге рядом стоят Галя и Лена, Галя левее Лены. Левее Гали — 9 учащихся, правее Лены — 12 человек. Сколько человек стоит в шеренге?

**А.** 19. **Б.** 21. **В.** 23. **Г.** 25.

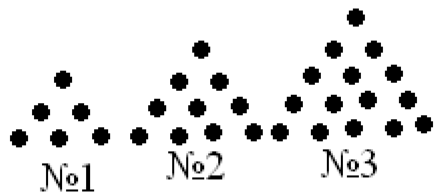
**2.** На уроке физкультуры в шеренге рядом стоят Галя и Лена, Галя правее Лены. Левее Гали — 9 учащихся, Лены — 12 человек. Сколько человек стоит в шеренге?

**А.** 19. **Б.** 21. **В.** 23. **Г.** 25.

**3.** На уроке физкультуры в шеренге стоит 25 человек, среди них Галя и Лена, причём Галя правее Лены. Левее Гали — 12 учащихся, правее Лены — 17 человек. Сколько человек стоит между Галей и Леной?

**4.** Какое число следует записать следующим после числа 11 в последовательности 3, 5, 7, 9, 11, чтобы оно получалось из предыдущего так, как 2-е из 1-го, 3-е из 2-го, 4-е из 3-го и т. д.?

**5.** На рисунке изображены три первые фигуры последовательности фигур, составленных из точек. Каждая следующая фигура этой последовательности получается из предыдущей, как 2-я из 1-й, 3-я из 2-й.



1) Сколько точек нужно добавить: а) к фигуре №1, чтобы получить фигуру №2; б) к фигуре №2, чтобы получить фигуру №3; в) к фигуре №3, чтобы получить фигуру №4?

2) Сколько точек содержит фигура: №2; №3; №4?

3) Какой номер имеет фигура, содержащая: 21 точку; 28 точек; 36 точек?

**6.** В классе 30 человек, мальчиков на 6 человек больше, чем девочек. Сколько в классе девочек?

**А.** 18. **Б.** 16. **В.** 14. **Г.** 12.

**7.** В очереди за билетами на футбол выстроились один за другим 30 человек − мужчины и женщины. Впереди женщины, стоявшей впереди всех женщин, стояло 7 мужчин, впереди следующей женщины в очереди − 8 мужчин, впереди третьей женщины − 9 мужчин, и т. д, впереди женщины, стоящей последней в этой очереди — все мужчины. Сколько в очереди мужчин и сколько женщин?

**8.** В кинотеатре 40 рядов по 30 мест в каждом ряду. Чему равна разность между наибольшей и наименьшей суммами номеров ряда и места?

**А.** 67. **Б.** 68. **В.** 69. **Г.** 70.

**9.** В кинотеатре 40 рядов по 30 мест в каждом ряду. Сколькими способами можно представить в виде суммы номеров ряда и места число: 1) 69; 2) 70; 3) 71?

### Решение задач

Для решения следующей задачи нужно правильно оценить структуру рассматриваемой совокупности.

**Задача 1.** Секцию каратэ посещают 10 шестиклассников. Трое учащихся тяжелее Васи, а четверо учащихся — легче Пети. Сколько в секции учеников, которые тяжелее Пети, но легче Васи, если у всех различный вес?

**Анализируем.** Чтобы подсчитать искомое количество членов секции, можно расположить всех членов секции, например, по возрастанию их масс. Но при этом нам неизвестно, кто тяжелее: Вася или Петя. Итак, придётся рассмотреть два случая.

**Решаем.** Будем изображать точками всех членов секции на горизонтальной оси по возрастанию их масс слева направо. Пусть Вася легче Пети и нет ребят тяжелее Васи, но легче Пети. Тогда левее Пети будут стоять Вася и ещё 3 человека (4 человека легче Пети), а правее Васи — Петя и ещё двое (тяжелее Васи трое) (см. рис. 1). Общее число членов секции будет равно 7, что противоречит условию. Ещё меньше окажется членов секции, если между Васей и Петей будет находиться хотя бы один член секции. Итак, этот случай невозможен.

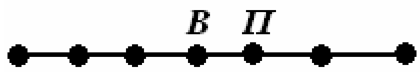


Рис. 1

Пусть Петя легче Васи. Тогда левее Пети будут находиться четверо учащихся (они легче Пети), правее Васи — трое (они тяжелее Васи). Чтобы число членов секции равнялось 10, между ними должен стоять один ученик (см. рис. 2). Он-то и будет тяжелее Пети, но легче Васи.

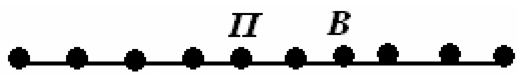


Рис. 2

**Ответ.** Один.

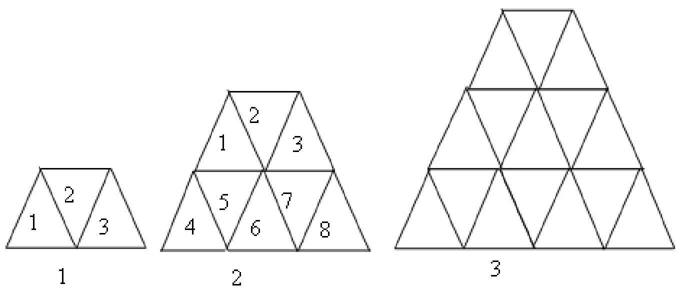
**1.** *Каким будет ответ в задаче, если трое учеников тяжелее Васи, а пятеро — легче Пети?*

**2.** *Каким будет ответ в задаче, если трое учеников легче Васи, а четверо — тяжелее Пети?*

3. *Сколько в секции учеников, если трое тяжелее Васи, четверо — легче Пети и Вася легче Пети?*

В предыдущей задаче мы воспользовались свойствами той совокупности, количество элементов которой нужно было подсчитать. Иногда ответить на вопрос, сколько элементов содержит совокупность, позволяет нахождение закономерности образования совокупности.

**Задача 2.** На рисунке изображены три первые фигуры последовательности фигур, образованных из равных треугольников так, как 2-я фигура образована из 1-й, 3-я – из



2-й. Сколько треугольников потребуется для составления 10-й фигуры этой последовательности?

**Анализируем.** Из рисунка видно, что первая фигура содержит 3 треугольника, вторая — 8, третья — 15. Нужно найти закономерности нахождения количества треугольников, необходимых для получения следующей фигуры, используя количество треугольников, образующих предыдущую фигуру. Для этого можно воспользоваться тем, что каждая следующая фигура получается из предыдущей добавлением к нижней полосе предыдущей фигуры полосы, состоящей из треугольников нижней полосы предыдущей фигуры и еще двух треугольников.

**Решаем.** Каждая фигура состоит из нескольких горизонтальных полос, причём количество полос равно номеру фигуры. Верхняя полоса в каждой фигуре, начиная со 2-й, содержит три треугольника, каждая следующая полоса, расположенная ниже предыдущей, содержит на два треугольника больше, чем предыдущая. Поэтому количество треугольников во второй фигуре равно 3 + 5 = 8, в третьей − 3 + 5 + 7 = 15, в четвёртой − 3 + 5 + 7 + 9 = 24. Продолжая подсчёт, получим, что в десятой фигуре 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 120 треугольников.

**Ответ.** 120.

**1.** *Сколько треугольников: а) в 7-й фигуре; б) в 12-й фигуре?*

**2.** *Какой номер имеет фигура, в которой 195 треугольников?*

**3.** *На сколько треугольников больше в 15-й фигуре, чем в 14-й?*

Иногда для нахождения количества элементов совокупности достаточно свести задачу к задаче, решаемой известным методом (например, к задаче на части, или к задаче на нахождение двух значений по их сумме и разности и т. д.).

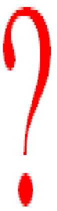
**Задача 3.** На дискотеке отдыхали 24 учащихся из одного класса. С Анной танцевали семеро мальчиков, с Катей — восемь, с Надей — девять и так далее до Любы, с которой танцевали все мальчики. Сколько мальчиков было на дискотеке?

**Анализируем**. По условию, с каждой следующей девочкой танцевало мальчиков на одного больше, чем с предыдущей, а с первой девочкой (с Анной) танцевало семеро мальчиков. Следовательно, мальчиков на 6 человек больше, чем девочек.

Количество учащихся на дискотеке равно 24. Итак, нам известны сумма (24) и разность (6) количеств мальчиков и девочек на дискотеке. По этим данным необходимо найти число мальчиков.

**Решаем.** Из условия следует, что количество мальчиков на 6 больше количества девочек. Следовательно, среди 24 – 6 = 18 человек мальчиков и девочек поровну, то есть по 9 человек. Значит, девочек на дискотеке было 9, а мальчиков — 9 + 6 = 15.

**Ответ.** 15.



**1.** *Сколько мальчиков танцевали с Любой?*

**2.** *Могло ли на дискотеке быть 25 учеников при сохранении остальных условий??*

**3.** *Какой ответ был бы в задаче, если бы на дискотеке было бы 28 учащихся?*

Иногда нахождение количества элементов совокупности сводится к нахождению количества разбиений некоторого числа на слагаемые, удовлетворяющие условию задачи.

**Задача 4.** В кинотеатре 40 рядов по 30 мест в каждом ряду. Билет в кинотеатр назовем «счастливым», если сумма номеров ряда и места, отмеченных на нем, равняется 60. Чему равно количество «счастливых» билетов?

**Анализируем.** Для нахождения количества «счастливых» билетов нужно подсчитать, сколькими способами число 60 можно представить в виде суммы двух слагаемых: номера ряда и номера места. При этом известно, что номер ряда принимает значения от 1 до 40 включительно, а номер места — от 1 до 30.

**Решаем.** Найдём все разбиения числа 60 на сумму двух натуральных слагаемых, первое из которых не больше 40, а второе — не больше 30:

$60 = 40 + 20 = 39 + 21 = 38 + 22 = 37 + 23 = \ldots = 30 + 30.$

Подсчитаем количество таких разбиений, пользуясь вторыми слагаемыми: 20, 21, 22, 23, …, 30. Имеем 11 чисел, а значит, 11 способов разбиения числа 60 на сумму двух необходимых слагаемых.

**Ответ.** 11.

**1.** *Нужно ли учитывать разбиение 60 = 29 + 31?*

**2.** *Сколько было бы «счастливых» билетов, если бы в кинотеатре было 30 рядов по 40 мест в каждом?*

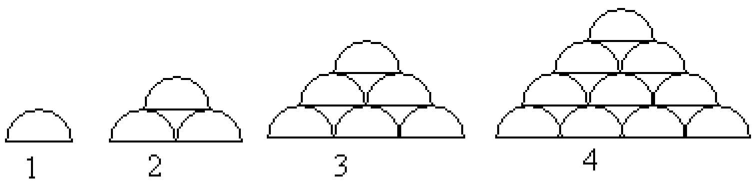
**3.** *Чему равнялось бы количество «счастливых» билетов, если бы «счастливым» считался билет, в котором сумма номеров ряда и места равнялась 20?*

**Проверь себя**

**1.** Петя едет в вагоне поезда, впереди которого 6 вагонов, а сзади 5. Сколько вагонов в этом поезде?

**А.** 12. **Б.** 11. **В.** 10. **Г.** Невозможно определить.

**2.** На рисунке изображены четыре первые фигуры последовательности фигур, составленных из одинаковых полукругов так, как 4-я получена из 3-й, 3-я — из 2-й, 2-я — из 1-й Сколько понадобится полукругов, чтобы построить 10-ю фигуру?




**А.** 36. **Б.** 45. **В.** 55. **Г.** 66.

**3.** На дискотеке отдыхали учащиеся из одного класса. С Анной танцевали пятеро мальчиков, с Катей — шесть, с Надей — семь и так далее до Любы, с которой танцевали все 14 мальчиков. Сколько учащихся было на дискотеке?

**А.** 25. **Б.** 24. **В.** 23. **Г.** 22.

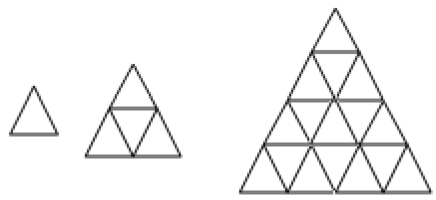
**4.** Сколькими способами 40 учащихся можно разделить на две группы так, чтобы в одной группе было не более 30 учащихся, а во второй — не более 20?

**А.** 14-ю. **Б.** 13-ю. **В.** 12-ю. **Г.** 11-ю.

## Реши сам

**1.** Петя и Коля были одновременно в кинозале, содержащем 40 рядов. Перед рядом, в котором сидел Петя, 12 рядов, а за рядом, где сидел Коля — 18 рядов. Сколько рядов между рядами, в которых сидели ребята?

**2.** Мальчик строит равносторонние треугольники из спичек, как это показано на рисунке. Ежедневно он достраивает треугольник, полученный накануне, до большего, сторона которого вдвое больше стороны предыдущего. Сколько новых спичек придется ему израсходовать на 4-й день?



**3.** В классе 28 учащихся. Вера дружила с 11 мальчиками, Надя — с 12-ю, Люба — с 13-ю и так далее до Тани, которая дружила со всеми мальчиками. Сколько девочек в классе?

**4.** В кинотеатре 40 рядов по 30 мест в каждом ряду. Билет в кинотеатр назовем «счастливым», если разность номеров места и ряда, отмеченных на нем, равняется 20. Чему равно количество «счастливых» билетов?

## Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

**1. В.** Обратите внимание на то, что Галя и Лена стоят рядом.

**2. Б.** Обратите внимание на то, что среди учащихся, стоящих левее Гали, стоит и Лена.

**3.** Можно определить вначале, сколько учащихся стоит правее Гали.

**4.** Обратите внимание на то, что каждое последующее число на 2 больше предыдущего.

**5. 1) 4; 5; 6; 2) 10; 15; 21; 3) №4; №5; №6.** Воспользуйтесь тем, что каждая следующая фигура образуется из предыдущей добавлением точек, количество которых на 2 превышает номер образуемой фигуры.

**6. Г.** Предположите, что мальчиков и девочек в классе поровну или введите обозначение для количества девочек, составьте и решите уравнение.

**7. 18 мужчин и 12 женщин.** Воспользуйтесь результатом решения предыдущего задания.

**8. Б.** Обратите внимание на наименьшую и наибольшую сумму номеров места и ряда.

**9. 1) Двумя; 2) одним; 3) невозможно представить.** Обратите внимание на то, что рядов в зале 40, а мест в каждом ряду 30.

### Ответы на вопросы к задачам

**Задача 1. 1.** Ни одного учащегося. **2**. Один учащийся. **3.** Не меньше 5, не больше 7 учащихся.

**Задача 2. 1.** а) 63; б) 168. **2.** 13-й. **3.** На 31.

**Задача 3. 1**. 15. **2.** Нет. **3.** 17.

**Задача 4. 1.** Нет. **2.** 11. **3.** 19.

### Ответы к заданиям «Проверь себя»

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| А | В | Б | Г |

### Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

**1. 8.** Рассмотрите различные расположения рядов, где сидят Петя и Вася, относительно экрана.

**2. 78.** Обратите внимание на то, что на каждый следующий ряд добавляется количество спичек, равное произведению номера ряда на 3.

**3. 9.** Пользуясь условием, сравните количества мальчиков и девочек.

**4. 10.** Обратите внимание на то, что в «счастливом» билете номер ряда не больше 10.

## 2. Измерение величин

Измерять приходится многие величины: стоимость, массу, время, длину, площадь и другие. Они могут принимать не только целые значения. Для их нахождения можно использовать различные приёмы: свойства пропорций, арифметические и алгебраические способы решения задач, свойства измерительных приборов, в частности, чашечных весов.

### Готовимся к решению задач

**1.** Чтобы сшить 8 блузок, требуется 12 м ткани. Сколько таких блузок можно сшить из 15 м этой ткани?

**А.** 15. **Б.** 10. **В.** 22. **Г.** 12.

**2.** В некотором хозяйстве после уборки картофеля в 16 одинаковых мешках оказалось 750 кг картофеля. Сколько примерно килограмм картофеля будет: 1) в одном мешке; 2) в 150 мешках?

**3.** В некотором хозяйстве после уборки картофеля в 15 одинаковых мешках оказалось 750 кг картофеля. Сколько таких же мешков понадобится для 1 т картофеля?

**4.** Какой сегодня день недели, если до конца недели осталось вдвое меньше того времени, которое прошло от её начала? Неделя начинается в понедельник и заканчивается в воскресенье. Сегодняшний день не учитывать.

**5.** Который теперь час, если до конца суток осталось на 8 ч меньше того времени, которое прошло от их начала?

**6.** Иногда при записи дат вначале указывают число, а затем месяц. Иногда наоборот — вначале месяц, а затем число. На листе бумаги записаны даты: 1) 9.17.1787; 2) 4.7.2015; 3) 6.6.2015. О каком числе и каком месяце свидетельствуют эти записи?

**7.** Имеется большой пакет с мукой, пустые пакеты, чашечные весы, гиря в 1 кг и пакет муки массой в 1 кг. Какую наибольшую массу муки можно взвесить двумя взвешиваниями?

**А.** 4 кг. **Б.** 3 кг. **В.** 2 кг. **Г.** 5 кг.

**8.** На чашечных весах нужно, имея мешок муки, отвесить 15 кг муки, имея одну гирю в 3 кг. За какое наименьшее количество взвешиваний это можно сделать?

## Решение задач

Следующие задачи связаны с измерением некоторых величин. Начнём с измерения длин. При измерении длин важно правильно выбрать «мерку».

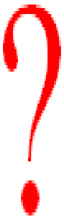
**Задача 1.** Толщина стопки из 250 листов бумаги составляет 15 мм. Какова толщина стопки из 400 листов такой же бумаги?

**Анализируем.** Можно было найти сначала толщину 1 листа, а затем толщину стопки из 250 листов. Чтобы упростить вычисления можно найти вначале толщину стопки из количества листов, являющихся общими делителями чисел 400 и 250. А затем и толщину стопки из 400 листов, используя эту толщину.

**Решаем.** Можно найти толщину стопки из 50 листов. Так как число 50 меньше числа 250 в 250:50 = 5 раз, то и толщина стопки из 50 листов меньше толщины стопки из 250 листов в 5 раз. Она равна 15 мм : 5 = 3 мм.

Число 400 больше числа 50 в 400 : 50 = 8 раз. Поэтому и толщина стопки из 400 листов больше толщины стопки из 50 листов в 8 раз. Она равна 3 мм · 8 = 24 мм.

**Ответ.** 24 мм.



**1.** *Чему равна толщина стопки из 500 листов такой же бумаги?*

**2.** *Чему приближённо с точностью до 1 мм равна толщина стопки из 320 листов такой же бумаги?*

**3.** *Сколько примерно листов бумаги в стопке такой же бумаги высотой 10 мм?*

В следующей задаче речь идёт об измерении времени. Она сводится к нахождению двух значений величины по их сумме (или разности) и отношению. Такая задача обычно называется ***задачей на части***. Как правило, в таких задачах меньшую величину принимают за 1 часть, определяют сколько частей составляют вторая величина, их сумма (разность), затем, используя заданное значение суммы (разности), находят значение 1 части.

**Задача 2.** Который теперь час, если до конца суток осталось втрое меньше того времени, которое прошло от их начала?

**Анализируем.** Нам известно, что в сутках 24 часа. Длительность суток равна сумме длительностей промежутков времени от начала суток до настоящего момента и от этого момента до конца суток. Известно, что до конца суток осталось втрое меньше того времени, которое прошло от их начала, то есть известно отношение длительностей этих промежутков времени. То есть известны сумма и отношение двух величин.

**Решаем.** Время от настоящего момента до конца суток, примем за одну часть. Тогда время от начала суток до настоящего момента, составит 3 части.

Сутки, то есть 24 часа, составят 3 + 1 = 4 части. На одну часть приходится 24:4 = 6 (часов).

До конца суток от настоящего момента осталось 6 часов, а прошло от начала суток до настоящего момента 24 – 6 = 18 (часов). Сейчас 18 часов или 6 часов вечера.

**Ответ.** 6 часов вечера.

**1.** *Чему равно в 14-00 отношение времени, оставшегося до конца суток, ко времени, прошедшего от их начала?*

**2.** *Каков будет ответ в задаче, если до конца суток осталось втрое больше того времени, которое прошло от их начала?*

**3.** *Каков будет ответ в задаче, если до конца суток осталось на 4 часа больше того времени, которое прошло от их начала?*

В следующей задаче использованы различия в записи даты событий в Европе и в Америке.

**Задача 3.** В США дату обычно записывают так: месяц, число, год. Например, дату 12-го июня 1991 г. американец записал бы так: 6. 12. 1991. В Европе даты записывают так: число, месяц, год. Ту же дату европеец записал бы так: 12. 6. 1991. Сколько в январе дней, которые нельзя определить по записи, не зная, когда она сделана, и кто её сделал: американец или европеец?

**Анализируем.** Две формы записи отличаются порядком записи числа и месяца. Год записывается одинаково в обеих формах записи. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно учесть, что в месяце не более 31 дня, а в году 12 месяцев.

**Решаем.** В американской форме записи даты первое число может быть от 1 до 12, в европейской второе число может принимать такие же значения. Первые 12 дней января американцы записывают так: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 1.6., 1.7., 1.8., 1.9., 1.10., 1.11., 1.12., а европейцы — следующим образом: 1.1, 2.1., 3.1., 4.1, 5.1, 6.1., 7.1., 8.1., 9.1., 10.1., 11.1., 12.1.

Записи даты 1-го января одинаковы в обеих формах. По этой записи дата определяется однозначно. Имеем 11 дней января, которые по записи нельзя определить.

Записи даты любого другого дня в январе в американской и в европейской формах записи различны.

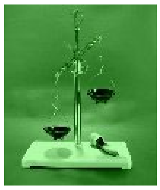
**Ответ.** 11.

**1.** *Сколько в июне дней, которые нельзя определить однозначно, не зная, кто их записал: американец или европеец?*

**2.** *Событие произошло: а) 3. 13; б) 4.8. В каком месяце это было?*

**3.** *Событие произошло: а)13. 12; б) 6.5. Какой это день недели, если месяц начался в понедельник?*

Не менее часто, чем время, нам приходится измерять массу. При использовании чашечных весов для измерения массы будем предполагать, что «гирями» могут служить предметы, массы которых известны.



**Задача 4.** На чашечных весах нужно отвесить 15 кг муки, имея одну гирю в 1 кг. За какое наименьшее количество взвешиваний это можно сделать?

**Анализируем.** Вначале мы можем отвесить только 1 кг муки. У нас появится ещё одна «гиря» — пакет с мукой массой 1 кг. Продолжая далее получать дополнительные гири, мы отвесим 15 кг муки. Останется подумать над тем, как это сделать наименьшим количеством взвешиваний.

**Решаем.** За первое взвешивание можно отвесить только 1 кг муки. Появилась ещё одна «гиря» — пакет с 1 кг муки.

За второе взвешивание можно отвесить 2 кг муки, поставив на одну чашку гирю в 1 кг и пакет с 1 кг муки. Появилась ещё одна «гиря» — пакет с 2 кг муки.

За третье взвешивание можно отвесить $1 + 1 + 2 = 4$ кг муки, за четвёртое – $1 + 1 + 2 + 4 = 8$ кг муки. Всего за 4 взвешивания будет отвешено $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ кг муки.

Так как при каждом взвешивании использовались все «гири», то это ко личество взвешиваний является минимальным.

**Ответ:** За 4 взвешивания.

**1.** *Какое наибольшее количество килограммов муки можно отвесить за: а) пятое взвешивание; б) пять взвешиваний?*

**2.** *Можно ли отвесить за 4 взвешивания, имея одну гирю в 1 кг: а) 7 кг муки; б) 13 кг муки?*

**3.** *За какое наименьшее количество взвешиваний можно отвесить 63 кг муки, имея одну гирю в 1 кг?*

В задачах на взвешивание с помощью чашечных весов можно делить массы сыпучих веществ (муки, сахара, круп) на две равные части.

### Проверь себя

**1.** Чтобы сшить 8 пар брюк, требуется 10 м ткани. Сколько пар таких же брюк можно сшить из 25 м этой ткани?

**А.** 16. **Б.** 15. **В.** 20. **Г.** 24.

**2.** В месяце 31 день. Какое сегодня число, если до конца месяца осталось на 6 дней меньше, чем прошло от его начала? Сегодняшний день не учитывать.

**А.** 12-е. **Б.** 13-е. **В.** 18-е. **Г.** 19-е.

**3.** В США дату обычно записывают так: месяц, число, год. Например, дату 12-го июня 1991 г. американец записал бы так: 6. 12. 1991. В Европе даты записывают так: число, месяц, год. Ту же дату европеец записал бы так: 12. 6. 1991. Сколько в феврале дней было в 2012 году, которые можно определить по записи, даже не зная, когда она сделана и кто её сделал: американец или европеец?

**А.** 19. **Б.** 18. **В.** 17. **Г.** Ответ, отличный от приведенных.

**4.** На чашечных весах нужно отвесить 15 кг муки, имея одну гирю в 2 кг. За какое наименьшее количество взвешиваний это можно сделать?

**А.** За 3. **Б.** За 4. **В.** За 5. **Г.** За 6.

### Реши сам

**1.** На каждые 80 км пути расходуется примерно 7 л горючего. Сколько потребуется горючего для преодоления расстояния в 500 км на дорогах того же качества?

**2.** Который теперь час, если прошедшая часть суток на 6 ч 20 мин меньше оставшейся?

**3.** В США дату обычно записывают так: месяц, число, год. Например, дату 12 июня 1991 г. американец записал бы так: 6. 12. 1991. В Европе даты записывают так: число, месяц, год, то есть ту же дату европеец записал бы так: 12. 6. 1991. Сколько в високосном году дней, которые можно определить однозначно, даже не зная, когда и каким способом записана дата?

**4.** Какие массы муки можно отвесить на чашечных весах за 3 взвешивания, имея только одну гирю в 2 кг?

### Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

**1. Б.** Можно найти предварительно, сколько м ткани нужно на 1 блузку или сколько блузок можно сшить из 3 м ткани.

**2. 1) ≈ 46 кг; 2) ≈ 7060 кг.** Обратите внимание на то, что мешки одинаковые.

**3. 20.** Можно предварительно найти вместимость одного мешка.

**4. Пятница.** Число 6 — количество дней в неделе без учёта сегодняшнего дня − нужно разделить в отношении 2:1.

**5. 16 ч или 4 часа дня.** Можно воспользоваться правилом нахождения двух чисел по их сумме и разности.

**6. 1) 17 сентября 1787 г.; 2) однозначно определить нельзя; 3) 6 июня 2015 г.** Обратите внимание на то, что в году 12 месяцев.

**7. А.** Пакет муки массой в 1 кг можно использовать в качестве гири.

**8. За 3.** Взвешенные пакеты муки можно использовать в качестве гирь.

### Ответы на вопросы к задачам

**Задача 1. 1.** 30 мм. **2**. 19 мм. **3.** 167.

**Задача 2. 1.** 5:7. **2.** 6 часов утра. **3.** 2 часа дня.

**Задача 3. 1.** 11. **2.** а) В марте; б) или в апреле, или в августе. **3.** а) Суббота; б) или пятница, или суббота.

**Задача 4. 1.** а) 16 кг; б) 31 кг. **2.** а) Да; б) да. **3.** За 6.

### Ответы к заданиям «Проверь себя»

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| В | Г | Б | В |

**Ответы и указания к заданиям «Реши сам»**

**1. ≈44 л.** Сравните вначале числа 500 и 80.

**2. 8 ч 50 мин.** В задаче известны сумма и разность двух значений величины.

**3. 234.** Однозначно можно указать даты, в которых число совпадает с номером месяца, а также даты после 12-го числа каждого месяца.

**4. От 1 кг до 8 кг, 10 кг, 14 кг.** Воспользуйтесь тем, что пакеты муки с известной массой можно использовать в качестве гирь. Пользуясь чашечными весами можно разделить любую массу муки на две равные части или отсыпать определённую массу муки.

## 3. Задачи на движение

Задачи на движение являются одним из самых распространённых типов прикладных задач, их можно решать как арифметическими способами, так и с помощью уравнений. В этих задачах различаются движения в одном направлении и в противоположных направлениях; движения, начинающиеся из одного пункта и из различных; движения, начинающиеся одновременно и не одновременно; движения, в которых условия на протяжении всего времени не меняются и меняются; движения, проходящие в неподвижной или в движущейся среде, и т. д.

**Готовимся к решению задач**

**1.** Из двух городов навстречу друг другу одновременно выехали грузовой и легковой автомобили и встретились через 2 часа. Скорость легкового автомобиля 80 км/ч, а скорость грузового — 60 км/ч. Каково расстояние между городами?

**А.** 40 км. **Б.** 280 км. **В.** 160 км. **Г.** 120 км.

**2.** Две машины выехали навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 210 км. Скорость одной из машин 60 км/ч, а другой — 80 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

**А.** Через 2,5 ч. **Б.** Через 1 ч. **В.** Через 2 ч. **Г.** Через 1,5 ч.

**3.** Два пешехода вышли из одного пункта одновременно в одном направлении. Их скорости $4\frac{км}{ч}$ и $6\ \frac{км}{ч}$ соответственно. Расстояние между ними через 4 ч после их выхода равно …

**А.** 8 км. **Б.** 40 км. **В.** 4 км. **Г.** 20 км.

**4.** Из лагеря геологоразведчиков выехал вездеход со скоростью 30 км/ч. Через 2 ч вслед за ним был послан другой вездеход. С какой скоростью он должен ехать, чтобы догнать первый через 4 ч после своего выхода?

**А.** 75 км/ч. **Б.** 45 км/ч. **В.** 40 км/ч. **Г.** 60 км/ч.

**5.** У велосипедиста лопнула шина, когда он проехал вдвое больше, чем ему осталось. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шёл?

**6.** Автомобиль проехал из пункта А в пункт Б за 6 часов, но на обратном пути из-за тумана снизил скорость вдвое. Сколько времени у него занял обратный путь?

**А.** 3 ч. **Б.** 6 ч. **В.** 12 ч. **Г.** Определить нельзя.

**7.** У мотоциклиста заглох мотор, когда он проехал втрое больше, чем ему осталось. Остальной путь он проделал на велосипеде, который был у него в коляске, со скоростью в 3 раза меньшей, чем на мотоцикле.

1) Какую часть пути мотоциклисту осталось проехать?

2) Во сколько раз увеличилось время, затраченное на путь, оставшийся после того, как заглох мотор?

**8.** Расстояние от дома до школы равно 1 км 300 м. По дороге в школу учащийся прошёл 1 км за 20 мин. На оставшийся путь у него осталось 8 мин.

1) За сколько времени учащийся проходит 100 м?

2) За сколько времени учащийся пройдёт 300 м?

3) Успеет ли учащийся в школу или опоздает, если будет идти с той же скоростью?

4) Если успеет, то за сколько минут до начала уроков он придёт в школу; если опоздает, то на сколько минут?

## Решение задач

Задачи на движение очень разнообразны. Может рассматриваться движение одного объекта (пешехода, велосипедиста, мотоциклиста, автомобилиста, поезда, самолёта, ракеты и т. д.) или двух. Два объекта могут двигаться в одном направлении, при этом один может догонять другого или удаляться от другого. Два объекта могут двигаться в противоположных направлениях, или сближаясь друг с другом, или удаляясь друг от друга. Движение может проходить безостановочно, а может и с остановками (плановыми или неплановыми). Здесь рассмотрим задачи, где рассматривается движение в противоположных направлениях и в одном направлении.

Рассмотрим подробнее движение двух объектов навстречу друг другу.

Предположим, что Пётр и Василий отправились одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 96 км, и движутся навстречу друг другу Пётр едет со скоростью 20 км/ч, а Василий идёт со скоростью 4 км/ч. Ясно, что они сближаются, то есть расстояние между ними будет уменьшаться. За 1 ч Василий пройдёт 4 км, а Пётр проедет 20 км. То есть за 1 ч они сблизятся на 20 + 4 = 24 (км). 24 км/ч — это скорость их сближения.

Изменим теперь рассматриваемую ситуацию. Пётр и Василий отправились одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 96 км, и движутся с теми же скоростями в противоположных направлениях так, что они удаляются друг от друга. В этом случае расстояние между ними каждый час будет увеличиваться на 20 + 4 = 24 (км). Следовательно, скорость их удаления друг от друга равна 24 км/ч.

Проанализировав рассмотренные примеры, можно сделать следующий вывод:

**При движении в противоположных направлениях скорость сближения (или удаления) равна сумме скоростей.**

**Задача 1.** Два самолёта вылетели одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние

между которыми 2 700 км, и над одной географической точкой они оказались через 3 часа. Скорость одного из самолётов 500 км/ч.

а) Какова скорость другого самолёта?

б) Сколько времени будет в полёте каждый из самолётов, если каждый из них приземлился в городе, из которого вылетел другой?

**Анализируем.** Известно общее расстояние, которое преодолели самолёты за 3 часа. Отсюда можно найти расстояние, которое они вместе преодолевают за 1 час, то есть скорость их сближения. Зная скорость сближения, то есть сумму скоростей движения самолётов, и скорость одного из них, можно найти скорость другого.

Для нахождения времени, за которое каждый самолёт преодолеет расстояние между городами, нужно известное расстояние разделить на их скорости.

**Решаем.** а) Скорость сближения самолётов равна 2 700 : 3 = 900 (км/ч). Тогда скорость второго самолёта равна 900 – 500 = 400 (км/ч).

б) Время полёта одного самолёта равно 2 700 км : 500 км/ч = 5,4 ч. Так как 0,4 ч = 60 мин·0,4 = 24 мин, то время его полёта равно 5 ч 24 мин.

Аналогично находим время полёта другого самолёта: 2 700 км : 400 км/ч = 6,75 ч или 6 ч 45 мин.

**Ответ.** а) 400 км/ч; б) 5 ч 24 мин; 6 ч 45 мин.

**1.** *Сколько времени летел каждый самолёт от той географической точки, где они оказались одновременно, до места назначения?*

**2.** *Какое расстояние будет между самолётами: а) через 1 ч 30 мин после вылета: б) за полчаса до момента, когда они оказались над одной географической точкой; в) через 5 ч после вылета; г) через 6 ч после вылета?*

**3.** *Каковы были бы скорости самолётов, если бы не были известны скорости ни одного из них, но один в час пролетал бы на 80 км больше другого?*

В предыдущей задаче рассматривалось движение навстречу друг другу. Теперь рассмотрим движение в одном направлении.

Предположим, что Пётр и Василий отправились одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 96 км, и движутся в одном направлении так, что Пётр догоняет Василия. Пётр едет со скоростью 20 км/ч, а Василий идёт со скоростью 4 км/ч. Ясно, что они сближаются, то есть расстояние между ними будет уменьшаться. За 1 ч Василий удалится на 4 км, а Пётр приблизится к нему на 20 км. То есть за 1 ч они сблизятся на 20 – 4 = 16 (км). 16 км/ч — это скорость их сближения.

Изменим теперь рассматриваемую ситуацию. Пётр и Василий отправились одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 96 км, и движутся с теми же скоростями в одном направлении так, что Пётр удаляется от Василия. В этом случае расстояние между ними каждый час будет увеличиваться на 20 – 4 = 16 (км). Следовательно, скорость их удаления друг от друга равна 16 км/ч.

Проанализировав рассмотренные примеры, можно сделать следующий вывод:

**При движении в одном направлении скорость сближения (или удаления) равна разности скоростей.**

**Задача 2.** Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми 9 км, одновременно в одном направлении вышел пешеход со скоростью 5 км/ч и выехал автобус. Определить скорость автобуса, если он через 12 мин догнал пешехода.

**Анализируем.** Здесь имеет место движение в одном направлении, причём автобус догоняет пешехода. Можно найти скорость сближения автобуса и пешехода. Для этого известно расстояние между ними в начале движения и время, за которое автобус догонит пешехода.

Так как скорость сближения равна разности скоростей автобуса и пешехода, то, зная эту разность и скорость пешехода, можно найти скорость автобуса.

**Решаем.** Скорость сближения равна частному от деления расстояния между автобусом и пешеходом в начале пути на время, через которое автобус догнал пешехода, то есть 9 км : 12 мин = 9 км: 0,2 ч = 45 км/ч. Так как скорость сближения равна 45 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч, то скорость автобуса равна сумме скоростей сближения и скорости пешехода, то есть 45 + 5 = 50 (км/ч).

**Ответ.** 50 км/ч

**1.** *За сколько минут может пройти расстояние между А и В пешеход?*

**2.** *За сколько секунд может проехать расстояние между А и В автобус?*

**3.** *За сколько минут догнал бы автобус пешехода, если бы он: а) ехал со скоростью 59 км/ч; б) выехал на 54 мин позже?*

Иногда движение может прерываться по некоторой причине. Такую ситуацию рассмотрим в следующей задаче.

**Задача 3.** Дорога от дома (Д) до школы (Ш) занимает у Володи 24 минуты. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома тетрадь. Если продолжит путь в школу с той же скоростью, то он придет туда за 6 минут до начала урока. А если вернется за тетрадью домой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает на 10 минут. Какую часть пути он прошел?

**Анализируем.** Если Володя вернётся домой за тетрадью, то в этот день он пройдёт расстояние, равное длине пути от дома до школы, сложенной с удвоенной длиной участка от дома до места возвращения (см. рис. 3). Естественно, что он затратит на дорогу больше времени, если будет двигаться с той же скоростью. На сколько? Это время можно найти, пользуясь условием. Учитывая, что его скорость остаётся неизменной, сравнение пройденных расстояний сводится к сравнению промежутков времени, за которые эти расстояния пройдены.

Рис. 3

**Решаем.** Обычно дорога от дома до школы занимает у Володи 24 мин. При этом у него ещё остаётся 6 мин. до начала уроков. Но в этот день он опаздывает на 10 мин. То есть в этот день он затратит на дорогу на 6 + 10 = 16 (мин) больше, чем обычно. Это время затрачено на прохождение дважды участка, который он прошёл от дома до возвращения за тетрадью. Итак, два таких участка он преодолевает за 16 мин, поэтому один — за 16 : 2 = 8 (мин).

Время 8 мин в 24 : 8 = 3 раза меньше времени, затрачиваемого Володей на дорогу от дома до школы. Так как скорость движения одна и та же, то и длина упомянутого участка в 3 раза меньше расстояния от дома до школа. Следовательно, до возвращения за тетрадью Володя прошёл третью часть пути.

**Ответ.** Третью часть.

**1.** *Сколько времени затратил бы Володя на оставшийся до школы путь, если бы не возвращался за тетрадью?*

**2.** *Сколько времени понадобилось Володе для возвращения домой за тетрадью?*

**3.** *Во сколько раз Володя должен увеличить свою скорость после обнаружения забытой тетради, чтобы придти в школу за 2 мин до начала уроков?*

## Проверь себя

**1.** Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 36 км. Скорость первого 10 км/ч, второго 8 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

**А.** Через 1 ч. **Б.** Через 2 ч. **В.** Через 3 ч. **Г.** Определить невозможно.

**2.** Велосипедист и мотоциклист выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, а велосипедиста 12 км/ч. Какова скорость их удаления друг от друга?

**А.** 26 км/ч. **Б.** 52 км/ч. **В.** 28 км/ч. **Г.** 38 км/ч.

**3.** Дорога от дома до школы занимает у Пети 30 минут. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома выключить газовую печь. Если продолжить путь в школу с той же скоростью, то он придет туда за 2 минуты до начала урока, а если вернется домой выключить печь, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает на 10 минут. Сколько времени пройдёт от момента выхода Пети из дома до его прихода в школу, если он возвратится, чтобы выключить печь?

**А.** 32 мин. **Б.** 38 мин. **В.** 40 мин. **Г.** 42 мин.

**Реши сам**

**1.** Из двух пунктов одновременно навстречу друг другу вышли два туриста. Скорость одного из них составляет 4 км/ч, а другого — 5 км/ч. Они встретились через 3 ч 12 мин. Каково расстояние между пунктами?

**2.** Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 350 км, выехал автобус со скоростью 65 км/ч, а через час вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 85 км/ч. Какое расстояние будет между автобусом и автомобилем через: а) час после выезда автомобиля; б) два часа после выезда автомобиля; в) четыре часа после выезда автомобиля?

**3.** Дорога от дома до школы занимает у Пети 32 минуты. Когда он прошёл по дороге в школу треть пути, он вспомнил, что ему для выполнения обязанностей дежурного нужно прибыть в школу за 10 минут до начала уроков. Если продолжить путь в школу с той же скоростью, то он придет туда за 2 минуты до начала урока. Петя увеличил скорость вдвое. Успеет ли он прийти в школу в назначенное время?

**Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»**

**1. Б.** Воспользуйтесь тем, что при движении навстречу друг другу скорость сближения автомобилей равна сумме скоростей их движения.

**2. Г.** Воспользуйтесь тем, что при движении навстречу друг другу скорость сближения автомобилей равна сумме скоростей их движения.

**3. А.** Воспользуйтесь тем, что при движении в одном направлении скорость сближения двух тел равна разности скоростей их движения.

**4. Б.** Найдите расстояние, которое проехал первый вездеход до выезда второго.

**5. В 4 раза.** Воспользуйтесь тем, что вдвое меньшее расстояние велосипедист преодолел за время, вдвое превышающее время, потраченное на преодоление первой части пути.

**6. В.** Воспользуйтесь тем, что при постоянном расстоянии скорость равномерного движения обратно пропорциональна затраченному времени.

**7. 1) $\frac{1}{4}$; 2) за то же время.** Воспользуйтесь связью между расстоянием, скоростью и временем при равномерном движении.

**8. 1) За 2 мин; 2) за 6 мин; 3) успеет; 4) придёт за 2 мин до начала уроков.** Воспользуйтесь соотношениями между расстоянием, скоростью и временем при равномерном движении.

### Ответы на вопросы к задачам

**Задача 1. 1.** 2 ч 24 мин и 3 ч 45 мин. **2.** а) 1350 км; б) 450 км; в) 1800 км; г) 2400 км. **3.** 490 км/ч и 410 км/ч.

**Задача 2. 1.** За 108 мин. **2.** За 648 с. **3.** а) За 10 мин; б) за 20 мин.

**Задача 3. 1.** 16 мин. **2.** 8 мин. **3**. В 1, 6 раза.

### Ответы на задания «Проверь себя»

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| Б | В | Г |

### Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

**1. 28 км 800 м.** Найдите сначала скорость сближения туристов.

**2. а) 45 км; б) 25 км; в) 15 км.** Найдите сначала скорости сближения и удаления автомобиля и автобуса.

**3. Успеет.** Подсчитайте время, необходимое Пете для преодоления оставшегося пути с удвоенной скоростью.

## 4. Подсчёт количества вариантов

Задачи на подсчет количества различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, то есть ***комбинаторные задачи***, встречаются часто в приложениях. Простейшие из них сводятся к подсчёту количества элементов в некоторой совокупности, количества способов осуществить то или иное действие. Одним из методов их решения является метод перебора, причём не хаотичного, а целенаправленного перебора, который способствует тому, чтобы не была упущена ни одна комбинация.

## Готовимся к решению задач

**1.** Имеется квадрат со стороной 5 см. Сколько нужно сделать разрезов, чтобы разрезать его весь, не получая отходов, на квадратики со стороной 1 см?

**2.** На клетчатой бумаге нарисован квадрат так, что его стороны лежат на линиях сетки (всего их — 24). Они делят квадрат на равные квадратики. Сколько всего таких квадратиков?

**А.** 25. **Б.** 36. **В.** 144. **Г.** 169.

**3.** В меню кафе 2 вида салатов, 3 вторых блюда. Сколько дней можно выбирать различные завтраки, состоящие из салата и второго блюда?

**А.** 5 дней. **Б.** 6 дней. **В.** 8 дней. **Г.** 9 дней.

**4.** В меню кафе 2 вида салатов, 3 вторых блюда и 2 вида напитков. Сколько дней можно выбирать различные завтраки, состоящие из салата, второго блюда и напитка?

**А.** 7 дней. **Б.** 8 дней. **В.** 12 дней. **Г.** 10 дней.

**5.** Подбрасываются две симметричные монеты.

1) Какое количество гербов может при этом выпасть?

2) Какое количество гербов имеет наибольшие шансы выпасть?

**6.** В шкатулке 3 шарика, пронумерованные числами 1, 2, 3. Семён, не глядя, вынимает шарик, записывает его номер, возвращает шарик в шкатулку, тщательно перемешивает шарики в шкатулке и извлекает второй шарик. Затем он подсчитывает сумму номеров извлечённых шариков.

1) Какими могут оказаться эти суммы? 2) Какая из сумм имеет: а) наибольшие шансы выпасть; б) наименьшие шансы выпасть?

## Решение задач

В следующей задаче рассматривается разрезание фигуры, состоящей из клеток, изображённой на клеточной бумаге, прямолинейными разрезами.

**Задача 1.** Шоколадку, состоящую из 12 долей (3×4), разделенных углублениями, разламывают на доли. Позволяется делать прямолинейный разлом каждого из кусков вдоль углубления. Сколько разломов нужно сделать, чтобы шоколадку разделить на

дольки?

**Анализируем.** Так как разрешается делать только прямолинейные разломы, то задача сводится к подсчёту количества прямолинейных разрезов прямоугольника размерами 3 см × 4 см на квадратики со стороной 1 см. Необходимо рассмотреть различные способы разрезания.

**Решаем.** Представим шоколадку в виде прямоугольника размерами 3 см × 4 см (см. рис. 4 а)). Его можно разрезать прямолинейным разрезом тремя различными способами: одним по горизонтали (рис. 4 б)), двумя — по вертикали (рис. 4 в) и 4 г)).

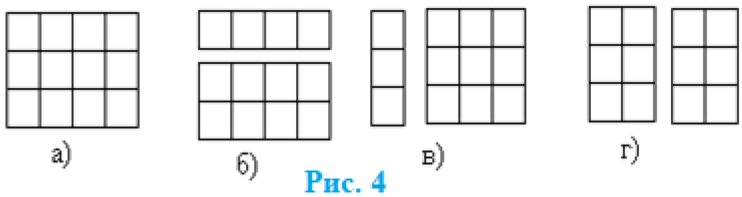


Рис. 4

Нетрудно убедиться в том, что, выполняя разрезания на единичные квадратики в каждом из трёх указанных случаев, мы сделаем 11 разрезаний. Например, в случае б) верхнюю полоску можно разрезать на единичные квадратики тремя разрезами. Нижнюю часть можно разрезать сначала по горизонтали, затем делать по вертикали. Всего будет 1 + 3 + 1 + 3 + 3 = 11 разрезов. Если же сначала нижнюю часть разрезать по вертикали, то получим или два квадрата со стороной 2 см, или два прямоугольника с размерами 1 см × 2 см и 3 см × 2 см. В первом случае всего будет 1 + 3 + 1 + 2 × 3 = 11 разрезов, а во втором — 1 + 3 + 1 + 1 + 5 = 11 разрезов.

Аналогично устанавливается, что будет 11 разрезов и в случаях в) и г).

**Ответ.** 11.

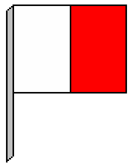
**1.** *Зависит ли количество разломов шоколадки на дольки от способа разламывания?*

**2.** *Какое количество разломов нужно сделать, чтобы разломить шоколадку 6×8 на 48 долек?*

**3.** *Какие «размеры» может иметь шоколадка, разделённая углублениями на дольки, если её 14-ю прямолинейными разломами можно разломить на дольки?*

Многие комбинаторные задачи сводятся к подсчёту количества способов выбора заданного количества элементов из данной совокупности.

**Задача 2.** На планете Тора каждая страна имеет свой флаг, составленный из двух вертикальных разноцветных полос. Каждая полоса имеет один из четырёх цветов: красный, синий, зелёный, белый. Какое наибольшее количество стран может быть на планете Тора?



**Анализируем.** Известно, что флаг любого государства на планете Тора составлен из двух разноцветных полос. Для решения задачи необходимо подсчитать, сколькими способами можно комбинировать четыре цвета. Нужно иметь в виду, что перемена местами двух полос приводит к новому флагу.

**Решаем.** Составим таблицу, в которой рассмотрим все различные комбинации двух полос. Обозначим цвета полос первыми буквами их названий: К, С, З, Б.

| Номер | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Левая | К | К | К | С | С | С | З | З | З | Б | Б | Б |
| Правая | С | З | Б | К | З | Б | К | С | Б | К | С | З |

Следовательно, наибольшее количество государств на планете Тора равно 12.

**Ответ.** 12.

**1.** *Какой ответ был бы в задаче, если бы каждая страна могла иметь флаг, как состоящий из двух вертикальных разноцветных полос, так и одноцветный?*

**2.** *Какой ответ был бы в задаче, если бы каждая полоса имела один из трёх цветов?*

**3.** *Какой ответ был бы в задаче, если бы флаги, отличающиеся только порядком полос, не считались различными?*

Уметь подсчитывать количество вариантов полезно при проведении различных игр. Это может помочь иногда предсказать исход игры.

**Задача 3.** Два друга одновременно «выбрасывают» хотя бы по одному пальцу одной руки и подсчитывают сумму количеств «выброшенных» пальцев.

1) Какими могут оказаться эти суммы?

2) Какая из сумм имеет: а) наибольшие шансы выпасть; б) наименьшие шансы выпасть?

**Анализируем.** Каждый из друзей может выбросить от 1 до 5 пальцев. Это даёт возможность установить, чему может равняться сумма количеств выброшенных пальцев. Чтобы сравнить шансы их появления, мы подсчитаем, сколькими способами может появиться каждая сумма. И та сумма будет иметь большие шансы, которая выпадает в большем числе случаев.

**Решаем.** 1) Возможные суммы: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Они могут появиться следующим образом:

$$2 = 1 + 1$$
$$3 = 2 + 1 = 1 + 2$$
$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3$$
$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 3 = 1 + 4$$
$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 = 2 + 4 = 1 + 5$$
$$7 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4 = 2 + 5$$
$$8 = 5 + 3 = 4 + 4 = 3 + 5$$
$$9 = 5 + 4 = 4 + 5$$
$$10 = 5 + 5$$

2) Составим таблицу, в которой для каждой возможной суммы укажем количество исходов, при которых она появляется.

| Сумма | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество исходов | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Наибольшие шансы имеет сумма 6, она выпадает при пяти исходах. Наименьшие шансы имеют суммы 2 и 10 (каждая при одном исходе).

**Ответ.** 1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; 2) а) 6; б) 2 и 10.

**1.** *Если бы при чётных суммах победу присуждали бы одному игроку, а при нечётных — другому, то, кто бы имел большие шансы на победу?*

**2.** *Если бы за суммы, меньшие 6, победу присуждали одному игроку, а за суммы, большие 6, — другому, то, кто бы имел большие шансы на победу?*

**3.** *Если бы за суммы, меньшие 6, победу присуждали одному игроку, а за суммы, большие 6, — другому, то при каждом ли выбрасывании пальцев определялся бы победитель?*

## Проверь себя

**1.** Сколько понадобится прямолинейных разрезов, чтобы квадрат со стороной 1 м разрезать на квадраты со стороной 1 дм, не накладывая отрезанные куски друг на друга?

**А.** 9. **Б.** 10. **В.** 99. **Г.** 100.

**2.** Маугли попросил четырёх мартышек принести ему орехи. Мартышки набрали орехов и понесли их Маугли. По пути они поссорились, и каждая мартышка бросила в каждую по ореху. В результате они принесли орехов вдвое меньше, чем собрали. Сколько орехов получил Маугли?

**А.** 12 **Б.** 8 **В.** 6 **Г.** 24

**3.** В мешочке четыре шарика с номерами 1, 2, 3, 4. Наугад вынимают один шарик, фиксируют его номер, возвращают в мешочек, шарики тщательно перемешивают и извлекают второй шарик. Потом подсчитывают сумму номеров вынутых шариков. Какая сумма имеет наибольшие шансы появиться?

**А.** 4. **Б.** 5. **В.** 6. **Г.** 7.

## Реши сам

**1.** Лист клетчатой бумаги имеет форму прямоугольника, длина стороны которого 48 см, а ширина 40 см, клетки размером 1 см × 1 см. Этот лист надо разрезать на равные квадраты (без отходов). Чему равна длина стороны наибольших квадратов, которые можно получить?

**2.** Алла, Борис, Вера и Гриша — лучшие лыжники школы. На районные соревнования нужно составить из них команду из трех человек для гонки на 5 км. Сколькими способами можно это сделать?

**3.** Двое детей *А* и *Б* играют в такую игру. Оба одновременно наугад поднимают один или два пальца. Если общее количество поднятых пальцев окажется чётным, то *А* получает количество очков, равное общему количеству поднятых пальцев, а если оно нечётное, то *Б* получает это количество очков. Кому из игроков эти правила игры дают преимущество?

### Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

**1. 24.** Воспользуйтесь тем, что при любом способе прямолинейного разрезания количество разрезаний одно и то же. Данный квадрат 4-мя разрезаниями делится на 4 прямоугольника размерами 5×1, каждый из которых 4-мя разрезами можно разделить на квадраты со стороной 1 см.

**2. А.** Воспользуйтесь указанием к заданию 1.

**3. Б.** Воспользуйтесь тем, что для каждого из двух видов салатов можно выбрать 3 вторых блюда.

**4. В.** Подсчитайте вначале количество различных наборов из салатов и вторых блюд.

**5. 1) 0, 1 или 2; 2) 1.** Переберите всевозможные исходы подбрасываний.

**6. 1) 2, 3, 4, 5, 6; 2) а) 4; б) 2 и 6.** Переберите всевозможные исходы извлечения шариков.

### Ответы на вопросы к задачам

**Задача 1. 1.** Нет. **2.** 47. **3.** 5×3.

**Задача 2. 1.** 16. **2.** 6. **3.** 6.

**Задача 3. 1.** Тот, кому победу присуждают за чётную сумму. **2.** Оба имели бы равные шансы. **3.** Нет.

### Ответы к заданиям «Проверь себя»

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| В | А | Б |

### Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

**1. 8 см.** Рассмотрите делители длин сторон данного листа бумаги.

**2. Четырьмя.** Обратите внимание на то, что речь идёт об участии в гонке, а не в участии в эстафете, где существенен порядок участия лыжника в соревновании. Все способы выбора можно получить исключением одного из четырёх перечисленных лыжников.

**3. Для *Б*.** Укажите все возможные суммы количеств поднятых пальцев и количества исходов, при которых могут появиться эти суммы.

## 5. Учимся рассуждать

Уметь рассуждать необходимо и в повседневной жизни, и при обучении. А чтобы научиться рассуждать, нужно владеть правилами проведения рассуждений.

Иногда считают, что главной целью обучения математике является обучение умениям проводить рассуждения. Выработке навыков проводить обоснованные рассуждения способствует решение математических задач. Ведь в математике каждое утверждение необходимо обосновать. Поэтому при изучении математики учащиеся постепенно приходят к выводу, что свои высказывания нужно обосновывать, чем-то подтверждать. А это будет способствовать тому, что учащиеся постепенно будут учиться вести аргументированную полемику.

Есть разные методы обоснования в обыденной жизни: это и рассуждения от противного, и приведение достаточного количества примеров, и привлечение аналогии и т. д.

### Готовимся к решению задач

**1.** Вини-Пух такого же роста, как Крокодил Гена, а Крокодил Гена выше Чебурашки. Кто ниже всех?

**2.** Нина, Валя, Инна, Марина и Костя собирали фрукты. Трое ребят собирали яблоки, двое — груши. Костя и Марина собирали одинаковые фрукты, Марина и Валя — разные. Что собирал каждый из ребят, если Валя и Нина собирали разные фрукты?

**3.** Митя, Серёжа, Толя, Юра и Костя пришли в музей до открытия и встали в очередь. Митя пришёл позже Серёжи, Толя — раньше Кости, Митя — раньше Толи, Юра — позже Кости. В каком порядке ребята стояли в очереди?

**4.** В очереди стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Юра стоит перед Мишей, но после Олега. Володя и Олег не стоят рядом, Саша не стоит рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто стоит посередине?

**А.** Юра. **Б.** Миша. **В.** Володя. **Г.** Саша.

**5.** Имеются 6 монет. Возможно, что одна из них фальшивая (отличается от других по весу). Имеются чашечные весы без гирь.

1) Можно ли одним взвешиванием выяснить, есть ли среди этих монет фальшивая?

2) Можно ли среди двух монет одним взвешиванием обнаружить фальшивую, если известно, что она тяжелее остальных?

3) Какое наименьшее количество взвешиваний понадобится, чтобы обнаружить фальшивую монету среди трёх монет, если известно, что она тяжелее остальных?

**6.** Имеются 3 группы монет по 3 монеты в каждой группе. Одна из этих монет фальшивая (легче других). Имеются чашечные весы без гирь.

1) Какое наименьшее количество взвешиваний понадобится, чтобы узнать, в какой группе находится фальшивая монета?

2) Какое наименьшее количество взвешиваний понадобится, чтобы обнаружить фальшивую монету среди девяти монет?

**7.** Пять учащихся из двух различных классов принесли в библиотеку 6 книг. Учащиеся одного класса принесли по различному количеству книг, а из разных — по одинаковому количеству. Каждый принёс хотя бы одну книгу.

1) Мог ли кто-то из учащихся принести 3 книги?

2) Могли ли из одного класса 3 учащихся принести книги, а из другого — два?

3) Сколько учащихся принесло ровно по две книги?

4) Сколько учащихся принесло ровно по одной книги?

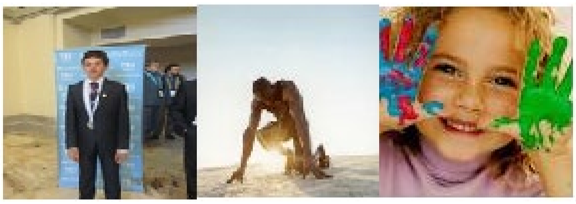
**8.** Девять спортсменов из трёх различных клубов в матче сборной своей страны по гандболу забили в ворота противника 12 голов. Спортсмены из одного клуба забили по одинаковому количеству голов, а из разных — по разному количеству. Каждый из этих спортсменов забил хотя бы один гол.

1) Представьте число 12 в виде суммы 9 натуральных слагаемых, среди которых имеются ровно три различных числа.
2) Сколько спортсменов забили ровно по одному голу?
3) Сколько спортсменов забили по: а) два гола; б) три гола?
4) Какое наибольшее количество голов было забито кем-то из спортсменов?
5) Какое наибольшее количество спортсменов было из одного клуба?

**Решение задач**

Распространёнными являются задачи, где по информации, приведенной о нескольких лицах, нужно установить, к кому из этих лиц она относится.

**Задача 1.** Олег, Игорь и Юля учатся в одном классе. Среди них троих есть лучший математик, лучший бегун и лучший художник класса. Известно, что:



лучший художник не нарисовал свой портрет, но нарисовал портрет Игоря; Юля никогда не уступала мальчикам в беге. Кто в классе лучший математик, лучший бегун и лучший художник?

**Анализируем.** Очевидно, что один учащийся не может быть лучшим в нескольких сферах, так как речь идёт о трёх учащихся и о трёх видах деятельности. В противном случае ответ на вопрос задания не однозначный.

Пользуясь приведенной информацией, нужно или подтверждать предположения о том, кто есть кто, или опровергать, отбрасывать их.

**Решаем.** Так как Юля никогда не уступала мальчикам в беге, то никто, кроме неё, не может быть лучшим бегуном.

Игорь не может быть лучшим художником, так как его портрет нарисован, а лучший художник не нарисовал свой портрет. Итак, Игорь — лучший математик, Олег — лучший художник.

**Ответ.** Игорь, Юля, Олег.

**1.** *Могут ли среди указанных мальчиков быть равные Юле в беге?*

**2.** *Может ли Юля быть лучшим математиком в классе?*

**3.** *Как пришли к выводу, что Игорь — лучший математик в классе?*

Среди задач, решаемых с помощью логических рассуждений, выделяются задачи на взвешивание. С помощью весов без гирь предлагается за определённое количество взвешиваний обнаружить один из предметов, отличающихся от остальных только массой. Простейшие из таких задач те, в которых известно, что этот предмет тяжелее или легче остальных, а все остальные одинаковой массы.

**Задача 2.** Имеется 9 одинаковых по виду шариков. Из них 8 имеют одинаковую массу, а один меньшую массу (внутри него небольшая полость). Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь найти этот шарик?

**Анализируем.** За одно взвешивание нужно выделить меньшую совокупность шариков, содержащую искомый шарик. Проще всего разделить данную совокупность на две равные части, если в данной совокупности чётное количество шариков. Если в ней нечётное количество, то один шарик можно отложить, а оставшиеся разделить на две равные части. Одним взвешиванием можно определить, где находится искомый шарик.

Ещё более эффективным является деление совокупности на три равные части или на две равные и одну, отличающихся от них на один шарик. В этом случае выбранная с помощью одного взвешивания часть содержит меньше шариков, чем при делении на две части. А значит количество взвешиваний для завершения нахождения искомого шарика только уменьшится. При разделении на большее количество частей одним взвешиванием нельзя определить группу, где находится искомый шарик.

**Решаем.** Разложим шарики на 3 кучки по 3 шарика в каждой кучке. На каждую чашку весов положим по одной кучке.

Если весы в равновесии, то более лёгкий шарик находится в третьей тройке. Если же одна из чашек пошла вверх, то более лёгкий шарик на этой чашке. Итак, мы определили тройку, в которой более лёгкий шарик.

Два шарика из этой тройки положим на чашки весов. Если весы в равновесии, то оставшийся шарик более лёгкий. Если же одна из чашек пошла вверх, то на ней более лёгкий шарик.

**1.** *Сколько взвешиваний понадобится, чтобы из 8 одинаковых по виду шариков выявить наверняка более лёгкий?*

**2.** *Среди какого наибольшего количества одинаковых шариков, среди которых один легче остальных, имеющих одинаковую массу, можно двумя взвешиваниями обнаружить более лёгкий шарик?*

**3.** *Хватит ли двух взвешиваний, чтобы с помощью чашечных весов без гирь обнаружить из данной совокупности шарик, отличающийся массой от остальных?*

Умения проводить рассуждения существенно используются в задачах на разбиение некоторой совокупности предметов на группы, удовлетворяющие определённым условиям.

**Задача 3.** Двадцать учащихся из пяти различных классов собрали гербарий из 30 растений. Учащиеся одного класса принесли по одинаковому количеству растений, а из разных — по разному количеству. Сколько учащихся принесли по три растения, если каждый принёс хотя бы одно растение?

***Анализируем.*** Для решения задачи число 30 нужно представить в виде суммы 20 натуральных слагаемых, среди которых есть некоторое количество единиц (по одинаковому количеству растений принесли учащиеся одного класса), а остальные слагаемые отличны от 1 и различны между собой. Методом проб можно найти количество единиц, содержащихся в указанном представлении. Далее останется найти количество остальных слагаемых, удовлетворяющих условию задачи.

**Решаем.** Если взять по одному учащемуся из каждого класса (их будет 5), то всего они принесли, по крайней мере, 15 растений ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$). Следовательно, оставшиеся не более $30 - 15 = 15$ растений принесли остальные $20 - 5 = 15$ учащихся. Так как каждый учащийся принёс хотя бы одно растение, то осталось ровно 15 растений и каждый из 15 учеников принёс ровно по одному растению. При этом все эти учащиеся учатся в одном классе с тем из 5 указанных выше учащихся, кто принёс 1 растение. Имеем следующее представление числа 30 в виде суммы натуральных слагаемых: $30 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{16\ \text{слагаемых}} + 2 + 3 + 4 + 5$.

Очевидно, что других представлений числа 30 в виде суммы натуральных слагаемых, удовлетворяющих условию задачи, нет. Если более 16 учащихся из одного класса принесли по одному растению, то 20 учащихся будут учиться менее чем в 5 классах. Если менее 15 учащихся из одного класса принесли по одному растению, то более 5 учащихся из остальных 4-х классов принесут более 15 растений, причём никто из них не может принести 1 растение и по крайней мере двое из них должны принести по одинаковому количеству растений. Например, число 16 можно записать так: 2 + 2 + 3 + 4 + 5 — одного слагаемого не хватает, и т. д.

Таким образом, три растения принёс один учащийся.

**Ответ.** 1.

**1.** *Если бы только 14* учащихся *из одного класса принесли по одному растению, то сколько из оставшихся 6* учащихся *должны были бы принести по одинаковому количеству растений?*

**2.** *Могли ли 17* учащихся *из одного класса принести по одному растению?*

**3.** *Сколько* учащихся *принесли по два растения?*

## Проверь себя

**1.** Из трёх учащихся (Антона, Богдана и Виталия) двое — отличники. Определите отличников, если в паре Антон и Богдан — один отличник, в паре Богдан и Виталий — тоже один отличник.

**А.** Антон и Виталий. **Б.** Антон и Богдан.

**В.** Богдан и Виталий. **Г.** Определить нельзя.

**2.** Из 8 одинаковых колец одно несколько легче остальных. Какое наименьшее количество взвешиваний понадобится для его выявления на чашечных весах без гирь?

**А.** 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** 4.

**3.** Четырнадцать учащихся из четырёх различных классов собрали гербарий из 20 растений. Учащиеся одного класса принесли по одинаковому количеству растений, а из разных — по разному количеству. Сколько учащихся принесло по два растения?

**А.** 3. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** Определить невозможно.

### Реши сам

**1.** На общешкольную олимпиаду по математике из одного класса направили Алёшу, Борю и Вову. Один из них лучше всех в классе решал задачи по алгебре, другой — по геометрии, а третий — нестандартные задачи. Вова никому не уступал в решении нестандартных задач, лучший геометр опоздал на олимпиаду, а Алёша пришёл вовремя. Кто в классе лучше всех решает задачи по алгебре, кто по геометрии, а кто нестандартные?

**2.** Из 11 внешне совершенно одинаковых монет 10 — золотых, одна монета — не золотая, несколько легче остальных. Можно ли при помощи не более чем двух взвешиваний на чашечных весах, не пользуясь гирями, найти не золотую монету?

**3.** Двадцать учащихся из пяти различных классов собрали гербарий из 30 растений. Учащиеся одного класса принесли по одинаковому количеству растений, а из разных — по разному количеству. Сколько учащихся в каждом из пяти классов занимались сбором гербария?

### Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. **Чебурашка.** Сравните его рост с ростами остальных «героев» задания.
2. **Костя, Марина и Нина собирали яблоки, Валя и Инна — груши.** Обратите внимание на то, что Нина и Марина собирали одинаковые фрукты.

**3. Серёжа, Митя, Толя, Костя, Юра.** Установите, в каком порядке пришли Митя, Толя и Костя.

**4. В.** Рассмотрите различные возможные расположения Володи.

**5. 1) Да; 2) да; 3) Одно.** Располагайте на чашках весов по одинаковому количеству монет.

**6. 1) Одно.** Можно на чашки весов положить по одной группе монет. **2) Два.** Разделите 9 монет на 3 группы по 3 монеты в каждой.

**7. 1) Нет; 2) нет; 3) 1; 4) 4.** Можно воспользоваться методом от противного.

**8. 1) $12 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3$; 2) 7; 3) а) 1; б) 1; 4) 3; 5) 7.** Представьте число 12 в виде суммы 9 слагаемых, среди которых имеются ровно три различных числа.

### Ответы на вопросы к задачам

**Задача 1. 1.** Нет. **2.** Нет. **3.** Методом исключения: так как Юля — лучший бегун, Олег — лучший художник, а один ученик не может быть лучшим в нескольких сферах, то Игорю остаётся быть лучшим математиком.

**Задача 2. 1.** Не менее 2. **2.** 81. **3.** Нет.

**Задача 3. 1.** Двое. **2.** Нет. **3.** 1.

### Ответы к заданиям «Проверь себя»

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| А | Б | В |

### Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

**1. Алёша лучше всех решал задачи по алгебре, Боря — по геометрии, Вова — нестандартные задачи.** Воспользуйтесь методом исключения.

**2. Нет.** Двумя взвешиваниями нельзя определить группу, для которой однозначно определяется не золотая монета.

**3. В одном 16, в остальных по одному.** Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Учимся рассуждать».

## Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Задания для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

**Критерии оценок**

| **Оценка** | | **Основное задание** | **Дополнительное задание** |
|---|---|---|---|
| «зачтено» | Решено не менее | 5 задач | – |
| «хорошо» | Решено не менее | 8 задач | 6 задач |
| «отлично» | Решено не менее | 11 задач | 10 задач |

### Контрольный тест

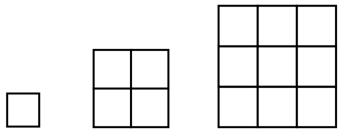
**Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.**

**Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д».**

**1.** На уроке физкультуры построены по росту 16 учащихся. Впереди Славы пять учащихся, а сзади Олега 7 учащихся. Сколько в строю учащихся, стоящих перед Олегом, но сзади Славы?

**А.** Один учащийся. **Б.** Два учащихся. **В.** Три учащихся. **Г.** Четыре учащихся.

**2.** Мальчик ежедневно достраивает квадрат, полученный накануне, до большего так, как показано на рисунке. На сколько больше маленьких квадратиков в квадрате, построенном на 10-й день, чем в квадрате, построенном на 9-й день?



1-й день 2-й день

**А.** На 15. **Б.** На 18. **В.** На 19. **Г.** На 21.

**3.** На дискотеке отдыхали 24 учащихся из одного класса. С Анной танцевало меньше всего ребят, с каждой следующей девушкой — на одного юношу больше, чем с предыдущей. С Любой танцевали все ребята, а их было 15. Сколько ребят танцевали с Анной?

**А.** 6. **Б.** 7. **В.** 8. **Г.** 9.

**4.** В кинотеатре 40 рядов по 30 мест в каждом ряду. Билет в кинотеатр назовем «счастливым», если разность чисел, выражающих номера ряда и места, отмеченных на нем, равняется 20. Чему равно количество «счастливых» билетов?

**А.** 40. **Б.** 30. **В.** 20. **Г.** 10.

**5.** На 400 км пути автомобилю требуется в среднем 24 л бензина. Сколько литров бензина необходимо тому же автомобилю на 260 км пути по дороге, имеющей такое же качество?

**А.** 12,8 л. **Б.** 15,6 л. **В.** 16,4 л. **Г.** 16,9 л.

**6.** Который теперь час, если до конца суток осталось в 5 раз больше того времени, которое прошло от их начала?

**А.** 4 ч утра. **Б.** 6 ч утра. **В.** 18 ч. **Г.** 20 ч.

**7.** В США дату обычно записывают так: месяц, число, год. Например, дату 12-го июня 1991 г. американец записал бы так: 6. 12. 1991. В Европе даты записывают так: число, месяц, год. Ту же дату европеец записал бы так: 12. 6. 1991. Сколько в январе дней, которые можно определить по записи, даже не зная, когда она сделана, и кто её сделал: американец или европеец?

**А.** 19 дней. **Б.** 20 дней. **В.** 21 день. **Г.** 22 дня.

**8.** Какую наибольшую массу муки можно отвесить на чашечных весах за 4 взвешивания, имея одну гирю в 4 кг?

**А.** 16 кг. **Б.** 32 кг. **В.** 60 кг. **Г.** 64 кг.

**9.** Два поезда вышли из двух городов, расстояние между которыми 900 км, одновременно навстречу друг другу со скоростями 60 км/ч и 80 км/ч. На каком расстоянии друг от друга они были за один час до встречи?

**А.** 20 км. **Б.** 70 км. **В.** 130 км. **Г.** 140 км.

**10.** Велосипедист и мотоциклист выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, а велосипедиста 12 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет 56 км?

**А.** Через 1 ч. **Б.** Через 2 ч. **В.** Через 3 ч. **Г.** Определить невозможно.

**11.** Расстояние от дома до школы равно 1 км 500 м. По пути в школу учащийся прошел 500 м за 10 мин. На оставшийся путь у него осталось 18 мин. Определите, успеет ли учащийся в школу или опоздает, если будет идти с той же скоростью? Если успеет, то за сколько минут до начала уроков он придет в школу; если опоздает, то на сколько минут?

**А.** Опоздает на 2 мин. **Б.** Придёт за 2 мин. до начала.

**В.** Опоздает на 1 мин. **Г.** Придёт за 1 мин. до начала.

**12.** Какому из приведенных чисел может равняться количество разрезаний квадрата со стороной 1 м на квадратики со стороной 1 см?

**А.** 81. **Б.** 99. **В.** 9999. **Г.** 9801.

**13.** Ребенку дали карточки с буквами М, А, М, А. Сколько различных «слов» (последовательностей букв) он может составить, используя в каждом слове все четыре карточки?

**А.** 4. **Б.** 6. **В.** 12. **Г.** 24.

**14.** В мешочке четыре шарика с номерами 1, 2, 3, 4. Наугад вынимают один шарик, фиксируют его номер, возвращают в мешочек, шарики тщательно перемешивают и извлекают второй шарик. Потом подсчитывают сумму номеров вынутых шариков. Какие суммы имеют наибольшие шансы появиться?

**А.** 5. **Б.** 4. **В.** 6. **Г.** 4 и 6.

**15.** В летний лагерь приехали три товарища: Миша, Вова и Петя. Их фамилии: Иванов, Семёнов, Герасимов. Отец Вовы инженер. Вова учится в 6-м классе. Миша не Герасимов. Герасимов учится в 5-м классе. Отец Иванова слесарь. Как фамилия Миши?

**А.** Герасимов. **Б.** Семёнов. **В.** Иванов. **Г.** Определить нельзя.

**16.** Из 4 одинаковых колец одно несколько отличается по массе от остальных. Какое наименьшее число взвешиваний понадобится для его выявления на чашечных весах без гирь?

**А.** 4. **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** 1.

**17.** Двадцать семь учащихся из шести различных классов принесли в библиотеку 42 книги. Учащиеся одного класса принесли по одинаковому количеству книг, а из разных — по разному количеству. Сколько учащихся принесло ровно по одной книге?

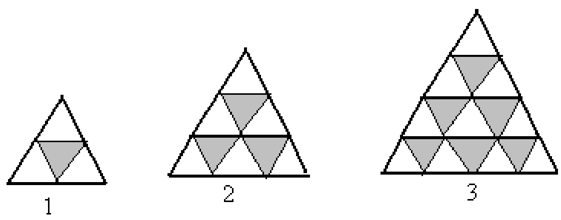
**А.** 19. **Б.** 20. **В.** 21. **Г.** 22.

## Основное задание

**Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.**

**1.** В поезде 15 вагонов. Перед вагоном, в котором едет Аня, 6 вагонов. Между вагонами, в котором едут Аня и Галя, 3 вагона. Сколько вагонов позади вагона, в котором едет Галя?

**2.** На рисунке изображены три первые фигуры последовательности фигур, образо-



ванных из равных треугольников так, как 2-я фигура образована из 1-й, 3-я — из 2-й. На сколько меньше закрашенных треугольников, чем незакрашенных, в 99-й фигуре этой последовательности?

**3.** На шоссе колонна из 30 грузовых и легковых автомобилей. Впереди грузовой автомашины, шедшей впереди всех грузовиков, — 7 легковых автомобилей, впереди второго грузовика — 8 легковых автомобилей, впереди третьего грузовика — 9 легковых автомобилей, и т. д., впереди последнего грузовика — все легковые автомобили. Сколько грузовых автомобилей в колонне?

**4.** В кинотеатре 30 рядов по 20 мест в каждом ряду. Билет в кинотеатр назовем «счастливым», если сумма чисел, указывающих ряд и место зрителя в зале, равняется 40. Чему равно количество «счастливых» билетов?

**5.** Семья потребляет 96 $м^3$ воды в течение года. Сколько примерно воды она потребляет в течение недели, если считать, что еженедельно потребляется примерно одинаковое количество воды?

**6.** Который теперь час, если до конца суток осталось на 4 ч меньше того времени, которое прошло от их начала?

**7.** В США дату обычно записывают так: месяц, число, год. Например, дату 12 июня 1991 г. американец записал бы так: 6. 12. 1991. В Европе даты записывают так: число, месяц, год. Ту же дату европеец записал бы так: 12. 6. 1991. Сколько в году дней, которые нельзя определить по записи, не зная, когда она сделана, и кто её сделал: американец или европеец?

**8.** На чашечных весах нужно отвесить 15 кг муки, имея только одну гирю в 4 кг. Каким наименьшим количеством взвешиваний это можно сделать?

**9.** Из пунктов А и В, расстояние между которыми 6 км, одновременно навстречу друг другу отправились пешеход и велосипедист. Расстояние между А и В они преодолели соответственно за 1 час и 30 мин. Через сколько времени после начала движения они встретились?

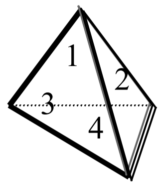
**10.** Из пункта А в пункт В выехал автобус со скоростью 60 км/ч, а через час вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. Через какое время после своего выезда автомобиль догонит автобус?

**11.** Дорога от дома до школы занимает у Володи 24 минуты. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома учебник. Если продолжить путь в школу с той же скоростью, то он придет туда за 2 минуты до начала урока, а если вернется за учебником домой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает на 10 минут. Какую часть пути ему осталось пройти?

**12.** Лист бумаги имеет форму прямоугольника, длина стороны которого 50 см, а ширина 40 см. Сколько прямолинейных разрезов придётся сделать, чтобы разрезать этот лист бумаги на квадраты размером 1 дм × 1 дм?

**13.** Ребенку дали карточки с буквами М, А, М, А, М. Сколько различных «слов» (последовательностей букв) он может составить, используя в каждом слове все пять карточек?

**14.** Какая сумма очков имеет наибольшие шансы появиться при подбрасывании двух правильных тетраэдров, на гранях которого проставлены следующие количества очков: 1, 2, 3, 4?




**15.** Галя, Света и Валя живут в одном доме. Одна из них занимается пением, другая играет на пианино, а третья играет на скрипке. Известно, что:

а) Света живёт на одном этаже с певицей;

б) пианистка и Валя учатся в разных классах;

в) Галя и певица родились в один день.

Чем занимается каждая из них?

**16.** Среди 237 одинаковых колец одно несколько легче остальных. Можно ли найти его не более чем пятью взвешиваниями на чашечных весах без гирь?

**17.** 350 учащихся из 25 различных классов собрали гербарий из 650 растений. Учащиеся одного класса принесли по одинаковому количеству растений, а из разных — по разному. Сколько учащихся принесло по два растения?

## Указания к задачам основного задания

**1.** Схематично изобразите расположение вагонов, указав в схеме место локомотива. Рассмотрите различные случаи расположения вагонов, в которых едут девочки, относительно локомотива.

**2.** Воспользуйтесь тем, что каждая следующая фигура последовательности получается из предыдущей добавлением одной полосы, в которой на 1 незакрашенный треугольник больше, чем закрашенных.

**3.** Выясните, каких автомашин больше в колонне: грузовых или легковых, и на сколько.

**4.** Найдите все разбиения числа 40 на сумму двух слагаемых, одно из которых не больше 30, а другое — не больше 20.

**5.** Найдите сначала, сколько недель в году.

**6.** Воспользуйтесь тем, что в задаче известны сумма и разность двух значений величины.

**7.** Однозначно нельзя подсчитать даты до 12-го числа каждого месяца, в которых число не совпадает с номером месяца. Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Измерение величин».

**8.** Воспользуйтесь тем, что за каждое взвешивание можно увеличивать вдвое массы гирь, используя в качестве гирь взвешенные пакеты с мукой.

**9.** Зная время и расстояние, пройденное ими, можно найти скорости пешехода и велосипедиста. А затем, найдя скорость сближения и воспользовавшись тем, что до встречи они преодолеют 6 км, найти искомое время.

**10.** Найдите сначала скорость сближения автомобиля и автобуса, используя то, что они движутся в одном направлении.

**11.** Найдите вначале время, которое мальчик потратил на возвращение домой за ручкой. Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Задачи на движение».

**12.** Выразите длину и ширину прямоугольного листа бумаги в дециметрах и воспользуйтесь решением задачи 1 из блока «Подсчёт количества вариантов».

**13.** Составьте всевозможные «слова» из заданных букв, обращая внимание на то, что от перестановки одинаковых букв слово не изменяется.

**14.** Используя тот факт, что при подбрасывании каждого правильного тетраэдра может выпасть 1, 2, 3, 4 очков, составьте всевозможные пары этих чисел, затем подсчитайте суммы чисел во всех этих парах и выясните, какая сумма встречается чаще всего.

**15.** Обратите внимание на то, что из первого условия вытекает, что Света — не певица, а из второго, что Валя — не пианистка. Сделайте вывод из третьего условия.

**16.** Разбейте совокупность колец на 3 группы, содержащих по 79 колец. Воспользуйтесь решением задачи 2 из блока «Учимся рассуждать».

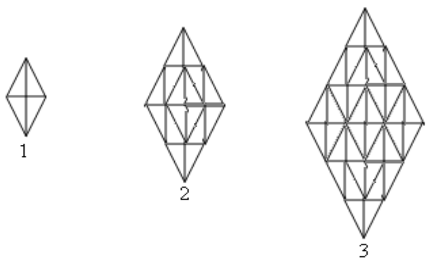
**17.** Подсчитайте сумму первых 25 натуральных чисел.

## Дополнительное задание

**Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.**

**1.** В поезде не более 10 вагонов. Перед вагоном, в котором едет Валя, 4 вагона, а позади вагона, в котором находится Полина, 3 вагона. Между вагонами Полины и Вали один вагон. Сколько вагонов может быть в поезде?

**2.** На рисунке изображены первые три фигуры последовательности, составленные из равных прямоугольных треугольников. Следующие фигуры образуются так, как третья фигура из второй, вторая из первой. Сколько прямоугольных треугольников понадобится для составления 10-й фигуры?




**3.** На шоссе колонна из 28 грузовых и легковых автомобилей. Впереди грузовой автомашины, шедшей впереди всех грузовиков, — 3 легковых автомобиля, впереди второго грузовика — 5 легковых автомобилей, впереди третьего грузовика — 7 легковых автомобилей, и т. д., впереди последнего грузовика — все легковые автомобили. Сколько грузовых автомобилей в колонне?

**4.** В кинотеатре 30 рядов по 20 мест в каждом ряду. Билет в кинотеатр назовем «счастливым», если сумма чисел, выражающих номера ряда и места, отмеченных на нем, больше 45. Чему равно количество «счастливых» билетов?

**5.** Можете ли Вы с помощью измерений обычной линейкой обнаружить, что из стопки бумаги высотой 5 см, содержащей 500 листов вынули: а) ровно один лист; б) ровно десять листов; в) четверть стопки с точностью до 10 листов?

**6.** Какое сегодня число, если прошедшая часть года (сегодняшний день не учитывать) больше оставшейся на 48 дней?

**7.** Первое января 2011 года можно записать с помощью только одной цифры 1 так: 1.1.11. Сколько раз в XXI столетии число, месяц и две последних цифры года можно записать с помощью только одной любой цифры?

**8.** Сколько различных масс муки можно отвесить на чашечных весах за 4 взвешивания, имея только одну гирю в 4 кг?

**9.** Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, одновременно выезжают два велосипедиста. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через час после выезда. Если же они поедут в одном направлении, то задний догонит переднего через 7 ч после выезда. С какой скоростью едет каждый?

**10.** Двое бегают по круговой дорожке в противоположных направлениях. Один пробегает дорожку за 2 мин, другой — за 3 мин. Сколько секунд будет проходить между каждыми двумя их последовательными встречами?

**11.** Электричка отправилась со станции с опозданием на 11 минут и ехала со скоростью 10 км/ч до следующей станции, которая находится в полутора километрах от первой. На следующей станции она простояла 15 мин. Пассажир прибыл на первую станцию через 12 минут после отправления электрички по расписанию. С какой скоростью он должен идти, чтобы догнать электричку?

**12.** Плитка шоколада состоит из 5×9 квадратных долек. Вы предлагаете другу разломить её на две части прямолинейным разломом и угощаете его не большей частью. Затем предлагаете другому другу разломить так же оставшуюся часть на две части и угощаете его не большей частью. И так Вы делаете до тех пор, пока у вас не останется одна долька и Вы её съедите. Какое наибольшее количество друзей наверняка могут получить Ваше угощение?

**13.** Для полёта в космос нужно укомплектовать экипаж из трёх человек. Командир корабля может быть выбран из четырёх космонавтов, а два его помощника из пяти бортинженеров. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж?

**14.** Есть шкатулка с пятью белыми и одним черным шариком. Наугад из этой шкатулки берут по одному шарику (не возвращая их назад) до тех пор, пока не появится черный шарик. Берущий получает столько очков, сколько всего вынуто шаров, включая и последний черный. Например, если черный шар появился сразу, игрок получает одно очко, если первый шар оказался белым, а второй — черным, то два очка и т. д. Какое количество очков имеет наибольшие шансы появиться в этом испытании?

**15.** В одном дворе живут четверо юношей. Известно, что Вадим и шофёр старше Сергея; Николай и слесарь увлекаются плаванием; библиотекарь — самый младший из этих юношей; по вечерам Антон и парикмахер играют в домино против Сергея и библиотекаря. Определите профессию каждого юноши.

**16.** Имеется 5 монет, среди которых одна фальшивая (неизвестно, она легче или тяжелее настоящей). Масса настоящей монеты 5 г. Какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах понадобится для обнаружения фальшивой монеты, если имеется одна гиря массой 5 г?

**17.** Известно, что $\frac{a(a+3)}{2}$ учащихся из $a$ различных классов принесли в библиотеку $a(a + 1)$ книг. Учащиеся одного класса принесли по одинаковому количеству книг, а из разных — по разному количеству. Сколько учащихся принесли более, чем по одной книге?

## Указания к задачам дополнительного задания

**1.** Рассмотрите всевозможные случаи расположения вагонов, в которых находятся Полина и Валя.

**2.** Обратите внимание на то, что каждая из указанных фигур состоит из четырёх фигур, составленных из равного количества равных прямоугольных треугольников.

**3.** Обратите внимание на то, что перед каждым следующим грузовиком на 2 легковых автомобиля больше, чем перед предыдущим.

**4.** Сведите задачу к нахождению количества пар натуральных чисел, сумма которых больше 45.

**5.** Обратите внимание на то, что обычная линейка может измерять длины с точностью до 0,5 мм.

**6.** Примените метод уравнивания для нахождения двух значений величины по их сумме и разности.

**7.** Обратите внимание на количество дат, которые можно составить, пользуясь только цифрой 1.

**8.** Используйте отвешенные пакеты в качестве гирь, а также тем, что одним взвешиванием можно пакет муки разделить на две равные части.

**9.** По условию, используя скорости сближения при движении навстречу друг другу и при движении в одном направлении, можно найти сумму и разность скоростей велосипедистов. Затем можно воспользоваться методом уравнивания нахождения двух значений величины по их сумме и разности.

**10.** Обозначьте какой-нибудь буквой длину дорожки и выразите через неё скорость сближения бегунов после первой встречи.

**11.** Подсчитайте, через сколько минут после отправления поезда по расписанию с первой станции поезд отправился со второй станции. Кроме того, подсчитайте, через сколько минут после отправления поезда по расписанию с первой станции пассажир добрался до второй станции. Сравните результаты.

**12.** Изобразите на рисунке разламывания, при которых меньшая образованная часть будет наибольшей по сравнению с другими вариантами разламывания.

**13.** Обратите внимание на то, что количество способов выбора помощников командира не зависит от порядка их выбора.

**14.** Подумайте, каковы шансы сразу вынуть чёрный шарик и каковы шансы вначале вынуть белый шарик, а потом чёрный.

**15.** Воспользуйтесь методом исключения. Сделайте выводы из каждого из четырёх условий задачи.

**16.** Положите вначале на одну чашку весов две монеты, а на другую — третью монету и гирю. Рассмотрите всевозможные случаи.

**17.** Подсчитайте сумму первых $a$ натуральных чисел.

### Задачи для исследования

**1.** Измерьте толщину бумаги, на которой напечатаны ваши учебники.

Как измерить с нужной точностью толщину листа бумаги?

**2.** Подсчитайте, сколько понадобится разломов, чтобы разделить шоколадку размером $m \times n$ долек на отдельные дольки.

Зависит ли количество прямолинейных разрезов прямоугольника размерами $m$ см $\times$ $n$ см на единичные квадраты от выбора последовательности разрезов? Если не зависит, то чему равно это количество? Можно ли по количеству разрезов восстановить размеры прямоугольника?

**3.** За сколько взвешиваний можно взвесить $n$ килограммов муки, имея вначале только одну гирю в: а) 1 кг; б) 2 кг; в) 4 кг?

**4.** Проведите с другом следующий опыт. Одновременно выбрасывайте пальцы одной руки. Повторите опыт 300 раз и после каждого опыта фиксируйте сумму количеств выброшенных пальцев. Установите, сколько раз выпала каждая возможная сумма. Согласуются ли результаты опытов с решением задачи 3 из блока «Подсчёт количества вариантов»?

**5.** Определите длину своего шага. Зависит ли длина шага от роста человека?

**Бродский Яков Соломонович**

**Павлов Александр Леонидович**

# Примени математику

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 7-8 классов

Учебное пособие