Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Линейные уравнения и их применения

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Линейные уравнения и их применения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов. — 56 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 8-9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 от 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, формирование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 8-9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено линейным уравнениям и их применениям для решения жизненных задач. К поиску неизвестного сводится большинство прикладных задач. Очень часто этот поиск можно свести к поиску решения линейного уравнения. Линейные уравнения составляют, с одной стороны, наиболее простой вид уравнений, а с другой стороны – очень важный.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и поиска решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком .

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью модуля состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого модуля, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после решения каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить или приобрести тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Линейные уравнения и их применения

Многие задачи, которые вы решали в школе, сводились к поиску неизвестного количества или неизвестного значения величины. Один из общих методов, позволяющих решать самые разнообразные, внешне не похожие друг на друга, задачи, основан на составлении уравнений. Сущность этого метода состоит в следующем.

Выбирают некоторое неизвестное значение величины или количества и обозначают его какой-нибудь буквой.

Выражают через введенную букву другие неизвестные значения величины или количества.

Составляют два выражения для значения одной и той же величины или одного и того же количества, в которые входит выбранная буква, и приравнивают их, пользуясь условием.

Равенство, которое получается, называют ***уравнением***. Такой перевод условия задачи на язык математики называют ***составлением уравнения по условию задачи***.

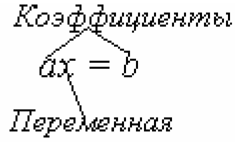
Решают составленное уравнение, находят значение величины или количества, обозначенное введенной буквой. Пользуясь найденным значением неизвестного, выполняют требования задачи.

Часто удаётся выбрать неизвестное так, что сразу получают ответ к задаче.

1. Линейные уравнения с одной переменной

Линейные уравнения являются простейшими, но широко применяемыми для решения жизненных задач.

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — некоторые числа, x — переменная, называют линейным уравнением с одной переменной.



Корнем или решением уравнения называется число, при подстановке которого вместо переменной в уравнение получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или убедиться в том, что корней у него нет.

Если $a \neq 0$, то линейное уравнение $ax = b$ имеет один корень $x = \frac{b}{a}$.

Готовимся к решению задач

1. Одно из чисел в 2,5 раза меньше другого. Если меньшее число обозначить через x, то большее число будет равно …

А. $\frac{2}{5}x$. **Б.** $2{,}5x$. **В.** $\frac{x}{2{,}5}$. **Г.** величине, отличной от приведенных.

2. Одно из чисел в 2,5 раза меньше другого. Если большее число обозначить через x, то меньшее число будет равно …

А. $\frac{2}{5}x$. **Б.** $2{,}5x$. **В.** $\frac{2{,}5}{x}$. **Г.** величине, отличной от приведенных.

3. Решите уравнение: $-\frac{3}{4}x = 6$.

А. 8. **Б.** $\frac{1}{8}$. **В.** $-\frac{1}{8}$. **Г.** –8.

4. Какое из приведенных уравнений не является линейным уравнением с одной переменной?

А. $3x = 5$. **Б.** $2 = 5x$. **В.** $x^2 = 1$. **Г.** $2 = 0$.

5. Сколько корней имеет уравнение:

1) $2x - 1 = 3 - x$; 2) $2x - 1 = -(3 - 2x)$; 3) $2x - 3 = -(3 - 2x)$?

6. Сколько корней имеет уравнение: 1) $3x = b$; 2) $ax = -5$; 3) $ax = 0$; 4) $ax = b$?

7. Упростите выражение $x + 1{,}5x + x + 2$.

А. $3x + 3{,}5$. **Б.** $3{,}5x + 2$. **В.** $4{,}5x + 2$. **Г.** $5{,}5x$.

8. Решите уравнение: 1) $x + 1{,}5x + x + 2 = 23$; 2) $x + 2 = 0{,}2(8x - 2)$;

3) $1{,}5x + 1{,}8x + 12 + 0{,}5x - 8 = 3{,}8x$.

9. В банке денежный вклад увеличивается на 10% за год. Сколько денег вкладчик положил на вклад, если через год у него на вкладе было 44 000 руб.?

А. 39 000 руб. **Б.** 40 000 руб. **В.** 41 000 руб. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

10. Составьте уравнение для нахождения неизвестного x.

1) В первом ящике x кг крупы, а во втором — вдвое больше, чем в первом. Если из второго ящика пересыпать 10 кг в первый, то в обоих ящиках крупы станет поровну.

А. $2x + 10 = x - 10$. **Б.** $2(x - 10) = x + 10$.

В. $2x - 10 = x + 10$. **Г.** $2(x + 10) = x - 10$.

2) В первом мешочке x шариков, что в три раза меньше, чем во втором. Если из второго мешочка переложить 5 шариков в первый, то в обоих мешочках шариков будет поровну.

3) В первом баке x литров воды, во втором — на 40 л воды больше, чем в первом, а в третьем — $\frac{5}{8}$ того объёма воды, который содержится в первых двух баках вместе. В трёх баках 260 л.

Решение задач

Наиболее простыми и вместе с тем очень важными для приложений являются линейные уравнения с одной переменной. Как появляются такие уравнения, видно из следующей задачи.

Задача 1. Для Новогодней елки купили мандарины, лимоны, апельсины и яблоки, всего 63 плода. Количество мандарин вдвое больше количества апельсин, апельсин приобрели втрое больше, чем яблок, яблок — вдвое больше, чем лимонов. Сколько купили апельсин?

Анализируем. Если не использовать уравнений, то эту задачу можно отнести к задачам на части. Для перевода условия задачи на язык уравнений используем идеи метода решения задач на части.

В задачах на части за одну часть, как правило, принимали наименьшее значение величины. Точно также поступим и здесь. Обозначим буквой количество купленных лимонов — их купили меньше всего. Количества остальных купленных фруктов, цитрусовых и общее количество купленных плодов выразим через эту букву. Затем, зная из условия, сколько всего купили плодов, можно будет составить уравнение.

Решаем. Обозначим количество купленных лимонов через x. Так как яблок купили вдвое больше, чем лимонов, то количество купленных яблок равно $2x$. Апельсин купили втрое больше, чем яблок. Поэтому количество купленных апельсин равно $3 \cdot 2x = 6x$. Мандарин приобрели вдвое больше, чем апельсин, поэтому их количество равно $2 \cdot 6x = 12x$. Общее количество купленных плодов равно $12x + 6x + 2x + x = 21x$.

По условию, всего приобрели 63 плода. Поэтому $21x = 63$. Отсюда $x = 63:21 = 3$. Следовательно, купили 3 лимона.

Количество купленных апельсин равно $6x$. Значение этого выражения при $x = 3$ равно $6 \cdot 3 = 18$.

Ответ. 18.

1. *Сколько купили: а) яблок; б) мандарин?*

2. *Могло ли общее количество плодов в данной задаче равняться 65?*

3. *Можно ли было купить мандарин втрое больше количества апельсин, если остальные условия задачи сохраняются?*

Решение задачи 1 было найдено из уравнения $21x = 63$. Это уравнение имеет вид $ax = b$, где $a = 21$, $b = 63$.

Вы, наверное, обратили внимание на то, что букву x мы называли и неизвестной, и переменной. Это не ошибка. При поиске решения прикладной задачи удобнее пользоваться термином «неизвестная», а при решении «чисто» математических задач — термином «переменная».

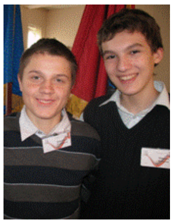
Решение многих уравнений может приводить к решению линейных уравнений, имеющих те же корни, что и рассматриваемые, следующими преобразованиями:

- ***избавлением от знаменателей (если они есть);***

- ***раскрытием скобок;***

- перенесением слагаемых, содержащих переменную, в одну сторону, а остальных — в другую, меняя при этом знаки переносимых слагаемых на противоположные;

- приведением подобных членов.



Задача 2. Двум учащимся А и Б вместе сейчас 28 лет. Сейчас учащемуся А вдвое больше лет, чем Б было тогда, когда А было столько лет, сколько Б теперь. Сколько лет учащемуся А и сколько учащемуся Б?

Анализируем. Буквой можно обозначить возраст одного из учащихся. Тогда возраст другого можно будет выразить через выбранную букву, используя их суммарный возраст. Через эту же неизвестную можно сначала выразить разность их возрастов, а потом возраст Б, когда А было столько лет, сколько Б теперь. Затем можно будет составить уравнение.

Решаем. Обозначим через x лет возраст учащегося А. Так как учащимся А и Б вместе 28 лет, то возраст Б равен $(28 - x)$ годам. Возраст учащегося А больше возраста Б на $x - (28 - x) = x - 28 + x = (2x - 28)$ лет. Когда А было $(28 - x)$ лет, Б было на $(2x - 28)$ лет меньше, то есть ему было $(28 - x) - (2x - 28) = 28 - x - 2x + 28 = (56 - 3x)$ лет.

Пользуясь условием, составим уравнение: $x = 2(56 - 3x)$.

Приведём полученное уравнение к линейному.

Раскроем скобки: $x = 112 - 6x$.

Перенесём слагаемое $-6x$ в левую часть уравнения: $x + 6x = 112$.

Приведём подобные члены: $7x = 112$.

Решим полученное линейное уравнение: $x = \frac{112}{7} = 16$.

Следовательно, возраст учащегося А равен 16 годам, а возраст Б равен $28 - 16 = 12$ годам.

Ответ. 16 лет и 12 лет.

1. *Сколько лет будет* учащемуся *А, когда Б будет 16 лет?*

2. *Если бы А было 15 лет, а Б — 13 лет, то сколько лет было Б, когда А было 13 лет?*

3. *Возраст А равен х лет, возраст Б — (28 – х) лет. Как выражается через х возраст А, когда Б будет столько лет, сколько А теперь?*

Одной из главных трудностей при составлении уравнения является выражение через введенное обозначение других величин, о которых идёт речь в задаче. Напомним некоторые правила, которые могут облегчить эту работу.

Если известно одно значение величины или количества и о втором известно, что оно на сколько-то больше первого, то второе значение находится сложением.

Если известно одно значение величины или количества и о втором известно, что оно на сколько-то меньше первого, то второе значение находится вычитанием.

Если известно одно значение величины или количества и о втором известно, что оно во сколько-то раз больше первого, то второе значение находится умножением.

Если известно одно значение величины или количества и о втором известно, что оно во сколько-то раз меньше первого, то второе значение находится делением.

Задача 3. В три ящика разложили 23 кг слив. В первом ящике слив в 1,5 раза меньше, чем во втором, а в третьем на 2 кг больше, чем в первом. Сколько слив в каждом ящике?

Анализируем. В условии задачи масса слив в первом ящике сравнивается с массой слив во втором ящике, а масса слив в третьем ящике — с массой слив в первом. Так как в обоих сравнениях участвует масса слив в первом ящике, то естественно её обозначить какой-нибудь буквой, а затем выразить через эту букву массы слив во втором и третьем ящиках. Далее можно воспользоваться тем, что в трёх ящиках вместе 23 кг слив.

Решаем. Обозначим через x массу слив в первом ящике. Так как во втором ящике слив в 1,5 раза больше, чем в первом, то масса слив во втором ящике будет равняться $1{,}5x$ кг. Поскольку масса слив в третьем ящике на 2 кг больше, чем в первом, то она равна $(x + 2)$ кг. Учитывая, что общая масса слив в трёх ящиках равна 23 кг, можно составить уравнение:

$$x + 1{,}5x + (x + 2) = 23.$$

Приведём его к линейному уравнению с одной переменной.

Раскроем скобки: $x + 1{,}5x + x + 2 = 23.$

Перенесём слагаемое, не содержащие неизвестной, вправо: $x + 1{,}5x + x = 23 - 2.$

Приведём подобные члены: $3{,}5x = 21.$

Решим полученное линейное уравнение: $x = \dfrac{21}{3{,}5} = 6.$

Итак, масса слив в первом ящике равна 6 кг. Тогда масса слив во втором ящике равна $1{,}5 \cdot 6 = 9$ (кг), а в третьем — $6 + 2 = 8$ (кг).

Ответ. 6 кг; 9 кг; 8 кг.

1. *Чему равнялась бы масса слив в первом ящике, если бы в третьем ящике было на 5,5 кг больше, чем в первом, а остальные условия задачи сохранялись бы?*

2. *Чему равнялась бы масса слив во втором ящике, если бы масса слив в нём была в 1,5 раза слив меньше, чем в первом, а остальные условия задачи сохранялись бы?*

3. *Какая наибольшая масса слив могла быть разложена в три ящика, если бы в ящике помещалось не более 15 кг слив при выполнении остальных условий задачи?*

Широкое распространение имеют задачи, связанные с применением процентов. Напомним формулу, позволяющую решать все основные задачи на проценты: нахождение процента от числа, числа по его проценту, процентного отношения двух чисел.

Если некоторое число *a* увеличить на *p*%, то полученное число *b* можно вычислить по формуле: $\boldsymbol{b = a + a \cdot \frac{p}{100}}$ ***или*** $\boldsymbol{b = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$**.**

Решить уравнение $b = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ относительно любой из переменных *b*, *p*, *a*, можно, зная значения любых двух из этих переменных.

Задача 4. Вчера количество учащихся, присутствовавших в классе, было в 8 раз больше количества отсутствовавших. Сегодня не пришли еще два учащихся, и оказалось, что количество отсутствующих составляет 20 % от количества собравшихся в классе. Сколько всего учащихся в классе?

Анализируем. В задаче удобней буквой обозначить не количество учащихся в классе, а количество отсутствовавших вчера в классе. Через введенную букву можно выразить: количества присутствовавших вчера, отсутствующих и присутствующих сегодня. Для составления уравнения можно использовать условие о том, что количество отсутствующих сегодня составляет 20 % от количества собравшихся в классе.

Решаем. Обозначим количество отсутствовавших вчера в классе через x, тогда количество присутствовавших равно $8x$. На следующий день количество отсутствующих составило $x + 2$, а количество присутствующих — $8x - 2$. Так как количество отсутствующих составляет 20 % или $\frac{20}{100} = 0,2$ от количества собравшихся в классе, то имеем уравнение:

$$x + 2 = 0,2(8x - 2).$$

Приведём это уравнение к линейному с одной переменной и решим его:

$$x + 2 = 1,6x - 0,4,$$

$$2 + 0,4 = 1,6x - x,$$

$$0,6x = 2,4,$$

$$x = \frac{2,4}{0,6} = 4.$$

Итак, вчера в классе отсутствовало 4 учащихся, присутствовало 8·4 = 32, всего в классе 4 + 32 = 36 учащихся.

Ответ. 36.

1. *Сколько* учащихся *отсутствовало и сколько присутствовало в классе сегодня?*

2. *Сколько процентов учащихся отсутствовало в классе вчера и сколько сегодня?*

3. *На сколько процентов от количества присутствующих увеличилось количество отсутствующих сегодня?*

Вы знакомы с понятием среднего арифметического двух чисел. Напомним его.

Средним арифметическим z двух чисел x и y называется их полусумма: $z = \frac{x+y}{2}$.

Среднее арифметическое $x_{ср.}$ ***нескольких чисел*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***определяется равенством*** $x_{ср.} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$**.**

Используя решение линейных уравнений с одной переменной, можно решать различные задачи, связанные со средним арифметическим двух и нескольких чисел.

Задача 5. Из студентов, сдававших экзамен, 30% получили оценку «5», 45% — оценку «4», 4 студента получили оценку «3», остальные — оценку «2». Средняя оценка равнялась 4. Сколько студентов сдавали экзамен?

Анализируем. Зная среднее арифметическое нескольких чисел, можно найти их сумму, умножив среднее арифметическое на количество слагаемых. Это даст один способ выражения суммы баллов, полученных на экзамене, через количество студентов, сдававших экзамен.

Но выражение для этой суммы баллов можно найти и другим способом, используя данные о том, сколько процентов студентов, сдававших экзамен, получили ту или иную оценку.

Приравняв два выражения для одной и той же величины, составим уравнение, из которого найдём искомую величину.

Решаем. Обозначим количество студентов, сдававших экзамен, через x. По условию, средняя оценка на экзамене равняется 4, то есть 4 — это среднее арифметическое всех оценок, полученных на экзамене. Тогда сумма всех этих оценок равна произведению этой средней оценки на количество студентов, сдававших экзамен, то есть $4x$.

Выразим через x сумму всех оценок другим способом. Известно, что 30% студентов, то есть $0{,}3x$ студентов, получили оценку «5». Поэтому сумма баллов, набранных ими, равна $5\cdot 0{,}3x = 1{,}5x$.

Аналогично, сумма баллов, набранных студентами, сдавшими экзамен на «4», равна $4\cdot 0{,}45x = 1{,}8x$.

Сумма баллов, набранных студентами, сдавшими экзамен на «3», равна $3\cdot 4 = 12$.

На «2» экзамен сдали:

$$x - (0{,}3x + 0{,}45x + 4) = x - 0{,}3x - 0{,}45x - 4 = 0{,}25x - 4.$$

Сумма баллов, набранных ими, равна $2\cdot(0{,}25x - 4) = 0{,}5x - 8$. Тогда общая сумма оценок, полученных всеми студентами, равна:

$$1{,}5x + 1{,}8x + 12 + 0{,}5x - 8 = 3{,}8x + 4$$

Имеем уравнение: $3{,}8x + 4 = 4x$.

Решая его, будем последовательно получать:

$$4 = 4x - 3{,}8x,$$

$$4 = 0{,}2x,$$

$$x = \frac{4}{0{,}2} = 20.$$

Ответ. 20 студентов.

1. *Сколько студентов получили на экзамене оценку 5, оценку 4, оценку 2?*

2. *Чему равна сумма баллов, полученных всеми студентами, сдававшими экзамен?*

3. *Сколько студентов сдавали бы экзамен, если бы средняя оценка равнялась 4,05, а остальные условия сохранялись?*

Проверь себя

1. Каждый шестой автобус в автобусном парке оборудован информационным табло. Позднее информационные табло установили ещё на 5 автобусах из этого парка, и после этого четверть автобусов парка имела информационное табло. Сколько автобусов в парке, если каждый автобус оборудован не более, чем одним табло?

А. 120. **Б.** 60. **В.** 48. **Г.** 42.

2. На турнире школьников по математике выполняется тест, состоящий из 15 заданий. Жюри начисляет 3 балла за правильный ответ и 0 баллов — за неправильный. Если бы за правильный ответ давали 5 баллов, а за неправильный снимали один балл, то Аленка получила бы такое же количество баллов, как и при реальном начислении баллов. К скольким заданиям Аленка дала правильный ответ?

А. К 5-и. **Б.** К 7-и. **В.** К 10-и. **Г.** Определить невозможно.

3. Первый учащийся решил на 3 задачи меньше, чем второй, и в 2 раза меньше, чем третий. Первый и третий учащиеся решили вместе в 2,1 раза задач больше, чем второй. Сколько всего задач решили три учащихся?

А. 17. **Б.** 21. **В.** 24. **Г.** 31.

4. За две книги заплатили 9 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько стоит более дорогая книга, если 40% цены одной книги равняются 20% цены другой книги?

А. 5 зедов. **Б.** 6 зедов. **В.** 7 зедов. **Г.** 8 зедов.

5. Средняя зарплата работников некоторой лаборатории составляла 1200 зедов (зед — условная денежная единица). После увольнения по сокращению штатов сотрудника с зарплатой 2000 зедов средняя зарплата оставшихся сотрудников составила 1100 зедов. Сколько сотрудников было в лаборатории до сокращения штатов?

А. 12. **Б.** 10. **В.** 9. **Г.** 8.

Реши сам

1. В 10 ящиках было по одинаковому количеству яблок. Когда из первого ящика взяли несколько яблок, из второго на одно яблоко больше, из третьего на два яблока больше и так далее, то в последнем ящике осталось 21 яблоко. Сколько яблок осталось в первом ящике?

2. В зале несколько скамеек. Если на каждую скамейку сядут два учащихся, то семи учащимся не хватит мест. Если же на каждую скамейку сядут три учащихся, то пять скамеек останутся незанятыми. Сколько в зале учащихся?

3. Можно ли разложить 68 банок консервов в три контейнера так, чтобы во втором было вдвое больше банок, чем в первом, а в третьем на 3 банки меньше, чем в первом?

4. В магазине CD-дисков действует постоянная скидка: 5% от стоимости купленных дисков для тех, кто покупает одновременно не менее трех дисков. Для тех, кто покупает больше пяти дисков, существует дополнительная скидка — 2% от стоимости всех дисков свыше 5. Сколько приобрели дисков, если цена одного диска равняется 8 зедам и, благодаря, скидкам сэкономили 5,92 зеда (зед — условная денежная единица)?

5. Бригада в составе 6 плотников и столяра взялась выполнить некоторую работу. Каждый плотник заработал по 2000 зедов, а столяр получил на 300 зедов больше общего среднего заработка (зед — условная денежная единица). Сколько зедов заработал столяр?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Воспользуйтесь тем, что искомое число больше другого в 2,5 раза.

2. А. Воспользуйтесь тем, что искомое число меньше другого в 2,5 раза.

3. Г. Воспользуйтесь тем, что неизвестный множитель равен частному от деления произведения на известный множитель.

4. В. Примените определение линейного уравнения:

Уравнение вида $ax = b$, где a и b − некоторые числа, x − переменная, называют линейным уравнением с одной переменной.

5. 1) Одно; 2) ни одного; 3) бесконечно много. Воспользуйтесь следующими критериями для количества корней линейного уравнения:

Если $a \neq 0$, то линейное уравнение $ax = b$ имеет один корень $x = \frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то оно не имеет решений.

Если $a = b = 0$, то оно имеет бесконечно много решений.

6. 1) Одно; 2) если $a \neq 0$, то одно; если $a = 0$, то не имеет решений; 3) если $a = 0$, то оно имеет бесконечно много решений, если $a \neq 0$, то не имеет решений; 4) если $a \neq 0$, то одно; если $a = b = 0$, то бесконечно много; если $a = 0$, $b \neq 0$, то ни одного. См. указание к заданию 5.

7. Б. Приведите подобные члены.

8. 1) $x = 6$; 2) $x = 4$; 3) Нет решений. Воспользуйтесь указанием к заданию 5.

9. Б. Используйте то, что 44 000 руб. составляют 110% от начального вклада.

10. 1) В; 2) $3x - 5 = x + 5$; 3) $x + (x + 40) + \frac{5}{8}(2x + 40) = 260$. Выразите через x указанные в условии величины; если их значения изменялись, то через x выразите и значения до их изменения и после; обратите внимание на условие, которое позволяет найти два выражения для одной и той же величины.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. а) 6; б) 36. **2.** Нет. **3.** Нет.

Задача 2. 1. 20. **2.** 11. **3.** $3x - 28$.

Задача 3. 1. 5 кг. **2.** 5,25 кг. **3.** 34,5 кг.

Задача 4. 1. 6 и 30. **2.** $11\frac{1}{9}\%$ и $16\frac{2}{3}\%$. **3.** На 7,5%.

Задача 5. 1. 6; 9; 1. **2.** 80. **3.** 21.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
Б	А	Г	Б	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 30. Обозначьте какой-то буквой количество яблок, которое осталось в первом ящике после того, как из него взяли несколько яблок, и выразите через неё количество яблок, которое осталось в десятом ящике.

2. 51. Обозначьте неизвестное количество скамеек какой-то буквой, выразите через неё двумя способами количество учащихся, составьте уравнение, из которого найдите это количество скамеек, а затем подсчитайте количество учащихся.

3. Нет. Обозначьте какой-нибудь буквой количество банок, которые помещаются в первом контейнере, выразите через неё количества банок во втором и третьем контейнерах, составьте уравнение, обратив внимание на то, что количество банок консервов является целым числом.

4. 12. Обозначив какой-то буквой количество купленных дисков, выразите через неё размер полученной скидки.

5. 2350 зедов. Обозначив какой-то буквой заработок столяра, выразите через неё общий средний заработок и составьте уравнение, пользуясь условием.

2. Применение линейных уравнений с одной переменной

Линейные уравнения с одной переменной естественно появляются при рассмотрении линейных зависимостей между переменными x и y.

Переменная y линейно зависит от переменной x, если справедлива формула y = ax + b, где a и b — некоторые числа.

Числа a и b называют ***параметрами***.

Две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.

Готовимся к решению задач

1. Какая из приведенных формул выражает зависимость пути s от времени t при равномерном прямолинейном движении со скоростью v?

А. $s = \frac{v}{t}$. **Б.** $s = \frac{t}{v}$. **В.** $s = vt$. **Г.** $s = v + t$.

2. Сколько времени понадобится пешеходу, чтобы пройти со скоростью 5 км/ч расстояние: 1) 1 км; 2) 1,5 км; 3) 3,5 км; 4) 8,5 км?

3. Какие из приведенных зависимостей между переменными x и y не являются линейными?

А. $2x + 3y - 1 = 0$. **Б.** $5x - 3y - 2 = 0$. **В.** $x^2 + y^2 - 4 = 0$. **Г.** $2x + y^2 + 1 = 0$.

4. Какая из приведенных зависимостей между величинами не является прямой пропорциональной зависимостью?

А. Стоимость нескольких единиц товара одинаковой цены и количество этих единиц.

Б. Количество рабочих, выполняющих с одинаковой производительностью некоторую работу и объём выполненной работы.

В. Скорость равномерного прямолинейного движения и время, затраченное на преодоление 120 км.

Г. Масса груза и количество машин одинаковой загруженности, перевозящих это груз.

5. Является ли зависимость времени t, необходимого для преодоления пути s, от скорости v при равномерном прямолинейном движении прямой пропорциональностью?

6. За b килограммов конфет заплатили c рублей. По какой формуле можно вычислить приближённо стоимость x таких же конфет массой a кг?

А. $x = \frac{ab}{c}$. **Б.** $x = \frac{c}{ab}$. **В.** $x = \frac{bc}{a}$. **Г.** $x = \frac{ac}{b}$.

7. В кружке, содержащей 250 г воды, размешали 50 г сахара, а в стакане, содержащем 100 г воды, — 20 г сахара. Какой раствор слаще: в кружке или в стакане?

8. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $x:2 = 4:8$; 2) $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 2 : x$; 3) $3:x = 8:3,2$; 4) $1,4:2 = 7:x$.

9. Расстояние между городами A и B на карте равно 5,6 см, а на местности —

420 км. Каково расстояние между городами C и D на местности, если на той же карте расстояние между ними 3,6 см?

10. Вычислите значение выражения $ax + b$ при:

1) $x = 2$, $a = 3$, $b = -4$;   2) $x = \frac{3}{5}$, $a = 8$, $b = \frac{2}{3}$.

11. Решите уравнение: 1) $\frac{x}{4} + \frac{2-x}{2} = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$.

12. Оператор набрал b страниц текста за a часов. Составьте формулу, по которой можно приближённо вычислить количество x страниц, которые он может набрать за t часов, работая с такой же производительностью.

13. Оператор набрал b страниц текста за a часов. Составьте формулу, по которой можно приближённо вычислить время t, за которое он может набрать c страниц, работая с такой же производительностью.

14. Составьте уравнение для нахождения неизвестного x.

1) Один рабочий изготавливает за час x деталей, другой — на 2 детали больше. За 6 часов первый изготовил столько же деталей, сколько второй за 4 часа.

2) Одновременно из двух пунктов А и В, расстояние между которыми 360 км, навстречу друг другу выехали два поезда. Скорость одного из них равна x км/ч, а другого — на 10 км/ч больше. Они встретились через 3 часа.

3) Купили x кг конфет по цене 170 руб. за 1 кг, а печенья на 2 кг больше по цене 120 руб. за 1 кг. За всю покупку заплатили 820 рублей.

Решение задач

К линейным уравнениям с одной переменной приводит решение многих задач, связанных с равномерным прямолинейным движением. Это связано с тем, что формула $s = vt$ выражает линейную зависимость пути s от времени t при равномерном прямолинейном движении со скоростью движения v. По этой формуле любую из трёх величин s, v, t можно выразить через две остальные.

Длина пути s равна произведению скорости v движения на время преодоления этого пути t: $s = vt$.

Скорость движения v равна частному от деления длины пути s на время, за которое преодолён этот путь t: $v = \frac{s}{t}$**.**

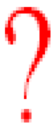
Время преодоления некоторого пути t равно частному от деления длины этого пути s на скорость движения v: $t = \frac{s}{v}$.

Задача 1. Скорость прямолинейно движущегося тела меняется по закону $v = 4 + 2t$, где v — скорость в момент t, см/с, t — время, с. Через какое время после начала движения ($t = 0$) скорость будет равна 5 см/с?

Анализируем. Из формулы $v = 4 + 2t$ можно сделать вывод, что движение неравномерное: скорость изменяется в зависимости от времени движения. Скорость и время связаны линейной зависимостью. В задаче требуется по известной скорости движения тела найти тот момент времени, в который будет достигнута эта скорость. Для этого достаточно в заданную формулу подставить заданное значение v и решить полученное уравнение, которое сводится к линейному.

Решаем. Подставим в данную формулу заданное значение $v = 5$: $5 = 4 + 2t$. Решим полученное линейное уравнение: $2t = 1$, $t = 0{,}5$. Итак, через 0,5 с после начала движения скорость движущейся точки будет равняться 5 м/с.

Ответ. Через 0,5 с.



1. *Чему равна скорость движения тела в момент t = 1 с?*

2. *В какой момент времени скорость тела будет равна 8 м/с?*

3. *Через сколько секунд после начала движения (t = 0) скорость тела будет больше 10 м/с?*

Следующая задача связана с равномерным прямолинейным движением на каждом из двух временных промежутков.

Задача 2. Каждое утро спортсмен пробегает дистанцию в 6 км. Какое расстояние он должен пробежать со скоростью 20 км/ч, чтобы оставшийся путь преодолеть со ско-

ростью 10 км/ч и на пробежку затратить 30 мин?

Анализируем. По условию, одну часть пути спортсмен должен бежать со скоростью 20 км/ч, а оставшуюся — со скоростью 10 км/ч. Если обозначить одну часть пути какой-нибудь буквой, то можно выразить через эту букву время, необходимое для преодоления оставшейся части пути и всей дистанции, и, приравняв полученное выражение данному в условии значению этого времени, получить уравнение.

Решаем. Обозначим через x км расстояние, которое спортсмен преодолевает со скоростью 20 км/ч. Для преодоления этого расстояния ему понадобится $\frac{x}{20}$ ч. Так как длина всей дистанции равна 6 км, то оставшийся путь, который он преодолевает со скоростью 10 км/ч, равен $(6 - x)$ км. На его преодоление спортсмену понадобится $\frac{6-x}{10}$ ч. Учитывая, что на всю дистанцию он должен затратить 30 мин или $\frac{1}{2}$ ч, можно составить уравнение: $\frac{x}{20} + \frac{6-x}{10} = \frac{1}{2}$.

Приведём это уравнение к линейному уравнению с одной переменной. Избавимся от знаменателя, для чего умножим обе части уравнения на число 20, то есть на наименьший общий знаменатель всех трёх дробей: $x + 2(6 - x) = 10.$

Раскроем скобки: $x + 12 - 2x = 10.$

Перенесём свободный член 12 вправо: $x - 2x = 10 - 12.$

Приведём подобные члены: $-x = -2.$

Решим полученное линейное уравнение с одной переменной: $x = \frac{-2}{-1} = 2.$

Итак, со скоростью 20 км/ч спортсмен должен пробежать 2 км.

Ответ. 2 км.

1. *Какое расстояние спортсмен должен пробежать со скоростью 10 км/ч?*

2. *За сколько минут спортсмен пробежит 2 км со скоростью 20 км/ч?*

3. *За сколько минут спортсмен пробежит 4 км со скоростью 10 км/ч?*

4. *Если через х ч обозначить время, которое спортсмен будет бежать со скоростью 20 км/ч, то чему будет равно значение выражения $20x + 10(0,5 - x)$?*

К решению линейных уравнений приводят задачи на деление в данном отношении, на нахождение неизвестного члена пропорции, задачи на прямую и обратную пропорциональные зависимости.

В практической жизни человека — при приготовлении различных блюд по кулинарным рецептам, смесей, растворов, при распределении прибылей, коммунальных расходов и т. п. — часто возникает необходимость разделить ту или иную величину на части, отношение которых равно данному отношению, то есть возникает пропорция. Имеет место основное свойство пропорции:

Произведение крайних членов пропорции $a:b = c:d$ равно произведению её средних членов: $ad = bc$.

С помощью этого свойства пропорции любой её член можно выразить через остальные члены. Это свойство часто используется для составления линейного уравнения с одной переменной.

Задача 3. Два бизнесмена вложили в некоторый проект соответственно 6 и 4 млн. зедов и получили прибыль 2,5 млн. зедов (зед — условная денежная единица). Как справедливо разделить между ними эту прибыль?

Анализируем. Как правило, считают, что справедливо делить прибыль пропорционально вложенным средствам. Обозначив прибыль, причитающуюся одному из бизнесменов, какой-то буквой, зная общую прибыль, можно будет через эту букву выразить прибыль другого бизнесмена. Далее можно будет составить пропорцию, из которой находятся искомые величины.

Решаем. Обозначим прибыль бизнесмена, вложившего 6 млн. зедов, через x млн. зедов. Тогда прибыль другого бизнесмена будет равняться $(2,5 - x)$ млн. зедов. Считая, что их прибыли пропорциональны вложенным средствам, получаем пропорцию: $x:(2,5 - x) = 6:4$.

Применяя основное свойство пропорции, можно записать: $4x = 6(2,5 - x)$.

Приведём полученное уравнение к линейному с одной переменной:

$4x = 15 – 6x$, $4x + 6x = 15$, $10x = 15$.

Решим полученное линейное уравнение: $x = \frac{15}{10} = 1{,}5$.

Следовательно, один бизнесмен должен получить 1,5 млн. зедов прибыли, а другой — 2,5 – 1,5 = 1 (млн. зедов).

Ответ. 1,5 млн. зедов и 1 млн. зедов.

1. *Если бы бизнесмены решили 1 млн. зедов из прибыли вложить в расширение проекта, то как бы они разделили между собой оставшуюся прибыль?*

2. *Если бы прибыль равнялась 25 тыс. зедов, то как бы она была разделена между бизнесменами?*

3. *Какую прибыль получил бы другой бизнесмен, если внесший меньший вклад получил 800 тыс. зедов прибыли?*

Линейная зависимость вида y = ax называется прямой пропорциональной зависимостью.

Число a обычно называют ***коэффициентом пропорциональности***. Прямая пропорциональная зависимость естественно связана с пропорциями. Если $a = \frac{m}{n}$, то равенство $y = ax$ равносильно пропорции $y{:}m = x{:}n$.

Многие линейные зависимости являются прямыми пропорциональными зависимостями. Примеры приведены в следующей таблице.

$s = v \cdot t$	s — путь при равномерном движении	v — скорость движения	t — время движения
$m = \rho \cdot V$	m — масса вещества	ρ — плотность вещества	V — объём вещества
$C = z \cdot k$	C — стоимость покупки	z — цена единицы продукции	k — количество единиц продукции

Широкое применение находит прямая пропорциональная зависимость длины пути от количества оборотов при вращении круглых тел (колёс, обручей и т. п.

Задача 4. По аллее парка двое ребят катят обручи. Длина окружности одного обруча равна 3 м, а другого — 2 м. Найти длину аллеи, если известно, что второй обруч сделал на ней на 30 оборотов больше, чем первый.

Анализируем. Расстояние, преодолённое каждым обручем, прямо пропорционально количеству оборотов, сделанным эти обручем. Коэффициентом пропорциональности служит длина окружности обруча.

Поэтому, введя обозначение для количества оборотов, сделанных одним из обручей, можно будет выразить через него расстояние, преодолённое этим обручем.

Из условия можно через введенное обозначение выразить количество оборотов, сделанных другим обручем, а также расстояние, преодолённое этим обручем.

Так как обручи преодолели одно и то же расстояние — длину аллеи, то можно составить уравнение.

Решаем. Обозначим через x количество оборотов, сделанных большим обручем. Этот обруч проделал расстояние равное $3x$ м.

Меньший обруч сделал на 30 оборотов больше, то есть $x + 30$ оборотов. Он преодолел расстояние равное $2(x + 30)$ м.

Так как оба обруча преодолели одинаковое расстояние, то имеем уравнение:

$$3x = 2(x + 30).$$

Приведём это уравнение к линейному с одной переменной и решим его:

$3x = 2x + 60, \quad 3x - 2x = 60, \quad x = 60.$

Так как длина окружности большего обруча равна 3 м, то длина аллеи равна $3 \cdot 60 = 180$ (м).

Ответ. 180 м.

1. *Сколько оборотов на аллее сделал меньший обруч?*

2. *Чему равнялась бы длина аллеи, если бы второй обруч сделал бы на ней на 40 оборотов больше, чем первый?*

3. *Чему равнялась бы длина аллеи, если бы длина окружности одного обруча равнялась 4 м, а другого — 3 м?*

4. *На сколько больше оборотов сделает меньший обруч на аллее длиной 360 м?*

К решению линейных уравнений сводятся задачи, связанные с зависимостью между стоимостью, ценой и количеством.

Задача 5. Чтобы угостить подруг, Маша приготовила коктейль из четырех видов сока ценой, соответственно, 6, 12, 18 зедов и 24 зеда за литр (зед — условная денежная единица). Стоимости составляющих в коктейле одинаковы. В какую сумму обошелся Маше 1 л коктейля?

Анализируем. Искомая стоимость, по условию, разделена на четыре равные части — стоимости каждого вида сока. Зная их цены, можно выразить объёмы каждого вида сока через его стоимость.

Пользуясь тем, что сумма объёмов всех составляющих в 1 л коктейля равна 1 л, можно составить уравнение.

Решаем. Обозначим через x зедов стоимость 1 л коктейля. Из условия следует, что стоимость каждой составляющей коктейля равна $\frac{x}{4}$ зедов.

Объёмы составляющих коктейля соответственно равны:

$$\frac{x}{4}:6=\frac{x}{24}\text{ (л)},\ \frac{x}{4}:12=\frac{x}{48}\text{ (л)},\ \frac{x}{4}:18=\frac{x}{72}\text{ (л)},\ \frac{x}{4}:24=\frac{x}{96}\text{ (л)}.$$

По условию, $\frac{x}{24}+\frac{x}{48}+\frac{x}{72}+\frac{x}{96}=1$ или $\frac{1}{24}\left(\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right)=1$.

Умножая обе части уравнения на 24 и приводя подобные члены, получим:

$x\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=24$, $x\cdot\frac{12+6+4+3}{12}=24$, $x\cdot\frac{25}{12}=24$. Отсюда $x=\frac{288}{25}=11{,}52$.

Таким образом, стоимость 1 л коктейля равна 11 зедов 52 кета (кет — 0,01 зеда).

Ответ. 11 зедов 52 кета.

1. *Какова стоимость каждой составляющей коктейля?*

2. *Сколько сока стоимостью 24 зеда за 1 л в 1 л коктейля?*

3. *Какова была бы стоимость 1 л коктейля, если бы его составляющими были соки ценой, соответственно, 18, 20, 30, 36 зедов за 1 л?*

К решению линейных уравнений сводятся некоторые задачи, в которых кто-либо выполняет какую-нибудь работу. В этих задачах объём работы прямо пропорционален производительности труда при фиксированном времени выполнения работы, а также объём работы прямо пропорционален времени выполнения работы при фиксированной производительности труда.

Задача 6. Двум рабочим заказали одну и ту же работу. Один рабочий выполняет свою работу за половину того времени, за которое другой рабочий выполняет $\frac{2}{3}$ всей своей работы. Второму рабочему на выполнение своей работы требуется на 2 ч больше, чем первому. За сколько времени выполняет свою работу каждый рабочий?

Анализируем. Введя обозначение для времени выполнения работы одним из рабочих, можно через эту переменную выразить время, необходимое другому рабочему для выполнения всей работы, а также время, необходимое второму рабочему для выполнения $\frac{2}{3}$ всей работы. Затем, используя условие, можно составить уравнение.

Решаем. Пусть первый рабочий выполняет всю работу за x часов, тогда второй рабочий выполняет всю работу за $(x + 2)$ часов. Второй рабочий выполняет $\frac{2}{3}$ всей своей работы за $\frac{2}{3}(x + 2)$ часов. Так как первому рабочему для выполнения работы требуется половина этого времени, то имеем уравнение

$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(x + 2).$

Приведём это уравнение к линейному с одной переменной и решим его:

$$x = \frac{1}{3}(x + 2),\ \ 3x = x + 2,\ \ x = 1.$$

Первый рабочий выполняет работу за 1 ч, а второй – за 3 ч.

Ответ. 1 ч и 3 ч.

1. *Какова производительность труда каждого рабочего?*

2. *За сколько времени второй рабочий выполняет* $\frac{2}{3}$ *всей своей работы?*

3. *Верно ли, что производительность труда прямо пропорциональна времени выполнения работы?*

Проверь себя

1. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v = 2 + 3t$, где v — скорость в момент t, см/с, t — время, с. Через какое время после начала движения ($t = 0$) скорость будет равна 8 см/с?

А. Через 0,5 с. **Б.** Через 1 с. **В.** Через 2 с. **Г.** Через 2,5 с.

2. Велосипедисту предстоит преодолеть 23 км за 2 ч. Вначале он ехал со скоростью 12 км/ч, а затем он снизил скорость до 10 км/ч. Какой участок пути больший — первый или второй — и на сколько?

А. Первый на 5 км. **Б.** Второй на 5 км. **В.** Первый, на 13 км. **Г.** Второй, на 13 км.

3. На изучение математики в 7-м классе в первом семестре выделяют 64 часа. Это время распределяется между алгеброй и геометрией пропорционально числам 3 и 1. На сколько больше часов в первом семестре выделяется на алгебру, чем на геометрию?

А. На 16 ч. **Б.** На 20 ч. **В.** На 24 ч. **Г.** На 32 ч.

4. На одном и том же расстоянии маленький обруч делает на 10 оборотов больше, чем большой. Длина окружности маленького обруча 3 м, а большого — 4 м. Определите это расстояние.

А. 90 м. **Б.** 100 м. **В.** 120 м. **Г.** 150 м.

5. Анна, Оксана, Мария и Татьяна захотели купить одинаковую куклу. Оказалось, что на покупку Анне не хватило 5 зедов, Оксане — 7 зедов, Марии — 8 зедов, а Татьяне — 10 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько стоит кукла, если всех денег у девочек хватало ровно на две куклы?

А. 12 зедов. **Б.** 15 зедов. **В.** 20 зедов. **Г.** Определить невозможно.

6. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

А. 21. **Б.** 24. **В.** 27. **Г.** 30.

Реши сам

1. Координата прямолинейно движущейся точки меняется по закону $x = 5(t + 1)$, где x — координата, м; t — время, с.

1) Какова координата точки в начальный момент времени ($t = 0$)?

2) В какой момент времени координата точки будет равняться 18 м?

2. Во время подготовки к авторалли пилот проезжает на грузовике дистанцию в 400 км. Какое расстояние он должен проехать со скоростью 100 км/ч, чтобы остальной путь преодолевать со скоростью 60 км/ч и на езду потратить 4 ч 24 мин?

3. Покупатель купил две книги, заплатив за них 280 зедов (зед — условная денежная единица). Стоимости книг пропорциональны числам 5 и 2. Сколько стоит каждая книга?

4. На одном и том же расстоянии маленький обруч делает 15 оборотов, а большой — 9 оборотов. Длина окружности маленького обруча на 2 м меньше длины окружности большого обруча. Определите длину окружности каждого обруча.

5. Смешиваются два сорта чая стоимостью 300 зедов и 500 зедов за 1 килограмм (зед — условная денежная единица). Сколько граммов чая высшего сорта нужно взять, чтобы получить 500 граммов смеси стоимостью 35 зедов за 100 граммов?

6. Чтобы сдать в срок книгу в библиотеку, ученик должен был читать ежедневно по 40 страниц, но он читал в день на 15 страниц меньше и сдал книгу на 6 дней позже срока. За сколько дней ученик должен был прочитать книгу?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Воспользуйтесь тем, что при прямолинейном равномерном движении путь, преодолённый движущимся объектом, равен произведению скорости движения на затраченное время.

2. 1) 0,2 ч = 12 мин.; 2) 0,3 ч = 18 мин.; 3) 0,7 ч = 42 мин.; 4) 1,7 ч = 1 ч 42 мин. Воспользуйтесь тем, что при прямолинейном равномерном движении время, затраченное для преодоления некоторого расстояния, равен частному от деления этого расстояния на скорость движения.

3. В и Г. Воспользуйтесь определением линейной зависимости между двумя переменными:

4. В. Воспользуйтесь определением прямой пропорциональной зависимости.

5. Нет. Используйте формулу $s = v \cdot t$.

6. Г. Найдите вначале стоимость 1 кг конфет, а затем — a кг.

7. Одинаково сладки. Воспользуйтесь определением концентрации вещества в растворе.

Концентрацией вещества в растворе называется отношение массы (объёма) этого вещества к массе (объёму) раствора.

8. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{9}{8}$; 4) 10. Воспользуйтесь основным свойством пропорции.

9. 270 км. Воспользуйтесь тем, что расстояния между пунктами на местности пропорциональны расстояниям между этими пунктами на карте. Примените основное свойство пропорции.

10. 1) 2; 2) $\frac{82}{15}$. Подставьте в данное выражение значения соответствующих букв.

11. 1) $x = 2$; 2) $x = 3$. Воспользуйтесь алгоритмом решения линейного уравнения с одной переменной:

1) **избавиться от знаменателей (если они есть);**

2) раскрыть скобок;

3) перенести слагаемые, содержащие переменную, в одну сторону, а остальные — в другую, меняя при этом знаки переносимых слагаемых на противоположные;

4) привести подобные члены.

12. $x = \frac{bt}{a}$. Выразите вначале через данные количество страниц, которые оператор может набрать за 1 час, а затем — за t часов.

13. $t = \frac{ac}{b}$ часов. Выразите вначале через данные время, за которое оператор может набрать 1 страницу, а затем — c страниц.

14. 1) $6x = 4(x + 2)$. Выразите через x количества деталей, которые изготовляет каждый рабочий за указанное время, и приравняйте их. 2) $3(x + (x + 40)) = 360$. Воспользуйтесь тем, что при движении двух объектов навстречу друг другу скорость их сближения равна сумме скоростей их движения. 3) $170x + 120(x + 2) = 820$. Выразите через x стоимости указанных масс конфет и печенья.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 6 см/с. **2.** $t = 2$ с. **3.** Через 3 с.

Задача 2. 1. 4 км. **2.** За 6 мин. **3.** За 24 мин. **4.** 6 км.

Задача 3. 1. 900 тыс. зедов и 600 тыс. зедов. **2.** 15 тыс. зедов и 10 тыс. зедов. **3.** 1 млн. 200 тыс. зедов.

Задача 4. 1. 90. **2.** 240 м. **3.** 270 м. **4.** На 60 оборотов.

Задача 5. 1. 2,88 зеда. **2.** 0,12 л. **3.** 24 зеда.

Задача 6. 1. $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ части работы в час. **2.** За 2 ч. **3.** Нет.

Ответы на задания «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6
В	Б	Г	В	Б	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. а) 5 м; б) t = 2,6 с. Решите данное в условии уравнение относительно t при s = 18.

2. 340 км. Обозначьте искомое расстояние какой-нибудь буквой.

3. 200 зедов и 80 зедов. Разделите общую стоимость книг в заданном отношении.

4. 3 м и 5 м. Воспользуйтесь тем, что оба обруча преодолели одинаковое расстояние.

5. 125 г. Обозначьте массу более дорогого чая в смеси какой-нибудь буквой, выразите через неё массу более дешёвого чая и стоимости каждого сорта чая в смеси, составьте уравнение.

6. За 10 дней. Выразите двумя способами количество страниц в книге.

3. Линейные уравнения с двумя переменными

В уравнениях, которые встречались в рассмотренных задачах, использовалась одна переменная. И этого было достаточно для их решения. Иногда приходится вводить две переменные. Если составлено одно уравнение с двумя переменными, то, как правило, оно имеет бесконечно много решений. Однако есть задачи, в которых достаточно найти какое-то соотношение между ними: сумму, отношение и т. д.

Напомним основные понятия, связанные с линейными уравнениями с двумя переменными.

Линейные уравнения с двумя переменными имеют вид $ax + by = c$, где x, y — переменные, числа a и b — коэффициенты при переменных, c — свободный член.

Если $c = 0$, то линейное уравнение называют однородным.

Упорядоченную пару чисел (x_0; y_0) называют решением уравнения $ax + by = c$, если числовое равенство $ax_0 + by_0 = c$ является верным.

Обратите внимание на то, что в уравнение $ax + by = c$ переменные x и y входят в первой степени, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Если же один из коэффициентов a или b равен нулю, то уравнение становится линейным уравнением с одной переменной. Если же оба коэффициента a и b равны нулю, то уравнение не имеет решения при $c \neq 0$.

Готовимся к решению задач

1. Величины a и b связаны соотношением: $2a + 6b = 3(a + b)$. Какая из этих величин больше и во сколько раз?

А. a в 2 раза. **Б.** a в 3 раза. **В.** b в 2 раза. **Г.** b в 3 раза.

2. В банке денежный вклад вырастает за год на 5%. Сколько денег будет у вкладчика через год, если он положит в банк 500 зедов (зед — условная денежная единица)?

А. 725 зедов. **Б.** 575 зедов. **В.** 550 зедов. **Г.** 525 зедов.

3. После повышения на 20% цена товара составила 90 зедов (зед — условная денежная единица). Какова была начальная цена товара?

А. 50 зедов. **Б.** 60 зедов. **В.** 75 зедов. **Г.** 80 зедов.

4. Плата за квартиру выросла с 240 зедов за месяц до 360 зедов (зед — условная денежная единица). На сколько процентов выросла плата за квартиру?

А. На 60%. **Б.** На 50%. **В.** На $33\frac{1}{3}$%. **Г.** На 20%.

5. Какое из приведенных уравнений не является линейным уравнением с двумя переменными?

А. $2x+3y=0$. **Б.** $5x-3y=2$. **В.** $x^2+y^2=4$. **Г.** $-3x+5y=1$.

6. Какая из приведенных пар чисел не является решением уравнения $2x-3y=5$?

А. (7; 3). **Б.** (–1; 1). **В.** (13; 7). **Г.** (4; 1).

7. Сколько решений имеет уравнение: 1) $2x+y=7$; 2) $2x+y=0$;

3) $2x+y=1$; 4) $2x+by=1$; 5) $ax+by=1$?

8. В футбольном турнире за победу команде присуждают 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Составьте формулу для вычисления количества очков N у команды, которая x игр выиграла, y игр свела вничью, а остальные проиграла.

9. Известно, что 1 кг конфет стоит a зедов, а 1 кг печенья — b зедов. Купили 5 кг конфет и 3 кг печенья (зед — условная денежная единица). Составьте формулу для стоимости покупки S.

Решение задач

Иногда решение задачи приводит к составлению одного линейного уравнения с двумя переменными. При этом требуется найти не значения каждой из этих переменных, а определённое соотношение между ними.

Задача 1. Агент по продаже недвижимости продал две квартиры. За одну он получил прибыль в размере 20%, а за другую — в размере 30%. Его общая прибыль составила 24% от стоимости квартир, по которой он их приобрел. Во сколько раз цена, оплаченная агентом за первую квартиру, больше цены, оплаченной им за вторую квартиру?

Анализируем. В условии задачи известны проценты, которые составляют прибыли агента от стоимости каждой квартиры, по которой они были приобретены. Введя обозначения для этих стоимостей, можно будет выразить через них прибыли, полученные от продажи каждой квартиры, общую прибыль, общую стоимость. Зная процент, который составляет общая прибыль от общей стоимости квартир, по которой они были приобретены, можно будет составить уравнение для введенных переменных.

Это будет уравнение с двумя переменными. Но в задаче не требуется найти значения каждой переменной. Достаточно найти их отношение.

Решаем. Обозначим через x зедов и y зедов цены, заплаченные агентами за первую и вторую купленные квартиры соответственно (зед — условная денежная единица). Тогда от продажи первой квартиры агент получил прибыль, равную $\frac{20 \cdot x}{100} = 0{,}2x$ (зедов), а от продажи второй − $\frac{30 \cdot y}{100} = 0{,}3y$ (зедов). Его прибыль от продажи двух квартир составила $\frac{24 \cdot (x + y)}{100} = 0{,}24(x + y)$ (зедов). Составим уравнение: $0{,}2x + 0{,}3y = 0{,}24(x + y)$.

Получили одно уравнение с двумя переменными, причём все условия использованы. Преобразуем составленное уравнение:

$0{,}2x + 0{,}3y = 0{,}24x + 0{,}24y$, $0{,}06y = 0{,}04x$, $3y = 2x$.

Отсюда $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. Следовательно, искомое отношение равно $\frac{3}{2}$ или 1,5, то есть цена, оплаченная агентом за первую квартиру в полтора раза больше цены, оплаченной им за вторую квартиру.

Ответ. В полтора раза.

1. *На сколько процентов первая квартира дороже второй?*

2. *За какую квартиру агент получил большую прибыль: за первую или за вторую?*

3. *Сколько процентов составляет прибыль, полученная агентом от продажи двух квартир от стоимости: а) первой квартиры; б) второй квартиры?*

В задаче 1 появилось уравнение с двумя неизвестными, но, «к счастью», нам достаточно было найти их отношение, а его легко удалось найти из уравнения.

При решении некоторых задач нетрудно составить уравнение, содержащее два неизвестных. И если оно приводится к виду $ax = by$, то можно найти отношение искомых неизвестных.

В общем случае линейное уравнение с двумя переменными имеет бесконечно много решений. Например, уравнению $2x - 3y = 9$ удовлетворяют пары чисел (6; 1), (9; 3), (12; 5), … . Легко заметить, что они получены путём выбора нечётных значений переменной y ($y = 1$, $y = 3$, $y = 5$, …) и нахождения значений переменной x из полученного линейного уравнения с одной переменной. А поскольку y может быть любым числом, то и решений уравнение имеет сколько угодно.

Иногда при решении практических задач требуется найти решение линейного уравнения с двумя переменными, удовлетворяющее условиям, но искомыми являются значения переменных, удовлетворяющие дополнительным условиям.

Решить уравнение — это значит найти все его решения или доказать, что оно не имеет решений.

Задача 2. В домашней контрольной работе было предложено 20 задач. За задачу, решённую без существенных погрешностей, насчитывали 5 баллов, за решение с существенными погрешностями — 2 балла, за нерешенную — 0 баллов. Ученик набрал 21 балл. Какое наименьшее количество задач он мог не решить?

Анализируем. Так как известно количество всех задач и нужно найти количество нерешённых, то достаточно знать, сколько задач решено полностью и сколько частично. А для поиска этих количеств можно воспользоваться тем, что известно общее количество набранных баллов и количество баллов, насчитываемых за полное и за частичное решение задачи.

Решаем. Обозначим через x количество задач, которые учащийся решил без существенных погрешностей, а через y — количество задач с существенными погрешностями. Тогда $5x + 2y$ — количество баллов, полученных учащимся за эти задачи. Оно равно 21, так как за нерешённые задачи баллы не насчитывались.

Имеем линейное уравнение с двумя переменными: $5x + 2y = 21$.Ясно, что x и y — натуральные числа, причём x не превышает 4, а y не превышает 10. Так как $2y$ — чётное число, 21 — нечётное число, то $5x$ и x — нечётные числа, причём x может принимать только значения 1 и 3. Тогда y принимает соответственно значения 8 и 3. Количество нерешённых задач может равняться $20 – (1 + 8) = 11$ или $20 – (3 + 3) = 14$. Наименьшим из этих чисел является число 11.

Ответ. 11.

1. *Какое наибольшее количество задач учащийся мог решить?*

2. *Каким был бы ответ в задаче, если бы в домашней контрольной работе было предложено 15 задач, а остальные условия оставались бы неиз-*

менными?

3. *Каким был бы ответ в задаче, если бы за задачу, решённую без существенных погрешностей, насчитывали 6 баллов, за решение с существенными погрешностями — 3 балла, за нерешенную — 0 баллов, а остальные условия оставались бы неизменными?*

К линейным уравнениям с двумя переменными приводят и многие задачи на проценты.

Задача 3. В некоторой фирме 4% работающих мужчин и 6% работающих женщин старше 60 лет. Всего в фирме старше 60 лет 5,1% всех сотрудников. Сколько процентов от общего количества сотрудников фирмы составляют женщины?

Анализируем. Введя обозначения для количества всех сотрудников фирмы и, например, для количества работающих женщин, можно на основании условия выразить через эти обозначения количество всех сотрудников, старше 60 лет, количество мужчин фирмы старше 60 лет и количество женщин фирмы старше 60 лет. Это позволит составить уравнение, решив которое, можно будет выразить количество женщин, работающих в фирме, через количество всех сотрудников. Отсюда нетрудно будет получить ответ на поставленный вопрос.

Решаем. Обозначим через a количество сотрудников фирмы, а через x — количество женщин, работающих в фирме. Тогда количество мужчин, работающих в фирме, равно $a - x$. По условию, 4% работающих мужчин и 6% работающих женщин старше 60 лет. То есть в фирме работает $0{,}04(a - x)$ мужчин и $0{,}06x$ женщин, старших 60 лет. Так как в фирме старше 60 лет 5,1% всех сотрудников, то их количество равно $0{,}51a$. Имеем уравнение: $0{,}04(a - x) + 0{,}06x = 0{,}051a$.

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим: $0{,}02x = 0{,}011a$ или $\frac{x}{a} = 0{,}55$. Итак, женщин в фирме 55%.

Ответ. 55%.

1. *Если в фирме работает 1000 человек, то сколько в фирме мужчин, сколько женщин, сколько сотрудников старше 60 лет, сколько из них мужчин и сколько женщин?*

2. *Чему, кроме 1000, может равняться количество сотрудников в фирме?*

3. *Может ли количество сотрудников фирмы быть меньше 1000 человек?*

Проверь себя

1. На предприятии два цеха. В результате совершенствования технологии производительность труда в одном цеху выросла на 10%, а в другом — на 15%. На всём предприятии она выросла на 12%. В каком цеху до изменения технологии была выше производительность труда и во сколько раз.

А. В первом, в 2 раза. **Б.** Во втором, в 2 раза.

В. В первом, в 1,5 раза. **Г.** Во втором, в 1,5 раза.

2. За размещение рекламы в газете, рекламодатель платит x зедов за каждый знак в тексте и y зедов — за каждый см^2 площади газетной страницы (зед — условная денежная единица). Заказан текст, содержащий 20 000 знаков, занимающий площадь 100 см^2, за заказ заплачено 200 зедов. Какое из приведенных уравнений соответствует этому заказу?

А. $100x + 20000y = 200$. **Б.** $20000x + 100y = 200$.

В. $20100(x + y) = 200$. **Г.** $\dfrac{20000}{x} + \dfrac{100}{y} = 200$.

3. В школе 60% мальчиков и 40% девочек занимаются спортом. Всего спортом занимается 51% учащихся школы. Сколько процентов учащихся школы составляют девочки?

А. 55%. **Б.** 50%. **В.** 45%. **Г.** 42%.

Реши сам

1. Средний возраст преподавателей и студентов в некотором колледже состав ляет 20 лет. При этом средний возраст студентов — 18 лет, а преподавателей — 40 лет. Во сколько раз студентов в колледже больше, чем преподавателей?

2. Учащиеся начальной школы на уроке математики выкладывают из палочек пятиугольники и шестиугольники. Всего в наборе 100 палочек. Сколько различных наборов многоугольников можно выложить, чтобы использованными оказались все палочки и был выложен хотя бы один многоугольник каждого типа?

3. Цену на одну книгу сначала повысили на 50%, а затем уменьшили на 50%, а на другую — сначала уменьшили на 50%, потом увеличили на 50%. В итоге разность между ценами стала равняться 6 зедам (зед — условная денежная единица). Какова разность первоначальных цен?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Раскройте скобки, приведите подобные.

2. Г. Воспользуйтесь правилом нахождения процента от числа.

3. В. Воспользуйтесь тем, что 90 зедов составляют 120% от начальной цены.

4. Б. Найдите вначале, на сколько зедов выросла плата за квартиру, а затем процентное отношение найденного значения к прежней плате за квартиру.

5. В. Воспользуйтесь определением линейного уравнения с двумя переменными.

6. Б. Воспользуйтесь определением решения линейного уравнения с двумя переменными.

7. 1) – 4) Бесконечно много; 5) если $a = b = 0$, то ни одного, в остальных случаях бесконечно много.

8. $N = 3x + y$. Выразите через x количество очков, набранных в выигрышных играх, а через y — в ничейных. Обратите внимание на то, что за поражение очки не присуждаются.

9. $S = 5a + 3b$. Выразите через a стоимость купленных конфет, а через b — купленного печенья.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. На 50%. **2.** Одинаковы. **3.** а) 40%; б) 60%.

Задача 2. 1. 9. **2.** 6. **3.** 14.

Задача 3. 1. 450; 550; 51; 18; 33. **2.** Например, 2 000. **3.** Нет.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
В	Б	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. В 10 раз. Введите обозначения для количества студентов и для количества преподавателей, выразите через эти переменные двумя способами сумму возрастов всех студентов и всех преподавателей.

2. 3. Введите обозначения для количеств пятиугольников и шестиугольников, выразите через них количество использованных палочек. Обратите внимание на то, что должен быть выложен хотя бы один многоугольник каждого типа.

3. 8 зедов. Введите обозначения для начальных цен обеих книг, выразите через эти переменные изменённые цены каждой книги и разность между ними.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы**.**

Критерии оценок

Оценка		**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	5 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	8 задач	6 задач
«отлично»	Решено не менее	11 задач	9 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа запишите букву «Д».

1. Купили 165 билетов в театр и в цирк, причём билетов в театр в 2 раза меньше, чем в цирк. На сколько больше купили билетов в цирк, чем в театр?

А. На 35. **Б.** На 45. **В.** На 55. **Г.** На 65.

2. За стиральную машину и её установку заплатили 2940 зедов (зед — условная денежная единица). Стоимость установки на 2660 зедов дешевле стоимости машины. Сколько стоит стиральная машина?

А. 2840 зедов. **Б.** 2800 зедов. **В.** 2780 зедов. **Г.** 2760 зедов.

3. Один арбуз на 5 кг легче второго и в три раза легче третьего. Первый и третий арбузы вместе в два раза тяжелее второго. Чему равна общая масса трёх арбузов?

А. 20 кг. **Б.** 25 кг. **В.** 30 кг. **Г.** 35 кг.

4. Три ящика наполнены орехами. Во втором ящике на 10% орехов больше, чем в первом, а в третьем на 20% меньше, чем в первом. Сколько всего орехов в трёх ящиках, если в первом на 80 орехов больше, чем в третьем?

А. 960. **Б.** 1012. **В.** 1060. **Г.** 1160.

5. Средний рост всех 12 членов баскетбольной секции школы равен 180 см. Самого высокого члена этой секции перевели в школу олимпийского резерва. Тогда средний рост оставшихся членов секции составил 178 см. Каков рост баскетболиста, переведенного в школу олимпийского резерва?

А. 190 см. **Б.** 196 см. **В.** 198 см. **Г.** 202 см.

6. Расстояние, пройденное спортсменом, меняется по закону $s = 8t$, где s — расстояние, пройденное к моменту t, км, t — время, ч. Сколько времени понадобится спортсмену, чтобы пройти 26 км?

А. 3 ч 45 мин. **Б.** 3 ч 30 мин. **В.** 3 ч 25 мин. **Г.** 3 ч 15 мин.

7. Каждое утро на тренировке спортсмен-автомобилист проезжает дистанцию в 240 км. Какое расстояние он должен проехать со скоростью 200 км/ч., чтобы оставшийся путь преодолеть со скоростью 120 км/ч. и на езду затратить 80 мин?

А. 120 км. **Б.** 160 км. **В.** 180 км. **Г.** 200 км.

8. Из 360 г шерсти можно связать шарф шириной 10 см и длиной 2 м. Сколько шерсти потребуется на шарф шириной 40 см и длиной 1 м?

А. 360 г. **Б.** 540 г. **В.** 720 г. **Г.** 900 г.

9. Длина окружности велосипедного колеса равна 210 см. Сколько оборотов сделает колесо в течение 1 мин., если скорость велосипедиста равна 7 м/с?

А. 100. **Б.** 200. **В.** 300. **Г.** 400.

10. Библиотека купила на равные суммы несколько одинаковых книг по математике и несколько одинаковых книг по физике, причём книг по физике куплено на 20 экземпляров меньше, чем по математике. Сколько куплено книг по математике, если книга по физике стоит 25,2 зеда, а по математике — 14 зедов (зед — условная денежная единица)?

А. 25. **Б.** 45. **В.** 50. **Г.** 90.

11. Чтобы выполнить вовремя заказ, бригада должна была изготовлять в день по 40 деталей. Однако она изготовляла ежедневно на 20 изделий больше и выполнила заказ на 3 дня раньше срока. Каков был срок выполнения заказа?

А. 6 дней. **Б.** 7 дней. **В.** 8 дней. **Г.** 9 дней.

12. Петя разрезал прямоугольник прямыми, параллельными одной из сторон, на 5 не обязательно одинаковых частей. Федя на столько же частей разрезал такой же прямоугольник, но прямыми, параллельными смежной стороне. Сумма периметров всех 10 прямоугольников равна 120 см. Каков периметр данного прямоугольника?

А. 20 см. **Б.** 30 см. **В.** 40 см. **Г.** Другой ответ.

13. Половину комнатной книжной полки занимают словари толщиной 5 см, другую половину — энциклопедии толщиной 7 см. Сколько книг из приведенных количеств может стоять на книжной полке?

А. 15. **Б.** 13. **В.** 12. **Г.** 10.

14. В цитрусовой роще растут апельсины и мандарины. К некоторому моменту было собрано 70% мандарин и 80% апельсин, всего 72% цитрусовых плодов. Какой процент всех цитрусовых в этой роще составляют мандарины?

А. 80%. **Б.** 78%. **В.** 76%. **Г.** 72%.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Чтобы получить положительный ответ на этот вопрос, пользуйтесь образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. В двух ящиках было по 60 бананов. После того, как из одного ящика взяли в 3 раза больше бананов, чем из другого, в нём осталось бананов в два раза меньше, чем во втором. Сколько бананов осталось в ящиках?

2. Сестре и брату вместе 27 лет. Шесть лет тому назад брат был в 1,5 раза старше сестры. Сколько лет брату и сколько сестре?

3. Для трёх аквариумов требуется 61 л воды. Первый аквариум вмещает воды в 1,5 больше, чем третий, а второй — на 5 л больше, чем третий. Сколько литров воды вмещает каждый аквариум?

4. В магазине во время продажи канцелярских товаров действует скидка: 10% от стоимости купленных товаров для тех, кто покупает одновременно на сумму, не меньшую 500 зедов (зед — условная денежная единица). Для тех, кто покупает на сумму, большую 700 зедов, существует дополнительная скидка — 5% от суммы свыше 700 зедов. Какую сумму заплатили за канцелярские товары, если благодаря скидкам сэкономили 100 зедов?

5. Из судей, оценивавших выступление фигуриста, 20% поставили ему 5,9 балла, 40% — 5,7, один судья оценил выступление 5,2 баллами, остальные поставили по 5,4 балла. Средняя оценка равнялась 5,6. Сколько судей оценивали выступление фигуриста?

6. Если в начале нагревания вода имела температуру 20° и каждую минуту её температура увеличивалась на 5°, то зависимость температуры T воды от времени t её нагревания выражается формулой: $T = 5t + 20$. При каком значении t вода закипит?

7. Каждое утро на тренировке велосипедист проезжает дистанцию в 20 км. Какое расстояние он должен проехать со скоростью 36 км/ч., чтобы оставшийся путь преодолеть со скоростью 25 км/ч. и на езду затратить 42,5 мин?

8. Два агента по недвижимости внесли при покупке земельного участка соответственно 45 и 30 тыс. зедов и получили после его продажи прибыль 15 тыс. зедов (зед — условная денежная единица). Как справедливо разделить между ними эту прибыль?

9. По аллее парка двое ребят катят обручи. Один обруч сделал 90 оборотов, а другой — 60 оборотов. Найти длину аллеи, если известно, что длина окружности второго обруча на 1 м больше длины окружности первого.

10. Чтобы угостить подруг, Маша приготовила коктейль из трех видов сока ценой, соответственно, 6, 8 зедов и 24 зеда за литр (зед — условная денежная единица). Стоимости составляющих в коктейле одинаковы. В какую сумму обошелся Маше 1 л коктейля?

11. Оператор должен был выполнить набор рукописи на компьютере за 6 дней. Однако он набирал каждый день на 5 страниц больше запланированного, и за 2 дня до срока ему оставалось набрать 30 страниц. Сколько страниц в рукописи?

12. В связи с эпидемией гриппа посещаемость в начальных классах школы уменьшилась на 45%, а в старших — на 30%, в целом по школе она уменьшилась на 40%. В каких классах — начальных или старших — больше учащихся посещало уроки до эпидемии и во сколько раз?

13. Маша взяла в поход несколько пакетиков чая. Некоторые она использовала для заваривания двух чашек чая, а некоторые — трёх чашек. Всего было заварено 18 чашек. Какое наименьшее количество пакетиков чая могло быть у Маши?

14. Цену на одну книгу сначала повысили на 50%, а затем уменьшили на 50%, а на другую — сначала уменьшили на 50%, потом увеличили на 50%. В итоге суммарная цена двух книг стала равняться 24 зедам (зед — условная денежная единица). Какой была начальная суммарная цена этих книг?

Указания к задачам основного задания

1. Обозначьте какой-нибудь буквой меньшее количество бананов, которое взяли из одного ящика.

Выразите через эту букву количество бананов, взятых из другого ящика, и количества бананов, оставшиеся в каждом из ящиков.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что в одном ящике осталось в два раза больше бананов, чем в другом.

2. Обозначьте какой-нибудь буквой возраст сестры.

Выразите через эту букву возраст брата в настоящее время, а также возрасты брата и сестры шесть лет тому назад.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что шесть лет тому назад брат был старше сестры в полтора раза.

3. Обозначьте какой-нибудь буквой количество литров воды в третьем аквариуме.

Выразите через эту букву количество воды в первом и втором аквариумах.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известен объём воды в трёх аквариумах.

4. Обозначьте какой-нибудь буквой стоимость купленных товаров.

Выразите через эту букву сумму скидок.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известна сэкономленная сумма.

5. Обозначьте какой-нибудь буквой количество судей.

Выразите через эту букву сумму баллов, поставленных судьями.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что сумма баллов равна произведению средней оценки на количество судей.

6. Выразите из формулы, приведенной в задании, время t через температуру T. Вспомните, при какой температуре вода закипает.

7. Обозначьте какой-нибудь буквой расстояние, которое велосипедист должен проехать со скоростью 36 км/ч.

Выразите через эту букву оставшееся расстояние, а также время, которое он затратит на преодоление каждого из этих участков.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известно общее время движения велосипедиста.

8. Обозначьте какой-нибудь буквой прибыль одного агента.

Выразите через эту букву прибыль другого агента.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что прибыль пропорциональна вложенным средствам.

9. Обозначьте какой-нибудь буквой длину окружности одного из обручей.

Выразите через эту букву длину окружности другого обруча, а также расстояние, которое они преодолели.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что оба обруча преодолели одно и то же расстояние.

10. Обозначьте какой-нибудь буквой стоимость 1 л коктейля.

Выразите через эту букву объём каждого вида сока в 1 л коктейля, учитывая, что стоимости всех составляющих коктейля одинаковы.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известна сумма объёмов каждого вида сока.

11. Обозначьте какой-нибудь буквой количество страниц, которое набирал оператор за один день.

Выразите через эту букву количество страниц, которое планировалось оператору набирать за один день, а также количество страниц в рукописи.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что количество страниц в рукописи можно найти двумя способами.

12. Обозначьте какими-нибудь буквами количество учащихся, которые до эпидемии посещали уроки в начальных классах школы и такое же количество учащихся в старших классах.

Выразите через эти буквы, на сколько уменьшилось количество учащихся в начальных, старших классах и в целом по школе, посещавших уроки во время эпидемии.

Составьте уравнение, при решении которого обратите внимание на то, что нужно найти отношение значений, для которых введены обозначения.

13. Обозначьте какими-нибудь буквами количества пакетиков, которые были использованы для заваривания двух чашек чая и для заваривания трёх чашек чая.

Выразите через эти буквы количество заваренных чашек.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известно, сколько всего было заварено чашек чая.

14. Обозначьте какими-нибудь буквами первоначальные цены книг.

Выразите через эти буквы стоимости этих книг после двух переоценок.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известна суммарная стоимость книг после переоценок.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. Для оклеивания двух комнат купили обои. На оклеивание первой комнаты ушло на 2 рулона больше половины купленных рулонов, а на оклеивание второй комнаты ушло $\frac{2}{3}$ количества рулонов, использованных на оклеивание первой комнаты. Сколько купили рулонов обоев, если после оклеивания обеих комнат остался один неиспользованный рулон?

2. В классе 28 учащихся. Известно, что каждая девочка дружит с четырьмя мальчиками. Мальчиков больше, чем девочек, и каждый из них дружит с одинаковым количеством девочек. Сколько в классе девочек?

3. Трое мужчин пришли к парикмахеру. Обслужив первого, парикмахер сказал; «Посмотри, сколько денег в ящике стола, положи ещё столько же и возьми 4 зеда сдачи (зед — условная денежная единица). То же сказал парикмахер и второму, и третьему. Когда они ушли, оказалось, что в ящике денег не прибавилось. Сколько денег было в ящике до обслуживания первого клиента?

4. Вася выиграл у компьютера 60% игр. Отдохнув, он продолжил играть и выиграл ещё 10 игр подряд. Процент выигрышных игр составил 70. Сколько примерно времени потратил Вася на все игры, если одна игра длилась в среднем 3 минуты?

5. Известно, что 10% учащихся, писавших контрольную работу, выполнили все четыре задания контрольной работы, $26\frac{2}{3}\%$ выполнили три задания, $33\frac{1}{3}\%$ — два задания, $13\frac{1}{3}\%$ — одно задание и $16\frac{2}{3}\%$ не выполнили ни одного задания. При этом среднее количество заданий, выполненных одним учащимся, равно 2. Сколько заданий было в контрольной работе?

6. Городские часы отбивают ежечасно нужное число раз, и, кроме того, бьют один раз в половину каждого часа. Пока Юра сидел в скверике около часов, часы начинали бить пять раз, а всего он насчитал 35 ударов. После последнего из них он встал и пошел домой. Когда это произошло?

7. Каждое утро на тренировке велосипедист проезжает дистанцию в 20 км. Некоторое расстояние он проезжает со скоростью 36 км/ч, на 4 км меньше — со скоростью 30 км/ч. Какое расстояние он должен проехать со скоростью 36 км/ч, чтобы оставшийся путь преодолеть со скоростью 24 км/ч и затратить 44 мин?

8. Призы на сумму 12 400 зедов были присуждены трём призёрам соревнования так, что сумма, полученная вторым призёром, составила $\frac{2}{3}$ суммы, полученной первым призёром (зед — условная денежная единица). В то же время, сумма, полученная вторым призёром, относится к сумме, полученной третьим призёром, как $1\frac{1}{3}:\frac{4}{5}$. Какую сумму получил каждый призёр?

9. На одном и том же расстоянии один обруч делает 15 оборотов, второй — 12 оборотов, а третий — 9 оборотов. Длина окружности самого маленького обруча на 2 м меньше длины окружности самого большого обруча. Какова длина окружности среднего обруча?

10. Чтобы угостить подруг, Маша приготовила коктейль из трех видов сока ценой, соответственно, 6, 8 зедов и 24 зеда за литр. Стоимости составляющих в коктейле относятся, как 1:3:5. В какую сумму обошелся Маше 1 л коктейля?

11. Двум операторам предстоит набрать 160 страниц текста. Один из них набирает страницу текста за 6 минут, а второй — за 10 минут. Сколько страниц должен набрать каждый, чтобы эта работа была завершена в кратчайшее время?

12. В связи с сезонными колебаниями цены на одни составляющие (овощные) борщевого набора увеличились на 20%, а на остальные (мясные) — уменьшились на 25%. В результате стоимость борщевого набора уменьшилась на 7%. Что стоило дороже до изменения цен — овощные или мясные составляющие борщевого набора и во сколько раз?

13. Учащиеся выполняли тест, содержащий задания по алгебре и геометрии. За каждый верный ответ на алгебраический вопрос выставлялось 3 балла, а на

геометрический — 4 балла. Ученик верно ответил на все вопросы теста и получил 100 баллов. Какое наибольшее количество заданий могло быть:
1) в тесте;   2) по алгебре в тесте; 3) по геометрии в тесте?

14. Сергей купил несколько тетрадей по 4 зеда за тетрадь и несколько карандашей по 5 зедов за карандаш, заплатив за всю покупку 60 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько тетрадей купил Сергей?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Обозначьте какой-нибудь буквой количество купленных рулонов обоев.

Выразите через эту букву количества обоев, которые ушли на оклеивание каждой комнаты.

Составьте уравнение, воспользовавшись двумя выражениями для количества купленных рулонов.

2. Обозначьте какими-нибудь буквами количество мальчиков и количество девочек в классе.

Выразите через эти буквы количества «дружб» девочек с мальчиками и мальчиков с девочками.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что выраженные количества «дружб» равны.

3. Обозначьте какой-нибудь буквой сумму денег в ящике до прихода первого клиента.

Выразите через эту букву сумму денег в ящике после расчёта первого клиента, второго клиента, третьего клиента.

Составьте уравнение, используя условие задачи.

4. Обозначьте какой-нибудь буквой количество игр, сыгранных Васей.

Выразите через эту букву количество выигранных игр двумя способами.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что два выражения для количества выигранных игр равны.

5. Обозначьте какой-нибудь буквой количество тестов в серии.

Выразите через эту букву суммы набранных баллов во всех испытаниях, кроме последнего, на основе результата тестирования, полученного Ваней, и предполагаемого результата.

Составьте уравнение, пользуясь условием задачи.

6. Обозначьте какой-нибудь буквой наименьшее количество ударов, которое слышал мальчик, и соответствующее показателям целого числа часов.

Выразите через эту букву количество всех ударов, учитывая то, часы начинали бить пять раз, рассмотрев два случая: первый удар регистрировал целое число часов или половину часа.

Составьте уравнение для каждого случая и исследуйте, имеют ли они целые решения.

7. Обозначьте какой-нибудь буквой расстояние, которое велосипедист проезжает со скоростью 36 км/ч.

Выразите через эту букву расстояние, которое велосипедист проезжает со скоростью 30 км/ч, и расстояние, которое он должен преодолеть со скоростью 24 км/ч, а также время, которое он затрачивает на преодоление каждого участка пути.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что за 44 минуты велосипедист должен преодолеть 20 км.

8. Обозначьте какой-нибудь буквой сумму призовых, полученных первым призёром.

Выразите через эту букву суммы призовых второго и третьего призёров.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известна общая сумма призовых.

9. Обозначьте какой-нибудь буквой расстояние, указанное в задаче.

Выразите через эту букву длины окружностей обручей.

Составьте уравнение, воспользовавшись условием задачи.

10. Обозначьте какой-нибудь буквой стоимость одной составляющей коктейля.

Выразите через эту букву стоимости остальных составляющих коктейля.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что известна сумма объёмов всех составляющих коктейля.

11. Обозначьте какой-нибудь буквой количество страниц, которые набрал один из операторов.

Выразите через эту букву время работы каждого оператора.

Составьте уравнение, воспользовавшись тем, что время работы будет кратчайшим, когда операторы одновременно закончат работу.

12. Обозначьте какими-нибудь буквами стоимости составляющих борщевого набора до изменения цен.

Выразите через эти буквы стоимости составляющих борщевого набора после изменения цен, а также общую стоимость борщевого набора после изменения цен.

Составьте уравнение, воспользовавшись равенством двух выражений для общей стоимости борщевого набора после изменения цен.

13. Обозначьте какими-нибудь буквами количество заданий по алгебре и количество заданий по геометрии.

Выразите через эти буквы количество баллов, полученное учеником.

Составьте уравнение и решите его, воспользовавшись тем, что неизвестные принимают натуральные значения.

14. Обозначьте какими-нибудь буквами количество купленных тетрадей и количество купленных карандашей.

Выразите через эти буквы стоимости купленных тетрадей и количество купленных карандашей.

Составьте уравнение, воспользовавшись условием задачи.

При решении уравнения воспользуйтесь тем, что неизвестные принимают натуральные значения.

Задачи для исследования

1. n человек несут n одинаковых предметов. Каждый мужчина несёт по 8 предметов, женщина — по 2 предмета, ребёнок — по одному предмету.

1) Найти наименьшее значение n, при котором возможна приведенная ситуация.

2) Найти количества мужчин, женщин и детей, если n кратно 5, и среди несущих предметы есть хотя бы один мужчина, хотя бы одна женщина и хотя бы один ребёнок.

3) При каких n детей среди несущих предметы нет?

4) При каких n женщин среди несущих предметы нет?

2. Дано уравнение $(a - 1)(x + 2) + 1 = a^2$. При каких значениях a оно имеет: 1) единственное решение; 2) бесконечно много решений. Может ли оно не иметь решений?

3. Дано уравнение $(a - 2)(x - 1) = a$. При каких значениях a оно: 1) имеет нулевое решение; 2) не имеет решений. Может ли оно иметь бесконечно много решений?

4. Решить уравнение $ax + b^2 = bx + a^2$.

5. Пешеход, идущий к поезду прошёл за первый час a км. Затем он рассчитал, что, двигаясь дальше с той же скоростью, он опоздает на t_1 ч. Поэтому остальной путь он прошёл со скоростью b км/ч. Время его прихода на вокзал отличается от времени отправления поезда по расписанию на t_2 ч. При каких значениях t_2 он придёт: 1) до отхода поезда; 2) после отхода поезда? Какой путь прошёл пешеход в каждом случае?

6. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые 2 с, вторые — через каждые 3 с. Одинаковые удары воспринимаются как один. Сколько могло быть насчитано ударов? Для каждого возможного количества ударов укажите время на первых часах.

7. Сформулируйте и решите аналогичную задачу для часов, на циферблате которых 24 деления (такие часы имеются, например, в Праге).

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Линейные уравнения и их применения

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие