Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Системы линейных уравнений и их применения

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Системы линейных уравнений и их применения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов. — 59 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 8-9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 от 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, формирование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения учащимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 8-9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных целей можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено системам линейных уравнений и их применениям для решения жизненных задач. К поиску неизвестных сводится большинство прикладных задач. Очень часто этот поиск можно свести к поиску решения системы линейных уравнений. Системы линейные уравнений составляют, с одной стороны, наиболее простой вид систем уравнений, а с другой стороны — очень важный.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для по

нимания приведенных решений задач и поиска решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком .

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью модуля состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого модуля, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после решения каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить или приобрести тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, воз-

вратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Системы линейных уравнений и их применения

Одним из важнейших методов нахождения неизвестных количеств, значений величин является метод составления уравнений. Напомним, в чём состоит сущность этого метода.

Вводят по условию задачи буквенное обозначение неизвестного значения величины или количества.

Выражают через введенную букву все другие неизвестные значения величин или количеств.

Составляют два выражения для одного и того же значения величины или количества, в которые входит выбранная буква, и приравнивают их, пользуясь условием.

Полученное равенство называют ***уравнением***. Такой перевод условия задачи на язык математики называют ***составлением уравнения по условию задачи***.

Решают составленное уравнение, находят значение величины или количества, обозначенное введенной буквой. Пользуясь найденным значением неизвестного, выполняют требования задачи. Часто удаётся выбрать неизвестное так, что сразу получают ответ к задаче.

Во многих случаях для перевода задачи на математический язык приходится использовать две буквы, а то и больше букв. При этом получают, в зависимости от условия, несколько уравнений с переменными. Если требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие всем составленным уравнениям, то их называют ***системой уравнений***.

Для обозначения системы линейных уравнений. используют фигурную скобку. Фигурная скобка в записи системы двух уравнений с двумя переменными означает, что нужно найти такую пару значений переменных, которая обращает в верное числовое равенство и первое, и второе уравнения.

В данном пособии будут рассматриваться системы линейных уравнений с несколькими переменными, методы их решения, их применения для нахождения неизвестных количеств или неизвестных значений величин.

1. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Ранее, составляя уравнение по условию задачи, мы вводили одну букву. Но во многих случаях для перевода задачи на математический язык используют две буквы.

Предположим, что надо найти два числа, сумма квадратов которых равна их удвоенному произведению. Обозначим одно число буквой x, а другое − буквой y. Тогда выполняется равенство: $x^2 + y^2 = 2xy$.

Это равенство, составленное по условию задачи, называют ***уравнением с двумя переменными***.

Решением уравнения с двумя переменными называют всякую пару значений переменных, обращающую это уравнение в верное числовое равенство.

Так, решением уравнения $x^2 + y^2 = 2xy$ является пара чисел $x = 5$, $y = 5$. Действительно, равенство $25 + 25 = 2·5·5$ — верное. Точно так же решениями этого уравнения являются пары (3; 3), (–7;–7). А вот пара (3; 1) его решением не является, так как равенство $9 + 1 = 2·3·1$ — неверное.

Среди уравнений с двумя переменными важную роль играют так называемые линейные уравнения с двумя переменными.

Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c — произвольные числа.

В тех случаях, когда нужно найти общие решения двух или более уравнений, говорят, что требуется решить систему уравнений. В записи ~~два~~ уравнения, образующую систему, обозначают фигурной скобкой.

Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, при которых каждое уравнение обращается в правильное числовое равенство.

Например, пара чисел (16; 12) — решение системы $\begin{cases} x + y = 28, \\ 4y = 3x, \end{cases}$ так как она обращает каждое уравнение системы в правильное числовое равенство:

$$16 + 12 = 28;\ 4 \cdot 12 = 3 \cdot 16.$$

Решить систему уравнений — это значит найти все её решения, или доказать, что она решений не имеет.

Готовимся к решению задач

1. Решением уравнения $3x - 5y = 19$ является пара чисел …

А. (–2; –2). **Б.** (2; –2). **В.** (3; –2). **Г.** (–3; –2).

2. Линейное уравнение $ax + by = c$ не имеет решений тогда и только тогда, когда …

А. $a = b = c = 0$. **Б.** $a = b = 0$, $c \neq 0$. **В.** $b = 0$, $a \neq 0$. **Г.** $a = 0$, $b \neq 0$.

3. Какая из приведенных систем уравнений является системой линейных уравнений?

А. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = 1, \\ y = 2. \end{cases}$ **Б.** $\begin{cases} \dfrac{x-2}{y} = 6, \\ x + y = 2. \end{cases}$ **В.** $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$ **Г.** $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

4. Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ x + y = 4 \end{cases}$ является пара чисел ...

А. (–6; 0). **Б.** (0; –6). **В.** (0; 4). **Г.** (4; 0).

5. Решите систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 5x - y = 8, \\ 2x + 3y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 5x + 6y = 9. \end{cases}$

6. Сколько решений может иметь система трёх линейных уравнений с двумя переменными?

7. Составьте систему уравнений для нахождения неизвестных x и y.

1) Купили x роз по 10 зедов за штуку и y гвоздик по 5 зедов за штуку (зед — условная денежная единица). За букет, состоящий из 15 цветков, заплатили 100 зедов.

2) Автобус из города A в город B едет x часов со скоростью 50 км/ч, а автомобиль — y часов со скоростью 80 км/ч. Автомобиль выехал из города A на 1 час позже автобуса и приехал в город B на 1 час раньше автобуса.

3) Одновременно из двух пунктов A и B, расстояние между которыми состав

ляет 300 км, навстречу друг другу выехали два поезда со скоростями x км/ч и y км/ч соответственно. Они встретились через 2 часа, но при этом поезд из A проехал на 40 км больше, чем поезд из B.

8. Для поездки на экскурсию было заказано a автобусов, в каждый из которых планировалось посадить b учащихся. Но 1 автобус вышел из строя, поэтому в каждый автобус посадили на 5 учащихся больше. Выразите двумя способами количество учащихся, отправлявшихся на экскурсию.

Решение задач

При решении прикладных задач нередко можно или обойтись составлением одного уравнения с одной переменной, или составить систему двух уравнений с двумя переменными, что оказывается иногда более понятным.

Задача 1. В классе 28 учащихся. Каждая девочка дружит с четырьмя мальчиками, а каждый мальчик — с тремя девочками. Кого в классе больше: мальчиков или девочек и на сколько?

Анализируем. В условии задачи известна сумма количеств мальчиков и девочек. Можно было бы ввести обозначение, например, для количества мальчиков, тогда количество девочек можно выразить через это обозначение и известную сумму.

Но можно ввести обозначения для обоих указанных количеств. Тогда одно уравнение будет составлено путём приравнивания суммы этих количеств данному числу.

Второе уравнение можно составить, выразив двумя способами количество «дружб» в классе и приравняв эти выражения.

Решаем. Обозначим через x и y соответственно количество мальчиков и количество девочек в классе. Имеем уравнение: $x + y = 28$.

Так каждая девочка дружит с четырьмя мальчиками, то количество «дружб» в классе равно $4y$. Так как каждый мальчик дружит с тремя девочками, то количество «дружб» в классе равно $3x$. Количества «дружб», подсчитанные двумя способами, совпадают. Имеем второе уравнение: $4y = 3x$ или $3x - 4y = 0$.

Составим систему линейных уравнений: $\begin{cases} x + y = 28, \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$

Решим её. Выразим из первого уравнения x через y и подставим полученное выражение во второе уравнение: $\begin{cases} x = 28 - y, \\ 3(28 - y) - 4y = 0. \end{cases}$

Раскрыв скобки в левой части второго уравнения, перенеся член, не содержащий переменных, в правую часть и приводя подобные члены, получим: $\begin{cases} x = 28 - y, \\ 4y + 3y = 84 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 28 - y, \\ 7y = 84. \end{cases}$

Решив второе уравнение и найденное значение y подставив в первое уравнение, будем иметь: $\begin{cases} x = 28 - 12, \\ y = 12 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 16, \\ y = 12. \end{cases}$

Следовательно, в классе 16 мальчиков и 12 девочек. Мальчиков в классе больше, чем девочек, на 16 – 12 = 4 человека.

Ответ. Мальчиков больше, на 4 человека.

1. *Чему равно количество «дружб» в классе?*

2. *Какой ответ был бы в задаче, если бы в классе было 35 учащихся?*

3. *Сколько в классе было бы учащихся, если бы каждая девочка дружила с пятью мальчиками, а каждый мальчик — с четырьмя девочками, и мальчиков было бы больше девочек на 4 человека?*

В задачах, в которых известной была, например, сумма или разность двух значений величины, мы вводили обозначение для одного из них, тогда второе значение выражалось через известную сумму или разность и введенное обозначение. Как правило, получали уравнение с одной переменной. В этих случаях можно ввести обозначения для обоих значений рассматриваемой величины, если позволяет условие, составить два уравнения с двумя переменными, то есть систему уравнений.

Систему линейных уравнений с двумя переменными вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

можно решить методом подстановки или методом сложения.

Метод подстановки

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений методом подстановки, необходимо выполнить следующие действия:

1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующее значение второй переменной;

5) записать ответ.

Система уравнений в задаче 1 решалась методом подстановки.

Методом подстановки особенно удобно пользоваться тогда, когда хотя бы один из коэффициентов при переменных равен 1 или –1. Именно переменную с этим коэффициентом и нужно выражать через другую.

Пример. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 5x + 4y = 360, \\ 9x + 8y = 684. \end{cases}$

Решение. 1.Выразим переменную y через x из первого уравнения: $y = \dfrac{360 - 5x}{4}$.

2. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы: $9x + 8 \cdot \dfrac{360 - 5x}{4} = 684$.

3. Решим полученное уравнение: $9x + 2(360 - 5x) = 684, x = 36$.

4. Найдём соответствующее значение другой переменной: $y = \dfrac{360 - 5 \cdot 36}{4} = 45$.

5. Запишем ответ: $x = 36, y = 45$.

Ответ. (36; 45).

В задаче 1 была известна сумма двух значений некоторой величины. В следующей задаче будет задана разность двух значений.

Задача 2. Группа туристов отправилась в поход на байдарках. Часть байдарок были двухместные, а часть — трёхместные, причём двухместных было на две больше, чем трёхместных. Сколько двухместных и сколько трёхместных байдарок участвовало в походе, если группа состояла из 29 человек и все места были заняты?

Анализируем. В условии задачи известна разность количеств двухместных и трёхместных байдарок. Если ввести обозначение, например, для количества трёхместных байдарок, тогда количество двухместных байдарок можно выразить через это обозначение и известную разность.

Но можно ввести обозначения для обоих указанных количеств. Тогда одно уравнение будет составлено путём нахождения выражения для разности этих количеств и приравнивания его данному числу.

Второе уравнение можно составить, выразив через введенные обозначения количество туристов и приравняв это выражение данному в условии числу.

Решаем. Обозначим через x количество трёхместных байдарок, через y — количество двухместных. Тогда из условия имеем первое уравнение: $y - x = 2$.

На двухместных байдарках в походе участвует $2y$ туристов, а на трёхместных — $3x$ туристов. Учитывая, что всего в походе участвовало 29 человек и все места были заняты, будем иметь уравнение $3x + 2y = 29$.

Получили систему уравнений: $\begin{cases} y - x = 2, \\ 3x + 2y = 29. \end{cases}$ Решим её.

1. Выразим переменную y через x из первого уравнения: $y = x + 2$
2. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы: $3x + 2(x + 2) = 29$
3. Решим полученное уравнение: $5x = 25;\ x = 5$
4. Найдём соответствующее значение второй переменной: $y = 5 + 2 = 7$
5. Запишем ответ: $x = 5;\ y = 7$

Следовательно, в походе участвовало 7 двухместных и 5 трёхместных байдарок.

Ответ. 7 двухместных и 5 трёхместных байдарок.

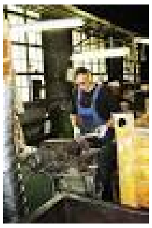
1. *Сколько туристов участвовали в походе на трёхместных байдарках?*

2. *Какой ответ был бы в задаче, если бы в походе участвовало 39 туристов?*

3. *На сколько было бы двухместных байдарок больше, чем трёхместных, если бы группа состояла из 38 человек, а байдарок было всего 16?*

В некоторых задачах связь между неизвестными не является такой простой, как в рассмотренных задачах. Тем не менее, одно уравнение составляется путём использования этой связи.

Задача 3. Мастер и его ученик должны изготовить 114 деталей. После того, как ученик поработал 2 ч, к работе подключился мастер, и они вместе закончили изготовление деталей за 3 ч. Сколько деталей изготовил мастер и сколько ученик, если мастер за 2 ч изготовлял столько деталей, сколько ученик за 3 ч?



Анализируем. В условии задачи известны время работы мастера и время работы ученика. Если бы было известно, сколько деталей за час изготовлял мастер и сколько ученик, то можно было бы дать ответ на поставленный вопрос. Введя обозначения для этих количеств, можно составить одно уравнение, используя то, что вместе они изготовили 114 деталей. Второе уравнение можно составить, сравнив количество деталей, изготовленных мастером за 2 ч, с количеством деталей, изготовленных учеником за 3 ч.

Решаем. Пусть мастер изготовляет за 1 ч x деталей, а ученик — y деталей. Мастер работал 3 ч, изготовив при этом $3x$ деталей, а ученик работал $2 + 3 = 5$ (ч), изготовив $5y$ деталей. Всего они изготовили 114 деталей. Имеем уравнение: $3x + 5y = 114$.

За 2 ч мастер изготовляет $2x$ деталей, а ученик за 3 ч — $3y$ деталей. По условию, эти количества равны. Имеем уравнение: $2x = 3y$ или $2x - 3y = 0$.

Получили систему линейных уравнений: $\begin{cases} 3x + 5y = 114, \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$

Решим эту систему.

1. Выразим из второго уравнения x через y: $x = 1{,}5y$

2. Подставим полученное выражение в первое уравнение: $3 \cdot 1{,}5y + 5y = 114$

3. Решим полученное уравнение: $4{,}5y + 5y = 114$; $9{,}5y = 114$; $y = 114 : 9{,}5 = 12$

4. Найдём соответствующее значение x: $x = 1{,}5 \cdot 12 = 18$

5. Запишем ответ: $x = 18$; $y = 12$

Следовательно, мастер за час изготовлял 18 деталей, а ученик — 12, всего мастер изготовил 18·3 = 54 детали, а ученик — 12·5 = 60 деталей.

Ответ. 54 детали и 60 деталей.

1. *За сколько времени могли бы выполнить задание мастер и ученик, если бы всё время работали вместе?*

2. *Какой ответ был бы в задаче, если бы мастер и ученик должны были бы изготовить 152 детали?*

3. *Сколько всего деталей изготовили бы мастер и ученик, если бы вместе они работали 6 часов и, кроме того, ученик самостоятельно 3 часа и за 1 час ученик изготовлял 10 деталей, а производительность мастера в полтора раза выше?*

В следующей задаче составленные уравнения после очевидных преобразований образуют систему линейных уравнений, которую удобно решать методом подстановки.

Задача 4. Рабочие большого завода вместе со своими семьями отправились в выходные дни за грибами. В каждом автобусе находилось одинаковое количество пассажиров. На половине пути вышел из строя 1 автобус, поэтому в каждый оставшийся автобус пришлось разместить ещё по 5 пассажиров. На обратном пути из строя вышли еще 2 автобуса, и теперь в каждом автобусе ехало на 21 пассажира больше, чем их было сначала. Сколько людей принимало участие в поездке?

Анализируем. Искомое количество людей, принимавших участие в поездке, равно произведению количества людей, находящихся в одном автобусе, на количество автобусов, переводящих этих людей. Если ввести обозначения для первоначального количества автобусов и для количества людей, находящихся в каждом из них, то можно из условия тремя способами найти количество людей, принимавших участие в поездке. Приравняв каждое из двух полученных выражений третьему, получим два уравнения с двумя переменными.

Решаем. Обозначим через n первоначальное количество автобусов, а через x — количество пассажиров, находившихся в каждом из них. Тогда в поездке участвовало nx человек.

После выхода из строя одного автобуса и размещения его пассажиров в остальных автобусах количество людей, участвовавших в поездке, можно представить в виде: $(n - 1)(x + 5)$. Имеем уравнение $nx = (n - 1)(x + 5)$ или $5n - x = 5$.

После выхода из строя ещё двух автобусов количество пассажиров в каждом автобусе увеличилось на 21 человека. Следовательно, количество людей, участвовавших в поездке, можно представить в виде: $(n - 3)(x + 21)$. Имеем второе уравнение: $nx = (n - 3)(x + 21)$ или $21n - 3x = 63$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} 5n - x = 5, \\ 21n - 3x = 63. \end{cases}$

Решим её.

1. Выразим переменную x через n из первого уравнения: $x = 5n - 5$
2. Подставим полученное выражение во второе уравнение: $21n - 3(5n - 5) = 63$
3. Решим полученное уравнение: $21n - 15n + 15 = 63$, $6n = 48$, $n = 8$
4. Найдём соответствующее значение x: $x = 5 \cdot 8 - 5 = 35$
5. Запишем ответ: $x = 35$, $n = 8$

Теперь можно найти значение искомой величины: $nx = 8 \cdot 35 = 280$ человек.

Ответ. 280 человек.

1. *На скольких автобусах люди, участвовавшие в поездке, возвратились назад?*

2. *По сколько человек пришлось бы разместить в каждом автобусе, если бы на обратном пути вышло из строя не 2, а 3 автобуса?*

3. *Можно ли было бы в каждом автобусе разместить одно и то же количество людей, если бы на обратном пути вышло из строя не 2, а 1 автобус?*

Метод сложения

Рассмотренный выше метод подстановки решения систем линейных уравнений с двумя переменными не всегда удобен. При выражении одной переменной через другую очень часто появляются дроби.

Поэтому рассмотрим ещё один метод решения рассматриваемых систем — ***метод сложения***.

Решая системы методом сложения, переходим от данной системы к равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит одну переменную.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Системы, не имеющие решений, считают равносильными.

Метод подстановки был основан на таком утверждении.

Если одно из уравнений системы с двумя переменными x и y равносильно уравнению x = g(y) или y = h(x), то, подставив во второе уравнение g(y) вместо x или h(x) вместо y, получим систему, равносильную исходной.

Чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными методом сложения, нужно выполнить такие действия.

1. Умножить (если есть необходимость) обе части одного или обоих уравнений на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных в уравнениях стали противоположными числами.

2. Сложить почленно левые и правые части уравнений системы.

3. Решить полученное уравнение с одной переменной.

4. Подставить найденное значение переменной в одно из уравнений исходной системы и найти соответствующее значение другой переменной.

5. Записать ответ.

Этот метод основан на следующем утверждении.

Если к одному из уравнений системы прибавить другое уравнение, умноженное на некоторое число, то получится система, равносильная исходной.

Пример. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 10x + 6y = 62. \end{cases}$

Решение. 1. Умножим обе части первого уравнения на 2: $\begin{cases} 16x - 6y = 68, \\ 10x + 6y = 62. \end{cases}$

2. Сложим почленно левые и правые части уравнений системы: $26x = 130.$

3. Найдём решение полученного уравнения: $x = \dfrac{130}{26} = 5.$

4. Подставим найденное значение x в первое уравнение: $40 - 3y = 34.$

5. Решим полученное уравнение: $y = \dfrac{34 - 40}{-3} = 2.$

6.Запишем ответ: $x = 5, y = 2.$

Ответ. (5; 2).

Используем изложенный метод при решении следующей задачи.

Задача 5. За 5 хоккейных клюшек и 4 мяча заплатили 268 зедов (зед — условная денежная единица). После того, как весной клюшка подешевела на 15%, а мяч подорожал на 10%, за одну клюшку и один мяч заплатили 59 зедов. Сколько стоили первоначально одна клюшка и один мяч вместе?

Анализируем. Чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, нужно знать первоначальные цены клюшки и мяча. Имеем два неизвестных. Для их нахождения необходимо иметь два уравнения.

Одно уравнение можно составить, исходя из обозначений первоначальных цен клюшки и мяча и известной суммы, заплаченной за 5 клюшек и 4 мяча.

Второе уравнение можно составить, используя новые цены на клюшку и мяч, которые можно найти, пользуясь правилами выполнения процентных вычислений.

Решаем. Обозначим первоначальные цены клюшки и мяча соответственно через x зедов и y зедов. Тогда 5 клюшек стоят $5x$ зедов, а 4 мяча — $4y$ зедов.

Из условия имеем первое уравнение: $5x + 4y = 268$.

Клюшка подешевела на 15%, её новая цена равняется $x - 0{,}15x = 0{,}85x$ (зедов). Мяч подорожал на 10%, его новая цена составляет $y + 0{,}1y = 1{,}1y$ (зедов). Из условия имеем второе уравнение: $0{,}85x + 1{,}1y = 59$.

Получили систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 268, \\ 0{,}85x + 1{,}1y = 59, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5x + 4y = 268, \\ 85x + 110y = 5900. \end{cases}$$

Решим её.

1) Умножим обе части первого уравнения на –17: $\begin{cases} -85x - 68y = -4556, \\ 85x + 110y = 5900. \end{cases}$

2) Сложим левые и правые части уравнений системы: $42y = 1344$.

3) Решим полученное уравнение с одной переменной: $y = 1344 : 42 = 32$.

4) Подставим найденное значение y в первое уравнение первоначальной системы: $5x + 4 \cdot 32 = 268$.

5) Найдём соответствующее значение x: $5x = 140,\ x = 140 : 5 = 28$.

6) Запишем решение системы: $(26;\ 32)$.

Первоначально одна клюшка и один мяч стоили вместе 32 + 28 = 60 (зедов).

Ответ. 60 зедов.

1. *На сколько процентов подешевел набор клюшки и мяча?*

2. *Каким будет ответ в задаче, если после указанной в условии переоценки совместная стоимость мяча и клюшки равнялась бы 60 зедам и 26 кетам (кет − 0,01 зеда)?*

3. *Сколько стоил бы набор из клюшки и мяча, если бы осенью клюшка подорожала на 20%, а мяч подешевел на 20%, и за них заплатили бы после переоценки 60 зедов?*

Проверь себя

1. Для школьного вечера купили 10 коробок печенья по 250 г и по 150 г. Общая масса коробок составила 2,1 кг. Каких коробок купили больше и на сколько?

А. 250-граммовых, на 4. **Б.** 125-граммовых, на 4.

В. 250-граммовых, на 2. **Г.** 125-граммовых, на 2.

2. На теплоходе в 17 четырёхместных и шестиместных каютах можно перевезти 78 пассажиров. Каких кают больше и на сколько?

А. 4-местных, на 7. **Б.** 6-местных, на 7.

В. 4-местных, на 5. **Г.** 6-местных, на 5.

3. В двух бригадах вместе 75 рабочих. После того, как половину рабочих из первой бригады перевели во вторую, рабочих там стало в 4 раза больше, чем в первой. Во сколько раз первоначально во второй бригаде было больше рабочих, чем в первой?

А. В 1,5 раза. **Б.** В 2 раза. **В.** В 2,5 раза. **Г.** В 3 раза.

4. Из пункта А в пункт В вышел пешеход. Через 1 ч навстречу ему из пункта В выехал велосипедист, и они встретились через 4 ч после выхода пешехода. Расстояние между пунктами А и В равно 58 км. Скорость велосипедиста на 3 км/ч больше скорости пешехода. Какое расстояние прошёл пешеход до встречи?

А. 30 км. **Б.** 28 км. **В.** 24 км. **Г.** В 20 км.

5. В супермаркете установлено два эскалатора: один поднимает клиентов вверх, другой опускает их вниз. Один человек бежит по эскалатору, поднимающему вверх, и в результате поднимается со скоростью 2,5 м/с. Другой с той же скоростью бежит вверх по эскалатору, спускающему вниз, и в результате поднимается вверх со скоростью 0,5 м/с. С какой скоростью движутся эскалаторы, если эти скорости одинаковы?

А. 3 м/с. **Б.** 2 м/с. **В.** 1 м/с. **Г.** 0,5 м/с.

Реши сам

1. В букете 13 гвоздик и тюльпанов. Он стоит 75 зедов. Сколько в нём гвоздик и сколько тюльпанов, если один тюльпан стоит 5 зедов, а одна гвоздика — 10 зедов (зед — условная денежная единица)?

2. В двух складах имеется по определённому количеству некоторого предмета. Если из второго склада перенести в первый 1 предмет, то на складах этого предмета будет поровну. А если из первого склада перенести во второй 7 штук этого предмета, то во втором окажется его в 2 раза больше, чем в первом.

Сколько экземпляров этого предмета было на обоих складах вместе?

3. Покупатель истратил в магазине 57 зедов (зед — условная денежная единица). Он купил себе 2 кг яблок и семье дочери 3 кг яблок и 3 кг груш. Сколько стоит 1 кг яблок и сколько стоит 1 кг груш, если 2 кг груш стоят столько, сколько же, сколько 3 кг яблок?

4. Два отдела института купили в одном магазине бумагу и скрепки. Один отдел за 5 пачек бумаги и 4 коробки скрепок заплатил 144 зеда (зед — условная денежная единица), а второй отдел за 2 такие же пачки бумаги и 2 коробки скрепок заплатил 60 зедов. Во сколько раз одна пачка бумаги дороже одной коробки скрепок?

5. Катер за 5 ч движения по течению и 2 ч против течения преодолевает 118 км. За 4 ч движения по течению катер преодолевает расстояние, в 2,25 раза большее, чем за 2 ч движения по озеру. Чему равны собственная скорость катера и скорость течения?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Обратите внимание на то, что в приведенных ответах значение y одно и то же.

2. Б. Воспользуйтесь тем, что уравнение не имеет решения, если левая и правая части при подстановке значений переменных принимают различные значения.

3. В. Воспользуйтесь определением системы линейных уравнений.

4. Г. Подставьте приведенные упорядоченные пары чисел в данную систему.

5. 1) (1; –3); 2) (5; 2); 3) (–3; 4). Воспользуйтесь известными вам методами решения систем 2-х линейных уравнений с двумя переменными.

6. Ни одного, одно или бесконечно много. Подумайте, сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с одной переменной, и воспользуйтесь аналогией.

7. 1) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=15,} \\ \boldsymbol{10x+5y=100;} \end{cases}$ выразите через x и y общее количество купленных цветков, стоимость роз и стоимость гвоздик;

2) $\begin{cases} 50x = 80y, \\ x - 2 = y; \end{cases}$ выразите через x и y расстояние между А и В, сравните x и y;

3) $\begin{cases} 2x + 2y = 300, \\ 2x - 2y = 40. \end{cases}$ Воспользуйтесь тем, что при движении навстречу друг другу скорость сближения равна сумме скоростей.

8. $\boldsymbol{ab}$**;** $\boldsymbol{(a - 1)(b + 5)}$. Воспользуйтесь тем, что если во все автобусы посадить по одинаковому количеству людей, то общее количество пассажиров будет равняться произведению количества людей в автобусе на количество автобусов.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 48. **2.** Мальчиков, на 5. **3.** 36.

Задача 2. 1. 15. **2.** 9 двухместных и 7 трёхместных байдарок. **3.** На 4.

Задача 3. 1. За 3 ч 48 мин. **2.** За 6 ч 20 мин; за 9 ч 30 мин. **3.** 180 деталей.

Задача 4. 1. На 5-и автобусах. **2.** По 70 человек. **3.** Нет.

Задача 5. 1. На $1\frac{2}{3}$%. **2.** 25 зедов 60 кетов и 35 зедов. **3.** 59 зедов.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
В	А	А	Б	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 11 тюльпанов, 2 гвоздики. Введите обозначения для количеств тюльпанов и гвоздик. Составьте систему уравнений, используя условие.

2. 48. Введите обозначения для количеств предметов на складах, составьте систему уравнений, используя условие.

3. 4 зеда; 6 зедов. Введите обозначения для цены 1 кг яблок и цены 1 кг груш. Составьте систему уравнений.

4. В 4 раза. Введите обозначения для стоимости одной пачки бумаги и одной коробки скрепок, выразите через них суммы, которые заплатил каждый отдел.

5. 16 км/ч и 2 км/ч. Введите обозначения для собственной скорости катера и скорости течения. Составьте и решите систему уравнений.

2. Системы линейных уравнений с тремя переменными

В некоторых задачах приходится вводить три неизвестных. Иногда связи между ними имеют линейный характер, похожие на линейные зависимости с двумя переменными. В результате получают линейные уравнения с тремя переменными.

Линейное уравнение с тремя переменными имеет вид $ax + by + cz = d$, где x, y, z — переменные, a, b, c — коэффициенты, d — свободный член.

Решениями уравнения $ax + by + cz = d$ являются упорядоченные тройки чисел (x_0, y_0, z_0), обращающие уравнение в верное числовое равенство $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.

Аналогично рассматриваются линейные уравнения с четырьмя и большим количеством неизвестных.

Как и линейные уравнения с двумя переменными, линейные уравнения с тремя переменными могут объединяться в системы для нахождения общих решений всех уравнений системы. Для решения таких систем можно использовать метод подстановки. Но непосредственное его применение обычно приводит к громоздким преобразованиям.

Идея избавляться от переменных в одних уравнениях, используя другие, и тем самым приводить систему к удобному виду лежит в основе ***метода последовательного исключения переменных*** или ***метода Гаусса***, названного в честь великого немецкого математика.

Этот метод можно использовать для решения произвольных систем линейных уравнений с любым количеством переменных.

Проиллюстрируем его на примере конкретной системы трех линейных уравнений с тремя переменными.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 2x + 3y + 5z = 6, \\ 2x - y - 3z = -2. \end{cases}$$

Решение. С помощью первого уравнения исключим переменную x из второго и третьего уравнений.

1. Умножим первое уравнение на –2:

$$\begin{cases} -2x-4y-6z=-6, \\ 2x+3y+5z=6, \\ 2x-y-3z=-2. \end{cases}$$

2. Прибавим ко второму и третьему уравнениям первое уравнение (к левым частям — левую часть, к правым — правую):

$$\begin{cases} -2x-4y-6z=-6, \\ \quad -y-z=0, \\ \quad -5y-9z=-8. \end{cases}$$

Исключим переменную y из третьего уравнения, пользуясь вторым уравнением.

1. Умножим второе уравнение на –5:

$$\begin{aligned} -2x-4y-6z&=-6, \\ 5y+5z&=0, \\ -5y-9z&=-8. \end{aligned}$$

2. Прибавим к третьему уравнению второе:

$$\begin{aligned} -2x-4y-6z&=-6, \\ 5y+5z&=0, \\ -4z&=-8. \end{aligned}$$

Найдём последовательно z, y, x.

1. Найдём z из последнего уравнения: $z=2.$

2. Найдём y из второго уравнения, воспользовавшись найденным значением z: $y=-z=-2.$

3. Найдём x из первого уравнения исходной системы, воспользовавшись найденными значениями z и y:

$$x=3-2y-3z=3-2\cdot(-2)-3\cdot 2==3+4-6=1.$$

Система имеет решение $x = 1$, $y = –2$, $z = 2$.

Ответ. (1; –2; 2).

Готовимся к решению задач

1. Сколько решений может иметь:

1) линейное уравнение с двумя переменными;

2) система двух линейных уравнений с двумя переменными;

3) система трёх линейных уравнений с двумя переменными?

2. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ 5x-2y=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-6=14-3y, \\ 5x+5=21+2y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x+6}{2}+\dfrac{y-6}{2}=4, \\ \dfrac{2-y}{5}+\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

3. Чему равно $x + y$, если x и y удовлетворяют системе уравнений:

1) $\begin{cases} 2x+3y=16, \\ 3x+2y=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x=2, \\ 3x+2y=14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=-2, \\ -x+6y=22? \end{cases}$

4. Сколько стоит пончик и бутерброд, если:

1) 2 пончика и 3 бутерброда стоят 16 зедов, а 3 пончика и 2 бутерброда — 14 зедов (зед — условная денежная единица)?

2) 3 пончика и 3 бутерброда стоят 14 зедов, и бутерброд дороже пончика на 2 зеда?

5. Решением уравнения $15x + 12y = 42$ является пара чисел …

А. (1; 2). **Б.** (4; –2). **В.** (2; 1). **Г.** (0; 4).

6. Дано уравнение. $3x + y = 9$. Какие натуральные значения может принимать y, если x принимает натуральные значения, а x и y удовлетворяют данному уравнению?

7. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $15x + 12y = 42$?

А. Ни одного. **Б.** Одно. **В.** Два. **Г.** Бесконечно много.

8. Верёвочку длиной 42 см нужно разрезать на кусочки 15 см и 12 см. Можно ли это сделать?

9. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $x + 4y = 7$; 2) $x + 4y = 9$; 3) $x + 4y = 15$.

Решение задач

При решении некоторых задач исключить все неизвестные, кроме одной, в каком-то уравнении, можно более простым способом.

Задача 1. На должность мэра города претендуют три кандидата. Во время выборов за одного из них проголосовали в 4 раза больше избирателей, чем за второго, а за третьего — в 1,5 раза больше, чем за двух других вместе. Сколько процентов голосов получил победитель выборов, если проголосовать можно только за одного кандидата?

Анализируем. В условии указаны соотношения между количеством голосов, отданных за различных кандидатов. Эти же соотношения справедливы для процентных выражений этих количеств. Поэтому, введя обозначения для процентов избирателей, проголосовавших за каждого кандидата, можно составить систему трёх линейных уравнений с тремя переменными.

Решаем. Обозначим через x, y, z проценты избирателей, проголосовавших соответственно за первого, второго и третьего кандидатов. По условию, $x + y + z = 100$, так как каждый избиратель голосовал только за одного кандидата.

Кроме того, $x = 4y$, а $z = 1{,}5(x + y)$. Имеем систему трёх уравнений с тремя переменными, сводящуюся к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ x = 4y, \\ z = 1{,}5(x + y). \end{cases}$$

Пользуясь вторым уравнением, выразим z через y: $z = 1{,}5(4y + y) = 7{,}5y$. Подставив в первое уравнение выражения для x и z через y, получим: $4y + y + 7{,}5y = 100$ или $12{,}5y = 100$, $y = 8$.

Следовательно, второй кандидат получил 8% голосов, первый — $4 \cdot 8 = 32$%, а третий — $7{,}5 \cdot 8 = 60$%. Победитель выборов получил 60% голосов.

Ответ. 60%.

1. *Сколько голосов получил бы второй кандидат, если бы избирателей было 20 тысяч?*

2. *Сколько процентов голосов получил бы первый кандидат, если бы за него проголосовали в 3 раза больше избирателей, чем за второго?*

3. *Сколько процентов голосов получил бы первый кандидат, если бы за третьего кандидата голосовало столько же избирателей, сколько за двух других вместе?*

Решая некоторые задачи, приводящие к системам уравнений, нередко получают систему уравнений, в которой количество переменных превышает количество уравнений. Как поступать, если такое произошло? Во-первых, нужно проверить, все ли условия использованы. Если нет, то, возможно, удастся составить ещё дополнительные уравнения. Если же все условия использованы, то целесообразно проверить, требуется ли находить значения всех переменных.

Иногда требуется найти не значения всех переменных, а некоторую их комбинацию, например, сумму.



Задача 2. Карлсон, Винни-Пух и Крокодил Гена зашли в кафе. Карлсон купил за 17 зедов 4 бутерброда, какао и 10 пончиков. Винни-Пух купил 3 бутерброда, какао и 7 пончиков за 13 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько зедов заплатил Крокодил Гена за бутерброд, какао и пончик?

Анализируем. Если обозначить какими-то тремя буквами цены бутерброда, какао и пончика, то, учитывая, что приводится два условия, можно получить два уравнения с тремя переменными. Количество переменных превышает количество уравнений. Но в задаче требуется найти не каждую из введенных цен, а их сумму. Поэтому нужно попытаться найти эту сумму, преобразуя систему.

Решаем. Обозначив цену бутерброда — b зедов, какао — k зедов, пончика — p зедов. Из условия следует, что $4b + k + 10p = 17$, $3b + k + 7p = 13$. Следовательно, имеем систему двух линейных уравнений с тремя переменными: $\begin{cases} 4b + k + 10p = 17, \\ 3b + k + 7p = 13. \end{cases}$

Из этой системы нужно найти $b + k + p$. Для этого нужно подобрать два целых числа так, чтобы, умножив обе части одного уравнения на одно число и обе части второго уравнения на другое число, а затем сложив их, получить искомую сумму. Такими числами являются –2 и 3. Вычтя из утроенного второго уравнения удвоенное первое, получим: $(9b - 8b) + (3k - 2k) + (21p - 20p) = 39 - 34$, или $b + k + p = 5$.

Гена за бутерброд, какао и пончик заплатил 5 зедов.

Ответ. 5 зедов.

1. *Сколько стоят 7 бутербродов, 2 какао и 17 пончиков?*

2. *Сколько стоят 1 бутерброд и 3 пончика?*

3. *Сколько зедов заплатил бы Гена за 2 бутерброда, одно какао и 4 пончика?*

Часто решить систему уравнений, где количество уравнений меньше количества переменных, позволяет информация о том, что переменные принимают целые значения. При этом решение помогают найти свойства делимости целых чисел.

Задача 3. На складе хранится 40 т груза. Для вывоза этого груза дали 10 машин грузоподъемностью 8 т, 4 т и 3 т. Сколько было машин каждого вида, если все машины были загружены полностью, и сделали они по одному рейсу?

Анализируем. В задаче требуется найти три неизвестные: количества машин грузоподъемностью 8 т, 4 т и 3 т. Для их нахождения известно: а) общее количество машин; б) общая масса груза, перевезенная этими машинами. Используя эти условия, можно составить два уравнения с тремя переменными. Исключая одну из переменных, получим линейное уравнение с двумя переменными. Так как нас интересуют только натуральные решения системы, то этого может оказаться достаточным для получения ответа.

Решаем. Пусть x, y, z — количества машин грузоподъемностью соответственно 8 т, 4 т и 3 т. Так как общее количество машин равно 10, то $x + y + z = 10$. Поскольку все машины перевезли 40 т груза, то имеем второе уравнение: $8x + 4y + 3z = 40$.

Получили систему двух уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ 8x + 4y + 3z = 40. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем утроенное первое: $5x + y = 10$. Так как x и y — натуральные числа, то ясно, что x может принимать только значение, равное 1: $x = 1$, тогда $y = 5$, $z = 10 - 1 - 5 = 4$.

Следовательно, в перевозке груза участвовали 1 восьмитонная, 5 четырёхтонных и 4 трёхтонные машины.

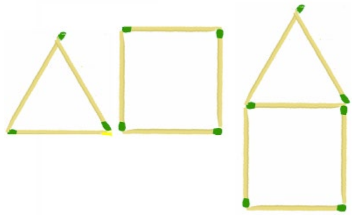
Ответ. 1 восьмитонная, 5 четырёхтонных и 4 трёхтонные.

1. *Сколько потребовалось бы машин каждого вида, если бы нужно было перевезти 36 т груза на 9 машинах??*

2. *Можно ли перевезти 35 т груза, если все остальные условия выполняются?*

3. *Какой ответ будет в задаче, если на складе будет храниться 42 т груза?*

При решении некоторых систем линейных уравнений, в которых переменные принимают целые значения, целесообразно оценить значение переменной, коэффициент при котором в уравнении наибольший, а затем подставить в систему те значения этой переменной, которые удовлетворяют полученной оценке.



Задача 4. Из 40 спичек построили треугольники, квадраты и домики (как на рисунке) — всего получилось 10 фигур, и лишних спичек не осталось. Сколько различных наборов фигур можно получить?

Анализируем. Эта задача аналогична задаче 3. В предыдущей задаче было три неизвестных: количества машин каждой из трёх грузоподъёмностей, в рассматриваемой задаче — количества фигур каждого из трёх видов. В задаче 3 были известны общее количество машин и общая масса перевезенного груза. В задаче 4 — общее количество построенных фигур и общее количество использованных спичек. В обеих задачах неизвестные принимают натуральные значения. Поэтому решаются обе задачи аналогичным образом.

Решаем. Обозначим через x, y, z количества, соответственно, треугольников, квадратов и домиков, которые можно построить из 40 спичек. Так как общее количество построенных фигур равно 10, то имеем уравнение $x+y+z=10$. Так как для построения треугольника, квадрата и домика требуется соответственно 3, 4 и 6 спичек, а всего использовано 36 спичек, то получаем второе уравнение: $3x+4y+6z=40$.

Получили систему двух линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ 3x+4y+6z=40. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем утроенное первое. Получим: $y + 3z = 10$. Так как y и z — натуральные числа, то z может равняться только 1, 2, 3.

Если $z = 1$, то $y = 10 - 3 = 7$, а $x = 10 - (7 + 1) = 2$.

Если $z = 2$, то $y = 10 - 6 = 4$, а $x = 10 - (4 + 2) = 4$.

Если $z = 3$, то $y = 10 - 9 = 1$, а $x = 10 - (1 + 3) = 6$.

Следовательно, система имеет три решения в натуральных числах: (2; 7; 1), (4; 4; 2), (6; 1; 3). Таким образом, имеется три различных набора фигур указанного вида, удовлетворяющие условию.

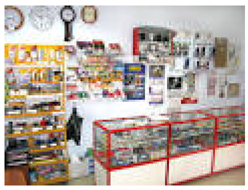
Ответ. 3.

1. *Сколько домиков можно построить из 40 спичек?*

2. *Какое наибольшее количество фигур можно построить из 40 спичек, если каждая фигура должна быть построена и все спички использованы?*

3. *Сколько вариантов комбинаций фигур каждого вида можно построить из 43 спичек?*

При решении задач могут получаться системы линейных уравнений с количеством переменных, большим 2-х. Их можно решать методом последовательного исключения неизвестных. Иногда могут быть использованы и отдельные частные приёмы.



Задача 5. Четыре школьника сделали в магазине канцтоваров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 4 зеда (зед — условная денежная единица). Второй купил ластик и карандаш, заплатив 1 зед. Третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 5 зедов. Четвёртый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвёртый школьник?

Анализируем. Для решения задачи целесообразно ввести обозначения четырёх неизвестных: цены одного пенала, одного ластика, одного карандаша и одной тетради. Из условия вытекает, что вместе 4 школьника купили 2 пенала, 2 ластика, 2 карандаша и 2 тетради. Это позволит найти стоимость набора, состоящего из пенала, ластика, карандаша и тетради.

Решаем. Обозначим через x, y, z, t, соответственно цены (в зедах) пенала, ластика, карандаша и тетради. Тогда из условия получим систему трёх линейных уравнений с четырьмя переменными: $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + z = 1, \\ x + z + 2t = 5. \end{cases}$

Сложив почленно все уравнения системы, получим: $2x + 2y + 2z + 2t = 10$ или $x + y + z + t = 5$.

Так как $y + z = 1$, то $x + t = 4$. Итак, стоимость пенала и тетради равна 4 зедам, четвёртый школьник заплатил за покупку 4 зеда.

Ответ. 4 зеда.

1. *Что дороже: пенал или карандаш?*

2. *Сколько стоят один карандаш и одна тетрадь вместе?*

3. *Что дороже: ластик или тетрадь?*

Проверь себя

1. В классе 55% учащихся изучают только английский язык, 25% — только немецкий язык, остальные 4 человека — оба языка. Сколько учащихся в классе?

А. 20. **Б.** 30. **В.** 36. **Г.** 40.

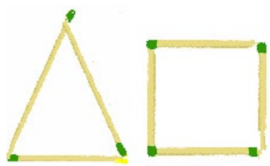
2. Букет из 3 роз, 7 тюльпанов и 11 гвоздик стоит 42 зеда (зед — условная денежная единица), а букет из 12 роз, 8 тюльпанов и 4 гвоздик — 78 зедов. Сколько стоит букет из 9 роз, 9 тюльпанов и 9 гвоздик?

А. 54 зеда. **Б.** 72 зеда. **В.** 90 зедов. **Г.** 108 зедов.

3. Несколько ребят купили мороженое на 100 рублей. Часть из них выбрали мороженое по 11 рублей за порцию, а остальные — по 15 рублей. Сколько всего было ребят?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 8. **Г.** 9.

4. Из 21 спички построили треугольники и квадраты (как на рисунке) и лишних спичек не осталось. Каких фигур построили больше: треугольников или квадратов и на сколько?



А. Одинаково. **Б.** Треугольников, на 2.

В. Квадратов, на 2. **Г.** Треугольников, на 1.

5. К резервуару подведены четыре трубы. Одна труба наполняет резервуар за 60 мин, другая — за 30 мин, третья — за 20 мин, четвёртая — за 15 мин. За сколько минут будет заполнен резервуар, если открыть все четыре трубы?

А. За 6 мин. **Б.** За 5 мин. **В.** За 3 мин. **Г.** За 2 мин

Реши сам

1. На референдуме гражданам задали один вопрос, на который нужно было дать один из трёх ответов: «да», «нет», «не знаю». Третий ответ дали в 3 раза больше граждан, чем второй, а первый — в 2,5 раза больше, чем два других вместе. Какой ответ выбрало большинство граждан?

2. Учебник истории, два учебника географии и два учебника биологии стоят вместе 21 зед (зед — условная денежная единица), а три учебника истории, учебник географии и учебник биологии стоят вместе 23 зеда. Сколько стоят учебник географии и учебник биологии вместе?

3. Некто купил 30 птиц за 30 зедов (зед — условная денежная единица). Из числа этих птиц за каждых трёх воробьёв заплачено 1 зед, за каждых двух горлиц — также 1 зед, за каждого голубя — 2 зеда. Сколько было куплено птиц каждой породы?

4. 12 кузнецов из трёх городов А, В и С выковали 80 фигур для парка кованых фигур. Каждый кузнец из города А выковал по 4 фигуры, из города В — по 5 фигур, а из города С — по 8 фигур. Сколько кузнецов из каждого города участвовало в пополнении парка кованых фигур?

5. К резервуару подведено пять труб. Первая труба наполняет резервуар за 40 мин; вторая, третья и четвёртая, работая одновременно, — за 10 мин; вторая, третья и пятая — за 20 мин и, наконец, пятая и четвёртая — за 30 мин. За сколько времени наполнят резервуар все пять труб при одновременной работе?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. 1) Бесконечно много или ни одного; 1) Рассмотрите уравнения: $2x - 3y = 1$ и $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$: **2) ни одного, одно или бесконечно много; 3) ни одного, одно или бесконечно много**.

2. **1) (4; 2); 2)** $\left(4\frac{4}{21}; 2\frac{10}{21}\right)$; **3)** $\left(4\frac{4}{7}; 3\frac{3}{7}\right)$**.** Воспользуйтесь методом подстановки или методом сложения решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

3. 1) 6; 2) 6; 3) 6. Можно решить данные системы.

4. 1) 6 зедов; 2) 6 зедов. Составьте по условию системы уравнений и решите их.

5. В. Можно подставить пары чисел, представленные в ответах в данное уравнение.

6. 3 и 6. Обратите внимание на то, что сумма двух чисел и одно слагаемое делится на 3.

7. Б. Обратите внимание на то, что x может принимать только чётные значения.

8. Можно, для этого нужно отрезать два кусочка по 15 см. Воспользуйтесь решением предыдущего задания.

9. 1) (3; 1); 2) (5; 1), (1; 2); 3) (11; 1), (7; 2), (3; 3). Установите, какие значения может принимать переменная, при которой в уравнении стоит больший коэффициент.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 1600. **2.** 30%. **3.** 40%.

Задача 2. 1. 30 зедов. **2.** 4 зеда. **3.** 9 зедов.

Задача 3. 1. 1 восьмитонная, 4 четырёхтонные и 4 трёхтонные. **2.** Нет. **3.** 1 восьмитонная, 7 четырёхтонных и 2 трёхтонные или 2 восьмитонные, 2 четырёхтонные и 6 трёхтонных.

Задача 4. 1. $\begin{cases} x + y = 6, \\ 3x + 4y = 12. \end{cases}$ **2.** 10. **3.** 4

Задача 5. 1. Пенал. **2.** 1 зед. **3.** Одинаково.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
А	Б	В	А	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Да. Обозначьте буквами количества процентов граждан, давших каждый из трёх ответов, составьте систему трёх уравнений, учитывая, что сумма всех процентов равна 100.

2. 13 зедов. Составьте систему двух линейных уравнений. Попробуйте подобрать такое число, чтобы, умножив на него одно уравнение и сложив с другим, получить уравнение, в котором коэффициенты при переменных равны.

3. 9 воробьёв, 10 горлиц, 11 голубей. Составьте систему уравнений для искомых неизвестных и воспользуйтесь тем, что искомые неизвестные принимают натуральные значения.

4. 1 из города А, 4 из города В, 7 из города С. Составьте систему уравнений для искомых неизвестных и воспользуйтесь тем, что искомые неизвестные принимают натуральные значения.

5. $\mathbf{\frac{1}{7}}$ **ч.** Введите обозначения для объёма резервуара и производительностей насосов.

3. Системы уравнений, сводящиеся к системам линейных уравнений

Некоторые задачи приводят к системам уравнений, не являющихся линейными, но которые несложными приёмами можно привести к линейным.

Система уравнений вида $\begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1}{u} + b_1 \cdot \dfrac{1}{v} = c_1, \\ a_2 \cdot \dfrac{1}{u} + b_2 \cdot \dfrac{1}{v} = c_2 \end{cases}$ заменой $\dfrac{1}{u} = x, \dfrac{1}{v} = y$ приводится к системе линейных уравнений $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$

Такие системы уравнений возникают в задачах, где встречаются величины, связанные обратной пропорциональной зависимостью: скорость и время при постоянном расстоянии в задачах на движение; производительность труда и время выполнения работы при постоянном объёме работы в задачах на работу; цена единицы продукции и количество приобретённых единиц продукции при постоянных затратах в задачах, где речь идёт о покупках, о стоимости, и т. д.

Иногда системы уравнений приводятся к системам линейных уравнений делением обеих частей уравнений на общий множитель, отличный от нуля.

Готовимся к решению задач

1. Найдите значение дроби $\frac{1}{x}$, если: 1) $\frac{5x-1}{x}=3-\frac{2}{x}$; 2) $\frac{4x-1}{x}=1+\frac{2}{x}$.

2. Решите уравнение: 1) $\frac{5}{x}-2=6+\frac{1}{x}$; 2) $2+\frac{4}{x}=\frac{7x-1}{x}$.

3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{x-6}{2}-\frac{y+1}{3}=1, \\ \frac{2-y}{4}+\frac{x-1}{2}=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+z=4, \\ y+z=5, \\ x+2y+4z=17. \end{cases}$

4. Резервуар вмещает 50 л воды. Из водопроводного крана он наполняется за 5 мин. Какова скорость наполнения резервуара?

5. Скорость наполнения резервуара водой из крана равна 8 л/мин. Сколько воды нальётся в него из этого крана за 3 минуты?

6. Горячей водой ванна наполняется со скоростью 12л/мин., а холодной — со скоростью 18 л/мин. Вместимость ванны 180 л.

1) За сколько минут можно заполнить из этих кранов ванну только холодной водой или только горячей?
2) За сколько минут заполнится ванна, если одновременно открыть краны с горячей и холодной водой?

7. Купили картофель по цене a руб. за 1 кг на сумму 240 руб. Сколько килограмм картофеля куплено?

8. Купили $\frac{240}{a}$ кг картофеля, за покупку заплатили 480 руб. Какова цена 1 кг кар тофеля?

9. Купили картофеля на 180 руб. по цене m руб. за 1 кг и муки на 90 руб. по цене n руб. за 1 кг. Какова масса покупки?

10. Турист расстояние 10 км преодолел со скоростью a км/ч. Какое время он затратил на весь путь?

11. Турист расстояние 20 км преодолел за $\frac{10}{a}$ ч. Какова скорость его движения?

Решение задач

В следующей задаче речь пойдёт об объёме работы и времени её выполнения при постоянной производительности труда, то есть о прямо пропорциональных величинах. Полученная система уравнений будет преобразована в систему линейных уравнений делением обеих частей на общий множитель.

Задача 1. Горячей водой ванна наполняется за 20 минут, а холодной — за 10 минут. Через сколько минут после открытия крана с горячей водой нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды в неё поступило в полтора раза больше, чем холодной?

Анализируем. Зная время заполнения ванны как горячей водой, так и холодной, можно выразить через объём ванны скорость её заполнения каждым видом воды, то есть количество литров воды, поступающей в ванну за единицу времени из каждого крана.

Обозначив буквами объём ванны, а также время, на которое был открыт сначала один кран, а затем оба, можно составить два уравнения, то есть систему уравнений. Одно из них должно моделировать заполнение ванны, а другое — отражать соотношения между объёмами горячей и холодной воды в заполненной ванне.

Решаем. Пусть ванна вмещает V литров воды. Обозначим через x мин время, в течение которого ванна наполнялась только горячей водой, а через y мин — горячей и холодной.

Скорость наполнения ванны горячей водой равна $\frac{V}{20}$ л/мин, а скорость наполнения ванны холодной водой равна $\frac{V}{10}$ л/мин. За x мин в ванну поступит $x\cdot\frac{V}{20}$ л горячей воды, а за y мин — $y\cdot\left(\frac{V}{20}+\frac{V}{10}\right)$ л горячей и холодной воды. Так как за $(x + y)$ минут ванна наполнится, то имеем уравнение:

$$x\cdot\frac{V}{20}+y\cdot\left(\frac{V}{20}+\frac{V}{10}\right)=V \text{ или } x+3y=20.$$

При этом в ванне окажется $(x + y)\cdot\frac{V}{20}$ литров горячей воды и $y\cdot\frac{V}{10}$ литров холодной воды. Так как горячей воды в ванне должно быть в 1,5 раза больше, чем холодной, то имеем уравнение: $(x + y)\cdot\frac{V}{20} = 1{,}5\cdot y\cdot\frac{V}{10}$, или после деления обеих частей уравнения на $V \neq 0$ уравнение $x + y = 3y$, или $x - 2y = 0$.

Получим систему линейных уравнений: $\begin{cases} x+3y=20, \\ x-2y=0. \end{cases}$

Решим эту систему.

1. Выразим из второго уравнения переменную x через y: $x=2y$.
2. Подставим полученное выражение в первое уравнение: $2y+3y=20$.
3. Решим полученное уравнение с одной переменной: $5y=20, y=4$.
4. Найдём соответствующее значение второй переменной: $x=8$.
5. Запишем ответ: $x=8, y=4$.

Искомое время равно 8 минутам.

Ответ. 8 минут.

1. *Сколько времени наполнялась ванна?*

2. *Во сколько раз горячей воды поступит в ванну больше, чем холодной, если 5 мин будет открыт только кран с горячей водой, а 10 мин — оба крана?*

3. *Каков будет ответ в задаче, если бы требовалось, чтобы в ванну поступило горячей воды вдвое больше, чем холодной?*

В рассмотренной задаче можно было обойтись двумя неизвестными, приняв объём ванны за 1. Таким приёмом часто пользуются, но он требует помнить эту условность в процессе решения задачи.

Одним из основных приемов алгебры является замена одних переменных другими. Этот прием позволяет сводить задачи к более простым. В частности, он даёт возможность иногда от систем нелинейных уравнений переходить к системам линейных уравнений.

Этот приём основан на таком утверждении.

Если какое-либо уравнение заменить равносильным, то новая система равносильна исходной.

Рассмотрим на примере применение этого приёма.

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{y}=1{,}1, \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{y}=0{,}1. \end{cases}$

Решение. 1) Выполним замену переменных: $\dfrac{1}{x}=z, \dfrac{1}{y}=t.$

2) Получим систему линейных уравнений: $\begin{cases} 2z+6t=1{,}1, \\ 4z-9t=0{,}1. \end{cases}$

3) Решим полученную систему методом сложения.

а) Умножим первое уравнение системы на 2 и вычтем из полученного уравнения второе уравнение: $\begin{cases} 21t=2{,}1, \\ 4z-9t=0{,}1. \end{cases}$

б) Найдём t из первого уравнения и, подставив найденное значение во второе уравнение, найдём z: $\begin{cases} t=0{,}1, \\ z=\dfrac{0{,}1+9t}{4}=\dfrac{0{,}1+0{,}9}{4}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

4) Найдём решение исходной системы, воспользовавшись заменой:

$$\frac{1}{x}=0{,}1,\ x=10;$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{4},\ y=4.$$

Ответ. (10; 4).

В следующей задаче будет использован рассмотренный приём замены переменных.

Задача 2. В одном пакете массой 8 кг картофель и лук. За лук заплатили 120 руб., а за картофель — 90 руб. В другом пакете массой 9 кг также находятся картофель и лук, купленные по той же цене, но за лук заплатили 72 руб., а за картофель — 180 руб. Можно ли по этим данным узнать цены картофеля и лука?

Анализируем. Если ввести обозначения для цен картофеля и лука, то можно, зная их стоимости в каждом пакете, выразить через эти обозначения их массы в каждом пакете. Так как известны массы каждого пакета, то можно составить два уравнения с двумя переменными, то есть систему двух уравнений.

Решаем. Обозначим через x руб. и y руб. цены 1 кг картофеля и 1 кг лука соответственно. Тогда в первом пакете картофеля $\frac{90}{x}$ кг, а лука — $\frac{120}{y}$ кг. Имеем уравнение: $\frac{90}{x}+\frac{120}{y}=8$. Аналогично получаем второе уравнение: $\frac{180}{x}+\frac{72}{y}=9$. Имеем систему уравнений: $\begin{cases} 90\cdot\frac{1}{x}+120\cdot\frac{1}{y}=8, \\ 180\cdot\frac{1}{x}+72\cdot\frac{1}{y}=9. \end{cases}$

Выполним замену переменных: $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$.

Получим систему линейных уравнений: $\begin{cases} 90u+120v=8, \\ 180u=72v=9. \end{cases}$

Решим полученную систему методом сложения.

а) Умножим первое уравнение на 2, из полученного уравнения вычтем второе: $168v = 7$.

б) Найдём v из первого уравнения и, подставив найденное значение во второе уравнение, найдём u: $\begin{cases} v=\frac{7}{168}=\frac{1}{24}, \\ u=\frac{9-72\cdot\frac{1}{24}}{180}=\frac{6}{180}=\frac{1}{30}. \end{cases}$

Найдём решение исходной системы, воспользовавшись заменой:
$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}=\frac{1}{30}, x=30,\\&\frac{1}{y}=\frac{1}{24}, y=24.\end{aligned}$$

Следовательно, 1 кг картофеля стоит 30 руб., а 1 кг лука — 24 руб, то есть по исходным данным можно узнать искомые цены.

Ответ. Можно.

1. *Каковы массы картофеля в пакетах?*

2. *Чему равнялась бы масса картофеля во втором пакете, если бы его масса в первом пакете равнялась а кг?*

3. *Каковы были бы цены картофеля и лука, если бы массы пакетов соответственно равнялись 16 кг и 18 кг, а остальные условия оставались теми же?*

В предыдущей задаче речь шла о покупке, стоимости, фигурировали величины, связанные обратной пропорциональной зависимостью: цена 1 кг купленной продукции и её масса при постоянной стоимости. Следующая задача на движение, где на каждом участке пути движение равномерное прямолинейное, а скорость движения и затраченное время при постоянном пути обратно пропорциональны.

Задача 3. Путь от пункта A в пункт B идёт 3 км в гору, 6 км под гору и 12 км по ровному месту. Весь путь велосипедист проделал за 1 ч 7 мин. Обратный путь, во время которого он ехал в гору, под гору и по ровному месту с той же скоростью, что и от A к B, он проделал за 1 ч 16 мин. Определить скорость велосипедиста в гору, под гору, если на ровном месте он ехал со скоростью 18 км/ч.

Анализируем. В условии задачи приводятся данные о расстояниях, преодолеваемых велосипедистом на различных участках пути, время, затрачиваемое на преодоление пути в каждую сторону. Естественно ввести обозначения для скоростей движения в гору и под гору. Воспользовавшись связью между расстоянием, скоростью и временем при прямолинейном равномерном движении и данными из условия, можно будет составить два уравнения. Одно из них будет моделировать движение из А в В, а другое — движение в обратную сторону.

Решаем. Пусть скорость велосипедиста в гору x км/ч, а под гору — y км/ч. Тогда на путь от A в направлении B в гору он затратил $\frac{3}{x}$ ч, по ровному месту— $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$ ч, а под гору — $\frac{6}{y}$ ч. Всего на путь от A до B велосипедист затратил $\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{3}+\frac{6}{y}\right)$ ч, что по условию равно $1\frac{7}{60}$ ч. Получили уравнение $\frac{3}{x}+\frac{2}{3}+\frac{6}{y}=\frac{67}{60}$, или $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{9}{20}$, или $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{20}$.

Аналогично, на обратный путь он затратил $\left(\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{3}\right)$ ч или $1\frac{4}{15}$ ч. Имеем уравнение $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{3}=\frac{19}{15}$, или $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{5}$, или $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$.

Выполним замену $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$. Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} u+2v=\frac{3}{20}, \\ 2u+v=\frac{1}{5}. \end{cases}$$ Решим её.

1. Выразим из первого уравнения переменную u через v: $u=-2v+\frac{3}{20}$

2. Подставим полученное выражение во второе уравнение: $-4v+\frac{3}{10}+v=\frac{1}{5}$

3. Решим полученное уравнение с одной переменной: $-3v=-\frac{1}{10}$, $v=\frac{1}{30}$

4. Найдём соответствующее значение второй переменной: $u=\frac{3}{20}-\frac{2}{30}=\frac{1}{12}$

5.Запишем ответ: $v=\dfrac{1}{30},\ u=\dfrac{1}{12}$

Отсюда $x = 12$, $y = 30$. Итак, в гору велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а под гору − 30 км/ч.

Ответ. 12 км/ч; 30 км/ч.

1. *Сколько времени тратил велосипедист на ровный участок дороги?*

2. *Изменится ли ответ в задаче, если из A в B велосипедист ехал 1 ч 16 мин, а из B в A – 1 ч 7 мин?*

3. *Чему примерно равнялись бы скорости велосипедиста в гору и под гору, если бы путь из A в B он преодолел за 1 ч 44 мин, путь из B в A – за 1 ч 56 мин и по ровному месту двигался бы со скоростью 12 км/ч?*

Следующая задача по содержанию похожа на предыдущую. После приведения составленной системы уравнений к системе линейных уравнений последняя будет решена методом Гаусса.

Задача 4. Дорога из села *A* в село *B* сначала поднимается в гору на протяжении 3 км, потом идёт по ровному месту на протяжении 5 км, затем спускается под гору на протяжении 6 км. Посыльный, выйдя из *A* в *B* и пройдя полпути, обнаружил, что взял не все пакеты. Он повернул обратно и через 3 ч 36 мин после своего выхода из *A* вернулся в *A*. Выйдя из *A* вторично, он прошёл весь путь до *B* за 3 ч 27 мин и обратный путь в *A* — за 3 ч 51 мин. С какой скоростью посыльный шёл в гору, по ровному месту и под гору, если считать эти скорости постоянными?

Анализируем. В условии задачи приводятся данные о расстояниях, преодолеваемых велосипедистом на различных участках пути, о времени, затрачиваемом на преодоление пути в каждую сторону. Естественно ввести обозначения для скоростей движения в гору и под гору. Воспользовавшись связью между расстоянием, скоростью и временем при прямолинейном равномерном движении и данными из условия, можно будет составить три уравнения.

Решаем. Пусть скорость при движении в гору равна x км/ч, по ровному месту — y км/ч и под гору — z км/ч. Известно, что на полпути посыльный повернул обратно и через 3 ч 36 мин после своего выхода из *A* вернулся в *A*. При этом он прошёл (3 + 5 + 6):2 = 7 (км); 3 км он шёл в гору, 4 км — по ровному месту, потом (на обратном пути) ещё 4 км по ровному месту и, наконец, 3 км под гору. По условию имеем уравнение

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z}=3\frac{3}{5} \text{ или } \frac{3}{x}+\frac{8}{y}+\frac{3}{z}=\frac{18}{5}.$$

Так как, выйдя из *A* вторично, он прошёл весь путь до *B* за 3 ч 27 мин, то имеем второе уравнение: $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=\frac{69}{20}$.

Поскольку обратный путь в *A* он прошёл за 3 ч 51 мин, то имеем третье уравнение: $\frac{6}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=\frac{77}{20}$. Получили систему уравнений $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{8}{y}+\frac{3}{z}=\frac{18}{5},\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=\frac{69}{20},\\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=\frac{77}{20}.\end{cases}$

Выполним замены переменных: $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v, \frac{1}{z}=w$.

Получим систему линейных уравнений $\begin{cases}3u+8v+3w=\frac{18}{5},\\ 3u+5v+6w=\frac{69}{20},\\ 6u+5v+3w=\frac{77}{20}.\end{cases}$

С помощью первого уравнения исключим неизвестное *u* из второго и третьего уравнения. Для этого из второго уравнения вычтем первое и к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на –2 (другими словами, из третьего уравнения вычтем удвоенное первое). Получим систему уравнений

$$\begin{cases}3u+8v+3w=\frac{18}{5},\\ -3v+3w=-\frac{3}{20},\\ -11v-3w=-\frac{67}{20},\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3u+8v+3w=\frac{18}{5},\\ v-w=\frac{1}{20},\\ -11v-3w=-\frac{67}{20}.\end{cases}$$

Далее, с помощью второго уравнения исключим неизвестное v из третьего уравнения. Для этого к третьему уравнению прибавляем второе, умноженное на 11.

Получаем систему: $\begin{cases} 3u + 8v + 3w = \dfrac{18}{5}, \\ v - w = \dfrac{1}{20}, \\ 14w = \dfrac{56}{20}. \end{cases}$

Из последнего уравнения находим w = 0,2. Из второго уравнения находим, что $v = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$.

Подставляя значения w и v в первое уравнение, получим: $u = \frac{1}{3}$. Возвращаясь к сделанным заменам, будем иметь: x = 3, y = 4, z = 5. Следовательно, скорость в гору 3 км/ч, по ровному месту 4 км/ч, под гору 5 км/ч.

Ответ. Скорость в гору 3 км/ч, по ровному месту 4 км/ч, под гору 5 км/ч.

1. *За какое время посыльный может преодолеть участки в гору на пути из А в В и из В в А?*

2. *Изменится ли ответ в задаче, если из А в В посыльный шёл 3 ч 51 мин, а из В в А — 3 ч 27 мин??*

3. *Чему равнялись бы скорости посыльного в гору, по ровному месту и под гору, если бы через 1 ч 48 мин после своего выхода из А вернулся в А, выйдя из А вторично, он прошёл бы весь путь до В за 2 ч 45 мин и обратный путь в А — за 3 ч?*

Проверь себя

1. Горячей водой ванна наполняется за 20 минут, а холодной — за 10 минут. За сколько минут наполнится ванна, если открыть краны с горячей и холодной водой?

А. За 30 мин. **Б.** За 15 мин. **В.** За $6\frac{2}{3}$ мин. **Г.** За $6\frac{1}{3}$ мин.

2. Мастер изготавливает за 4 часа 20 деталей, а его ученик за 3 часа — 12 деталей. Сколько деталей они изготовят, работая вместе, за 8 часов?

А. 72. **Б.** 64. **В.** 56. **Г.** 48.

3. Дорога от дома до школы состоит из двух участков: 300 м подъёма и 600 м спуска. Дорога от дома до школы занимает у Юры 16 мин, а обратная дрога − 17 мин. На сколько скорость Юры на подъёме меньше его скорости на спуске?

А. На 5 м/мин. **Б.** На 10 м/мин. **В.** На 15 м/мин. **Г.** На 16 м/мин.

4. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций A и B, расстояние между которыми 600 км. Первый из них приходит на станцию B на 3 часа раньше, чем второй на станцию A. В то время, как первый делает 250 км, второй проходит 200 км. Чему равна скорость сближения поездов?

А. 75 км/ч. **Б.** 80 км/ч. **В.** 85 км/ч. **Г.** 90 км/ч.

Реши сам

1. В ванну, ёмкость которой 180 л, может поступать горячая вода со скоростью 15 л/мин и холодная со скоростью 30 л/мин. Через сколько минут после открытия крана с горячей водой нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды поступило вдвое больше, чем холодной?

2. Один оператор набрал 30 страниц рукописи, а затем другой — ещё 20 страниц. На это ушло 4 часа. Сколько страниц может набрать каждый из них за 2 часа, если известно, что одну страницу первый оператор набирает на 2 минуты быстрее, чем другой?

3. Путь от пункта A в пункт B идёт 3 км в гору, 6 км под гору и 12 км по ровному месту. Весь путь велосипедист проделал за 2 ч 20 мин. Обратный путь, во время которого он ехал в гору, под гору и по ровному месту с той же скоростью, что и от A к B, он проделал за 2 ч 35 мин. На сколько км/ч скорость велосипедиста под гору превышает его скорость в гору, если на ровном месте он ехал со скоростью 9 км/ч?

4. Некто проехал в лодке по реке из города А в город В и обратно за 10 часов. Расстояние между городами 20 км. Найдите скорость течения реки, зная, что он проплывает 2 км против течения за такое же время, как 3 км по течению реки.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. 1) –2; 2) 1. Разделите числители выражений, стоящих в левых частях уравнений, почленно на знаменатели.

2. 1) $\frac{1}{2}$**;** предварительно найдите $\frac{1}{x}$; **2) 1**. Разделите числитель выражения, стоящего в правой части уравнения, почленно на знаменатель.

3. 1) (–10; –28); умножьте обе части обоих уравнений на наименьший общий знаменатель дробей, стоящих в левой части; **2) (1; 2; 3)**; выразите x из первого уравнения и подставьте полученное выражение в третье уравнение.

4. 10 л/мин; воспользуйтесь тем, что объём резервуара равен произведению скорости его наполнения на время его наполнения.

5. 24 л; см. указание к заданию 4.

6. 1) 10 мин. и 15 мин.; 2) 6 мин; см. указание к заданию 4.

7. $\boldsymbol{\frac{240}{a}}$ **кг**; воспользуйтесь тем, что стоимость картофеля равна произведению цены 1 кг картофеля на массу купленного картофеля.

8. 2*a* руб. за 1 кг; см. указание к заданию 7.

9. $\boldsymbol{\left(\frac{180}{m}+\frac{90}{n}\right)}$ **кг**; см. указание к заданию 7.

10. $\boldsymbol{\frac{10}{a}}$ **ч**; воспользуйтесь тем, что длина пути при прямолинейном равномерном движении равна произведению скорости движения на время, затраченное на преодоление этого пути.

11. 2*a* км/ч; см указание к заданию 10.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 12 мин. **2.** 13 мин 20 с. **3.** В 2 раза.

Задача 2. 1. 3 кг и 6 кг. **2.** $180:\frac{90}{a}=2a$. **3.** 15 руб. и 12 руб.

Задача 3. 1. 40 мин. **2.** Да. **3.** 8 км/ч и 17 км/ч.

Задача 4. 1. 1 ч и 2 ч. **2.** Да. **3.** 4 км/ч, 5 км/ч, 6 км/ч.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
В	А	Б	Г

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Через 6 мин. Введите обозначения для времени, когда был открыт только кран с горячей водой, и для времени, когда открыты были оба крана.

2. 12 и 8 страниц. Введите обозначения для производительностей каждого из операторов, составьте систему уравнений.

3. На 6 км/ч. Введите обозначения для скорости велосипедиста под гору и в гору. По условию задачи составьте систему уравнений.

4. $\mathbf{\frac{5}{6}}$ **км/ч.** Введите обозначения для скорости движения по течению и скорости против течения. По условию составьте систему уравнений.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Выполнение заданий для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	5 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	7 задач	5 задач
«отлично»	Решено не менее	10 задач	8 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа напишите букву «Д».

1. В ящике и в корзине вместе 95 яблок. Если количество яблок в ящике уменьшить вдвое, а количество яблок в корзине увеличить на 25, то яблок в ящике и в корзине станет поровну. Где было больше яблок и на сколько?

А. В ящике, на 65. **Б.** В ящике, на 55.

В. В корзине, на 25. **Г.** В корзине, на 15.

2. За задачу, решённую без существенных ошибок, начисляли 5 баллов, за решение с существенными ошибками — 2 балла. Ученик набрал 19 баллов. Сколько всего задач решил ученик, если без существенных ошибок он решил на 1 задачу больше, чем с существенными ошибками?

А. 2. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 6.

3. Мастер изготовил за пять дней x деталей, а ученик за три дня — y деталей. Сколько деталей они изготовят за день вместе?

А. $3x + 5y$. **Б.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{5}$. **В.** $\frac{3x + 5y}{15}$. **Г.** $\frac{5x + 3y}{15}$.

4. Спортсмен проехал на тренировке 240 км за 2 часа 30 минут. Часть пути s_1 км он ехал со скоростью 120 км/ч, а часть s_2 км — со скоростью 80 км/ч. Какая часть пути s_1 или s_2 длиннее и на сколько?

А. s_1, на 40 км. **Б.** s_2, на 40 км. **В.** s_2, на 20 км. **Г.** Они равны.

5. Два банана тяжелее трёх яблок на 40 г, а четыре банана тяжелее 5 яблок на 80 г. На сколько грамм один банан тяжелее одного яблока?

А. На 40 г. **Б.** На 20 г. **В.** На 15 г. **Г.** На 10 г.

6. На должность мэра города претендуют два кандидата. Во время выборов за одного из них проголосовали в 4 раза больше избирателей, чем за второго. Сколько процентов голосов получил победитель, если проголосовать можно только за одного кандидата?

А. 85%. **Б.** 80%. **В.** 75%. **Г.** 60%.

7. За 10 м ткани первого вида, 18 м ткани второго вида и 12 м ткани третьего вида заплатили 284 зеда (зед — условная денежная единица). А за 8 м ткани первого вида, 20 м ткани второго вида и 12 м ткани третьего вида заплатили 292 зеда. На сколько больше стоит 1 м ткани второго вида, чем 1 м ткани первого вида?

А. На 8 зедов. **Б.** На 6 зедов. **В.** На 5 зедов. **Г.** На 4 зеда.

8. Сколькими способами можно взвесить за один раз на чашечных весах 6 кг картофеля, используя гири массой 1 кг и 2 кг, кладя их на другую чашу весов?

А. Четырьмя. **Б.** Тремя. **В.** Двумя. **Г.** Одним.

9. В лотерее разыгрывались фотоаппараты, часы и транзисторные приёмники, всего на сумму 325 зедов (зед — условная денежная единица). Цены фотоаппарата, часов и транзисторного приёмника соответственно равны 30, 20 и 18 зедам. Какому из приведенных в ответах чисел может равняться количество разыгрываемых транзисторных приёмников?

А. 5. **Б.** 10. **В.** 15. **Г.** Ни одному из приведенных.

10. Коллекционер купил для коллекции четыре набора марок: кубинских, монгольских, болгарских и польских. Стоимость приобретенного без кубинских марок — 40 зедов, без монгольских — 45 зедов (зед — условная денежная единица), без болгарских — 44 зеда, а без польских — 27 зедов. Какова стоимость покупки?

А. 50 зедов. **Б.** 51 зед. **В.** 52 зеда. **Г.** 55 зедов.

11. Если открыть краны с горячей и холодной водой, то ванна наполнится за 6 мин. Холодной водой ванна наполняется за 10 мин. За сколько минут наполнится ванна, если открыть только кран с горячей водой?

А. За 15 мин. **Б.** За 16 мин. **В.** За 18 мин. **Г.** За 20 мин.

12. Один рабочий, работая самостоятельно, может выполнить всю работу за 15 часов, а второй — за 10 часов. Второй рабочий приступил к работе позже первого, и работали они вместе до завершения работы. Во сколько раз первый рабочий должен работать дольше второго, чтобы они выполнили одинаковый объём работы?

А. В 3 раза. **Б.** В 2,5 раза. **В.** В 2 раза. **Г.** В 1,5 раза.

13. Путь от пункта А в пункт В идёт 3 км в гору и 12 км по ровному месту. Весь путь туда и обратно велосипедист проделал за 3 ч 39 мин. На обратный путь, во время которого он ехал под гору и по ровному месту с той же скоростью, что и от А к В, он затратил на 15 мин меньше, чем на путь от А до В. Сколько времени занял у него путь от В до А?

А. 1 ч 57 мин. **Б.** 1 ч 42 мин. **В.** 1 ч 49,5 мин. **Г.** На 18 км/ч.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Чтобы получить положительный ответ на этот вопрос, пользуйтесь образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. На дискотеке было 48 юношей и девушек. Каждая из присутствующих на дискотеке девушек в течение вечера танцевала с 5 юношами, а каждый юноша — с 7 девушками. Сколько девушек и сколько юношей было на дискотеке?

2. В железнодорожном вагоне нового образца есть четырёхместные и двухместные купе, причём двухместных на 4 меньше. Сколько в вагоне тех и других купе, если всего в вагоне 34 пассажира и все места заняты?

3. Мастер и его ученик должны изготовить 208 деталей. Через 4 дня совместной работы мастер заболел, и ученик самостоятельно завершил работу за 3 дня. Сколько деталей изготовил мастер и сколько ученик, если мастер за 2 дня изготовлял столько деталей, сколько ученик за 3 дня?

4. В экспедиции распределяли собак по упряжкам. Если в каждую упряжку запрячь по 12 собак, то в трёх упряжках не хватило бы по одной собаке, а потому в упряжки запрягли по 11 собак и оставили 7 собак в резерве. Сколько было упряжек и сколько собак?

5. Вода в некотором водоёме пополняется равномерно из источника. Известно, что 70 коров выпили бы воду из водоёма за 40 дней, а 50 коров — за 64 дня. Каков примерно объём воды в водоёме до запуска коров в этот водоём, если считать, что корова за день выпивает 80 л воды?

6. Сыр первого, второго и третьего сортов стоит соответственно 80 зедов, 60 зедов, 40 зедов за килограмм (зед — условная денежная единица). За купленные сыры трёх сортов общей массой 1 кг 900 г заплатили 124 зеда. При этом купили сыра первого сорта вдвое больше, чем второго. Сколько граммов сыра каждого сорта купили?

7. Один покупатель купил 14 м ткани первого вида, 5 м второго и 9 м третьего. За всё купленное он заплатил 160 зедов (зед — условная денежная единица). Другой покупатель приобрёл соответственно 4, 13 и 9 м таких же тканей и заплатил за всё 128 зедов. Третий купил по 5 м ткани каждого вида. Сколько зедов заплатил третий покупатель?

8. Можно ли взвесить за один раз на чашечных весах 18 кг картофеля, используя при этом ровно 10 гирь массой 1 кг, 3 кг, 5 кг, кладя их на другую чашу весов?

9. Студент первого курса сдал за год экзамены по 10 предметам. Его средний балл составляет 4,6. Сколько у него троек, четвёрок и пятёрок, если известно, что есть все эти оценки?

10. Коллекционер купил для коллекции четыре набора марок: кубинских, монгольских, болгарских и польских. Стоимость приобретенного без кубинских марок — 40 зедов, без монгольских — 45 зедов, без болгарских — 44 зеда, а без польских — 27 зедов (зед — условная денежная единица). Какова стоимость комплекта болгарских марок?

11. Горячей водой ванна наполняется за 15 минут, а холодной — за 10 минут. Через сколько минут после открытия крана с горячей водой нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды в неё поступило столько же, сколько и холодной?

12. Покупатель купил 4,5 кг овощей: помидор и огурцов. За огурцы он заплатил 6 зедов, а за помидоры — 4,5 зеда (зед — условная денежная единица). Сколько стоит 1 кг огурцов и сколько стоит 1 кг помидор, если на 6 зедов можно купить на 2 кг помидор меньше, чем огурцов на 8 зедов?

13. Катер проплыл 30 км против течения реки, а затем 20 км обратно. На весь путь он затратил 6 ч, причём на путь против течения он затратил на 2 ч больше, чем на обратный путь. Какова скорость течения?

Указания к задачам основного задания

1. Введите обозначения для количества девушек и количества юношей на дискотеке. Составьте систему уравнений, выразив двумя способами количество танцующих пар через эти обозначения.

2. Введите обозначения для количества четырёхместных и количества двухместных купе. Составьте систему уравнений, выразив количество пассажиров через эти обозначения.

3. Введите обозначения для количества деталей, изготовляемых за один день мастером и количества деталей, изготовляемых за один день учеником. Составьте систему уравнений, выразив через эти обозначения количество изготовленных деталей и составив соотношение между производительностями труда мастера и ученика.

4. Введите обозначения для количества собак и количества упряжек. Составьте систему уравнений по условию задачи.

5. Введите обозначения для объёма воды в водоёме до запуска коров и для скорости поступления воды из источника. Пользуясь условием, составьте систему линейных уравнений.

6. Введите обозначения для масс купленных сыров. Пользуясь условием, составьте систему трёх линейных уравнений с тремя переменными.

7. Введите обозначения для цен тканей каждого вида. Составьте систему двух линейных уравнений с тремя переменными. Пользуясь этой системой, найдите сумму цен тканей всех видов.

8. Введите обозначения для количества гирь массой 1 кг, 3 кг, 5 кг. Пользуясь условием, составьте систему двух линейных уравнений с тремя переменными. Для нахождения хотя бы одного решения этой системы исключите одну из переменных в одном уравнении, пользуясь другим.

9. Введите обозначения для количества «троек», «четвёрок» и «пятёрок». Пользуясь условием, составьте систему двух линейных уравнений с тремя переменными. Искомое решение можно найти, исключив одну из переменных.

10. Введите обозначения для стоимости каждого комплекта марок. По условию составьте систему четырёх линейных уравнений с четырьмя переменными. Из этой системы найдите сумму стоимостей всех комплектов, а затем и искомую величину.

11. Введите обозначения для объёма ванны, времени, в течение которого был открыт только кран с горячей водой, и времени, в течение которого были открыты краны с горячей и с холодной водой. Пользуясь условием, выразите через эти обозначения объём наполненной ванны, а также составьте соотношение между поступившими объёмами горячей и холодной воды.

12. Введите обозначения для цен 1 кг огурцов и 1 кг помидор. Пользуясь условием, составьте систему уравнений. Выполните замену переменных, приводящую эту систему к системе линейных уравнений.

13. Введите обозначения для скорости движения катера против течения и по течению. Составьте систему уравнений по условию задачи.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. Цену на одну книгу сначала повысили на 40%, а потом снизили на 40%, а на другую — сначала снизили на 20%, а потом повысили на 20%. В результате цены книг стали равными. Каковы первоначальные цены на эти книги, если вместе они стоили 30 зедов (зед — условная денежная единица)?

2. На теплоходе имеются четырёхместные и трёхместные каюты, причём трёхместных вдвое больше. Сколько на теплоходе тех и других кают, если всего на нём 218 пассажиров, причём в четверти четырёхместных кают по 3 пассажира и в трети трёхместных по два пассажира, а остальные места заняты?

3. Агент по продаже недвижимости продал две квартиры. За одну он получил прибыль в размере 20%, а за вторую — в размере 30%. Его общая прибыль составила 24% от стоимости квартир, по которой он их приобрёл. Найдите цены, по которым агент приобрёл каждую из этих квартир, если за первую он заплатил на 20 000 зедов больше, чем за вторую (зед — условная денежная единица)?

4. В летний спортивный лагерь несколько крупных предприятий отправляли детей. В каждом автобусе планировалось поместить одинаковое количество детей. К сожалению, к месту отправления не прибыл один заказанный автобус, поэтому в каждом автобусе пришлось разместить дополнительно по 3 ребёнка. К моменту возвращения за детьми в лагерь прибыло на 2 автобуса больше, чем планировали, и теперь в каждом автобусе ехало на 5 детей меньше, чем предполагали сначала. Сколько детей было отправлено в спортлагерь?

5. Из города выехал автобус, а через 18 минут из того же места в том же направлении выехал автомобиль. Через полчаса пути автобус сделал остановку на 6 минут, а потом продолжил движение. Ещё через 24 минуты автомобиль догнал автобус. В момент остановки автобуса автомобиль был от него на расстоянии 20,4 км. Каковы скорости автобуса и скорость автомобиля?

6. В домашней контрольной работе было предложено 12 задач. За задачу, решённую без существенных ошибок, начисляли 5 баллов, за решение с существенными ошибками — 2 балла, за нерешённую — 0 баллов. Ученик набрал 19 баллов. Сколько задач было решено без существенных ошибок, если нерешённых было на две задачи больше, чем решённых?

7. Покупатель купил 14 м ткани первого вида, 5 м второго, 9 м — третьего. За всё он заплатил 160 зедов (зед — условная денежная единица). Другой покупатель приобрёл соответственно 4, 13 и 9 м таких же тканей и заплатил за всё 128 зедов. Какая ткань дороже — первого или второго вида?

8. В городе есть гостиницы трёх типов. В каждой гостинице первого, второго и третьего типа имеются соответственно 17, 37 и 5 номеров высшего разряда. Всего в гостиницах города 123 номера высшего разряда. Найдите количество гостиниц третьего типа, если их общее количество равно 10.

9. При стрельбе по мишени спортсмен несколько раз попал в десятку, несколько раз выбил 8 очков и несколько раз 5 очков. Всего он сделал 14 выстрелов и набрал 100 очков. Сколько раз спортсмен выбил каждое из указанных количеств очков?

10. Наташа и Нина купили одинаковые коробки чая в пакетиках. Некоторые из пакетиков использовались для приготовления двух чашек чая, а другие — трёх чашек. Наташе коробки хватило на 41 чашку, а Нине — на 58. У кого «двухразовых» пакетиков оказалось больше и на сколько?

11. Горячей водой ванна наполняется за m минут, а холодной — за n минут. Через сколько минут после открытия крана с горячей водой нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды в неё поступило в 1,5 раза больше, чем холодной?

12. Дорога из пункта A в пункт B сначала поднимается в гору на протяжении 3 км, потом идёт по ровному месту на протяжении 12 км, затем спускается под гору на протяжении 6 км. Два туриста прошли этот путь с противоположных концов. Скорости их движения в гору, по ровному месту и под гору постоянны. Вышедший из A затратил 2,5 ч, а вышедший из В — 3 ч. Известно, что вышедший из A затратил на движение по ровному месту столько же времени, сколько на остальные участки вместе. С какой скоростью туристы двигались на различных участках маршрута?

13. Резервуар снабжается водой по четырём трубам. Первая, вторая и третья трубы, работая одновременно, наполняют его за 10 мин; первая, вторая и четвёртая — за 20 мин и, наконец, третья и четвёртая — за 30 мин. Через четвёртую трубу вода вливается в бассейн или выливается из него?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Введите обозначения для исходных цен на книги, выразите через них изменённые цены. Пользуясь условием, составьте систему линейных уравнений.

2. Введите обозначения для количества четырёхместных и количества трёхместных кают, выразите через них количество пассажиров, составьте соотношение между этими количествами.

3. Введите обозначения для стоимостей, по которым была приобретена каждая квартира, выразите через них суммы, за которые они были проданы. Пользуясь условием, составьте систему линейных уравнений.

4. Введите обозначения для запланированных количества автобусов и количества детей в каждом автобусе. Выразите через них двумя способами количество перевозимых детей.

5. Введите обозначения для скоростей автобуса и автомобиля. Выразите через них расстояния, пройденные автобусом и автомобилем: 1) до остановки автобуса; 2) до того момента, когда автомобиль догнал автобус.

6. Введите обозначения для количества задач, решённых без существенных ошибок, решённых с существенными ошибками, и нерешённых. Пользуясь условием, составьте систему трёх линейных уравнений с тремя переменными.

7. Введите обозначения для цен каждого вида тканей. Пользуясь условием, составьте систему двух линейных уравнений с тремя переменными. Из этой системы найдите разность цен 1 м тканей первого и второго вида.

8. Введите обозначения для количеств гостиниц каждого типа, выразите через них общее количество номеров высшего разряда. Пользуясь условием, составьте систему двух линейных уравнений с тремя переменными. Оцените количество гостиниц второго типа.

9. Введите обозначения для количеств попаданий в части мишени, соответствующие каждому из указанных количеств выбитых очков. Пользуясь условием, составьте систему двух линейных уравнений с тремя переменными. Воспользуйтесь методом сложения и свойствами делимости натуральных чисел.

10. Введите обозначения для количеств «двухразовых» пакетиков у Наташи и у Нины, для количества пакетиков в коробке. Выразите через них количества «трёхразовых» пакетиков у Наташи и у Нины, составьте систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Из неё найдите разность количеств «двухразовых» пакетиков у Наташи и у Нины.

11. Введите обозначения для объёма ванны и времени, в течение которого был открыт только кран с горячей водой и оба крана одновременно. Пользуясь условием, составьте систему двух уравнений с тремя переменными. Сведите её к системе линейных уравнений.

12. Введите обозначения для скоростей движения туристов на каждом участке. Пользуясь условием, составьте систему уравнений. Выполните замену переменных.

13. Введите обозначения для скоростей движения воды в каждой из четырёх труб. Составьте, пользуясь условием, систему трёх уравнений с четырьмя переменными. Найдите их сумму и разность скоростей наполнения резервуара третьей и четвёртой трубами.

Задачи на исследование

1. Исследуйте системы уравнений, то есть определите, при каких значениях параметров они имеют решения и укажите их, при каких значениях параметров они не имеют решений, и при каких значениях параметров они имеют бесконечное множество решений, укажите их:

$$1)\begin{cases} kx+y=a, \\ x+ky=b; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} kx+y+z=1, \\ x+ky+z=k, \\ x+y+kz=k^2; \end{cases} \quad 3)\begin{cases} kx+y+z=a, \\ x+ky+z=b, \\ x+y+kz=c; \end{cases} \quad 4)\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \\ a_3x+b_3y=c_3; \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2. \end{cases} \quad 6)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases}$$

2. Некто N родился в XX веке. Суммы цифр его года рождения и смерти одинаковы. Число прожитых им лет начинается цифрой 8.

а) В каком году родился N?

б) Можете ли вы решить эту задачу, если N родился в любом другом веке нашей эры, а все остальные условия сохраняются?

в) Можете ли вы решить эту задачу, если число прожитых N лет начинается любой цифрой от 1 до 8, а все остальные условия сохраняются?

г) Можете ли вы решить эту задачу, если N родился в любом другом веке нашей эры, число прожитых им лет начинается любой цифрой от 1 до 8, а все остальные условия сохраняются?

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Системы линейных уравнений и их применения

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие