Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Сравниваем шансы

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Сравниваем шансы. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов. — 54 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 8-9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 от 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, формирование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения учащимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 8-9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для решения различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия.

Наряду с пособиями «Анализ статистических данных», «Перебираем варианты» настоящее пособие подготавливает обучающихся к изучению курса «Теория вероятностей и математическая статистика». В данном пособии начинается формирование таких понятий, как случайный опыт, случайное событие и его вероятность.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для пони-

мания приведенных решений задач и поиска решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком .

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого модуля, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после решения каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить или приобрести тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, воз-

вратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Сравниваем шансы

Одним из разделов математики является теория вероятностей и математическая статистика. Вы начали его изучать. На базе ваших знаний постараемся помочь вам в овладении этим разделом.

Источником развития теории вероятностей были азартные игры. Азартными называют те игры, в которых выигрыш зависит главным образом не от умения игрока, а от случайности. В XVII веке распространенной была игра в кости. Например, перед подбрасыванием трёх костей игроки пытались угадать сумму очков, которая выпадет на их верхних гранях. Игроки неоднократно обращались к известным математикам с вопросами, которые возникали у них во время игры. Поиск ответов на эти вопросы способствовал разработке основных понятий и общих принципов теории вероятностей. Математики по этому поводу шутят: глупая игра в кости породила большую и мудрую науку, очень важную для практической деятельности людей, в то время как умная игра в шахматы в истории науки никакой роли не сыграла.

1. Случайные события

Случайным нам кажется то, что нарушает обычный ход событий. Вы пошли за хлебом в магазин, а он оказался закрытым. Вы спешите в школу, но автобус своевременно не прибыл на остановку, и вы опоздали. Вы собрались на прогулку, но пошел сильный дождь, и нельзя выйти из дома. Это неприятные случайности. Но есть и приятные: ваш лотерейный билет оказался выигрышным; вы получили желаемый подарок; собирая ягоды, вы натолкнулись на место, где много ягод и т. д.

В природе, обществе, быту большинство явлений являются случайными. Случайными являются метеорологические явления: предварительно нельзя однозначно предсказать, какой будет погода в следующие дни, когда пойдет дождь, длительным ли он будет, когда выпадет первый снег и т. п. Случайными являются засуха, землетрясение.

Вместе с тем есть немало явлений, о которых можно однозначно предска зать их исход. К таким явлениям относятся изменение времен года, восход и за кат солнца, изменение дня и ночи и др. Ведь мы знаем, что за весной наступает лето, за летом — осень, за осенью — зима, за зимой — весна. Так же, солнце всегда всходит на востоке, а заходит на западе. День наступает на смену ночи, а ночь — на смену дню. Эти явления не являются случайными. Их еще называют ***детерминированными***.

Закономерности, присущие неслучайным явлениям, изучают такие науки, как физика, химия, биология и др. Закономерности, присущие массовым случайным явлениям, изучает теория вероятностей. Её методы проникают и в другие науки, в том числе и в те, которые названы выше.

Неопределённость исхода того или иного действия или наблюдения, то есть невозможность до их окончания определённо сказать, каким результатом оно закончится, не является достаточным для того, чтобы объявить его случайным испытанием.

Случайным является испытание, которое можно повторить много раз примерно в одинаковых условиях, и результат которого нельзя предсказать однозначно.

Примерами случайных испытаний являются различные игры с подбрасыванием игрального кубика (нарды; тише едешь — дальше будешь и т. п.); игра в лото, различные лотереи (7 из 49, 6 из 45, 5 из 36, Русское лото, «Золотой ключ», Кено и т. п.); раздача карт при различных карточных играх; игра “Поле чудес”; игра в рулетку; рождение детей; стрельба по мишени; и т. д. Все эти действия можно повторить многократно, примерно в одинаковых условиях, их результаты (исходы) нельзя предсказать однозначно.

Для случайного испытания определяется множество его ***элементарных событий (исходов),*** то есть простейших исходов, из которых в данном испытании наступает один и только один. Элементарный исход испытания нельзя разделить на более мелкие исходы. Так, для подбрасывания двух монет исход «герб выпал ровно один раз» не является элементарным: он состоит из двух исходов, «выпал герб, затем цифра (ГЦ)» и «выпала цифра, затем герб (ЦГ)».

Другими словами, множество элементарных исходов указанного испытания состоит из 4-х элементарных исходов {ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}. Например, случайное испытание «бросание монеты» состоит из двух элементарных событий «Выпал герб (Г)» и «Выпала цифра (Ц)» и не содержит других элементарных исходов. Если монета упала на ребро или укатилась в щель, то мы считаем, что случайное испытание «бросание монеты» не произошло, и монету бросаем повторно.

Под случайным событием понимаем любой исход случайного испытания, точнее: подмножество (то есть, часть) множества всех элементарных исходов случайного испытания.

С подбрасыванием игрального кубика, связаны, например, такие события: «выпало чётное количество очков», {2, 4, 6}; «количество выпавших очков меньше трёх», {1, 2}; «количество выпавших очков не меньше трёх», {3, 4, 5, 6} и др.

Со случайным испытанием — рождением детей — связаны, например, такие события: «родился мальчик», «родилась девочка», «родились близнецы» и т. д.

Кроме того, есть немало испытаний, в которых невозможно однозначно предсказать исход, но которые не являются случайными. Это так называемые ***уникальные*** испытания, то есть такие, которые нельзя повторить многократно примерно в тех же условиях. К таким испытаниям относятся, например, поступление юноши в университет, вытягивание экзаменационного билета, сдача экзамена, выход девушки замуж и т. д. Теория вероятностей такие явления не изучает.

Готовимся к решению задач

1. Приведите примеры испытаний, результаты которых можно предсказать однозначно, и примеры действий, результаты которых нельзя предсказать однозначно.

2. Приведите примеры испытаний, которые можно повторить многократно, и которые нельзя повторить многократно.

3. Приведите примеры испытаний, которые можно повторить примерно в тех же условиях, и которые нельзя повторить примерно в тех же условиях.

4. Является ли игра в рулетку случайным испытанием**?**

5. Является ли вращение земли вокруг солнца детерминированным испытанием?

6. Является ли поступление юноши в университет уникальным испытанием?

7. Является ли уникальным испытание «Ученик А написал контрольную работу по теме «Параллелограмм»?

8. При каких условиях извлечение красного шарика из мешка при извлечении наугад не является случайным?

9. Сколько граней у игрального кубика и что на них изображено?

10. Сколько шаров нужно случайным образом вынуть из шкатулки, содержащей 2 красных и 2 синих шара, чтобы наверняка иметь шары обоих цветов?

11. В ящике 5 одинаковых перчаток на правую руку и 5 таких же на левую. Сколько перчаток нужно наудачу вынуть из ящика, чтобы среди них наверняка была пара перчаток на обе руки?

12. Из шкатулки, содержащей 2 белых шара и 4 чёрных, наудачу вынули 3 шара. Какими могли оказаться эти шары?

Решение задач

В следующей задаче рассматривается связь между элементарными событиями случайного испытания и произвольными событиями, которые могут наступить в результате этого испытания.

Задача 1. Подбрасывается игральный кубик.

1) Указать элементарные исходы этого испытания.

2) Привести примеры случайных событий, связанных с этим испытанием.

3) Являются ли случайными, связанными с этим испытанием, следующие события: а) количество выпавших очков чётно; б) количество выпавших очков не превышает 6; в) количество выпавших очков равно 7; г) выпала «решка»?

Анализируем. Предварительно нужно выяснить, является ли подбрасывание игрального кубика случайным испытанием, для чего необходимо проверить выполнимость всех трёх условий. Для выполнения первого задания, нужно использовать то, что элементарные исходы — это простейшие исходы, из которых в данном испытании наступает один и только один. Для ответа на второе и третье задания нужно воспользоваться вышеприведенным определением случайного события.

Решаем. Подбрасывание игрального кубика является случайным испытанием, так как его можно повторить много раз примерно в одинаковых условиях, а его результат нельзя предсказать однозначно.

1) Элементарными исходами данного испытания являются выпадания 1-го, 2-х, 3-х, 4-х, 5-и, 6-и очков. Действительно, это простейшие исходы, их нельзя разбить на более мелкие; в результате испытания из них происходит один и только один. Множество элементарных исходов состоит из 6 элементов: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

2) Примерами случайных событий, связанных с рассматриваемым испытанием являются: выпадание количества очков, меньшего 3, это подмножество {1, 2}; выпадание, количества очков, кратного 3, это подмножество {3, 6} и др.

3) а) Выпадание чётного количества очков описывается подмножеством множества элементарных исходов испытания, оно имеет вид {2, 4, 6}, это случайное событие; б) «количество выпавших очков не превышает 6» состоит из всех элементарных исходов испытания, такие события будем называть ***достоверными***; в) «количество выпавших очков равно 7» не содержит элементарных исходов множества, это так называемое пустое подмножество. Оно является случайным событием, такие события будем называть ***невозможными***; г) выпала «решка» — случайное событие, но связанное не с рассматриваемым испытанием, а с испытанием «подбрасывается монета».

1. *Каковы элементарные исходы испытания* «подбрасывается монета»*?*

2. *Сколько элементарных исходов имеет испытание «подбрасывается* *тетраэдр»?*

3. *Является ли элементарным исходом испытания «подбрасывается игральный кубик» исход «выпало более 5-и очков?*

4. *Является ли случайным событием, связанным с подбрасыванием игрального кубика, событие «количество выпавших очков больше двух, но меньше 8»?*

Случайные события, состоящие из всех элементарных исходов случайного испытания, называют достоверными. Они обязательно происходят в результате испытания.

Случайные события, не содержащие ни одного элементарного исхода случайного испытания, называют невозможными. Они ни в коем случае не могут произойти в результате испытания.

Случайные события, не являющиеся ни достоверными, ни невозможными, будем называть возможными. Они могут произойти в результате испытания, а могут и не произойти.

В следующей задаче будут рассмотрены испытания, которые заканчиваются наступлением или достоверного события, или невозможного, или возможного.

Задача 2. Положим в шкатулку 2 белых, 2 черных и 2 красных шара. Сколько шаров нужно вынуть из шкатулки, чтобы наверняка иметь шары всех трёх цветов?

Анализируем. Для ответа на поставленный вопрос нужно рассмотреть всевозможные варианты для количества вынутых шаров.

Решаем. Если вынуть 1 или 2 шара, то **невозможно** получить шары трёх цветов. Если вынуть 5 или 6 шаров, то **обязательно** получим шары всех трёх цветов. Если вынуть 3 или 4 шара, то **возможно, но не обязательно** будем иметь шары всех трёх цветов.

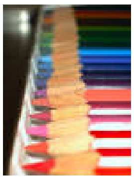
1. *Почему, если вынуть 1 или 2 шара, то* ***невозможно*** *получить шары трёх цветов?*

2. *Почему, если вынуть 5 или 6 шаров, то* ***наверняка*** *получим шары трёх цветов?*

3. *Почему, если вынуть 3 или 4 шара, то* ***возможно, но не обязательно*** *будем иметь шары всех трёх цветов?*

В рассмотренной задаче фактически рассматривались три случайных испытания. В первом случае мы имели дело с ***невозможным событием*** случайного испытания «извлечение одного или двух шаров из данной шкатулки» — оно ни в коем случае не происходит в этом испытании, во втором случае — с ***достоверным событием*** случайного испытания «извлечение 5 или 6 шаров из данной шкатулки» — оно обязательно происходит в этом испытании, в третьем случае — с ***возможным событием*** случайного испытания «извлечение 3 или 4 шаров из данной шкатулки» — оно может произойти в этом испытании, а может и не произойти.

В отличие от предыдущей задачи, в следующей рассматривается одно испытание, и нужно будет решить, к какому типу относятся рассматриваемые там события.



Задача 3. В коробке смешаны 4 цветных карандаша и 10 простых. Из коробки наугад взяли 5 карандашей.

1) Обязательно ли среди них будет, по крайней мере, один простой карандаш?

2) Могут ли все они быть цветными?

3) Будет ли среди них, по крайней мере, один цветной?

Анализируем. Получить ответы на предложенные вопросы можно или с помощью рассуждений, или в процессе экспериментальной деятельности, связанной с извлечением карандашей.

Решаем. Вначале рассмотрим экспериментальный путь. Вынули 5 карандашей, среди них оказался простой. Попробовали еще раз. Тот же результат. После проведения значительного количества опытов, можно прийти к выводу, что среди 5 вынутых карандашей все не могут быть цветными, по крайней мере, один будет простым. Следовательно, ответ на первый вопрос — «да». Событие “среди пяти вынутых карандашей есть, по крайней мере, один простой карандаш” является достоверным.

К тому же выводу можно прийти с помощью рассуждений. Поскольку цветных карандашей в коробке лишь четыре, то все пять вынутых карандашей не могут быть цветными: среди них есть, по крайней мере, один простой.

Второй вопрос. Могут ли все карандаши быть цветными? Как мы только что установили, нет. Цветных карандашей в коробке только 4. Событие “все пять вынутых карандашей является цветными” является невозможным.

Третий вопрос. Могут ли среди извлечённых карандашей оказаться цветные? Да? Нет? Возможно нет или безусловно нет? Точно этого знать не можем. Ведь может оказаться, что все пять вынутых карандашей являются простыми, так как в коробке есть 10 простых карандашей. А может среди вынутых карандашей оказаться и цветной: в коробке есть цветные карандаши, а извлечение происходит наугад, тот, кто вынимает карандаши, не смотрит в коробку, карандаши на ощупь не отличаются друг от друга, они одинаковы во всем, кроме цвета. Следовательно, событие “среди вынутых карандашей есть, по крайней мере, один цветной” является возможным, оно может произойти, а может и не произойти.

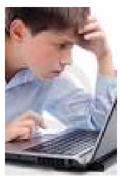
1. *Отличается ли выражение «есть, по крайней мере, один простой карандаш» от выражения: “есть точно один простой карандаш”?*

2. *Обязательно ли среди вынутых карандашей будут, по крайней мере, два простых?*

3. *Могут ли среди вынутых карандашей быть четыре цветных?*

4. *Если произошло событие «Вынут, по крайней мере, один простой карандаш», то могло оказаться, что вынуто точно два простых карандаша?*

В следующей задаче предлагается определять, какое рассматривается случайное событие — достоверное, невозможное или возможное — с помощью словосочетаний: «обязательно»; «ни в коем случае не»; «возможно».



Задача 4. Вставьте вместо трех точек одно из словосочетаний: обязательно; ни в коем случае не; возможно:

1) завтра в Москве в полночь ... будет светить Солнце;

2) когда я вырасту, я … полечу в космос;

3) Гриша ... празднует свой день рождения 30 февраля;

4) прохожий в Орле ... встретит на улице собаку;

5) после весны ... наступает зима;

6) завтра ... пойдёт дождь;

7) я ... закончу школу с медалью;

8) я ... научусь работать на компьютере.

Анализируем. Чтобы правильно вставить слово или словосочетание, нужно проанализировать каждое предложение, ответив на вопросы: «обязательно ли произойдёт событие, о котором в нём идёт речь», «может ли произойти это событие».

Решаем. 1) В полночь в Москве ***ни в коем случае не*** будет светить Солнце;

2) когда я вырасту, я, ***возможно,*** полечу в космос (этого нельзя ни утверждать, ни отрицать);

3) Гриша ***ни в коем случае не*** празднует свой день рождения 30 февраля (ведь в феврале 28 или 29 дней);

4) прохожий в Орле ***обязательно*** встретит на улице собаку (собак так много в каждом городе, что нельзя, идя по городу, не встретить хотя бы одну);

5) после весны ***ни в коем случае не*** наступает зима (ведь после весны наступает лето);

6) завтра, ***возможно,*** пойдёт дождь (дождь может пойти, а может и не пойти);

7) я, ***возможно,*** окончу школу с медалью (до окончания школы этого нельзя ни утверждать, ни отрицать);

8) я ***обязательно*** научусь работать на компьютере (этого даже требует школьная программа).

1. *Если бы в задании 1) отсутствовали слова «в Москве», что бы Вы вставили вместо многоточия?*

2. *Что бы Вы вставили вместо многоточия в задании 3), если бы вместо*

«30 февраля» там стояло «30 мая»?

3. *Когда в задании 7) вместо многоточия можно вставить слова «обязательно» или «ни в коем случае не»?*

В следующей задаче характер события определяется путём анализа описанной ситуации.

Задача 5. Двое играли в шашки. Спустя некоторое время на доске осталось 5 шашек. Определить характер последующих событий:

а) на доске есть точно три белые шашки;

б) на доске есть три шашки одного цвета;

в) на доске количество белых шашек вдвое больше количества чёрных.

Анализируем. Для решения задачи можно рассмотреть всевозможные комбинации количества белых и количества чёрных шашек среди 5 шашек. Достоверным будет то событие, которое происходит при всех комбинациях, невозможным — не происходит ни при какой комбинации, возможным — при одних комбинациях происходит, а при других — нет.

Решаем. Различные варианты цветов оставшихся шашек представлены в следующей таблице.

Количество шашек	Белых	0	1	2	3	4	5
	Черных	5	4	3	2	1	0

Как видно из таблицы, случайное событие «*на доске есть точно три белые шашки»* — возможное: оно происходит только в одном варианте «3 белые и 2 черные шашки», событие «*на доске есть три шашки одного цвета»* — достоверное, оно происходит при любом распределении оставшихся шашек: в первых трех столбцах видим, что на доске остались, по крайней мере, три черные шашки, в последних трех — хотя бы три белые. И, наконец, событие «*на доске количество белых шашек вдвое больше количества чёрных»* является невозможным, так как оно не происходит ни при каком способе распределения шашек.

1. *Установите характер события: «на доске осталась, по крайней мере, одна черная шашка».*

2. *Установите характер события: «количество белых шашек на 4 превышает количество чёрных».*

3. *Установите характер события: «на доске есть две шашки одного цвета».*

4.*Если наступило событие «на доске хотя бы три белые шашки», то может ли быть на доске: а) точно две белые шашки? б) точно четыре белые шашки?*

Проверь себя

1. В шкатулке 3 белых, 3 чёрных и 3 красных шара. Какое наименьшее количество шаров нужно вынуть наугад из шкатулки, чтобы среди них обязательно были шары всех трёх цветов?

А. 7. **Б**. 6. **В**. 5. **Г.** 4.

2. В шкатулке лежат 60 монет, которые отличаются лишь цветом: 20 красных, 20 белых, 20 желтых. Из шкатулки взяли 45 монет. Какое утверждение неправильно?

А. Среди вынутых монет обязательно есть красная.

Б. Среди вынутых монет обязательно есть 5 белых.

В. Среди вынутых обязательно есть монеты всех трёх цветов.

Г. Среди вынутых монет обязательно есть 10 красных.

3. Какой из приведенных ответов на вопрос: «Будет ли следующий год в Донецкой области урожайным для картофеля?» Вы считаете правильным?

А. Да. **Б.** Ни в коем случае. **В.** Возможно да, возможно нет.

Г. Ни один из приведенных ответов не является правильным.

4. Достоверным, невозможным или возможным является событие: “При подбрасывании двух игральных костей сумма выпавших очков меньше двух”?

А. Достоверным. **Б**. Случайным.

В. Невозможным. **Г.** Определить невозможно.

5. Сколько элементарных исходов содержит испытание «подбрасывание двух монет»?

А. 8. **Б**. 4. **В**. 3. **Г.** 2.

Реши сам

1. На какие из следующих вопросов правильным ответом будет «Да», а на какие – «Нет»?

1) Верно ли, что абрикосовые деревья расцветают раньше яблоневых?

2) Верно ли, что Волга впадает в Чёрное море?

3) Верно ли, что Нижний Новгород расположен на Волге выше Астрахани?

4) Верно ли, что во всех странах люди выходят на пенсию в одном возрасте?

5) Верно ли, что в России возраст выхода на пенсию сохранится на ближайшие 20 лет?

2. В шкатулке 3 белых, 3 чёрных и 3 красных шара. Какое наибольшее количество шаров нужно вынуть наугад из шкатулки, чтобы среди них могли быть, а могли и не быть шары всех трёх цветов?

3. В шкатулке два красных, два белых и два зелёных шара. Сколько нужно вынуть не глядя шаров, чтобы среди них:

1) обязательно были шары всех трёх цветов;

2) возможно, но не обязательно были шары всех трёх цветов;

3) ни в коем случае не было шаров всех трёх цветов?

4. Вставьте вместо трех точек одно из словосочетаний: обязательно, ни в коем случае не, возможно.

1) Поезд на станцию ... прибудет по расписанию.

2) В нашем городе в полночь ... светит солнце.

3) После лета ... наступает осень.

4) Меня ... включат в состав сборной школы для участия в математической олимпиаде.

5) В нашем городе в полдень ... светло.

6) После лета ... наступает весна.

5. Определите характер следующих событий, связанных с извлечением одного бочонка лото:

1) число на бочонке или сумма цифр числа на нём равна 8;

2) сумма цифр числа на бочонке равна 19;

3) сумма цифр числа на бочонке меньше 20.

6. Является ли элементарным исходом испытания «подбрасывание двух игральных кубиков» событие — сумма выпавших очков: 1) равна1; 2) больше 11; 3) равна 2?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Ходьба человека. После шага левой ногой человек обязательно делает шаг правой. Это испытание, исход которого можно предсказать однозначно. **Покупка лотерейного билета.** Заранее неизвестно, выигрышный он или нет.

2. Извлечение шаров из урны с возвращением. Можно много раз извлекать шары из урны. **Запуск космического корабля нельзя повторить многократно.**

3. Стрельба по мишени одного и того же стрелка из одного и того же оружия, если положение мишени не меняется, происходит примерно в одинаковых условиях. Повторные футбольные матчи между двумя командами, как правило, происходят при изменённых условиях.

4. Да. Проверьте выполнимость трёх условий.

5. Да. Проверьте, можно ли однозначно предсказать его исход.

6. Да. Проверьте, можно ли его повторить многократно примерно в одинаковых условиях.

7. Нет. Проверьте, можно ли его повторить многократно примерно в одинаковых условиях.

8. Например, если известно, что в мешке все шары красные.

9. 6 граней, 1, 2, 3, 4 5 6 точек.

10. 3 или 4. Убедитесь, что извлечение двух шаров может оказаться недостаточным.

11. 6. Убедитесь, что извлечение менее 6 перчаток может оказаться недостаточным.

12. 3 чёрных; 2 чёрных и 1 белый, 1 чёрный и 2 белых. Обратите внимание на то, что в шкатулке всего 2 белых шарика.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. «Выпадание герба»; «выпадание цифры». **2.** 4. **3.** Да. **4.** Да.

Задача 2. 1. Так как количество вынутых шаров меньше количества цветов. 2. Так как шаров любых двух цветов только 4. 3. Если, например, окажется по 1 шару каждого цвета, то будем иметь шары трёх цветов; если же, например, будет вынуто по 2 шара двух цветов, то не получим шары трёх цветов.

Задача 3. 1. Да. 2. Нет. 3. Да. 4. Да.

Задача 4. 1. Возможно. 2. Возможно. 3. Если речь идёт о конце учебного года и выполнены или не выполнены все требования для получения медали.

Задача 5. 1. Возможное. 2. Невозможное. 3. Достоверное. 4. а) Нет. б) Да.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
А	Г	В	В	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Да — 1-й и 3-й; нет — 2-й, 4-й и 5-й.

2. 6. Проанализируйте ситуацию с извлечением 7 шаров.

3. 1) 5 или 6; 2) 3 или 4; 3) 1 или 2. Воспользуйтесь решением задачи 2.

4. 1) Возможно; 2) ни в коем случае не; 3) обязательно; 4) возможно; 5) обязательно; 6) ни в коем случае не. Воспользуйтесь решением задачи 4.

5. 1) Возможное; 2) невозможное; 3) достоверное. Воспользуйтесь тем, что на бочонках лото проставлены числа от 1 до 99.

6. 1) Нет; 2) да; 3) да.

2. Сравниваем шансы

Иногда приходится оценивать возможность наступления того или иного события, сравнивать возможности наступления двух случайных событий. Например, такие задачи могут возникнуть при игре с игральными автоматами: что имеет больше шансов, выиграю я или потеряю деньги, заплаченные за право играть; каковы шансы получить выигрышный лотерейный билет при покупке одного билета и т. д.

О важности уметь оценивать, сравнивать шансы наступления различных событий говорят и известные пословицы, фразы:

- ***счастливый случай***, то есть наступило событие, которое имело мало шансов произойти;
- ***когда рак на горе свистнет***, так обычно говорят о событии, которое никогда не наступит;
- ***как гром среди ясного неба***, так говорят о неожиданном событии, которое имело мало шансов произойти.

Попробуем сравнивать шансы наступления случайных событий так же, как сравниваем длины отрезков, массы предметов, площади фигур и т. п.

Готовимся к решению задач

1. В каких пределах может изменяться доля части от целого, разделённого на 10 равных частей?

2. В каких пределах может меняться доля части от целого, разделённого на 10 равных частей, если часть содержит: а) более половины целого; б) менее четверти целого?

3. Есть три мешочка со 100 шарами в каждом. В первом содержится 1 синий шар; во втором — 5, в третьем — 10. Из какого мешочка легче всего наудачу извлечь синий шар?

4. Изобразите на координатном луче следующие числа: 0; 0,3; 0,5; 0,8, 1.

5. Подбросили две монеты. Сколько раз может выпасть цифра?

6. Из ящика с белыми и чёрными шарами наудачу с возвращением извлекали 50 раз по одному шару. Среди них оказалось 36 белых и 14 чёрных. Каких шаров больше в ящике: белых или чёрных?

Решение задач

Следующая задача посвящена различению возможных случайных событий, невозможных и достоверных.

Задача 1. Положим в шкатулку 2 белых, 2 черных и 2 красных шара. Извлечём наугад пять из них.

1) Будут ли среди них белые?

2) Может ли оказаться, что среди вынутых шаров есть три белых?

3) Могут ли среди вынутых шаров оказаться два белых?

Анализируем. Для ответа на поставленные вопросы нужно сравнить количество вынутых шаров и количество белых шаров, указанное в задании, с общим количеством шаров в шкатулке и количеством белых среди них.

Решаем. 1) Несомненно, среди вынутых шаров обязательно будут белые. Ведь даже, если вынуть 2 черных и 2 красных шара, то пятым будет белый шар.

2) Нет, ни в коем случае среди вынутых шаров не может оказаться три белых шара, так как в шкатулке всего два белых шара.

3) Среди вынутых шаров может оказаться два белых шара, а может и не оказаться; точно мы этого знать не можем. Ведь может оказаться, что среди вынутых шаров есть два черных и два красных, в таком случае белый шар будет лишь один. А если среди вынутых шаров окажется два черных и один красный или один черный и два красных шара, то среди вынутых шаров будет два белых.

1. *Если из шкатулки вынуть наугад 4 шара, то будут ли среди них красные?*

2. *Если из шкатулки вынуть наугад 4 шара, то будут ли среди них одноцветные?*

3. *Если из шкатулки вынуть наугад 4 шара, то могут ли среди них быть шары трёх цветов?*

Рассмотренные ответы в задаче 1 можно изобразить графически, на единичном отрезке на рис. 1. Ответ «да» на первый вопрос изображен кружочком в конце единичного отрезка на рис. 1 *а*. Он обозначен числом 1.

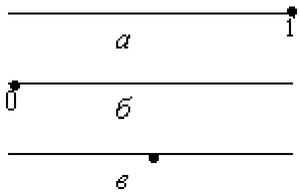


Рис. 1

Ответ «нет» на второй вопрос изображен на рис. 1 *б*. Кружочек поставлен в начале отрезка, он обозначен числом 0.

Ответ «может да, а может нет» на третий вопрос обозначим так, как это изображено на рис. 1 *в*. Кружочек поставлен внутри отрезка, и это значит, что ответ находится между «да» и «нет».

Обобщая рассмотренный пример, можно прийти к выводу, что шансы наступления случайных событий можно описывать числами от 0 до 1.

Графическое изображение отрезка можно использовать и для иллюстрации более точных ответов: при изображении ответа «больше да, чем нет», мы кружочек поставим ближе к правому концу отрезка; если же мы отдаем предпочтение ответу «больше нет, чем да», — то ближе к левому концу отрезка.

Рис. 2

Задача 2. На единичном отрезке (рис. 2) изображены следующие события:

а) выпадение «шестёрки» при однократном бросании игрального кубика — точка A;

б) выпадение герба при однократном подбрасывании монеты — точка B;

в) выпадение снега в Ташкенте 1 июля — точка C;

г) обнаружение дерева с зелёными листьями в Москве в июне — точка D;

д) наличие в 5-м классе ученика, старше 50 лет — точка E.

Проверить, правильно ли изображены эти события.

Анализируем. Для решения задачи используем тот факт, что концом единичного отрезка (точкой 1) изображаются достоверные события, началом (точкой 0) — невозможные события. Возможные события изображаются внутренними точками единичного отрезка, причём, чем больше шансов настать имеет событие, тем правее на единичном отрезке находится точка, его изображающая.

Решаем. Событие «выпадение «шестёрки» при однократном бросании игрального кубика» может наступить, а может не наступить, поэтому изображение его точкой *A* неверно. Событие «выпадение герба при однократном подбрасывании монеты» может наступить, а может не наступить, поэтому изображение его точкой *B* неверно. Оно имеет одинаковые шансы как наступить, так и не наступить, поэтому его естественно изобразить точкой, лежащей в середине отрезка *AB*. Событие «выпадение снега в Ташкенте 1 июля» не наступает никогда. Изображение его точкой *C* неверно, его следует изобразить точкой *B*. Событие «обнаружение дерева с зелёными листьями в Москве в июне» обязательно наступает, поэтому изображение его точкой *D* неверно, его следует изобразить точкой *A*. Событие «наличие в 5-м классе ученика, старше 50 лет» никогда не наступает, поэтому изображение его точкой *E* неверно, его следует изобразить точкой *B*.

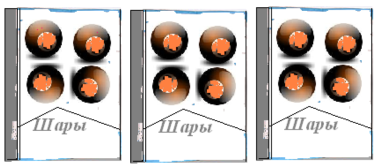
1. *К какому концу единичного отрезка ближе расположена точка, изображающая событие «выпадение «шестёрки» при однократном бросании игрального кубика»?*

2. *К какому концу единичного отрезка ближе расположена точка, изображающая событие «извлечение из колоды в 36 карт карты, не являющейся картинкой (валетом, дамой, королём, тузом)?*

3. *К какому концу единичного отрезка ближе расположена точка, изображающая событие «сумма очков, выпавших при двукратном подбрасывании игрального кубика, равна 2»?*

В задаче 1 фактически мы сравнивали шансы трех различных событий в одном опыте. Сделать это нам помогли логические рассуждения, здравый смысл. Именно так подойдем мы и к решению следующей задачи.

Задача 3. Есть три мешочка с шарами. В каждом из них по одному красному шару. В первом —



10 шаров, во втором — 15, в третьем — 30. Нужно вынуть красный шар. Из какого мешочка целесообразно извлекать шар, чтобы шансы вынуть красный шар были наибольшими?

Анализируем. Наш опыт говорит о том, что тяжело найти иголку в стоге сена. Легче её найти в небольшой сумочке. Так и с шарами. Красному шару легче затеряться среди большего количества шаров.

Решаем. Понятно, что есть один шанс из 10 вынуть красный шар из первого мешочка, причем ни одному из исходов этого испытания мы не можем отдать предпочтение по сравнению с другими, ведь шар вынимается наугад. Точно так же есть один шанс из 15 вынуть красный шар из второго мешочка и один шанс из 30 — из третьего. Больше всего шансов — вынуть красный шар из первого мешочка. Если бы мы хотели графически изобразить шансы извлечения красного шара из трех мешочков, то это можно было бы сделать так, как это сделано на рис. 3 с помощью отрезка длиной 1.

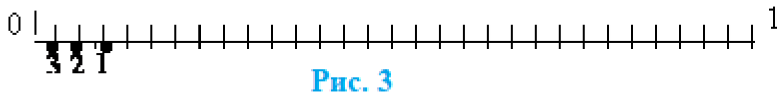


Рис. 3

Изображение на рис. 3 означает, что наименьшие шансы имеет извлечение красного шара из третьего мешочка (соответствующая точка находится левее всех других); наибольшие — из первого (соответствующая точка находится правее всех других).

Еще говорят, что наибольшей является ***вероятность*** вынуть красный шар из первого мешочка.

1. *Как вы объясните, что точка 3 изображает 1 шанс из 30?*

2. *Как вы объясните, что точка 1 изображает 1 шанс из 10?*

3. *Как вы объясните, что точка 2 изображает 1 шанс из 15?*

Словом «вероятность» мы пользуемся на каждом шагу.

- Мы пойдем завтра на футбол?
- Вероятно ...
- Ты уверен, что Юра закончит учебный год на отлично?
- Маловероятно ...

- Ты слышал, что у нас в школе сеанс одновременной игры в шахматы будет проводить сам Анатолий Карпов?

- Невероятно!!!

В этих репликах «вероятно, маловероятно, невероятно» делается попытка оценить возможность появления того или другого события, то есть попытка дать количественную оценку этой возможности. Идея выражать числами степень возможности появления тех или других событий возникла после того, как люди обнаружили множество примеров, в которых наблюдалось странное свойство устойчивости явлений, то есть способность повторяться приблизительно одинаково часто. Рассмотрим один из таких примеров.

Представьте себе, что Вы подбросили монету так, что она закрутилась в воздухе и, взлетев высоко, упала на пол. Можно ли точно предсказать, что она упадет гербом или цифрой вверх? Конечно, нет. Ведь при одном подбрасывании появление герба или цифры происходит случайно. Но если подбросить монету достаточно много раз, то примерно половину раз она упадет вверх гербом, а половину — цифрой. Следовательно, подбрасывание монеты является устойчивым явлением.

1. *Приведите еще примеры устойчивых испытаний.*

2. *Является ли устойчивым количество дождливых дней в определенном месяце?*

3. *Является ли устойчивым испытанием извлечение наугад с возвращением двух шаров из ящика, содержащего шары различных цветов?*

Ранее мы сделали вывод о том, что шансы появления событий можно измерять, как другие величины. Шансы описываются числами от 0 до 1, при этом достоверное событие появляется с шансом 1, невозможное — с шансом 0. События мы изображали точками на единичном отрезке. В следующей задаче мы будем характеризовать события по их изображениям на единичном отрезке.

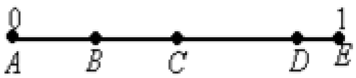


Рис. 4

Задача 4. На единичном отрезке точками изображены события (см. рис. 4). Охарактеризуйте их.

Анализируем. По изображению событий сразу можно назвать достоверное и невозможное событие. Для характеристики возможных событий можно использовать тот факт, что расстояние от точки A до точки, изображающей некоторое событие, равно шансам его наступления, а расстояние от точки E до этой точки — шансам его непоявления. Кроме того, из двух точек, расположенных на единичном отрезке, левая точка изображает событие, имеющее меньше шансов для появления по сравнению с событием, изображаемым другой точкой.

Решаем. Ясно, что событие A — невозможное, а событие E — достоверное. Из событий B, C, D событие B имеет наименьшие шансы появиться, а событие D — наибольшие. Событие B имеет меньшие шансы для появления, чем для непоявления, а событие D появляется с большими шансами, чем не появляется. Шансы его появления близки к 1, они примерно равны 0,9. Событие C имеет равные шансы как появиться, так и не появиться, так как отрезки AC и CE равны. Эти шансы равны 0,5.

1. *Чему приближённо равны шансы появления события B?*
2. *Чему приближённо равны шансы непоявления события B?*
3. *Чему приближённо равны шансы непоявления события D?*
4. *Чему равна сумма шансов появления и непоявления любого события?*

В следующей задаче сравниваются шансы наступления двух событий.

Задача 5. Подбросили два игральных кубика. Игральный кубик — это кубик, на гранях которого нарисованы от одной до шести точек, обозначающих очки. Какая сумма количеств точек имеет больше шансов появиться — 2 или 5?

Анализируем. Для решения задачи нужно выяснить, какая сумма 2 или 5 при большом числе подбрасываний может появиться чаще. Для этого нужно посмотреть, в каких, а точнее, в скольких случаях может получиться сумма 2 и в каких сумма 5.

Решаем. При подбрасывании двух игральных кубиков сумма выпавших очков может равняться от 2 до 12. Сумма, равная 2, появляется только в том случае, когда на ~~на~~ верхних гранях обоих кубиков окажется по одной точке, в то время как сумма 5 появляется в четырех случаях: когда на верхних гранях соответственно 1 и 4, 2 и 3, 3 и 2, 4 и 1 точка. Ясно, что сумма «пять» имеет больше шансов для появления по сравнению с суммой «два». Можно говорить иначе: вероятность того, что сумма будет равняться 2 меньше вероятности получить сумму 5.

1. *Какая сумма 3 или 10 имеет больше шансов появиться при подбрасывании двух игральных кубиков?*

2. *В каких случаях сумма количеств точек на верхних гранях при подбрасывании двух игральных кубиков равна: 4; б) 6?*

3. *Вероятность какого события больше: «сумма выпавших очков равна 3» или «сумма выпавших очков равна 11»?*

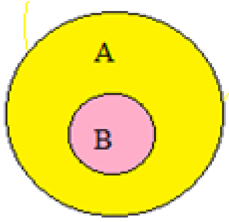


Рис. 5

Иногда удаётся сравнить шансы наступления двух событий с помощью следующих соображений.

Если из наступления события *B* обязательно следует наступление события *A*, то говорят, что *B* ***влечёт за собой*** *A*. В этом случае *B* является частью *A* (см. рис. 5), и шансы его появления меньше шансов появления *A*.

Задача 6. Сравните между собой шансы наступления событий:

A — «Петя извлёк из колоды в 36 карт карту красного цвета»;

B — «Петя извлёк из колоды в 36 карт карту бубновой масти».

Анализируем. Попробуем установить, не влечёт ли одно из данных событий другое.

Решаем. Ясно, что событие *B* влечёт за собой событие *A*: ведь если извлечена карта бубновой масти, то она красного цвета. Обратное неверно: если карта красного цвета, то она не обязательно бубновой масти. Следовательно, шансы наступления события *B* меньше шансов наступления события *A*.

1. *Даны два события: «Из колоды в 36 карт извлечена дама»; «Из колоды в 36 карт извлечена карта пиковой масти». Влечёт ли какое-то из этих событий за собой другое?*

2. *Даны два события: «Из колоды в 36 карт извлечена дама»; «Из колоды в 36 карт извлечена карта-картинка». Влечёт ли какое-то из этих событий за собой другое?*

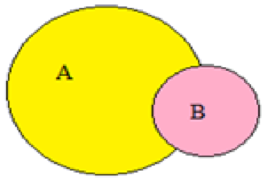


Рис. 6

3. *Событие A: «Среди двух карт, извлечённых из колоды в 36 карт, хотя бы одна трефовой масти»; Событие B: «Среди двух карт, извлечённых из колоды в 36 карт, обе трефовой масти». Какое из этих событий влечёт другое?*

Если ни одно из двух событий не влечёт за собой другое (см. рис. 6), то шансы их наступления иногда тоже можно сравнить. Для этого можно воспользоваться проведением большого количества экспериментов.

Задача 7. В ящике 10 белых, 10 чёрных и 10 красных шаров. Наудачу 100 раз извлекали с возвращением три шара и проверяли, шары скольких цветов извлечены. Оказалось, что 9 раз извлечённые шары были одного цвета, 64 раза — двух цветов и 27 раз — разных цветов. Сравните шансы наступления событий:

A. Извлечены шары одного цвета.

B. Извлечены шары двух цветов.

C. Извлечены шары разных цветов.

Анализируем. Указанное испытание является устойчивым. В этом можно убедиться, проведя несколько серий из большого количества испытаний. Ясно, чем большее количество раз происходит событие при многократном проведении испытания, тем больше шансов оно имеет при проведении испытания.

Решаем. Больше всего шансов имеет появление, шаров двух цветов, то есть событие *B*. Событие *C* имеет больше шансов для наступления по сравнению с событием *A*. Следовательно, по убыванию шансы наступления данных событий расположены следующим образом: *B*, *C*, *A*.

1. *Какую часть всех испытаний составляют те испытания, в ходе которых извлечены шары разных цветов?*

2. *Верно ли, что при проведении ещё одной серии из 100 рассмотренных операций шары одного цвета появятся ровно 9 раз?*

3. *В ящике 10 белых и 10 чёрных шаров. Проведите 100 раз опыт по извлечению наудачу двух шаров и проверьте, шары скольких цветов извлечены. Сравните шансы наступления событий:*

А. Извлечены шары одного цвета. В. Извлечены шары двух цветов.

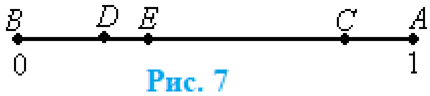


Рис. 7

Проверь себя

1. В мешке 7 красных яблок и 10 зеленых. Чтобы среди вынутых яблок обязательно было, по крайней мере, одно зеленое, достаточно взять …

А. 5 яблок. **Б.** 6 яблок. **В.** 7 яблок. **Г.** 8 яблок.

2. На единичном отрезке (см. рис. 7) изображены следующие события:

а) выпадение семи очков при однократном подбрасывании игрального кубика — точка A;

б) вынимание пластинки с дублем из полного набора домино — точка B;

в) обнаружение цветка сирени с 10-ю лепестками — точка C;

г) обнаружение дерева с жёлтыми листьями в Москве в октябре — точка D;

д) выпадение количества очков, кратного 3, при однократном подбрасывании игрального кубика — точка E.

Сколько событий правильно изображены точками?

А. 0. **Б**. 1. **В**. 2. **Г.** 3.

Рис. 8

3. Имеется три шкатулки. В первой 10 монет, во второй — 50, в третьей — 100. В каждой из шкатулок содержится по одной золотой монете. В какой из шкатулок легче всего найти золотую монету?

А. В первой. **Б.** Во второй. **В.** В третьей.

Г. Одинаково сложно в каждой из шкатулок.

4. На единичном отрезке точкой изображено событие (см. рис. 8). Оно …

А. является достоверным. **Б.** является невозможным.

В. имеет шансы появиться большие, чем не появиться.

Г. имеет шансы появиться меньшие, чем не появиться.

5. Наугад вынули одну пластинку домино. Что имеет больше шансов быть вынутой — пластинка-дубль или пластинка — не дубль?

А. Пластинка-дубль. **Б.** Пластинка — не дубль.

В. Шансы равны. **Г.** Определить невозможно.

6. Расположите следующие события по убыванию шансов их наступления:

A — из колоды в 36 карт извлечена картинка (валет, дама, король, туз);

B — из колоды в 36 карт извлечена карта, не являющаяся картинкой;

C — из колоды в 36 карт извлечена карта чёрной масти.

А. *A*, *B*, *C*. **Б**. *A*, *C*, *B*. **В**. *B*, *C*, *A*. **Г.** *C*, *A*, *B*.

7. В ящике 5 белых, 5 чёрных и 5 красных шаров. Наудачу 100 раз извлекали три шара и проверяли, шары скольких цветов извлечены. Оказалось, что 5 раз извлечённые шары были одного цвета, 59 раз — двух цветов и 27 раз — разных цветов. Расположите следующие события по убыванию шансов их наступления:

A. Извлечены шары одного цвета. *B*. Извлечены шары двух цветов.

C. Извлечены шары разных цветов.

А. *A*, *B*, *C*. **Б**. *A*, *C*, *B*. **В**. *B*, *C*, *A*. **Г.** *C*, *A*, *B*.

Реши сам

1. Из 17 роз, 8 васильков, 9 ромашек составлен букет. Есть ли в этом букете розы, если букет содержит:

1) 17 цветков; 2) 20 цветков?

Приведите примеры возможных, достоверных, невозможных событий, связанных с рассмотренным опытом.

2. Из 17 роз, 8 васильков, 9 ромашек составлен букет. Изобразите точками на единичном отрезке следующие события:

1) В букете из 17 цветков есть розы.

2) В букете из 20 цветков есть розы.

3) В букете из 25 цветков есть ромашки.

4) В букете из 28 цветков есть ромашки.

3. Есть три мешочка со 100 пуговицами в каждом. В этих мешочках 10, 1, 5 синих пуговиц соответственно. Нужно, не заглядывая в мешочек, вынуть одну пуговицу.

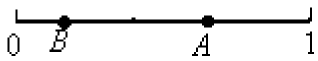


Рис. 9

Из какого мешочка нужно вынимать пуговицу, чтобы возможность вынуть синюю пуговицу была наибольшей? Ваши представления о шансах вынуть синюю пуговицу из трех мешочков изобразите графически в виде отрезка с точками, проставив под точками номер соответствующего мешочка.

4. На единичном отрезке изображены точками два события A и B (см. рис. 9). Сравните шансы появления события A с шансами не появления события B.

5. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. Что имеет больше шансов появиться: карта красного цвета или карта чёрного цвета?

6. Стрелок сделал пять выстрелов по мишени. Сравните шансы наступления следующих событий:

A — имело место ровно три попадания;

B — стрелок попал в мишень, по крайней мере, 3 раза;

C — стрелок попал в мишень не более трёх раз.

7. Правильный тетраэдр, на гранях которого изображены 1, 2, 3, 4 точки, подбрасывают 200 раз. Две точки на нижней грани выпали 47 раз, чётное количество точек — 104 раза, менее 4-х точек — 145 раз. Сравните шансы наступления событий:

А — при подбрасывании тетраэдра на нижней грани выпало чётное число точек;

В — при подбрасывании тетраэдра на нижней грани выпало менее 4-х точек;

С — при подбрасывании тетраэдра на нижней грани выпало две точки.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. От 1 до 10. Воспользуйтесь тем, что доля — это некоторое количество равных частей, на которые делится общее целое.

2. а) от 5 до 10; б) от 0 до 3. Воспользуйтесь тем, что доля — это некоторое количество равных частей, на которые делится общее целое.

3. Из третьего. Воспользуйтесь тем, что при одинаковом содержимом мешочков нужный предмет легче найти в том, в котором этого предмета больше.

4. Разделите отрезок на 10 равных частей.

5. 0, 1 или 2 раза. Обратите внимание на то, что монету подбросили 2 раза.

6. Белых. Обратите внимание на то, что если эксперимент проводится ответственно, при выполнении всех требований, то его результаты отражают усло вия, при котором он проводится.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. Могут быть, а могут и не быть. 2. Да. 3. Да.

Задача 2. 1. К левому. 2. К правому. 3. К левому.

Задача 3. 1. Из третьего мешочка можно извлечь любой из 30 шаров, а красный только 1. 2. Из первого мешочка можно извлечь любой из 10 шаров, а красный только 1. 3. Из второго мешочка можно извлечь любой из 15 шаров, а красный только 1.

Задача 4. 1. 0,25. 2. 0,75. 3. 0,1. 4. 1.

Задача 5. 1. 10. 2. а) 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1; б) 6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1. 3. Одинаковы.

Задача 6. 1. Нет. **2.** Да. **3.** В влечёт А. **Задача 7. 1.** 0,27. **2.** Нет.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6	7
Г	Б	А	Г	Б	Г	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 1) Может быть, а может и не быть. 2) Да. Примеры. Случайное событие: в букете из 17 цветков есть розы. Достоверное событие: в букете из 20 цветков есть розы. Невозможное событие: в букете 18 роз. Рассмотрите случай, когда в букете 8 васильков и 9 ромашек.

2. Воспользуйтесь тем, что достоверные собы-

тия изображаются правым концом единичного отрезка и тем, что из двух точек, изображающих события, правее находится та, которое изображает событие, имеющее большие шансы появиться.

3. Из первого. Воспользуйтесь тем, что в мешочках одинаковое количество пуговиц.

4. Шансы появления события *A* меньше шансов непоявления события *B*. Воспользуйтесь тем, что шансы непоявления события *B* характеризуются расстоянием от точки В до правого конца единичного отрезка.

5. Одинаковые. Используйте то, что в колоде карт одинаковое количество красных и чёрных карт.

6. Шансы наступления события А меньше шансов наступления В, шансы наступления события А меньше шансов наступления С, сравнить шансы наступления событий В и С по приведенным данным невозможно. Выясните, какие события влекут за собой другие.

7. События по возрастанию шансов их наступления располагаются следующим образом: С, В, А. Воспользуйтесь количествами их наступления в ходе указанных испытаний.

3. Начинаем подсчитывать шансы

В предыдущем параграфе мы рассматривали различные методы сравнения шансов наступления событий. Не менее важной является задача вычисления шансов наступления того или иного события. Проиллюстрируем значимость этой задачи на следующем примере.

Известна следующая задача и подобные ей. *В ящике в магазине лежит 30 одинаковых туфель, не разложенных по 15 парам. Туфли одинаковы во всём, кроме их предназначения на ту или иную ногу. Какое наименьшее количество туфель надо вынуть из ящика случайным образом, чтобы среди них обязательно была пара туфель?* Ответ на поставленный вопрос известен: 16 туфель. Другими словами, событие «появление хотя бы одной пары туфель среди 16 наудачу извлечённых туфель из 30» является событием достоверным. Шансы его наступления равны 1. Но для наступления этого события нужно проделать не малую работу: не глядя вынуть 16 туфель. Оказывается, умение подсчитывать шансы случайного события может существенно облегчить эту работу.

Теория вероятностей практически гарантирует вам нужную пару.

Возможно, эту ситуацию вы считаете несерьёзной. А вот практически важные проблемы, в решение которых вносит вклад теория вероятностей.

1. Каким должен быть минимальный запас медикаментов в городе, чтобы его практически наверняка хватило в случае бедствия, характерного для данной местности?

2. Сколько необходимо запасти порций курицы и рыбы в самолёт, чтобы практически наверняка не было недовольных пассажиров?

3. Сколько необходимо операторов в банке, чтобы скопление клиентов в очереди было очень редким явлением?

4. Сколько денег необходимо заложить в банкомат, чтобы их практически наверняка хватило на день?

5. Каким должен быть минимальный страховой взнос, чтобы страховая компания практически наверняка получила установленную прибыль?

Вместо совершенно достоверных, но бессмысленных ответов теория вероятностей часто даёт разумные и практически достоверные.

На практике широко применяется метод подсчёта шансов наступления событий, основанный на изучении того, как протекали в прошлом соответствующие случайные испытаний. Этот метод применим для получения ответов на вопросы 1 – 5.

Готовимся к решению задач

1. Наугад выбирают по одной букве из слов «дама» и «мама».

а) Сколько всего элементарных исходов может произойти в результате этого испытания?

б) Сколько из всех элементарных исходов состоят из одинаковых букв?

в) Сколько из всех элементарных исходов состоят из различных букв?

2. В двух карманах 15 монет, в правом на 3 монеты больше, чем в левом. Сколько монет в каждом кармане?
3. В двух карманах 15 монет, в правом в 2 раза больше, чем в левом. Сколько монет в каждом кармане?
4. Если событие «из урны вынут белый шар» является достоверным, то шары каких цветов могут находиться в урне?

Решение задач

Один из методов подсчёта шансов наступления событий применим для ситуаций, когда нет оснований отдать предпочтение одному исходу испытания по сравнению с другими. Этот метод будет применим в следующей задаче.

Задача 1. Из колоды в 36 карт наугад выбирают одну карту. Каковы шансы того, что это будет не картинка (шестёрка, семёрка, восьмёрка, девятка, десятка)?

Анализируем. Испытание состоит в извлечении одной карты из колоды. Очевидно, что оно является случайным и имеет 36 исходов. Нет оснований отдать предпочтение одному исходу испытания по сравнению с другими. Остаётся подсчитать, сколько карт не является картинками.

Решаем. В колоде карты 4-х мастей (бубны, трефы, пики и червы), 5 видов карт (шестёрка, семёрка, восьмёрка, девятка и десятка) не являются картинками, то есть в колоде $5 \cdot 4 = 20$ карт, не являющихся картинками. Следовательно, извлечённая карта не является картинкой с шансами 20 из 36, или 5 из 9, или 5:9.

Иногда вводят понятие «шансы в пользу события»: это отношение шансов наступления этого события к шансам его не наступления. Для данной задачи шансы не наступления рассматриваемого события, то есть шансы извлечь картинку (валета, даму, короля, туза) равны $4 \cdot 4 = 16$ из 36, или 16:36, или 4:9. Шансы в пользу извлечения не картинки равны $\frac{5}{9} : \frac{4}{9} = 5:4$, шансы в пользу извлечения картинки равны 4:5.

1. *Сколько карт-картинок содержится в колоде из 52 карт?*

2. *Каковы шансы извлечения карты пиковой масти из колоды в 36 карт?*

3. *Каковы шансы в пользу извлечения карты пиковой масти из колоды в 36 карт?*

Информация о том, что некоторые события являются достоверными или невозможными, может быть использована для получения некоторых выводов о рассматриваемых испытаниях.

Задача 2. Из кошелька в темноте вынимали монетку. Известно, что то, что вынутой будет рублёвая монета, является достоверным событием, а то, что при повторной попытке будет вынута рублёвая монета, — невозможным событием. Сколько и каких монет в кошельке?

Анализируем. Для решения задачи используем тот факт, что достоверное событие обязательно наступает, а невозможное не наступает ни в коем случае.

Решаем. Так как при первом вынимании извлечение рублёвой монеты является достоверным событием, то это означает, что какую бы монету мы не вынули, она будет рублёвой, то есть все монеты, находящиеся в кошельке, рублёвые. При втором извлечении монеты из кошелька появление рублёвой монеты — невозможное событие. Это означает, что рублёвых монет в кошельке нет. Но там нет и других монет. Итак, в кошельке была 1 монета, рублёвая.

Ответ. 1 монета, рублёвая.

1. *Сколько монет в кошельке и каких, если вынимание рублёвой монеты при первых двух извлечениях являются достоверными событиями?*

2. *Сколько монет в кошельке и каких, если вынимание рублёвой монеты при первых двух извлечениях являются достоверными событиями, а при третьем извлечении — невозможным событием?*

3. *Сколько монет в кошельке и каких, если вынимание рублёвой монеты при первом извлечении является невозможным событием?*

В ряде предыдущих задач мы сравнивали шансы наступления событий. Фактически мы сравнивали числа: ведь шансы появиться невозможному событию равны нулю, достоверному — 1, а любому возможному событию — числу между 0 и 1. Шансы появления события позволяют находить меру случайности события, подобно тому, как мы измеряли массу, время, стоимость, длину, площадь и т. д. А это значит, что с шансами, как с числами, можно выполнять привычные действия, применять известные методы при решении задач, где речь идёт о шансах.

Задача 3. На соревнованиях по плаванию участвуют пловцы А, Б и В. Побеждает один из этих пловцов. По мнению специалистов, шансы на победу у А в два раза выше, чем у Б, а у Б шансы на победу втрое выше, чем у В. Каковы шансы на победу у каждого из пловцов? Изобразите их на единичном отрезке.

Анализируем. Задача напоминает типичную задачу на части. Так как по условию один из пловцов обязательно побеждает, то есть победа одного из этих пловцов является достоверным событием, то сумма шансов пловцов на победу равна 1. Решив задачу, найдём шансы на победу каждого из пловцов, а потом изобразим их графически.

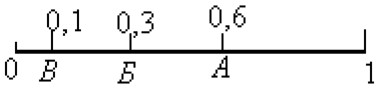


Рис. 10

Решаем. Примем шансы на победу у В за одну часть, тогда шансы на победу у Б составят 1·3 = 3 части, а у А — 3·2 = 6 частей. Сумма шансов у пловцов на победу, равная 1, составляет 6 + 3 + 1 = 10 частей. На 1 часть приходится 1:10 = 0,1 шанса или один шанс из 10. Итак, шансы на выигрыш у В составляют 0,1, у Б — 0,1·3 = 0,3, у А — 0,1·6 = 0,6. На единичном отрезке эти шансы имеют следующий вид (см. рис. 10).

Ответ. 0,6; 0,3; 0,1.

1. *Какими были бы шансы пловцов на победу, если бы шансы на победу у А были в два раза выше, чем у Б, а у Б шансы на победу вдвое выше, чем у В?*

2. *Во сколько раз шансы на победу у А выше, чем у В?*

3. *Во сколько раз шансы на победу у В ниже, чем у А?*

4. *Сохранился бы ответ, если бы из условия исключили, что побеждает один из этих пловцов?*

Проверь себя

1. Каковы шансы того, что при подбрасывании игрального кубика количество выпавших очков будет кратно 3?

А. 1:3. **Б**. 1:2. **В**. 2:3. **Г.** 2:1.

2. Извлечение из урны красного шара имеет такие же шансы, как и извлечение синего. При первом извлечении появился синий шар. При втором извлечении появление красного шара является достоверным событием. Сколько в урне шаров и сколько из них красных?

А. 2; 2. **Б**. 2; 1. **В**. 2; 0. **Г.** Определить невозможно.

3. На соревнованиях по плаванию участвуют А и Б. Побеждает один из этих пловцов. По мнению специалистов, шансы на победу у А в четыре раза выше, чем у Б. На сколько шансы на победу у А выше, чем у Б?

А. На 0,4. **Б**. На 0,5. **В**. На 0,6. **Г.** На 0,8.

Реши сам

1. Подбрасывают две монеты. Каковы шансы в пользу наступления события «герб выпадет хотя бы один раз»?

2. Из кошелька в темноте вынимали монетку. Известно, что то, что вытащена будет жёлтая монета, является достоверным событием, а то, что при повторной попытке будет вытащена жёлтая монета, — невозможным событием. Сколько и каких монет в кошельке?

3. На скачках соревнуются только три лошади А, Б и В. Победит одна из них. По мнению специалистов, шансы на победу у А в два раза выше, чем у Б, а у В шансы на победу на 0,6 выше, чем у Б. Каковы шансы на победу у каждой из лошадей?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. а) 8; б) 7; в) 3. Воспользуйтесь тем, что элементарным исходом опыта является выбор любой буквы из указанных слов.

2. 6 и 9. Предположите, что в правом кармане столько же монет, сколько и в левом. Можно составить и решить уравнение.

3. 5 и 10. Примите количество монет в левом кармане за 1 часть.

4. Только белого. Обратите внимание на то, событие «из урны вынут белый шар» является достоверным

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 16. 2. 1:4. 3. 1:3.

Задача 2. 1. Только рублёвые, не меньше двух. 2. Две рублёвые монеты. 3. Количество монет определить невозможно, но в кошельке нет рублёвой монеты.

Задача 3. 1. 4 из 7, 2 из 7, 1 из 7. 2. В 6 раз. 3. В 6 раз. 4. Нет.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
А	Б	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 3:1. Выпишите все исходы данного испытания.

2. Одна жёлтая монета. Воспользуйтесь решением задачи 2.

3. 0,2; 0,1; 0,7. Предположите, что у лошадей Б и В одинаковые шансы на победу.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Выполнение заданий для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы

Критерии оценок

Оценка		Основное задание	Дополнительное Задание
«зачтено»	Решено не менее	6 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	8 задач	6 задач
«отлично»	Решено не менее	11 задач	9 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа напишите букву «Д».

1. Сколько элементарных исходов имеет случайное испытание, состоящее в подбрасывании двух правильных тетраэдров?

А. 4. **Б**. 8. **В**. 12. **Г.** 16.

2. В шкатулке 3 белых, 3 чёрных и 3 красных шара. Какое наибольшее количество шаров нужно вынуть наугад из шкатулки, чтобы среди них ни в коем случае не было шаров всех трёх цветов?

А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г.** 5.

3.В коробке лежат 50 карандашей, отличающиеся лишь цветом: 20 красных, 20 синих, 10 зеленых. Из коробки взяли 40 карандашей. Какое утверждение правильно?

А. Среди вынутых карандашей обязательно есть красный.

Б. Среди вынутых карандашей обязательно есть 11 красных.

В. Среди вынутых карандашей обязательно есть карандаши всех трёх цветов.

Г. Среди вынутых карандашей обязательно есть 5 зеленых.

4. Какой из приведенных ответов на вопрос «будет ли футбольная команда «Шахтер» чемпионом Украины по футболу в следующем первенстве страны?» Вы считаете правильным?

А. Да. **Б.** Ни в коем случае. **В.** Возможно да, возможно нет.

Г. Ни один из приведенных ответов не является правильным.

5. Достоверным, невозможным или возможным является событие: “При подбрасывании двух игральных костей сумма выпавших очков меньше 13”?

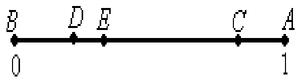
А. Достоверным. **Б**. Возможным.

В. Невозможным. **Г.** Определить невозможно.

6. В шкатулке 6 белых шаров и 12 черных. Чтобы среди вынутых шаров обязательно был, по крайней мере, один белый, достаточно взять …

А. 10 шаров. **Б.** 11 шаров. **В.** 12 шаров. **Г.** 13 шаров.

7. На единичном отрезке изображены следующие события:



а) сумма выпавших очков при двукратном подбрасывании кубика равна 1 — точка *A*;

б) вынимание красной карты из колоды в 36 карт — точка *B*;

в) обнаружение цветка малины с 10-ю лепестками — точка *C*;

г) обнаружение воробья в Москве зимой — точка *D*;

д) вынимание из колоды в 36 карт валета, дамы или короля — точка *E*.

Сколько событий неправильно изображены точками?

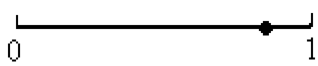
А. 2. **Б**. 3. **В**. 4. **Г.** 5.

8. Имеется три шкатулки с шариками. В первой 20 шариков, во второй — 50 шариков, в третьей — 200. В каждой из шкатулок ровно по одному красному шарику. Из какой шкатулки легче всего вынуть, не глядя, красный шарик?

А. Из первой. **Б.** Из второй.

В. Из третьей . **Г.** Одинаково сложно из каждой шкатулки.

9. На единичном отрезке точкой изображено событие (см. рис.). Оно …



А. является достоверным. **Б.** является невозможным.

В. имеет шансы появиться большие, чем не появиться.

Г. имеет шансы появиться меньшие, чем не появиться.

10. Наугад вынули одну пластинку домино. Что имеет больше шансов быть на вынутой пластинке: 0 очков или 6 очков?

А. 0 очков. **Б.** 6 очков. **В.** Шансы равны**.** **Г.** Определить невозможно.

11. Пятеро пассажиров садятся в вагоны поезда, состоящего из 5 вагонов. Расположите следующие события по убыванию шансов их наступления:

А. — все пятеро сядут в 4-й вагон;

В — найдётся вагон, в который никто не сядет;

С — во второй вагон никто не сядет.

А. *B*, *C*, *A*. **Б**. *B*, *A*, *C*. **В**. *C*, *B*, *A* **Г.** *A*, *B*, *C*.

12. В урне 3 белых, 3 чёрных и 3 красных шара. Наудачу 150 раз извлекали три шара и проверяли, шары скольких цветов извлечены. Оказалось, что 10 раз извлечённые шары были одного цвета, 108 раз — двух цветов и 32 раза — разных цветов. Расположите следующие события по убыванию шансов их наступления:

A. Извлечены шары одного цвета. *B*. Извлечены шары двух цветов.

C. Извлечены шары разных цветов.

А. *B*, *C*, *A*. **Б**. *B*, *A*, *C*. **В**. *C*, *B*, *A* **Г.** *A*, *B*, *C*.

13. Из урны, содержащей два пронумерованных белых и один красный шар, наугад вынимают два шара. Каковы шансы наступления события «вынутые шары одноцветны»?

А. 2:3. **Б**. 3:2. **В**. 1:3. **Г.** 3:1.

14. Извлечение из урны красного шара имеет такие же шансы, как и извлечение синего. При первом извлечении появился красный шар. При втором извлечении появление красного шара является невозможным событием. Сколько в урне шаров и сколько из них синих?

А. 2; 2. **Б**. 2; 1. **В**. 2; 0. **Г.** Определить невозможно.

15. На скачках соревнуются только три лошади А, Б и В. Победит одна из них. По мнению специалистов, шансы на победу у А в пять раз выше, чем у Б, а у Б шансы на победу в полтора раза выше, чем у В. На сколько шансы на победу у А выше, чем у Б?

А. На 0,4. **Б**. На 0,5. **В**. На 0,6. **Г.** На 0,7.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. Из набора 4-х тузов, взятых из колоды в 36 карт, наудачу выбираются две карты. Перечислите элементарные исходы этого испытания. Является ли событие «выбраны тузы красной масти» элементарным исходом этого испытания?

2. В шкатулке 3 белых, 3 чёрных и 3 красных шара. Какое наименьшее количество шаров нужно вынуть наугад из шкатулки, чтобы среди них обязательно было по 2 шара всех трёх цветов?

3. В ящике лежат несколько одинаковых по размеру катушек с нитками трех цветов: черного, белого и коричневого. Из ящика наугад взяли четыре катушки ниток. Будут ли среди взятых катушек обязательно:

1) по крайней мере две с черными нитками;

2) по крайней мере две с нитками одного цвета;

3) по крайней мере три с черными нитками;

4) по крайней мере три с нитками одного цвета?

4. В каких из следующих предложений неправильно употреблены словосочетания: «обязательно», «ни в коем случае не», «возможно»? Замените их на правильные.

1) Поезд из Киева в Москву затрачивает обязательно меньше времени, чем самолёт.

2) Хлебопекарня ни в коем случае не выпекает бракованный хлеб.

3) Когда я достигну 18-летнего возраста, я обязательно буду служить в армии.

4) Весной в Рязани возможно зазеленеют деревья.

5) При окончании школы я ни в коем случае не буду учиться по учебникам, напечатанным на бумаге.

5. Какие из следующих событий являются возможными, достоверными, невозможными при случайном выборе четырёх букв из букв слова «математика»:

1) выбраны все одинаковые буквы;

2) среди выбранных нет одинаковых букв;

3) среди выбранных букв есть гласные буквы;

4) среди выбранных букв 4 различные гласные буквы;

5) среди выбранных букв есть буквы из первой половины русского алфавита;

6) среди выбранных букв есть как гласные, так и согласные буквы;

7) среди выбранных букв количество гласных и согласных букв различно;

8) среди выбранных букв количества гласных и согласных букв совпадают?

6. Можно ли утверждать, что в классе обязательно найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы, если в классе:

1) 23 ученика; 2) 35 учеников?

7. Четыре мальчика ловили рыбу, и все вместе поймали семь окуней. Никто из мальчиков не поймал более двух окуней. На единичном отрезке точками изображены следующие события:

1) Среди рыбаков есть хотя бы один, кто не поймал ни одного окуня — точка A.

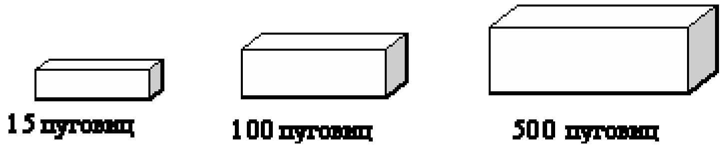
2) Среди рыбаков есть хотя бы один, кто поймал трёх окуней — точка B.

3) Среди рыбаков есть три, поймавшие по два окуня — точка C.

4) Среди рыбаков есть два, поймавшие по одному окуню — точка D.

Какие из этих событий правильно изображены точками на отрезке?

8. В каждой коробочке с пуговицами есть лишь по одной синей пуговице (см. рис.). Нужно, не заглядывая в коробочку, вынуть эту пуговицу. Из какой коробочки следует вынимать пуговицу, чтобы возможность вынуть синюю пуговицу была наибольшей?



9. На единичном отрезке изображено некоторое событие (см. рис.). Что имеет большие шансы: оно наступит или не наступит?

10. В коробке 15 шариков: белых, красных и черных. Белых шариков в 7 раз больше, чем красных. Наугад из коробки вынимается один шарик. Сравните шансы появления белого, черного, красного шарика. Изобразите Ваш ответ графически.

11. Из перемешанного набора домино, содержащего 28 пластинок, извлекли случайным образом одну пластинку. Расположите следующие события по возрастанию шансов их появления:

А — извлечена пластинка-дубль;

В — извлечена пластинка 1:1;

С — извлечена пластинка, не являющаяся дублем.

12.В таблице приведены данные о продаже фирмой автомобилей за прошлый год.

Марки	A	B	C	D	E
Продано штук	132	787	424	108	320

Автомобили марок А и В — иностранные, C, D, E — отечественные. Сравните шансы того, что произвольный покупатель в этом году выберет отечественный автомобиль (событие О) с шансами того, что он выберет иностранный автомобиль (событие И).

13. Из урны, содержащей три пронумерованных белых и один красный шар, наугад вынимают два шара. Каковы шансы в пользу наступления события «вынутые шары одноцветны»?

14. Появление красного шара при извлечении шара из урны является невозможным событием, а появление синего шара при втором извлечении — достоверным событием. Что можно сказать о количестве красных и синих шаров в урне?

15. В конце футбольного чемпионата стало ясно, что первое место может занять одна из двух команд А или Б, причём только одна из них. По мнению специалистов, у команды А шансов на победу на 0,6 больше, чем у Б. Каковы шансы каждой из этих команд на первое место в чемпионате?

Указания к задачам основного задания

1. Перечислите, какие пары тузов могли быть выбраны.
2. Проанализируйте, достаточно ли вынуть 6 шаров, 7 шаров?
3. Слова «по крайней мере, две» означают: «две или больше».
4. Проанализируйте каждое предложение и выясните, какое из предложенных словосочетаний наиболее подходит к событию, описываемому этим предложением.
5. Воспользуйтесь решением задачи 5 из блока «Случайные события».
6. Подумайте, со скольких букв русского алфавита может начинаться фамилия.
7. Используйте тот факт, что достоверное событие изображается точкой на правом конце единичного отрезка, невозможное — точкой на левом конце, а возможное — внутренней точкой этого отрезка.
8. Подумайте, из какой коробочки легче вынуть синюю пуговицу: из той, в которой больше пуговиц или меньше.
9. Воспользуйтесь тем, что шансы наступления события характеризуются расстоянием от точки, изображающей это событие до левого конца единичного отрезка, а не наступления — до правого конца.
10. Подумайте, чему может равняться количество белых шариков в коробке.

11. Выясните, какое событие из перечисленных влечёт другое, а какое не влечёт никакое.

12. Посчитайте, сколько за прошлый год продано отечественных автомобилей и сколько иностранных.

13. Переберите все элементарные исходы данного испытания.

14. Подумайте над тем, есть ли в урне красные шары; остались ли в урне после первого извлечения шары цветов, отличных от синих.

15. Используйте метод решения задач на нахождение двух значений по их сумме и разности.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. Наудачу подбрасываются три одинаковые монеты. Перечислите элементарные исходы этого случайного испытания. Из каких элементарных исходов состоит событие «герб выпал, по крайней мере, два раза»?

2. В шкатулке 3 белых, 3 чёрных и 3 красных шара. Какое наибольшее количество шаров нужно вынуть наугад из шкатулки, чтобы среди них ни в коем случае не было по 2 шара всех трёх цветов?

3. В сумке лежат одинаковые по форме и размерам конфеты двух сортов: девять конфет первого сорта и шесть конфет второго сорта. Не глядя, из сумки вынули восемь конфет.

1) Будет ли среди них по крайней мере одна конфета первого (второго) сорта?

2) Какое наименьшее количество конфет следует вынуть из сумки, чтобы среди них были конфеты первого (второго) сорта?

3) Какое наименьшее количество конфет следует вынуть из сумки, чтобы среди них были конфеты обоих сортов?

4. Вставьте вместо трех точек одно из словосочетаний: обязательно; ни в коем случае не; маловероятно, что; возможно:

1) завтра в полдень ... взойдет Луна; 2) я ... сорву джек-пот в лотерее “Кено”;

3) Гриша ... празднует свой день рождения 31 июня;

4) я ... встречу на улице Одессы сегодня льва; 5) после осени ... наступает зима;

6) завтра в железнодорожной кассе ... будут билеты на крымский поезд;

7) я ... перейду в следующий класс;

8) я ... стану призером математической олимпиады.

5. На листе бумаги рисуют параллельные прямые, расстояния между которыми равны 5 см. При какой длине карандаша событие “карандаш пересек 5 прямых” будет невозможным, при какой, — возможным, при какой, — достоверным?

6. Можно ли утверждать, что в школе обязательно найдутся хотя бы два ученика, родившиеся в один день, если в школе: 1) 320 учеников; 2) 500 учеников?

7. Четыре мальчика ловили рыбу, и все вместе поймали десять окуней. Никто из мальчиков не поймал более трёх окуней. На единичном отрезке точками изображены следующие события:

1) Среди рыбаков есть хотя бы один, кто не поймал ни одного окуня – точка A.

2) Среди рыбаков есть хотя бы один, кто поймал трёх окуней – точка B.

3) Среди рыбаков есть три, поймавшие по три окуня – точка C.

4) Среди рыбаков есть два, поймавшие по одному окуню – точка D.

Какие из этих событий неправильно изображены точками на отрезке?

8. Есть три мешочка, содержащие соответственно 500, 100, 1000 пуговиц. В каждом мешочке по одной синей пуговице. Из какого мешочка целесообразно вынимать пуговицу (не подсматривая), чтобы было больше шансов вынуть синюю? Ваши представления о шансах вынуть синюю пуговицу из трех мешочков изобразите графически в виде отрезка с точками, проставив под точками номер соответствующего мешочка.

9. На единичном отрезке изображены точками два события A и B (см. рис.). Сравните шансы появления события A с шансами непоявления события B.

10. Какие из следующих утверждений правильны:

1) если в ящике белых шаров больше, чем черных, то при длительном вынимании с возвращением белые шары будут попадаться чаще, чем черные;

2) если в ящике белых шаров столько же, сколько и черных, то при длительном вынимании с возвращением белые шары будут попадаться примерно так же часто, как и черные;

3) если в нескольких ящиках содержится одинаковое количество белых шаров, но общее количество шаров в этих ящиках различное, то возможность вынуть белый шар будет наибольшей для того ящика, который содержит наименьшее общее количество шаров;

4) если несколько ящиков содержат одинаковое общее количество шаров, а количество белых шаров разное, то возможность вынуть белый шар наибольшая для ящика, содержащего наибольшее количество белых шаров?

11. Шансы наступления каких из следующих событий можно сравнить, а каких нельзя?

А — новый телевизор не сломается в течение года;

В — новый телевизор не сломается в течение месяца;

С — новый компьютер не сломается в течение года;

Сравните шансы наступления тех событий, для которых это возможно.

Что нужно ещё иметь, чтобы можно было сравнить шансы наступления и остальных пар событий?

12. Выберите наугад одну страницу из книги любого писателя и посчитайте, сколько раз на этой странице появляются буквы «о» и «б». На основании полученных данных спрогнозируйте, какая из этих букв чаще появится на следующей странице. Проверьте, правильным ли оказался ваш прогноз.

13. У Пети в правом кармане 4 белые монеты и две коричневые. Он, не глядя, перекладывает три каких-то монеты в левый карман. Каковы шансы наступления события «обе коричневые монеты окажутся в одном кармане»?

14. В урне красные и синие шары. Появление красного шара при первом извлечении шара из урны имеет такие же шансы, как и появление синего. При первом извлечении появился красный шар. Появление синего шара при втором извлечении является достоверным событием, а при третьем извлечении — невозможным событием. Что можно сказать о количестве красных и синих шаров в урне?

15. На соревнованиях по плаванию участвуют А, Б и В. По мнению специалистов, шансы на победу у А в два раза выше, чем у Б, а у Б шансы на победу втрое выше, чем у В. Каковы шансы на победу у каждого из пловцов?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Воспользуйтесь тем, что исходами каждого подбрасывания монеты являются «выпадание герба» и «выпадание цифры».

2. Проанализируйте возможные исходы извлечения 4-х, 5-и, 6-и шаров.

3. Сравните количество вынутых конфет с количествами конфет каждого сорта.

4. Обратите внимание на словосочетание «маловероятно, что». Оно употребляется тогда, когда шансы для наступления события очень малы.

5. Рассмотрите различные возможные положения карандаша относительно нарисованных прямых.

6. Используйте тот факт, что в году 365 или 366 дней.

7. Слова «хотя бы один» означают «один или больше одного».

8. Воспользуйтесь решением задачи 3 из блока «Сравниваем шансы».

9. Воспользуйтесь тем, шансы наступления события характеризуются расстоянием от точки, изображающей это событие до левого конца единичного отрезка, а не наступления — до правого конца.

10. Воспользуйтесь тем, что если в единичном опыте какой-то исход наступает с большими шансами, чем другой, то при длительном проведении этого опыта тот же исход наступит большее количество раз по сравнению с другим. Воспользуйтесь также тем, что если в нескольких опытах количество всех исходов различно, а количество исходов, при которых наступает некоторое событие во всех этих опытах, одинаково, то при длительном проведении этих опытов рассматриваемое событие наступает большее количество раз в том опыте, в котором наименьшее количество всех исходов.

11. Подумайте, какое событие из перечисленных влечёт какое-то другое, а какое не влечёт никакое.

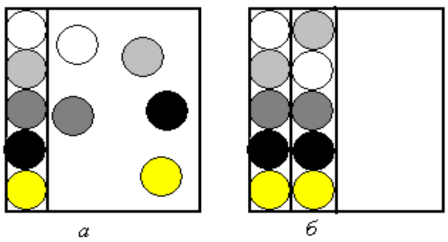
12. Выясните, какая из двух указанных букв чаще встречается на выбранной вами странице.

13. Воспользуйтесь тем, что после перекладывания одна определённая коричневая монета окажется в каком-то кармане. Остаётся выяснить, какие ещё две из 5 оставшихся монет могут попасть в этот карман.

14. Обратите внимание на то, что первоначально в урне одинаковое количество красных и синих шаров. Подумайте над тем, остались ли красные шары в урне после первого извлечения.

15. Подумайте над тем, достаточно ли данных для решения задачи.

Задачи для исследования



1. У края прямоугольной коробки, как показано на рис. *а*, закреплены пять бусинок различной окраски. Пять аналогично окрашенных шариков свободны и могут двигаться в коробке. После встряхивания коробку наклоняют так, чтобы лежащие в ней бусинки расположились в один ряд с закреплёнными (см. рис. *б*). Исследуйте, как часто бусинки останавливаются рядом с одинаково с ними окрашенными.

2. Проведите этот опыт с 3, 4, 6, … закреплёнными бусинками и сравните полученные результаты.

3. Исследуйте, можно ли считать следующую игру справедливой.

Играют Петя и Ваня, они бросают игральный кубик три раза подряд. Если хотя бы один раз выпадет единица, то очко выигрывает Петя; в противном случае очко выигрывает Ваня. Поиграйте с товарищем в эту игру до тех пор, пока кто-то наберёт 100 очков.

4. То же исследование проведите для случая, когда игральный кубик бросается четыре раза подряд.

5. Экспериментально определите, через сколько в среднем бросаний игрального кубика выпадет одно очко.

6. Вы идёте по дороге, вдоль которой на расстоянии одного метра друг от друга поставлены столбики. Вы перемещаетесь от одного столбика к другому, у каждого столбика подбрасываете монету, чтобы узнать, в каком направлении двигаться (например, если выпал герб, то вперёд, если цифра, то — назад. Исследуйте экспериментально, на каком расстоянии в среднем от начального столбика Вы окажетесь после шести этапов.

7. Психологи и другие специалисты утверждают, что человек не может сделать чисто случайный выбор из предложенных альтернатив. Например, известно, что если человеку предложить выбрать совершенно случайную цифру, то он скорее всего выберет 7.

Проверьте экспериментально, правдоподобна ли гипотеза: «*Значительное число людей подсознательно выбирают числа, далёкие от концов и середины предложенного числового ряда, то есть делящие предложенный ряд близко к отношению 3:1 или 1:3*».

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Сравниваем шансы

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие