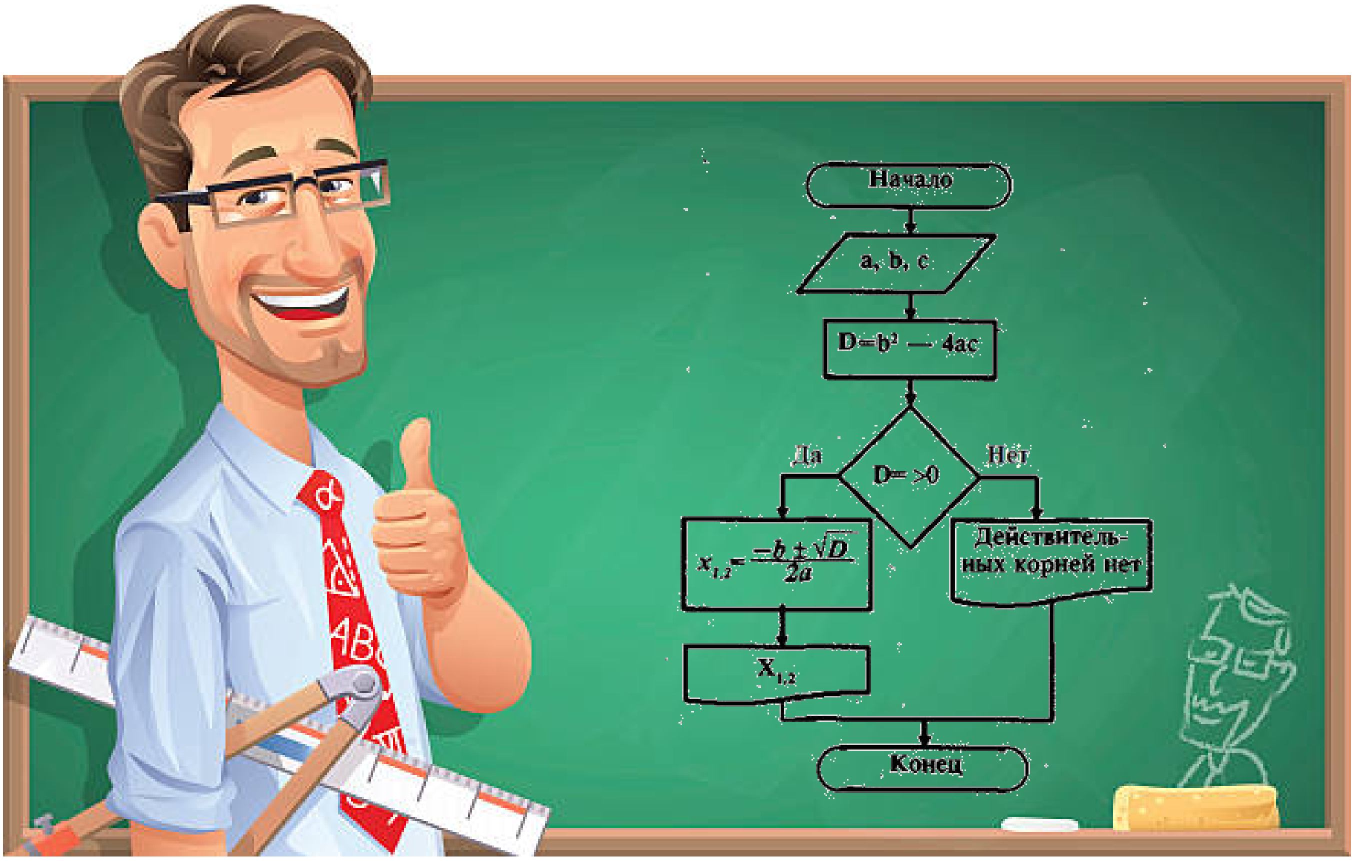
Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Квадратные уравнения и их применения



Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Квадратные уравнения и их применения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов. — 59 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 8-9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 от 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, совершенствование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения учащимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки обучающихся к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 8-9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

Дорогой друг!

Настоящее пособие является частью комплекта «Реальная математика», предназначенного для обучения применениям математики. Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которого математику изучают с первого до последнего класса.

Настоящее пособие посвящено квадратным уравнениям. К поиску неизвестного сводится большинство прикладных задач. Очень часто этот поиск можно свести к квадратным уравнениям или к системам уравнений. Квадратные уравнения составляют, с одной стороны, достаточно простой вид уравнений, а с другой стороны — очень важный.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и нахождения решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого модуля, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после решения каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить или приобрести тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в модуле, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части раздела.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание. Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Квадратные уравнения и их применения

Одним из важнейших методов нахождения неизвестных количеств, значений величин является ***метод составления уравнений.*** Сущность этого метода состоит в следующем:

− обозначают буквой неизвестное значение величины или количества;

− выражают через эту букву все другие неизвестные значения величин или количеств;

− пользуясь условием, составляют два выражения для одного и того же значения величины или количества, в которые входит введенная буква, и приравнивают их. Полученное равенство называют ***уравнением***.

Нередко математической моделью служит уравнение, в которое переменное входит в степени, выше первой, в частности, во второй. Среди этих уравнений наиболее часто встречаются ***квадратные уравнения***.

Решению квадратных уравнений и их применениям посвящено данное пособие. В нём будут рассматриваться также уравнения, приводящиеся к квадратным, системы уравнений, среди которых хотя бы одно уравнение является квадратным.

1. Приёмы решения квадратных уравнений

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — произвольные числа, причём $a \neq 0$.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, которые находятся по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень. Он равен $\frac{-b}{2a}$.

Если $D < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.

Пример 1. Решить квадратное уравнение $2x^2 - x - 3 = 0$.

Решение. Вычисляем дискриминант уравнения:

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25.$

Определяем его знак и устанавливаем количество корней уравнения:

$D > 0$, уравнение имеет два корня

Находим арифметическое значение квадратного корня из дискриминанта:

$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$

Находим корни:

$x_1 = \frac{1+5}{4} = 1,5;\ x_2 = \frac{1-5}{4} - 1.$

Записываем ответ:

$x_1 = 1,5; x_2 = -1.$

Готовимся к решению задач

1. Какое из следующих уравнений не является квадратным?

А. $4x^2 + 4 = 0$. **Б.** $17x + 24 = 0$. **В.** $x^2 = 0$. **Г.** $x^2 - x = 0$.

2. Корнями уравнения $2x^2 - 5x - 7 = 0$ являются числа …

А. –1 и 7. **Б .** 1 и –3,5. **В.** –1 и 3,5. **Г.** 1 и 7.

3. Для уравнения $5x^2 - 3x - 2 = 0$ подсчитайте значение выражения $b^2 - 4ac$.

А. 49. **Б.** 46. **В.** 29. **Г.** –31.

4. Вычислите значение выражения $\sqrt{1-3x}$ при $x = -5$.

А. ±4. **Б.** 16. **В.** 4. **Г.** ±16.

5. Какое из следующих уравнений имеет решения?

А. $x^2 + (x-2)^2 = 0$. **Б.** $x^2 + 24 = 0$. **В.** $x^2 = -4$. **Г.** $-x^2 + x = 0$.

6. Решите уравнение:

1) $x^2 - x = 0$. 2) $(x + 2)^2 = 0$. 3) $(x - 5)(x - 6) = 0$.

7. Одна из сторон прямоугольника равна a см, другая — на 5 см больше. Выразите площадь прямоугольника через a.

А. $a^2 + 5a$. **Б.** $a^2 - 5a$. **В.** $2a + 5$. **Г.** $4a + 10$.

8. Известно, что высота h, на которой находится снаряд, выпущенный из орудия, приближённо изменяется по закону $h = 60t - 5t^2$, где h — высота, м, t — время, с. На какой примерно высоте будет снаряд через 10 с после вылета из орудия? Выберите наиболее точное значение.

А. 250 м. **Б.** 200 м. **В.** 150 м **Г.** 100 м.

9. В прямоугольном строю выстроились спортсмены. Количество шеренг x на 2 больше количества человек в каждой шеренге. Выразите количество спортсменов в строю через x.

А. $x^2 + 2x$. **Б.** $x^2 - 2x$. **В.** $x^2 - 4$. **Г.** $2x - 2$.

Решение задач

Математической моделью ситуации, описанной в следующей задаче, является квадратное уравнение.

Задача 1. От листа картона, имеющего форму квадрата, отрезали прямоугольную полоску шириной 3 см. Площадь оставшейся части равна 70 см^2. Какова была площадь квадратного листа картона?

Анализируем. Для ответа на поставленный в задаче вопрос достаточно найти длину стороны исходного листа картона, так как он имеет форму квадрата, а площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Часть листа картона, оставшаяся после отрезания полоски, имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна стороне исходного листа, а другая — на 3 см короче. Это позволяет выразить площадь оставшейся части через длину стороны исходного листа. Приравняв полученное выражение 70 см^2, получим уравнение с одной переменной.

Решаем. Обозначим через x см длину стороны квадрата, являющегося математической моделью данного листа картона. После отрезания полоски шириной 3 см получили кусок картона, имеющий форму прямоугольника со сторонами x см и $(x - 3)$ см. Его площадь равна $x(x - 3)$ см^2. Согласно условию, имеем уравнение $x(x - 3) = 70$ или $x^2 - 3x - 70 = 0$. Получили квадратное уравнение. Решим его.

Вычислим дискриминант: $D = (-3)^2 - 4\cdot1\cdot(-70) = 9 + 280 = 289$.

Так как $D > 0$, то равнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{289}}{2} = \frac{3+17}{2} = 10; \ x_2 = \frac{3-\sqrt{289}}{2} = \frac{3-17}{2} = -7.$$

Число –7 не является решением задачи, так как длина стороны квадрата не может выражаться отрицательным числом.

Сторона исходного листа картона равна 10 см. Площадь квадратного листа картона равна $10^2 = 100$ (см^2).

Ответ. 100 см^2.

1. *Чему равна площадь отрезанной полоски картона?*

2. *Каким будет ответ в задаче, если площадь оставшейся части будет равняться 180 см*^{2}?

3. *Какова была бы площадь квадратного листа картона, если бы после отрезания от его смежных сторон прямоугольных полосок шириной 3 см и 4 см получили бы прямоугольный лист площадью 72 см*^{2}*?*

В ходе решения задачи было получено уравнение $x^2 - 3x - 70 = 0$. Коэффициент при x^2 (его называют старшим коэффициентом) равен 1. Квадратные уравнения со старшим коэффициентом 1 называют ***приведенными***. Формулы для решения приведенного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, дискриминант которых неотрицательный, имеют следующий вид: $x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}$, где $D = p^2 - 4q$. Здесь $a = 1$, $b = p$, $c = q$.

Они являются частным случаем общих формул корней квадратного уравнения.

Пример 2. Решить квадратное уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Решение. Вычисляем дискриминант уравнения:

$D = (-3)^2 - 4 \cdot (-10) = 49$

Определяем его знак и устанавливаем количество корней уравнения:

$D > 0$, уравнение имеет два корня

Находим арифметическое значение квадратного корня из дискриминанта:

$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$

Находим корни:

$x_1 = \frac{3+7}{2} = 5$; $x_2 = \frac{3-7}{2} = -2$

Записываем ответ:

$x_1 = 5$; $x_2 = -2$.

Для квадратных уравнений, у которых второй коэффициент является чётным числом, формулу корней удобно записать в другом виде.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + 2mx + c = 0$, $m \in \boldsymbol{N}$. Найдём его дискриминант: $D = 4m^2 - 4ac = 4(m^2 - ac)$. Очевидно, что количество корней уравнения зависит от знака выражения $m^2 - ac$. Обозначим это выражение через D_1.

Если $D_1 \geq 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получим, что

$$x_1 = \frac{-2m + \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2m + 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-m + \sqrt{D_1}}{a},\ x_2 = \frac{-m - \sqrt{D_1}}{a},\ \text{где } D_1 = m^2 - ac.$$

Если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 3. Решить квадратное уравнение $5x^2 - 6x + 1 = 0$.

Решение. Вычисляем D_1:

$D_1 = (-3)^2 - 5 \cdot 1 = 4$

Определяем его знак и устанавливаем количество корней уравнения:

$D_1 > 0$, уравнение имеет два корня

Находим арифметическое значение квадратного корня из дискриминанта:

$\sqrt{D_1} = \sqrt{4} = 2$

Находим корни:

$x_1 = \frac{3+2}{5} = 1$; $x_2 = \frac{3-2}{5} = 0{,}2$

Записываем ответ:

$x_1 = 1$; $x_2 = 0{,}2$

Любое квадратное уравнение с неотрицательным дискриминантом можно решить, воспользовавшись формулами корней. Однако в ряде случаев корни квадратного уравнения удаётся найти с помощью более простых приёмов. Такими приёмами, прежде всего, следует пользоваться при решении ***неполных квадратных уравнений***.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решают путём разложения его левой части на множители: $x(ax + b) = 0$.

Оно всегда имеет два корня, причём один из корней равен нулю.

В следующей задаче математической моделью рассматриваемой ситуации будет неполное квадратное уравнение этого типа.

Задача 2. Известно, что высота h, на которой находится снаряд, выпущенный из орудия, приближённо изменяется по закону $h = 60t - 5t^2$, где h — высота, м, t — время, с. Через сколько секунд после вылета снаряд упадёт на землю?

Анализируем. Из закона движения следует, что снаряд выпущен в момент $t = 0$. Падение снаряда на землю означает, что высота, на которой находится снаряд, равна нулю. Это позволяет составить квадратное уравнение.

Решаем. Так как падение снаряда на землю означает равенство высоты нулю, то имеем уравнение $-5t^2 + 60t = 0$ или $t(-5t + 60) = 0$.

Это неполное квадратное уравнение. Его корни $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{60}{5} = 12$.

Корень $t_1 = 0$ соответствует моменту вылета снаряда, а корень $t_2 = 12$ — моменту его падения. Следовательно, снаряд упадёт через 12 с.

Ответ. Через 12 с.

1. *Сколько времени длился подъём?*

2. *На какой высоте был снаряд через 6 с после вылета?*

3. *Поднимался ли снаряд на высоту 200 м?*

Неполным квадратным уравнением является и уравнение вида $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$. Если $ac > 0$, то есть коэффициенты a и c имеют одинаковые знаки, то уравнение корней не имеет, так как квадратный корень из отрицательного числа $-\frac{c}{a}$ извлечь нельзя. Если же $ac < 0$, то есть коэффициенты a и c имеют противоположные знаки, то уравнение имеет два корня $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ или $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, являющиеся противоположными числами.

Неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$ либо не имеет корней, либо имеет два корня, которые являются противоположными числами.

К рассмотренному виду неполных квадратных уравнений нередко приводят те задачи на проценты, где речь идёт о двух последовательных изменениях некоторой величины на определённое количество процентов.

Задача 3. Увеличиваясь ежегодно на одно и то же количество процентов, зарплата работника за два года увеличилась на 21%. Чему равен ежегодный процент увеличения зарплаты?

Анализируем. Используя условия задания и простейшие задачи на проценты, можно выразить через исходную зарплату и ежегодный процент её роста размер зарплаты через год, через два года. Зная, на сколько процентов выросла зарплата за два года, можно ещё одним способом найти выражение для размера зарплаты через два года. Приравняв два выражения для размера зарплаты через два года, получим уравнение, решением которого и будет искомый процент.

Решаем. Обозначим через c начальную зарплату работника, а через p — количество процентов, на которое зарплата увеличилась за год. Тогда через год зарплата работника станет равной

$$c + c\cdot\frac{p}{100} = c\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Через два года зарплата будет равна

$$c\left(1+\frac{p}{100}\right) + c\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100} = c\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Так как, по условию, зарплата работника за два года увеличилась на 21%, то её размер через два года составит $c + c\cdot\frac{21}{100} = c\left(1+\frac{21}{100}\right) = 1{,}21c$.

Приравняв два выражения для размера зарплаты через два года, будем иметь уравнение:

$c\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}21c$ или после сокращения на $c \neq 0$: $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}21$.

Обозначив $1+\frac{p}{100}$ через x, получим неполное квадратное уравнение $x^2 - 1{,}21 = 0$. Так как $1{,}21 > 0$, то уравнение имеет два корня, являющиеся противоположными числами. Значение x положительно, поэтому оно равно арифметическому значению корня из числа 1,21. Следовательно, x = 1,1. Так как $x = 1 + \frac{p}{100}$, то $p = (1{,}1 - 1)\cdot 100 = 10$.

Ответ. 10%.

1. *Чему равно p, если за два года зарплата увеличилась на 44%?*

2. *Чему равнялся бы ежегодный процент уменьшения зарплаты, если бы зарплата ежегодно уменьшалась на одно и то же количество процентов, а за два года она уменьшилась на 19%?*

3. *На сколько процентов увеличится зарплата работника за два года, если ежегодно она увеличивается на 30%?*

Формула $c_2 = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, где c_2 — размер зарплаты через 2 года, полученная при решении задачи 3, является частным случаем так называемой ***формулы сложных процентов***.

При решении задачи 1 мы получили приведенное квадратное уравнение $x^2 - 3x - 70 = 0$. Его корни –7 и 10. Нетрудно заметить, что $(-7) + 10 = 3$, а $(-7)\cdot 10 = -70$. то есть сумма корней равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Таким свойством обладает любое приведенное квадратное уравнение, имеющее корни.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Это утверждение известно под названием ***теоремы Виета***. В символической форме для уравнения $x^2 + px + q = 0$ оно записывается так:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Эти равенства, выражающие связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения, называют ***формулами Виета***. Для неприведенного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ эти формулы имеют следующий вид:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения позволяют в некоторых случаях находить его корни, не прибегая к формуле корней.

Попробуем, например, подобрать корни уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$. Формулы Виета подсказывают решение: корнями должны быть числа, сумма которых равна 7 и произведение которых равно 10. Легко видеть, что этим условиям удовлетворяют числа 5 и 2: $5 + 2 = 7$, $5 \cdot 2 = 10$. Подставив эти числа в уравнение, убеждаемся, что они действительно являются его корнями.

Решение квадратного уравнения путём подбора корней основано на теореме, обратной теореме Виета.

Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, а $mn = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

В следующей задаче математической моделью описанной задачи будет уравнение, корни которого нетрудно найти описанным методом.

Задача 4. Сообщения с новогодними поздравлениями послали n друзей друг другу. Чему равно n, если всего было послано 72 сообщения?

Анализируем. По условию, каждый из друзей послал сообщения всем своим друзьям, то есть каждый послал на одно сообщение меньше общего количества друзей. Можно выразить через n количество посланных сообщений. Приравняв это количество числу 72, получим уравнение, из которого можно найти n.

Решаем. Каждый из n друзей послал $(n - 1)$ сообщение. Всего было послано $n(n - 1)$ сообщений. По условию, это выражение равно 72. Имеем уравнение: $n(n - 1) = 72$ или $n^2 - n - 72 = 0$.

Так как $D = 1 + 4 \cdot 72 > 0$, то уравнение имеет два корня. Их сумма равна 1 (второму коэффициенту с противоположным знаком), а произведение –72 (свободному члену). Нетрудно убедиться, что его корни равны 9 и –8. Действительно: $9 + (-8) = 1$, $9\cdot(-8) = -72$.

Корень –8 не удовлетворяет условию задачи, так как количество друзей не может быть отрицательным. Следовательно, $n = 9$.

Ответ. 9.

1. *Могло ли количество сообщений равняться 26?*

2. *Сколько было друзей, если сообщений было 56?*

3. *Каким был бы ответ в задаче, если бы друзья обменялись бы поздравлениями по телефону, состоялось 28 телефонных разговоров и каждый, к кому поступил звонок, этому звонившему другу уже не перезванивал?*

В рассмотренной задаче все коэффициенты a, b, c в уравнении являлись числовыми. Это позволяло легко определить знак дискриминанта. В тех случаях, когда некоторые из этих коэффициентов являются буквенными, дискриминант при различных значениях этих коэффициентов может принимать значения различных знаков. В этом случае приходится учитывать, какие значения могут принимать коэффициенты.

Задача 5. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряду. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что количество рядов стало на 2 меньше прежнего, а количество солдат в каждом ряду стало на 26 больше количества новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы количество солдат в каждом ряду равнялось количеству рядов. Сколько солдат в роте?

Анализируем. В условии задачи сказано, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы количество солдат в каждом ряду равнялось количеству рядов. Это значит, что количество солдат в роте является квадратом натурального числа.

Если обозначить какой-нибудь буквой количество рядов в первоначальном строе, то через эту букву можно выразить количество солдат, прибывших на парад.

После перестроения строй имел форму прямоугольника, причём количество рядов стало на 2 меньше прежнего, а количество солдат в каждом ряду стало на 26 больше количества новых рядов. Это позволяет выразить количество солдат в строю после перестроения через количество рядов в первоначальном строю.

Если ввести обозначение для количества солдат, которые не могли участвовать в параде, то можно составить уравнение, в котором некоторые коэффициенты будут выражаться через это обозначение. Исследование разрешимости этого уравнения в натуральных числах завершает решение задачи.

Решаем. Обозначим через x количество рядов в первоначальном строе, а через a — количество солдат роты, которые не смогли участвовать в параде. Тогда после перестроения в строю будет $x – 2$ рядов и в каждом ряду $x – 2 + 26 = x + 24$ солдат. Количество солдат в этом строе равно $(x – 2)(x + 24)$. Так как в первоначальном строе в каждом ряду было по 24 человека, то всего в первоначальном строе было $24x$ человек. Из них a человек не могли принимать участие в параде. Следовательно, в строю после перестроения было $24x – a$ человек.

Имеем уравнение $(x – 2)(x + 24) = 24x – a$ или $x^2 – 2x – (48 – a) = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения равен $4 + 4(48 – a)$ или $4(49 – a)$. Уравнение имеет решение, если $49 – a \geq 0$, то есть $a \leq 49$.

Так как x и a — натуральные числа и $x = 1 + \sqrt{49 - a}$, то $\sqrt{49 - a}$ — натуральное число. Следовательно, a может равняться 13, 24, 33, 40, 45, 48. При этом x примет соответственно значения 7, 6, 5, 4, 3, 2~~, 1~~. Так как количество солдат в роте $24x$ представляет собой квадрат натурального числа, то этому условию удовлетворяет только значение $x = 6$. Действительно, $24x = 24{\cdot}6 = 144 = 12^2$, для остальных указанных значений x выражение $24x$ не представляет собой квадрата натурального числа.

Ответ. 144.

1. *Сколько солдат не смогли участвовать в параде?*

2. *Могло ли 49 солдат не участвовать в параде?*

3. *Можно ли было состав роты перестроить так, чтобы количество рядов стало на 1 меньше прежнего, а количество солдат в каждом ряду стало на 27 больше количества новых рядов?*

Проверь себя

1. Лист стекла имеет форму квадрата размерами 70 см×70 см. От него отрезали полосу шириной 20 см. Чему равна площадь оставшейся части листа стекла?

А. 350 см^2. **Б**. 1400 см^2. **В**. 2500 см^2. **Г**. 3500 см^2.

2. Известно, что если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v м/с, то высота, на которой оно окажется через t с, вычисляется приближённо по формуле $h = vt - 5t^2$. Мяч отскочил от пола с начальной скоростью 6 м/с. На какой примерно высоте он окажется через 1 секунду? Выберите наиболее точное значение.

А. 0,25 м. **Б**. 0,5 м. **В**. 1 м. **Г**. 2 м.

3. Население города за два года увеличилось с 20 000 человек до 22 050 человек. На сколько процентов увеличилось население этого города за 2 года?

А. На 10,25%. **Б**. На 10,5%. **В**. На 11%. **Г**. На 12%.

4. 10 человек поговорили по одному разу друг с другом по телефону. Сколько было телефонных разговоров?

А. 90. **Б**. 45. **В**. 40. **Г**. 20.

5. Петя, играя с кубиками, выстроил их в прямоугольник по 6 кубиков в ряд. Затем Петя перестроил кубики снова в прямоугольник, но так, что количество рядов стало на 4 меньше прежнего, а количество кубиков в каждом ряду стало на 8 больше количества новых рядов. Сколько кубиков у Пети?

А. 48. **Б**. 64. **В**. 80. **Г**. 112.

Реши сам

1. Из прямоугольного листа жести размерами 39 см×24 см вырезали по углам квадраты и, загнув края вверх, получили коробку. Чему должна быть равна сторона вырезаемого квадрата, чтобы дно коробки имело площадь 700 см^2?

2. Тело, брошенное с поверхности земли вверх, движется по закону $h=-\frac{gt^2}{2}+20t$, где h — высота, м; t — время, с; $g \approx 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Через сколько примерно секунд тело окажется на земле?

3. В результате двух последовательных снижений цены на одно и то же количество процентов цена шкафа снизилась с 800 зедов до 578 зедов (зед — условная денежная единица). На сколько процентов каждый раз снижалась цена?

4. Несколько человек при встрече приветствовали друг друга рукопожатиями. Сколько человек встретилось, если рукопожатий было 21?

5. Взвод солдат прибыл в караул в полном составе прямоугольным строем по 4 человека в ряду. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в карауле. Оставшийся для караула состав взвода перестроили так, что количество рядов стало на 2 меньше прежнего, а количество солдат в каждом ряду стало на 4 больше количества новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в карауле, то взвод можно было бы выстроить так, чтобы количество солдат в каждом ряду равнялось количеству рядов. Сколько солдат во взводе?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Воспользуйтесь определением квадратного уравнения.

2. В. Воспользуйтесь определением корня уравнения.

3. А. В заданное выражение подставьте значения a, b, c из задания 1.

4. В. Обратите внимание на то, что знаком √ обозначается арифметическое (неотрицательное) значение корня.

5. **Г.** Обратите внимание на то, что квадрат числа не может быть отрицательным числом.

6. 1) 0;1; 2) –2; 3) 5; 6. Воспользуйтесь особенностями каждого уравнения.

7. А. Воспользуйтесь формулой для вычисления площади прямоугольника.

8. Г. Подставьте в закон для h значение $t = 10$ с.

9. Б. Выразите вначале через x количество человек в каждой шеренге.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 30 см^2. **2.** 225 см^2. **3.** 144 см^2.

Задача 2. 1. 6 с. **2.** 180 м. **3.** Нет.

Задача 3. 1. 20%. **2.** 10%. **3.** 69%.

Задача 4. 1. Нет. **2.** 8. **3.** 8.

Задача 5. 1. 24. **2.** Нет. **3.** Нельзя.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
Г	В	А	Б	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 2 см. Обозначьте какой-нибудь буквой длины сторон вырезаемых квадратов и выразите через эту букву площадь дна коробки.

2. Через 4 с. Воспользуйтесь тем, что тело окажется на земле, если $h = 0$.

3. 15%. Обозначьте какой-нибудь буквой количество процентов, на которое дважды снижалась цена шкафа, и выразите, пользуясь первой процентной задачей, через эту букву цену шкафа после двух снижений.

4. 7. Обозначьте какой-нибудь буквой искомое количество людей и выразите через эту букву количество рукопожатий.

5. 16. Введите обозначения для первоначального количества рядов и количества солдат, которые не могли стоять в карауле. Выразите через них оставшееся количество солдат в карауле двумя способами и приравняйте их.

2. Уравнения, приводящиеся к квадратным

При решении прикладных задач нередко естественно возникают уравнения, которые не похожи на квадратные, но после некоторых преобразований превращаются в квадратные уравнения. Будем называть такие уравнения ***уравнениями, приводящимися к квадратным***.

На самом деле уравнения $x^2 + 2x = 4$, $(x - 1)(x + 2) = 6$ тоже не являются квадратными в соответствии с данным в предыдущем блоке определением квадратного уравнения. Но поскольку их очень легко привести к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, то обычно их называют квадратными.

Готовимся к решению задач

1. Собственная скорость катера x и скорость течения реки y связаны соотношением: $x^2 - 2xy - 8y^2 = 0$. Чему равно отношение собственной скорости катера к скорости течения реки?

А. 4. **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** Невозможно определить.

2. Расстояние от дома до школы равно 800 м. Коля проходит это расстояние на 3 мин быстрее, чем его младший брат, так как его скорость на 15 м/мин больше скорости брата. Какое уравнение из приведенных в ответах соответствует условию задачи, если буквой x обозначена скорость движения младшего брата?

А. $\frac{800}{x} - \frac{800}{x-15} = 3$. **Б.** $\frac{800}{x-15} - \frac{800}{x} = 3$.

В. $\frac{800}{x+15} - \frac{800}{x} = 3$. **Г.** $\frac{800}{x} - \frac{800}{x+15} = 3$.

3. Несколько человек договорились оплатить поездку на автобусе, разделив её стоимость, 720 руб., между собой поровну. Однако в назначенный день для поездки пришли на 3 человека меньше, поэтому каждому пришлось заплатить на 40 руб. больше, чем предполагалось. Какое уравнение из приведенных в ответах соответствует условию задачи, если буквой x обозначено количество человек, участвовавших в поездке?

А. $\frac{720}{x+3}-\frac{720}{x}=40$. **Б.** $\frac{720}{x-3}-\frac{720}{x}=40$. **В.** $\frac{720}{x}-\frac{720}{x+3}=40$. **Г.** $\frac{720}{x}-\frac{720}{x-3}=40$.

4. Катер спустился по течению реки, пройдя 28 км, и тотчас вернулся назад, затратив на весь путь 7 ч. Собственная скорость катера равна 9 км/ч. Уравнение $\frac{28}{9+x}+\frac{28}{9-x}=7$ соответствует условию задачи. Что обозначено буквой x?

А. Определить нельзя. **Б.** Скорость течения.

В. Скорость катера по течению. **Г.** Скорость катера против течения.

5. Два оператора Елена и Ирина, работая вместе, могут набрать рукопись объёмом a страниц за 4 дня. Елена, работая самостоятельно, может набрать эту рукопись на 6 дней быстрее Ирины. Уравнение $\frac{a}{x}+\frac{a}{x+6}=\frac{a}{4}$ соответствует условию задачи. Что обозначено буквой x?

А. Производительность труда Елены. **Б.** Производительность труда Ирины.

В. Время, за которое Елена может набрать рукопись, работая самостоятельно.

Г. Время, за которое Ирина может набрать рукопись, работая самостоятельно.

6. Выполняя заказ, мастер изготовил 90 деталей, а его ученик — 30. Ежедневно ученик изготовлял на 7 деталей меньше, чем мастер. Уравнение $\frac{30}{x-7}-\frac{90}{x}=1$ соответствует условию задачи, из которого часть была потеряна. Кто быстрее справился со своей частью задания и на сколько дней?

А. Мастер, на 1 день. **Б.** Ученик, на 1 день.

В. За одно и то же время. **Г.** Определить невозможно.

Решение задач

Наиболее распространёнными преобразованиями, приводящими уравнения к квадратным, являются приведение дробей к общему знаменателю, действия над многочленами, приведение подобных членов и т. д.

Задача 1. Девушка купила в магазине несколько роз, заплатив за них 1 зед (зед — условная денежная единица). Когда она собиралась уходить, продавец сказал ей: «Если бы Вы купили ещё 10

роз, то я отдал бы Вам все розы за 2 зеда и Вы сэкономили бы 80 кетов (кет — сотая часть зеда) на каждой дюжине. Сколько роз купила девушка первоначально?

Анализируем. В условии известна первоначальная стоимость купленных роз. Если ввести обозначение для искомого количества первоначально купленных роз, то через него можно выразить цену одной розы.

Продавец предлагает девушке дополнительно купить 10 роз, обещая ей уменьшить цену каждой розы. В условии указана предполагаемая экономия при покупке 12 роз, равная разности стоимостей этих роз по первоначальной цене и предложенной. Это даёт возможность составить уравнение.

Решаем. Обозначим через x количество роз, купленных первоначально. Тогда $\frac{100}{x}$ — первоначальная стоимость одной розы в кетах. Продавец предложил девушке купить $(x + 10)$ роз за 2 зеда. При этом стоимость одной розы в кетах, предложенная продавцом, составила бы $\frac{200}{x+10}$. По условию, тогда бы на каждой розе девушка сэкономила бы $\frac{80}{12}$ или $\frac{20}{3}$ кета.

Так как размер экономии при покупке одной розы равен разности между первоначальной и предложенной ценами, то имеем уравнение: $\frac{100}{x} - \frac{200}{x+10} = \frac{20}{3}$. Преобразуем это уравнение. Перенесём все члены в левую часть уравнения и приведём дроби к общему знаменателю. Получим: $\frac{300(x+10)-600x-20x(x+10)}{3x(x+10)}=0$ или $\frac{x^2+25x-150}{3x(x+10)}=0$.

Известно, что дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, то есть $x^2 + 25x - 150 = 0$, а $x(x + 10) \neq 0$. Корни квадратного уравнения $x^2 + 25x - 150 = 0$, равные 5 и –30, удовлетворяют условию $x(x + 10) \neq 0$. Условию задачи удовлетворяет единственный положительный корень этого уравнения $x = 5$. Следовательно, девушка первоначально купила 5 роз.

Ответ. 5 роз.

1. *Какова первоначальная цена одной розы?*

2. *Во сколько раз уменьшилась бы цена одной розы, если бы девушка приняла предложение продавца?*

3. *Какова была бы экономия на дюжине роз, если бы продавец предложил заплатить за увеличенное на 10 количество купленных роз 1 зед 80 кетов?*

В уравнении $\frac{100}{x} - \frac{200}{x+10} = \frac{20}{3}$ содержатся рациональные дроби. Такие уравнения называют ***дробно-рациональными***. Для их решения нужно:

1) перенести все выражения в левую часть и привести их к наименьшему общему знаменателю;

2) выполнить действия над полученными выражениями, приведя их к наименьшему общему знаменателю;

3) приравнять числитель полученный дроби к нулю и решить полученное уравнение;

4) отобрать из полученных решений те, которые не обращают общий знаменатель в нуль.

Приведенный алгоритм проиллюстрируем на решении следующей задачи.

Задача 2. Маша прочитала книгу объёмом 480 страниц, читая ежедневно одинаковое количество страниц. Если бы она читала каждый день на 16 страниц больше, то прочла бы эту книгу на 5 дней раньше. Сколько дней Маша читала книгу?

Анализируем. В условии известно количество прочитанных страниц. Если ввести обозначение для искомого количества дней, то через него можно выразить количество страниц, которое Маша прочитывала ежедневно. Аналогичное выражение можно составить, предположив, что книга прочитана на 5 дней раньше. Воспользовавшись условием, можно составить уравнение.

Решаем. Обозначим через x количество дней, которое потребовалось для прочтения книги. Тогда ежедневно Маша читала $\frac{480}{x}$ страниц.

Если бы книгу Маша прочитала на 5 дней раньше, то есть ей потребовалось бы для прочтения книги (x – 5) дней, то ежедневно она бы прочитывала $\frac{480}{x-5}$ страниц. Из условия следует уравнение $\frac{480}{x-5} - \frac{480}{x} = 16$.

Решим полученное дробно-рациональное уравнение. Так как наименьший общий знаменатель выражений, входящих в уравнение, равен $x(x-5)$, то имеем:

$$\frac{480 \cdot x - 480(x-5) - 16x(x-5)}{x(x-5)} = 0 \text{ или } \frac{x^2 - 5x - 150}{x(x-5)} = 0.$$

Приравняв числитель нулю, получим квадратное уравнение $x^2 - 5x - 150 = 0$, корни которого $x_1 = 15$, $x_2 = -10$. Знаменатель при этих значениях x в нуль не обращается. Условию задачи удовлетворяет только $x_1 = 15$. Следовательно, Маша прочитала книгу за 15 дней.

Ответ. 15 дней.

1. *Сколько страниц читала Маша ежедневно?*

2. *На сколько дней больше читала бы Маша книгу, если бы она ежедневно читала на 8 страниц меньше?*

3. *За сколько дней Маша прочла бы книгу объёмом 256 страниц, если бы читала с той скоростью, которая вытекает из условия задачи?*

Дробно-рациональные уравнения при решении задач часто появляются там, где речь идёт о величинах, связанных обратной пропорциональной зависимостью: например, цена единицы продукции и количество приобретенных единиц этой продукции при заданной стоимости; производительность труда и время выполнения работы при заданном объёме работы; скорость движения и время преодоления заданного расстояния и др.

Иногда дробно-рациональные уравнения можно привести к квадратным с помощью основного свойства пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, которое имеет вид: $ab = cd$.

Задача 3. Из конечных пунктов «Центр» и «Теремки» городского маршрута выехали одновременно навстречу друг другу маршрутное такси и автобус и ехали с постоянными скоростями. Они встретились на расстоянии 12 км от «Центра». После прибытия на конечные пункты они сразу же отправились в обратных направлениях и в этот раз встретились на расстоянии 16 км от конечной остановки «Теремки». Какова длина маршрута?

Анализируем. Введя обозначения для длины маршрута, скоростей маршрутного такси и автобуса, времени, через которые они встретились в первый и второй раз, можно будет выразить через эти обозначения расстояния, пройденные такси и автобусом до первой и второй встречи. Так как скорости постоянные, то можно будет двумя способами найти отношение скоростей. Приравняв полученные выражения, будем иметь уравнение, из которого можно найти искомую величину.

Решаем. Обозначим через x км расстояние между конечными пунктами, через v_1 км/ч — скорость маршрутного такси, а через v_2 км/ч — скорость автобуса. Пусть они в первый раз встретились через t_1 ч, а во второй раз — через t_2 ч. До первой встречи маршрутное такси прошло расстояние, равное v_1t_1, а автобус — v_2t_1. По условию, $v_1t_1 = 12$, $v_2t_1 = x - 12$.

До второй встречи маршрутное такси прошло расстояние, равное v_1t_2, а автобус — v_2t_2. По условию, $v_1t_2 = x + 16$, $v_2t_1 = 2x - 16$.

Найдём отношение расстояний, преодолённых за одно и то же время:

$$\frac{v_1t_1}{v_2t_1} = \frac{12}{x-12} \text{ или } \frac{v_1}{v_2} = \frac{12}{x-12}.$$

Аналогично:

$$\frac{v_1t_2}{v_2t_2} = \frac{x+16}{2x-16} \text{ или } \frac{v_1}{v_2} = \frac{x+16}{2x-16}.$$

Левые части двух последних равенств равны между собой. Следовательно, равны и правые. Приравняем их:

$$\frac{12}{x-12}=\frac{x+16}{2x-16}.$$

Преобразуем полученное дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{12(2x-16)-(x-12)(x+16)}{(x-12)(2x-16)}=0 \text{ или } \frac{x^2-20x}{(x-12)(2x-16)}=0.$$

Приравняем к нулю числитель левой части уравнения: $x^2 - 20x = 0$. Получили неполное квадратное уравнение. Его левую часть можно разложить на множители. Тогда уравнение примет вид: $x(x - 20) = 0$. Равенство нулю произведения $x(x - 20)$ означает, что $x = 0$ или $x - 20 = 0$, $x = 20$.

Таким образом, уравнение $x^2 - 20x = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 20$. Полученные числа не обращают в нуль общий знаменатель выражений, входящих в дробно-рациональное уравнение. Корень $x_1 = 0$ не удовлетворяет условию задачи: расстояние между двумя пунктами не может равняться нулю. Следовательно, расстояние между конечными пунктами маршрута равно 20 км.

Ответ. 20 км.

1. *На каком расстоянии от «Центра» произошла вторая встреча маршрутного такси и автобуса?*

2. *Чему равно отношение скоростей маршрутного такси и автобуса?*

3. *Чему равнялось бы расстояние между конечными пунктами, если бы первая встреча произошла на расстоянии 16 км от «Центра», а вторая — на расстоянии 12 км от пункта «Теремки»?*

Иногда условие позволяет составить только одно уравнение с двумя переменными. Но в этих случаях, как правило, приходится находить не значения этих переменных, а некоторые соотношения между ними. При этом используются формулы корней квадратного уравнения.

Задача 4. Скорость теплохода по течению во столько раз больше его скорости против течения, во сколько раз его скорость против течения больше скорости течения. Найдите отношение скорости течения к собственной скорости теплохода.

Анализируем. Скорость теплохода по течению равна сумме собственной его скорости и скорости течения, а скорость теплохода против течения — разности этих скоростей. Введя обозначения для скорости движения теплохода по течению и против течения, выразив через них собственную скорость теплохода и скорость течения, используя условие, можно составить уравнение для введенных переменных. Оно будет содержать две переменные. Но находить нужно не их значения, а их отношение. Для этого достаточно одного уравнения с двумя переменными.

Решаем. Обозначим через x скорость движения теплохода по течению, а через y — скорость движения теплохода против течения. Тогда скорость течения равна $\frac{x-y}{2}$, а собственная скорость теплохода — $\frac{x+y}{2}$. По условию, $\frac{x}{y}=\frac{y}{\frac{x-y}{2}}$. Поэтому $x^2 - xy - 2y^2 = 0$. Так как $y \neq 0$, то разделив обе части уравнения $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ на y^2, получим: $\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}-2=0$. Обозначив $\frac{x}{y}$ через t, будем иметь: $t^2 - t - 2 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен 2. Следовательно, $\frac{x}{y}=2$, $x = 2y$. Отсюда $\frac{x-y}{2}:\frac{x+y}{2}=\frac{x-y}{x+y}=\frac{2y-y}{2y+y}=1:3$.

Ответ. 1:3.

1. *Чему равно отношение скорости движения теплохода по течению к скорости движения теплохода против течения?*

2. *Чему равно отношение скорости движения теплохода против течения к скорости течения?*

3. *Чему равнялось бы отношение собственной скорости теплохода к скорости течения, если бы оно равнялось отношению скорости движения теплохода по течению к скорости движения теплохода против течения?*

Обратите внимание на то, что в левой части уравнения $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ все члены уравнения второй степени. Напомним, что степенью члена многочлена называется сумма показателей степеней, с которыми входят переменные в эти члены. Во все члены многочлена $x^2 - xy - 2y^2$ переменные x и y входят во второй степени.

Такие уравнения называют ***однородными второй степени относительно x и y***.

Однородные уравнения преобразуются равносильным делением обеих частей на любой член левой части, отличный от нуля.

В рассмотренной задаче уравнение $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ приводилось к квадратному заменой переменных. Замена переменных — распространённый приём приведения дробно-рациональных уравнений к квадратным.

Задача 5. Два магазина A и B вывезли на сезонную распродажу вместе 140 курток. Каждый магазин вывез на продажу одинаковые куртки. Магазины продавали свои куртки по разным ценам, магазин A выручил на 6000 зедов больше, чем B (зед — условная денежная единица). Все куртки были проданы. Если бы магазин A продал столько курток, сколько B, то выручил бы 9000 зедов, а если бы магазин B продал столько курток, сколько A, то он выручил бы 8000 зедов. Сколько курток продал каждый магазин и по какой цене?

Анализируем. В условии задачи известны общее количество проданных курток, разность между суммами, вырученными магазинами от продажи своих курток. Обозначив количество курток, проданных одним из магазинов, какой-нибудь буквой, можно выразить через неё количество курток, проданных другим магазином, цены, по которым каждый магазин продавал свои куртки. Так как известна разность между суммами, вырученными магазинами от продажи своих курток, то это позволит составить уравнение.

Решаем. Обозначим через x количество курток, проданных магазином A. Тогда магазин B продал $140 - x$ курток. По условию, за $140 - x$ курток магазин A выручил бы 9000 зедов, поэтому он продавал куртки по цене $\dfrac{9000}{140 - x}$ зедов.

Магазин B за x курток выручил бы 8000 зедов, он продавал куртки по цене $\frac{8000}{x}$ зедов. Следовательно, магазин A за проданные куртки выручил сумму, равную $x \cdot \frac{9000}{140-x} = \frac{9000x}{140-x}$ зедов, а магазин B — $(140 - x) \cdot \frac{8000}{x} = \frac{8000(140-x)}{x}$ зедов. Так как магазин A выручил на 6000 зедов больше, чем магазин B, то имеем уравнение $\frac{9000x}{140-x} - \frac{8000(140-x)}{x} = 6000$.

При решении этого уравнения замечаем, что слагаемые в левой части уравнения содержат взаимно-обратные множители $\frac{140-x}{x}$ и $\frac{x}{140-x}$. Поэтому естественно выполнить замену: $\frac{x}{140-x} = t$, тогда $\frac{140-x}{x} = \frac{1}{t}$, и уравнение $\frac{9000x}{140-x} - \frac{8000(140-x)}{x} = 6000$ принимает вид $9000t - \frac{8000}{t} = 6000$, или $\frac{9000t^2 - 6000t - 8000}{t} = 0$, то есть $9000t^2 - 6000t - 8000 = 0$, или $9t^2 - 6t - 8 = 0$, причём $t \neq 0$.

Корни полученного квадратного уравнения равны $t_1 = \frac{4}{3}$, $t_2 = -\frac{2}{3}$. Корень t_2 не удовлетворяет условию задачи, так как выражение $\frac{x}{140-x}$ принимает только положительные значения. Условию задачи удовлетворяет только корень $t_1 = \frac{4}{3}$. Возвращаясь к замене, будем иметь: $\frac{x}{140-x} = \frac{4}{3}$. Отсюда $x = 80$.

Следовательно, магазин A продал 80 курток, а магазин B — $140 - 80 = 60$ курток, цена куртки в магазине A равна $\frac{9000}{60} = 150$ зедов, а в магазине B — $\frac{8000}{80} = 100$ зедов.

Ответ. 80 и 60 курток; 150 и 100 зедов.

1. *Во сколько раз цена куртки в магазине А больше цены куртки в В?*

2. *Какие суммы выручили от продажи курток магазины А и В?*

3. *Какой ответ был бы в задаче, если бы всего два магазина продали 130 курток, причём магазин А выручил бы на 14000 зедов меньше, чем магазин В?*

Проверь себя

1. На 12 зедов (зед — условная денежная единица) можно купить 4 розы. Сколько тюльпанов можно купить на 12 зедов, если роза дороже тюльпана на 1 зед?

А. 12. **Б.** 8. **В.** 6. **Г.** 4.

2. Двое рабочих получили заказ. Сначала 1 ч работал первый рабочий, затем 4 ч они работали вместе. Выразите объём выполненной ими работы через время x ч, необходимое первому рабочему для самостоятельного выполнения заказа, если ему для этого понадобится на 5 ч больше, чем второму.

А. $\frac{5}{x}+\frac{4}{x+5}$. **Б.** $\frac{1}{x}+\frac{4}{2x+5}$. **В.** $\frac{1}{x}+\frac{4}{2x-5}$. **Г.** $\frac{5}{x}+\frac{4}{x-5}$.

3. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. К моменту встречи турист из A, который шёл со скоростью 5 км/ч, прошёл на 2 км больше, чем турист из B, шедший со скоростью 4 км/ч. Сколько времени прошло от момента выхода до встречи?

А. 4 ч. **Б.** 3 ч. **В.** 2 ч. **Г.** 1 ч.

4. Скорость вертолёта, летящего по направлению ветра, во столько раз больше его скорости при полёте против ветра, во сколько раз его скорость при полёте против ветра больше скорости ветра. Найдите отношение собственной скорости вертолёта к скорости ветра.

А. 2,25. **Б.** 2,5. **В.** 2,75. **Г.** 3.

5. На рынок прибыли две различные цистерны с молоком общей ёмкостью 900 л. Молоко из различных цистерн продавалось по разным ценам, однако за продажу молока из обеих цистерн были выручены одинаковые суммы. Если бы в первой цистерне было столько молока, сколько во второй, то за его продажу выручили бы 3200 зедов (зед — условная денежная единица). А если бы во второй цистерне было бы столько молока, сколько в первой, то за его продажу выручили бы 5000 зедов. Сколько молока было во второй цистерне?

А. 500 л. **Б.** 450 л. **В.** 400 л. **Г.** 300 л.

6. На рынок прибыли две различные цистерны с молоком ёмкостью 400 л и 500 л. Если бы в первой цистерне было столько молока, сколько во второй, то за его продажу выручили бы 3200 зедов (зед — условная денежная единица). Какую сумму выручили за продажу молока из первой цистерны?

А. 2400 зедов. **Б.** 2500 зедов. **В.** 2560 зедов. **Г.** 3000 зедов.

Реши сам

1. Фирма продала на одну и ту же сумму 200 зедов a кг продукции одного вида и (a – 2) кг продукции другого вида (зед — условная денежная единица). Выразите через a разность цен 1 кг продукции этих двух видов.

2. Куплен товар двух сортов: первого на 1200 зедов, второго — на 1500 зедов (зед — условная денежная единица). Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого, а его цена за 1 кг на 20 зедов меньше, чем цена 1 кг товара первого сорта. Какова масса покупки?

3. Из пунктов A и B, расстояние между которыми S км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста. К моменту встречи турист из A прошёл на 2 км больше, чем турист из B. Выразите через S расстояния, которые прошёл каждый из туристов до встречи.

4. Войсковая колонна имеет длину 6 км. Связной, выехав из начала колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся к началу. Колонна за это время прошла 8 км. Во сколько раз скорость связного больше скорости колонны?

5. Два торговца привезли на рынок вместе 1000 яиц. Продав яйца по разной цене, оба выручили одинаковые суммы. Если бы первый продал столько яиц, сколько второй, то он бы выручил 720 зедов; если бы второй продал столько яиц, сколько первый, то он выручил бы 320 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько яиц было у каждого?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. А. Разделите обе части приведенного равенства на y^2 и решите полученное уравнение относительно $\frac{x}{y}$.

2. Г. Выразите через x скорости движения братьев.

3. В. Выразите через x планируемую и реальную плату за поездку.

4. Б. Выясните смысл каждого слагаемого в левой части уравнения.

5. В. Выясните вначале смысл правой части, а затем каждого слагаемого левой части уравнения.

6. А. Выясните вначале смысл каждого слагаемого левой части уравнения, а затем и его правой части.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 20 кетов. **2.** В 1,5 раза. **3.** 60 кетов.

Задача 2. 1. 32 страницы. **2.** На 5 дней. **3.** За 8 дней.

Задача 3. 1. 4 км. **2.** 3:2. **3.** 36 км.

Задача 4. 1. 2:1. **2.** 2:1. **3.** $1+\sqrt{2}$.

Задача 5. 1. В 1,5 раза. **2.** 12000 зедов и 6000 зедов. **3.** 40 и 90 курток; 100 и 200 зедов.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6
В	Г	В	Г	В	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. $\frac{200}{a-2}-\frac{200}{a}$ зедов. Подумайте, цена какого вида продукции выше, чем другого.

2. 40 кг. Введите обозначение для массы купленного товара какого-нибудь сорта, выразите через него массу купленного товара другого сорта и цены 1 кг то вара каждого сорта.

3. 0,5*S* + 1 и 0,5*S* – 1. Искомые значения можно найти, зная их сумму и разность.

4. В 2 раза. Введите обозначения для скоростей связного и колонны. Воспользуйтесь тем, что за то время, за которое связной преодолел расстояние от начала колонны до её конца и обратно, колонна прошла 8 км.

5. 400 и 600. Обозначьте количество яиц у одного из торговцев какой-нибудь буквой, выразите через неё количество яиц у другого, цены, по которым продавал яйца каждый из торговцев, а также суммы, вырученные от продажи яиц.

3. Системы уравнений, одно из которых выше первой степени

Выше рассматривались квадратные уравнения с одной переменной. Некоторые задачи приводили к уравнениям с несколькими переменными. По условиям задачи удавалось составить систему нескольких уравнений с этими переменными.

В настоящем блоке будем рассматривать задачи, приводящие к системам уравнений, среди которых, по крайней мере, одно из них выше первой степени.

Готовимся к решению задач

1. Известно, что некоторый объём работы экскаватор А, работая отдельно, может выполнить на 4 ч быстрее, чем экскаватор В. Если обозначить время, за которое экскаваторы А и В, работая отдельно, могут выполнить этот объём работы, через x и y соответственно, то какое уравнение соответствует этой информации?

А. $x - y = 4$. **Б.** $y - x = 4$. **В.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$. **Г.** $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$.

2. Известно, что некоторый объём работы два экскаватора А и В, работая одновременно, могут выполнить за 3 ч. Если обозначить время, за которое экскаваторы А и В, работая отдельно, могут выполнить этот объём работы, через x и y соответственно, то какое уравнение соответствует этой информации?

А. $x + y = 3$. **Б.** $x + y = \frac{1}{3}$. **В.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$. **Г.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

3. Известно, что некоторый объём работы два экскаватора А и В, работая одновременно, могут выполнить за 3 ч. Если обозначить производительности труда экскаваторов А и В, через x и y соответственно, то какое уравнение соответствует этой информации?

А. $x + y = \frac{1}{3}$. **Б.** $x + y = 3$. **В.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$. **Г.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

4. Известно, что в некотором хозяйстве под пшеницу занято два участка А и В. На участке В с 1 га собрали на 5 ц пшеницы больше, чем с 1 га участка В. Если обозначить через x ц/га и y ц/га урожайности на участках А и В соответственно, то какое уравнение описывает приведенную информацию?

А. $x - y = 5$. **Б.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$. **В.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5$. **Г.** $y - x = 5$.

5. Известно, что в некотором хозяйстве под пшеницу занято два участка А и В общей площадью 15 га. На участке А собрали 270 ц пшеницы, а на участке В — 210 ц. Если обозначить через x ц/га и y ц/га урожайности на участках А и В соответственно, то какое уравнение описывает приведенную информацию?

А. $x + y = 15$. **Б.** $\frac{x}{270} + \frac{y}{210} = 15$. **В.** $\frac{270}{x} + \frac{210}{y} = 15$. **Г.** $\frac{x}{270} + \frac{y}{210} = \frac{1}{15}$.

6. Катер проплыл 15 км вниз по течению реки и 12 км против течения, затратив на всё это 7 ч. Выразите затраченное время через собственную скорость катера v км/ч и скорость течения w км/ч.

А. $\frac{15}{v + w} + \frac{`12}{v - w} = 7$. **Б.** $\frac{15}{v - w} + \frac{`12}{v + w} = 7$.

В. $\frac{15}{w + v} + \frac{`12}{w - v} = 7$. **Г.** $\frac{12}{w + v} + \frac{`15}{w - v} = 7$.

7. Известно, что два поезда отправились из пунктов А и В, расстояние между которыми равно s км, навстречу друг другу. Если поезд из А выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из В, то они встретятся на половине пути. Какое уравнение описывает приведенную ситуацию, если скорости поездов из А и В обозначить соответственно через x км/ч и y км/ч?

А. $\frac{s}{2y}-\frac{s}{2x}=2$. **Б.** $\frac{s}{y}-\frac{s}{x}=2$. **В.** $\frac{s}{x}-\frac{s}{y}=2$. **Г.** $\frac{s}{2x}-\frac{s}{2y}=2$.

Решение задач

В первую очередь, рассмотрим задачи, приводящую к системе уравнений, одно из которых линейное, а другое имеет степень выше первой.

Задача 1. Бригада каменщиков должна была в определённый срок уложить 120 тысяч кирпичей. Бригада выполнила работу на 4 дня раньше срока. Какова была норма ежедневной кладки кирпича и сколько кирпичей укладывали ежедневно в действительности, если известно, что бригада за 3 дня укладывала на 5000 кирпичей больше, чем полагалось укладывать за 4 дня по норме?

Анализируем. В задаче известно общее количество кирпичей, которое должна была уложить бригада. Требуется найти ежедневную норму и количество кирпичей, которое бригада в действительности укладывала за день.

Введя обозначения для искомых величин, можно составить уравнения для введенных переменных, воспользовавшись связью между общим объёмом работы, нормой и сроком выполнения работы.

Одно уравнение можно получить из того, что бригада за 3 дня укладывала на 5 тыс. кирпичей больше, чем полагалось укладывать за 4 дня по норме. Для составления второго уравнения можно воспользоваться тем, что бригада выполнила работу на 4 дня раньше срока. В результате будем иметь систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Решаем. Пусть норма ежедневной кладки была x тысяч штук, а в действительности укладывали y тысяч штук в день. По плану работу должны были выполнить за $\frac{120}{x}$ дней, а выполнили её за $\frac{120}{y}$ дней. По условию, имеем урав нение $\dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 4.$

За 3 дня было уложено $3x$ тысяч кирпичей, по норме полагалось за 4 дня уложить $4x$ тысяч кирпичей. Имеем второе уравнение $3y - 4x = 5$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} 3y - 4x = 5, \\ \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 4. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим y через x и подставим полученное выражение во второе уравнение. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x+5}{3}, \\ \dfrac{120}{x} - \dfrac{360}{4x+5} = 4. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы приводится к виду: $480x + 600 - 360x - 16x^2 - 20x = 0$, или $16x^2 - 100x - 600 = 0$, или $4x^2 - 25x - 150 = 0$, причём $x(4x + 5) \neq 0$. Отсюда $x = 10$ или $x = -3{,}75$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Тогда из первого уравнения получим: $y = 15$. Следовательно, норма в день составляла 10 тысяч кирпичей, в действительности укладывали 15 тысяч кирпичей.

Ответ. 10 тысяч, 15 тысяч кирпичей.

1. *За сколько дней по плану бригада должна была выполнить работу?*

2. *На сколько процентов ежедневно перевыполнялась норма укладки кирпичей?*

3. *Каким был бы ответ в задаче, если бы количество кирпичей, укладываемых ежедневно, превосходило норму на 1000 кирпичей?*

Систему двух уравнений с двумя переменными, которая содержит одно уравнение первой степени и одно уравнение второй степени, всегда можно решить методом подстановки. Для этого из уравнения первой степени выражают одну переменную через другую; после подстановки найденного выражения в другое уравнение системы получается уравнение с одной переменной первой или второй степени.

Задача 2. В некотором хозяйстве имеются две теплицы A и B общей площадью в 160 м^2. В теплице A собрали 1800 кг огурцов, а в теплице B — 1320 кг, причём в теплице B с 1 м^2 собрали на 4 кг огурцов больше, чем с 1 м^2 в теплице A. Сколько собрали огурцов с 1 м^2 в той и другой теплице?

Анализируем. В условии задачи речь идёт о трёх величинах: площади теплицы, массе огурцов, собранных в теплице, и массе огурцов, собранных с 1 м^2. Связи между ними с использованием условий, позволяют составить уравнения.

Так как в условии сравниваются массы огурцов, собранные с 1 м^2 двух теплиц, можно будет составить одно уравнение для этих неизвестных масс. Второе уравнение можно получить, выразив через эти массы площади каждой теплицы и используя их общую площадь.

Решаем. Пусть с 1 м^2 в теплице A собрали x кг огурцов, а с 1 м^2 в теплице B — y кг огурцов. Тогда из условия имеем уравнение $y - x = 4$.

Площадь теплицы равна отношению массы огурцов, собранных в теплице, к массе огурцов, собранных с 1 м^2 этой теплицы. Поэтому площадь теплицы A равна $\dfrac{1800}{x}$ м^2, а площадь теплицы B — $\dfrac{1320}{y}$ м^2. Из условия получаем второе уравнение: $\dfrac{1800}{x} + \dfrac{1320}{y} = 160$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 4, \\ \dfrac{1800}{x} + \dfrac{1320}{y} = 160, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y - x = 4, \\ \dfrac{45}{x} + \dfrac{33}{y} = 4. \end{cases}$$

В полученной системе первое уравнение линейное, второе — второй степени. Выразим из первого уравнения y через x и подставим полученное выражение во второе уравнение. Получим:

$$\begin{cases} y = x + 4, \\ \dfrac{45}{x} + \dfrac{33}{x+4} = 4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = x + 4, \\ \dfrac{2x^2 - 31x - 90}{x(x+4)} = 0. \end{cases}$$

Единственный положительный корень уравнения $2x^2 - 31x - 90 = 0$ равен 18, причём он не обращает в нуль знаменатель $x(x + 4)$. Тогда из первого уравнения получаем, что $y = 22$. Следовательно, с 1 м^2 теплицы A собрали 18 кг, а с 1 м^2 теплицы B — 22 кг огурцов.

Ответ. 18 кг и 22 кг.

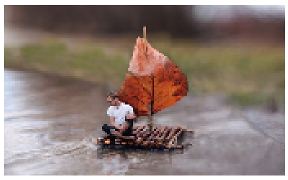
1. *Каковы площади теплиц A и B?*

2. *На сколько процентов сбор огурцов с 1 м^2 теплицы B превышает сбор огурцов с 1 м^2 теплицы A?*

3. *Каким был бы ответ в задаче, если бы общая площадь теплиц равнялась 145 м^2?*

Если система уравнений состоит из двух уравнений второй степени с двумя переменными, то найти её решения обычно бывает трудно. В отдельных случаях такие системы удаётся решить, используя метод подстановки или метод сложения. Иногда приходится применять частные приёмы.

Задача 3. От пристани А одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер опустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в А через 14 ч. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от А.



Анализируем. Введя обозначения для собственной скорости катера и скорости течения, можно будет выразить через них время, за которое катер проплыл 96 км по течению и вернулся обратно. Это позволит составить первое уравнение относительно введенных переменных.

Второе уравнение можно составить на основании того, что катер и плот до встречи плыли одно и то же время.

Решаем. Обозначим через x км/ч собственную скорость катера, а через y км/ч — скорость течения. Тогда скорость катера по течению будет равна $(x + y)$ км/ч, а против течения — $(x - y)$ км/ч. Катер преодолеет 96 км по течению за $\frac{96}{x+y}$ ч, а 96 км против течения — за $\frac{96}{x-y}$ ч. По условию, имеем первое уравнение: $\frac{96}{x+y} + \frac{96}{x-y} = 14$.

До встречи плот проплыл 24 км со скоростью течения, он затратил $\frac{24}{y}$ ч, а катер до встречи проплыл 96 км по течению и 96 – 24 = 72 км против течения. На путь до встречи с плотом он затратил $\left(\frac{96}{x+y}+\frac{72}{x-y}\right)$ ч. Так как катер и плот до встречи плыли одно и то же время, то имеем второе уравнение:

$$\frac{24}{y} = \frac{96}{x+y}+\frac{72}{x-y}.$$

Итак, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{x+y}+\frac{96}{x-y} = 14, \\ \frac{24}{y}=\frac{96}{x+y}+\frac{72}{x-y}. \end{cases}$$

Оба уравнения выше первой степени. После освобождения от знаменателей получим два уравнения второй степени.

Разделив обе части второго уравнения на 24 и освободившись от знаменателей, приведём его к следующему виду: $x^2 - y^2 = 4(xy - y^2) + 3(xy + y^2)$ или $x^2 - 7xy = 0$. Так как $x \neq 0$, то $x = 7y$. Подставив $x = 7y$ в первое уравнение, получим: $\frac{96}{8y}+\frac{96}{6y} = 14$.

Отсюда $y = 2$, а значит $x = 14$. Следовательно, собственная скорость катера равна 14 км/ч, а скорость течения — 2 км/ч.

Ответ. 14 км/ч и 2 км/ч.

1. *Чему равна скорость катера по течению?*

2. *На сколько часов быстрее 24 км проплыл катер по течению, чем плот?*

3. *Каким был бы ответ в задаче, если бы на путь туда и обратно катер затратил не 14 ч, а 17,6 ч, и встреча с плотом произошла не в 24 км, а в 16 км от пункта А?*

После выражения из однородного уравнения $x^2 - 7xy = 0$ переменной x через y мы фактически получили систему двух уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение линейное, а второе — выше первой степени.

При решении некоторых задач количество уравнений может оказаться меньше количества неизвестных. Как поступать, если такое произошло? Во-первых, нужно проверить, все ли условия использованы. Если нет, то, возможно, удастся составить ещё дополнительные уравнения.

Если же все условия использованы, то целесообразно проверить, требуется ли находить значения всех переменных. Иногда требуется найти не значения всех переменных, а некоторое соотношение между ними, например, сумму или отношение.

Если же окажется, что всё-таки нужно найти значения всех введенных переменных, то целесообразно проверить, нет ли каких-то явно не указанных условий, например, значения переменных являются целыми числами, или длинами сторон треугольника, а значит, удовлетворяют неравенству треугольника, и т. д.

Задача 4. Алёша отплыл из пункта А в пункт В вниз по реке на плоту, а его друг Денис на катере одновременно с ним также отплыл из В в А, причём он плыл с одной и той же собственной скоростью. Во сколько раз собственная скорость катера Дениса больше скорости течения, если, пока Алёша прибыл в пункт В, Денис успел доплыть до В, повернуть и прибыть в А, снова спуститься в В, опять прибыть в А и одновременно с Алёшей затем прибыть в В?

Анализируем. Как обычно в задачах на движение в движущейся среде, вводятся обозначения для собственной скорости объекта и скорости движения среды. Затем через них выражаются скорости движения объекта в одном и другом направлениях. По данным условия составляются уравнения. Заметим, что плот движется со скоростью течения.

Решаем. Обозначим собственную скорость катера Дениса через v км/ч, скорость течения через w км/ч, расстояние между пунктами А и В через l км. Тогда по течению катер Дениса плыл со скоростью $(v + w)$ км/ч, а против течения — со скоростью $(v - w)$ км/ч.

Алёша на плоту преодолел расстояние от А до В за время, равное $\frac{l}{w}$ ч, Денис от А до В плыл $\frac{l}{v+w}$ ч, а от В до А — $\frac{l}{v-w}$ ч. Так как Денис три раза плыл из А в В по течению и дважды из В в А против течения, то из условия имеем уравнение: $\frac{l}{w}=\frac{3l}{v+w}+\frac{2l}{v-w}$. Получили одно уравнение с тремя неизвестными. Сразу замечаем, что обе части уравнения можно разделить на $l \neq 0$. Придём к уравнению с двумя неизвестными. Данных для составления ещё одного уравнения нет. Но в задаче требуется найти не скорости v и w, а их отношение. Поэтому одного уравнения может оказаться достаточным.

Преобразуем полученное уравнение: $\frac{1}{w}=\frac{3}{v+w}+\frac{2}{v-w}$. Перенеся все члены уравнения в левую часть и приведя к наименьшему общему знаменателю, получим $\frac{v^2-w^2-3vw+3w^2-2vw-2w^2}{w(v+w)(v-w)}=0$. Приведя в числителе подобные члены и приравняв его к нулю, будем иметь: $v^2 - 5vw = 0$. Так как $v \neq 0$, то $v = 5w$. Знаменатель в нуль, очевидно, не обращается. Таким образом, собственная скорость катера Дениса в 5 раз больше скорости течения.

Ответ. В 5 раз.

1. *Выразите через v и w скорость сближения плота Алёши и катера Дениса при движении в противоположных направлениях.*

2. *Выразите через v и w скорость сближения плота Алёши и катера Дениса при движении в одном направлении.*

3. *Во сколько раз собственная скорость катера Дениса больше скорости течения, если, пока Алёша прибыл в пункт В, Денис, выехав одновременно с ним из пункта В, успел доплыть до В, повернуть и прибыть в А и одновременно с Алёшей затем прибыть в В?*

Проверь себя

1. Два равных прямоугольника сложили так, что они образовали букву Т и их общей частью является меньшая сторона одного из прямоугольников. Периметр образовавшейся фигуры равен 45 см, а площадь каждого из прямоугольников равна 27 см^2. Найдите большую сторону прямоугольников.

А. 12 см. **Б.** 10,5 см. **В.** 10 см. **Г.** 9 см.

2. Куплен товар двух сортов: первого на 1500 зедов, второго на 1200 зедов (зед — условная денежная единица). Второго сорта на 3 кг больше, чем первого и стоит он за килограмм на 45 зедов дешевле. Сколько куплено товара второго сорта?

А. 15 кг. **Б.** 12 кг. **В.** 10 кг. **Г.** 9 кг.

3. Купили 20 кг товара первого сорта на сумму 1500 зедов и 15 кг товара второго сорта на сумму 1200 зедов (зед — условная денежная единица). Цена товара какого сорта выше и на сколько?

А. Второго, на 5 зедов. **Б.** Первого, на 5 зедов.

В. Второго, на 10 зедов. **Г.** Первого, на 10 зедов.

4. Некто проехал в лодке по реке из города А в город В и обратно, употребив на это 10 часов. Расстояние между городами равно 20 км. Чему равна скорость течения реки, если 2 км против течения в лодке проплывают в такое же время, как 3 км по течению реки?

А. $\frac{5}{9}$ км/ч. **Б.** $\frac{5}{6}$ км/ч. **В.** $\frac{10}{9}$ км/ч. **Г.** $\frac{7}{6}$ км/ч.

5. Алёша отплыл из пункта А в пункт В вниз по реке на плоту, а его друг Денис на катере одновременно с ним также отплыл из В в А, причём он плыл с одной и той же собственной скоростью. Выразите через скорость течения w и собственную скорость катера v время, через которое впервые после отплытия из А встретятся плот и катер. Расстояние между А и В равно l.

А. $\frac{l}{v-w}$. **Б.** $\frac{l}{v+2w}$. **В.** $\frac{l}{v}$. **Г.** $\frac{l}{v+w}$.

Реши сам

1. Имеется 84 фишки. Можно ли их выложить на столе рядами так, чтобы рядов было на 5 больше, чем фишек в одном ряду?

2. Бассейн, содержащий 30 м^3 воды, сначала был опорожнен, а затем заполнен водой до прежнего уровня. На всё это потребовалось 8 часов. Сколько времени шло заполнение бассейна, если при заполнении насос перекачивает в час на 4 м^3 воды меньше, чем при опорожнении?

3. В некотором хозяйстве имеются две теплицы A и B, причём площадь теплицы А на 40 м^2 больше площади теплицы В. В теплице A собрали 1800 кг огурцов, а в теплице B —1320 кг, причём в теплице B с 1 м^2 собрали на 4 кг огурцов больше, чем с 1 м^2 в теплице A. Какова площадь той и другой теплицы?

4. Найдите отношение скорости течения к собственной скорости катера, если плот преодолевает 3 км за то же время, что катер проплывает 12 км по течению реки и 4 км против течения.

5. Алёша отплыл из пункта А в пункт В вниз по реке на плоту, а его друг Денис на катере одновременно с ним также отплыл из В в А, причём он плыл с одной и той же собственной скоростью. Выразите через скорость течения w и собственную скорость катера v время, через которое впервые после отплытия из А катер догонит плот. Расстояние между А и В равно l.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Обратите внимание на то, что экскаватор В затратил больше времени, чем экскаватор А.

2. В. Найдите производительности труда каждого экскаватора и их совместную производительность.

3. А. Найдите двумя способами совместную производительность труда двух экскаваторов и приравняйте их.

4. Г. Обратите внимание на то, что урожайность некоторой культуры — это среднее количество этой культуры, собираемой с единицы площади поля, занятого этой культурой.

5. В. Воспользуйтесь тем, что общий сбор пшеницы с некоторого участка равен произведению урожайности пшеницы на этом участке на его площадь.

6. А. Воспользуйтесь тем, что скорость движения катера по течению равна сумме его собственной скорости и скорости течения, а скорость движения катера против течения равна разности его собственной скорости и скорости течения.

7. Г. Воспользуйтесь тем, что поезд из А затратил на прохождение половины расстояния между А и В на 2 ч больше времени, чем поезд из В.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. За 12 дней. **2.** На 50%. **3.** 5 тысяч кирпичей и 6 тысяч кирпичей.

Задача 2. 1. 100 м^2 и 60 м^2. **2.** На $22\frac{2}{9}$%. **3.** 20 кг и 24 кг.

Задача 3. 1. 16 км/ч. **2.** На 10,5 ч. **3.** 11 км/ч и 1 км/ч.

Задача 4. 1. v км/ч. **2.** $(v + 2w)$ км/ч. **3.** В 3 раза.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
Г	А	А	Б	В

Ответы к заданиям «Реши сам»

1. Можно. Введите обозначения для количества рядов и количества фишек в каждом ряду. Затем составьте систему уравнений для этих переменных.

2. 4,5 ч. Введите обозначение для искомой величины и выразите через неё скорости опорожнения и заполнения бассейна.

3. 100 м^2 и 60 м^2. Введите обозначения для значений искомых величин.

4. 1:5. Выразите скорости катера по течению и против течения через его собственную скорость и скорость течения.

5. $\dfrac{lw}{v(v-w)}$ *ч*. Выразите через v и w время, за которое катер прибудет в В, затем в А, расстояние между катером и плотом в момент, когда впервые катер начал догонять плот, а также скорости сближения катера и плота при движении в противоположных направлениях и в одном направлении.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Выполнение заданий для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	5 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	7 задач	6 задач
«отлично»	Решено не менее	9 задач	8 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа запишите букву «Д»

1. Площадь прямоугольного листа фанеры равна 224 см^2. Отрезав полоски с двух смежных сторон шириной 4 см и 6 см, получили квадратную крышку для ящика. Какому из приведенных уравнений удовлетворяет сторона x полученной крышки?

А. $x^2 + 10x + 200 = 0$. **Б.** $x^2 + 10x - 248 = 0$.

В. $x^2 + 2x - 200 = 0$. **Г**. $x^2 + 10x - 200 = 0$.

2. Известно, что если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v м/с, то высота, на которой оно окажется через t с, вычисляется приближённо по формуле $h = vt - 5t^2$. На какой высоте примерно окажется тело через 2 секунды, если его начальная скорость равна 12 м/с? Выберите наиболее точное значение.

А. 4 м. **Б**. 7 м. **В**. 17 м. **Г**. 44 м.

3. Население города за два года увеличилось с 40 000 человек до 44 100 человек. На сколько процентов увеличилось население за два года?

А. На 12,5%. **Б**. На 12%. **В**. На 10,5%. **Г**. На 10,25%.

4. Шесть одноклассников перед каникулами обменялись сувенирами. Сколько сувениров понадобилось для этого?

А. 36. **Б**. 30. **В**. 25. **Г**. 15.

5. При закладке парка деревья были посажены в несколько параллельных рядов по 24 дерева в ряд. Ураган уничтожил ряд деревьев, посадили новые деревья так, что общее количество деревьев сохранилось, но количество рядов стало на 16 меньше прежнего, а количество деревьев в каждом ряду стало на 32 больше количества новых рядов. Сколько деревьев в парке?

А. 768. **Б**. 1012. **В**. 1280. **Г**. 1792.

6. Фирма получила заказ сшить 60 костюмов. Сначала планировалось сшить по 4 костюма за день. Но в связи с выходом из отпуска нескольких мастеров шили каждый день больше на одно и то же количество костюмов и выполнили заказ на 3 дня раньше срока. Сколько костюмов шили ежедневно?

А. 5. **Б**. 6. **В**. 8. **Г**. 12.

7. Фирма продала на одну и ту же сумму c зедов a кг продукции X и $(a + 2)$ кг продукции Y (зед — условная денежная единица). Цена 1 кг какого вида продукции больше и на сколько?

А. X, на $\frac{c}{a+2} - \frac{c}{a}$ зедов. **Б**. X, на $\frac{c}{a} - \frac{c}{a+2}$ зедов.

В. Y, на $\frac{c}{a}-\frac{c}{a+2}$ зедов. **Г**. Y, на $\frac{c}{a+2}-\frac{c}{a}$ зедов.

8. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу, и каждый пришёл туда, откуда вышел другой, причём первый пришёл через 6 ч 40 мин, второй — через 1 ч 40 мин после их встречи. Во сколько раз путь, пройденный первым до встречи, меньше пути, пройденного вторым до встречи?

А. В 1,5 раза. **Б**. В 2 раза. **В**. В 2,5 раза. **Г**. Определить невозможно.

9. Скорость движения катера по течению реки во столько раз больше его скорости против течения, во сколько раз его скорость движения против течения больше скорости течения. Найдите отношение собственной скорости катера к скорости течения.

А. 3. **Б.** 3,25. **В.** 3,5. **Г.** 3,75.

10. Два торговца привезли на рынок вместе 1000 яиц. Продав яйца по разной цене, оба выручили одинаковые суммы. Если бы первый продал столько яиц, сколько второй, то он бы выручил 720 зедов; если бы второй продал столько яиц, сколько первый, то он выручил бы 320 зедов (зед — условная денежная единица). По какой цене за десяток яиц продавал яйца первый торговец?

А. 8 зедов. **Б.** 9 зедов. **В.** 10 зедов. **Г.** 12 зедов.

11. Один рабочий выполняет некоторую работу за 4 часа, другой — такую же работу за 6 часов. За какое время они могут выполнить эту работу, работая вместе?

А. За 2 ч. **Б**. За 2 ч 12 мин. **В**. За 2 ч 24 мин. **Г**. За 2 ч 36 мин.

12. Участок земли прямоугольной формы площадью 6 соток огорожен забором, длина которого 100 м. Какому значению из приведенных в ответах может равняться разность длин сторон забора?

А. 20 м. **Б**. 15 м. **В**. 12 м. **Г**. 10 м.

13. Пароход прошёл 100 км по течению реки и 64 км против течения за 9 ч. В другой раз за это же время он прошёл 80 км против течения и вернулся обратно. Найдите отношение скорости парохода в стоячей воде к скорости течения.

А. 4:1. **Б**. 5:1. **В**. 9:2. **Г**. 9:1.

14. Алёша неподвижно стоял на движущемся эскалаторе, а его друг Денис бегал по этому эскалатору с одной и той же скоростью. Во сколько раз собственная скорость Дениса больше скорости эскалатора, если по поднимающемуся эскалатору, пока Алёша поднялся вверх, Денис успел подняться, спуститься и ещё раз подняться и одновременно с Алёшей сойти с эскалатора?

А. В 5 раз. **Б**. В 4 раза. **В**. В 3 раза. **Г**. В 2 раза.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части раздела. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. Площадь прямоугольного листа фанеры размерами 50 см×40 см уменьшили на 800 см^2, отрезав полоски одинаковой ширины с двух смежных сторон. Какова ширина полоски?

2. Тело брошено с земли вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Через сколько примерно секунд оно окажется на земле, если высота h м, на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через t с, находится по формуле $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$, где v_0 — начальная скорость, м/с; g — ускорение свободного падения, приближённо равное 10 м/с^2?

3. Вкладчик внёс 5000 зедов на счёт, по которому вклад ежегодно увеличивается на одно и то же количество процентов (зед — условная денежная единица).

Через два года на этом вкладе было 6050 зедов. Сколько процентов годовых начислялось ежегодно?

4. На межшкольном шашечном турнире было сыграно 56 партий, причём каждый игрок играл с каждым две партии (белыми и чёрными). Сколько школьников участвовало в турнире?

5. Подразделение солдат прибыло в караул строем по 6 человек в шеренге. На инструктаже состав подразделения перестроили так, что количество шеренг стало на 4 меньше прежнего, а количество солдат в каждой шеренге стало на 8 больше количества новых шеренг. Сколько солдат прибыло в караул?

6. Петя планировал потратить 800 зедов (зед — условная денежная единица) за определённый срок, расходуя ежедневно одинаковую сумму. Однако расходовал он ежедневно в среднем на 50 зедов больше, чем планировал. Поэтому деньги были израсходованы на 8 дней раньше. На сколько дней хватило Пете указанных денег?

7. Стоимость партии товара первого сорта составляет 450 зедов, в второго сорта — 200 зедов (зед — условная денежная единица). Цена 1 кг товара первого сорта на 1 зед больше цены 1 кг товара второго сорта. Какова масса товара каждого сорта, если общая масса товара равна 140 кг?

8. Автомобиль и мотоцикл выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A в B, расстояние между которыми 210 км. После встречи мотоциклисту приходится быть в пути ещё 2 часа, а автомобилисту — $\frac{9}{8}$ часа. Сколько километров проехал до встречи мотоциклист? Какова скорость автомобиля?

9. Найдите отношение скорости катера по течению к скорости течения, если он преодолевает 18 км по озеру за то же время, за какое он проплывает 6 км по течению реки и 7 км против течения.

10. На рынок прибыли две различные цистерны А и В с молоком общей ёмкостью 900 л. За продажу молока из цистерны А была выручена сумма, на 1000 зедов превосходящая сумму, вырученную за продажу молока из цистерны В (зед — условная денежная единица). Если бы в цистерне А было столько молока, сколько в цистерне В, то за его продажу выручили бы 4000 зедов. А если бы в цистерне В было бы столько молока, сколько в А, то за его продажу выручили бы 5000 зедов. По какой цене за литр продавали молоко из каждой цистерны?

11. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу в 12 ч. Если бы сначала один сделал половину этой работы, а затем другой остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог выполнить эту работу каждый в отдельности?

12. Часть бригады, состоящей из 8 человек, выполнила заказ и заработанную сумму денег разделила поровну между работавшими. Если бы работало на 3 человека больше, то каждый получил бы на 50 зедов меньше (зед — условная денежная единица). Если же заработанную сумму увеличить на 600 зедов, то каждый работавший получил бы 300 зедов. Найдите заработанную сумму и количество работавших.

13. По двум взаимно перпендикулярным шоссе в направлении их пересечения одновременно выехали два велосипедиста. Первый двигался со скоростью 12 км/ч, а второй — 16 км/ч. В момент выезда расстояние между ними составляло 100 км. Через 2 ч после отправления в путь расстояние между ними равнялось 60 км. На каком расстоянии от точки пересечения шоссе находился каждый велосипедист в момент выезда?

14. Алёша неподвижно стоял на движущемся эскалаторе, а его друг Денис бегал по этому эскалатору с одной и той же скоростью. Во сколько раз собственная скорость Дениса больше скорости эскалатора, если по спускающемуся эскалатору, пока Алёша спускался вниз, Денис успел спуститься, подняться и ещё раз спуститься и одновременно с Алёшей сойти с эскалатора?

Указания к задачам основного задания

1. Обозначьте какой-нибудь буквой искомую ширину полосок и составьте по условию задачи уравнение, выразив площадь оставшейся части листа через эту букву.

2. Подставьте значения h, v_0, g в формулу, данную в условии, и воспользуйтесь тем, что в начале движения и при падении тела на землю высота тела равна нулю.

3. Введите обозначение для годового процента и выразите через него размер вклада сначала через год, а затем ещё через год, составьте уравнение, пользуясь условием.

4. Выразите количество сыгранных партий через количество школьников — участников турнира, учитывая, что каждый сыграл белыми с каждым, составьте уравнение, пользуясь условием.

5. Введите обозначение для количества шеренг и выразите через него общее количество солдат, прибывших в караул, двумя способами.

6. Введите обозначение для планового срока расхода денег, выразите через него ежедневные плановый и реальный расходы денег.

7. Можно ввести обозначения либо для цены 1 кг товара, либо для массы товара одного сорта и, пользуясь условием, сначала выразить значение соответствующей величины для товара другого сорта, а затем составить уравнение.

8. Введите обозначение для расстояния, которое проехал до встречи мотоциклист, выразите через него скорости движения автомобиля и мотоцикла до встречи, а также после встречи.

9. Введите обозначения для скорости движения катера по течению и скорости течения, выразите через них скорость движения катера против течения и его собственную скорость. Составьте уравнение, пользуясь условием.

10. Введите обозначение для ёмкости молока в одной из цистерн, выразите через него ёмкость молока в другой цистерне, цену 1 л молока в каждой цистерне и стоимость молока в каждой цистерне.

11. Введите обозначения для искомых значений времени, за которые каждый рабочий может выполнить работу, работая самостоятельно.

12. Введите обозначения для искомых величин, выразите через них реально полученную сумму каждым рабочим и сумму, которую мог бы получить каждый рабочий при предположениях, приведенных в условии.

13. Введите обозначения для искомых расстояний, выразите через них расстояния от каждого велосипедиста до точки пересечения шоссе через 2 часа после начала движения, составьте уравнения, пользуясь условием и теоремой Пифагора.

14. Введите обозначения для длины эскалатора, для скорости движения эскалатора и собственной скорости Дениса, выразите через них время спуска эскалатора, спуска и подъёма Дениса на спускающемся эскалаторе.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части раздела. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. В прямоугольном листе жести со сторонами 12 см и 8 см требуется вырезать прямоугольное отверстие площадью 12 см^2 так, чтобы его края были на одинаковом расстоянии от краёв листа. Чему равно это расстояние?

2. Магазин покупает на оптовом складе партию книг в 500 штук по цене 40 зедов за книгу (зед — условная денежная единица). Увеличение партии на каждые 50 книг приводит к снижению цены одной книги на 2 зеда. Эта скидка сохраняется только в том случае, если общая партия не превосходит 750 книг. Магазин дополнительно заплатил ещё 2100 зедов за книги, купленные сверх 500. На сколько книг увеличилась закупаемая партия?

3. Два брата в возрасте 15 и 17 лет получили в наследство некоторую сумму денег. По завещанию, эти деньги были разделены в отношении 3:4, положены в банк и выданы по достижению 18 лет каждому из братьев. Под какой примерно годовой процент положены эти деньги в банк, если братья получили примерно одинаковые суммы?

4. Из шахматного турнира двое участников выбыли, причём один из них сыграл 10 партий, а второй только одну. Поэтому в турнире было сыграно всего 55 партий. Планировалось, что каждый участник сыграет с каждым по одному разу.

1) Играли ли выбывшие участники между собой?
2) Сколько было участников первоначально?

5. Маша, играя с кубиками, выстроила из них параллелепипед по 6 кубиков в длину и 2 кубика в высоту. Потом она разобрала это сооружение и сложила кубики в один слой по высоте в виде прямоугольника так, что количество рядов стало на 8 меньше количества кубиков по ширине исходного параллелепипеда, а количество кубиков в каждом ряду на 16 больше нового количества рядов. Сколько кубиков было у Маши?

6. Работая в фирме «Книга почтой», Николай получил задание упаковать за определённое время 60 бандеролей. В течение первых двух часов он упаковывал на 2 бандероли меньше, чем предполагалось по норме, а затем стал упаковывать на 4 бандероли в час больше нормы. В результате уже за час до срока ему оставалось упаковать 2 бандероли. На какое время было рассчитано задание?

7. Некоторый товар был куплен осенью и за него было уплачено 81 000 зедов (зед — условная денежная единица). Килограмм этого товара осенью на 10 зедов дешевле, чем весной, и поэтому на те же 81 000 зедов весной было куплено на 90 кг меньше. Сколько стоит 1 кг этого товара весной и сколько его было куплено осенью?

8. Два автомобиля одновременно выехали навстречу друг другу и каждый приехал туда, откуда выехал другой, причём первый приехал через 1,5 часа, второй — через $2\frac{2}{3}$ часа после их встречи. Сколько часов ехал каждый автомобиль?

9. Связной, выехав из начала движущейся колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся к началу. Известно, что отношение скорости перемещения связного против движения колонны к скорости его перемещения по направлению движения колонны равно отношению скорости его перемещения по направлению движения колонны к скорости колонны. Найдите отношение собственной скорости связного к скорости движения колонны.

10. Из двух хозяйств A и B привезли на рынок яблоки общей массой a кг. Продавали яблоки по разным ценам. Все привезенные яблоки были проданы. Хозяйство A выручило на p зедов больше, чем хозяйство B (зед — условная денежная единица). Если бы хозяйство A продало столько, сколько B, то выручило бы m зедов, а если бы хозяйство B продало столько, сколько A, то выручило бы n зедов. Сколько яблок привезло на рынок каждое хозяйство?

11. Двум рабочим было поручено выполнить некоторую работу. Второй из них приступил к работе на час позднее первого. Через 3 часа после того, как первый начал работу, им оставалось выполнить ещё $\frac{9}{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый рабочий выполнил половину всей работы. Во сколько часов каждый из них в отдельности мог бы выполнить всю работу?

12. Две бригады, из которых вторая начинает работать на t дней позже первой, закончили покос в m дней, считая от момента начала работы второй. Если бы эта работа была поручена каждой бригаде отдельно, то первой для её выполнения понадобилось бы на $2t$ дней больше, чем второй. Во сколько дней каждая бригада, работая отдельно, может выполнить эту работу?

13. Два туриста вышли из пункта А в пункт В одновременно. Первый турист проходит каждый километр на 5 мин быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в А и, пробыв там 10 мин. снова пошёл в В. Каково расстояние между А и В, если известно, что второй турист прошёл его за 2,5 ч и оба туриста пришли в В одновременно? Каковы скорости туристов?

14. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились в 30 км от A. Прибыв в A и B, они сразу же повернули обратно. Вторая встреча произошла в 14 км от B. Найдите расстояние между A и B.

Указания к задачам дополнительного задания

1. Введите обозначение для расстояния краёв отверстия от краёв листа, выразите через него и данные из условия площадь отверстия.

2. Введите обозначение для количества партий по 50 книг, на которые увеличилась покупка магазина, выразите через него количество купленных книг и новую цену одной книги.

3. Введите обозначения для искомого годового процента и для полученной в наследство суммы, выразите через них, воспользовавшись формулой сложных процентов, суммы, полученные братьями по достижении 18-летнего возраста.

4. Рассмотрите два случая: выбывшие участники играли между собой и не играли между собой. Для каждого случая выразите количество сыгранных партий через первоначальное количество участников турнира.

5. Введите обозначение для количества кубиков по ширине параллелепипеда и выразите через него двумя способами количество кубиков у Маши.

6. Введите обозначение для искомого времени, выразите через него количество бандеролей, упакованных Николаем за разные промежутки времени.

7. Введите обозначения для цены товара осенью и воспользуйтесь зависимостью между стоимостью, ценой и количеством приобретенного товара.

8. Введите обозначения для скоростей автомобилей и времени, которое они двигались до встречи.

9. Воспользуйтесь решением задачи 4 из блока «Уравнения, приводящиеся к квадратным».

10. Введите обозначение для массы яблок, привезенных одним из хозяйств, выразите через него массу яблок, привезенных другим хозяйством, цену 1 кг яблок в каждом хозяйстве и стоимость яблок, привезенных каждым хозяйством.

11. Введите обозначения для искомых значений времени, за которое каждый рабочий, работая самостоятельно, может выполнить всю работу. Выразите через эти обозначения время, за которое каждый из них выполняет половину работы, а также часть работы, которую они, работая вместе, выполнили к моменту, когда первый проработал 3 часа.

12. Введите обозначение для объёма всей работы, выразите через него и искомые величины производительности каждого из рабочих.

13. Введите обозначения для скоростей туристов, выразите через них время, за которое каждый из них проходит 1 км, а также время, которое каждый из туристов был в пути.

14. Введите обозначения для собственной скорости лодки, скорости течения и расстояния АВ. Выразите через них время, которое плыли плот и лодка до встречи и время, за которое они преодолели весь путь.

Задачи для исследования

1. Исследуйте решение квадратного уравнения $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$ с параметром a, в частности, следующих уравнений, приводимых к квадратным:

а) $x(ax - 1) = a(a^2 - 1)$; б) $\frac{x}{a} = \frac{a^2-1}{ax-1}$; в) $x - 2a = (3x + 2)(ax + 1)$; г) $\frac{x-2a}{3x+2} = ax+1$.

2. Что произойдёт с корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если поменять: а) местами коэффициенты a и с; б) знак коэффициента b?

3. Исследуйте корни квадратного уравнения $ax^2 \pm (a^2 + 1)x + a = 0$.

4. Какой вид имеет квадратное уравнение, корни которого:

а) являются взаимно обратными числами;

б) имеют противоположные знаки, а их модули являются взаимно обратными числами?

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Квадратные уравнения и их применения

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие