Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Составление и преобразование буквенных выражений

$$a^2 - в^2 = (a - в)(a + в)$$
$$(a - в)^2 = a^2 - 2aв + в^2$$
$$(a + в)^2 = a^2 + 2aв + в^2$$
$$a^3 + в^3 = (a + в)(a^2 - aв + в^2)$$
$$a^3 - в^3 = (a - в)(a^2 + aв + в^2)$$

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Составление и преобразование буквенных выражений. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9 классов. - 44 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017). Ее цель — развитие у обучающихся умений и навыков применять математику для решения жизненных проблем, совершенствование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после решения каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения учащимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Настоящее пособие посвящено составлению и преобразованию буквенных выражений, которые являются составной частью математических моделей многих прикладных задач. Поэтому умение оперировать с буквенными выражениями необходимо для успешного владения методом математического моделирования.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и нахождения решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Они предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы их решения.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;
- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;
- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются знаком

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого модуля, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение

каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что для них не приводятся ответы, из которых нужно выбрать правильный.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в модуле, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и, пользуясь ответами к его заданиям, приведенными в конце раздела, оцените свою готовность к выполнению основного задания, проведите анализ допущенных ошибок.

Обязательно выполните основное задание и сверьте свои ответы с ответами, приведенными в конце раздела, проведите анализ допущенных ошибок, пользуясь первой частью раздела. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части раздела.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы – выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Составление и преобразование буквенных выражений

Составной частью решения многих прикладных задач является составление буквенных выражений, а затем соотношений для таких выражений. В результате получают функции, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств с одним или несколькими переменными.

Применение буквенных выражений в решении прикладных задач основано на том, что эти выражения можно преобразовывать, упрощая уравнения и неравенства, вычислять значения выражений.

Умения оперировать с буквенными выражениями нужны при изучении физики и некоторых других школьных предметов. Они необходимы для успешного владения методом математического моделирования.

1. Нахождение значений искомой величины

В этом блоке мы рассмотрим, как буквенные выражения помогают находить и сравнивать значения величин.

Готовимся к решению задач

1. Одна сторона прямоугольника равна 3,6 см, смежная ей сторона — x см. Выразите площадь этого прямоугольника через x.

А. $3{,}6 + x$. **Б.** $2(3{,}6 + x)$. **В.** $\frac{x}{3{,}6}$. **Г.** $3{,}6 \cdot x$.

2. Один рабочий изготовляет за день a деталей, а другой — b деталей. Сколько деталей они изготовят за 5 дней совместной работы?

А. $5ab$. **Б.** $5a + 5b$. **В.** $a + b + 5$. **Г.** $5a + b$.

3. На дне рождения на столе было две коробки конфет. В одной коробке x конфет, в другой в 3 раза больше таких же конфет. Хозяева и гости съели удвоенное количество конфет, содержащихся в первой коробке. Сколько конфет из этих коробок осталось?

А. x. **Б.** $2x$. **В.** $3x$. **Г.** Определить невозможно.

4. Взвод был построен так, что количество шеренг равнялось количеству воинов в шеренге. Сколько воинов в строю, состоящем из a шеренг?

А. a. **Б.** $2a$. **В.** a^2. **Г.** $2a^2$.

5. Взвод вначале был построен так, что количество шеренг равнялось количеству воинов в шеренге. Затем количество шеренг уменьшили на 2, но в каждую шеренгу добавили двух воинов. Сколько воинов стало в строю, первоначально состоявшем из a шеренг?

А. $(a-2)^2$. **Б.** $(a+2)^2$. **В.** a^2-4. **Г.** a^2+4.

6. Выразите разность двух смежных углов через меньший угол x.

А. $180° - x$. **Б.** $180° - 2x$. **В.** $2x - 180°$. **Г.** $x - 180°$.

7. Учитель математики раздавал группе из n учащихся класса рабочие тетради. Выразите через n количество рабочих тетрадей, которое он раздавал, если: а) когда он раздавал им по 4 тетради, 3 тетради оказались «лишними»; б) когда он раздавал по 5 тетрадей, 2-х тетрадей не хватило?

8. При каких целых n значение дроби $\dfrac{15}{2n+1}$ является натуральным числом?

9. При каких натуральных значениях n можно сократить дробь $\dfrac{7}{n+2}$?

10. При каких натуральных значениях n можно сократить дробь $\dfrac{2n+1}{n-1}$?

Решение задач

Иногда требуется найти, какую часть одна величина составляет от другой. Если удаётся это искомое значение представить в виде частного двух буквенных выражений и после преобразований полученное буквенное выражение превратить в числовое, то мы получаем искомое значение.

Аналогично, иногда требуется найти, на сколько значение одной величины отличается от значения другой. Если удаётся это искомое значение представить в виде разности буквенных выражений, причём после преобразований это буквенное выражение превращается в числовое, то мы получаем искомое значение.

Задача 1. Крыша гаража покрыта 8 одинаковыми прямоугольными листами кровли, уложенными в 8 рядов (снизу доверху). Каждый следующий ряд покрывает предыдущий на 10% своей ширины. Каков примерно процент крыши покрыт дважды?

Анализируем. Прежде всего, нужно построить математическую модель покрытия крыши гаража 8-ю листами кровли, соответствующую условию задачи. Естественно крышу гаража изображать прямоугольником, а листы кровли — равными прямоугольниками, покрывающими большой прямоугольник, как показано на рис. 1. При этом двойное покрытие крыши изображено совокупностью равных прямоугольников, закрашенных на рис. 1.

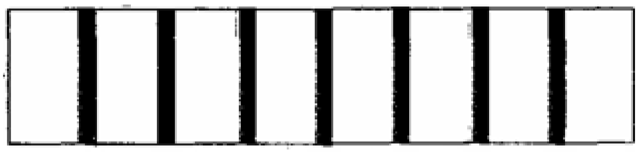


Рис. 1

Требуется найти процентное отношение суммы площадей закрашенных прямоугольников к площади большого прямоугольника, изображающего крышу.

Решаем. Изобразим покрытие крыши гаража 8-ю листами кровли, как показано на рис. 2.

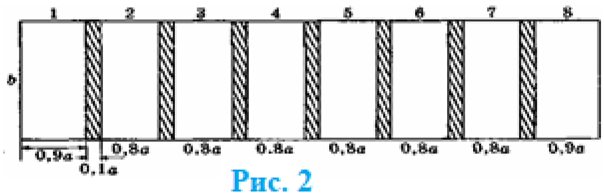


Рис. 2

Здесь через a и b обозначены ширина и длина кровельного листа соответственно. Ширина каждого заштрихованного прямоугольника равна, по условию, $0{,}1a$.

Поверхность крыши состоит из трёх составных частей: семи прямоугольных частей, покрытых дважды, размеры каждого из них $b\times0{,}1a$; из двух прямоугольных участков размерами $b\times0{,}9a$ каждый (два крайних прямоугольника), 6 прямоугольных участков размерами $b\times0{,}8a$ каждый (шесть прямоугольников между крайними).

Площади составных частей крыши соответственно равны: $7\cdot0{,}1a\cdot b$, $2\cdot b\cdot0{,}9a$, $6\cdot b\cdot0{,}8a$. Площадь всей крыши равна сумме $7\cdot0{,}1a\cdot b + 2\cdot b\cdot0{,}9a +$

$6 \cdot b \cdot 0{,}8a$. Представив одночлены в стандартной форме, получим, что площадь крыши равна $0{,}7ab + 1{,}8ab + 4{,}8ab$. Приведя подобные члены, будем иметь, что она равна $7{,}3ab$.

В задаче нужно найти процентное отношение площади части крыши, покрытой дважды, к площади всей крыши, то есть значение выражения $\frac{0{,}7ab}{7{,}3ab} \cdot 100\%$. После сокращения на ab получим, что это отношение равно $\frac{70}{7{,}3}$ или $\frac{700}{73} \approx 9{,}6\%$. Итак, дважды покрыто примерно 10% крыши.

Ответ. $\approx$ 10%.

1. *Какой примерно процент площади крыши покрыт одним слоем кровли?*

2. *Чему примерно равна площадь крыши, если площадь её части, покрытой дважды, равна 2 м^2?*

3. *Чему равна площадь крыши, если площадь одного кровельного листа равна 2,4 м^2?*

Площадь прямоугольника равна произведению длин его двух смежных сторон.

Площадь фигуры, разделённой на несколько фигур, общей частью которых являются только их границы, равна сумме площадей её частей.

Чтобы найти, сколько процентов составляет число *b* от числа *a*, нужно отношение $\frac{b}{a}$ умножить на 100%.

В следующей задаче наглядно иллюстрируется использование буквенных обозначений.

Задача 2. Объяснить, почему удаётся всегда следующий фокус.

Задумайте натуральное число. Прибавьте к нему 3. Умножьте результат на 2. Отнимите задуманное число. Отнимите 4. Отнимите ещё раз задуманное число. У вас получилось 2.

Анализируем. Введём обозначение для задуманного числа. Выполним все указанные действия. Выясним, всегда ли конечный результат будет равен 2.

Решаем. Все операции с задуманным числом представлены в следующей таблице.

Задумайте число	x
Прибавьте к нему 3	$x + 3$
Умножьте результат на 2	$2\cdot(x + 3) = 2x + 6$
Отнимите задуманное число	$(2x + 6) – x = x + 6$
Отнимите 4	$(x + 6) – 4 = x + 2$
Отнимите ещё раз задуманное число	$(x + 2) – x = 2$
У вас получилось 2	

1. *Каков будет окончательный результат, если вместо прибавления к задуманному числу числа 3 к нему прибавить число 4?*

2. *Сколько раз нужно было бы вычитать задуманное число, если бы, вместо умножения на 2 результата прибавления к задуманному числа 3, его умножили на 3?*

3. *А могло ли задуманное число быть произвольным рациональным?*

Числа, переменные, их степени и произведения называют одночленами.

Если одночлен содержит только один числовой множитель, причём поставленный на первое место, и степени различных переменных, то такой одночлен называют одночленом стандартного вида.

Многочленом называют сумму одночленов.

Многочлен, являющийся суммой одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных слагаемых, называют многочленом стандартного вида.

Для нахождения значения искомого выражения иногда наряду с рассмотренными приёмами приходится оценивать значение буквенного выражения.

Задача 3. Организовывали поездку на автобусах футбольных болельщиков на матч в другой город. Планировалось, в каждом автобусе разместить столько лиц, сколько всего было автобусов. Десять автобусов и некоторое количество болельщиков по различным причинам не прибыли к моменту отъезда. Поэтому в каждый автобус разместили дополнительно по 10 лиц.

1) Сколько болельщиков не явилось?

2) Сколько болельщиков поехали на матч, если на футбольные матчи такого класса обычно выделяют для иногородних болельщиков 3000 билетов и планировалось, что в этой поездке примет участие как можно больше болельщиков?

Анализируем. Для решения задачи нужно выразить количество болельщиков, которые планировали поехать на матч, и количество болельщиков, поехавших на матч, через количество заказанных автобусов. Разность этих количеств является ответом на задание 1).

С помощью полученных выражений подбирается число, удовлетворяющее условиям задания и равное количеству поехавших болельщиков.

Решаем. Пусть планировалось использовать x автобусов, в каждом из них разместить x болельщиков, всего планировалась поездка $x \cdot x = x^2$ болельщиков. Так как 10 автобусов не прибыли к моменту отъезда, то фактически автобусов было $x - 10$, и в каждом из них размещалось $x + 10$ болельщиков, поскольку в каждый автобус разместили дополнительно по 10 болельщиков.

1) Всего на матч поехало $(x - 10)(x + 10) = (x^2 - 100)$ человек. Следовательно, не появилось $x^2 - (x^2 - 100) = 100$ болельщиков.

2) Планировалась на матч поездка количества болельщиков, равного квадрату натурального числа. Так как 3000 меньше $55^2 = 3025$ и предусматривалось, что в этой поездке примет участие как можно больше болельщиков, то планировалась поездка на матч в количестве, равном ближайшему к 3000 квадрату натурального числа, то есть числу $54^2 = 2916$. Из них 100 человек не яви-

лись к моменту отъезда. Следовательно, на матч поехало 2916 – 100 = 2816 болельщиков.

Ответ. 2816 болельщиков.

1. *Чему равнялось бы количество неявившихся болельщиков, если бы к моменту отъезда не прибыло 9 автобусов, и в каждый автобус разместили дополнительно по 9 болельщиков?*

2. *Сколько автобусов было запланировано для поездки на матч?*

3. *Сколько болельщиков поехало бы на матч, если бы к моменту отъезда не прибыло 7 автобусов, и в каждый автобус разместили дополнительно по 6 болельщиков, и если бы на этот матч было выделено 2500 билетов?*

Степенью числа а с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен а. Степенью числа а с показателем 1 называется само число а.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый одночлен одного многочлена умножить на каждый одночлен другого многочлена и полученные произведения сложить.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений: $(a - b)\cdot(a + b) = a^2 - b^2$**.**

Выражения, которые помимо действий сложения, вычитания и умножения, содержат деление на выражение с переменными, называют дробными выражениями.

При изучении обыкновенных дробей часто приходилось неправильную дробь обращать в смешанное число, то есть выделять целую часть этой дроби и находить соответствующую правильную дробь. Аналогичная операция бывает полезной при работе с дробными выражениями.

Задача 4. Группа туристов должна взять продукты, расфасованные в одинаковые пакеты, так, чтобы каждый нёс одинаковое количество пакетов. Сначала дали каждому по 12 пакетов, но один пакет оказался «лишним». Но когда руководителя группы осво-

бодили от обязанности нести продукты, другие получили пакеты поровну. Сколько было туристов и сколько пакетов, если каждый может нести не более чем 15 пакетов?

Анализируем. Если ввести обозначения для искомых величин — количества туристов и количества пакетов —, то по условию задачи можно составить два выражения для количества пакетов. Приравняв их, получим уравнение, связывающее количество пакетов и количество туристов. Из этого уравнения можно найти значения искомых величин, воспользовавшись тем, что количества пакетов и туристов выражаются целыми числами.

Решаем. Обозначим через k количество туристов, а количество пакетов на одного туриста в конечном итоге через n. Так как пакеты несли $k - 1$ туристов, причём все туристы несли по одинаковому количеству пакетов, то всего было $(k - 1)\cdot n$ пакетов. С другой стороны, количество пакетов равняется $12k + 1$ (по условию, если каждому туристу дать по 12 пакетов, но один пакет окажется «лишним»). Отсюда $(k - 1)\cdot n = 12k + 1$, $n = \frac{12k+1}{k-1}$, так как $k \neq 1$. Получено одно уравнение с двумя переменными. Нужно найти его решения, которые являются натуральными числами.

Выделим в правой части последнего равенства целую часть. Для этого в числителе выделим слагаемое, кратное знаменателю: $12k + 1 = 12(k - 1) + 13$. Тогда получим: $n = \frac{12(k-1)+13}{k-1}$. Разделив числитель почленно на знаменатель, будем иметь: $n = 12 + \frac{13}{k-1}$.

Поскольку число n целое, то и число $\frac{13}{k-1}$ должно быть целым. Следовательно, будучи положительным числом, $k - 1$ может равняться или 1, или 13. Тогда $k = 2$ или $k = 14$. Если $k = 2$, то $n = 25$, что невозможно, так как каждый турист может нести не более чем 15 пакетов. Если $k = 14$, то $n = 13$. В этом случае количество пакетов равняется $(k - 1)n = 13\cdot 13 = 169$.

Ответ. 14; 169.

1. *Сколько было бы туристов в группе, если бы каждый нёс не менее 15 пакетов?*

2. *Каким будет ответ в задаче, если от обязанности нести продукты освободить санинструктора и руководителя группы?*

3. *Каким будет ответ в задаче, если при выдаче каждому по 10 пакетов один пакет окажется «лишним»?*

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных.

Дробь, числитель и знаменатель которой многочлены, называют рациональной дробью.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменных.

В рациональной дроби допустимыми являются те значения переменных, при которых не обращается в нуль знаменатель дроби.

Проверь себя

1. Крыша гаража покрыта одинаковыми прямоугольными листами кровли, уложенными в несколько рядов (снизу доверху). Каждый следующий ряд покрывает предыдущий на 0,1 своей ширины. Площади крыши, покрытой дважды, составляет примерно 10% площади крыши. Во сколько рядов уложены листы кровли на крыше?

А. В 12. **Б.** В 11. **В.** В 10. **Г.** В 9.

2. Какое число получится, если выполнить следующие действия: 1) задумать число; 2) удвоить его; 3) прибавить к результату число 6; 4) прибавить задуманное; 5) полученную сумму разделить на 3; 6) вычесть задуманное?

А.4 . **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** 1.

3. Организовывали поездку учащихся школы на маленьких автобусах в лес. Планировалось, в каждом автобусе разместить столько учащихся, сколько всего было автобусов. Четыре автобуса и некоторое количество учащихся по различным причинам не прибыло к моменту отъезда. Поэтому в каждый автобус разместили дополнительно по 4 ученика. Сколько учащихся поехали в лес, если планировалось, что в этой поездке примет участие как можно больше учащихся и в школе 350 учеников?

А. 330. **Б.** 324. **В.** 316. **Г.** 308.

4. От куска проволоки длиной 32 см отрезали кусок длиной 11 см, оставшийся кусок разрезали на равные части, длина которых больше 4 см и выражается целым числом сантиметров. При этом была использована вся проволока. На сколько сантиметров одни части длиннее других?

А. На 8 см. **Б.** На 7 см. **В.** На 5 см. **Г.** На 4 см.

Реши сам

1. Крыша гаража покрыта одинаковыми прямоугольными листами кровли, уложенными в 8 рядов (снизу доверху). Каждый следующий ряд покрывает предыдущий на некоторую часть ширины листа. Площадь крыши, покрытой дважды, составляет $\frac{1}{10}$ площади крыши. На какую часть каждый следующий ряд покрывает предыдущий?

2. Всегда ли получится одно и то же число, если выполнить следующие действия: 1) задумать четное число; 2) утроить его; 3) взять половину полученного числа и утроить его; 4) найти частное от деления найденного числа на 9?

3. В зрительном зале кинотеатра количество рядов совпадает с количеством мест в каждом ряду. При презентации нового кинофильма два первых ряда забронировали для создателей фильма. Поэтому пришлось в каждом ряду поставить по два приставных кресла. Какое наибольшее количество зрителей могло быть в зале, если в зале не более 200 мест?

4. Кусок проволоки длиной 102 см разрезали на части. Несколько частей имели длину 15 см, а остальные, их было на три больше, имели одинаковую длину, не большую 10 см, выраженную целым числом сантиметров. При этом была использована вся проволока. Сколько было тех и других частей? Какова длина каждой из остальных частей?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Г. Воспользуйтесь формулой площади прямоугольника.

2. Б. Можно вначале найти, сколько деталей изготавливают за 1 день рабочий и ученик при совместной работе.

3. Б. Последовательно найдите: 1) количество конфет во второй коробке; 2) количество конфет в двух коробках; 3) количество съеденных конфет; 4) количество оставшихся конфет.

4. В. Воспользуйтесь тем, что количество воинов в прямоугольном строю равно произведению количества шеренг на количество воинов в каждой шеренге.

5. В. Воспользуйтесь формулой произведения суммы двух выражений на их разность.

6. Б. Вначале выразите через x больший из смежных углов.

7. а) $4n + 3$; б) $5n - 2$. Воспользуйтесь тем, что в случае а) у учителя осталось 3 тетради, а в случае б) 2-х тетрадей ему не хватило.

8. 1, 2 и 7. Установите, на какие натуральные числа делится число 15.

9. 5. Обратите внимание на то, что 7 — простое число.

10. 2 и 4. Дважды воспользуйтесь тем, что общие делители чисел $a - b$ и b те же самые, что у чисел a и b.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. ≈90%. **2.** 20 м^2. **3.** 17,52 м^2.

Задача 2. 1. 2. **2.** 3 раза. **3.** Нет.

Задача 3. 1. 2835. **2.** 54. **3.** 2408.

Задача 4. 1. Да. **2.** 27; 325. **3.** 11; 121.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Б	В	Б	Г

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 0,1. Воспользуйтесь решением задачи 1.

2. Нет. Введите обозначение для задуманного числа и выполните все предложенные действия.

3. 192. Введите обозначение для количества рядов. Выразите через него количество рядов для зрителей и количество мест в каждом ряду после добавления кресел.

4. 4 и 7 частей; 6 см. Составьте уравнение для количеств кусков каждой длины и решите его, воспользовавшись тем, что они являются целыми числами.

2. Составление выражений для искомой величины

Во многих задачах искомую величину приходится находить в случае, когда данные заданы буквами. Результатом решения такой задачи является буквенное выражение.

Готовимся к решению задач

1. Моторная лодка проплыла s км по течению реки за t часов. Какова её скорость по течению реки?

А. $\frac{s}{t}$ км/ч. **Б.** $\frac{t}{s}$ ч/км. **В.** ts км·ч. **Г.** Определить невозможно.

2. Вини-Пух и Малыш вышли одновременно из своих домов и пошли навстречу друг другу. Они шли с постоянными скоростями, равными соответственно v_1 км/ч и v_2 км/ч. На какое расстояние они сблизятся за 2 ч пути без остановок?

А. $v_1 + v_2$. **Б.** $2(v_1 + v_2)$. **В.** $v_1 - v_2$. **Г.** $2(v_1 - v_2)$.

3. Вини-Пух и Малыш вышли одновременно из своих домов, расстояние между которыми s км, и пошли навстречу друг другу. Они шли с постоянными скоростями, равными соответственно v_1 км/ч и v_2 км/ч. Через какое время они встретятся, если будут идти без остановок?

А. $\dfrac{s}{v_1 - v_2}$ ч. **Б.** $\dfrac{s}{2(v_1 - v_2)}$ ч. **В.** $\dfrac{s}{v_1 + v_2}$ ч. **Г.** $\dfrac{s}{2(v_1 + v_2)}$ ч.

4. Упростите выражение $\dfrac{m}{m-n} + \dfrac{m}{m+n}$.

А. $\dfrac{2m^2}{m^2 - n^2}$. **Б.** $\dfrac{2mn}{m^2 - n^2}$. **В.** $-\dfrac{2mn}{m^2 - n^2}$. **Г** . $\dfrac{2m^2}{n^2 - m^2}$.

5. Какова концентрация раствора соли массой 80 г, если он содержит 12 г соли?

А. 25 % . **Б.** 20 %. **В.** 15 % . **Г.**10 %

6. Из 30-% раствора соли отлили 20 г. На сколько г уменьшилось содержимое соли в этом растворе?

А. На 2 г. **Б.** На 4 г. **В.** На 6 г. **Г.** На 8 г.

7. К 30 г 15-% раствора кислоты добавили 42 г 75-% раствора той же кислоты. Сколько г «чистой» кислоты содержится в полученном растворе?

А. 40 г. **Б.** 35 г. **В.** 34 г. **Г.** 32 г.

8. Какова масса раствора 20-% раствора соли, если он содержит 40 г соли?

А. 100 г. **Б.** 200 г. **В.** 400 г. **Г.** 32 г.

9. Какова концентрация раствора соли массой 80 г, если он содержит c г соли?

10. Из 30-% раствора соли отлили a г. На сколько г уменьшилось содержимое соли в этом растворе?

11. Какова масса раствора 20-% раствора соли, если он содержит m г соли?

12. Сравните значение выражения $x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ $(ab > 0)$ с числом 2.

Решение задач

При решении текстовых задач с помощью уравнений, неравенств, их систем, даже, если условие задано числовыми данными, приходится оперировать и с буквенными выражениями: ведь переменные обозначаются буквами.

Задача 1. Скорый поезд проходит расстояние между станциями A и B за a часов, а пассажирский — за b часов. Оба поезда одновременно выходят соответственно из станций A и B и движутся равномерно навстречу друг другу по соседним путям. Через сколько часов они встретятся?

Анализируем. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно расстояние, пройденное ими совместно до встречи (оно равно расстоянию между станциями А и В), разделить на скорость их сближения, то есть на расстояние, на которое они сближаются за 1 час движения. Скорость сближения в данном случае равна сумме скоростей поездов, которые можно выразить через расстояние между А и В.

Решение. Пусть s км — длина железнодорожного пути между станциями A и B. По условию, $\frac{s}{b}$ км/ч — скорость пассажирского поезда, а $\frac{s}{a}$ км/ч — скорость скорого поезда. Тогда скорость сближения поездов, движущихся навстречу друг другу, равна $\left(\frac{s}{a}+\frac{s}{b}\right)$ км/ч. Поезда встретятся через

$$s:\left(\frac{s}{a}+\frac{s}{b}\right) = s:\frac{s(b+a)}{ab} = s\cdot\frac{ab}{s(a+b)} = \frac{ab}{a+b} \text{ (ч).}$$

Ответ. Через $\frac{ab}{a+b}$ ч.

1. *Во сколько раз скорость пассажирского поезда меньше скорости скорого?*

2. *Чему равна скорость удаления поездов после встречи?*

3. *Через сколько часов после встречи пассажирский поезд прибудет в пункт назначения?*

В задаче 1 рассматривалось сложение двух дробных выражений, деление целого выражения на дробное, сокращение дроби. Эти действия выполняются по тем же правилам, что и действия над обыкновенными дробями.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй, а знаменатель оставить тем же.

Если дроби имеют разные знаменатели, то нужно привести их к общему знаменателю, а затем воспользоваться правилами сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и их знаменатели, и первое произведение записать в числителе дроби, а второе — в знаменателе.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

В следующей задаче придётся сравнивать значения двух величин. Для этого нужно:

— вводить обозначения для различных величин, о которых идёт речь в условии;

— составлять выражения для сравниваемых величин.

Задача 2. Есть две одинаковые и одинаково заполненные бочки с медом и дегтем. В бочку с медом вылили ложку с дегтем и тщательным образом перемешали. Потом в бочку с дегтем вылили ложку смеси. Чего получилось больше: дегтя в бочке с медом или меда в бочке с дегтем?

Анализируем. В задаче требуется сравнить объём (или массу) дёгтя в мёде с объёмом (или массой) мёда в дёгте. Введя обозначения для объёмов бочки и ложки, можно выразить через них доли дёгтя в мёде и мёда в дёгте после переливаний, а затем и их объёмы

Решаем. Пусть V л — объём содержимого бочки, l л — объём содержимого ложки. После переливания ложки дёгтя в бочку с мёдом объём содержимого бочки будет равняться $(V + l)$ л. Относительная вместимость дёгтя в этой бочке равна $\frac{l}{V+l}$, то есть дёготь в этой бочке будет занимать $\frac{l}{V+l}$ части объёма бочки, или в 1 л содержимого этой бочки будет $\frac{l}{V+l}$ л дёгтя. Мед в этой бочке будет занимать $\frac{V}{V+l}$ части объёма её содержимого. Затем из этой бочки перелили в бочку с дегтем ложку смеси. Тем самым меда перелили в деготь $l\cdot\frac{V}{V+l}$ л. Дегтя перелили в бочку с мёдом в объёме, равном $\frac{l}{V+l}\cdot l=\frac{l^2}{V+l}$ л. Осталось дёгтя в бочке с медом $l-\frac{l^2}{V+l}=V\cdot\frac{l}{V+l}$ л. Следовательно, дегтя в меде и меда в дегте одинаково.

Ответ. Одинаково.

1. *Изменится ли ответ, если из бочки с дёгтем перелить две ложки дёгтя в бочку с мёдом, а затем две ложки смеси перелить в бочку с дёгтем?*

2. *Сколько единиц объёма мёда останется в бочке с мёдом после переливания ложки смеси в бочку с дёгтем?*

3. *Чего получилось больше: дегтя в бочке с дёгтем или меда в бочке с мёдом?*

В некоторых задачах на наибольшее и наименьшее значения приходится находить наибольшее и наименьшее значения буквенного выражения, а затем, пользуясь полученным результатом, можно найти искомые числовые значения.

Задача 3. Прямоугольная цветочная клумба должна занимать площадь 216 м^2. Вдоль длины клумбы должны быть дорожки шириной по 2 м, а вдоль ширины — по 3 м. Каковы должны быть размеры клумбы, чтобы площадь дорожек была наименьшей?

Анализируем. Для нахождения искомых размеров клумбы необходимо получить выражение для площади дорожек, а затем исследовать его на наибольшее и наименьшее значения. Так как размеры дорожек зависят от размеров клумбы, то целесообразно хотя бы один размер прямоугольной клумбы ввести в качестве переменной. Второй размер можно получить, зная требуемую площадь клумбы.

Решаем. Пусть ширина клумбы равна x м, тогда её длина — $\frac{216}{x}$ м. Площадь дорожек равна $S=(x+4)\left(\frac{216}{x}+6\right)-216=216+6x+\frac{864}{x}-192=24+72\left(\frac{x}{12}+\frac{12}{x}\right)$. Функция S достигает наименьшего значения при том же значении x, что и функция $Y=\frac{x}{12}+\frac{12}{x}$. Но при $x > 0$ $\frac{x}{12}+\frac{12}{x}>0$. Как сумма двух взаимно обратных положительных чисел, функция Y достигает наименьшего значения, равного 2, тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно 1, то есть при $x = 12$. Таким образом, площадь дорожек наименьшая, если ширина клумбы 12 м, а длина 18 м.

Ответ. 18 м и 12 м.

1. *Чему равна наименьшая площадь дорожек?*
2. *Чему равнялась бы площадь дорожек, если бы размеры клумбы равнялись 24 м и 9 м?*
3. *Каким будет ответ в задаче, если площадь клумбы равняется 486 м^2, а остальные условия остаются неизменными?*

Проверь себя

1. Один фонтан наполняет бассейн за 2 ч 30 мин., а второй — за 3 ч 45 мин. За какое время наполнят бассейн оба фонтана, работая вместе?

А. За 2 ч. **Б.** За 1 ч 30 мин. **В.** За 1 ч 20 мин. **Г.** За 1 ч.

2. В одном стакане налито некоторое количество чёрного кофе, а в другом — такое же количество молока. Из первого стакана во второй перелили ложку кофе, а затем из второго стакана перелили в первый ложку жидкости. Чего в результате стало больше: молока в первом стакане или кофе во втором?

А. Молока в первом. **Б.** Кофе во втором.

В. Одинаково. **Г.** Установить невозможно.

3. Прямоугольная песочница на детской площадке должна занимать площадь 32 м^2. Вдоль длины песочницы должны быть дорожки шириной по 1 м, а вдоль ширины — по 2 м. Каким должно быть отношение размеров песочницы, чтобы площадь дорожек была наименьшей?

А. 2:1. **Б.** 3:1. **В.** 4:1. **Г.** 6:1.

Реши сам

1. Двумя кранами с горячей и холодной водой бак наполняется за m мин. Если открыть только кран с холодной водой, то бак наполнится за n мин. За сколько минут наполнится бак, если открыть только кран с горячей водой?

2. От полного стакана чёрного кофе отпили половину и долили столько же молока. Затем отпили третью часть получившегося кофе с молоком и долили столько же молока. Затем отпили шестую часть получившегося кофе с молоком и долили столько же молока. После этого выпили всё до конца. Чего в итоге выпито больше: молока или чёрного кофе?

3. Плавательный бассейн должен занимать площадь 81 м^2. Вдоль длины бассейна должны быть дорожки из плиток шириной по 1,5 м, а вдоль ширины — по 4,5 м. Каковы должны быть размеры бассейна, чтобы площадь дорожек была наименьшей?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. А. Примените связь между расстоянием, скоростью и временем при равномерном прямолинейном движении.

2. Б. Найдите предварительно скорость сближения сказочных героев, учитывая, что они движутся навстречу друг другу.

3. В. Примените связь между расстоянием, скоростью и временем при равномерном прямолинейном движении.

4. А. Воспользуйтесь правилом сложения дробей с разными знаменателями.

5. В. Воспользуйтесь тем, что концентрация вещества в растворе — это выраженное в процентах отношение массы (объёма) вещества к массе (объёму) рас твора.

6. В. Воспользуйтесь правилом нахождения процента от числа.

7. Б. Воспользуйтесь правилом нахождения процента от числа.

8. Б. Воспользуйтесь правилом нахождения числа по его проценту.

9. $\mathbf{\frac{5c}{4}\%}$. Воспользуйтесь тем, что концентрация вещества в растворе — это выраженное в процентах отношение массы (объёма) вещества к массе (объёму) раствора.

10. На 0,3*a* г. Воспользуйтесь правилом нахождения процента от числа.

11. 5*m* г. Воспользуйтесь правилом нахождения числа по его проценту.

12. $\boldsymbol{x \geq 2}$. Убедитесь в том, что если $c > 0$, то $c+\frac{1}{c} \geq 2$. Для доказательства установите знак разности $c+\frac{1}{c}-2$.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. В $\frac{b}{a}$ раз. **2.** $\left(\frac{s}{a}+\frac{s}{b}\right)$ км/ч. **3.** Через $\frac{b^2}{a+b}$ ч.

Задача 2. 1. Нет. **2.** $\frac{v^2}{v+l}$. **3.** Одинаково.

Задача 3. 1. 168 м^2. **2.** 174 м^2. **3.** 27 м и 18 м.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
Б	В	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. $\boldsymbol{\frac{mn}{n-m}}$ **мин.** Введите обозначение для объёма бака, выразите через него скорости заполнения бака холодной водой и водой из обоих кранов.

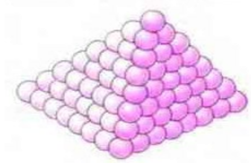
2. Одинаково. Подсчитайте, сколько долито молока.

3. 9 м×9 м. Воспользуйтесь методом решения задачи 3.

3. Преобразование выражений для решения уравнений

Преобразование выражений широко применяется при составлении и решении уравнений, систем уравнений.

Готовимся к решению задач



1. На рисунке изображена пирамида, составленная из шаров. Сколько шаров находится в одной её боковой грани?

А. 28. **Б.** 36. **В.** 40. **Г.** 45.

2. Решите уравнение $\left(\frac{5}{2}x-3\right)-\left(\frac{1}{2}x+5\right)=6$.

А. $x = 3{,}5$. **Б.** $x = 7$. **В.** $x = –0{,}5$. **Г.** $x = –1$.

4. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x-2y=4, \\ 3x-6y=12 \end{cases}$?

А. 0. **Б.** 1. **В.** 2. **Г.** Бесконечно много.

4. Собственная скорость катера u км/ч, скорость течения реки v км/ч. Какова скорость движения катера против течения этой реки?

А. $(u + v)$ км/ч. **Б.** $(v – u)$ км/ч. **В.** $(u – v)$ км/ч. **Г.** $\frac{u+v}{2}$ км/ч.

5. Скорость катера по течению реки u км/ч, а его скорость против течения $-v$ км/ч. Какова собственная скорость катера?

А. $(u + v)$ км/ч. **Б.** $\frac{u-v}{2}$ км/ч. **В.** $(u – v)$ км/ч. **Г.** $\frac{u+v}{2}$ км/ч.

6. Скорость катера по течению реки u км/ч, а его скорость против течения $-v$ км/ч. Какова скорость плота, текущего по этой реке?

А. $(u + v)$ км/ч. **Б.** $\frac{u-v}{2}$ км/ч. **В.** $(u – v)$ км/ч. **Г.** $\frac{u+v}{2}$ км/ч.

7. На какие простые множители разлагается число 77?

8. Разложите на множители многочлен $xy + x + y + 1$.

9. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $(x + 3)(y + 3) = 20$; 2) $xy + 3x + 3y = 11$.

Решение задач

Одним из этапов решения текстовых задач с помощью уравнений, неравенств, их систем является выражение некоторых величин через переменные, в качестве которых часто выбирают искомые величины.

Задача 1. В 10 ящиках было по одинаковому количеству яблок. Когда из первого ящика взяли несколько яблок, из второго — вдвое больше, из третьего — втрое больше и так далее, то в последнем ящике осталось одно яблоко, а во всех десяти вместе —190. Сколько яблок было в каждом ящике сначала?

Анализируем. В задаче два неизвестных количества: количество яблок в каждом ящике и количество яблок, взятых из первого ящика. Введя обозначения для них, из условия задачи можно составить два уравнения относительно этих неизвестных. Решив полученную систему уравнений, найдём значение искомой величины.

Решаем. Пусть в каждом ящике было x яблок. Если из первого взяли k яблок, то из второго — $2k$, из третьего — $3k$ и так далее, то в ящиках останется соответственно $x - k$, $x - 2k$, …, $x - 10k$ яблок. По условию имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}(x-k)+(x-2k)+...+(x-10k)=190,\\ x-10k=1.\end{cases} \text{ или } \begin{cases}10x-(k+2k+...+10k)=190,\\ x-10k=1.\end{cases}$$

Упростим выражение, стоящее в скобках в первом уравнении:

$k + ... + 10k = (k + 10k) + (2k + 9k) + (3k + 8k) + (4k + 7k) + (5k + 6k) = 11k\cdot5 = 55k.$

Система принимает вид:

$$\begin{cases}10x-55k=190,\\ x-10k=1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2x-11k=38,\\ k=\dfrac{x-1}{10},\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2x-11\cdot\dfrac{x-1}{10}=38,\\ k=\dfrac{x-1}{10},\end{cases} \text{ или } \begin{cases}9x=369,\\ k=\dfrac{x-1}{10}.\end{cases}$$

Отсюда $x = 41$, $k = 4$. Следовательно, в каждом ящике сначала было 41 яблоко.

Ответ. 41.

1. *Сколько яблок взяли из первого ящика?*

2. *Чему равна сумма* $k + 2k + \ldots + 100k$*?*

3. *Сколько яблок осталось в 10 ящиках, если сначала в них было по одинаковому количеству яблок, затем из первого ящика взяли несколько яблок, из второго — на 1 яблоко больше, из третьего — на 2 яблока больше, и так далее, и в последнем ящике осталось одно яблоко?*

В рассмотренной задаче составленная система уравнений была приведена к системе линейных уравнений, которая решалась методом подстановки. Из одного уравнения одно из неизвестных выражалось через другое и полученное выражение подставлялось в другое уравнение системы, которое затем приводилось к линейному уравнению. На каждом таком шагу использовались преобразования выражений с одной переменной.

При решении задач составлением уравнений или их систем не нужно опасаться того, что количество неизвестных превышает количество уравнений. Специально подобранные преобразования иногда позволяют исключить «лишние» неизвестные.

Задача 2. Катер, двигаясь равномерно, по течению реки расстояние из пункта *A* в пункт *B* преодолевает за 2 ч, а назад — за 3 ч. За какое время из *A* в *B* приплывет плот?

Анализируем. В задаче речь идёт о равномерном движении в равномерно движущейся среде. Скорость катера по течению равна сумме собственной его скорости и скорости течения, а скорость против течения — разности этих скоростей. В условии задачи даются только значения времени. Используя обозначения для расстояния между пунктами *A* и *B*, собственной скорости катера и скорости течения (она равна скорости движения плота!), можно составить два уравнения. Из них можно найти отношение двух неизвестных величин — расстояния и скорости течения реки (движения плота).

Решаем. Обозначим через s км расстояние (по реке) между пунктами *A* и *B*, v км/ч — собственную скорость катера, u — скорость течения. Тогда скорость катера по течению реки будет равняться ($v + u$) км/ч, а его скорость против течения — ($v - u$) км/ч. Так как катер по течению реки расстояние из пункта A в пункт B преодолевает за 2 ч, а назад — за 3 ч, то имеем систему уравнений $\begin{cases} v+u=\dfrac{s}{2}, \\ v-u=\dfrac{s}{3}. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, исключим одно из неизвестных: $2u=\dfrac{s}{2}-\dfrac{s}{3}=\dfrac{s}{6}$ или $u=\dfrac{s}{12}$. Итак, мы нашли выражение для скорости течения. Поэтому скорость плота тоже равняется $\dfrac{s}{12}$ км/ч. Тогда время его движения из A в B равно отношению расстояния s к скорости $\dfrac{s}{12}$, то есть $s{:}(s{:}12) = 12$ (ч).

Ответ. За 12 ч.

1. *Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения?*

2. *Можно ли из условий задачи найти: а) собственную скорость катера; б) скорость течения; в) расстояние AB?*

3. *Каким будет ответ в задаче, если катер будет преодолевать расстояние от A до B не за 3 ч, а за 4 ч?*

В задаче 2 составленная система уравнений решалась методом сложения: уравнения умножались на определённые числа и складывались. В данном случае первое уравнение умножалось на 1, а второе −на –1.

В предыдущей задаче тот факт, что количество неизвестных превышало количество неизвестных, не было препятствием для решения задачи, так как фактически требовалось находить не введенные неизвестные, а некоторые соотношения между ними, в рассмотренном случае отношение $\dfrac{s}{u}$. Иногда в подобных случаях решить задачу помогают некоторые дополнительные условия, которые явно могут и не фигурировать в задаче.

Задача 3. Робот двигался равномерно некоторое целое количество часов со скоростью, выражаемой целым количеством км/ч, затем с той же скоростью продолжал движение 1 час, далее со скоростью 1 км/ч он продвигался такое же время, как и на первом участке пути. Всего он преодолел 2008 км. С какой скоростью и как долго он двигался на первом участке пути, если скорость не превышала 50 км/ч, а время не превышало 50 ч?

Анализируем. Введя обозначения для искомых неизвестных, можно из условия составить уравнение относительно этих величин. Учитывая, что получим одно уравнение с двумя переменными, нужно будет использовать для решения задачи то, что неизвестные величины принимают целые значения, удовлетворяющие указанным ограничениям.

Решаем. Обозначим через x км/ч и y ч соответственно скорость и время движения робота на первом участке. Исходя из условия, учитывая, что при равномерном движении пройденный путь равняется произведению скорости на время, получим уравнение: $xy + x \cdot 1 + y \cdot 1 = 2008$ или $xy + x + y = 2008$. Имеем одно уравнение с двумя неизвестными. Решить его позволит то, что неизвестные x и y принимают целые значения.

Перепишем уравнение в следующем виде: $xy + x + y + 1 = 2009$. Разложим многочлен, стоящий в левой части, на множители, а число 2009, стоящее в правой части, на простые множители. Для разложения многочлена на множители используем способ группировки: $xy + x + y + 1 = (xy + x) + (y + 1) = x(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(x + 1)$. Итак, составленное уравнение приведено к виду: $(x + 1)(y + 1) = 7 \cdot 7 \cdot 41$.

Целые положительные решения последнего уравнения являются решениями совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} x+1=7, \\ y+1=287, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=287, \\ y+1=7, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=49, \\ y+1=41, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=41, \\ y+1=49. \end{cases}$$

Решениями этих систем являются соответственно пары (6; 286), (286; 6), (48; 40), (40; 48). Первые две пары можно отбросить, так как скорость не превышала 50 км/ч, а время не превышало 50 ч. Следовательно, на первом участке робот двигался 40 ч со скоростью 48 км/ч или 48 ч со скоростью 40 км/ч.

Ответ. 40 ч со скоростью 48 км/ч или 48 ч со скоростью 40 км/ч.

1. *Чему равен путь, преодолённый роботом?*

2. *Какие системы уравнений пропущены в приведенной совокупности систем уравнений, если отвлечься от смысла неизвестных, приведенного в решении?*

3. *Каким будет ответ в задаче, если число 2008 заменить на 2012?*

В задаче 3 применялось для решения уравнения разложение многочлена на множители. Вы знакомы с такими способами разложения на множители, как вынесение общего множителя за скобки, группировка, применение формул сокращённого умножения. Вы умеете разлагать квадратный трёхчлен на линейные множители, если это возможно.

Разложить многочлен на множители — это означает представить его в виде произведения нескольких многочленов, тождественного данному многочлену.

Вынесение общего множителя за скобки выполняется на основе распределительного свойства: $ab + ac = a(b + c)$.

Способ группировки разложения многочлена на множители выполняется в следующей последовательности:

а) образуют группы членов многочлена, имеющие общий множитель;

б) выносят за скобки общий множитель в каждой группе;

в) образованный при этом общий для всех групп множитель выносят за скобки.

Формулы сокращённого умножения позволяют разлагать на множители некоторые многочлены: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2; \qquad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \qquad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Проверь себя

1. Имеется 10 пакетов с яблоками, всего в них 110 яблок. Во втором пакете яблок вдвое больше, чем в первом, в третьем — втрое больше, чем в первом, и так далее, в 10-м — в 10 раз больше, чем в первом. Сколько яблок во втором ящике?

А. 2. **Б.** 4. **В.** 6. **Г.** 8.

2. Катер по течению реки расстояние из пункта *A* в пункт *B* преодолевает за 2 ч, а назад — за 3 ч. За какое время расстояние, равное расстоянию из *A* в *B*, проплывет катер в стоячей воде?

А. За 2 ч 48 мин. **Б.** За 2 ч 36 мин. **В.** За 2 ч 24 мин. **Г.** За 2 ч 12 мин.

3. Сколько существует различных детских песочниц прямоугольной формы, длины границ которых выражаются целыми числами метров, а длины ограждений (в м) и площади (в м^2) выражаются одинаковыми числами?

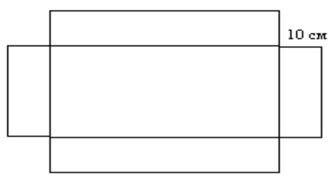
А. 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** 4

Реши сам

1. В 20 ящиках было по одинаковому количеству яблок. Когда из первого ящика взяли несколько яблок, из второго — вдвое больше, из третьего — втрое больше и так далее, то в последнем ящике осталось одно яблоко, а во всех двадцати вместе — 400. Сколько яблок было в каждом ящике сначала?

2. Вертолёт при попутном ветре преодолевает некоторое расстояние за 30 мин, а при встречном — за 40 мин. За сколько времени ветер перенесёт лист бумаги на это расстояние, если скорость ветра во всех трёх случаях будет одной и той же?

3. На рисунке изображена развёртка картонного ящика без крышки. Площадь полученной фигуры равна 1614 см^2. Найдите длины сторон дна ящика, если известно, что они выражаются целыми числами сантиметров.



Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Обратите внимание на то, что в каждом следующем ряду количество ша ров отличается на 1 от количества шаров в предыдущем.

2. А. Приведите уравнение к стандартному виду.

3. Г. Умножьте первое уравнение системы на 3 и сравните со вторым.

4. В. Воспользуйтесь тем, что при движении катера против течения реки течение замедляет его движение.

5. Г. Предварительно выразите u и v через собственную скорость катера и скорость течения.

6. Б. Воспользуйтесь тем, что скорость плота совпадает со скоростью течения реки.

7. 7 и **11.** Обратите внимание на то, что 1 не является простым числом.

8. $\mathbf{(x + 1)(y + 1)}$**.** Воспользуйтесь методом группировки.

9. 1) **(2; 1) и (1; 2**) Воспользуйтесь тем, что множители в левой части уравнения являются делителями правой части; 2) **(2; 1) и (1; 2)** Воспользуйтесь методом группировки и методом решения уравнения 1)**.**

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 4. **2.** 5050k. **3.** 55.

Задача 2. 1. В 5 раз. **2.** а) Нет; б) нет; в) нет. **3.** За 8 ч.

Задача 3. 1. 1920 км. **2.** $\begin{cases} x+1=1, \\ y+1=2009, \end{cases}$ $\begin{cases} x+1=2009, \\ y+1=1. \end{cases}$ **3.** Нет решений.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
Б	В	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 41. Введите обозначения для первоначального количества яблок в каждом ящике и для количества яблок, взятых из первого ящика.

2. За 4 ч. Введите обозначения для собственной скорости вертолёта и для скорости ветра.

3. 33 см и 18 см. Введите обозначения для длины и ширины дна ящика.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	4 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	6 задач	4 задач
«отлично»	Решено не менее	7 задач	5 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа укажите букву «Д».

1. Из двух одинаковых листов бумаги площадью S каждый склеили большой лист. Площадь склеенного участка равна $0{,}25S$. На сколько процентов площадь полученного большого листа бумаги меньше площади двух листов?

А. На 7,5%. **Б.** На 10%. **В.** На 12,5%. **Г.** На 25%.

2. Какое число получится, если выполнить следующие действия?

Задумать число. Утроить его. Прибавить к полученному результату число 10. Прибавить к сумме удвоенное задуманное. Разделить полученную сумму на 5. Вычесть задуманное.

А. 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** 4.

3. В квартире имеется несколько книжных полок и на каждой полке размещено столько книг, сколько всего в квартире полок. Пять полок вышли из строя, некоторое количество книг не были возвращены друзьями. Поэтому на каждую полку поместили дополнительно по 5 книг. Сколько книг не было возвращено?

А. 10. **Б.** 15. **В.** 20. **Г.** 25.

4. Кусок проволоки длиной 23 см разрезали на части. Несколько частей имели длину 3 см, а остальные, их было на две части меньше, имели одинаковую длину, не большую 20 см, выраженную целым числом сантиметров. При этом была использована вся проволока. На сколько частей разрезали кусок проволоки?

А. На 4. **Б.** На 5. **В.** На 6. **Г.** На 8.

5. Два поезда — скорый и пассажирский — одновременно отправились из пунктов A и B навстречу друг другу, двигались по соседним путям и встретились через 90 мин. Пассажирский поезд преодолел расстояние между A и B за 3,75 ч. За сколько времени такое же расстояние преодолел скорый поезд?

А. За 2 ч 15 мин. **Б.** За 2 ч 30 мин. **В.** За 2 ч 45 мин. **Г.** За 3 ч.

6. В стакан, содержащий V мл мёда, влили U мл чёрного кофе и тщательно перемешали. Каков объём кофе в ложке, содержащей W мл смеси?

А. $\dfrac{UV}{U+V}$ мл. **Б.** $\dfrac{U+V}{UV}$ мл. **В.** $\dfrac{UW}{U+V}$ мл. **Г.** $\dfrac{U+V}{UW}$ мл.

7. У продавца были весы с разными по длине плечами. Один килограмм товара он взвешивал на левой чашке, а другой килограмм того же товара и тому же покупателю –на правой чашке весов. Сравните суммарную массу m с 2 кг.

А. $m > 2$ кг. **Б.** $m = 2$ кг. **В.** $m < 2$ кг. **Г.** Сравнить невозможно

8. В 5 ящиках было по одинаковому количеству яблок. Когда из первого ящика взяли несколько яблок, из второго — на 2 яблока меньше, из третьего — на 4 яблока меньше, из четвёртого — на 6 яблок меньше, из пятого — на 8 яблок меньше, то в последнем ящике осталась треть яблок, а во всех пяти вместе — 125. Сколько всего яблок было в 5 ящиках?

А. 435. **Б.** 405. **В.** 365. **Г.** 330.

9. Вертолёт при попутном ветре преодолевает некоторое расстояние за 30 мин, а в безветренную погоду — за 36 мин. За сколько времени вертолёт преодолеет это расстояние при встречном ветре?

А. За 40 мин. **Б.** За 42 мин. **В.** За 45 мин. **Г.** За 48 мин.

10. Если каждый юноша купит билет на футбол, а каждая девушка билет в кино, то они потратят на 1 зед меньше, чем если бы каждый юноша купил билет в кино, а каждая девушка — билет на футбол (зед — условная денежная единица). Известно, что ребят больше, чем девушек. На сколько? Цены на все билеты на футбол — равные целые количества зедов, и цены на все билеты в кино — равные целые количества зедов.

А. На 4. **Б.** На 3. **В.** На 2. **Г.** На 1.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли Вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части пособия. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли Вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания, приведенными после задач.

1. Стена комнаты обклеивается обоями так, что одна полоса накладывается на предыдущую. Каждая следующая полоса покрывает предыдущую на 1% своей ширины. На оклейку стены затрачено ровно 10 полос. На сколько процентов площадь использованных обоев превышает оклеенную площадь стены?

2. Задумайте число. Удвойте его. К полученному произведению прибавьте 5. Умножьте полученное число на 5. Прибавьте к результату число 10. Умножьте полученную сумму на 10. Отнимите от полученного произведения число 350. Разделите результат на задуманное число. Какое получилось число? Какое получится число, если задумать другое число?

3. Имеется несколько картонных ящиков и в каждом ящике размещено столько упаковок товара, сколько всего было ящиков. Три ящика вышли из строя, некоторое количество упаковок продали. Поэтому в каждый ящик поместили дополнительно по 3 упаковки. Известно, что первоначально упаковок было около 300. Какое количество упаковок товара находится в ящиках после отмеченных изменений?

4. На складе в ящик укладывали коробки с некоторым товаром так, чтобы в каждом ящике было одно и то же количество коробок. Когда в каждый ящик укладывали по 24 коробки, то для трёх коробок не хватило места. Поэтому добавили 2 ящика, в результате удалось в каждом ящике разместить по одинаковому количеству коробок. Сколько первоначально использовали ящиков и сколько всего коробок нужно было уложить в ящики, если известно, что коробок было более 150, но менее 200?

5. Скорый поезд проходит расстояние между станциями A и B за a часов, а пассажирский — за b часов. Оба поезда одновременно выходят из станций A и B, скорый поезд из А, пассажирский — из В и равномерно движутся по соседним путям в одном направлении, но скорый поезд сзади пассажирского. Через сколько часов скорый поезд догонит пассажирский?

6. Есть две одинаковые и одинаково заполненные бочки с медом и дегтем. В бочку с медом вылили ложку с дегтем и тщательным образом перемешали. Потом в бочку с дегтем вылили ложку смеси. Чего получилось больше: мёда в бочке, где был мед, или дёгтя в бочке, где был деготь?

7. Из вершин A, B, C треугольного участка ABC выехали по прямолинейным дорогам три знакомых друг с другом велосипедиста. Встретившись в одном пункте P этого участка, они продолжили движение по тем же дорогам до границ участка A_1, B_1, C_1, противоположным пунктам, из которых они выехали. Известно, что $BA_1 : A_1C = 1:2$, $AB_1:B_1C = 2:3$. Найдите отношение $AC_1:C_1B$.

8. В 10 ящиках было по одинаковому количеству яблок. Когда из первого ящика взяли несколько яблок, из второго — на 2 яблока больше, из третьего — на 4 яблока больше, из четвёртого — на 6 яблок больше и так далее, то в последнем ящике осталась половина яблок, а во всех десяти вместе — 300. Сколько всего яблок было в 10 ящиках?

9. Эскалатор в метро спускает движущегося по нему вниз человека за 2 мин, а по движущемуся вниз эскалатору человек поднимается вверх — за 12 мин, двигаясь с той же скоростью. За какое время спустится по этому эскалатору человек, неподвижно стоящий на эскалаторе?

10. Если от листа бумаги, имеющего форму прямоугольника, отрезать полоски шириной 1 см, примыкающие к смежным сторонам листа, то полученный листок будет иметь площадь 187 см^2. Найдите размеры данного листа бумаги, если они выражаются натуральными числами сантиметров.

Указания к задачам основного задания

1. Воспользуйтесь тем, что на каждую из 9 полос накладывается следующая полоса обоев.

2. Введите обозначение для задуманного числа, выполните с ним все предлагаемые действия.

3. Введите обозначение для количества ящиков, выразите через него количество упаковок товара до и после указанных изменений.

4. Введите обозначения для количества коробок, количества ящиков и количества коробок в каждом ящике после того, как были добавлены ящики. Найдите два выражения для общего количества коробок.

5. Введите обозначения для расстояния между А и В, выразите скорость сближения поездов через него и данные, приведенные в условии задания.

6. Введите обозначения для объёмов содержимого бочки и ложки. Выразите через них относительные вместимости мёда и дёгтя после каждого переливания.

7. Воспользуйтесь свойством площадей треугольников, имеющих общее основание.

8. Введите обозначения для первоначального количества яблок в каждом ящике и для количества яблок, взятых из первого ящика, составьте по условию систему уравнений.

9. Введите обозначения для длины эскалатора, его скорости и собственной скорости человека, составьте на основании условия систему уравнений, найдите из неё искомую величину.

10. Введите обозначения для размеров данного листа, составьте уравнение для этих переменных на основании условия. Воспользуйтесь тем, что размеры листа выражаются натуральными числами.

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части пособия. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. Стена в кухне обложена кафельными плитками так, что швы между соседними плитками составляют 1% соответствующей стороны плитки. По длине стены откладывается 15 плиток, по её высоте — 10. Какой процент площади стены занимают швы?

2. Тарас предлагает Богдану трижды подбросить игральный кубик, на гранях которого написаны числа от 1 до 6, и обещает, находясь в соседней комнате, угадать, какие числа появились на верхней грани кубика. Тарас просит Богдана к количеству очков, выпавшему при первом подбрасывании, увеличенному в 4 раза, прибавить 5, полученный результат умножить на 5, к произведению прибавить удвоенное количество очков, выпавшее при втором подбрасывании, полученный результат снова умножить на 5 и прибавить количество очков, выпавшее при третьем подбрасывании. После того, как Богдан сообщает Тарасу результат, Тарас называет количества очков, выпавших при каждом подбрасывании. Как он это делает?

3. На складе в ящик укладывали коробки с некоторым товаром. Количество коробок в каждом ящике равнялось количеству ящиков. Несколько ящиков оказались бракованными, часть коробок передали потребителю, не упаковывая их в ящики. Поэтому в каждый ящик пришлось дополнительно положить столько коробок, сколько ящиков оказалось бракованными и сколько передали потребителю. Известно, что в ящиках оказалось более 300, но менее 320 коробок. Какое количество коробок находится в ящиках после указанных изменений?

4. Требуется разлить 205 литров сока в банки по 7 л и в банки другой вместимости, равной целому количеству литров, так, чтобы все банки оказались полными. Банок другой вместимости на 5 меньше, чем 7-литровых. Сколько банок при этом может понадобиться, если известно, что их больше 20, но меньше 30?

5. Два поезда одновременно отправились с постоянными скоростями из пунктов A и B по соседним путям навстречу друг другу. После встречи поезд, вышедший из пункта A, прибыл в пункт B через a часов, а поезд, вышедший из пункта B, прибыл в пункт A через b часов ($a > b$). Скорость какого поезда больше и во сколько раз?

6. В первом стакане налито некоторое количество чёрного кофе, а во втором — такое же количество молока. Разрешается переливать из одного стакана в другой любое количество жидкости, тщательно размешивая содержимое стаканов. Можно ли с помощью нескольких переливаний добиться того, чтобы в первом стакане молока стало больше, чем кофе?

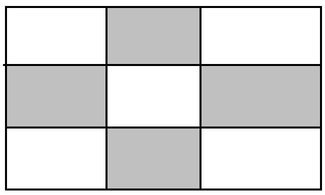
7. Из вершин A, B, C треугольного участка ABC выехали по прямолинейным дорогам три знакомых друг с другом велосипедиста. Встретившись в одном пункте P этого участка, они продолжили движение по тем же дорогам до границ участка A_1, B_1, C_1, противоположным пунктам, из которых они выехали.

Известно, что $BA_1 : A_1C = 1:2$, $AB_1:B_1C = 2:3$. Оцените сумму отношений расстояний, преодолённых ими до встречи, к расстояниям, которые они проехали после встречи.

8. При бурении скважины каждый следующий метр проходки обходится на 4 зеда (зед — условная денежная единица) дороже, чем предыдущей. Вследствие этого проходка последнего метра и третьего от конца, взятых вместе, обходится во столько же, сколько стоила бы проходка всей скважины, если бы каждый метр проходки независимо от глубины стоил столько же, сколько стоит первый метр проходки. Средняя стоимость одного метра проходки равна 100 зедов. Какова глубина скважины?

9. Войсковая колонна имеет длину 5 км. Связной, выехав из начала колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся к началу. Колонна за это время прошла 12 км. Какой путь проехал связной?

10. Можно ли провести четыре прямолинейных разреза прямоугольника, как показано на рисунке, чтобы сумма площадей закрашенных прямоугольников равнялась сумме площадей не закрашенных?



Указания к задачам дополнительного задания

1. Обозначьте какими-то буквами размеры плитки, выразите площадь стены и площадь швов через эти буквы.

2. Воспользуйтесь выражением трёхзначного числа через его цифры.

3. Введите обозначение для первоначального количества ящиков и для количества бракованных и переданных потребителю ящиков, выразите через них количество коробок с товаром до и после указанных изменений.

4. Введите обозначения для вместимости банок второго типа и количества банок первого типа. Выразите через них объём сока.

5. Введите обозначения для скоростей обоих поездов, выразите через них расстояния, преодолённые поездами до встречи, и время, которое двигался каждый поезд до встречи.

6. Обратите внимание на то, что так как в первом стакане вначале был только кофе, то, если жидкость переливается из первого стакана во второй, тогда в первом стакане кофе останется не меньше, чем молока. Если же жидкость переливается из второго стакана в первый, а тогда перед переливанием во втором стакане кофе было не больше, чем молока, то это сохранится и после переливания.

7. Используйте свойства площадей треугольников.

8. Введите обозначения для стоимости бурения первого метра скважины и для глубины скважины. Выразите через них стоимость всей проходки.

9. Введите обозначения для скорости колонны и скорости связного. Выразите через них время, за которое связной преодолел весь свой путь, а также расстояние, которое прошла колонна за это время.

10. Введите обозначения для длин и ширин всех прямоугольников, получаемых с помощью четырёх прямолинейных разрезов, и выразите через них сумму площадей заштрихованных прямоугольников и сумму площадей не заштрихованных прямоугольников.

Задачи для исследования

1. Дано натуральное число r. Сколько существует пар натуральных чисел a, b, для которых r является 1) средним арифметическим? 2) средним геометрическим? 3) средним квадратичным?

2. Представить натуральное число n в виде произведения наименьшего количества рациональных множителей, сумма которых равна нулю.

3. Исследовать, какие целые числа представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел. Сколькими способами выражается данное число в виде суммы двух квадратов?

4. Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: 15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5. А сколько таких способов для числа 115? Как найти количество способов для произвольного числа?

5. Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией $ax + by$, где a и b — данные натуральные числа, x и y — произвольные целые неотрицательные числа.

6. $\frac{1}{7}=0,(142857), \frac{2}{7}=0,(285714), \frac{3}{7}=0,(428571), \ldots$

Для числа $\frac{1}{7}$ разложение в десятичную дробь периодично и состоит из шести цифр, а для $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\ldots,\frac{6}{7}$ — из тех же шести цифр в другом порядке (проверьте!). А вот для числа $\frac{1}{13}$ и $\frac{2}{13}$ наборы цифр разные. Исследуйте разложения этих чисел и чисел вида $\frac{1}{p},\frac{2}{p},\ldots,\frac{p-1}{p}$, для p = 17, 19, 41, 47 и другим простым числам, и разберитесь, какие бывают циклы.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Составление и преобразование буквенных выражений

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие