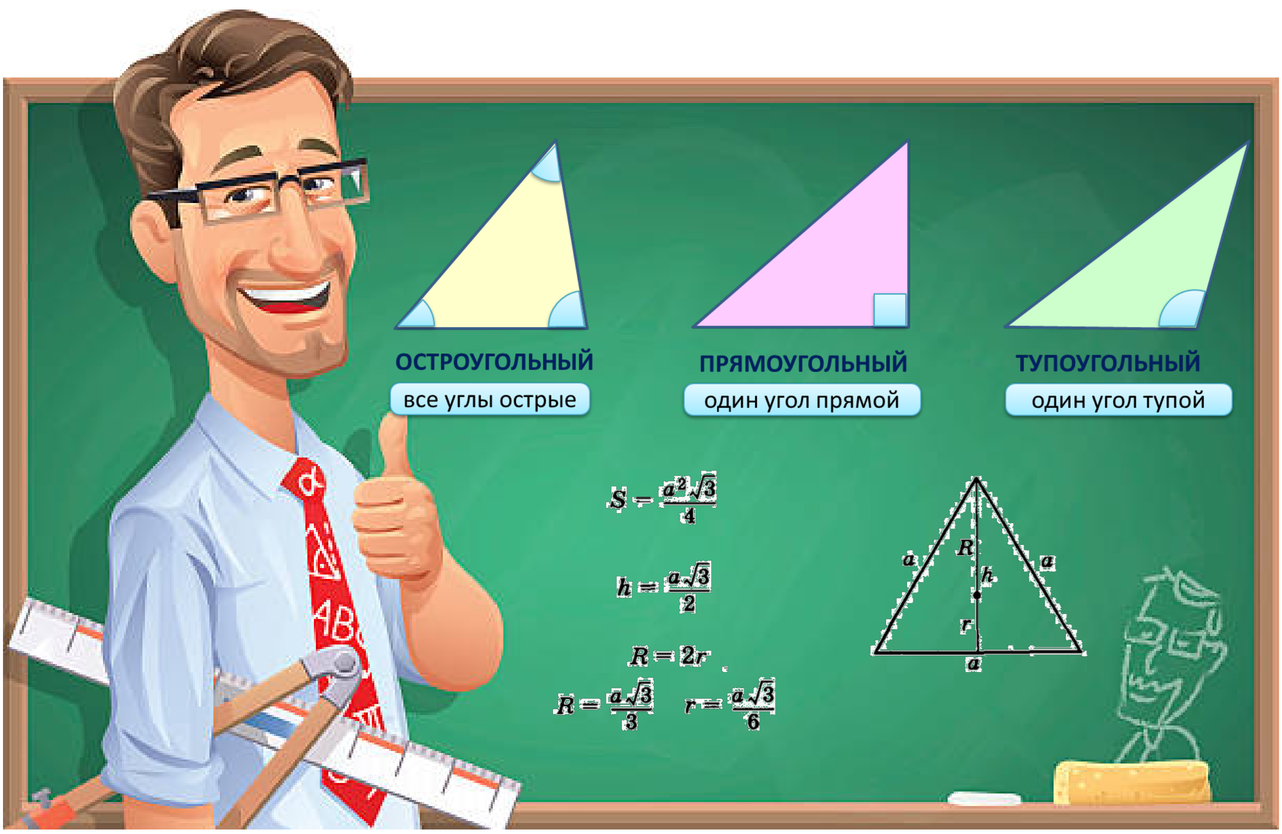
Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

Геометрия треугольника и её применения



Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Донецк 2023

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л**.** Геометрия треугольника и её применения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов, — 52 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 8-9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 от 05. 05. 2017). Ее цель **—** развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, совершенствование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после решения каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения учащимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 8-9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!.......... 4
Рекомендации для обучающихся.......... 6
Геометрия треугольника и её применения 8
1. Свойства сторон и углов треугольника.......... 8
Готовимся к решению задач.......... 9
Решение задач 10
Проверь себя 15
Реши сам.......... 15
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач».......... 16
Ответы на вопросы к задачам 16
Ответы к заданиям «Проверь себя».......... 17
Ответы и указания к заданиям «Реши сам».......... 17
2. Прямоугольный треугольник.......... 17
Готовимся к решению задач.......... 18
Решение задач 19
Проверь себя 29
Реши сам.......... 29
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач».......... 30
Ответы на вопросы к задачам 31
Ответы к заданиям «Проверь себя».......... 31
Ответы и указания к заданиям «Реши сам».......... 31
3. Подобные треугольники 32
Готовимся к решению задач.......... 33
Решение задач.......... 34
Проверь себя 39
Реши сам.......... 40
Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач».......... 40
Ответы на вопросы к задачам 41
Ответы к заданиям «Проверь себя».......... 41
Ответы и указания к заданиям «Реши сам».......... 41
Контрольное задание.......... 42
Контрольный тест.......... 42
Основное задание 45
Указания к задачам основного задания.......... 47
Дополнительное задание 48
Указания к задачам дополнительного задания 50
Задачи для исследования 52

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Настоящее пособие посвящено геометрии треугольника и её применениям. При моделировании окружающих объектов и их взаимного расположения с помощью геометрических фигур и отношений между ними очень часто используются треугольники, их свойства и задачи с ними связанные. Геометрия треугольника, с одной стороны, является основой всей геометрии, а с другой стороны — очень важным инструментом для решения жизненных задач.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и поиска решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, проверки возможности применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом пункте.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Они предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы их решения.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются знаком

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого модуля, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после решения каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить или приобрести тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, при

веденными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в модуле, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания, проведите анализ допущенных ошибок.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Геометрия треугольника и её применения

Геометрия треугольника является одним из главнейших разделов геометрии. Практически вся геометрия со времён Евклида базируется на теоремах о треугольниках. Поэтому не удивительно, что применение геометрии на практике часто связано с треугольниками, их свойствами и измерениями, с ними связанными. В данном пособии представлены некоторые типы задач, для решения которых применяется геометрия треугольника.

1. Свойства сторон и углов треугольника

Напомним кратко самые основные сведения о треугольниках.

Треугольник — это геометрическая фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, трёх отрезков, соединяющих эти точки, и части плоскости, ограниченной этими отрезками (см. рис.1).

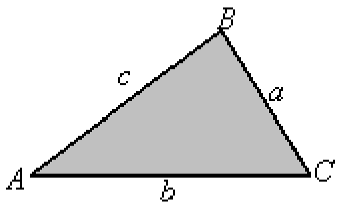


Рис. 1

Точки A, B, C — ***вершины*** треугольника, отрезки a, b, c — его ***стороны***.

В зависимости от длин сторон треугольники могут быть таких видов:

– ***разносторонние***, если все стороны имеют различную длину;

– ***равнобедренные***, если равны две стороны;

– ***равносторонние***, если все стороны равны.

В зависимости от мер углов треугольники могут быть таких видов:

– ***остроугольные***, если все углы острые;

– ***тупоугольные***, если один из углов тупой:

– ***прямоугольные***, если один из углов прямой.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Обратите внимание на то, что слова «медиана», «медиатор», «медик» однокоренные. Они происходят от слова «медиум» — посредник, средний. Медиатор — предмет, позволяющий музыканту, например, гитаристу извлекать *звук из своего инструмента, медик — врач, с помощью которого происходит исцеление больного.*

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от его вершины до точки пересечения с противоположной стороной.

Обратите внимание на то, что в слове «биссектриса» корень «сектр», а приставка «бис», что означает повтор, дважды.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащую его противоположную сторону.

Готовимся к решению задач

1. Угол между биссектрисами смежных углов …

А. острый. **Б.** прямой. **В.** тупой. **Г.** может быть любым.

2. Как расположены биссектрисы внутренних разносторонних (накрест лежащих) углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?

А. Пересекаются. **Б.** Параллельны.

В. Перпендикулярны. **Г.** Определить нельзя.

3. Как расположены биссектрисы двух углов со взаимно перпендикулярными сторонами?

А. Перпендикулярны. **Б.** Параллельны.

В. Лежат на одной прямой. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

4. Медиана BD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равна 10 см, а периметр треугольника ABC равен 80 см. Периметр треугольника ABD равен ...

А. 40 см. **Б.** 45 см. **В.** 60 см. **Г.** 50 см.

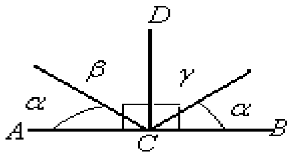
5. В треугольнике ABC угол A равен 38°, угол B равен 74°, M — точка пересечения биссектрис. Угол AMB равен …

А. 112°. **Б.** 124°. **В.** 105°. **Г.** 114°.

6. Один из внутренних углов треугольника равен разности двух других. Этот треугольник ...

А. остроугольный. **Б.** тупоугольный.

В. прямоугольный. **Г.** может быть любым.



7. Прямые *AB* и *CD* на рисунке перпендикулярны.

Сравните углы β и γ.

А. $\beta < \gamma$. **Б.** $\beta = \gamma$. **В.** $\gamma < \beta$. **Г.** Сравнить нельзя.

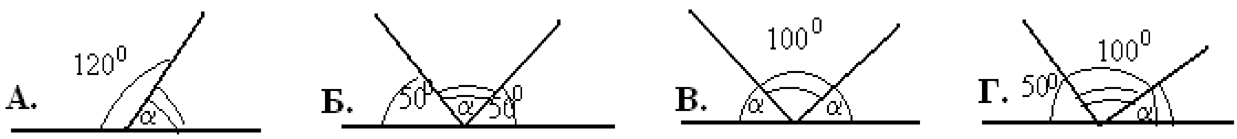
8. Стороны треугольника выражаются различными целыми числами; одна равна 3 м, другая — 2 м. Третья сторона может равняться …

А. 1 м. **Б.** 2 м. **В.** 4 м. **Г.** 5 м.

9. Стороны равнобедренного треугольника 11 см и 5 см. Периметр его равен …

А. 21 см. **Б.** 27 см. **В.** 16 см. **Г.** 33 см.

10. На каком из рисунков $\alpha = 40°$?



Решение задач

Имеет место важное соотношение между сторонами треугольника.

Неравенство треугольника. **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности**.

Задача 1. Имеется кусок проволоки длиной 12 м. Какой может быть наибольшая сторона треугольника, который можно согнуть из этого куска проволоки?

Анализируем. В задаче нужно рассмотреть треугольники с периметром 12 м. Существование треугольника с заданными длинами сторон определяется неравенством треугольника. Введя обозначение для наибольшей стороны треугольника, можно будет выразить через него сумму двух других сторон и составить соотношение на основании неравенства треугольника. Из этого соотношения можно получить ответ на вопрос, поставленный в задаче.

Решаем. Обозначим через a м длину наибольшей стороны треугольника. Так как периметр треугольника равен 12 м, то сумма длин двух других сторон равна $(12 - a)$ м. Согласно неравенству треугольника, длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон. Поэтому $a < 12 - a$, или $2a < 12$, $a < 6$.

Итак, длина наибольшей стороны треугольника меньше 6 м.

Ответ. Меньше 6 м.

1. *Хватит ли 12 м проволоки, чтобы согнуть из неё треугольник, одна из сторон которого равна: 1) 7 м; 2) 6 м; 3) 5 м?*

2. *Верно ли, что наибольшая сторона треугольника меньше его полупериметра?*

3. *Можно ли кусок проволоки длиной 12 м согнуть в равнобедренный треугольник с основанием 1 м?*

Из неравенства треугольника вытекает следующее следствие.

Длина отрезка прямой, соединяющего две точки, меньше длины любой ломаной, соединяющей эти точки.

Задача 2. Два пешехода одновременно вышли из пунктов A и B, расстояние между которыми 15 км. Двигаясь в направлении к пункту C, который не расположен между пунктами A и B, со скоростями 5 км/ч и 7 км/ч соответственно, они встретились в пункте C. Сколько времени могло длиться их путешествие?

Анализируем. Так как пункт C не расположен между пунктами A и B, то пункты A, B, C можно рассматривать как вершины треугольника. Обозначив какой-нибудь буквой время, через которое они встретились в пункте C, можно выразить через неё длины отрезков AC и BC, так как скорости их движения известны. Из неравенств треугольника можно получить оценки для искомого времени.

Решаем. Пусть пешеходы до встречи в C двигались t часов. Тогда $AC = 5t$ км, а $BC = 7t$ км. Изобразим

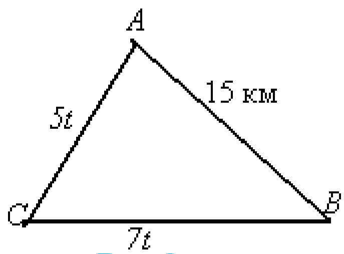


Рис. 2

маршруты движения пешеходов на рис. 2. В соответствии с неравенствами треугольника имеем неравенства: $BC - AC < AB < AC + BC$.

Подставив выражения для AC, BC, AB в эти неравенства, получим: $2t < 15 < 12t$ или $1{,}25 < t < 7{,}5$.

Следовательно, искомое время более 1 ч 15 мин и менее 7 ч 30 мин.

Ответ. Более 1 ч 15 мин и менее 7 ч 30 мин.

1. *На каком расстоянии пункт С может отстоять от пункта А?*

2. *Каким был бы ответ в задаче, если бы скорости пешеходов из А и В соответственно равнялись бы 4 км/ч и 6 км/ч?*

3. *Каким был бы ответ в задаче, если бы скорости пешеходов из А и В были равными и равнялись бы 5 км/ч?*

Важное свойство углов треугольника содержится в утверждении.

Сумма углов треугольника равна 180°.

Один из типов задач, в которых широко используется это основное свойство углов треугольника, связан с законом «угол падения равен углу отражения» (см. рис. 3). Этот закон используется в оптических задачах, при игре в бильярд.

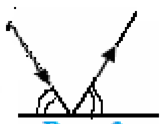


Рис. 3

Под углом падения (отражения) в планиметрии понимают угол между лучом падения (отражения) и прямой, к которой он проведен.

Задача 3. Шар на бильярдном столе прямоугольной формы после удара кием сначала ударился об один борт, а затем о соседний. Как расположены между собой направления траекторий движения шара перед первым отражением от борта и после второго?

Анализируем. Прежде всего, нужно смоделировать движение шара. Физической моделью бильярдного шара является материальная точка, которая на рисунке изображается точкой. Математической моделью бильярдного стола является прямоугольник. Траектория движения шара состоит из трёх частей:

1) после удара кием до первого отражения от борта;

2) после первого отражения от борта до второго;

3) после второго отражения от борта.

Из физики известно, что каждая из этих частей является прямолинейной траекторией и моделируется отрезком. Характеристика расположения траекторий сводится к характеристике расположения отрезков.

Решаем. Изобразим графически движение бильярдного шара, считая шар материальной точкой, движущейся прямолинейно и отражающейся от отрезков, моделирующих борта бильярдного стола по закону «угол падения равен углу отражения» (см. рис. 4). Здесь отрезок *MN* моделирует движение шара после удара кием до отражения от борта — отрезка *AB*, отрезок *NP* — после первого отражения до второго, отрезок *PQ* — после второго отражения.

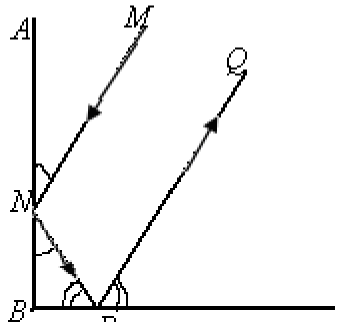


Рис. 4

Найдём сумму углов *MNP* и *NPQ*. Так как угол падения *MNA* равен углу отражения *BNP*, и сумма смежных углов равна 180°, то $\angle MNP = 180° - 2\angle MNA$. Аналогично, $\angle QPN = 180° - 2\angle NPB$. Сложив два эти равенства, получим: $\angle MNP + \angle QPN = 360° - 2(\angle MNA + \angle NPB)$.

Так как $\angle NBP = 90°$, а сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle MNA + \angle NPB = 90°$. Поэтому $\angle MNP + \angle QPN = 360° - 2\cdot 90° = 180°$.

Оказалось, что при пересечении двух прямых *MN* и *QP* прямой *NP* сумма $\angle MNP + \angle QPN$ внутренних односторонних углов составила 180°.

Следовательно, по признаку параллельности прямых, $MN \parallel QP$. Это значит, что направления указанных в условии траекторий противоположны.

Ответ. Противоположны.

1. *Чему равнялся бы угол MNP, если бы угол падения равнялся 45°?*

2. *Верно ли, что* $\angle MNB = \angle QPB$*?*

3. *Под каким бы углом пересеклись лучи MN и PQ, если бы угол между отрезками NB и BP был равен 60°?*

Рассмотренный закон о равенстве углов падения и отражения широко используется при игре в бильярд.

Задача 4. В центре бильярдного стола, имеющего форму равностороннего треугольника, лежит бильярдный шар. В какую точку одного из бортов следует его направить, чтобы после отражения от него:

а) шар попал в лузу (вершину стола);

б) шар двигался параллельно одному из бортов;

в) шар, отразившись от другого борта, прошёл через центр стола?

Анализируем. Отражение шара от борта на бильярдном столе подчиняется закону: угол падения равен углу отражения (см. рис. 5), Изобразив стол в виде правильного треугольника, а шар в виде точки, построим изображение движения шара в виде ломаной, звенья которой образуют равные углы со сторонами треугольника.

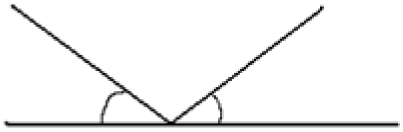


Рис. 5

Решаем. Изобразим бильярдный стол в виде правильного треугольника, а шар в виде точки.

а) Так как центр правильного треугольника является точкой пересечения его высот (а значит, и медиан, биссектрис, серединных перпендикуляров к его сторонам), то шар необходимо направить в середину любого борта (см. рис. 6).

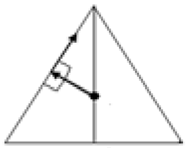


Рис. 6

б) Изобразим отражение шара от одного из бортов (см. рис. 7). Если $MN \parallel AC$, то $\alpha = 60°$. Тогда $ON \parallel AB$. Следовательно, шар нужно направить параллельно одному из бортов.

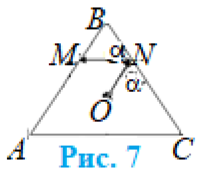


Рис. 7

в) Если $\alpha = 60°$, то, отразившись от другого борта, шар пройдёт через центр стола (рис. 8).

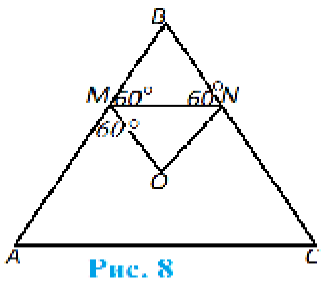


Рис. 8

1. *Куда попадёт шар, если его направить под углом 30° к борту?*

2. *Шар направлен параллельно одной из сторон стола. Чему равны расстояния от точки соприкосновения с первым бортом до всех луз (вершин) стола, если длина борта 180 см?*

3. *В какую точку одного из бортов квадратного бильярдного стола следует направить шар из центра стола, чтобы после отражения от борта он попал в лузу?*

Проверь себя

1. Кусок проволоки длиной 16 м можно согнуть в треугольник, одна из сторон которого равна …

А. 7 м. **Б.** 8 м. **В.** 9 м. **Г.** 10 м.

2. Два корабля после встречи двигались своими курсами прямолинейно с постоянными скоростями 15 км/ч и 20 км/ч. Какое из приведенных в ответах чисел не могло быть расстоянием между ними через 3 часа?

А. 105 км. **Б.** 75 км. **В.** 15 км. **Г.** 10 км.

3. В центре бильярдного стола, имеющего форму квадрата, лежит бильярдный шар. Его направили под углом 60° к одному из бортов. Под каким углом он отразится после отражения от соседнего борта?

А. 30°. **Б.** 45°. **В.** 60°. **Г.** 90°.

4. В центре бильярдного стола, имеющего форму равностороннего треугольника, лежит бильярдный шар. Его ударили кием, и он после отражения от одного борта ударился о другой. Какая из приведенных в ответах градусных мер может быть мерой угла отражения от второго борта?

А. 25°. **Б.** 55°. **В.** 95°. **Г.** 105°.

Реши сам

1. Двухзвенный шарнир состоит из звеньев длиной 5 см и 3 см, концы которых соединены так, что могут вращаться друг относительно друга (см. рис. 9). Какое расстояние минимальное и максимальное может быть между другими концами?

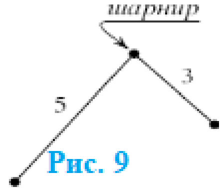


Рис. 9

2. Два корабля после встречи двигались своими курсами прямолинейно с постоянными скоростями 15 км/ч и 20 км/ч. Через некоторое время расстояние между ними было 70 км. Сколько времени могло пройти после их встречи?

3. В центре бильярдного стола, имеющего форму квадрата и лузы которого находятся только в углах, лежит бильярдный шар. Можно ли так кием направить шар, чтобы, отразившись от одного борта, а затем от противоположного, он попал в лузу?

4. В центре бильярдного стола, имеющего форму равностороннего треугольника, лежит бильярдный шар. Может ли шар после отражения от одного борта, затем от другого и, наконец, от третьего, пройти через центр стола?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Б. Воспользуйтесь тем, что сумма смежных углов равна 180°.

2. Б. Воспользуйтесь тем, что внутренние разносторонние (накрест лежащие) углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущей, равны.

3. Г. Воспользуйтесь тем, что углы со взаимно перпендикулярными сторонами или равны, или в сумме образуют 180°.

4. Г. Обратите внимание на то, что периметр треугольника ABD равен сумме полупериметра треугольника ABC и длины медианы BD.

5. Б. Воспользуйтесь тем, что сумма углов треугольника равна 180°.

6. В. Воспользуйтесь тем, что сумма углов треугольника равна 180°.

7. Б. Воспользуйтесь тем, что углы β и γ дополняют равные углы до прямых.

8. В. Примените неравенство треугольника; обратите внимание на то, что стороны треугольника выражаются различными целыми числами.

9. Б. Примените неравенство треугольника.

10. В. Примените свойство смежных углов.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 1) Нет; 2) нет; 3) да. **2.** Да. **3.** Да. **Задача 2. 1.** От 6,25 км до 37,5 км. **2.** Более 1 ч 30 мин и менее 7 ч 30 мин. **3.** Более 1 ч 30 мин. **Задача 3. 1.** 90°. **2.** Нет. **3.** 60°. **Задача 4. 1.** В лузу. **2.** 60 см, 120 см и ≈159 см. 3. В середину борта.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
А	Г	А	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 2 см и 8 см. Рассмотрите различные положения звеньев шарнира. Воспользуйтесь неравенством треугольника.

2. Не более 14 часов, не менее 2 часов. Обозначьте искомое время какой-нибудь буквой и выразите через неё расстояния, пройденные кораблями после встречи, а затем воспользуйтесь неравенствами треугольника.

3. Можно. Постройте ломаную из трёх звеньев, один конец которой в центре квадрата, а другой — в вершине.

4. Может. Постройте траекторию так, чтобы после отражения от первого борта шар попал в середину второго.

2. Прямоугольный треугольник

Нахождение длин отрезков, расстояний часто можно свести к нахождению длин сторон треугольника по некоторым его данным. Наиболее удобным для таких целей является прямоугольный треугольник.

Треугольник называется прямоугольным, если один из его углов — прямой.

Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называют ***катетами***, а сторону, лежащую против прямого угла — ***гипотенузой***.

Слово «катет» является однокорневым со словами катакомба, каталог, катаракта. Корень hata греческого происхождения, означает: вниз, падать.

Слово «гипотенуза» переводится с греческого, как быть противоположным, то есть стороной треугольника, противоположного его прямому углу.

Одной из важнейших теорем геометрии является ***теорема Пифагора***.

В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Эта теорема позволяет по двум катетам найти гипотенузу или по гипотенузе и одному катету найти второй катет.

Готовимся к решению задач

1. Из одной точки, расположенной вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр длиной 8 см и наклонная, проекция которой на прямую равна 6 см. Длина наклонной равна …

А. $\sqrt{28}$ см. **Б.** 9 см. **В.** 10 см. **Г.** величине, отличной от приведенных.

2. Из одной точки, лежащей вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр и наклонная длиной 13 см, проекция которой равна 9 см. Найдите длину перпендикуляра.

А. $2\sqrt{22}$ см. **Б.** $5\sqrt{10}$ см. **В.** 44 см. **Г.** 125 см.

3. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 12 см и 10 см. Высота, опущенная на его основание, равна … **А.** 6 см. **Б.** 13 см. **В.** $\sqrt{119}$ см. **Г.** 8 см.

4. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, а меньший катет 8 см. Гипотенуза равна ...

А. $8\sqrt{3}$ см. **Б.** 12 см. **В.** $12\sqrt{3}$ см. **Г.** 16 см.

5. Сторона ромба равна 6 см, острый угол 60°. Диагонали ромба равны …

А. 6 и 12 см. **Б.** 6 и $6\sqrt{3}$ см. **В.** 3 и $3\sqrt{3}$ см. **Г.** 3 и $6\sqrt{3}$ см.

6. Средняя линия треугольника отсекает от него трапецию с боковыми сторонами 3 см и 4 см и меньшим основанием 5 см. Найдите периметр треугольника.

7. Диагональ прямоугольного участка земли равна 116 м, а одна из сторон — 84 м. Каков периметр этого участка?

8. Наблюдателю, находящемуся на высоте 50 м, автомобиль виден под углом 30°. Каково расстояние от наблюдателя до автомобиля?

А. 50 м. **Б.** 100 м. **В.** ≈87 м. **Г.** ≈58 м.

9. Ширина верхней части насыпи шоссейной дороги, поперечное сечение которого — равнобедренная трапеция, равна 60 м (рис. 10). Какова ширина основания насыпи, если его высота равна 10 м, а угол наклона — 60°?

А. 65 м. **Б.** 70 м. **В.** ≈72 м. **Г.** ≈66 м.

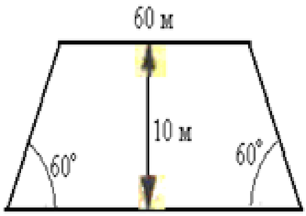
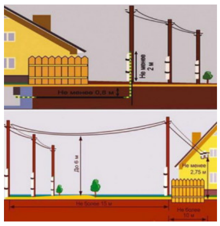


Рис. 10

10. Железная дорога в горах на одном из перегонов поднимается на 1 м на каждые 60 м пути. Найдите синус угла подъёма дороги на этом участке.

Решение задач

В большинстве задач данного блока используется теорема Пифагора.



Задача 1. Между двумя вертикальными столбами высотой 12 м и 8 м, находящимися на расстоянии 16 м друг от друга, нужно протянуть две линии кабеля, закрепив их на столбах на расстоянии 0,7 м от верха. Сколько метров кабеля необходимо приобрести, если на крепление одного конца кабеля требуется 0,25 м?

Анализируем. Изобразим графически условие задачи, моделируя столбы параллельными отрезками, перпендикулярными к некоторой прямой, моделирующей местность. Места крепления кабеля обозначим буквами M и N (см. рис. 11). Задача сводится к нахождению расстояния между точками M и N, если предполагать, что кабель не провисает. По условию известны длины отрезков AM, CN и AC. Чтобы найти длину отрезка MN, проведём из точки M перпендикуляр MK к прямой CD (см. рис. 12). Из построения следует, что $MK = AC$, $NK = CN – AM$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике MNK известны катеты. По теореме Пифагора можно найти гипотенузу. Останется только учесть расход на крепление концов двух линий кабеля.

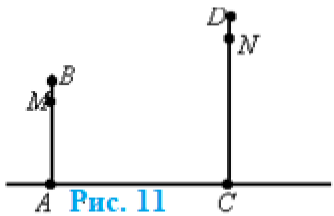


Рис. 11

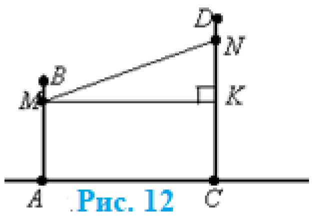


Рис. 12

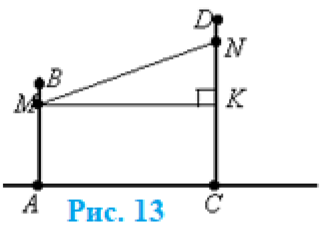


Рис. 13

Решаем. Изобразим условие задачи на рис. 13. Здесь отрезки AB и CD изображают столбы, точки A и C

— основания столбов на земле, точки M и N — места крепления провода на столбах, точка K — основание перпендикуляра, проведенного из точки M к прямой CN. Из условия и построения следуют равенства: $AM = AB - BM = 8 - 0{,}7 = 7{,}3$ (м), $CK = AM$, $MK = AC =$
16 м, $NK = CD - DN - KC = 12 - 0{,}7 - 7{,}3 = 4$ м.

По теореме Пифагора, имеем:

$$MN = \sqrt{MK^2 + NK^2} = \sqrt{16^2 + 16} = 4\sqrt{17} \approx 16{,}7 \text{ м.}$$

Следовательно, необходимо примерно $2(16{,}7 + 0{,}25 \cdot 4) \approx 36$ м кабеля.

Ответ. ≈36 м.

1. *Чему равно расстояние между верхними концами столбов?*

2. *Сколько понадобилось бы метров кабеля, если бы столбы были одной высоты?*

3. *Сколько понадобилось бы метров кабеля, если учесть провисание кабеля, на которое уходит 15% от расстояния?*

Вычисление значений геометрических величин (длин, углов, площадей) в жизненных задачах требует записи ответов с необходимой точностью. Приведём краткие сведения по приближённым вычислениям, необходимые для решения прикладных задач.

При использовании приближенных значений величин часто возникает потребность сравнить качество разных приближений. Показателем точности разных приближений одной величины может быть отклонение этих приближений от точного значения.

Разность $x - a$ между точным значением величины x и ее приближенным значением a называется погрешностью приближения. Если погрешность отрицательная, то говорят, что приближение взято с избытком, если положительная — приближение взято с недостатком.

Модуль погрешности приближения значения величины x называется абсолютной погрешностью приближения и обозначается $\Delta_a x$ или Δ_a:

$$\Delta_a x = |x - a|.$$

Если в приближенном числе цифр больше, чем это необходимо из практических соображений, то данное число округляют. Оставлять цифр больше, чем нужно, — дело не только излишнее, а и ошибочное, поскольку может сложиться впечатление, что результат имеет большую точность, чем это есть на самом деле.

Существует три способа округления: ***округление с избытком, округление с недостатком и округление с наименьшей погрешностью***.

При округлении с избытком цифру последнего разряда, которая сохраняется в числе, всегда увеличивают на единицу. Например, при округлении числа 34,27 с избытком до десятых, единиц, десятков получаем, соответственно, 34,3; 35; 40.

При округлении с недостатком цифра последнего разряда, который сохраняется в числе, остается неизменной. Так, при округлении с недостатком до десятых, единиц, десятков числа 34,27 соответственно получаем 34,2; 34; 30.

Округление с недостатком и с избытком используют нечасто. Большей частью используют округление с наименьшей погрешностью.

Если цифра первого отброшенного разряда меньше 5, то округляют с недостатком, если же больше или равна 5, то округляют с избытком.

Проводя такое округление числа 217,541 до сотых, десятых, единиц, десятков, сотен, получим соответственно: 217,54; 217,5; 218; $2{,}2 \cdot 10^2$; $2 \cdot 10^2$. Погрешности округлений соответственно равняются 0,001; 0,041; 0,459; 2,459; 17,541. Погрешность округления с наименьшей погрешностью не превышает пяти единиц первого отброшенного разряда.

Поэтому, когда нужно выбрать наиболее точное значение из приведенных, вычисляют её значение с запасным знаком, а затем округляют с наименьшей погрешностью.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

В следующей задаче, кроме теоремы Пифагора, будут использованы признаки равенства прямоугольных треугольников.

Задача 2. Когда канатоходец встал на середину каната, натянутого между двумя столбами и расположенного горизонтально, то он опустился на 1 м. На сколько примерно процентов удлинился канат, если расстояние между столбами равно: а) 8 м; б) 20 м?

Анализируем. Пользуясь условием, нужно сначала построить математическую модель расположения каната до и после того, как на его середину стал канатоходец. Естественно, что канатоходец изображается точкой — серединой отрезка, моделирующего канат. Тогда перпендикуляр к этому отрезку, проведенный из его середины и имеющий длину 1 м, моделирует перемещение канатоходца, ставшего на середину каната (рис. 14).

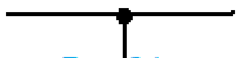


Рис. 14

Растянутый канат изображается двумя равными отрезками, являющимися гипотенузами равных прямоугольных треугольников (рис. 15). Чтобы найти длину растянутого каната, нужно вычислить длины гипотенуз этих треугольников. Затем останется найти, на сколько удлинился канат и сколько процентов это удлинение составляет от первоначальной длины каната.

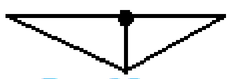


Рис. 15

Решаем. Изобразим условие задачи на рис. 16. Здесь через a обозначена половина длины нерастянутого каната, K — середина отрезка AB, $KC \perp AB$, $KC = 1$. Прямоугольные треугольники AKC и BKC равны, так как у них равны катеты: $AK = KB$, KC — общий катет. Следовательно, $AC = BC$.

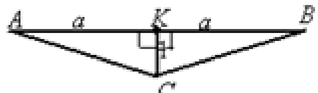


Рис. 16

По теореме Пифагора, $AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{a^2+1}$. Длина каната была $2a$, а стала $2\sqrt{a^2+1}$. Удлинение равно $2(\sqrt{a^2+1} - a)$. Оно составляет $\frac{2(\sqrt{a^2+1}-a)}{2a} \cdot 100\%$ от первоначальной длины.

а) При $a = 8$ м канат удлиняется на $\frac{2(\sqrt{65}-8)}{16} \cdot 100\% \approx 0{,}8\%$.

б) При $a = 20$ м канат удлиняется на $\frac{2(\sqrt{401}-20)}{16} \cdot 100\% \approx 0{,}1\%$.

Ответ. а) ≈0,8%; б) ≈0,1%.

1. *Чему примерно равна длина удлинённого каната, если расстояние между столбами равно 8 м?*

2. *Чему примерно равна длина первоначального каната, если он удлинился на 2 см и канат опустился на* $\sqrt{6}$ *м, когда артист стал на его середину?*

3. *Чему равна длина первоначального каната, если он удлинился на 0,5%?*

Теорема Пифагора широко применяется для вычисления расстояний между точками.

Задача 3. На поверхность моря поднялся кит. Сначала он проплыл 400 м в одном направлении, затем он молниеносно повернул и проплыл 800 м в направлении, перпендикулярном предыдущему, далее мгновенно вернулся на прежний курс, проплыл 200 м и погрузился в море. Найти расстояние между точкой, где кит поднялся на поверхность, и точкой, где он погрузился в море.

Анализируем. Искомое расстояние является длиной отрезка, концы которого указаны в условии задачи. Чтобы применить теорему Пифагора для нахождения длины отрезка, нужно этот отрезок рассматривать как сторону прямоугольного треугольника, длины двух других сторон которого известны. Чтобы найти искомое расстояние, нужно сначала, пользуясь условием, изобразить траекторию движения кита, а затем воспользоваться приведенной выше рекомендацией.

Решаем. Изобразим на рис. 17, пользуясь условием, траекторию движения кита. В точке P кит поднялся на поверхность, в точках A и B он менял курс, в точке K погрузился в море. Искомое расстояние равно длине отрезка PK.

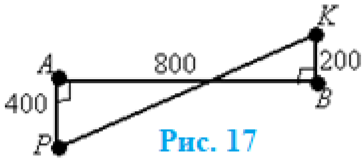


Рис. 17

Построим прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок PK. Для этого продолжим отрезок PA за точку A на длину отрезка BK: $AC = BK$. Треугольник PCK является прямоугольным, так как четырёхугольник $ACKB$ — прямоугольник: $AC = BK$, $AC \parallel BK$, $\angle A = 90°$, $\angle B = 90°$ (рис. 18).

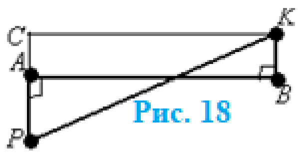
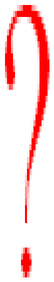


Рис. 18

В прямоугольном треугольнике PCK ($\angle C = 90°$) известны катеты $PC = PA + BK = 400 + 200 = 600$ м, $CK = AB = 800$ м. По теореме Пифагора, $PK = \sqrt{PC^2 + CK^2} = \sqrt{600^2 + 800^2} = 1000$ (м). Искомое расстояние равно 1 км.

Ответ. 1 км.



1. *Чему равна длина пути, который проплыл кит?*

2. *Чему примерно равно расстояние от точки, где кит всплыл на поверхность, до точки, где он второй раз поменял курс?*

3. *Каким будет ответ в задаче, если кит сделает ещё один поворот на 90° в направлении, противоположном тому, в котором он плыл до этого, и проплывёт 200 м?*

Для нахождения расстояний с помощью теоремы Пифагора очень важно правильно моделировать пространственные конструкции.

Задача 4. К стене дома приставлена большая лестница. Под ней поставили к стене маленькую лестницу так, что концы лестниц на земле находятся на расстоянии 2 м друг от друга, а верхние концы на стене — на расстоянии 1 м (рис 19). Найти с точностью до 1 дм расстояние от кошки, сидящей посередине маленькой лестницы, до воробья, севшего на середину большой лестницы.

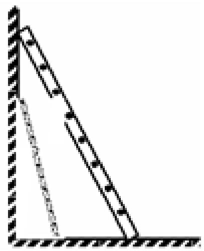


Рис 19

Анализируем. Будем изображать лестницы отрезками, концы которых расположены на сторонах прямого угла (см. рис. 20). Тогда середины этих отрезков будут изображениями кошки и воробья.

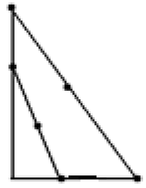


Рис. 20

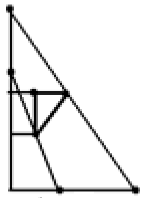


Рис. 21

Задача сводится к нахождению расстояния между серединами гипотенуз треугольников, изображённых на рис. 21. Отрезок, соединяющий эти середины, можно рассматривать как гипотенузу прямоугольного треугольника, один катет которого лежит на средней линий прямоугольного треугольника.

Решаем. На рис. 22 схематично изображено условие задачи: отрезки MN, AC моделируют лестницы, точки K и B — их середины. Пусть BF, KE — средние линии соответственно треугольников OMN и OAC. Тогда $BF = \frac{1}{2}OM$, $KE = \frac{1}{2}OA$. Пусть $KP \perp BF$. Тогда $PF = KE$ и $BP = BF - PF = BF - KE =$ $\frac{1}{2}OM - \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}AM - \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}AM = 1$.

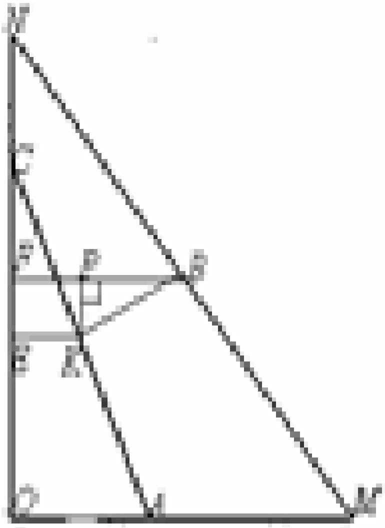


Рис. 22

Аналогично находим:

$$KP = EF = EC - CF = \frac{1}{2}CO - (CO - FO) = FO - \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}(NO - CO) = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $BK = \sqrt{BP^2 + PK^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1$ м. Искомое расстояние равно примерно 1,1 м.

Ответ. ≈ 1,1 м.

1. *Чему будет равно искомое расстояние, если концы лестниц на земле удалены друг от друга на 1 м, а вдоль стены — на 2 м?*

2. *Чему будет равно искомое расстояние, если концы лестниц на земле удалены друг от друга на 4 м, а вдоль стены — на 2 м?*

3. *Зависит ли искомое расстояние от длин лестниц?*

Многие прикладные задачи зачастую сводятся к решению треугольников, т.е. к вычислению его сторон и углов по некоторым из них. Одним из методов, применяемых при этом, является вычленение прямоугольного треугольника, после чего всё сводится к работе с этим треугольником. При этом широко используются соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника с помощью тригонометрических функций (рис. 23):

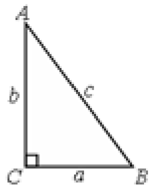


Рис. 23

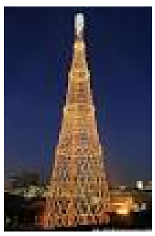
$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \qquad tgA = \frac{a}{b}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A \qquad tgB = \frac{b}{a}$$

Значения тригонометрических функций часто встречающихся углов представлены в следующей таблице.

A	sin$A$	cos$A$	tg$A$	ctg$A$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Задача 5. Башню видно из некоторой точки на местности, расположенной на расстоянии 170 м от основания башни, под углом 30°. На сколько метров ближе следует подойти к основанию башни, чтобы башню была видно под углом 60°?



Анализируем. Обозначив буквой искомое расстояние, можно выразить через неё расстояние от выбранной точки наблюдения до основания башни. Затем, воспользовавшись тригонометрическими функциями острого угла прямоугольного треугольника, можно выразить через введенное обозначение двумя способами высоту башни. Приравняв два полученных выражения, получим уравнение, из которого можно найти искомое расстояние.

Решаем. Пусть отрезок CB является изображением башни, отрезок AD — пути, на который надо подойти к башне, а точка C — ее основания (см. рис.24). Из точки A отрезок BC виден под углом 30°, а из точки D — под углом 60°. Обозначим искомое расстояние через x, то есть $AD = x$. Тогда по условию $CD = 170 - x$. Из прямоугольных треугольников ACB и DCB имеем:

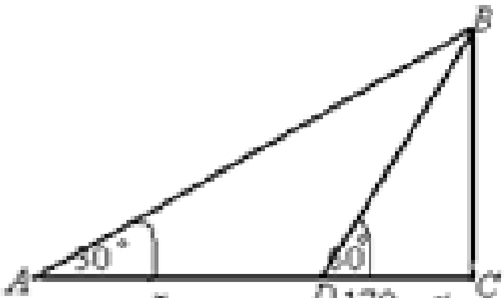


Рис. 24

$$BC = AC \cdot \text{tg}30° = 170 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},\ BC = CD \cdot \text{tg}\,60° = (170 - x) \cdot \sqrt{3}.$$

Отсюда $(170 - x) \cdot \sqrt{3} = 170 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $3x = 340$, $x \approx 113$ м.

Следовательно, к башне надо подойти примерно на 113 м.

Ответ. Примерно на 113 м.

1. *Какова примерная высота башни?*

2. *Чему равны расстояния от точек наблюдения до вершины башни?*

3. *Равны ли отношения* $\frac{BC}{AC}$ и $\frac{DC}{BC}$*?*

Теорема Пифагора часто применяется в задачах, связанных с прямолинейным равномерным движением двух тел.

Задача 6. Маша и Петя вышли одновременно из своих домов в школу по двум взаимно перпендикулярным улицам, на пересечении которых находится школа. Маша шла со скоростью 4 км/ч, а Петя — со скоростью 5 км/ч. Петя пришёл в школу на 6 минут

позже Маши. На каком расстоянии друг от друга находятся дома Пети и Маши, если расстояние от дома Пети до школы равно 1,5 км?

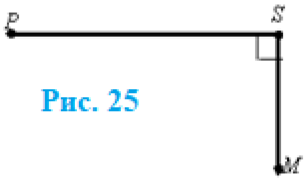


Рис. 25

Анализируем. Изобразим расположение дома Пети точкой *P*, дома Маши — точкой *M*, школы — точкой *S* (см. рис. 25). По условию известно расстояние между точками *P* и *S*, требуется найти расстояние между точками *P* и *M*. Из условия следует, что точки *P*, *M* и *S* являются вершинами прямоугольного треугольника. Для нахождения искомого расстояния с помощью теоремы Пифагора нужно сначала найти *SM*, то есть расстояние от дома Маши до школы. Для этого можно воспользоваться информацией о расстоянии *PS*, скоростях ходьбы детей и разности времени, затраченного ими на ходьбу до школы.

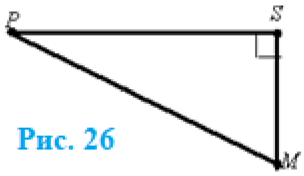


Рис. 26

Решаем. Обозначим точками *P*, *M* и *S* соответственно расположение домов Пети, Маши и школы. Из условия следует, что треугольник *PSM* прямоугольный (рис. 26).

Обозначим длину отрезка *SM* через x км. Тогда Маша доходит из дома до школы за $\frac{x}{4}$ ч, а Петя — за $\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{10}\right)$ ч. По условию, *PS* = 1,5 км. Имеем уравнение $5\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{10}\right) = 1{,}5$, $x = \frac{4}{5} = 0{,}8$ км. Найдём искомое расстояние по теореме Пифагора:

$$PM = \sqrt{PS^2 + MS^2} = \sqrt{(1{,}5)^2 + (0{,}8)^2} = \sqrt{2{,}25 + 0{,}64} = \sqrt{2{,}89} = 1{,}7 \text{ км}.$$

Ответ. 1,7 км.

1. *Сколько времени потратила Маша на дорогу в школу?*

2. *Какое расстояние было бы между домами Пети и Маши, если бы они оба шли со скоростью 4 км/ч, а расстояние от дома Пети до школы равнялось 1,6 км, и были выполнены все остальные условия?*

3. *На каком расстоянии жила бы Маша от школы, если бы расстояние между домами Маши и Пети было бы 1,5 км и были выполнены все условия, касающиеся скоростей и времени движения детей?*

Проверь себя

1. Бельевая верёвка длиной 8 м привязана к верхним концам двух столбов разной высоты. Расстояние между основаниями столбов равно 7,9 м. На сколько сантиметров примерно один столб выше другого? Выберите наиболее точное значение.

А. На 125 см. **Б.** На 130 см. **В.** На 140 см. **Г.** На 150 см.

2. Ветер сломал дерево высотой 16 м. Вершина касается земли на расстоянии 8 м от ствола. На какой высоте сломалось дерево?

А. 4 м. **Б.** 5 м. **В.** 6 м. **Г.** 10 м.

3. На прогулке человек вначале прошёл 2 км на восток, затем 3 км на север, далее 4 км на восток и, наконец, 5 км на север. Каково расстояние между начальной и конечной точками его прогулки?

А. 14 км. **Б.** 12 км. **В.** 11 км. **Г.** 10 км.

4. Лестницу длиной 8 м приставили к вертикальному столбу так, что они образовали угол 45°. На какой примерно высоте от земли находится верхний конец лестницы? Выберите наиболее точное значение.

А. 4 м. **Б.** 5 м. **В.** 6 м. **Г.** 7 м.

5. Башню высотой 75 м видно из некоторой точки на местности под углом 60°. Чему примерно равно расстояние от этой точки до вершины башни? Выберите наиболее точное значение.

А. 90 м. **Б.** 100 м. **В.** 120 м. **Г.** 150 м.

6. На перекрёстке двух дорог встретились пешеход и велосипедист, а затем каждый продолжал свой путь: велосипедист — на север со скоростью 12 км/ч, а пешеход — на восток со скоростью 5 км/ч. Через какое время после их встречи пешеход и велосипедист окажутся на расстоянии 26 км друг от друга?

А. Через 4 ч. **Б.** Через 3 ч. **В.** Через 2 ч. **Г.** Через 1 ч.

Реши сам

1. Хватит ли 11 метров кабеля, чтобы протянуть его со столба на расстоянии 7 м от земли до угла дома на высоте 4 метра от земли, если расстояние от столба до угла дома равно 10 м и на крепление концов нужно 0,5 м?

2. Когда канатоходец встал на середину каната, горизонтально натянутого между двумя столбами, расстояние между которыми 48 м, то канат удлинился на 4 см. На какое расстояние артист приблизился к земле?

3. Робот начинает движение в некоторой точке, в начале движения он выбирает направление движения. Далее робот движется прямолинейно 10 м, затем поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м и т. д. На какое наибольшее расстояние с точностью до 1 м он мог удалиться, если робот остановился на месте 6-го поворота?

4. К стене дома приставлена лестница длиной 4 м так, что она образует с ней угол 30°. Чему примерно с точностью до 1 дм равно расстояние от котёнка, сидящего посередине лестницы, до земли?

5. Башню видно из некоторой точки на местности, расположенной на расстоянии 70 м от основания башни, под углом 60°. На сколько примерно метров дальше надо отойти от основания башни, чтобы её было видно под углом 30°?

6. С аэродрома вылетели одновременно два самолёта: один — на запад, другой — на юг. Через два часа расстояние между ними было 2000 км. На сколько км/ч скорость одного самолёта превосходила скорость другого, если скорость последнего составляла 75% скорости первого?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. В. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

2. А. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

3. Г. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

4. Г. Воспользуйтесь свойством катета, лежащего против угла 30°.

5. Б. Докажите, что треугольник, образованный двумя сторонами ромба и его меньшей диагональю, является равносторонним; воспользуйтесь теоремой Пифагора.

6. 24 см. Воспользуйтесь свойствами средней линии треугольника.

7. 328 м. Найдите по теореме Пифагора вторую сторону участка.

8. Г. Воспользуйтесь тригонометрическими функциями острого угла прямоугольного треугольника.

9. В. Проведите перпендикуляры из вершин тупых углов трапеции, воспользуйтесь тригонометрическими функциями острого угла полученного прямоугольного треугольника.

10. ≈0,0167. Воспользуйтесь определением синуса острого угла прямоугольного треугольника.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. ≈17 м. **2.** 17 м. **3.** ≈40 м.

Задача 2. 1. 8 м 6 см. **2.** 5 м. **3.** 20 м.

Задача 3. 1. 1 км 600 м. **2.** 894 м. **3.** ≈894 м.

Задача 4. 1. ≈1,1 м. **2.** ≈2,2 м. **3.** Не зависит.

Задача 5. 1. 98 м. **2.** 196 м и 113 м. **3.** Да.

Задача 6. 1. 12 минут. **2.** 2 км. **3.** ≈0,7 км.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6
Б	В	Г	В	А	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Хватит. Рассмотрите прямоугольный треугольник, двумя вершинами которого являются верхние концы столба и угла дома и воспользуйтесь теоремой Пифагора.

2. 98 см. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

3. 42 м. Воспользуйтесь тем, что робот удалится на наибольшее расстояние, если после поворота налево он делает поворот направо и наоборот.

4. 17 дм. Воспользуйтесь свойством средней линии в прямоугольном треугольнике, содержащей середину гипотенузы.

5. На 140 м. Вначале найдите высоту башни, а затем расстояние от второй точки наблюдения до башни, пользуясь соотношениями между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

6. На 200 км/ч. Введите обозначение для большей скорости самолёта, выразите через него меньшую скорость, расстояние между самолётами через 2 часа полёта, составьте уравнение, пользуясь теоремой Пифагора.

3. Подобные треугольники

В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например, географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах, фотографии одного и того же предмета, сделанные при разных увеличениях, мячи, кубики, монеты и т. д. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть ***подобными***.

Два треугольника называются подобными, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, и стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого, лежащим против равных углов.

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых вершинам A, B, C соответствуют вершины A_1, B_1, C_1, означает выполнение следующих пяти равенств:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Подобие треугольников можно установить, сравнивая меньшее количество углов и сторон.

Признаки подобия треугольников

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, и углы между ними равны, то такие треугольники подобны.

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Из этих признаков можно получить признаки подобия прямоугольных треугольников.

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого, то такие треугольники подобны.

Если два катета одного треугольника пропорциональны двум катетам другого, то такие треугольники подобны.

Готовимся к решению задач

1. При каком из следующих условий два прямоугольных треугольника не будут подобными?

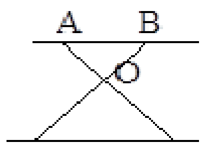
А. Они имеют общий острый угол.

Б. Они равнобедренные.

В. Один из них имеет угол 20°, а другой — угол 70°.

Г. Один из них имеет угол 20°, а катет другого вдвое меньше гипотенузы.

2. Прямые *AB* и *CD* параллельны (рис. 27). Отрезки *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. Длины отрезков *AB* и *CD* соответственно равны 4 см и 6 см. Отношение *AO*:*OC* равно …



DРис. 27C

А. 3:2. **Б.** 1:2. **В.** 1:3. **Г.** 2:3.

3. На рис. 28 *ABCD* — параллелограмм. *AD* = 12 см, *CE* = 4 см, *CF* = 2 см. Длина стороны *AB* равна ...

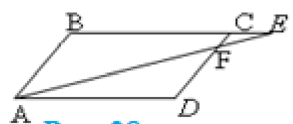


Рис. 28

А. 6 см. **Б.** 9 см. **В.** 10 см. **Г.** 8 см.

4. На рис. 29 $AB \parallel CD$, $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3}$, *FD* = 6 см. Чему равен отрезок *BD*?

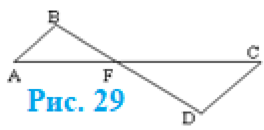


Рис. 29

А. 2 см. **Б.** 8 см. **В.** 10 см. **Г.** 9 см.

5. Параллельные прямые на рис. 30 пересекают стороны угла с вершиной *O* в точках *A*, *B*, *C*, *D*. Найдите длину отрезка *BD*, если *OB* = 3, *OA* = 4, *AC* = 2.

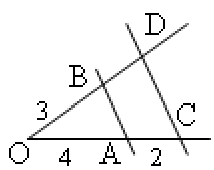


Рис. 30

А. 1,5. **Б.** 6. **В.** 4. **Г.** 4,5.

6. На рис. 31 *ABCD* — параллелограмм., *AB* = 8 см, *CE* = 2 см. Отношение *AE* к *FE* равно ... Уточнён рис. 31

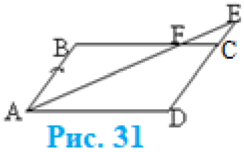


Рис. 31

А. 3:1. **Б.** 4:1. **В.** 5:1. **Г.** 9:2.

7. Тень от башни равна 24 м, а вертикальный шест длиной 1,2 м в то же время дня даёт тень длиной 80 см. Какова высота башни?

А. 36 м. **Б.** 32 м. **В. 2**8 м. **Г.** 26 м.

8. Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 8,4 м, а тень от вертикального столба высотой 3 м равна 4,2 м.

А. 16 м. **Б.** 12 м. **В.** 8 м. **Г.** 6 м.

9. Найдите расстояние до телеграфного столба, если на расстоянии вытянутой руки он закрывается половиной спички. Высота телеграфного столба равна 8 м, длина вытянутой руки — 75 см, длина спички — 40 мм.

Решение задач

Подобие прямоугольных треугольников широко используется для измерения длин объектов с помощью измерения их теней при освещении параллельными лучами света.

Задача 1. Длина тени, которую отбрасывает столб высотой 5 м в некоторый момент времени, равна 3 м. Чему примерно равна высота дерева, если длина тени от него в тот же момент времени равна 2 м?

Анализируем. Столб и его тень можно изобразить катетами прямоугольного треугольника. Аналогично можно интерпретировать дерево и его тень. Так как гипотенузы этих треугольников указывают направление лучей солнца, а их можно считать параллельными, то в обоих треугольниках есть равные острые углы, равные углу наклона солнечных лучей к поверхности земли. Следовательно, эти прямоугольные треугольники подобны. Пользуясь подобием, можно найти длину катета, моделирующего дерево.

Решаем. Изобразим столб и дерево отрезками, их тени — тоже отрезками, соответственно перпендикулярными предыдущим (см. рис. 32). Острые углы между изображениями лучей и изображениями теней равны, так как солнечные лучи можно считать одинаково направленными. Следовательно, эти прямоугольные треугольники подобны.

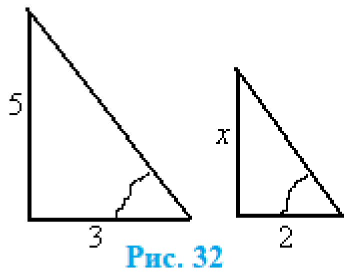


Рис. 32

Из подобия треугольников вытекает уравнение: $\frac{5}{3} = \frac{x}{2}$. Отсюда $x \approx 3{,}3$ (м). Высота дерева примерно равна 3,3 м.

Ответ. ≈3,3 м.

1. *Какова длина тени от столба высотой 6 м, если лучи солнца на поверхность земли падают под углом 45°?*

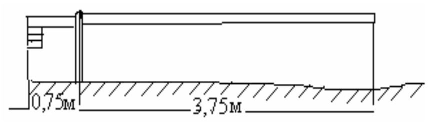
2. *Какой будет высота дерева, если длина тени дерева равна 5 м?*

3. *На каком расстоянии от дерева должен стоять мальчик, рост которого 1 м 50 см, чтобы он находился в тени дерева?*

Замечание. Указанный способ не слишком надёжен, так как отбрасываемая при свете солнца тень не имеет отчётливой границы из-за присущей ей неясно очерченной каймы полутени.

Подобие двух прямоугольных треугольников по равному острому углу будет использован и при решении следующей задачи.

Задача 2. На рисунке изображён железнодорожный шлагбаум. На сколько сантиметров приблизится к земле конец короткого плеча шлагбаума, если конец длинного поднимется вверх на 1 м?



Анализируем. Если шлагбаум рассматривать как отрезок, закреплённый в точке, то, изобразив его горизонтальное положение и поднятое, можно изобразить отрезками расстояния, на которые поднялся один конец и опустился другой.

Решаем. Изобразим поднятый шлагбаум отрезком AB, проходящим через точку O, которая является изображением места крепления шлагбаума (см. рис. 33). Точки C и D — основания перпендикуляров, проведенных из точек A и B к прямой CD, параллельной поверхности земли. Длина отрезка BD равна 1 м по условию. Нужно найти длину отрезка AC, зная, что AO = 0,75 м, OB = 3,75 м.

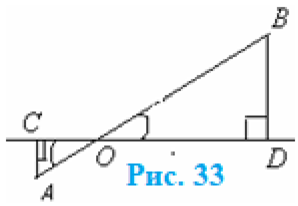


Рис. 33

Рассмотрим прямоугольные треугольники AOC и BOD. У них $\angle COA = \angle DOB$, как вертикальные. Эти треугольники подобны по признаку подобия прямоугольных треугольников.

Из подобия треугольников вытекает пропорциональность сторон: $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{CA}{BD}$. Используя данные из условия, получим: $\dfrac{0{,}75}{3{,}75} = \dfrac{CA}{1}$. Отсюда $CA = 0{,}2$ м. Следовательно, меньшее плечо шлагбаума приблизится к земле на 20 см.

Ответ. На 20 см.

1. *Чему равно отношение* $\dfrac{CO}{OD}$?

2. *На сколько сантиметров приблизится к земле меньший конец шлагбаума, если больший поднимется над землёй на 1,5 м?*

3. *Можно ли из условия найти длины отрезков CO и OD?*

Подобие треугольников широко применяется в задачах оптики, в частности при использовании изображений объектов для их характеристики.

Задача 3. На плёнке изображение дерева, находящегося на расстоянии 90 м от объектива фотоаппарата, имеет высоту 10 мм (см. рис. 34). Чему равна высота дерева, если расстояние от объектива до изображения равно 50 мм?

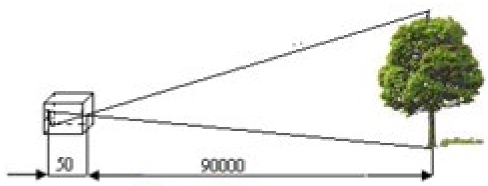


Рис. 34

Анализируем. Если дерево и его изображение на плёнке моделировать параллельными отрезками, то задача сводится к рассмотрению фигуры, изображённой на рис. 34 а. Из по-


Рис. 34 а

строения следует, что треугольники на рисунке подобны. Пользуясь их подобием и условием задачи, необходимо найти длину большего вертикального отрезка.

Решаем. Изобразим дерево и его изображение на плёнке параллельными отрезками AB и CD (см. рис. 35). Точка O — изображение объектива, $MN \perp AB$, $MN \perp CD$, $O \in MN$. Из условия следует, что CD = 10 мм, MO = 50 мм, ON = 90 000 мм.

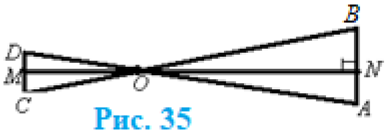


Рис. 35

Треугольники ABO и CDO подобны по двум углам: $\angle OCD = \angle OBA$, как разносторонние углы (накрест лежащие) при пересечении двух параллельных прямых третьей; $\angle DOC = \angle BOA$, как вертикальные. Так как в подобных треугольниках высоты пропорциональны соответственным сторонам, то $\frac{AB}{CD} = \frac{ON}{OM}$ или $AB = CD \cdot \frac{ON}{OM} = 10 \cdot \frac{90000}{50} = 18000$ мм. Искомая высота равна 18 м.

Ответ. 18 м.

1. *Чему равно расстояние от дерева до его изображения на плёнке?*

2. *Во сколько раз расстояние от объектива до верхушки дерева больше расстояния от объектива до нижней границы изображения?*

3. *Можно ли по данным, приведенным в условии, вычислить, во сколько раз расстояние от объектива до верхушки дерева больше расстояния от объектива до верхней границы изображения?*

В задачах 1 – 3 все отрезки, длины которых применялись для нахождения искомых величин, были видны на прилагаемых рисунках, а их длины или приводились в условии, или вычислялись по известным формулам. Ситуация усложняется, если подобные отрезки нужно установить, а расстояния измерить. Такую ситуацию предлагается рассмотреть в следующей задаче.

Задача 4. Требуется измерить расстояние между двумя объектами, разделёнными зданием, не позволяющим непосредственно провести прямую между объектами. Как найти указанное расстояние?

Анализируем. Изобразим объекты, расстояние между которыми нужно измерить, двумя точками. Выберем точку, из которой видны обе указанные точки. Образовался треугольник. Если местность позволяет, строим треугольник, равный этому. Для этого можно будет воспользоваться первым признаком равенства треугольников.

Если на местности нехватает места для построения равного треугольника, строим треугольник, подобный образованному, стороны которого в определённое число раз меньше сторон образованного.

Решаем. Пусть A и B — данные точки на местности, между которыми определяется расстояние (рис. 36). Выберем точку C, из которой видны обе точки A и B. На продолжении отрезка AC за точку C отметим точку D на расстоянии AC от точки C. Аналогично на продолжении отрезка BC за точку C отметим точку E, для которой $CE = BC$. Тогда треугольник ABC равен треугольнику DEC по двум сторонам и углу между ними: $\angle ACB = \angle DCE$, как вертикальные. Из равенства треугольников следует, что $AB = DE$. Останется измерить DE.

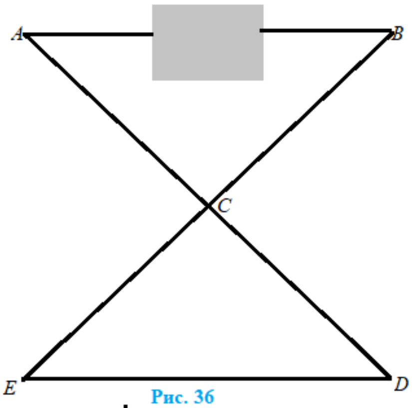


Рис. 36

Если на местности нехватает места для построения треугольника ABC, то выбираем точку M, из которой видны обе точки A и B (рис. 37). На продолжении отрезка AM за точку M отметим точку N на расстоянии $k{\cdot}AM$ от точки M (k выбирается из условий местности) (рис. 37). Аналогично на продолже-

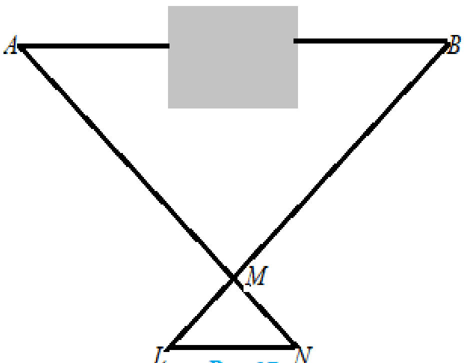


Рис.37

нии отрезка BM за точку M отметим точку L, для которой $ML = k \cdot BM$. Тогда треугольник ABM подобен треугольнику NLM по двум пропорциональным сторонам и равным углам между ними: $\angle AMB = \angle NML$, как вертикальные. Из подобия треугольников следует, что $AB = \dfrac{NL}{k}$. Останется измерить NL. ■

?

1. *Является ли треугольник ABC равнобедренным*?

2. *Верно ли, что* $DE \parallel AB$?

3. *Какие значения может принимать* число k?

Проверь себя

1. Наблюдатель, находящийся в точке A (см рис. 38), видит конец шеста точку C и верхнюю точку D мачты расположенными на одной прямой. Какова высота мачты, если $AF = 60$ м, $AB = 6$ м и $BC = 3$ м?

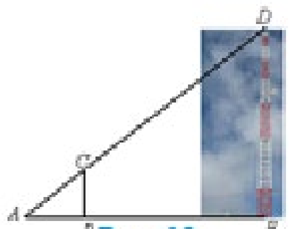


Рис. 38

А. 45 м. **Б.** 40 м. **В.** 35 м. **Г.** 30 м.

2. На рис. 39 изображён железнодорожный шлагбаум. На сколько сантиметров приблизится к земле меньшее плечо шлагбаума, если большее поднимется над землёй на 2 м?

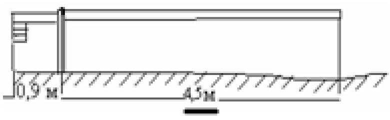


Рис. 39

А. На 30 см. **Б.** На 40 см. **В.** На 60 см. **Г.** На 80 см.

3. На рис. 40 изображён дачный столик в поперечном разрезе, AD и BC — две из четырёх его ножек, $AO = BO = 52$ см, $OC = OD = 88$ см, расстояние CD между ножками на полу равно 66 см. Чему равно расстояние AB между точками крепления этих ножек на поверхности стола?

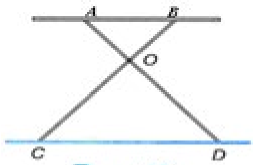


Рис. 40

А. 45 см. **Б.** 40 см. **В.** 39 см. **Г.** 33 см.

4. Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B (рис. 41) выбирают точку C и измеряют AC, $\angle A$, $\angle C$. Затем строят на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику

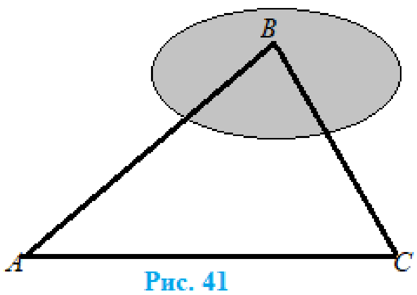


Рис. 41

ABC. Вычислите AB, если $AC = 112$ м, $A_1C_1 = 5{,}6$ см, $A_1B_1 = 8{,}4$ см.

А. 168 м. **Б.** ≈75 м. **В.** 192 м. **Г.** 224 м.

Реши сам

1. Как определить расстояние до телеграфного столба, если на расстоянии вытянутой руки он закрывается половиной спички (см. рис. 42).

Рис. 42

2. Столб высотой 15 м закрывается монетой диаметром 2 см, если её держать на расстоянии 70 см от глаза. Найдите расстояние от столба до наблюдателя.

3. На рис. 43 изображён дачный столик в поперечном разрезе, AD и BC — две из четырёх его ножек, $AO = BO = 52$ см, $OC = OD = 88$ см; EF — разрез горизонтальной поверхности стола, GH — линия пола. Верно ли, что при таком устройстве столика прямые EF и GH параллельны?

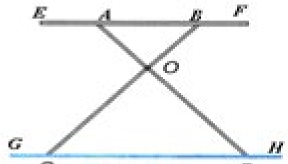


Рис. 43

4. Как измерить высоту дерева, не взбираясь на него и не прибегая к помощи теней?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Г. Воспользуйтесь тем, что в подобных треугольниках соответственные углы равны.

2. Г. Установите подобие треугольников AOB и COD и воспользуйтесь пропорциональностью их соответственных сторон.

3. Г. Установите подобие треугольников ABE и FCE и воспользуйтесь пропорциональностью их соответственных сторон.

4. Б. Установите подобие треугольников ABF и CDF и воспользуйтесь пропорциональностью их соответственных сторон.

5. А. Воспользуйтесь обобщённой теоремой Фалеса.

6. В. Установите подобие треугольников AED и FEC и воспользуйтесь пропорциональностью их соответственных сторон.

7. А. Воспользуйтесь подобием треугольников.

8. Г. Воспользуйтесь подобием треугольников.

9. 300 м. Не забудьте все данные перевести в одни и те же единицы длины.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 6 м. **2.** $8\frac{1}{3}$ м. **3.** $1\frac{1}{11}$ м.

Задача 2. 1. 1:5. **2.** 30 см. **3.** Нет.

Задача 3. 1. 90,05 м. **2.** В 1800 раз. **3.** Нет.

Задача 4. 1. Нет. **2.** Верно. **3.** $0 < k < 1$.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Г	Б	В	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. Расстояние до телеграфного столба равно произведению его высоты на расстояние до спички, делённому на длину половины спички. Воспользуйтесь тем, что в подобных треугольниках высоты пропорциональны сторонам, лежащим против равных углов. После измерения расстояния до столба и до спички, длины половины спички следите за тем, чтобы результаты всех этих измерений были в одних и тех же единицах длины.

2. 525 м. Воспользуйтесь тем, что в подобных треугольниках высоты пропорциональны сторонам, лежащим против равных углов.

3. Верно. Из подобия треугольников сделайте вывод о равенстве углов, затем примените признак параллельности прямых.

4. Можно установить вертикальный шест на некотором расстоянии от дерева, нужно стать в такую точку, на которой верхний конец шеста загораживает в точности верхушку дерева. Следует измерить высоту части шеста над

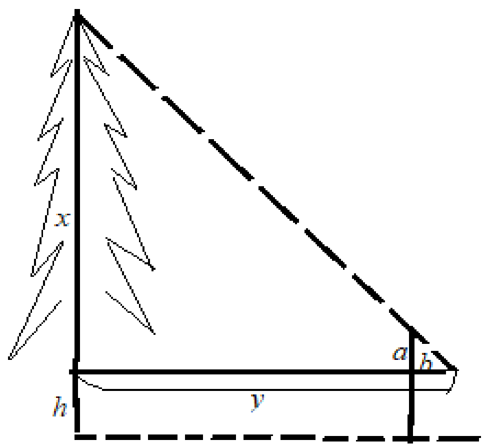


Рис. 44

уровнем глаз, расстояния от глаз по горизонтали до шеста и до дерева над уровнем глаз, учесть свой рост до уровня глаз и воспользоваться подобием прямоугольных треугольников (рис. 44).

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Выполнение заданий для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Основное Задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	5 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	7 задач	5 задач
«отлично»	Решено не менее	10 задач	7 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа запишите букву «Д».

1. Длины ножек циркуля 5 см и 3 см. Они соединены так, что могут вращаться друг относительно друга. Какое наибольшее и какое наименьшее расстояние может быть между его концами?

А. 8 см и 2 см. **Б.** 8 см и 4 см. **В.** 15 см и 2 см. **Г.** 15 см и 4 см.

2. Как изменится периметр листа бумаги, если от него отрезать кусок, сделав прямой разрез?

А. Увеличится. **Б.** Уменьшится. **В.** Не изменится. **Г.** Определить нельзя.

3. В центре бильярдного стола, имеющего форму квадрата, лежит бильярдный шар. Его направили под углом 75° к одному из бортов. Под каким углом он отразится после отражения от соседнего борта?

А. 75°. **Б.** 60°. **В.** 45°. **Г.** 15°.

4. В центре бильярдного стола, имеющего форму равностороннего треугольника, лежит бильярдный шар. Его направили под углом 60° к одному из бортов. В каком отношении делит точка, в которую попал шар после второго отражения от бортов, борт стола?

А. 2:3. **Б.** 1:3. **В.** 1:2. **Г.** 3:4.

5. Трос длиной 10 м натянут от верхушки вертикальной мачты до земли и закреплён на расстоянии 8 м от основания мачты. Найдите высоту мачты.

А. 9 м. **Б.** 8 м. **В.** 7 м. **Г.** 6 м.

6. Пролёт AC строительной фермы (см. рис. 45) равен 23 м, ноги её AB и CB равны 12 м. Чему приближённо равна высота BD фермы? Выберите наиболее точное значение.

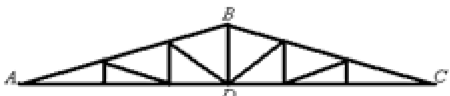


Рис. 45

А. 3 м. **Б.** 3,2 м. **В.** 3,5 м. **Г.** 4 м.

7. Робот движется прямолинейно 10 м, затем поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м и т. д. На какое примерно расстояние удалится робот от начала пути, если на первом повороте он повернёт налево, а на втором — направо и остановится на месте третьего поворота? Выберите наиболее точное значение.

А. На 24 м. **Б.** На 22 м. **В.** На 21 м. **Г.** На 20 м.

8. Лестницу длиной 8 м приставили к вертикальному столбу так, что они образовали угол 45°. На какой примерно высоте от земли находится верхний конец лестницы? Выберите наиболее точное значение.

А. 4 м. **Б.** 5 м. **В.** 6 м. **Г.** 7 м.

9. Башня с расстояния 100 м от её основания видна под углом 30°. Чему примерно равна высота башни? Выберите наиболее точное значение.

А. 87 м. **Б.** 86 м. **В.** 58 м. **Г.** 57 м.

10. От перекрестка двух взаимно перпендикулярных дорог одновременно начинают движение с постоянными скоростями два автомобиля. Через 2 минуты расстояние между автомобилями равно 3 км. Скорость одного автомобиля 15 м/с. Найдите скорость второго.

А. 17 м/с. **Б.** 18 м/с. **В.** 19 м/с. **Г.** 20 м/с.

11. На участке пути длиной 320 м подъём одинаковый. На концах участка стоят отметки 186,5 м и 194, 9 м. Какая отметка должна стоять на расстоянии 120 м от начала участка?

А. 189,7 м. **Б.** 190,1 м. **В.** 190,3 м. **Г.** 190,9 м.

12. На рис. 46 изображён пропорциональный делительный циркуль, AD = 15 см. Каким должно быть расстояние a, чтобы циркуль увеличивал расстояние AB в два раза?

А. 6 см. **Б.** 5 см. **В.** 4 см .**Г.** 3 см.

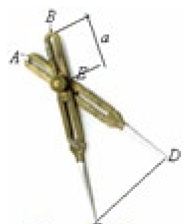
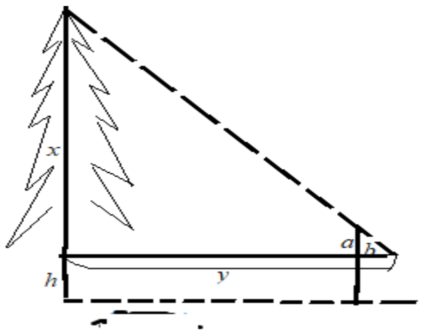


Рис. 46

13. Расстояние между двумя пунктами на плане масштабом 1:25 000 равно 19,2 см. Каково расстояние между этими пунктами на местности?

А. 480 км. **Б.** 48 км.
В. 4,8 км. **Г.** 480 м.



14. На рис. изображён способ измерения высоты дерева. Условные обозначения: a и x — высоты части шеста и дерева над уровнем глаз соответственно, b и y — расстояния от глаз по горизонтали до шеста и до дерева на уровне глаз соответственно, h — рост человека до уровня глаз. Чему равна высота дерева?

А. $\frac{ya}{b}$. **Б.** $\frac{yb}{a}$. **В.** $h+\frac{yb}{a}$. **Г.** $h+\frac{ya}{b}$.

Основное задание

Настоящее задание предназначено для проверки того, усвоены ли вами идеи и способы деятельности, представленные в первой части раздела. Другими словами, оно поможет ответить на вопрос, умеете ли вы решать задачи, подобные тем, которые рассматривались в пособии. Поэтому нужно при необходимости широко пользоваться образцами решённых задач и указаниями к задачам основного задания.

1. Трёхзвенный шарнир состоит из звеньев длиной 2 см, 5 см и 8 см (рис. 47). Каковы наибольшее и наименьшее расстояния между его концами?

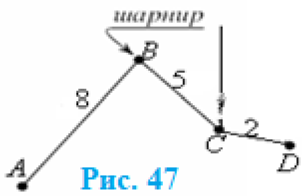


Рис. 47

2. Дома Вини-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов, и каждый пошёл по какой-то прямой. Вини-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие?

3. В центре квадратного бильярдного стола, лузы которого находятся только в его углах, лежит бильярдный шар. Можно ли кием направить его так, чтобы, отразившись от одного борта (угол падения равен углу отражения), шар попал в какую-нибудь лузу сразу?

4. Возле борта бильярдного стола, имеющего форму равностороннего треугольника, лежит бильярдный шар. Его направили под углом 45° к одному из бортов. Может ли он попасть в лузу после второго отражения от бортов стола?

5. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый жёлоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы жёлоба расположены на высоте 9 м и 4 м над землёй. Найдите длину жёлоба.

6. Когда канатоходец встал на середину каната, натянутого между двумя столбами и расположенного горизонтально, то канат удлинился на 40 см, а артист опустился на 1 м. Какова первоначальная длина каната?

7. Петров и Сидоров, участники соревнований по спортивному ориентированию, добирались из пункта *A* в пункт *B* двумя путями. Петров, пробежав 1 км на восток, затем 800 м на север, потом 900 м на восток и ещё несколько сот метров на север, прибыл в пункт *B*. Сидоров, сначала пробежав 400 м на север, затем 800 м на восток, потом 600 м на север и ещё несколько сот метров на восток, прибыл в пункт *B*. Каково расстояние между пунктами *A* и *B*?

8. Человек начал отходить от основания вышки высотой 56 м со скоростью 4 км/ч. Через сколько примерно минут он будет на расстоянии 200 м от её вершины?

9. Лестницу приставили к вертикальной стене так, что она образует с ней угол 30° и её верхний конец находится на высоте 6 м от пола. Какова длина лестницы?

10. Две дороги пересекаются под прямым углом. От перекрёстка одновременно отъехали два велосипедиста, один в южном направлении, другой — в восточном. Скорость второго была на 20 м/мин больше скорости первого. Через 3 минуты расстояние между ними равнялось 1,8 км. Чему равны скорости велосипедистов?

11. Теннисный мяч подан с высоты 2 м 10 см и пролетел над самой сеткой, высота которой 90 см. На каком расстоянии от сетки мяч ударится о землю, если он подан от черты, находящейся в 12 м от сетки, и летит по прямой?

12. На рис. 48 изображен железнодорожный шлагбаум. На сколько сантиметров поднимется вертикально конец большей части шлагбаума, если конец меньшей приблизится к земле на 30 см?

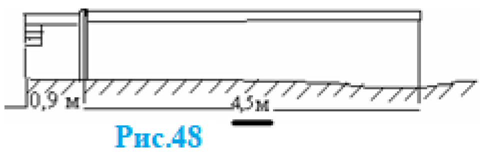


Рис.48

13. Стена высотой 3 м отбрасывает тень длиной 4 м. Мальчик, рост которого 1 м 50 см, стоит на расстоянии 6 м от края тени. Какое наименьшее количество шагов он должен сделать, чтобы полностью попасть в тень, если длина его шага 0,4 м?

14. Как измерить диаметр огромного пруда круглой формы, обойти который по окружности невозможно из-за имеющихся препятствий и затруднительно измерять расстояние между какими-либо точками, если отрезок, соединяющий их, проходит под водой?

Указания к задачам основного задания

1. Воспользуйтесь неравенствами треугольника сначала для оценки расстояний между концами двух соседних звеньев.

2. Введите обозначение для искомого времени и выразите через него расстояния, пройденные Вини-Пухом и Пятачком до встречи, а затем воспользуйтесь неравенствами треугольника. Не забудьте рассмотреть случаи, когда траектории движения лежат на одной прямой.

3. Изобразите искомую траекторию движения шара в квадрате, пользуясь законом «угол падения равен углу отражения» и определите место, в которое должен быть направлен шар.

4. Изобразите искомую траекторию движения шара в равностороннем треугольнике, пользуясь законом «угол падения равен углу отражения» и определите место, из которого был направлен шар.

5. Изобразите жёлоб отрезком, соединяющим концы двух параллельных отрезков, являющихся перпендикулярами к одной прямой, и воспользуйтесь теоремой Пифагора для нахождения длины этого отрезка.

6. Изобразите натянутый канат отрезком, а удлинение в виде ломаной с двумя равными звеньями, концы которой совпадают с концами выбранного отрезка, и воспользуйтесь теоремой Пифагора при составлении уравнения для нахождения искомой длины.

7. Воспользуйтесь условием для нахождения расстояний в восточном и северном направлениях, которые оба спортсмена преодолели, а затем воспользуйтесь теоремой Пифагора.

8. Для нахождения искомого времени составьте уравнение, пользуясь теоремой Пифагора.

9. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

10. Составьте уравнение для нахождения скорости одного из велосипедистов, пользуясь теоремой Пифагора.

11. Изобразите графически условие задачи и воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников при составлении уравнения для нахождения искомого расстояния.

12. Изобразите графически условие задачи и воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников.

13. Изобразите графически стену и мальчика отрезками, перпендикулярными одной прямой сначала для случая, когда мальчик был не в тени, а затем для случая, когда он сделал несколько шагов и попал в тень. Затем воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников.

14. Способ измерения подсказывает рис. 49.

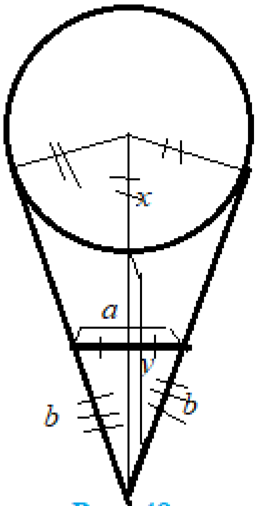


Рис. 49

Дополнительное задание

Настоящее задание предназначено для тех, кто без больших усилий справился с основным заданием и хочет попробовать свои силы в решении более трудных задач. Эти задачи значительно отличаются от решённых в первой части раздела. К ним также приведены указания, которые могут помочь в их решении.

1. Шаг робота равен 1 м. а) Может ли он, двигаясь по плоской поверхности, попасть из точки А в точку В, расстояние между которыми 5,3 м? б) Если может, то какое наименьшее расстояние ему необходимо для этого пройти?

2. Четыре дома расположены в вершинах четырёхугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырёх домов была наименьшей?

3. Может ли шар, лежащий возле борта на бильярдном столе прямоугольной формы после удара кием отразиться сначала от одного борта, затем от другого и пройти через исходное положение, если отражение от борта происходит по закону «угол падения равен углу отражения»?

4. В центре бильярдного стола, имеющего форму равностороннего треугольника, лежит бильярдный шар. Под каким углом к одному из бортов следует его направить, чтобы после отражения от трёх бортов он прошёл через центр стола?

5. К вертикальному столбу в двух местах, находящихся на расстоянии 4 м один от другого, прикреплены два троса, вторые концы этих тросов прикреплены на земле на расстоянии 12 м от столба. Вычислите длину большего троса, если длина меньшего троса равна 13 м.

6. Когда канатоходец прошёл треть расстояния между концами горизонтально натянутого каната и остановился, то он опустился на 60 см. На сколько примерно процентов удлинится канат, если первоначальная длина каната равна 15 м?

7. Робот начинает движение в некоторой точке, в начале движения он выбирает направление движения. Далее робот движется прямолинейно 10 м, затем поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м и т. д. На какие расстояния робот может удалиться от начала пути, если он остановился на месте 6-го поворота?

8. Лестница длиной 6,5 метра наклонно приставлена к стене. Нижний конец её при этом удалён от стены на 2,5 метра. На какую длину она опустится по стене, если её нижний конец отодвинуть ещё на 3,5 метра?

9. Считается, что лестница, прислонённая к вертикальной стене, занимает устойчивое положение, если расстояние от основания стены до основания лестницы будет составлять примерно 25% расстояния от основания стены до другого конца лестницы. Постройте на клетчатой бумаге углы, которые в этом случае образует лестница с горизонтальной плоскостью и плоскостью стены.

10. Два автомобиля одновременно отъехали от зданий, расстояние между которыми 4,5 км, по прямолинейным дорогам, пересекающимся под прямым углом, и одновременно приехали к их пересечению. Скорость одного автомобиля 60 км/ч, другого — 80 км/ч. Сколько примерно времени прошло с момента выезда автомобилей до момента их встречи?

11. Человек начал отходить по ровной местности от подножия башни высотой 62 м со скоростью 4 км/ч. Через сколько примерно секунд он будет на расстоянии 200 м от вершины башни?

12. Из двух соседних углов участка квадратной формы столб, стоящий на участке, виден под углом 15° к его ограждению. Сравните длину участка и расстояние от столба до самого дальнего угла участка.

13. Из городов A и B, расположенных на прямолинейном шоссе, две параллельные просёлочные дороги ведут в сёла A_1 и B_1 соответственно, причём $AA_1 = a$, $BB_1 = b$. Город A соединён также просёлочной дорогой с B_1, а город B — с A_1. На пересечении дорог AB_1 и BA_1 находится село C_1. От него к шоссе AB просёлочная дорога, параллельная AA_1, ведёт к городу C, расположенному на шоссе. Найдите длину участка этой дороги CC_1.

14. Как измерить, на какой высоте находится шпиль, расположенный на здании, вблизи и внутри которого измерения затруднительны, если нельзя приблизиться к этому зданию?

Указания к задачам дополнительного задания

1. а) Воспользуйтесь тем, что любой отрезок может быть стороной треугольника, длины двух других сторон которого выражаются целыми числами.

б) Учтите, что нужно анализировать все возможные случаи.

2. Для произвольной точки внутри четырёхугольника оцените сумму расстояний от неё до вершин четырёхугольника, пользуясь длинами диагоналей четы рёхугольника.

3. Предположите, что такая траектория существует и воспользуйтесь законом отражения для получения противоречия.

4. Воспользуйтесь симметрией равностороннего треугольника относительно медианы для построения требуемой траектории.

5. Воспользуйтесь дважды теоремой Пифагора для нахождения сторон двух прямоугольных треугольников.

6. Изобразите натянутый канат отрезком, а удлинённый — в виде ломаной, концы которой совпадают с концами выбранного отрезка, и воспользуйтесь теоремой Пифагора.

7. Изобразите все возможные расположения робота непосредственно перед 6-м поворотом, пользуясь выбором первого перемещения.

8. Воспользуйтесь дважды теоремой Пифагора для нахождения сторон двух прямоугольных треугольников.

9. Воспользуйтесь выражением тангенса указанного в требовании угла для его построения на клетчатой бумаге.

10. Составьте уравнение для нахождения искомого времени, пользуясь теоремой Пифагора.

11. Определите сначала вид полученного четырёхугольника, а затем воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников.

12. Изобразите искомую траекторию на рисунке и воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников, естественно возникающих на ней.

13. Изобразите все населённые пункты и дороги, а затем воспользуйтесь подобием двух пар треугольников.

14. Способ измерения подсказывает рис. 50.

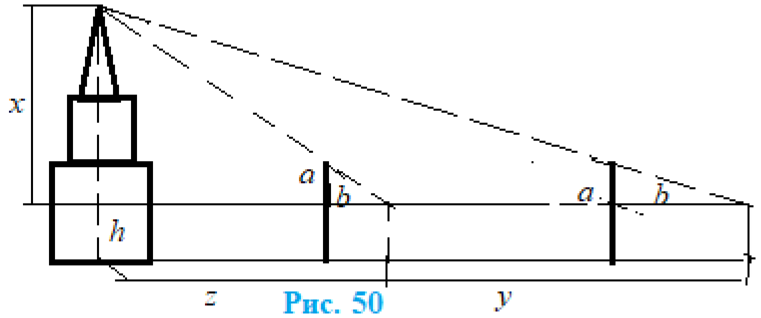


Рис. 50

Задачи для исследования

1. Как измерить расстояние между пунктами A и B, если к пункту A невозможно подойти (например, ширину реки, см. рис. 51). В Вашем распоряжении есть приборы, позволяющие на местности измерять как расстояния, так и углы.

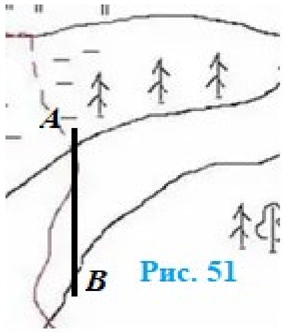


Рис. 51

2. Недалеко от населённых пунктов А и В проходит шоссе. Нужно построить автобусную остановку так, чтобы расстояния от неё до населённых пунктов были равны. Как определить место для остановки?

3. Высота дерева может быть определена по способу, указанному на рис. 52. Какие измерения нужно провести для определения высоты дерева? Выведите формулу для нахождения высоты дерева этим способом.

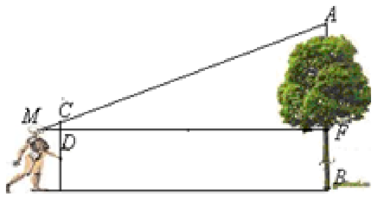


Рис. 52

4. Вы плывёте на лодке по озеру и хотите узнать его глубину. Нельзя ли воспользоваться для этого торчащим из воды камышом, не вырывая его?

5. На рис. 53 изображён высотомер. Глаз устанавливается в точке A, вертикальную линейку высотомера BC передвигают до тех пор, пока не окажутся на одной прямой глаз A, конец линейки B и вершина измеряемого предмета B'. Зная, что расстояние от глаз до земли $AA' = c$, высота линейки $BC = h$, расстояние до вертикальной линейки $AC = a$ и расстояние до предмета $A'D' = b$, выведите формулу для вычисления x по этим данным.

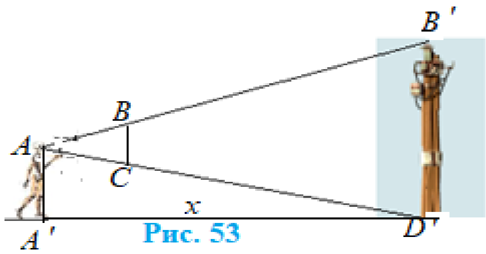


Рис. 53

6. Чтобы измерить ширину реки, выбирают на другом берегу предмет A, удобный для визирования (например, дерево, столб и т. д.). Провешивают вдоль берега прямую BD и находят на ней точку B, из которой предмет A виден под заданным углом к прямой BD. На прямой BD отмеряют произвольный отрезок BC и затем равный ему отрезок CD. Из точки D провешивается прямая DE, образующая с прямой DB угол, равный углу ABD, и на ней находят точку E так, что точки A, C, E лежат на одной прямой. Чему равно искомое расстояние AB?

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Геометрия треугольника и её применения

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие