



Донецкий государственный университет  
Факультет математики и информационных технологий  
Учебно-методический центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

# СОБЫТИЯ, ВЕРОЯТНОСТИ, ЧАСТОТЫ



Пособие для дополнительного изучения математики  
обучающихся 9-10 классов

Донецк 2024

**УДК 519 11**

**ББК 74.262я 72**

**Б 881**

Рекомендовано к изданию Ученым советом  
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. События, вероятности, частоты. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-10 классов. — Донецк. — 95 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-10 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017). Ее цель — развитие у обучающихся умений учиться, самостоятельно приобретать знания, умения и навыки, применять математику для решения математических и жизненных задач.

Настоящее пособие предназначено для систематизации знаний обучающихся об элементах статистики, вероятности и развития умений их применять к решению различных задач: анализу реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков, таблиц; задач, требующих систематического перебора вариантов; сравнения шансов наступления случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией; понимания статистических утверждений.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части представлен материал для обучения. В этой части содержатся краткие теоретические сведения, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля, задачи для самостоятельного решения с указаниями.

Во второй части пособия содержатся три варианта примерно равноценных вариантов тестов, указания к выполнению заданий, а также ответы.

В третьей части пособия приведены задания для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части.

Пособие предназначено для обучающихся открытого математического колледжа факультета математики и информационных технологий Донецкого государственного университета. Может быть использовано в общеобразовательной школе при проведении факультативных занятий, курсов по выбору.

## Содержание

Рекомендации для обучающихся .....	5
События, вероятности, частоты.....	7
1. Представление и анализ статистических данных .....	7
Повторяем теорию .....	7
Решаем .....	8
Вопросы для самоконтроля.....	13
Ответы на вопросы для самоконтроля.....	15
2. Статистические характеристики числовых данных .....	15
Повторяем теорию .....	15
Решаем .....	18
Вопросы для самоконтроля.....	21
Ответы на вопросы для самоконтроля.....	23
3. Выборочный метод в статистике.....	24
Повторяем теорию .....	24
Решаем .....	26
Вопросы для самоконтроля.....	29
Ответы на вопросы для самоконтроля.....	30
4. Случайный опыт и случайное событие.....	31
Повторяем теорию .....	31
Решаем .....	31
Вопросы для самоконтроля.....	33
Ответы на вопросы для самоконтроля.....	33
5. Статистический подход к вероятности.....	34
Повторяем теорию .....	34
Решаем .....	35
Вопросы для самоконтроля.....	36
Ответы на вопросы для самоконтроля.....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
6. Классическая вероятность.....	37
Повторяем теорию .....	37
Решаем .....	39
Вопросы для самоконтроля.....	40
Ответы на вопросы для самоконтроля.....	41
Тесты для тренировки.....	41
Вариант 1 .....	41
Вариант 2 .....	50
Вариант 3 .....	58
Подсказки.....	68
Ответы к заданиям 1 варианта теста .....	69
Ответы к заданиям 2 варианта теста .....	70
Ответы к заданиям 3 варианта теста .....	70
Задачи для самостоятельного решения.....	70
Указания к задачам для самостоятельного решения .....	75
Контрольное задание .....	77
Контрольный тест .....	77
Основное задание.....	87
Указания к задачам основного задания .....	90
Дополнительное задание .....	91
Указания к задачам дополнительного задания .....	945

## Дорогой друг!

Настоящее пособие предназначено для повторения и систематизации знаний по теме «События, вероятности, частоты»; развития умений применять эти знания для решения жизненных задач.

Пособие состоит из трёх частей: обучающей, тренировочной и контролирующей. В первой части представлен материал для повторения и обучения. Он содержит краткие теоретические сведения, применимые при решении представленных задач, образцы решения задач, вопросы для самоконтроля с ответами на них. Вся совокупность задач разделена на группы по их содержанию. Первая часть пособия завершается задачами для самостоятельного решения. К этим задачам приведены указания и ответы.

Вторая часть пособия состоит из тестов для тренировки, к заданиям которых приведены указания, ответы. Они структурированы в соответствии с частями, на которые разделён весь материал. Тренажёр состоит из заданий с выбором ответа. Тренажёр предназначен для выявления пробелов в указанной теме, их устранения, а также для углубления знаний и умений по теме.

Задания для тренировки представлены тремя однотипными вариантами теста. Работу над пособием начинайте с первого варианта теста. Попробуйте выполнить самостоятельно его задания, не используя учебные пособия и микрокалькулятор. Выбор правильных ответов и необходимые записи делайте в отдельной тетради. После завершения работы над тестом сверьте свои ответы с ответами, приведенными в пособии. **Не пользуйтесь ответами, пока не дадите ответы самостоятельно!**

Каждое задание, по которому ваш ответ не совпал с приведенным, тщательно проанализируйте, пользуясь рекомендациями. Такую работу полезно сделать по всем заданиям теста. Наверное, некоторые ответы Вы угадали или «почувствовали», не зная полного решения. Рекомендации к большинству заданий содержат теоретический материал, необходимый для выполнения задания. Ко многим заданиям приведены примеры с решениями, содержащими основные идеи для решения задания. Тщательно проработайте их. При необходимости обращайтесь к учебнику, учителю, взрослым, которые могут Вам помочь.

В третьей части пособия приведено контрольное задание, состоящее из:

- **контрольного теста**, задания которого аналогичны заданиям тестов для тренировки;
- **основного задания**, содержащего задания, подобные заданиям для самостоятельного решения;
- **дополнительного задания**, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Дополнительное задание желательно выполнять, если при выполнении основного задания не возникло много трудностей.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут для Вас полезными и интересными.

**Желаем успехов!**

## Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит в освоении идей, методов, использованных в приведенных решениях типовых задач, самостоятельном решении подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

### **1. Чтобы решить задачу, нужно:**

- сначала проанализировать её условие и вытекающие из него следствия;
- уяснить требование задачи;
- попытаться найти путь к выполнению требования задачи.

2. Приступая к выполнению заданий тренажёра, повторите приведенный теоретический материал.

Надо сначала попробовать выполнить самостоятельно задания первого варианта первого блока тренажёра. Выбранные ответы записывайте на отдельном листочке.

**Пользоваться учебником и калькулятором не рекомендуется.**

3. После завершения работы над первым вариантом первого блока тренажёра необходимо сверить свои ответы с приведенными в пособии.

**Не следует обращаться к приведенным ответам, пока не получены самостоятельно ответы ко всем заданиям.**

**4. Каждое задание, по которому ответ не совпал с приведенным, нужно тщательно проанализировать, пользуясь при необходимости приведенными в пособии указаниями.**

Такую работу полезно проделать со всеми заданиями первого варианта блока.

5. Когда появится уверенность в том, что неясных вопросов не осталось, можно проверить надёжность своей уверенности с помощью второго варианта первого блока тренажёра.

Если же при выполнении второго варианта первого блока осталось ощущение, что не всё усвоено, то нужно продолжать работу по исправлению ошибок, выполнить задания третьего варианта, записывая при этом все проделанные шаги.

**Если до конца выполнены данные выше рекомендации, то результаты при выполнении следующего варианта теста будут значительно выше результатов при выполнении предыдущего.**

**6.** Если уверенность подтвердилась при выполнении второго варианта теста, то можно перейти к работе над первым вариантом второго блока. Методика работы над ним остаётся такой же. И так далее.

**Ни в коем случае не бросайте работу!**

Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

**Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.**

**Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.**

**Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.**

**При необходимости используйте указания к задачам дополнительного задания.**

**Помните!**

**Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.**

**Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.**

# События, вероятности, частоты

## 1. Представление и анализ статистических данных

### Повторяем теорию

Таблицы являются удобным способом представления информации. С таблицами встречаемся на каждом шагу. Важно научиться понимать таблицу. Для этого нужно осознать содержание строк, столбцов, каждой клеточки.

Наглядными способами представления информации являются схемы, диаграммы, графики.

**Столбчатые диаграммы** используют в тех случаях, когда необходимо наглядно сравнить результаты опроса, показать динамику процесса, показать, как изменяется со временем явление, интересующее нас. Столбчатые диаграммы могут иметь любую ширину столбика и любое расстояние между столбиками. Однако, все столбики должны быть одинаковой ширины и размещаться на одинаковом расстоянии друг от друга. Выбор единицы на вертикальной оси зависит от значений величины, о которой идет речь. Если в столбчатой диаграмме заменить прямоугольник отрезком, то получим **линейную диаграмму**.

Если конечные точки в линейной диаграмме соединить отрезками, то получим сплошную линию, которая зовется **графиком**. График зависимости одной величины от другой дает возможность определить, как изменяется одна величина в зависимости от другой. Если на одном рисунке изображены графики зависимости двух или нескольких величин от некоторой другой, то можно сравнить значения этих величин.

**Круговые диаграммы** используют в тех случаях, когда нужно представить соотношение между частями некоторой величины. Количество секторов показывает, из скольких составляющих состоит рассматриваемая величина. Градусные величины дуг секторов прямо пропорциональны доле соответствующей составляющей в структуре данной величины.

Добывается информация путём наблюдений, с помощью опросов, в ходе экспериментов.

## Решаем

В следующих двух задачах информация взята из надёжных источников — магазина и статистических органов.

**Задача 1. Скейтборд.** Сергей — любитель кататься на скейтборде. Он нередко заходит в магазин "Спорт", чтобы узнать о ценах на некоторые товары. В этом магазине можно купить полностью собранный скейтборд. Но можно купить платформу, один комплект из 4 колес, один комплект из 2 держателей колес, а также комплект металлических и резиновых составных частей и собрать свой собственный скейтборд. Цены в магазине на эти товары представлены в таблице.

Товар	Собранный скейтборд	Платформа	Один комплект из 4 колес	Один комплект из двух держателей колес	Один комплект металлических и резиновых деталей скейтборда (подшипник, резиновые прокладки, болты, гайки)
Цена в зедрах (условная денежная единица)	82 или 84	40, 60 или 65	14 или 36	16	10 или 20

У Сергея 120 зедов, и он хочет собрать самый дорогой скейтборд, какой он может себе позволить на эти деньги. Сколько денег он может потратить на каждую из 4 частей скейтборда? Запишите ваш ответ в следующую таблицу.

Части скейтборда	Сумма денег (в зедрах)
Платформа	
Колеса	
Держатели колес	
Металлические и резиновые детали	

**Решение.** Задание решается перебором вариантов. Перебор можно реализовать с помощью таблицы, в которой для каждого варианта стоимости платформы (их 3) указан вариант стоимости комплекта из 4 колес (их 2). Получено 6 вариантов стоимости пары, которая содержит платформу и колеса. Для каждого из этих вариантов указан вариант стоимости комплекта металлических и резиновых деталей (их 2). Получено 12 вариантов стоимости тройки составляющих. Принимая во внимание, что стоимость держателей колес имеет 1 вари-



ант, получим, что общее количество вариантов стоимости составляющих скейтборда равняется 12.

Номер варианта Составляющие	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Платформа	40	40	40	40	60	60	60	60	65	65	<b>65</b>	65
Колеса	14	36	14	36	14	36	14	36	14	36	<b>14</b>	36
Металлические и резиновые детали	10	10	20	20	10	10	20	20	10	10	<b>20</b>	20
Держатели колес	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	<b>16</b>	16
Стоимость скейтборда	80	102	90	112	100	122	110	132	105	127	<b>115</b>	137

Из таблицы видим, что самый дорогой скейтборд, который может себе позволить Сергей, стоит 115 зедов (столбик в таблице выделен полужирным шрифтом). Количество денег, которое он может потратить на каждую из 4 частей скейтборда, представлено в следующей таблице.

Части скейтборда	Сумма денег(в зедрах)
Платформа	65
Колеса	14
Держатели колес	16
Металлические и резиновые детали	20

**Задача 2.** В таблице представлена информация о численности населения двух городов.

Город	Численность населения	
	2000	2010
1.	117 453	153 157
2.	139 697	180 690

Какой город растет быстрее другого?

**Решение.** Рассматривая эту таблицу, можно прийти к заключению, что второй город больше первого: численность его населения больше и в 2000 году, и в 2010-ом. Вычислим, какой город растет быстрее. Для этого подсчитаем сначала абсолютный прирост населения, а потом процент роста численности насе-

ления. Абсолютный прирост в первом городе составляет  $153\ 157 - 117\ 453 = 35\ 704$  человек, а во втором —  $180\ 690 - 139\ 697 = 40\ 993$ . Процент роста численности населения в первом городе за 10 лет равняется  $\frac{35704}{117453} \cdot 100 \approx 30\%$ , а во втором —  $\frac{40993}{139697} \cdot 100 \approx 29\%$ . Следовательно, первый город растет быстрее второго.

**Ответ.** Первый город растет быстрее второго.

**Замечание.** Так как разница между процентами роста численности населения в указанных городах мала, немногим более 1%, то эти показатели могут быть результатом ошибки, полученной при сборе данных. В этом случае можно считать, что города растут примерно с одной скоростью.

Особенностью следующей задачи, является требование, не пользоваться информацией сверх представленной.

**Задача 3.** Дайте ответы на приведенные вопросы только на основании информации, которая содержится в следующей таблице.

Таблица годовых оценок Джона (по 100-балльной шкале в 2009 – 2012 г.г.)

Дисциплина	Английский язык	Литература	История	Математика	Природоведение
2009	70	80	71	63	76
2010	72	82	71	64	77
2011	73	84	74	70	77
2012	78	86	75	71	78

- 1) По каким дисциплинам оценки Джона не изменялись в течение двух лет?
- 2) В какие два последовательных года улучшились оценки по наибольшему количеству дисциплин?
- 3) По какой дисциплине Джон получал наивысшие оценки в классе два года подряд?

**Решение.** 1) Анализируя таблицу, можно сделать вывод о том, что в течение двух лет оценки Джона не изменялись по истории в 2009 и 2010 г.г. и по природоведению в 2010 и 2011 г.г.

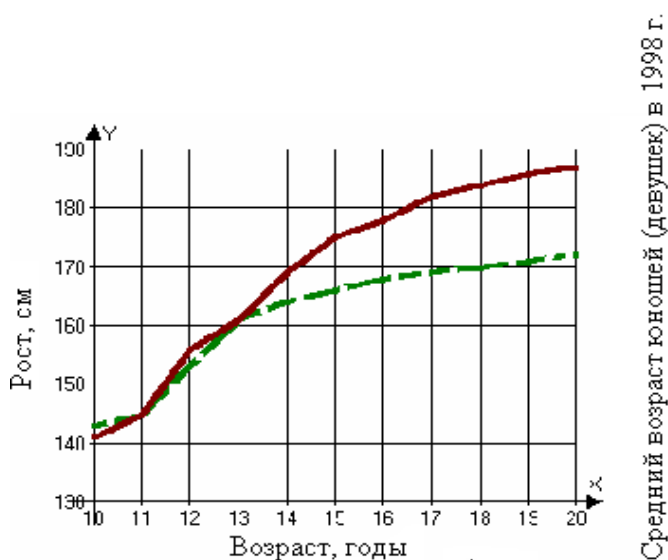
2) В 2009 и 2010 г.г. оценки Джона улучшились по 4-м дисциплинам (по всем, кроме истории); в 2010 и 2011 г.г. — также по 4-м дисциплинам (по всем, кроме природоведения); в 2011 и 2012 г.г. — по всем 5-и дисциплинам.

3) Таблица не содержит информацию, которая дает возможность сравнить оценки Джона с оценками его одноклассников. ■

Следующая задача посвящена сравнению значений двух величин на основании информации, представленной графически.

**Задача 4.** На рисунке показан средний рост девушек (штриховой линией) и юношей в Нидерландах в 1998 году.

1. По сравнению с 1980 годом средний рост 20-летних девушек в 1998 г. увеличился на 2,3 см и стал равняться 170,6 см. Чему равнялся средний рост 20-летних девушек в 1980 г.?



2. Пользуясь графиком, определить, в каком возрасте девушки, в среднем, выше юношей того же возраста.

3. Как можно по данному графику определить, что увеличение роста девушек в среднем замедляется после 13 лет?

**Решение.** 1. Средний рост 20-летних девушек в 1980 г. равнялся  $170,6 - 2,3 = 168,3$  (см).

2. Тому факту, что девушки, в среднем, выше юношей того же возраста, отвечает та часть графика, где штриховая линия расположена выше сплошной. Такая часть графика отвечает возрасту в 10 – 11 лет, то есть в 10 – 11 лет девушки в среднем выше ребят.

3. Для решения третьего задания следует осознать, что скорость возрастания величины, графиком которой является прямая, отрезок прямой или близкие к ним фигуры, характеризуется его наклоном к оси абсцисс. Иначе говоря,

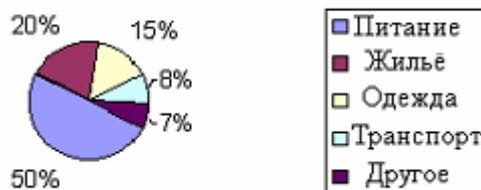
чем круче график зависимости некоторой величины поднимается вверх, тем больше скорость возрастания этой величины. Из графика легко увидеть, что отрезок, изображающий увеличение роста девушек от 11 до 13 лет, расположен круче по сравнению с отрезком этого графика, соответствующим 13 – 20 годам. То есть первый указанный отрезок к оси абсцисс наклонен под большим острым углом, чем второй. ■

Ещё один способ представления информации использован в следующей задаче.

**Задача 5.** На круговой диаграмме приведены данные о распределении бюджета семьи. Какую информацию можно получить из этой диаграммы?

**Решение.** Из данной диаграммы можно установить, что наибольшая часть бюджета семьи, а именно половина, идет на питание, на жилье тратится 20% бюджета. Эта диаграмма определяет лишь самые значительные расходы, все остальные объединены под названием "Другое".

Распределение бюджета семьи



Данные, приведенные на диаграмме, можно записать в виде таблицы. ■

№	Назначение расходов	Часть бюджета (в %)
1.	Питание	50
2.	Жилье	20
3.	Одежда	15
4.	Транспорт	8
5.	Другое	7
	Вместе	100

В следующей задаче информация представлена на графике в прямоугольной системе координат.

**Задача 6.** Виталий покупает сдобные булочки по оптовой цене 10 зедов за булочку, которые потом продает их в тот же день на рынке по 15 зедов (зед — условная денежная единица). Если у него остается нераспроданный товар, он

весь его распродает на следующий день по 4 зед за булочку. На диаграмме (рис.) представлены данные о спросе на булочки в течение 55 дней. Какой будет приблизительно (с точностью до 1 зед) средняя ежедневная прибыль Виталия, если он ежедневно в течение 55 дней будет покупать 35 булочек и если сохранится приведенный спрос на булочки?

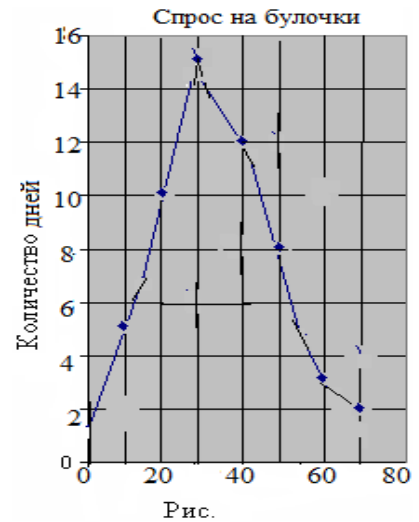


Рис.

**Решение.** Решение удобно представить в следующей таблице. Данные первого и второго столбцов взяты из рисунка.

Кол. дней	Спрос, штук	Выручка, зедов	Расходы, зедов	Прибыль за день	Общая прибыль
5	10	$15 \cdot 10 + 4 \cdot 25 = 250$	350	-100	$-100 \cdot 5 = -500$
10	20	$15 \cdot 20 + 4 \cdot 15 = 360$	350	+10	$+10 \cdot 10 = +100$
15	30	$15 \cdot 30 + 4 \cdot 5 = 470$	350	+120	$+120 \cdot 15 = +1800$
12	40	$15 \cdot 35 = 525$	350	+175	$+175 \cdot 12 = +2100$
8	50	$15 \cdot 35 = 525$	350	+175	$+175 \cdot 8 = +1400$
3	60	$15 \cdot 35 = 525$	350	+175	$+175 \cdot 3 = +525$
2	70	$15 \cdot 35 = 525$	350	+175	$+175 \cdot 2 = +350$
Итого, 55					+5775

Таким образом, общая прибыль Виталия за 55 дней составляет 5775 зедов. Следовательно, его ежедневная прибыль равна  $5775 : 55 = 105$  зедов.

**Ответ.** 105 зедов.

### Вопросы для самоконтроля

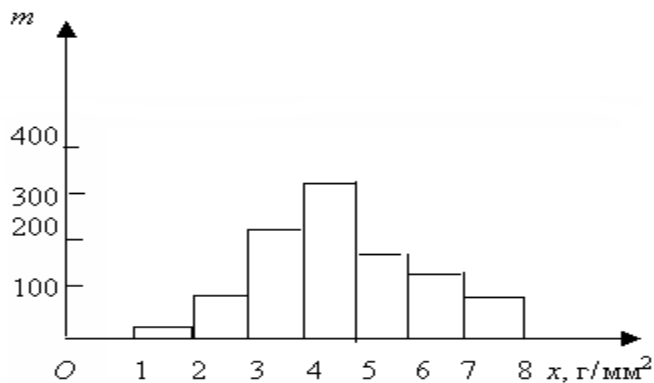
1. В садовом хозяйстве сборщикам малины за каждый собранный килограмм ягод платят по 5 зедов (зед — условная денежная единица). Если сборщик сдает меньше 10 кг, то он получает лишь деньги за собранные ягоды. Если сборщик сдает 10 кг и больше, то он еще получает бесплатно десятую часть сданных

ягод. Группа учащихся подрядилась собирать ягоды, чтобы собрать деньги на туристский поход. Результаты их работы представлены в таблице.

Масса собранных ягод, кг	7	8	9	10	11	12	13
Количество учащихся	5	4	3	2	3	2	1

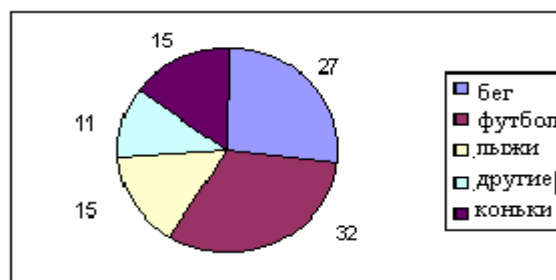
- Сколько учащихся было в группе?
- Сколько ягод они собрали?
- Сколько денег им заплатили за все собранные ягоды?
- Сколько учащихся получили за работу и деньги, и ягоды?
- Сколько ягод получили бесплатно учащиеся, выполнившие нужную норму?
- Какую еще информацию можно получить из таблицы?

2. На рисунке изображена столбчатая диаграмма, построенная по данным о распределении образцов волокон хлопка по прочности. По оси абсцисс указаны пределы прочности, по оси ординат — количество образцов.



- В каких пределах заключены наименьшая и наибольшая прочности волокон хлопка?
- В каких пределах находится прочность волокон, которую имеет наибольшее количество волокон?
- Какую прочность — от 3 до 4 или от 5 до 6 — имеет большее число волокон?
- Сколько примерно волокон исследовалось на прочность?

3. На круговой диаграмме изображено количество учащихся школы, которые занимаются тем или иным видом спорта.



- Каким видом спорта занимается больше всего учащихся этой школы?

б) Какое из следующих чисел 5, 15, 27, 32 может быть правильным ответом на вопрос: сколько учащихся в школе занимается шахматами?

в) Сколько учащихся школы занимается тем или иным видом спорта?

г) Есть ли в школе 15 учащихся, которые занимаются гимнастикой?

д) Можно ли определить по данной диаграмме, каким видом спорта занимается меньше всего учащихся?

е) Какую еще информацию можно получить из этой диаграммы?

4. Исследовался уровень доходов работников некоторой фирмы. Результаты представлены в следующей таблице.

Уровень доходов	Низкий	Средний	Высокий
Количество работников	$M$	$n$	$k$
Процент от общего количества работников	$p\%$	$q\%$	$r\%$

Чему равна сумма  $p + q + r$ ?

### Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) 20; б) 184 кг; в) 920 зедов; г) 8; д) 9 кг; е) например, сколько учащихся за собранные ягоды получили только деньги.

2. а) От 1 до 8 г/мм<sup>2</sup>; б) от 4 до 5 г/мм<sup>2</sup>; в) от 3 до 4; г) 1000.

3. а) Футболом; б) 5; в) 100; г) нет; д) нет; е) например, есть ли в школе 12 человек, занимающихся баскетболом.

4. 100%.

## 2. Статистические характеристики числовых данных

### Повторяем теорию

Количество случаев, в которых среди статистических данных встречается значение  $x_i$ , называется **частотой** значения  $x_i$  и обозначается  $n_i$ .

Сумма  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  называется **объемом совокупности данных** и обозначается  $n$ .

**Относительной частотой** значения  $x_i$  называется **отношение частоты  $n_i$  этого значения к объему  $n$  совокупности данных.**

Относительную частоту значения  $x_i$  обозначают через  $v_i$ :  $v_i = \frac{n_i}{n}$ .

Относительная частота является краткой и содержательной характеристикой рассматриваемой информации.

Пусть имеем  $n$  объектов, для которых измерена некоторая характеристика, и получены значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . **Среднее арифметическое** этих  $n$  значений обозначается через  $\bar{x}$  и определяется следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ или } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Среднее арифметическое распределяет общую сумму наблюдений равномерно между всеми наблюдениями. Если каждое наблюдение заменить средним, то общая сумма не изменится. Это среднее можно интерпретировать следующим образом: если все наблюдения будут равны между собой, а сумма наблюдений останется неизменной, то каждое наблюдение будет равно среднему. Поскольку среднее сохраняет неизменной сумму при равномерном распределении значений, то оно наиболее полезно в качестве обобщающего показателя при отсутствии резко выделяющихся наблюдений, или как их называют, выбросов, то есть когда набор данных представляет собой более-менее однородную группу.

Если статистические данные повторяются несколько раз, то среднее арифметическое вычисляется с учетом частот:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_m n_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} \text{ или } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} = \sum_{i=1}^m x_i \frac{n_i}{n}.$$

Здесь  $m$  — количество различных значений, которые принимает признак. Такую форму среднего арифметического иногда называют **средним взвешенным**. Среднее арифметическое — это наиболее частое употребительное среднее.

Средневзвешенное можно интерпретировать как среднее, используемое в ситуациях, когда одни элементы более важны по сравнению с другими. Более важные элементы вносят больший вклад в значение средневзвешенного. Роль



весов играют отношения  $\frac{n_i}{n}$ : чем больше частота элемента, тем больший вклад

вносит этот элемент в значение средневзвешенного. Сумма всех весов равна 1.

***Если все элементы совокупности размещены в порядке неубывания или невозрастания числовых значений признака, то медиана — это такое значение признака, которое делит всю совокупность пополам.***

Итак, количество элементов совокупности, имеющих значение признака, не большее медианы, равно количеству элементов со значением признака, не меньшим медианы.

Будем обозначать медиану символом  $Me$ .

При нахождении медианы числовых данных следует различать два случая: 1) объем совокупности нечетный; 2) объем совокупности четный.

Если объем совокупности нечетен и равен  $2n + 1$ , элементы совокупности размещены в порядке невозрастания или неубывания их величины:

$$\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{n \text{ значений}}, \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}}_{n \text{ значений}},$$

то  $Me = x_{n+1}$ .

Если же количество элементов четно и равно  $2n$ , то нет элемента, который бы делил совокупность на две равные по объему части:

$$\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{n \text{ значений}}, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{2n}}_{n \text{ значений}}.$$

Поэтому в качестве медианы условно берется полусумма элементов, находящихся в середине совокупности данных:

$$Me = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}.$$

Медиана обладает важными свойствами, которые в некоторых случаях дают ей преимущество перед другими средними. Например, если при упорядоченном размещении некоторого признака “крайние” значения сомнительные и к тому же резко отличаются от основной массы данных, то в качестве меры центральной тенденции целесообразно использовать медиану, поскольку на ее величину эти “крайние” значения никакого влияния не оказывают, и в то же

время они могут существенным образом повлиять на значение среднего арифметического.

**Мода** — это такое значение признака, которое наиболее часто встречается. В случае, если данные изменяются через определённое число единиц, вычислить моду нетрудно. Достаточно найти значение, которая имеет наибольшую частоту или относительную частоту, это и будет мода. Будем обозначать ее символом  $M_o$ .

Если все значения среди статистических данных встречаются одинаково часто, то считают, что этот ряд **не имеет моды**.

Если два соседних значения упорядоченного статистического ряда, то есть ряда, в котором данные расположены по возрастанию или убыванию, имеют одинаковую частоту, и она больше частоты любого другого значения, то считают, что мода равняется среднему арифметическому этих значений.

Если два не соседних значения упорядоченного статистического ряда имеют одинаковую частоту, и она больше частоты любого другого значения, то считают, что этот ряд имеет **две моды**, а соответствующее распределение называется **бимодальным**.

### Решаем

Следующие задачи посвящены вычислению значений введенных характеристик.

**Задача 1.** В таблице представлены данные о результатах тематической контрольной работы учащихся 8-го класса.

Номер ученика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оценка	3	4	3	2	4	5	2	4	5	3	5	4
Номер ученика	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Оценка	5	3	5	4	3	5	3	5	5	2	4	5

Вычислить частоты и относительные частоты всех оценок.

**Решение.** Частоты и относительные частоты всех оценок представлены в таблице.

Оценка	2	3	4	5
Частота	3	6	8	7
Относительная частота	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{24}$

**Задача 2.** Вычислить среднее арифметическое по данным о доступности заданий теста по математике для 7-го класса. Эти данные приведены в таблице.

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Доступность, %	69	81	62	59	71	70	52	61	61	69	73	72	60
№ задания	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Доступность, %	31	36	63	87	80	47	82	48	50	56	49	66	

**Решение.** Сумма значений равна:  $69 + 81 + 62 + 59 + 71 + 70 + 52 + 61 + 61 + 69 + 73 + 72 + 60 + 31 + 36 + 63 + 87 + 80 + 47 + 82 + 48 + 50 + 56 + 49 + 66 = 1555$ . Разделив это число на количество задач (25), получим:  $\bar{x} = 62,2$ .

**Ответ.**  $\bar{x} = 62,2\%$ .

**Задача 3.** В таблице представлены данные о количестве баллов, набранных на олимпиаде представителями одного района. Вычислить по этим данным среднее арифметическое.

Значение, $x$	2	3	5	6	8	9	10	11	15	18
Частота, $n$	1	2	4	3	2	2	2	3	1	1

**Решение.** Проведем вычисления по схеме, представленной в следующей таблице.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\Sigma$
$x_i$	2	3	5	6	8	9	10	11	15	18	
$n_i$	1	2	4	3	2	2	2	3	1	1	21
$x_i n_i$	2	6	20	18	16	18	20	33	15	18	166

$$\bar{x} = \frac{166}{21} \approx 7,9.$$

**Ответ.**  $\approx 7,9$ .

**Задача 4.** Для проверки семян на всхожесть посеяли 4 сотни семян, отдельно друг от друга. С первой сотни взошли 92 семени, из второй — 90, из третьей — 93, из четвертой — 89. Найти среднюю всхожесть семян.

**Решение.** Общее количество взошедших семян равно  $92 + 90 + 93 + 89 = 364$ . Разделив это число на количество посеянных семян (400), получим:  $\bar{x} = 0,91$ , то есть в среднем взошли 91 % семян.

**Ответ.** 0,91.

**Задача 5.** Вычислить медиану по следующим данным: 1, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7.

**Решение.** В совокупности нечетное число данных, 9. Они расположены в неубывающем порядке. На среднем, пятом, месте стоит 4. Следовательно,  $Me = 4$ .

**Ответ.** 4.

**Задача 6.** В следующей таблице представлены количества баллов, набранных учащимися при некотором тестировании.

$x_i$	121	123	125	128	130	135	140	146	149	153	157	162	169	172	180	185
$n_i$	1	2	2	3	4	3	1	1	1	1	2	3	2	1	1	2

Найти количество баллов такое, что не меньше его и не больше его набрало одинаковое количество учащихся.

**Решение.** Искомое количество баллов равно, по определению, медиане данной совокупности: 121, 123, 123, 125, 125, 128, 128, 128, ..., 185, 185. Так как в рассматриваемой совокупности  $2 + 2 + 2 + 3 + \dots + 2 = 30$  элементов (учащихся), упорядоченных по значению признака (по количеству набранных баллов), и число элементов чётное, нужно найти полусумму числовых значений 15-го и 16-го элементов. Складывая последовательно частоты, находим первое число, равное половине общего числа элементов или превышающее его, то есть число, не меньшее 15. В данном примере последовательно будем иметь: 1, 3, 5, 8, 12, 15. 15-му элементу соответствует значение 135, а 16-му — 140, Следовательно,  $Me = \frac{135 + 140}{2} = 137,5$ .

Полученное значение медианы означает, что примерно половина учащихся получила 137,5 и меньше баллов, и примерно половина — 137,5 и больше

баллов.

**Ответ.** 137,5

Обращаем внимание на ошибку, которая часто встречается при вычислении медианы. Иногда не обращают внимания на частоты данных и на общее количество элементов и за медиану берут полусумму различных средних данных.

В примере 6 количество различных данных равно 16: 121, 123, 128, ..., 185, средние — 8-е и 9-е, их полусумма равна  $\frac{146 + 149}{2} = 147,5$ , что неверно.

**Задача 7.** По данным, приведенным в задаче 6, определить, какое количество баллов набрало самое большое количество учащихся из приведенных данных.

**Решение.** Требуется найти моду данной совокупности. Наибольшее количество учащихся, 4, набрало 130 баллов.  $M_o = 130$ .

**Ответ.** 130.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что показывает частота значения?
2. Что показывает относительная частота значения?
3. Какой смысл имеет среднее арифметическое с точки зрения суммы всех значений набора данных?
4. Что нужно знать, кроме среднего числа отказов прибора, чтобы оценить общее количество отказов приборов?
5. Как используют среднее арифметическое для оценки суммы значений большой совокупности?
6. Достаточно ли знать среднее количество бракованных изделий, выпускаемых рабочими в каждом из трёх цехов предприятия, чтобы найти среднее число бракованных изделий, выпускаемых рабочим на всём предприятии, если на этом предприятии три цеха?
7. Как, имея данные о количестве заказов, поступающих в две мастерские ежедневно в течение месяца, сравнить загруженность этих мастерских работой?

8. Почему средняя зарплата одного работающего в Москве плохо характеризует состояние с заработной платой в столице?
9. Почему бессмысленной считается фраза «средняя температура больного по палате»?
10. Требуется выяснить потребность населения некоторого города в определённом товаре. Как может помочь среднее арифметическое в решении этой проблемы?
11. Почему определение моды содержит неоднозначность?
12. После окончания олимпиады подсчитаны баллы, набранные ее 20 участниками, определены места, занятые ими. Какая из статистических характеристик наилучшим образом описывает средние показатели участников олимпиады?
13. Есть данные о росте производства на некоторой фирме на протяжении 5 лет: 20, 30, 25, 20, 15 %. Какая из статистических характеристик наилучшим образом описывает средний ежегодный рост производства?
14. Есть данные о движении 10 туристов, которые прошли одно и то же расстояние, соответственно, со скоростями: 3; 3; 3,5; 4; 4; 4,5; 4,5; 5; 5,5; 6 км/ч. Какая из статистических характеристик наилучшим образом описывает средние показатели этих данных?
15. Собраны данные о тарифном разряде рабочих цеха. 4 рабочих имеют первый разряд, 6 — второй, 12 — третий, 16 — четвертый, 44 — пятый и 18 рабочих — шестой. Какая из статистических характеристик наилучшим образом описывает средние показатели этих данных?
16. Как изменится медиана совокупности, если ко всем её значениям прибавить одно и то же число?
17. Как изменится мода совокупности, если ко всем её значениям прибавить одно и то же число?
18. Как изменится медиана совокупности, если все её значения умножить на одно и то же число?
19. Как изменится мода совокупности, если все её значения умножить на одно и то же число?

## Ответы на вопросы для самоконтроля

1. Количество раз, которое встречается это значение в совокупности.
2. Долю этого значения среди всех значений совокупности.
3. Среднее арифметическое распределяет общую сумму наблюдений равномерно между всеми наблюдениями. Если каждое наблюдение заменить средним, то общая сумма не изменится.
4. Общее количество приборов.
5. Сначала вычисляют среднее для меньшей выборки данных, представляющей большую группу. Затем полученное среднее умножают на количество элементов в большой группе. В результате получают приближённое значение суммы для всей группы.
6. Нет, нужно ещё знать количество рабочих в каждом цеху.
7. Сравнить средние количества заказов, поступающих в мастерские ежедневно.
8. Так как совокупность зарплат в Москве содержит резко выделяющиеся значения.
9. Средняя температура больного по палате ничего не характеризует.
10. См. ответ на вопрос 5.
11. Так как в совокупности может быть несколько значений с одной и той же наибольшей частотой.
12. Среднее арифметическое набранных баллов.
13. Медиана.
14. Мода.
15. Медиана.
16. Прибавится то же число.
17. Прибавится то же число.
18. Умножится на то же число.
19. Умножится на то же число.

### 3. Выборочный метод в статистике

#### Повторяем теорию

Вероятность случайного события часто нельзя установить с помощью теоретических рассуждений, приходится её оценивать по результатам экспериментов. В качестве приближенного значения вероятности события принимают её относительную частоту:

$$P(A) \approx \nu(A) = \frac{n(A)}{n},$$

где  $n$  — общее число опытов,  $n(A)$  — число тех опытов, в которых наступило событие  $A$ .

Здесь мы использовали результаты большого количества независимых экспериментов, которые проведены примерно в одинаковых условиях. Такая совокупность наблюдений называется ***выборкой из результатов эксперимента***.

Для описания выборки часто используют ее статистические характеристики (среднее, моду, медиану). Их называют еще ***выборочными характеристиками***.

Необходимость проведения выборочных обследований может быть вызвана разными причинами. В некоторых случаях полное обследование изучаемого явления является дорогим и очень длительным. Невозможно оценить качество большой партии зерна. О ней судят по нескольким небольшим меркам, взятым из разных мест оцениваемой партии. Иногда возможность использовать полученную информацию при полном обследовании может исчерпаться раньше, чем завершится процесс его подготовки. Измерение роста всех призывников с целью обеспечения соответствующей информацией швейных объединений, изготавливающих солдатскую форму одежды, мероприятие — бессмысленное. Сбор этой информации обойдется очень дорого, потребуется много времени, а сама информация практически будет устаревшей. В связи с этим о распределении роста всех призывников судят по некоторой выборке наблюдений, достаточно представительной и правильно организованной. Иногда в результате проверки качества изделия происходит уни-



чтожение исследуемого объекта. Например, электролампы проверяют на длительность горения, вплоть до выхода их из строя. Если бы так же испытывались все изготовленные лампы, то пришлось бы уничтожить всю произведенную продукцию. Поэтому для установления среднего времени горения лампы обследуют лишь некоторую ограниченную часть всех ламп.

**Генеральная совокупность** — это набор объектов, о которых необходимо получить информацию.

**Выборка** — это небольшой набор объектов, которые выбирают из генеральной совокупности.

К основным задачам статистики обычно относят оценивание по выборке неизвестных параметров и проверку статистических гипотез.

Если нужно оценить какие-то параметры генеральной совокупности, можно вычислить соответствующие параметры специально организованной выборки и принять их в качестве оценок параметров генеральной совокупности. Так, мы видели, что относительная частота служит оценкой вероятности события. Выборочное среднее является оценкой среднего значения всей совокупности, мода, найденная по выборке, приближенно равна значению генеральной совокупности, которое встречается чаще всего. Выборочная медиана близка к элементу генеральной совокупности, делящему ее пополам. Но для того, чтобы выборочные характеристики приближенно равнялись соответствующим характеристикам генеральной совокупности, выборка должна удовлетворять определенным требованиям.

Во-первых, выборка должна быть достаточно большого объёма. Нельзя утверждать, что три четверти жителей Одессы по утрам пьют кофе на основании того, что из четырёх одесситов, которых мы рано утром встретили в кафе, трое пили кофе.

Во-вторых, нужны такие способы построения выборки, которые представляли бы всю генеральную совокупность, то есть, чтобы выборка была репрезентативной (представительной). Для создания репрезентативной выборки целесообразно иметь перечень элементов генеральной совокупности и из него каким-то случайным образом организовывать выборку. Информация, полученная в резуль-

тате построения выборки, будет только тогда надежной основой для принятия решения относительно тех или иных свойств генеральной совокупности, когда структура элементов, образующих выборку, будет аналогичной структуре элементов в генеральной совокупности.

*Случайной является выборка, в которую с одинаковыми шансами может попасть каждый отдельный элемент и каждая комбинация отдельных элементов, принадлежащих начальной совокупности.*

Человеку часто приходится принимать то или иное решение. У большинства принятых решений есть элемент риска. Во многих случаях статистика может существенно помочь в обосновании принятия того или другого решения. Например, принятию решения о переходе на новую технологию производства какого-то изделия должна предшествовать экспериментальная проверка этой технологии, сбор необходимой информации, ее обработка, проверка того, говорят ли собранные данные в пользу новой технологии. На основе собранной информации должно приниматься решение, какой из выдвинутых гипотез следует отдать предпочтение.

### **Решаем**

Следующая задача направлена на формирование понятия репрезентативной выборки.

**Задача 1.** Менеджер обувной фабрики большого города хочет выяснить, в каком количестве нужно шить обувь тех или иных размеров. Он должен составить репрезентативную выборку жителей этого города. Будет ли репрезентативной выборка, составленная из:

- 1) учащихся какой-то школы;
- 2) баскетболистов города;
- 3) жильцов многоквартирного дома;
- 4) жильцов домов, расположенных в одном микрорайоне?

**Решение.** Очевидно, что первые две выборки нельзя отнести к репрезентативным: они не дадут приемлемой информации о размерах обуви, необходимой жителям города. Последние две выборки более репрезентативны: в многоквартир-

ном доме живут люди разных возрастов, различных социальных слоёв, различных профессий, поэтому жильцы такого дома могут в определённой мере представлять жителей большого города. Аналогично дело обстоит и с жильцами домов, расположенных в одном микрорайоне. Конечно, при этом не будут учтены потребности наиболее состоятельной части населения города, живущей в отдельных особняках, элитных квартирах. ■

В следующих двух задачах по выборке оценивается параметр генеральной совокупности.

**Задача 2.** Ихтиолог хотел определить количество рыбы в пруду, пригодной для отлова. Для этого он забросил сетку с заранее заданными размерами ячеек и, вытянув ее, обнаружил 30 рыбин. Пометив каждую из них, он возвратил всю рыбу назад в пруд. На следующий день ихтиолог в том же месте забросил ту же сетку и поймал 40 рыбин, на двух из которых были его метки. Как он по таким данным найдет примерное количество рыбин в пруду, пригодных для отлова?

**Решение.** Пусть в пруду  $N$  рыбин, тогда вероятность события «наугад взятая рыба меченая» равна  $\frac{30}{N}$  (по классическому определению вероятности).

Здесь генеральной совокупностью является совокупность всех рыб в пруду, неизвестным — общее количество рыб в водоёме, или вероятность отлова меченой рыбы, выборкой — совокупность рыб, пойманных во второй раз. На основе данных выборки можно вычислить долю меченых рыб среди отловленных. Эта величина случайна, в конкретном опыте она принимает определенное значение.

Согласно результатам 40 опытов (опытом считаем отлов одной рыбины), проведенных на следующий день, можно подсчитать относительную частоту этого события. Она равна  $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$ . Имеем приближенное равенство  $\frac{30}{N} \approx \frac{1}{20}$ .

Отсюда  $N \approx 600$ .

Почему рассматриваемые опыты можно считать статистически устойчивыми

выми? Или можно ли считать полученную выборку репрезентативной? Повысили репрезентативность выборки мы тем, что второй отлов рыб будет проводиться той же сеткой, что и первый, причем она была заброшена не сразу по возвращении рыб в водоем (иначе меченые рыбы не успели бы перемешаться с другими) и не через длительное время (иначе может состояться нерест рыб или сброс вредных отходов в пруд: и то, и другое существенно повлияет на общее количество рыб в водоеме), а на следующий день, в том же месте. ■

**Задача 3.** В школах района учится 500 девятиклассников. Для проверки усвоения некоторой темы был предложен тест из 10 вопросов. Для тестирования отобраны 62 ученика. Результаты тестирования представлены в таблице.

Количество правильных ответов	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество учащихся	2	18	13	8	10	6	4	1

Необходимо оценить ожидаемое количество правильных ответов всех девятиклассников района.

**Решение.** Надо оценить среднее количество правильных ответов всех девятиклассников района. Но мы можем найти среднее количество правильных ответов одного учащегося по результатам тестирования выбранных 62 учеников.

По данным выборки вычислим выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 13 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 1}{2 + 18 + 13 + 8 + 10 + 6 + 4 + 1} = \frac{355}{62} \approx 5,73.$$

Следовательно,  $\bar{x} \approx 5,73$ . Будем считать, что выборка является репрезентативной. Репрезентативную выборку можно образовать, например, таким способом: пронумеровать всех 500 девятиклассников, потом случайно отобрать 62 учащихся. Тогда можно считать, что если бы тестировались все девятиклассники района, то, учитывая, что среднее количество правильных ответов одного учащегося равно 5,73, получим, что количество правильных ответов всех девятиклассников района примерно равно  $5,73 \cdot 500 = 2\ 865$ .

**Ответ.**  $\approx 2865$ .

В следующей задаче начинается формирование понятия проверки статистических гипотез.

**Задача 4.** Исследуется вопрос о влиянии нового рациона кормления коров на жирность молока.

- 1) При каких результатах эксперимента целесообразно изменить прежний рацион?
- 2) При каких результатах эксперимента нецелесообразно менять прежний рацион?

**Решение.** 1) Если средняя жирность молока при новом рационе существенно более высока, чем средняя жирность молока при старом рационе, то целесообразно изменить прежний рацион.

5) Если средняя жирность молока при новом рационе несущественно выше, чем средняя жирность молока при прежнем рационе, то нецелесообразно менять прежний рацион. ■

### **Вопросы для самоконтроля**

1. В чем заключается польза применения выборок?
2. Почему прибегают к выборочному контролю качества ампул для инъекций?
3. Являются ли результаты переписи населения в стране генеральной совокупностью или выборкой для исследования факторов, присущих населению страны; мира?
4. Почему при определении средних характеристик некоторого биологического рода берут достаточно большое количество особей и проводят соответствующие измерения?
5. На фабрике по производству поршней возникли определённые проблемы с качеством. Для проведения тщательного анализа принято решение собрать информацию о продукции, выпущенной в некоторый определённый день. Для каждого из указанных ниже методов извлечения выборки определите, является ли такая процедура хорошей, приемлемой или необоснованной.
  - а) Первые пять произведенных поршней.

б) 10 поршней, находящихся вне фабрики, так как они никогда не использовались.

в) Каждый 15-й произведенный поршень.

г) Образованная в конце дня случайная выборка.

д) Все явно бракованные поршни вместе со случайной выборкой из очевидно стандартных поршней.

6. Была ли выборка репрезентативной, если при изучении времени, которое затрачивают на выполнение уроков десятиклассники:

а) опрашивали только девочек;

б) опрос проводили только по средам;

в) опрашивали только учащихся лицеев;

г) опрашивали только неуспевающих?

7. В ходе опроса предстоит выяснить отношение жителей региона к введению единого государственного экзамена. Какие категории жителей должны быть включены, на ваш взгляд, в составляемую выборку?

### **Ответы на вопросы для самоконтроля**

1. Необходимость проведения выборочных обследований может быть вызвана разными причинами. В некоторых случаях полное обследование изучаемого явления является дорогим и очень длительным. Иногда возможность использовать полученную информацию при полном обследовании может исчерпаться раньше, чем завершится процесс его подготовки. Иногда в результате проверки качества изделия происходит уничтожение исследуемого объекта.

2. Если исследовать все ампулы, то они будут уничтожены.

3. Генеральной совокупностью, если исследуется население страны, и выборкой, если исследуется население мира.

4. Невозможно исследовать весь биологический род.

5. а), б), г), д) — нет, в) — да. 6. а), б), в), г) — нет.

7. Следует в выборку включать людей, которые как профессионально судят об ЕГЭ, так и непрофессионально, по-любительски.

## 4. Случайный опыт и случайное событие

### Повторяем теорию

*Под случайным испытанием понимают любое действие, которое можно повторить большое количество раз приблизительно в одинаковых условиях и результаты которого предсказать невозможно.*

Для термина “случайное испытание” синонимами являются «случайный эксперимент», «случайный опыт».

Только наличие всех трёх условий делает испытание случайным.

*Любой исход случайного испытания будем называть случайным событием.* В результате такого испытания случайное событие может или произойти, или не произойти.

Различают *достоверные* события (они происходят всегда в испытании), *невозможные* события (они никогда не происходили в испытании) и события, не являющиеся ни достоверными, ни невозможными. В дальнейшем все события, связанные со случайными испытаниями, мы будем называть *случайными*, а невозможные и достоверные рассматривать как их отдельные, крайние, предельные разновидности.

*Одно и то же событие в одном опыте может быть достоверным, а в другом — невозможным, в третьем — случайным, не являющимся ни достоверным, ни невозможным.*

Если некоторое событие  $A$  не наступает, то говорят, что произошло противоположное ему событие  $\bar{A}$ . Оно наступает тогда и только тогда, когда  $A$  не наступает.

*Событие, которое происходит тогда и только тогда, когда событие  $A$  не происходит, называется противоположным событием  $A$ .*

### Решаем

Следующие задачи посвящены формированию понятия случайного испытания и случайного события.

**Задача 1.** Какие из следующих испытаний можно считать случайными:

1) стрельба по мишени; 2) нагревание воды в чайнике; 3) покупка лотерейного билета; 4) вращение рулетки в игре «Поле чудес»; 5) поступление юноши в лицей; 6) многолетние наблюдения над погодой в тот же день года в одной и той же местности; 7) подбрасывание кнопки; 8) участие команды «Шахтер» в первенстве Украины по футболу?

**Решение.** Испытания 1), 3), 4), 6), 7) являются случайными, выполняются все три отмеченные условия. Предлагаем самостоятельно их проверить. Нагревание воды в чайнике при обычных условиях не является случайным испытанием, так как при  $100^{\circ}\text{C}$  вода закипит. Результат известен заранее. Поступление юноши в лицей также не является случайным испытанием, так как его нельзя повторить многократно. Участие команды «Шахтер» в первенстве Украины хотя и повторяется многократно, и результат нельзя предсказать однозначно, не является случайным испытанием, так как меняются условия, в которых происходит это участие. ■

**Задача 2.** В урне 3 белых, 3 черных и 3 красных шара. Сколько шаров нужно извлечь из урны, чтобы обязательно иметь шары трёх цветов?

**Решение.** Если извлечь 1 или 2 шара, то *невозможно* получить шары трёх цветов. Если вынуть 7, 8 или 9 шаров, то *обязательно* получим шары всех трёх цветов. Если вынуть 3, 4, 5 или 6 шаров, то возможно, но не обязательно, будем иметь шары трёх цветов.

В первом случае мы имеем дело с *невозможным событием* («получить шарики трёх цветов во время извлечения одного или двух шариков») — оно ни в коем случае не произойдёт в рассмотренной ситуации, во втором случае — с *достоверным событием* («получить шарики трёх цветов во время извлечения 7, 8 или 9 шариков») — оно обязательно произойдёт в этой ситуации, в третьем случае — со *случайным событием*, не являющимся ни достоверным, ни невозможным («получить шарики трёх цветов во время извлечения 3, 4, 5 или 6 шариков») — оно может произойти в рассмотренной ситуации, а может и не произойти.

**Ответ.** 7, 8 или 9.



## Вопросы для самоконтроля

1. Какие из следующих испытаний можно считать случайными:

- а) стрельба по мишени;
- б) нагревание воды в чайнике;
- в) покупка лотерейного билета;
- г) вращение рулетки в игре «Поле чудес»;
- д) поступление юноши в лицей;
- е) подбрасывание кнопки;
- ё) многолетние наблюдения над погодой в один и тот же день в одной и той же местности;
- ж) участие команды «Локомотив» в первенстве России по футболу?

2. В следующих ситуациях приведите пример случайного события: а) рождение ребенка; б) игра в баскетбол; в) контроль за качеством изделий; г) участие в лотерее; д) выбор поля футбольной командой?

3. Можно ли до проведения случайного испытания однозначно предсказать, наступит ли случайное событие?

4. Можно ли считать событие «Петя поступил в лицей» случайным?

5. Можно ли считать, что событие «Космический корабль вышел на заданную орбиту» случайным?

6. Какие из следующих событий нельзя считать ни достоверными, ни невозможными: а) «ученик за контрольную работу получил оценку «4»»; б) «при подбрасывании игрального кубика выпало от 1 до 6 очков»; в) «выпал герб при подбрасывании монеты»; г) «при подбрасывании игрального кубика выпало 7 очков»?

7. Из ящика, который содержит белые и черные шары, вынимают четыре шара. Каким является событие, противоположное событию: а) «вынут хотя бы один белый шар»; б) «вынуто более двух белых шаров»; в) «среди вынутых шаров белых нет»?

## Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а), в), г), е), ё). 2. а) Родился мальчик; б) игра закончилась со счётом 60:57; в) бракованных деталей нет; г) выиграл 1000 рублей; г) команда выбрала северные ворота. 3. Нет. 4. Нет. 5. Нет. 6. а), в). 7. а) «Ни один из вынутых шаров не является белым»; б) «вынуто не более двух белых шаров»; в) «среди вынутых шаров есть белые».

## 5. Статистический подход к вероятности

### Повторяем теорию

Статистический подход к вероятности основан на понятии *относительной частоты события*.

*Число опытов, в которых произошло некоторое событие, называется частотой этого события. Отношение числа опытов, в которых произошло некоторое событие, к общему числу опытов, проведенных в одних и тех же условиях, называется относительной частотой этого события.*

Относительную частоту случайного события  $A$  обозначают через  $\nu(A)$ . Иногда её выражают в процентах.

Из определения относительной частоты события вытекают её простейшие свойства.

**Свойство 1.** Относительная частота невозможного события равна 0.

**Свойство 2.** Относительная частота достоверного события равна 1.

**Свойство 3.** Относительная частота любого случайного события не меньше 0 и не больше 1.

**Свойство 4.** Сумма относительных частот противоположных событий равна 1.

*Если относительная частота события от серии к серии из большого количества опытов колеблется около некоторого числа, то такие опыты называют статистически устойчивыми, а число, около которого колеблется относительная частота события, принимается за вероятность этого события.*

Относительную частоту события можно принять в качестве оценки ее вероятности, если:

- 1) число опытов достаточно велико;
- 2) опыты статистически устойчивы.

Наличие у события при определённых условиях вероятности, равной  $p$ , проявляется в том, что почти в каждой достаточно длинной серии опытов относительная частота события приближённо равна  $p$ .

Таким образом, каждому событию соответствует число от 0 до 1, называемое вероятностью. Оно показывает, каковы шансы наступления данного события в каждом случайном эксперименте.

### Решаем

Задачи данного параграфа ориентированы на формирование статистического подхода к понятию вероятности случайного события.

**Задача 1.** Некоторое предприятие производит массовую продукцию. Если изделие, поступившее в продажу, выходит из строя в течение одного года, то его заменяют запасным. Сколько запасных изделий необходимо изготовить, если на протяжении года продают  $N$  изделий, и выход из строя запасного изделия считается невозможным?

**Решение.** Будем считать, что событие  $A$  — “отказ изделия” — имеет некоторую вероятность  $p$ . Пусть в течение года вышло из строя  $m$  изделий. Тогда  $\frac{m}{N}$  — относительная частота события  $A$ . Если  $N$  — достаточно большое число, то  $\frac{m}{N} \approx p$ . Отсюда  $m \approx N \cdot p$ . На практике довольно часто вероятность  $p$  неизвестна. Для её оценки (приближенного вычисления) проводят некоторое число  $n$  испытаний изделий в течение года. Если за это время откажет  $k$  изделий, то  $\frac{k}{n}$  — относительная частота события  $A$ . При достаточно большом значении  $n$  можем считать, что  $\frac{k}{n} \approx p$ . Тогда  $m \approx \frac{Nk}{n}$ .

**Ответ.**  $m \approx \frac{Nk}{n}$ .

**Задача 2.** Длительными наблюдениями установлено, что в ремонтную мастерскую на протяжении дня поступает не более двух заявок на ремонт некоторого оборудования. В течение 100 наблюдений две заявки поступили 25 раз, одна заявка — 60 раз, ни одной заявки не поступило 15 раз.

1) Каковы вероятности того, что в мастерскую на протяжении дня поступит 1 заявка, 2 заявки, не поступит ни одной заявки?

2) Какова вероятность того, что в мастерскую на протяжении дня поступит по крайней мере одна заявка?

3) Какова вероятность того, что в мастерскую на протяжении дня поступит менее двух заявок?

**Решение.** 1) Поскольку две заявки поступали в течение четверти наблюдений, то естественно вероятность того, что в мастерскую поступит две заявки, принять равной  $25:100 = 0,25$ . Аналогично, вероятность того, что в мастерскую поступит ровно одна заявка, можно считать равной 0,6; вероятность того, что не поступит ни одной заявки, — 0,15.

2) Событие «в мастерскую на протяжении дня поступит по крайней мере одна заявка» означает, что поступит одна или две заявки. Это в течение 100 наблюдений наблюдалось  $60 + 25 = 85$  раз. Поэтому вероятность этого события можно принять равной 0,85.

3) Событие «в мастерскую на протяжении дня поступит менее двух заявок» означает, что или в мастерскую не поступило ни одной заявки, или поступила одна заявка. Это в течение 100 наблюдений наблюдалось  $15 + 60 = 75$  раз. Поэтому вероятность этого события можно принять равной 0,75.

**Ответ.** 1) 0,25; 0,6; 0,15; 2) 0,85; 3) 0,75.

### Вопросы для самоконтроля

1. Игральный кубик подбрасывался трижды, при этом выпало, соответственно, 2, 2, 5 очков. Можно ли по этим данным указать приближенное значение вероятности события: «при подбрасывании игрального кубика выпало два очка»?

2. Проводится последовательное подбрасывание монеты, после каждого из них подсчитывается относительная частота события «выпал герб». Какие из приведенных ниже числовых последовательностей могут соответствовать указанному опыту:

а)  $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$ ; б)  $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \dots$ ; в)  $0; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \dots$ ; г)  $\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$ ?

3. Вероятность наступления события  $A$  в некотором опыте равняется 0,72.

Можно ли утверждать, что в 100 таких же опытах, проведенных в тех же

условиях, это событие произойдет ровно 72 раза?

4. Для контроля качества продукции некоторого завода из каждой партии готовых изделий отбирают для проверки 150 деталей. Проверку не выдерживают, в среднем, 6 деталей. Как оценить вероятность выпуска бракованных деталей заводом: а) в данное время; б) после усовершенствования технологии производства?

5. Зная относительную частоту события, охарактеризуйте соответствующее явление:

а) относительная частота реализованных пенальти для данного футболиста равна 0,8;

б) относительная частота пенальти, взятых данным вратарём, равна 0,2;

в) относительная частота рабочих дней на предприятии, в которых достигалась намеченная цель, равна 0,88;

г) относительная частота обнаружения бракованной детали с помощью рентгена равна 0,8.

### **Ответы на вопросы для самоконтроля**

1. Нет. 2. а) и в). 3. Нет. 4. а) Вычислить относительную частоту выпуска бракованных деталей; б) отобрать случайно, например, 100 деталей, изготовленных по усовершенствованной технологии, и выяснить, сколько из них бракованных.

5. а) Данный футболист удовлетворительно реализует пенальти; б) данный вратарь неплохо берёт пенальти; в) намеченная цель на предприятии в большинстве случаев достигается; г) рентген — неплохое средство для обнаружения бракованной детали.

## **6. Классическая вероятность**

### **Повторяем теорию**

При статистическом подходе к определению вероятности наличие вероятности в некотором событии связывают с существованием статистически устойчивых опытов. Проведение массовых экспериментов в некоторых случаях либо невозможно, либо чрезвычайно сложно. В таких случаях иногда целесообразно использовать для характеристики шансов наступления события клас-

сическую вероятность. Фактически на нем основывается доэкспериментальный расчет вероятностей. Классическую вероятность можно получить как следствие статистической. Обращаем внимание на то, что и статистический, и классический подходы применимы для анализа массовых событий.

***Если испытание заканчивается одним из  $N$  равновозможных исходов, из которых  $N(A)$  приводит к наступлению события  $A$ , то вероятностью события  $A$  называют отношение  $\frac{N(A)}{N}$ .***

Вероятность события  $A$  обозначают символом  $P(A)$ . Это определение вероятности события называют **классическим**. Следующую схему вычисления вероятности целесообразно использовать при вычислении вероятности события с помощью классического определения вероятности:

- 1) выяснить, какой опыт рассматривается в задаче;
- 2) указать его исходы и подсчитать их количество;
- 3) выяснить, можно ли исходы опыта считать равновозможными, если можно, то почему;
- 4) выяснить вероятность какого события нужно найти;
- 5) указать, какие исходы опыта приводят к этому событию (или благоприятствуют ему);
- 6) подсчитать число исходов, благоприятствующих событию;
- 7) вычислить вероятность события по рассмотренной формуле.

Простейшие свойства вероятности:

- 1. Вероятность невозможного события равна 0.**
- 2. Вероятность достоверного события равна 1.**
- 3. Вероятность любого случайного события не меньше 0 и не больше 1.**
- 4. Сумма вероятностей противоположных событий  $A$  и  $\bar{A}$  равна 1.**

Формула классической вероятности предполагает, что исходы опыта равновозможны. Равновозможность исходов является проявлением симметрии исходов опыта. Симметрия в природе — это и геометрическая симметрия, и разного рода однородность, например, однородность материала. На вопрос, какие исходы считать равновозможными, математика ответа не дает.

Если в условии задачи говорится, что выбор каких-то элементов осуществляется наугад, случайно, то это говорит о том, что исходы этого выбора считаются равновозможными. Проверить предположение о равновозможности

исходов опыта можно экспериментально, проведя достаточно большое количество опытов.

### Решаем

В задачах данного параграфа рассматривается подсчёт вероятностей событий, связанных с опытами, которые можно повторить многократно.

**Задача 1.** Один раз подброшен игральный кубик. Чему равна вероятность того, что на верхней грани кубика окажется: 1) чётное число очков; 2) более двух очков?

**Решение.** В задаче речь идет о случайном опыте — однократном подбрасывании игрального кубика. Его исходами служат количества очков, которые могут выпасть. Это: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Всего их 6:  $N = 6$ . Если кубик правильный, симметричен, то есть центр тяжести кубика находится в его центре, то эти исходы равновозможны.

1) К событию  $A$  — «выпало чётное число очков» — приводят исходы 2, 4, 6,  $N(A) = 3$ . Следовательно  $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{6} = 0,5$ .

2) К событию  $B$  — «число выпавших очков больше 2» — приводят исходы 3, 4, 5, 6,  $N(B) = 4$ ,  $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

**Ответ.** 1) 0,5; 2)  $\frac{2}{3}$ .

**Задача 2.** Подбросили две монеты. Какова вероятность того, что 1) обе они упадут гербом вверх; 2) одна упадет гербом вверх, а другая — цифрой?

□ Всего возможны 4 исхода: ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ,  $N = 4$ . Все они равновозможны (монеты считаем симметричными).

1) Обе монеты упадут гербом вверх (событие  $A$ ) при одном результате ГГ,  $N(A) = 1$ . Поэтому  $P(A) = 0,25$ .

2) Одна монета упадет гербом вверх, а другая цифрой вверх (событие  $B$ ) при двух исходах ГЦ или ЦГ,  $N(B) = 2$ . Следовательно,  $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

**Ответ.** 1) 0,25; 2) 0,5.

## Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли считать равновозможными следующие исходы опытов:

а) «на купленный лотерейный билет выпал выигрыш» и «на купленный лотерейный билет не выпал выигрыш»;

б) «из урны с пятью одинаковыми шарами, пронумерованными числами 1, 2, 3, 4, 5, при извлечении наугад вынут шар №1 и вынут шар №2»;

в) «выпал герб» и «выпала цифра» при подбрасывании симметричной монеты;

г) «игрок в казино выиграл» и «игрок в казино не выиграл»;

д) «промах» и «попадание» у отличного стрелка;

е) «выпал герб» и «выпала цифра» при подбрасывании деформированной монеты;

ж) выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при подбрасывании правильного игрального кубика;

з) выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при подбрасывании деформированного игрового кубика?

2. При проведении эксперимента могут наступить 10 равновозможных исходов, взаимно исключающих друг друга. Чему равна вероятность события, наступающего: а) только при одном исходе; б) при каждом из двух определенных исходов?

3. В результате эксперимента происходят равновозможные события, взаимно исключающие друг друга. Вероятность каждого из них равна 0,05. Чему равно число этих событий?

4. Петя купил один билет лотереи, в которой разыгрывается 10 призов и выпущено 120 билетов. Какова вероятность того, что он выигрывает приз?

5. Из ящика, который содержит белые и черные шары, вынимают четыре шара. Каким является событие, противоположное событию: а) «вынут хотя бы один белый шар»; б) «вынуто более двух белых шаров»; в) «среди вынутых шаров белых нет».



## Ответы на вопросы для самоконтроля

1. а) Нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) нет; ж) да; з) нет.

2. а) 0,1; б) 0,2. 3. 20. 4.  $\frac{1}{12}$ . 5. а) «Среди вынутых шаров нет белых»; б) «вынуто не более двух белых шаров»; в) «среди вынутых шаров есть белые»

## Тесты для тренировки

### Вариант 1

#### 1. Представление и анализ статистических данных

1. В таблице представлена информация о численности населения двух стран.

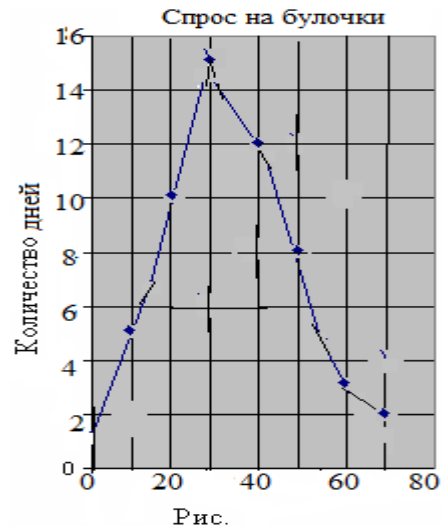
Страна	Численность населения	
	2010	2020
Франция	64 613 000	68 035 000
Великобритания	63 182 000	67 081 000

В какой стране быстрее увеличивается численность населения?

А. С одинаковой скоростью. Б. Во Франции.

В. В Великобритании. Г. Определить невозможно.

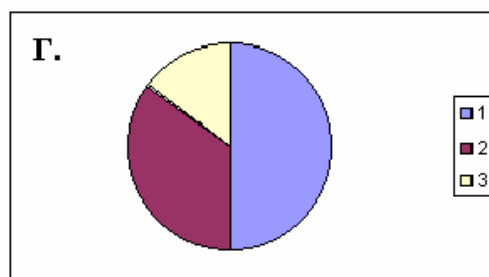
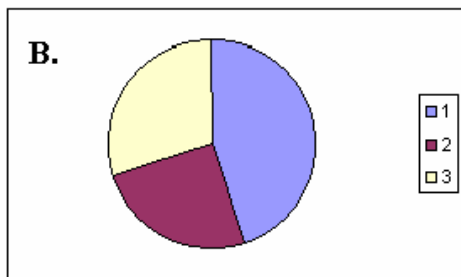
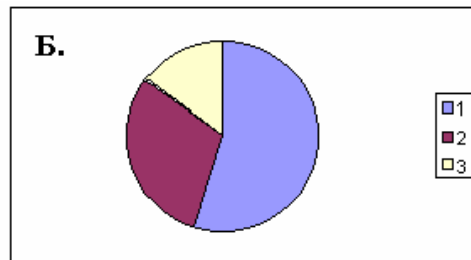
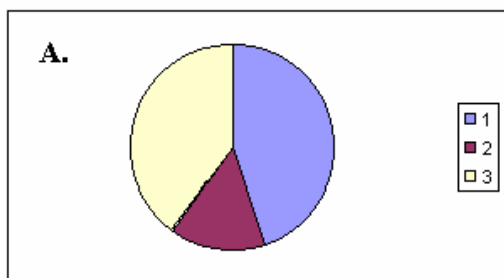
2. Виталий покупает сдобные булочки по оптовой цене 10 зедов за 1 булочку, которые потом продает их в тот же день на рынке по 15 зедов (зед — условная денежная единица). Если у него остается нераспроданный товар, он весь его распродает на следующий день по 4 зеда за штуку. На диаграмме (см. рис.) представлены данные о спросе на булочки в течение 55 дней. Какой будет приблизительно (с точностью до 1 зеда)



средняя ежедневная прибыль Виталия, если он ежедневно в течение 55 дней будет покупать 50 булочек и если на них сохранится приведенный спрос? Выберите наиболее точное значение.

А. 66 зедов. Б. 68 зедов. В. 70 зедов. Г. 74 зеда.

3. Среди деревьев рощи березы составляют 60%, осины — 15 %, остальные деревья — другие породы. На какой из следующих диаграмм изображены эти данные?



4. Статистическая информация о врачах во Франции за 1989 год: 9,3% старше 60 лет; 23% — женщины; 26% моложе 35 лет; 45% — специалисты; 55% — общие врачи. Почему сумма процентов больше 100?

- А. Допущена ошибка в получении информации.
- Б. Указанные группы имеют общие элементы.
- В. Эта сумма всегда больше 100.
- Г. Определить невозможно.

## 2. Статистические характеристики

5. В некоторой книге в каждом отрывке текста из 150 букв буква «о» встречается в среднем 12 раз. С какой относительной частотой в этой книге встречается буква «о»?

- А. 0,08.
- Б.  $\frac{1}{15}$ .
- В.  $\frac{1}{12}$ .
- Г. 0,12.

6. Сколько выстрелов было сделано, если относительная частота попаданий равняется 0,7, а количество промахов равняется 12?

- А. 28.
- Б. 36.
- В. 40.
- Г. 42.

7. Известно, что после 200 подбрасываний игрального кубика относительная частота выпадения «тройки» равнялась 0,15. В каких границах обязательно находилась относительная частота этого события после первых 100 подбрасываний?

- А. [0,075; 0,25].    Б. [0,075; 0,3].    В. [0; 0,3].    Г. [0,05; 0,25].

8. После урока по теме «Статистика» на доске осталась таблица:

Значение	4	7	
Частота	5	2	3

и ответ:  $\bar{x} = 10$ . Какое число стоит в пустой клеточке?

- А. 66.    Б. 34.    В. 10.    Г. 22.

9. Девятиклассникам предложили контрольную работу по математике, в которой было 6 задач. В таблице представлены данные о количестве задач, которые решили учащиеся.

Количество правильно решённых задач	0	1	2	3	4	5	6
Частота	3	4	12	15	8	3	5

Чему равняется среднее количество задач, которые решили учащиеся?

- А. 3.    Б. 3,5.    В. 4.    Г. 4,5.

10. Два стрелка сделали по 100 выстрелов. Первый выбил 8 очков 40 раз, 9 очков — 10 раз и 10 очков — 50 раз. Второй — 8, 9, 10 очков выбил соответственно 10, 60, 30 раз. Какой из стрелков стреляет лучше?

- А. Первый.    Б. Второй.    В. Одинаково.    Г. Определить невозможно.

11. В таблице представлено примерное количество часов в день, которое тратят девятиклассники на приготовление домашних заданий.

Время, ч	0	1	2	3	4
Количество учащихся	2	5	7	5	1

Сколько времени в день в среднем тратит учащийся на приготовление домашних заданий?

**А.** 2 ч.

**Б.** 1,9 ч.

**В.** 1,8 ч.

**Г.** 1,7 ч.

**12.** В таблице к предыдущему заданию представлено примерное количество часов в день, которое тратят девятиклассники на приготовление домашних заданий. Найдите количество времени такое, что половина учащихся тратит на приготовление домашних заданий не меньше времени, а половина — не больше.

**А.** 2 ч.

**Б.** 1,5 ч.

**В.** 2,5 ч.

**Г.** 3 ч.

**13.** В таблице к заданию 11 представлено примерное количество часов в день, которое тратят девятиклассники на приготовление домашних заданий. Сколько времени тратит на приготовление домашних заданий самое большее количество учащихся из приведенных данных?

**А.** 4 ч.

**Б.** 3 ч.

**В.** 2 ч.

**Г.** 1 ч.

**14.** Изучалась статистика потерпевших вследствие дорожно-транспортных происшествий. Оказалось, что в среднем 61% погибших составляют водители-любители, 15% — мотоциклисты, 15% — пешеходы, 5% — водители грузовых или служебных машин, 4% — велосипедисты. Какая из статистических характеристик лучше всего описывает средние показатели этих данных

**А.** Мода.

**Б.** Медиана.

**В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

**15.** На соревнованиях по бегу на 100 м девятиклассниками были показаны следующие результаты (в с): 14,3; 15,1; 13,7; 14,4; 15,9; 14,5; 13,7. Какая из статистических характеристик наилучшим образом указывает на средний результат девятиклассников?

**А.** Мода.

**Б.** Медиана.

**В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

**16.** На некотором стадионе была зафиксирована следующая посещаемость четырёх футбольных матчей: 24 532, 18 711, 22 871, 24 334. Какая из статистических характеристик лучше всего описывает среднюю посещаемость этих матчей?

**А.** Мода.

**Б.** Медиана.

**В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

### 3. Выборочный метод в статистике

17. Необходимо проверить 756 ящиков с оборудованием на соответствие документам. Эта работа громоздка. Поэтому образуют выборку, для которой выполняют проверку. Какой из приведенных способов образования выборки лучше всего даст возможность качественно провести проверку?

А. 10 ближайших ящиков.      Б. 10 самых отдаленных ящиков.

В. Три больших, три средних и три небольших по размеру ящиков.

Г. Ящики, случайно отобранные для проверки из перечня, отмеченного в накладной.

18. Для определения количества собак в городе, больных чумкой, из всех бездомных собак города образовали две выборки: 1) из одной собачьей стаи; 2) по несколько случайно отловленным из каждого района города собакам. Какая из них можно считать лучше всего даст возможность определить количество собак в городе, больных чумкой.

А. Первая.      Б. Вторая.      В. Обе одинаково.      Г. Определить невозможно.

19. В ящике находится большое количество одинаковых шаров. Для определения количества шаров, которые находятся в ящике, случайно отобрали из них 20 шаров, поместили их и возвратили в ящик. Тщательным образом перемешали все шары и вынули случайно из них 30 штук. Среди них оказались 3 меченых. Сколько примерно шаров в ящике? Выберите наиболее точное значение.

А. 100.      Б. 200.      В. 300.      Г. 400.

20. На математической олимпиаде в некотором районе участвовали 265 учащихся. Для определения среднего количества баллов, которые набрал участник олимпиады, случайно отобрали результаты 21 учащегося. Их результаты на олимпиаде представлены в таблице.

Количество набранных баллов	2	3	5	6	8	9	10	11	15	18
Количество учащихся	1	2	4	3	2	2	2	3	1	1

Необходимо оценить ожидаемое среднее количество баллов среди всех участников олимпиады. Выберите наиболее точное значение.

А. 7,9.      Б. 7,5.      В. 7,1.      Г. Невозможно оценить.

**21.** На учете 2000 больных, которые страдают от хронических приступов головной боли. Реклама утверждает, что некоторые лекарства снимают боль. Проводится эксперимент: в одной группе больных применяется рекламируемое лекарство, в другой оно не применяется. Целесообразно отклонить гипотезу о том, что применение рекламируемого лекарства не изменяет состояния больных, если процент больных, которым помогло лекарство равен ...

**А. 45.      Б. 49.      В. 55.      Г. 75.**

#### **4. Случайный опыт и случайное событие**

**22.** Какое из приведенных испытаний можно считать случайным?

**А.** Проведение олимпийских игр. **Б.** Абитуриент сдаёт экзамен по химии.  
**В.** Испытание медикаментов. **Г.** Поступление юноши в университет.

**23.** Какое из приведенных событий является случайным?

**А.** Антон прошёл по конкурсу в университет.  
**Б.** Во время испытаний установлена эффективность медикаментов.  
**В.** На олимпийских играх команда России заняла первое место.  
**Г.** Абитуриент на экзамене по химии получил отличную оценку.

**24.** Какое из следующих событий нельзя считать ни достоверным, ни невозможным?

**А.** Применение новых лекарств сделало невосприимчивыми к новой инфекционной болезни четверть населения города.

**Б.** При извлечении двух шаров из урны, содержащей шары трёх цветов, вынули шары всех трёх цветов.

**В.** При подбрасывании игрального кубика выпало 7 очков.

**Г.** Сумма очков на пластинке, извлечённой из набора обычного домино, равна одному из целых чисел от 0 до 12.

**25.** Из ящика, который содержит белые и черные шары, вынимают четыре шара. Каким является событие, противоположное событию «вынут хотя бы один белый шар»?

**А.** Среди вынутых шаров ровно один белый.

**Б.** Среди вынутых шаров ровно один чёрный.

**В.** Среди вынутых шаров нет ни одного чёрного.

**Г.** Среди вынутых шаров нет ни одного белого.

### **5. Статистический подход к вероятности**

**26.** По результатам какой серии опытов можно оценить вероятность изготовления бракованной детали?

**А.** Проверено 200 деталей, изготовленных на одном станке в течение одной рабочей смены.

**Б.** Проверено 100 деталей, изготовленных на 20 станках в течение рабочей смены.

**В.** Проверено 150 деталей, изготовленных на одном станке в течение месяца.

**Г.** Проверено 8 деталей, изготовленных на одном станке в течение месяца.

**27.** Укажите, кто сделал верный вывод.

1) Купив два лотерейных билета, среди которых оказался один выигрышный, Сергей сделал вывод о том, что вероятность выигрыша в этой лотерее равна 0,5.

2) Подбросив 4 раза монету и увидев, что герб выпал 3 раза, Анатолий сделал вывод о том, что вероятность выпадения герба при одном бросании монеты равна 0,75.

3) Узнав, что в последних 20 тиражах лотереи «5 из 36» все пять номеров угадывались 6 раз, Евгений сделал вывод о том, что вероятность угадать 5 номеров из 36 равна 0,3.

4) Подбросив 100 раз кнопку и подсчитав, что остриём вверх она упала 45 раз, Владимир сказал, что вероятность того, что кнопка упадёт остриём вверх, приближённо равна 0,45.

**А.** Сергей.      **Б.** Анатолий.      **В.** Евгений.      **Г.** Владимир.

**28.** Среднее число бракованных изделий дневного выпуска на некотором производстве в течение 20 дней равнялось 11,9. Если бы регистрация числа бракованных изделий продолжалась ещё три дня и если бы характеристика числа бракованных изделий была такой же, как и в остальные дни, то какое примерное число бракованных изделий можно было бы ожидать за 23 дня? Выберите

наиболее точное значение.

А. 272.      Б. 273.      В. 274.      Г. Определить невозможно.

29. Ребята провели опыты по подбрасыванию монеты. Из 100 раз герб выпал 46 раз, а цифра — 54 раза Ребята поспорили, что вероятней появится при следующем подбрасывании: герб или цифра.

«Вероятней появление герба, — сказал Алексей, — ведь до этого он выпадал реже, чем цифра, значит, теперь он должен выпадать чаще».

«Вероятней появление цифры, — сказал Борис, — раз она выпадала чаще, то и будет выпадать чаще».

«Мы знаем, что появление герба и цифры при каждом подбрасывании равновероятно, — сказал Вадим, — и вероятности появления герба и цифры при 101-м подбрасывании, как и при любом другом, одинаковы».

Кто из участников спора прав?

А. Алексей.      Б. Борис.      В. Вадим.      Г. Никто.

30. За последние три года на реке было два наводнения, последнее из которых было в прошлом году. Какой вариант из приведенных ответов на вопрос: «Когда будет следующее наводнение?» — вы считаете правильным?

А. В следующем году.      Б. Через год.

В. Наводнений не будет несколько лет, так как за последнее время их уже было достаточно много.

Г. Не хватает данных, чтобы ответить на вопрос.

### 6. Классическая вероятность

31. Выпущено сто лотерейных билетов с одиннадцатью денежными выигрышами, из которых восемь — по 10 зедов, два — по 50 зедов. и один — 100 зедов (зед — условная денежная единица). Из купленных 25 билетов три выиграли по 10 зедов и один выиграл 50 зедов. Остальные остались без выигрыша. Сравните вероятность  $p$  события «купленный билет остался без выигрыша» при покупке одного билета и относительную частоту  $\nu$  этого события в описанном эксперименте.

А.  $p < \nu$ .      Б.  $p = \nu$ .      В.  $p > \nu$ .      Г. Сравнить невозможно.



**32.** Какие исходы указанного опыта можно считать равновероятными?

**А.** Из 50 билетов вынуть наугад билет №1 или №23.

**Б.** При подбрасывании правильного игрального кубика выпадет более трёх очков или менее трёх очков.

**В.** Выиграть или проиграть в лотерею.

**Г.** 1 июня в Краснодаре будет солнце или дождь.

**33.** При проведении эксперимента могут наступить 10 равновероятных исходов, взаимно исключающих друг друга. Чему равна вероятность события, которое происходит только при одном исходе?

**А.** 0,05.      **Б.** 0,1.      **В.** 0,2.      **Г.** 1.

**34.** Есть пять отрезков длиной 1, 3, 4, 7, 9 см. Найдите вероятность того, что из трех наугад выбранных из них отрезков можно построить треугольник.

**А.** 0,2.      **Б.** 0,4.      **В.** 0,6.      **Г.** 0,8.

**35.** Рассматривается упрощенный вариант игры в спортлото. Случайно выбираются два шарика из урны, в которой находится 5 шариков, занумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5. Игрок вычеркивает два числа на бланке, которые, по его мнению, совпадают с выбранными (см. рис.).

Найдите вероятность того, что игрок не угадает ни одного номера.

1	2	×3	×4	5
---	---	----	----	---

**А.** 0,5.      **Б.** 0,4.      **В.** 0,3.      **Г.** 0,2.

**36.** В некоторой семье есть три ребенка. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найдите вероятность того, что все дети в этой семье — мальчики.

**А.** 0,5.      **Б.** 0,375.      **В.** 0,25.      **Г.** 0,125.

**37.** Из ящика, в котором три различных белых и два различных чёрных шара, случайно извлекают два шара. Миша и Маша договорились, что если шары будут одного цвета, то победителем будет Маша, если разного — Миша. У кого из детей больше шансов стать победителем?

**А.** У Миши.

**Б.** У Маши.

**В.** Шансы одинаковы.      **Г.** Определить невозможно.

## Вариант 2

### 1. Представление и анализ статистических данных

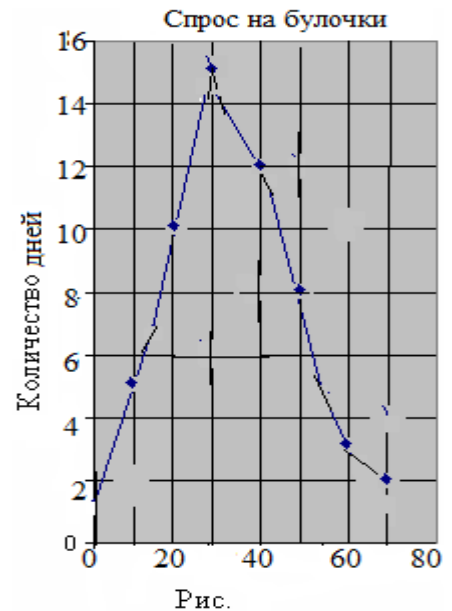
1. В таблице представлена информация о численности населения двух стран.

Страна	Численность населения	
	2010	2020
Франция	64 613 000	68 035 000
Великобритания	63 182 000	67 081 000

В какой стране медленнее увеличивается численность населения?

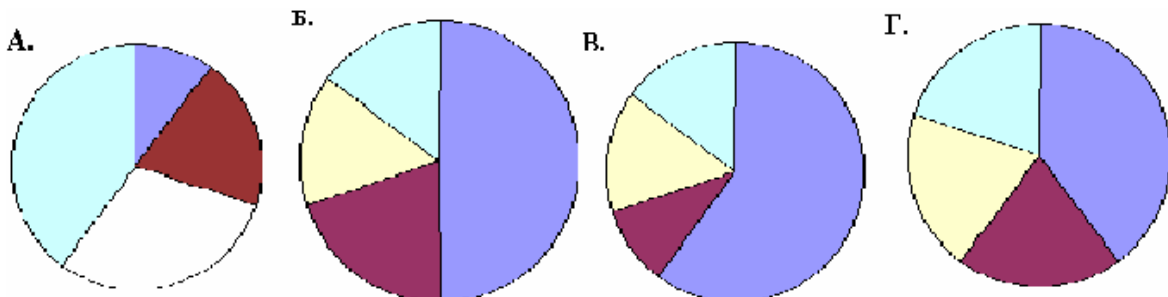
- А. С одинаковой скоростью. Б. Во Франции. В. В Великобритании.  
Г. Определить невозможно.

2. Виталий покупает сдобные булочки по оптовой цене 10 зедов за булочку, которые потом продает их в тот же день на рынке по 15 зедов (зед — условная денежная единица). Если у него остается нераспроданный товар, он весь его распродает на следующий день по 4 зеда за булочку. На диаграмме (рис.) представлены данные о спросе на булочки в течение 55 дней. Какой будет приблизительно (с точностью до 1 зеда) средняя ежедневная прибыль Виталия, если он ежедневно в течение 55 дней будет покупать 45 булочек и если сохранится приведенный на них спрос? Выберите наиболее точное значение.



- А. 75 зедов. Б. 80 зедов. В. 85 зедов. Г. 90 зедов

3. Среди любимых занятий шестиклассников чтение составляет 30%, спорт — 20%, телевизор — 15%; компьютер — 35%. На какой из приведенных диаграмм на рис. изображены эти данные?



4. В таблице приведены результаты опроса жителей трех городов относительно того, где они получают информацию о новых товарах или услугах. При ответе можно было назвать не более трех источников информации.

№	Источник информации	Часть опрошенных жителей		
		Ростов	Донецк	Луганск
1.	Справочники	0,12	0,14	0,1
2.	Советы знакомых	0,53	0,58	0,62
3.	Телевидение	0,4	0,35	0,45
4.	Радио	0,15	0,18	0,2
5.	Газеты	0,24	0,27	0,21
6.	Уличная реклама	0,07	0,05	0,08
7.	Самодельные объявления	0,06	0,08	0,04
8.	Советы продавца	0,19	0,16	0,21
9.	Телефонное справочное бюро	0,32	0,28	0,35

Почему сумма приведенных данных в каждом столбце превышает 1?

- А. Допущены ошибки при регистрации результатов опроса.
- Б. Допущены ошибки при обработке результатов опроса.
- В. Позволялось предоставлять более одного ответа.
- Г. Невозможно определить.

## 2. Статистические характеристики

5. В июне в Донецке наблюдается в среднем 25 солнечных дней. Какой была примерно относительная частота облачных дней в июне 2019 года?

- А.  $\frac{25}{365}$ .      Б.  $\frac{5}{6}$ .      В.  $\frac{1}{6}$ .      Г.  $\frac{5}{365}$ .

6. Сколько выстрелов было сделано, если частота промахов равняется 0,3, а количество попаданий равняется 28?

- А. 28.      Б. 36.      В. 40.      Г. 42.

7. Известно, что после 100 подбрасываний игрального кубика относительная частота выпадения «тройки» равнялась 0,15. В каких границах обязательно бу-

дет находится относительная частота этого события после следующих 100 подбрасываний?

А. [0,15; 0,325]. Б. [0,075; 0,575]. В. [0, 075; 0,325]. Г. [0,15; 0,575].

8. После урока по теме «Статистика» на доске осталась таблица:

Значение	4	7	11
Частота	5	2	

и ответ:  $\bar{x} = 10$ . Какое число стоит в пустой клеточке?

А. 40. Б. 36. В. 30. Г. 25.

9. В таблице представлены данные о количестве баллов, набранных на олимпиаде представителями одного района. Чему равняется среднее количество баллов, которые они набрали?

Значение, $x$	2	4	5	6	8	9	10	11	15	18
Частота, $n$	1	2	4	3	2	2	2	3	1	1

А. 7. Б. 7,5. В. 8. Г. 8,5.

10. В соревнованиях по гимнастике участвовало 10 спортсменов. Оценки, выставленные им двумя из судей, представлены в таблице.

№ спортсмена	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ судьи										
I	9,3	9,5	8,9	9,0	9,8	9,5	9,4	9,1	9,9	9,2
II	9,2	9,6	9,0	8,8	9,9	9,5	9,2	9,2	9,8	9,0

Кого из этих двух судей вы признали бы более строгим?

А. Первого. Б. Второго. В. Одинаково строги. Г. Определить невозможно.

11. В таблице представлены цены на 1 кг различных видов конфет.

Вид	A	B	C	D	E	F	G	H
Цена, руб.	240	300	340	300	440	300	260	340

Какова средняя цена 1 кг конфет?

А. 310 руб. Б. 315 руб. В. 320 руб. Г. 325 руб.

12. В таблице к предыдущему заданию представлены цены на 1 кг различных видов конфет. Найдите такую цену конфет, что половина видов конфет имеет не меньшую цену, а половина — не большую.

А. 300 руб.      Б. 330 руб.      В. 340 руб.      Г. 350 руб.

13. В таблице к предыдущим заданиям представлены цены на 1 кг различных видов конфет. Какова цена наибольшего числа видов представленных конфет?

А. 300 руб.      Б. 340 руб.      В. 240 руб.      Г. 260 руб.

14. На предприятии работают 100 человек: 99 служащих, каждый из которых получает по 5 000 руб. в месяц, и директор, получающий 500 000 руб. в месяц. Какая из статистических характеристик лучше всего описывает ситуацию с зарплатой на этом предприятии?

А. Мода.      Б. Медиана.      В. Среднее арифметическое.

Г. Ответ отличен от приведенных.

15. На соревнованиях по бегу на 100 м девятиклассницами были показаны следующие результаты (в с): 20,8; 18,9; 17,4; 24,1; 19,2. Какая из статистических характеристик наилучшим образом указывает на средний результат девятиклассниц?

А. Мода.      Б. Медиана.      В. Среднее арифметическое.

Г. Ответ отличен от приведенных.

16. На письменной работе по алгебре в трёх девятых классах были показаны результаты, представленные в следующей таблице.

Отметка	2	3	4	5
Количество учащихся	9	20	33	25

Какая из статистических характеристик лучше всего описывает средние результаты этой письменной работы?

А. Мода.      Б. Медиана.      В. Среднее арифметическое.

Г. Ответ отличен от приведенных.

### 3. Выборочный метод в статистике

17. Какая из приведенных ниже выборок наилучшим способом представит точку зрения всех зарегистрированных избирателей России?

А. Случайная выборка из 1000 избирателей г. Челябинска.

Б. Случайная выборка из 1000 студентов Петербургского университета.

**В.** Выборка из 1000 человек, образованная на основе случайных телефонных номеров.

**Г.** Выборка из 1000 человек – сторонников Коммунистической партии России.

**18.** Для определения количества девятиклассников, готовых к сдаче итоговой аттестации по математике, из всех девятиклассников города образовали две выборки: 1) из учащихся одной школы; 2) по несколько случайно отобранным из каждой школы города учащимся 9 классов. Какая из них даст возможность достовернее решить поставленную задачу?

**А.** Первая. **Б.** Вторая. **В.** Обе одинаково. **Г.** Определить невозможно.

**19.** В ящике находится большое количество одинаковых изделий. Для определения их количества в ящике случайно отобрали из них 30 изделий, поместили их и возвратили в ящик. Тщательным образом перемешали все изделия и вынули случайно из них 20 штук. Среди них оказались 3 меченые. Сколько примерно изделий в ящике? Выберите наиболее точное значение.

**А.** 100. **Б.** 200. **В.** 300. **Г.** 400.

**20.** В школе 180 девятиклассников. Исследовали, как они умеют разгадывать кроссворды. Случайно отобрали 18 учащихся 9-х классов, предложили им один и тот же кроссворд, который они разгадывали самостоятельно. Их результаты представлены в таблице.

Количество неразгаданных слов	1	2	3	4
Количество учащихся	3	6	6	3

Необходимо оценить ожидаемое среднее количество неразгаданных слов среди всех девятиклассников. Выберите наиболее точное значение.

**А.** 2. **Б.** 2,5. **В.** 3. **Г.** 3,5.

**21.** На учете 2000 больных, которые страдают от хронических приступов головной боли. Реклама утверждает, что некоторые лекарства снимают боль. Проводится эксперимент: в одной группе больных применяется рекламируемое лекарство, в другой оно не применяется. Целесообразно не отклонять гипотезу

о том, что применение рекламируемого лекарства не изменяет состояния больных, если процент больных, которым помогло лекарство равен ...

**А.85.**

**Б.80.**

**В.75.**

**Г.55.**

#### **4. Случайный опыт и случайное событие**

**22.** Какое из приведенных испытаний нельзя считать случайным?

**А.** Игра двух игроков.

**Б.** Запуск космического корабля.

**В.** Испытания медикаментов. **Г.** Создание очередей в магазинах.

**23.** Какое из приведенных событий не является случайным?

**А.** Очередь состоит из 10 человек. **Б.** Игра закончилась вничью.

**В.** При запуске космического корабля все системы работали исправно.

**Г.** Во время испытаний установлена безопасность медикаментов.

**24.** Какое из следующих событий является достоверным?

**А.** В аптеку поступило лекарство, излечивающее любую болезнь.

**Б.** При подбрасывании монеты выпал герб.

**В.** При вращении рулетки в игре «Поле чудес» стрелка остановилась в секторе «Банкрот».

**Г.** Количество очков, выпавших при подбрасывании игрального кубика, равно одному из целых чисел от 1 до 6.

**25.** Из ящика, который содержит белые и черные шары, вынимают четыре шара. Каким является событие, противоположное событию «вынуто более двух белых шаров»?

**А.** Среди вынутых шаров менее двух белых.

**Б.** Среди вынутых шаров ровно два белых.

**В.** Среди вынутых шаров не более двух белых.

**Г.** Все вынутые шары белые.

#### **5. Статистический подход к вероятности**

**26.** По результатам какой серии опытов можно оценить вероятность попадания в цель при одном опыте?

**А.** 100 стрелков по одному разу выстрелили в мишень.

**Б.** Стрелок в течение короткого времени 50 раз выстрелил в мишень, расположенную в закрытом помещении.

**В.** Стрелок в течение короткого времени 5 раз выстрелил в мишень, расположенную в закрытом помещении.

**Г.** Стрелок в течение светового дня на открытом стрельбище сделал 300 выстрелов в мишень.

**27.** Укажите, кто сделал верный вывод.

1) Сделав два выстрела в мишень, Антон попал только 1 раз. Он сделал вывод о том, что вероятность попадания им в мишень равна 0,5.

2) Подбросив 4 раза игральный кубик и увидев, что единица выпала 3 раза, Борис сделал вывод о том, что вероятность выпадения единицы при одном бросании кубика равна 0,75.

3) Вынув из ящика с 10 разноцветными шарами 4 раза шар с возвращением и обнаружив, что все 4 раза был вынут белый шар, Василий сделал вывод о том, что вероятность вынуть белый шар при случайном вынимании из этого ящика одного шара равна 1.

4) Подбросив 100 раз металлическую крышку от бутылки и подсчитав, что дном вверх она упала 40 раз, Геннадий сказал, что вероятность того, что крышка упадёт дном вверх, приближённо равна 0,4.

**А.** Антон.      **Б.** Борис.      **В.** Василий.      **Г.** Геннадий.

**28.** Средний размер последних 24-х заказов потребителей фирмы равен 11 100 руб. Если бы к данным о 24 последних заказах потребителей фирмы добавили ещё 6 предыдущих заказов и если бы характеристика размера этих заказов была такой же, как и у последних 24 заказов, то каким бы примерно была суммарная стоимость последних 30 заказов? Выберите наиболее точное значение.

**А.** 333 000 руб.    **Б.** 332 000 руб.    **В.** 331 000 руб.    **Г.** 330 000 руб.

**29.** Ребята провели опыты по подбрасыванию игрального кубика. Из 100 раз чётное число очков выпало 55 раз, а нечётное — 45 раз. Ребята поспорили, что вероятней появится при следующем подбрасывании: чётное или нечётное число очков.



«Вероятней появление нечётного числа, — сказал Георгий, — ведь до этого оно выпадало реже, чем чётное число, значит, теперь оно должен выпадать чаще».

«Вероятней появление чётного числа, — сказал Дмитрий, — раз оно выпадала чаще, то и будет выпадать чаще».

«Мы знаем, что появление чётного и нечётного числа очков при каждом подбрасывании равновероятно, — сказал Егор, — и вероятности появления чётного и нечётного числа при 101-м подбрасывании, как и при любом другом, одинаковы».

Кто из участников спора прав?

А. Никто.      Б. Георгий.      В. Дмитрий.      Г. Егор.

**30.** Всю последнюю неделю в некотором регионе шёл снег. Какой вариант из приведенных ответов на вопрос: «Когда следующий раз будет снегопад?» — вы считаете правильным?

А. На следующей неделе.      Б. Через месяц.

В. Снегопада не будет до конца зимы, так как уже превышена норма осадков в зимнее время в нашем регионе.

Г. Не хватает данных, чтобы ответить на вопрос.

### **6. Классическая вероятность**

**31.** В урне 25 шариков, из них 4 белых, 6 красных, остальные синие. Из этой урны наугад 40 раз вынимали шарик, каждый раз возвращая его в урну, тщательным образом их перемешивая. При этом в шести случаях шарик оказался белым, в 10 — красным, и в 24 — синим. Сравните вероятность  $p$  события «вынутый шарик — синий» при вынимании наугад одного шарика и относительную частоту  $\nu$  этого события в описанном эксперименте.

А.  $p < \nu$ .      Б.  $p = \nu$ .      В.  $p > \nu$ .      Г. Сравнить невозможно.

**32.** Какие исходы указанного опыта можно считать равновероятными?

А. «Промаш» и «попадание» у отличного стрелка.

Б. «Выпал герб» и «выпала цифра» при подбрасывании деформированной монеты.

**В.** «Выпало 1—6 очков» при подбрасывании правильного игрального кубика.

**Г.** «Выпало 1—6 очков» при подбрасывании деформированного игрального кубика.

**33.** При проведении эксперимента могут наступить 10 равновероятных исходов, взаимно исключающих друг друга. Чему равна вероятность события, которое происходит при любом из двух определенных исходов?

**А.** 0,05.      **Б.** 0,1.      **В.** 0,2.      **Г.** 1.

**34.** Есть пять отрезков длиной 1, 3, 4, 7, 9 см. Найдите вероятность того, что из трех наугад выбранных из них отрезков нельзя построить треугольник.

**А.** 0,2.      **Б.** 0,4.      **В.** 0,6.      **Г.** 0,8.

**35.** Рассматривается упрощенный вариант игры в спортлото. Случайно выбираются два шарика из урны, в которой находится 5 шариков, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5. Игрок вычеркивает два числа на бланке, которые, по его мнению, совпадают с выбранными (см. рис.).

1	2	×3	×4	5
---	---	----	----	---

Найдите вероятность того, что игрок угадает, по крайней мере, один номер.

**А.** 0,7.      **Б.** 0,6.      **В.** 0,5.      **Г.** 0,4.

**36.** В некоторой семье есть три ребенка. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найдите вероятность того, что среди детей в этой семье ровно два мальчика.

**А.** 0,5.      **Б.** 0,375.      **В.** 0,25.      **Г.** 0,125.

**37.** Из ящика, в котором два одинаковых белых и два одинаковых чёрных шара, случайно извлекают два шара. Миша и Маша договорились, что если шары будут одного цвета, то победителем будет Маша, если разного — Миша. У кого из детей больше шансов стать победителем?

**А.** У Миши.      **Б.** У Маши.      **В.** Шансы одинаковы.      **Г.** Определить невозможно.

### Вариант 3

#### 1. Представление статистических данных

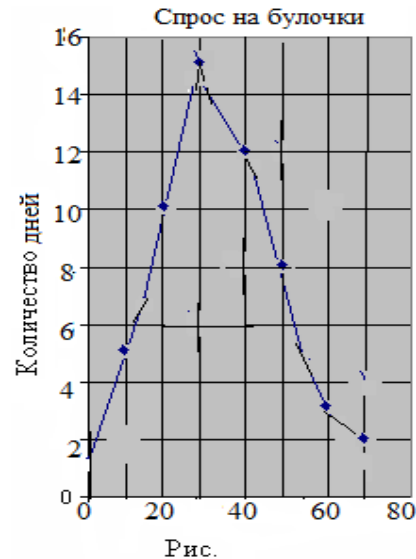
**1.** В таблице представлены данные о сборе зерновых и зернобобовых культур (в млн. т) в 2018 - 2022 годах в Российской Федерации.

2018	2019	2020	2021	2022
113	121	133	121	158

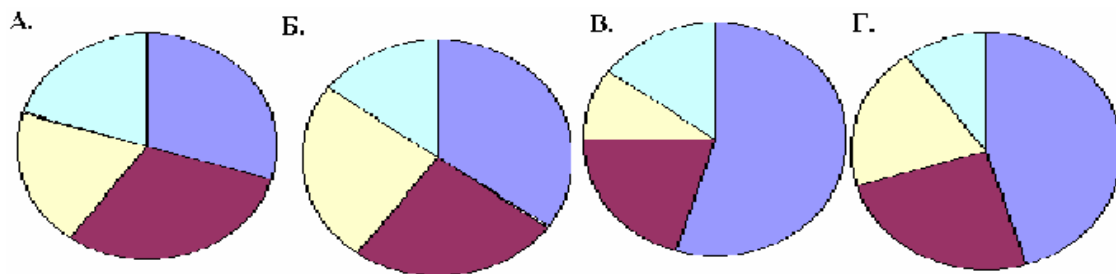
В каком году сбор зерновых зернобобовых культур увеличивался сравнительно с предыдущим годом на наименьшее количество процентов?

- А. В 2019-м.      Б. В 2020-м.      В. В 2021-м.  
Г. В 2022-м.

2. Виталий покупает сдобные булочки по оптовой цене 10 зедов за булочку, которые потом продает их в тот же день на рынке по 15 зедов (зед — условная денежная единица). Если у него остается нераспроданный товар, он весь его распродает на следующий день по 4 зеда за булочку. На диаграмме (рис.) представлены данные о спросе на булочки в течение 55 дней. Какой будет приблизительно (с точностью до 1 зеда) средняя ежедневная прибыль Виталия, если он ежедневно в течение 55 дней будет покупать 55 булочек и если сохранится приведенный спрос на булочки? Выберите наиболее точное значение.



3. Среди любимых предметов шестиклассников история составляет 45%, русская литература — 20%, математика — 25%; физическая культура — 10%. На какой из приведенных диаграмм изображены эти данные?



4. В таблице приведены результаты опроса жителей трех городов относительно того, где они получают информацию о новых товарах или услугах. При ответе можно было назвать не более трех источников информации.

№	Источник информации	Часть опрошенных жителей		
		Ростов	Донецк	Луганск
1.	Справочники	0,12	0,14	0,1
2.	Советы знакомых	0,53	0,58	0,62
3.	Телевидение	0,4	0,35	0,45
4.	Радио	0,15	0,18	0,2
5.	Газеты	0,24	0,27	0,21
6.	Уличная реклама	0,07	0,05	0,08
7.	Самодельные объявления	0,06	0,08	0,04
8.	Советы продавца	0,19	0,16	0,21
9.	Телефонное справочное бюро	0,32	0,28	0,35

Что надо сделать, чтобы сумма чисел, которые стоят в каждом столбце, равнялась 1?

- А. Не допускать ошибок при регистрации результатов опроса.
- Б. Не допускать ошибок при обработке результатов опроса.
- В. Позволять давать лишь один ответ.
- Г. В любом случае эта сумма будет превышать 1.

## 2. Статистические характеристики

5. В школе, где обучается 600 учащихся, во время эпидемии ежегодно болеют в среднем 240 учащихся. Какова примерно относительная частота учащихся в этой школе, не болевших во время эпидемии в этом учебном году?
- А. 0,4.      Б. 0,8.      В. 0,2.      Г. 0,6.
6. Сколько раз попал стрелок в мишень, если относительная частота его попаданий равняется 0,7, а было сделано 50 выстрелов?
- А. 15.      Б. 35.      В. 28.      Г. 42.
7. Известно, что после 200 подбрасываний монеты относительная частота выпадения герба равнялась 0,45. В каких границах обязательно находилась относительная частота этого события после первых 100 подбрасываний?
- А. [0; 0,9].      Б. [0; 0,45].      В. [0,225; 0,45].      Г. [0,225; 0,9].

8. После урока по теме «Статистика» на доске осталась таблица:

Значение	15	12	8
Частота	6	3	

и ответ:  $\bar{x} = 10$ . Какое число стоит в пустой клеточке?

- А. 18.                      Б. 15.                      В. 12.                      Г. 9.

9. В течение года Петя получил следующие отметки за контрольные работы по алгебре: одну «двойку», две «тройки», четыре «четвёрки» и четыре «пятёрки». Какова его средняя оценка за эти контрольные работы?

- А. 3.                      Б. 3,5.                      В. 4.                      Г. 4,5.

10. Пасечник заметил, что пчёлы в двух его ульях производят мёд неравномерно. Раз в месяц он заносил в таблицу массу (в кг) снятого мёда, выработанного пчёлами за месяц..

Месяц	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь
Масса мёда, кг						
1-й улей	34,2	35,2	34,7	37,7	37,0	36,0
2-й улей	35,7	36,6	35,7	37,3	36,0	31,5

Если в первом улье живёт 100 пчёл, а во втором 95 пчёл, то одна пчела какого улья вырабатывает больше мёда в среднем за месяц?

- А. Первого.    Б. Второго.    В. Одинаково.    Г. Определить невозможно.

11. В таблице представлены цены на 1 кг различных видов сыров.

Вид	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
Цена, руб.	360	450	510	450	660	450	390	510

Какова средняя цена 1 кг сыра?

- А. 465 руб.    Б. 472,5 руб.    В. 485 руб.    Г. 492,5 руб.

12. В таблице к предыдущему заданию представлены цены на 1 кг различных видов сыров. Какова средняя среди приведенных цена видов сыров? Найдите такую цену сыра, что половина видов сыров имеет цену, не меньшую цену, а половина — не большую.

- А. 450 руб.    Б. 495 руб.    В. 510 руб.    Г. 525 руб.

13. В таблице к предыдущим заданиям представлены цены на 1 кг различных

видов сыров. Какова цена самого большого числа из видов представленных сыров?

**А.** 450 руб.      **Б.** 510 руб.      **В.** 360 руб.      **Г.** 390 руб.

**14.** В следующей таблице представлены относительные частоты употребления гласных букв в текстах.

Буква	А	Е, ё	И	о	у	Ы	э	ю	Я
Относительная частота	0,062	0,072	0,062	0,090	0,021	0,016	0,003	0,006	0,018

Какая из статистических характеристик лучше всего описывает ситуацию с употреблением гласных русского алфавита?

**А.** Мода.      **Б.** Медиана.      **В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

**15.** В следующей таблице приведены данные о годовых прибылях 7 фирм, занимающихся продажей овощей.

№ фирмы	1	2	3	4	5	6	7
Прибыль, в зедрах	6486	10 928	15 805	13 679	12 758	9 050	5 702

(зед — условная денежная единица).

Какая из статистических характеристик описывает показатели фирмы со средней годовой прибылью? Какая из статистических характеристик наилучшим образом указывает на средний результат девятиклассников?

**А.** Мода.      **Б.** Медиана.      **В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

**16.** Каждая партия изделий некоторой компании содержит 1000 изделий. Для проведения контроля качества изделий из произведенных за день 253 партий была взята случайным образом выборка, включающая 10 партий. Количество бракованных изделий в каждой партии составило: 3, 8, 2, 5, 0, 7, 14, 7, 4, 1. Какая из статистических характеристик лучше всего описывает уровень брака в этой компании?

**А.** Мода.      **Б.** Медиана.      **В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

### 3. Выборочный метод в статистике

17. Изучали, сколько времени тратят девятиклассники города на выполнение домашних заданий. Какая из нижеприведенных выборок даёт возможность получить наиболее достоверный результат.

- А. Случайная выборка из 100 опрошенных девочек-девятиклассниц.
- Б. Случайная выборка из 100 опрошенных учащихся лица.
- В. Случайная выборка из 100 опрошенных неуспевающих учащихся.
- Г. Ни одну из приведенных выборок нельзя считать репрезентативной.

18. Для определения уровня физической подготовки выпускников основной школы, из всех выпускников города образовали две выборки: 1) из выпускников одной школы; 2) по несколько случайно отобранным из каждой школы города выпускникам. Какая из них можно считать даёт возможность получить более достоверный результат?

- А. Первая. Б. Вторая. В. Обе одинаково. Г. Определить невозможно.

19. В коробке находится большое количество одинаковых карточек. Для определения количества карточек, находящихся в коробке, случайно отобрали из них 50 карточек, поместили их и возвратили в коробку. Тщательным образом перемешали все карточки и вынули случайно из них 40 штук. Среди них оказались 4 меченых. Сколько примерно карточек в коробке? Выберите наиболее точное значение.

- А. 500. Б. 400. В. 300. Г. 200.

20. В районе 1000 девятиклассников. Для диагностики достижения стандарта математического образования был составлен тест из 30 вопросов, правильный ответ на каждый вопрос оценивался одним баллом. Случайно отобрали 50 учащихся 9-х классов, предложили им этот тест, на вопросы которого они отвечали самостоятельно. Их результаты представлены в таблице.

Количество баллов	0–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30
Количество учащихся	1	5	16	20	6	2

Необходимо оценить ожидаемое среднее количество набранных баллов среди всех девятиклассников. Выберите наиболее точное значение.

**А. 15.**

**Б. 15,5.**

**В. 16.**

**Г. 16,5.**

**21.** Пекарня изготавливает буханки хлеба, на этикетках которых указан вес «800 г». Целесообразно отклонить гипотезу о том, что истинная масса буханки хлеба равна 800 г, если средняя масса буханки в случайно отобранных 20 буханках равна ...

**А. 730 г.**

**Б. 770 г.**

**В. 780 г.**

**Г. 790 г.**

#### **4.Случайный опыт и случайное событие**

**22.** Какое из приведенных испытаний можно считать случайным?

**А.** Выход девушки замуж.

**Б.** Распространение эпидемий.

**В.** Футбольный матч.

**Г.** Нагревание воды.

**23.** Какое из приведенных событий является случайным?

**А.** Вода при нагревании закипела.

**Б.** Футбольный матч закончился вничью.

**В.** Эпидемию не могли быстро локализовать.

**Г.** Вера вышла замуж за Андрея.

**24.** Какое из следующих событий является невозможным?

**А.** За ответ на уроке ученик получил отметку «4».

**Б.** При подбрасывании монеты выпала цифра.

**В.** При вращении рулетки в игре «Поле чудес» стрелка остановилась в одном из секторов.

**Г.** Предложена методика обучения математике, благодаря которой все учащиеся стали отличниками.

**25.** Из ящика, который содержит белые и черные шары, вынимают четыре шара. Каким является событие, противоположное событию «среди вынутых шаров белых нет»?

**А.** Среди вынутых шаров есть белые.

**Б.** Все вынутые шары белые.

**В.** Среди вынутых шаров ровно один белый.

**Г.** Среди вынутых шаров чёрных нет.



## 5. Статистический подход к вероятности

26. По результатам какой серии опытов можно оценить вероятность вынуть белый шарик из ящика, содержащего 100 шаров двух цветов: белого и чёрного?

- А. Вынули наудачу один шар
- Б. Вынули наудачу без возвращения 50 шаров.
- В. Вынули наудачу с возвращением 5 шаров.
- Г. Вынули наудачу с возвращением 50 шаров.

27. Укажите, кто сделал верный вывод.

1) Подбросив пять раз две монеты одновременно и обнаружив, что 3 раза выпали на обеих монетах гербы, Анна сделала вывод о том, что вероятность выпадения двух гербов при одновременном подбрасывании двух монет равна 0,6.

2) Подбросив 50 раз пуговицу с петелькой и увидев, что вверх петелькой она упала 30 раз, Валентина сделала вывод о том, что вероятность выпадения пуговицы петелькой вверх при одном бросании пуговицы равна 0,6.

3) Посеяв 4 семени гороха и обнаружив, что жёлтый горох появился 2 раза, Дарья сделала вывод о том, что вероятность прорастания жёлтого гороха равна 0,5.

4) Вынув из колоды с 36-ю картами 5 раз по одной карте (с возвращением) и увидев, что карта пиковой масти появилась 1 раз, Евгения сделала вывод о том, что вероятность вынуть из такой колоды пику равна 0,2.

А. Анна.      Б. Валентина.      В. Дарья.      Г. Евгения.

28. По данным опроса 20 случайно отобранных девятиклассников некоторой школы среднее время, которое один учащийся затрачивает на приготовление домашних заданий, оказалось равным 2,2 ч. Если бы к этим данным добавили результаты опроса ещё 4-х учащихся 9-х классов этой школы и если бы характеристика времени, затрачиваемого ими на выполнение домашних заданий была такой же, как и у опрошенных 20 учащихся, то каким бы примерно было суммарное время, которое затрачивают на выполнение домашних заданий 24 учащихся? Выберите наиболее точное значение.

А. 51 ч.      Б. 52 ч.      В. 53 ч.      Г. 54 ч.

29. Ребята провели опыты по подбрасыванию правильного тетраэдра. Из 100 раз чётное число очков выпало 44 раза, а нечётное — 56 раз. Ребята поспорили, что вероятней появится при следующем подбрасывании: чётное или нечётное число очков.

«Вероятней появление чётного числа, — сказал Константин, — ведь до этого оно выпадало реже, чем нечётное, значит, теперь оно должен выпадать чаще».

«Вероятней появление нечётного число, — сказал Леонид, — раз оно выпадало чаще, то и будет выпадать чаще».

«Мы знаем, что появление чётного и нечётного числа очков при каждом подбрасывании равновероятно, — сказал Михаил, — и вероятности появления чётного и нечётного числа при 101-м подбрасывании, как и при любом другом, одинаковы».

Кто из участников спора прав?

А. Михаил.      Б. Леонид.      В. Константин.      Г. Никто.

30. Всю последнюю неделю в некотором регионе шёл дождь. Какой вариант из приведенных ответов на вопрос: «Когда следующий раз будет дождь?» — вы считаете правильным?

А. На следующей неделе.                      Б. Через месяц.

В. Дождя не будет полгода, так как уже превышена норма осадков в нашем регионе.

Г. Не хватает данных, чтобы ответить на вопрос.

### 6. Классическая вероятность

31. В вазе 20 хризантем, из них 4 белых, 5 синих, остальные желтые. Из вазы наугад 30 раз вынимают какой-нибудь цветок, возвращая ее каждый раз назад, в вазу. При этом в 6 случаях цветок оказался белым, в 7 — синим, в остальных — желтым. Сравните вероятность  $p$  события «вынутый цветок желтый» при вынимании наугад одного цветка и относительную частоту  $\nu$  этого события в описанном эксперименте.

А.  $p < \nu$ .      Б.  $p = \nu$ .      В.  $p > \nu$ .      Г. Сравнить невозможно.

32. Исходы какого случайного эксперимента можно считать равновозможными?

А. Подбрасывание правильного тетраэдра — номер грани, на которую упал тетраэдр.

Б. Пробитие пенальти первоклассным футболистом — забит гол и не забит гол.

В. Проверка стандартности детали — деталь стандартна и деталь бракована.

Г. Подбрасывание кнопки — кнопка упала остриём вверх или остриём вниз.

33. В результате эксперимента происходят равновозможные исходы, взаимно исключающие друг друга. Вероятность любого из них равна 0,05. Найдите количество этих исходов.

А. 5.      Б. 10.      В. 15.      Г. 20.

34. Есть пять отрезков длиной 1, 3, 4, 6, 8 см. Найдите вероятность того, что из трех наугад выбранных из них отрезков можно построить треугольник.

А. 0,2.      Б. 0,3.      В. 0,4.      Г. 0,5.

35. Рассматривается упрощенный вариант игры в спортлото. Случайно выбираются два шарика из урны, в которой находится 5 шариков, занумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5. Игрок вычеркивает два числа на бланке, которые, по его мнению, совпадают с выбранными (см. рис.). Найдите вероятность того, что игрок угадает лишь один номер.

А. 0,7.      Б. 0,6.      В. 0,5.      Г. 0,4.

1	2	×3	×4	5
---	---	----	----	---

36. В некоторой семье есть три ребенка. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найдите вероятность того, что среди детей в этой семье ровно один мальчик.

А. 0,5.      Б. 0,375.      В. 0,25.      Г. 0,125.

37. Из ящика, в котором два различных белых и три одинаковых чёрных шара, случайно извлекают два шара. Миша и Маша договорились, что если шары будут одного цвета, то победителем будет Маша, если разного — Миша. У кого из детей больше шансов стать победителем?

А. У Миши.      Б. У Маши.      В. Шансы одинаковы.      Г. Определить невозможно.

## Подсказки

1. Найдите вначале абсолютную разность приведенных показателей, а затем выразите её в процентах к указанному году.
2. Подсчитайте ежедневные средние расходы и доходы Виталия.
3. Воспользуйтесь тем, что полкруга составляет 50%.
4. Воспользуйтесь тем, что сумма процентов будет равняться 100, если приведена информация о всех составляющих рассматриваемого явления, причём никакие две составляющие не имеют общих элементов.
5. Найдите предварительно частоту искомой совокупности.
6. Воспользуйтесь определением относительной частоты.
7. Найдите предварительно наименьшее и наибольшее значения предлагаемой совокупности.
8. Воспользуйтесь определением среднего арифметического.
9. Обратите внимание на то, что искомая величина равна среднему арифметическому приведенных данных.
10. Сравните средние арифметические значения каждого набора данных.
11. Установите, какой показатель характеризует искомую величину.
12. Установите, какой показатель характеризует искомую величину.
13. Установите, какой показатель характеризует искомую величину.
14. Воспользуйтесь смыслом каждого из приведенных показателей центральной тенденции.
15. Воспользуйтесь смыслом каждого из приведенных показателей центральной тенденции.
16. Воспользуйтесь смыслом каждого из приведенных показателей центральной тенденции.
17. Выясните, какая из приведенных выборок отвечает требованию случайной выборки.
18. Воспользуйтесь определением случайной выборки.
19. Оцените искомую величину с помощью относительной частоты.
20. Оцените искомую величину с помощью выборочного среднего.

21. Воспользуйтесь решением задачи 4 из блока «Выборочный метод в статистике».
22. Проверьте выполнение трёх условий определения случайного испытания.
23. Выясните, какое событие является исходом случайного испытания.
24. Воспользуйтесь определением невозможного или достоверного события.
25. Воспользуйтесь определением противоположных событий.
26. Проверьте выполнимость двух условий, при которых относительную частоту события можно принять за его вероятность.
27. Проверьте выполнимость двух условий, при которых относительную частоту события можно принять за его вероятность.
28. Воспользуйтесь определением относительной частоты события.
29. Проверьте, будут ли рассматриваемые исходы опыта равновероятными.
30. Проверьте, имеются ли данные, на основании которых можно дать ответ на поставленный вопрос.
31. Воспользуйтесь классическим определением вероятности и определением относительной частоты события.
32. Выясните, для какого из приведенных событий вероятности его появления и не появления равны.
33. Воспользуйтесь классическим определением вероятности.
34. Примените неравенство треугольника.
35. Найдите общее количество исходов опыта и количество исходов, благоприятствующих появлению указанного события.
36. Переберите всевозможные варианты.
37. Вначале найдите общее количество исходов опыта.

#### Ответы к заданиям 1 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
В	Б	Б	Б	А	В	В	Г	А	Б	Б	А	В	А	Г	В	Г	Б	Б
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	
Б	Г	В	Б	А	Г	А	Г	В	В	Г	В	А	Б	А	В	Г	А	

### Ответы к заданиям 2 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Б	В	А	В	В	В	Г	Б	В	Б	Б	А	А	Б	Г	Б	Г	Б	Б
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	
А	Г	Б	В	Г	В	Б	Г	А	Г	Г	Б	В	В	Г	А	Б	А	

### Ответы к заданиям 3 варианта теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
А	Г	Г	В	Г	Б	А	А	В	А	Б	А	А	В	В	Б	Г	Б	А
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	
В	А	Б	В	Г	А	Г	Б	В	А	Г	А	А	Г	Б	Б	Б	В	

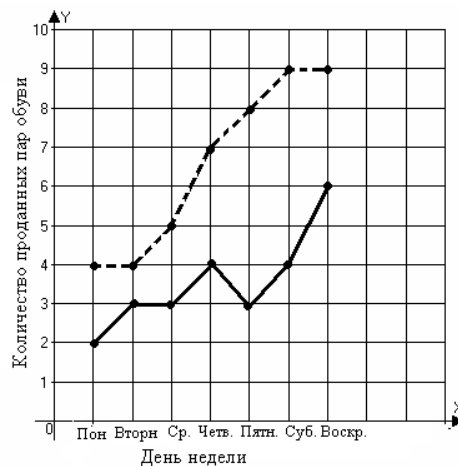
### Задачи для самостоятельного решения

1. В таблице представлены данные о курящих в разных профессиональных группах населения.

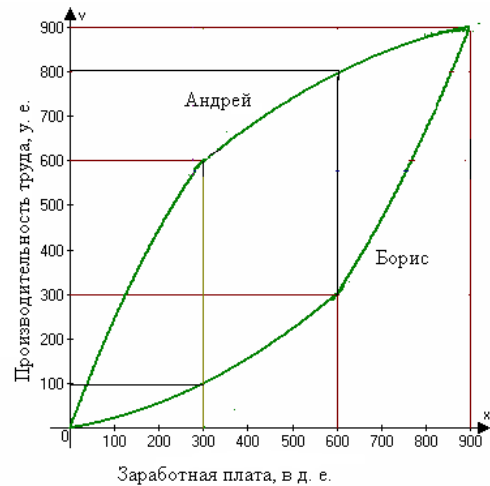
Курение \ Профессии	Учителя		Врачи	
	Мужчины	Женщины	Мужчины	Женщины
Не курят	60%	60%	80%	75%
Курят мало	20%	35%	10%	15%
Курят много	20%	5%	10%	5%
<b>Всего</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>

Можно ли утверждать, что количество врачей превышает количество учителей?

2. На рисунке изображен график, который иллюстрирует продажу магазином в течение недели женской (пунктирная линия) и мужской (сплошная линия) обуви. Назовите два последовательных дня, когда: а) количество проданных пар женской обуви выросло, а количество проданных пар мужской обуви уменьшилось; б) количество проданных пар мужской обуви выросло, а количество пар женской обуви осталось тем же.



3. На графике изображены зависимости производительности труда (в условных единицах, у. е.) Андрея и Бориса от их заработной платы (в условных денежных единицах, в. д. е.). Как изменяется скорость роста производительности труда Андрея и Бориса (увеличивается или уменьшается) с ростом их заработной платы? Скорость роста производительности



труда — это отношение прироста производительности труда к приросту заработной платы.

4. Есть только одна монета. Как выбрать случайно и справедливо один из семи фантов?

5. Чему равна относительная частота значения 4 в совокупности: 3, 3, 4, 4, 4, 7, 7, 7, 8, 8, 10?

6. Педагогический стаж (в годах) восьми учителей школы, работающих в старших классах, следующий: 5, 8, 15, 12, 17, 14, 18, 9. Чему равняется средний стаж этих учителей?

7. Девятиклассников проверяли на скорость чтения. Пять учеников показали от 91 до 100 слов/мин., 15 — от 101 до 110 слов/мин., 10 — от 111 до 120 слов/мин., 25 — от 121 до 130 слов/мин., и пятеро — от 131 до 140 слов/мин. Приблизительно оцените среднее арифметическое значение этих данных. Почему ответ является лишь приблизительным?

8. В таблице приведены данные о рабочем стаже (в годах) сотрудников лаборатории.

Стаж работы	1	2	4	5	7	10	11	12	16	19	20	21	22	25
Количество Сотрудников	2	1	4	3	4	2	3	1	2	5	3	1	1	2

Найдите медиану рассматриваемой совокупности.

9. У группы из 20 восьмиклассников спросили, сколько приблизительно времени в день они тратят на выполнение домашних заданий. Ответы учеников поданы в таблице.

Время, которое тратят ученики, ч	0	1	2	3	4
Количество учеников	2	5	7	5	1

Сколько времени тратит на выполнение домашних заданий самое большое число из этих учеников? Какая статистическая характеристика характеризует ответ на этот вопрос?

10. В ящике находится 300 шаров, среди которых есть и синие. Для определения количества синих шаров в ящике, случайно отобрали из них 15 шаров, среди них оказались 2 синих шара. Сколько приблизительно синих шаров в ящике?

11. Какие из следующих испытаний можно считать случайными:

- 1) игра в шашки между двумя учениками в течение недели;
- 2) игра в шашки между двумя учениками на протяжении года;
- 3) игра в шашки между учениками класса;
- 4) покупка лотерейных билетов одной лотереи;
- 5) покупка лотерейных билетов разных лотерей;
- 6) вынимание наугад двух конфет из коробки, в которой находится три карамели и две шоколадные конфеты;
- 7) вынимание наугад двух конфет из коробки, в которой находятся две шоколадные конфеты.

12. В сумке лежат одинаковые по форме конфеты двух сортов: 9 конфет первого сорта и 6 конфет второго сорта. Не глядя, я вынул из сумки 8 конфет.

- 1) Достану ли я хотя бы одну конфету первого сорта?
- 2) Достану ли я хотя бы одну конфету второго сорта?
- 3) Какое наименьшее количество конфет надо вынуть из сумки, чтобы среди них наверняка были конфеты первого сорта?
- 4) Какое наименьшее количество конфет надо вынуть из сумки, чтобы среди них наверняка были конфеты второго сорта?



5) Какое наименьшее количество конфет надо вынуть из сумки, чтобы среди них наверняка были конфеты обоих сортов?

Приведите примеры достоверных, невозможных событий, связанных с рассмотренным опытом, а также случайных, которые не являются ни достоверными, ни невозможными.

**13.** В коробке лежат 4 цветных карандаша и 10 простых. Какие из последующих событий можно считать достоверными, невозможными, случайными, не являющимися ни достоверными, ни невозможными:

- 1) среди пяти наугад вынутых карандашей есть по крайней мере один цветной карандаш;
- 2) среди пяти наугад вынутых карандашей есть по крайней мере один простой карандаш;
- 3) все пять вынутых карандашей являются цветными?
- 4) Какое наименьшее количество карандашей надо взять из коробки, чтобы среди них было не менее чем три цветных?

**14.** Из сосуда, в котором содержится шесть шаров, наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар красный, если в сосуде: 1) один красный шар; 2) два красных шара; 3) три красных шара; 4) четыре красных шаров; 5) пять красных шаров; 6) шесть красных шаров?

**15.** Из набора домино, состоящего из 28 пластинок, наугад берется одна пластинка. Какова вероятность того, что эта пластинка: 1) будет содержать 6 очков; 2) окажется дублем; 3) окажется не дублем?

**16.** Из букв слова «математика» наугад берут одну букву. Какова вероятность того, что это окажется: 1) буква «м»; 2) буква «а»; 3) гласная буква; 4) согласная буква?

**17.** Словом будем называть любую последовательность из букв. С помощью трех букв алфавита а, б, в написаны все слова из трех букв. Какова вероятность того, что наугад выбранное из этого списка слово не содержит двух подряд согласных букв?

**18.** Подброшены два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма

выпавших очков будет равняться: 1) семи; 2) восьми; 3) девяти; 4) десяти; 5) одиннадцати; 6) двенадцати?

**19.** Если 600 раз подбросить две правильные монеты, то сколько приблизительно раз на первой монете выпадет герб, а на второй — цифра?

**20.** Длительными наблюдениями установлено, что при 100 выстрелах стрелок выбивает приблизительно 50 раз восемь очков, 30 раз — девять, 20 раз — десять очков. Какова вероятность того, что стрелок выбьет менее десяти очков?

**21.** Для проверки качества было исследовано 200 деталей, среди которых 5 оказались бракованными.

1) Какой можно считать вероятность того, что наугад взятая деталь будет: а) пригодной; б) бракованной?

2) Сколько бракованных деталей окажется, в среднем, в партии из 1000 деталей?

**22.** Подбрасывают две правильные монеты, а потом правильный игральный кубик. Для этого опыта выпишите совокупности всех:

а) равновозможных исходов; б) не равновозможных исходов.

**23.** Из колоды из 36 карт наугад вытягивают одну карту. Выпишите все исходы этого опыта, принимая за результаты опыта:

1) масть и название карты, которую вытягивают;

2) тот факт, является ли вытягиваемая карта картинкой (валет, дама, король, туз) или нет.

В каких из этих случаев исходы опыта будут равновозможными, а в каких неравновозможными? Приведите примеры событий, которые можно описать этими исходами.

**24.** Относительная частота пар обуви для взрослых, которые продали в магазине за день, равняется 0,6. В этот день продали 24 пары детской обуви. Сколько всех пар обуви продали в этот день?

**25.** Правильный игральный кубик подбросили 60 раз. При этом в 22 случаях выпало 1 очко или 4 очка, в 18 — 2 очка или 5 очков, в остальных — 3 очка или 6 очков. Сравните вероятность  $p$  события «выпало 3 или 6 очков» при одном подбрасывании кубика и относительную частоту  $v$  этого события в описанном

эксперименте.

**26.** В таблице представлены результаты шести серий подбрасываний двух правильных монет по 100 подбрасываний в каждой серии.

Номер серии	1	2	3	4	5	6
Частота выпадения по крайней мере одного герба	67	71	75	79	71	72
Относительная частота выпадения по крайней мере одного герба	0,67	0,71	0,75	0,79	0,71	0,72

Чему равняется относительная частота выпадения по крайней мере одного герба, если серия подбрасываний образуется объединением соответствующего количества приведенных соседних серий, начиная с 1-й, а количество подбрасываний двух монет равняется 200?

**27.** Обозначим неизвестное количество овец в отаре через  $N$ . Из этой отары наугад отбирают 300 овец, которые потом клеймят и возвращают в отару. В следующий раз отбираются 50 овец, среди которых 12 оказываются клейменными. Вычислите приблизительно количество  $N$  овец в отаре.

#### **Указания к задачам для самостоятельного решения**

1. Выясните, есть ли в таблице данные о количествах врачей и учителей.
2. Удобно составить таблицу, в которую занести данные о количестве проданных пар мужской и женской обуви в каждый день недели.
3. Посмотрите, как направлены графики.
4. Подумайте, сколько раз нужно подбросить монету и сколько исходов этого опыта учитывать.
5. Воспользуйтесь определением относительной частоты события.
6. Средний стаж равняется среднему арифметическому значению приведенной совокупности.
7. При вычислении среднего арифметического в качестве значений принимайте середины данных интервалов.
8. Воспользуйтесь определением медианы. Обратите внимание на то, что здесь чётное количество данных.

9. Воспользуйтесь определением моды.
10. Примените связь между статистическим и классическим определениями вероятности.
11. Воспользуйтесь определением случайного испытания.
12. Выясните, какие события происходят при любом исходе испытания; при некоторых происходят, а при остальных — не происходят; не происходят ни при одном исходе испытания.
13. Воспользуйтесь определениями достоверного, невозможного, случайного, не являющимся ни достоверным, ни невозможным, событий.
14. Воспользуйтесь классическим определением вероятности.
15. Найдите, сколько исходов благоприятствует наступлению искомого события.
16. Вначале подсчитайте общее количество исходов опыта.
17. Вначале найдите вероятность того, что наугад выбранное слово содержит две подряд согласные буквы.
18. Воспользуйтесь таблицей исходов рассматриваемого опыта.
19. Используйте то, что вероятности указанных событий известны.
20. Воспользуйтесь понятием относительной частоты события.
21. Воспользуйтесь статистическим определением вероятности.
22. Воспользуйтесь своими знаниями о вероятностях событий, связанных с рассматриваемым опытом.
23. Выразите указанные события через другие, более «мелкие».
24. Воспользуйтесь определением относительной частоты события.
25. Воспользуйтесь связью между классическим и статистическим определениями вероятности.
26. Найдите, сколько раз произошло искомое событие в каждой из указанных серий по 200 подбрасываний.
27. Воспользуйтесь связью между классическим и статистическим определениями вероятности.

## Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания.

### Критерии оценок

Оценка		Конт- рольный тест	Основное задание	Дополнитель- ное задание
«зачтено»	Решено не менее	18 задач	7 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	25 задач	10 задач	6 задач
«отлично»	Решено не менее	30 задач	12 задач	9 задач

### Контрольный тест

#### Инструкция по выполнению теста

**Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.**

**Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа укажите букву «Д».**

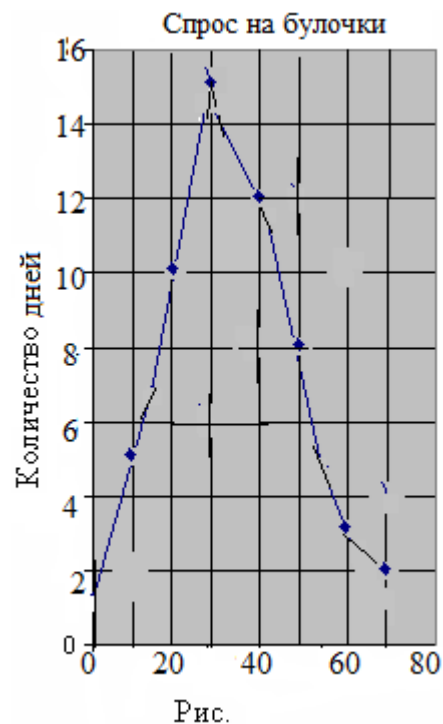
**1. В таблице представлены данные о сборе зерновых и зернобобовых культур (в млн. т) в 2018 - 2022 годах в Российской Федерации.**

2018	2019	2020	2021	2022
113	121	133	121	158

**В каком году сбор зерновых увеличивался сравнительно с предыдущим годом на наибольшее количество процентов?**

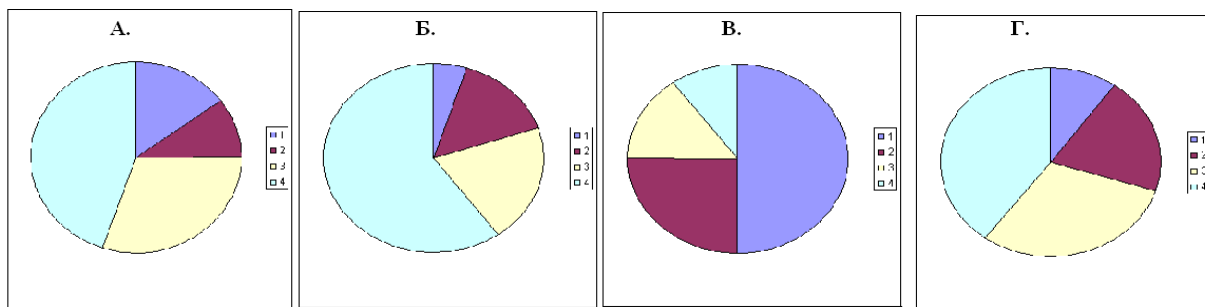
- А. В 2019-м.      Б. В 2020-м.      В. В 2021-м.      Г. В 2022-м.**

2. Виталий покупает сдобные булочки по оптовой цене 10 зедов за булочку, которые потом продает их в тот же день на рынке по 15 зедов (зед — условная денежная единица). Если у него остается нераспроданный товар, он весь его распродает на следующий день по 4 зеда за булочку. На диаграмме (рис.) представлены данные о спросе на булочки в течение 55 дней. Какой будет приблизительно (с точностью до 1 зеда) средняя ежедневная прибыль Виталия, если он ежедневно в течение 55 дней будет покупать 40 булочек и если сохранится приведенный спрос на булочки? Выберите наиболее точное значение.



А. 90 зедов. Б. 95 зеда. В. 100 зедов. Г. 105 зедов.

3. Среди видов спорта, которыми занимаются девятиклассники лёгкая атлетика занимает 10%, гимнастика — 20%, футбол — 30%, теннис — 40%. На какой из приведенных диаграмм изображены эти данные?



4. Статистическая информация о занятиях спортом в некоторой школе:

Лёгкая атлетика — 10%; гимнастика — 8%; футбол — 15%;  
теннис — 30%; волейбол — 25%; баскетбол — 20%; шахматы — 24%.

Почему сумма процентов больше 100?

- А. Допущена ошибка в получении информации.
- Б. Указанные группы имеют общие элементы.
- В. Эта сумма всегда больше 100.
- Г. Определить невозможно.

5. На избирательном участке, где зарегистрировано 1200 избирателей, за партию  $A$  голосуют в среднем 360 человек. Какова примерно относительная частота избирателей на этом участке, которые не будут голосовать за партию  $A$  на очередных выборах?

А. 0,2.      Б. 0,3.      В. 0,8.      Г. 0,7.

6. Сколько промахов сделал стрелок, если относительная частота его попаданий равняется 0,7, а было сделано 50 выстрелов?

А. 15.      Б. 35.      В. 28.      Г. 42.

7. Известно, что после 100 подбрасываний монеты относительная частота выпадения цифры равнялась 0,54. В каких границах обязательно будет находиться относительная частота этого события после следующих 100 подбрасываний?

А. [0,27; 0,385].    Б. [0,335; 0,77].    В. [0,335; 0,385].    Г. [0,27; 0,77].

8. После урока по теме «Статистика» на доске осталась таблица:

Значение	4	7	
Частота	5	2	6

и ответ:  $\bar{x} = 10$ . Какое число стоит в пустой клеточке?

А. 66.      Б. 34.      В. 16.      Г. 22.

9. В течение года медицинский кабинет школы вёл учёт числа заболеваний каждого из учащихся. В результате по одному из девярых классов были получены данные, представленные в следующей таблице.

Количество заболеваний	0	1	2	3	4	5	6
Частота	1	2	4	4	5	2	2

Чему равняется среднее количество заболеваний в этом классе?

А. 3.      Б. 3,2.      В. 3,6.      Г. 4,2.

10. В двух бригадах насчитывается по 7 человек. В первой бригаде месячная зарплата двух рабочих составляет по 315 зедов, трех рабочих — по 360 зедов, один рабочий зарабатывает 385 зедов и один рабочий — 405 зедов (зед — условная денежная единица). Во второй бригаде трое рабочих — по 315 зедов, один — 365 зедов, двое — по 385 зедов и один — 390 зедов. В какой бригаде

выше оплата труда?

**А.** В первой. **Б.** Во второй. **В.** Одинаково. **Г.** Определить невозможно.

**11.** В таблице представлено примерное количество часов в неделю, которое тратят девятиклассники-спортсмены на тренировки.

Время, ч	4	6	9	10	12
Количество учащихся	4	7	8	7	2

Сколько времени в неделю в среднем тратит ученик на тренировки?

**А.** 7 ч. **Б.** 7,4 ч. **В.** 8 ч. **Г.** 8,6 ч.

**12.** В таблице к предыдущему заданию представлено примерное количество часов в неделю, которое тратят девятиклассники-спортсмены на тренировки. Найдите количество времени такое, что половина учащихся тратит на тренировки не меньше времени, а половина — не больше.

**А.** 8 ч. **Б.** 8,5 ч. **В.** 9 ч. **Г.** 9,5 ч.

**13.** В таблице к предыдущим заданиям представлено примерное количество часов в неделю, которое тратят девятиклассники-спортсмены на тренировки. Сколько времени в неделю тратит на тренировки самое большее число из указанных учащихся?

**А.** 4 ч. **Б.** 6 ч. **В.** 9 ч. **Г.** 10 ч.

**14.** Важным видом деятельности при обучении решению задач является анализ ошибок, допущенных на различных этапах решения задачи. Сбор и анализ такой информации является важным моментом в процессе обучения. В таблице представлены результаты регистрации причин ошибок, приведших к неправильному решению задачи.

Причина ошибок	Число случаев
Построение модели	42
Преобразования	16
Решение уравнений	12
Вычисления	18
Проверка решения	12



Какая из статистических характеристик лучше всего описывает ситуацию с анализом ошибок, допущенных на различных этапах решения задачи?

**А.** Мода.            **Б.** Медиана.            **В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

**15.** В следующей таблице приведены данные о ценах на перелёт из города А в город В в различных авиакомпаниях.

№ авиакомпании	1	2	3	4	5	6	7
Цена, в зедрах	648	592	780	667	775	550	670

(зед — условная денежная единица).

Какая из статистических характеристик лучше всего описывает показатели авиакомпании со средней ценой на билеты?

**А.** Мода.            **Б.** Медиана.            **В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

**16.** В таблице приведены данные о размере последних заказов потребителей фирмы (в дес. тыс. руб.).

Размер заказа	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	16 – 19	20 – 23	24 – 27	28 – 31
Число заказов	10	2	4	1	2	1	1	3

Какая из статистических характеристик лучше всего описывает состояние с заказами потребителей в этой фирме?

**А.** Мода.            **Б.** Медиана.            **В.** Среднее арифметическое.

**Г.** Ответ отличен от приведенных.

**17.** Какую из ниже приведенных выборок можно считать репрезентативной для анализа причин автомобильных аварий?

**А.** Автомобильные аварии в июне, если необходимо составить статистический отчёт по авариям в городе за год.

**Б.** Городские жители при подсчёте числа автомобилей на душу населения в стране.

**В.** Люди в возрасте от 40 до 50 лет при выяснении рейтинга молодежной телепрограммы.

**Г.** Ни одну из приведенных выборок.

**18.** Для определения количества инфекционных больных в городе во время эпидемии из всех жителей города образовали две выборки: 1) жителей из одного микрорайона; 2) из нескольких случайно отобранных жителей из каждого микрорайона города. Какая из них даст более достоверный результат?

**А.** Первая. **Б.** Вторая. **В.** Обе одинаково достоверный.

**Г.** Определить невозможно.

**19.** В коробке находится большое количество одинаковых монет. Для определения их количества в коробке случайно отобрали из них 40 монет, поместили их и возвратили в коробку. Тщательным образом перемешали все монеты и вынули случайно из них 25 штук. Среди них оказались 5 меченых. Сколько примерно монет в коробке? Выберите наиболее точное значение.

**А.** 100. **Б.** 200. **В.** 300. **Г.** 400.

**20.** Исследовалось количество деловой древесины в одном дереве на некотором участке леса. Проведено выборочное исследование 1000 деревьев на этом участке. Результаты исследования представлены в таблице.

Количество деловой древесины в одном дереве, м <sup>3</sup>	0, 25–0,75	0,75–1,25	1,25–1,75
Количество деревьев	208	484	308

Необходимо оценить ожидаемое среднее количество деловой древесины в одном дереве на рассматриваемом участке.

**А.** 1,05 м<sup>3</sup>. **Б.** 1,1 м<sup>3</sup>. **В.** 1,15 м<sup>3</sup>. **Г.** 1,2 м<sup>3</sup>.

**21.** Пекарня изготавливает буханки хлеба, на этикетках которых указан вес «800 г». Целесообразно не отклонять гипотезу о том, что истинная масса буханки хлеба равна 800 г, если средняя масса буханки в случайно отобранных 20 буханках равна ...

**А.** 780 г. **Б.** 720 г. **В.** 725 г. **Г.** 730 г.

**22.** Какое из приведенных испытаний нельзя считать случайным?

А. Распад атома радия, не подвергаемого внешним воздействиям.

Б. Проведение лотереи.

В. Многократная стрельба на протяжении длительного времени.

Г. Массовое производство изделия на одном предприятии по одной и той же технологии.

23. Какое из приведенных событий не является случайным?

А. Проверяемое изделие удовлетворяет стандарту.

Б. Василий выиграл в лотерее большую сумму денег.

В. Атом радия распался за 10 лет.

Г. Стрелок во всех 10 выстрелах попал в мишень.

24. Какое из следующих событий нельзя считать ни достоверным, ни невозможным?

А. Рост новорождённого равен 1 м.

Б. Проверяемое изделие не удовлетворяет стандарту.

В. Сумма очков, выпавших при подбрасывании двух игральных кубиков, равна 15.

Г. При подбрасывании металлической крышки от бутылки она упала дном вверх или зубцами вверх.

25. Из ящика, который содержит белые и черные шары, вынимают четыре шара. Каким является событие, противоположное событию «вынут хотя бы один чёрный шар»?

А. Среди вынутых шаров ровно один белый.

Б. Среди вынутых шаров ровно один чёрный.

В. Среди вынутых шаров нет ни одного чёрного.

Г. Среди вынутых шаров нет ни одного белого.

26. По результатам какой серии опытов можно оценить вероятность выигрыша в лотерее?

А. Купили 2 лотерейных билета из одной лотереи.

Б. Купили по одному лотерейному билету из двух различных лотерей.

В. Купили 50 лотерейных билетов из одной лотереи.

Г. Купили 50 лотерейных билетов из 10 тиражей одной и той же лотереи.

27. Укажите, кто сделал верный вывод.

1) Подбросив пять раз два игральных кубика одновременно и обнаружив, что 4 раза выпали на обоих кубиках «шестёрки», Екатерина сделала вывод о том, что вероятность выпадения двух «шестёрок» при одновременном подбрасывании двух кубиков равна 0,8.

2) Подбросив 50 раз пуговицу и увидев, что вверх петелькой она упала 40 раз, Зоя сделала вывод о том, что вероятность выпадения пуговицы петелькой вверх при одном бросании пуговицы равна 0,8.

3) Посеяв 4 семени гороха и обнаружив, что зелёный горох появился 1 раз, Жанна сделала вывод о том, что вероятность прорастания зелёного гороха равна 0,25.

4) Вынув из колоды с 52-ю картами 40 раз по одной карте (с возвращением) и увидев, что карта бубновой масти появилась 10 раз, Елена сделала вывод о том, что вероятность вынуть из такой колоды бубну равна 0,25.

А. Екатерина.      Б. Зоя.      В. Жанна.      Г. Елена.

28. Жалобы на опоздания электричек, поступившие в диспетчерскую некоторой железнодорожной станции в течение недели, позволили определить среднее суточное число опозданий за неделю. Оно составило 2,9 опоздания. Если бы к данным об опозданиях за неделю добавили ещё данные об опозданиях трёх последующих дней и если бы характеристика числа этих опозданий была такой же, как и в предыдущие 7 дней, то каким бы было суммарное число опозданий за 10 дней?

А.31.                      Б.30.                      В.29.                      Г.28.

29. Ребята провели опыты по подбрасыванию игрального кубика. Из 100 раз число очков, меньшее 4-х, выпало 55 раз, а большее 3-х — 45 раз. Ребята поспорили, что вероятней появится при следующем подбрасывании: меньше 4-х или больше 3-х очков.

«Вероятней появление больше 3-х очков, — сказал Николай, — ведь до этого оно выпадало реже, чем меньшее 4-х, значит, теперь оно должен выпа

дать чаще».

«Вероятней появление меньше 4-х очков, — сказал Олег, — раз оно выпала чаще, то и будет выпадать чаще».

«Мы знаем, что появление больше 3-х очков и меньше 4-х очков при каждом подбрасывании равновероятно, — сказал Павел, — и вероятности появления того и иного результата при 101-м подбрасывании, как и при любом другом, одинаковы».

Кто из участников спора прав?

А. Никто.      Б. Олег.      В. Павел.      Г. Николай.

**30.** Всю последнюю неделю в некотором регионе среднесуточная температура воздуха превышала  $30^\circ$ . Какой вариант из приведенных ответов на вопрос: «Когда ещё среднесуточная температура воздуха будет превышать  $30^\circ$ ?» — вы считаете правильным?

А. Этим летом.

Б. Следующим летом.

В. Такой температуры не будет несколько лет, так как за последнее время она была довольно длительное время.

Г. Не хватает данных, чтобы ответить на вопрос.

**31.** В шкатулке 40 монет, из них 12 современных желтых, 10 современных белых, остальные — древние. Из шкатулки наугад 50 раз вынимают монету, возвращая ее каждый раз назад, в шкатулку и тщательным образом их перемешивая. При этом в 15 случаях монета оказалась современной желтой, в 13 — современной белой, в остальных — древней. Сравните вероятность  $p$  события «вынутая монета древняя» при вынимании наугад одной монеты и относительную частоту  $\nu$  этого события в описанном эксперименте.

А.  $p < \nu$ .      Б.  $p = \nu$ .      В.  $p > \nu$ .      Г. Сравнить невозможно.

**32.** Исходы какого случайного эксперимента можно считать равновозможными?

А. «Выбрасывание» пальцев одной руки — количество «выброшенных» пальцев.

Б. Подбрасывание монеты с наклеенным пластилином — выпал герб и вы

пала цифра.

**В.** Вытягивание экзаменационного билета из набора 24 билетов, среди которых 1 «несчастливый» — вытащен «счастливый» билет или «несчастливый».

**Г.** Подбрасывание металлической крышки от бутылки — она упала остриём вверх или остриём вниз.

**33.** В результате эксперимента происходят равновозможные исходы, взаимно исключающие друг друга. Вероятность любого из них равна 0,1. Найдите количество этих исходов.

**А.** 5.      **Б.** 10.      **В.** 15.      **Г.** 20.

**34.** Есть пять отрезков длиной 1, 3, 4, 6, 8 см. Найдите вероятность того, что из трех наугад выбранных из них отрезков нельзя построить треугольник.

**А.** 0,5.      **Б.** 0,6.      **В.** 0,7.      **Г.** 0,8.

**35.** Рассматривается упрощенный вариант игры в спортлото. Случайно выбираются два шарика из урны, в которой находится 5 шариков, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5. Игрок вычеркивает два числа на бланке, которые, по его мнению, совпадают с выбранными (см. рис.).

Найдите вероятность того, что игрок угадает оба номера извлеченных шариков.

1	2	×3	×4	5
---	---	----	----	---

**А.** 0,4.      **Б.** 0,3.      **В.** 0,2.      **Г.** 0,1.

**36.** В некоторой семье есть три ребенка. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найдите вероятность того, что все дети — девочки.

**А.** 0,5.      **Б.** 0,375.      **В.** 0,25.      **Г.** 0,125.

**37.** Из ящика, в котором три пронумерованных белых и три пронумерованных чёрных шара, случайно извлекают два шара. Миша и Маша договорились, что если шары будут одного цвета, то победителем будет Маша, если разного — Миша. У кого из детей больше шансов стать победителем?

**А.** У Миши.      **Б.** У Маши.      **В.** Шансы одинаковы.      **Г.** Определить невозможно.

## Основное задание

1. В таблице приведены некоторые данные об оценках учащихся 10-А класса некоторой школы. Все ученики этого класса изучают все указанные предметы. Оценка 2 означает, что экзамен не сдан.

Предмет % учеников	Математика	Физика	Химия	Биология
50	4	2	4	-
25	5	5	2	5
12,5	2	-	5	3

1. По какому предмету будет проведен дополнительный экзамен, если он проводится, когда количество учащихся, не сдавших экзамен, не меньше количества учащихся, сдавших его?

2. По какому предмету было меньше всего отличников?

3. По каким предметам количество отличников меньше количества учащихся, не сдавших экзамен?

4. Известно, что в параллельном 10-Б классе, в котором количество учащихся такое же, как и в 10-А, количество учащихся, получивших по физике оценку 4, меньше количества учащихся, получивших оценку 3 по тому же предмету. В каком из этих классов количество отличников по физике больше?

2. Из набора из 28 пластинок домино наугад 50 раз вынимают пластинку, возвращая ее после каждого вынимания. При этом в 16 случаях пластинка оказалась дублем. Сравните относительную частоту  $\nu$  события «вынут дубль» с вероятностью  $p$  этого события.

3. Фирма планирует построить в некотором городе завод по переработке молочной продукции. В ее планах — получить ежемесячный доход в размере 25 млн. условных денежных единиц (у. д. е.). Был проведен опрос 400 семей относительно размера их ежемесячных расходов на молочную продукцию. Оказалось, что они тратят в среднем каждый месяц на молочную продукцию 700 000 у. д. е. На сколько приблизительно семей в этом городе рассчитывает фирма? Считать, что продукция этого завода является единственным источником получения молочной продукции.

4. При определении разными способами плотности материала, из которого изготовлена деталь, были получены следующие данные (в г/см<sup>3</sup>): 6,98; 7,04; 7,01; 6,97; 7,00. Найдите среднее арифметическое этой совокупности. Выскажите предположение о материале, из которого изготовлена деталь.

5. В таблице приведены данные о расходах электроэнергии в январе жителями десяти квартир.

Номер квартиры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Расходы электроэнергии, кВт/ч	85	64	78	93	72	91	72	75	82	83

Найдите медиану рассматриваемой совокупности.

6. Для планирования количества картофеля, которое необходимо привозить в течение месяца в магазин, собрали данные относительно объема продажи картофеля в этом магазине в течение недели. Результаты представлены в таблице.

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота	Воскресенье
Количество картофеля, кг	275	286	250	290	296	315	325

Сколько приблизительно картофеля следует иметь, чтобы обеспечивать потребности этого магазина в течение 30 дней?

7. Отобрали группу учеников, которые плохо написали контрольную работу, и провели с ними дополнительные занятия по устранению пробелов, обнаруженных контрольной работой. Затем эти учащиеся написали ещё одну контрольную работу.

а) При каких результатах этой работы Вы считаете нецелесообразным проводить дополнительные занятия?

б) При каких результатах этой работы Вы считаете целесообразным проводить дополнительные занятия?

8. В коробке лежат 2 цветных карандаша и 6 простых. Какие из последующих событий можно считать достоверными, невозможными, случайными, не являющимися ни достоверными, ни невозможными:

1) среди трех наугад вынутых карандашей есть по крайней мере один цвет



ной карандаш;

2) среди трех наугад вынутых карандашей есть по крайней мере один простой карандаш;

3) все три вынутых карандаша являются цветными.

**9.** В условиях задания 8 какое наименьшее количество карандашей надо взять наугад из коробки, чтобы среди них было не менее трёх простых?

**10.** В коробке кнопок вчетверо больше, чем скрепок. Наугад вынимается один предмет. Какова вероятность того, что это кнопка?

**11.** Длительными наблюдениями установлено, что на некотором перекрестке в течение суток может произойти не более двух автомобильных аварий. Причём в течение 100 суток аварий не было 94 раза, четыре раза происходила одна авария, два раза — две аварии.

1. Каковы вероятности того, что на перекрестке в течение суток произойдёт 1 авария, 2 аварии, не будет ни одной аварии?

2. Какова вероятность того, что на перекрестке в течение суток произойдёт по крайней мере одна авария?

3. Какова вероятность того, что на перекрестке в течение суток будет менее двух аварий?

**12.** Из набора из 28 пластинок домино наугад вынимают одну пластинку. Выпишите все исходы этого опыта, принимая за результаты опыта :

1) количество очков на каждой стороне вынимаемой пластинки;

2) сумму очков на обеих сторонах вынимаемой пластинки.

В каком из этих случаев исходы опыта будут равновозможными, а в каком неравновозможными? Приведите примеры событий, которые можно описать этими исходами.

**13.** Есть 100 карточек, на которых написана цифра 1, 2, 3, 4, 5, причем каждая цифра на 20 карточках. Из этого набора наугад 50 раз вытягивали карточку, возвращая ее после каждого вынимания. При этом цифры 1, 2, 3, 4, 5 появились соответственно 9, 12, 13, 7 и 9 раз. Сравните относительную частоту  $\nu$  события «на вытянутой карточке написано простое число» с его вероятностью  $p$ .

**14.** В колледже студенты изучают математику или экономику. 200 студентов изучают математику, 150 — экономику. Сколько студентов в колледже, если:

- 1) 20 студентов изучают оба предмета;
- 2) ни один из студентов-математиков не изучает экономику;
- 3) каждый студент-экономист изучает математику?

#### **Указания к задачам основного задания**

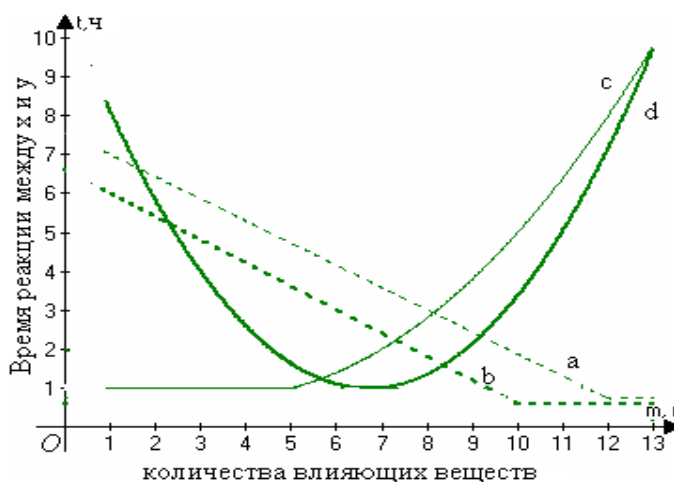
1. 4. Выясните, имеются ли данные, на основании которых можно ответить на этот вопрос.
2. Выясните, по каким данным можно вычислить вероятность указанного события и по каким — его относительную частоту.
3. Найдите средние расходы на молочную продукцию одной семьи.
4. Воспользуйтесь формулой для среднего арифметического нескольких чисел. Посмотрите в физических справочниках таблицу плотностей элементов.
5. Обратите внимание на то, что приведенные данные содержат чётное количество данных.
6. Найдите оценку для ежедневной потребности магазина в картофеле.
7. Подумайте, при каких результатах второй контрольной работы можно уверенно говорить о неэффективности либо об эффективности дополнительных занятий.
8. Воспользуйтесь определениями случайного, достоверного, невозможного событий.
9. Убедитесь, что извлечение 4-х карандашей недостаточно.
10. Обозначьте какой-нибудь буквой количество скрепок и выразите через нее количество кнопок и общее количество предметов в коробке.
11. Воспользуйтесь статистическим определением вероятности.
12. 1) Обратите внимание на то, что на пластинках домино обозначено: 0:0, 0:1, 0:2, ..., 6:6. 2) Суммы очков на пластинках домино принимают значения от  $0 + 0 = 0$  до  $6 + 6 = 12$ .

**13.** Первое предложение условия дает возможность вычислить вероятность указанного события. Дальше описывается опыт, по результатам которого можно вычислить относительную частоту этого события.

**14.** 1) Воспользуйтесь общим правилом сложения. 2) Учтите, что среди 150 лиц, которые изучают экономику, нет ни одного из 200 студентов, которые изучают математику. 3) Учтите, что среди 200 студентов, которые изучают математику, находятся все 150 студентов, которые изучают экономику.

### Дополнительное задание

**1.** На графике (см. рис.) показано влияние веществ  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  на время, необходимое для завершения реакции между  $x$  и  $y$  при условии, что количества  $x$  и  $y$  являются постоянными.



1. Для какого вещества и для какого их количества правильным

является утверждение: чем меньше добавляют вещества, тем быстрее происходит реакция?

2. Какое вещество при количестве 4 г будет наиболее эффективным (наименее эффективным)?

3. При какой массе вещества  $b$  оно не изменяет времени реакции?

**2.** Непосредственно перед проведением розыгрыша лотереи «6 из 49» машина, которая случайно выбирает занумерованные шары, вышла из строя. Чем и как можно заменить этот неработающий прибор?

**3.** Есть только одна правильная монета. Как выбрать случайно и справедливо один из тридцати фантов?

**4.** В конце XVIII века в американской газете «The Federalist» была опубликована серия статей, подписанных псевдонимом «Публий». Было установлено, что их авторами могли быть Александр Гамильтон и Джеймс Мэдисон, однако, кто именно, неизвестно. Позиции, которых придерживались в своих статьях Га-

мильтон и Мэдисон, не давали ключа к разгадке тайны. Не помогал и анализ общего стиля письма обоих авторов. Единственное, за что можно зацепиться, так это частота, с которой встречается те или иные предлоги. В таблице представлено число статей, в которых предлог «by» встречается в спорных статьях и в статьях А. Гамильтона и Д. Мэдисона.

	1 – 3	3 – 5	5 – 7	7 – 9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19
Гамильтон	2	9	12	18	4	5			
Мэдисон			5	7	8	16	6	5	3
Спорные статьи			2	1	2	4	2	1	

Подсчитайте средние арифметические для частот предлога "by" в спорных статьях, в статьях Гамильтона и Мэдисона и выразите свои мнения по поводу авторства спорных статей.

**5.** В результате испытаний двух однотипных приборов А и В установили количество помех, которые оценивались по трехбалльной системе (см. таблицу).

Уровень помех в баллах		1	2	3
Количество появлений помех данного уровня в 100 испытаниях	А	20	6	4
	В	7	3	10

Меньшему уровню помех отвечает меньшее количество баллов. В случае отсутствия помех их уровень считался равным нулю баллов. Какой из приборов более чувствительный к помехам?

**6.** На полке лежат попеременно три пары коричневых и две пары черных перчаток одинакового размера. Какие из последующих событий можно считать достоверными, невозможными, случайными, не являющимися ни достоверными, ни невозможными:

- 1) среди шести наугад взятых перчаток с полки есть по крайней мере одна пара коричневых перчаток;
- 2) среди пяти наугад взятых перчаток с полки все черные;
- 3) среди трех наугад взятых с полки пар перчаток есть по крайней мере одна пара перчаток коричневого цвета.

Какое наименьшее количество перчаток надо взять на полке в темноте, чтобы среди них была пара перчаток одного цвета?

7. В непрозрачном мешочке находятся два одинаковых белых шарика и один черный. Из этого мешочка 300 раз последовательно один за другим вынимали два шарика, каждый раз возвращая шарики в мешочек и тщательным образом перемешивая его содержимое. Результаты опытов представлены в таблице.

Результаты вынимания	бб	бч	чб
Количество	50	100	150

Согласуются ли результаты опытов с вероятностями событий: «вынули два белых шарика», «вынули сначала белый шарик, а потом — черный», «вынули сначала черный шарик, а потом — белый»?

8. Футболист многократно бил по воротам во время игры. В половине случаев вратарь противника отбивал мяч, в четверти — ловил, шестая часть ударов заканчивалась голом. Один из ударов зафиксировал фотограф-любитель. Какова вероятность того, что при этом ударе футболист не попал в ворота?

9. Что больше: вероятность при одновременном подбрасывании четырех правильных игральных кубиков получить по крайней мере одну единицу или вероятность при 24 подбрасываниях двух игральных кубиков получить по крайней мере один раз две единицы?

10. Всемирно известный математик А. А. Марков исследовал чередование гласных и согласных букв в последовательности букв в произведениях А. С. Пушкина. Оказалось, что относительная частота появления гласной буквы после гласной буквы равняется 0,128, гласной буквы после согласной буквы — 0,663. При каких условиях эти относительные частоты можно принять за вероятности соответствующих событий для произведений А. С. Пушкина?

11. Через станцию метро поезда двигаются в двух направлениях — в каждом направлении с интервалом ровно 5 минут. В одном направлении у Гриши живет бабушка, а в другом — дедушка. Гриша приходит на станцию после школы и садится на тот поезд, который подойдет первым. При этом оказывается, что у

бабушки он бывает приблизительно в 4 раза чаще, чем у дедушки. При каких условиях это может произойти?

### **Указания к задачам дополнительного задания**

1. Подумайте, какие части графиков характеризуют увеличение времени, его уменьшение, его постоянство.
2. Подумайте, можно ли воспользоваться монетой, игральным кубиком, набором карточек, пальцами руки и т. д.
3. Подумайте, сколько раз нужно подбросить монету и сколько исходов этого опыта учитывать.
4. Выясните, к чему ближе среднее арифметическое частот предлога "by" в спорных статьях: к среднему арифметическому частот этого предлога в статьях А. Гамильтона или Д. Мэдисона.
5. Обратите внимание на то, что чувствительнее к помехам тот прибор, который фиксирует больший уровень помех в баллах.
6. Для ответа на последний вопрос воспользуйтесь тем, что даже в темноте можно различить перчатки на левую и правую руку.
7. Подсчитайте вероятности исходов «бб», «бч», «чб».
8. Сначала найдите относительную частоту того, что футболист попал в ворота.
9. Сначала можно вычислить вероятность не получить ни одной единицы при четырех подбрасываниях правильного кубика и вероятность ни разу не получить две единицы при 24 подбрасываниях двух правильных кубиков, а потом перейти к вероятностям противоположных событий.
10. Обратите внимание на то, чтобы принять относительную частоту за вероятность, следует провести достаточное количество опытов приблизительно в одинаковых условиях.
11. В задаче фактически речь идёт о проверке гипотезы, состоящей в том, что Гриша одинаково часто будет приезжать к дедушке и бабушке.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

## **События, вероятности, частоты**

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 9-10 классов

Учебное пособие