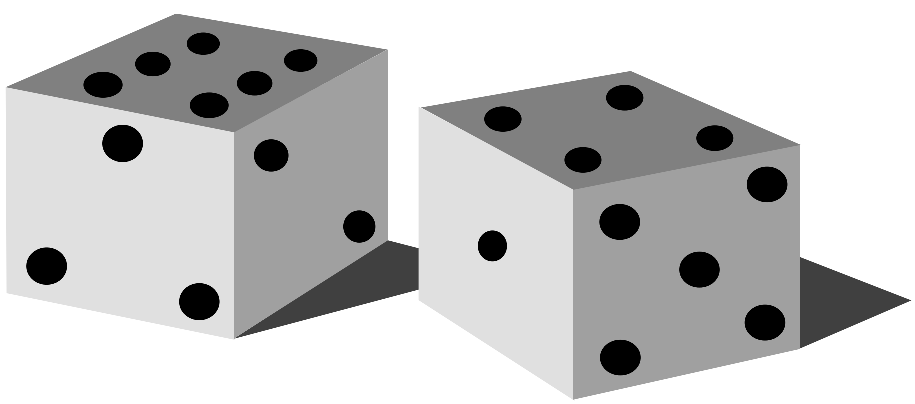
Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

КОМБИНАТОРИКА БЕЗ ФОРМУЛ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ



Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Донецк 2024

УДК 519 11
ББК 74.262я 72
Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Комбинаторика без формул и её применение. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8 – 9 классов. — 70 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 8-9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 от 05. 05. 2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, формирование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач, для каждой из которых приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи школьнику в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приемами, представленными в первой части пособия.

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 8-9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для решения различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия.

Наряду с пособиями «Анализ статистических данных», «Перебираем варианты», «Сравниваем шансы» настоящее пособие подготавливает обучающихся к изучению курса «Теория вероятностей и математическая статистика». Настоящее пособие посвящено решению комбинаторных задач, то есть задач на подсчет количества вариантов выбора некоторого количества элементов из заданной совокупности. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, каждый из которых содержит:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и поиска решений предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тексте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Проверь себя», «Реши сам», имеющиеся в каждом блоке.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого аналогичны заданиям «Проверь себя»;

- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;

- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, положенных в приведенные решения типовых задач из различных составляющих рассматриваемого модуля, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после решения каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока предлагаются задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить или приобрести тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями ~~и советами~~ к ним.

4. В конце каждого блока вам предлагаются задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приве

денными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

Ответы к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что они требуют не только указывать ответ, но и приводить их решения.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в блоке, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала пособия.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!
Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.
Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

1. Перебор возможных вариантов

В повседневной жизни нередко возникают проблемы, которые имеют не один, а несколько вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, очень важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их количество. Такого рода задачи называют **комбинаторными.**

В данном курсе на втором году обучения была тема «Перебор вариантов», где рассматривались различные способы перебора вариантов, как метода решения комбинаторных задач. Метод перебора применим к решению таких задач, где фигурирует совокупность из небольшого количества элементов.

Данную тему мы начнём с повторения этого метода. При использовании других методов, которые будут изучаться в этой теме, метод перебора решения комбинаторных задач можно будет использовать, во-первых, для осознания особенностей задачи, во-вторых, для самоконтроля правильности решения задачи (уменьшить заданные числовые значения и решить задачу методом перебора), в-третьих, иногда метод перебора является чуть ли не единственным методом решения комбинаторной задачи.

Задача 1. Проводится следующая игра. Из коробочки, содержащей 3 белых и 2 красных шарика, наугад вынимаются два шарика.

1) Ведущий перед извлечением принимает у зрителей ставки на количество вынутых белых шаров. На сколько белых шаров целесообразно сделать ставку?

2) Ведущий принимает ставки на два исхода игры: шары одинакового цвета, шары разного цвета. На какой исход целесообразно сделать ставку?

Анализируем. В задаче рассматривается совокупность из 5 шариков. Шарики считаются различными. Чтобы подчеркнуть это, проставим на белых шариках какие-то обозначения. Из этой совокупности извлекают два шарика. В условии говорится о том, что ведущий перед извлечением принимает у зрителей ставки на количество вынутых белых шаров.

Принять ставку на результат опыта — это означает, что тот, кто угадает результат, получает какой-то приз.

В задании 1) результатом извлечения шаров является количество белых шаров среди извлечённых. Оно может равняться 0 или 1, или 2.

В задании 2) возможны два результата извлечения шаров: извлечённые шары одинакового цвета или разного цвета.

Чтобы решить, на какой результат делать ставку, можно перебрать все возможные варианты исхода игры, а затем подсчитать их количество. И ставку делать на тот результат, который чаще может появиться, если шары извлекаются человеком, который их не видит, если шары на ощупь не различаются (по массе, отсутствуют какие-либо приметы и т. д.).

Решаем. Переберём все возможные результаты извлечения двух шариков из данной совокупности. Для этого обозначим белые шарики цифрами 1, 2, 3, а красные, например, буквами а, б, т. е. закодируем предметы. Возможны следующие результаты извлечения двух шариков:

1 2	1 3	1 а	1 б
	2 3	2 а	2 б
		3 а	3 б
			а б

Заметим, что вариант 1 2 означает, что извлечены два белых шарика (1 и 2). Вариант 21 мы не пишем, так как он совпадает с вариантом 1 2: на результат извлечения порядок появления шариков не влияет. Всего 10 вариантов.

1) В трех из 10 возможных результатов извлечения появляются два белых шарика (1 2, 1 3, 2 3), в шести — один белый шарик (1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 3б) и в одном — нет белых шариков (а б). Ясно, что если игру повторить много раз, то чаще будут появляться варианты с одним белым шариком. Теперь понятно, на какой исход целесообразно ставить.

2) Из двух исходов — шарики одинакового цвета и шарики разного цвета — при многократном повторении опыта чаще будет происходить второй исход: шесть вариантов из десяти (1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 3б) против четырех из десяти (12, 13, 23, аб).

Ответ. 1) На 1 белый шарик; 2) на шарики разного цвета.

1. *Сколько возможных вариантов извлечения двух шариков из совокупности 4-х различных шариков?*

2. *Если бы два шарика извлекались из совокупности 3-х белых и 1-го чёрного, то какой исход наступал бы чаще: шарики одного цвета или разного?*

3. *Если бы два шарика извлекались из совокупности 2-х белых и 2-х чёрных шариков, то при скольких исходах извлекался бы один чёрный шарик?*

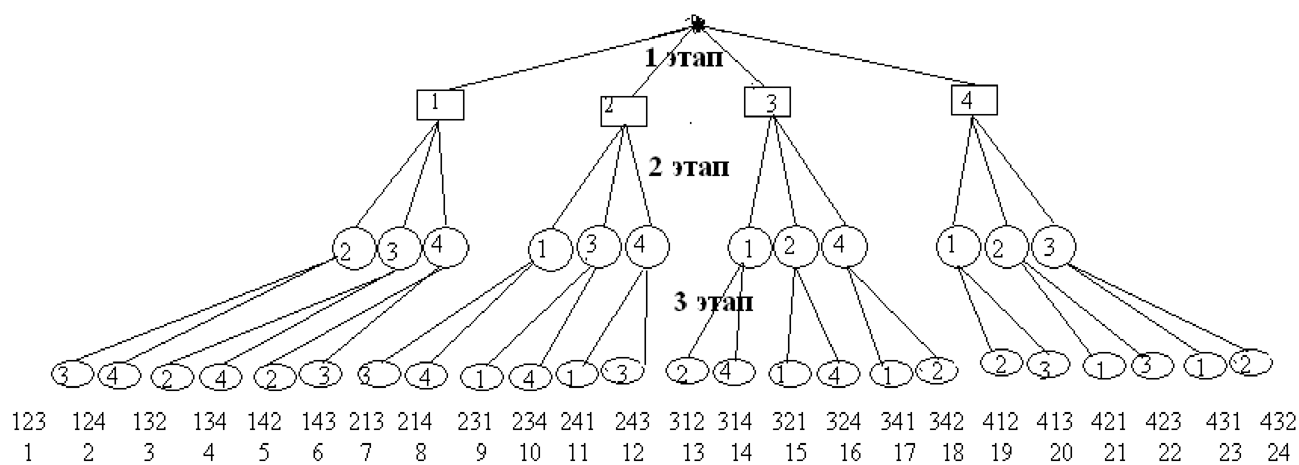
В задаче 1 для подсчёта количества возможных вариантов извлечения двух шариков был использован способ перебора, который называют ***методом перебора закодированных элементов.*** В следующей задаче будет применено так называемое ***дерево возможных вариантов.***

Задача 2. Из четырёх членов легкоатлетической серии, показавших одинаковые лучшие результаты в соревнованиях по бегу на 100 м, выбирают трёх спортсменов для участия в эстафете 3×100 м. Сколькими способами это можно сделать?

Анализируем. Конечно, эту задачу можно решить и методом перебора закодированных элементов. Для этого необходимо закодировать четырёх членов легкоатлетической серии, результатами выбора трёх спортсменов будут «тройки» введенных обозначений, на первом месте которых будет стоять код спортсмена, бегущего на первом этапе, на втором — бегущего на втором этапе, на третьем — бегущего на третьем этапе. Но этот перебор можно осуществить с помощью дерева возможных вариантов.

Решаем. Решение изображено на рисунке. Спортсменов обозначим цифрами 1, 2, 3, 4. Спортсменов распределяют по этапам наугад.

Знак * изображает корень дерева, ветви дерева — различные варианты. Чтобы определить трёх участников эстафеты, можно сначала определить стартующего, а для этого есть четыре варианта (1, 2, 3, 4). Поэтому от звездочки проведены четыре отрезка, и на их концах поставлены обозначения 1, 2, 3, 4. Затем нужно определить того, кто бежит на втором этапе из оставшихся трех. Поэтому от конца каждого отрезка проведены по три отрезка, на концах которых написаны обозначения оставшихся спортсменов. И наконец, нужно определить того, кто финиширует, из оставшихся двух. Для этого от конца каждого из последних отрезков проведены по два отрезка, на концах которых написаны обозначения оставшихся спортсменов. Получено 24 варианта определения участников эстафеты. Все они различны.



Ответ. 24.

1. *Если выбран вариант 243, то какой спортсмен стартует в эстафете?*

2. *Почему варианты 123 и 231 различны?*

3. *Сколько будет вариантов выбора участников эстафеты 2×400 м из четырёх спортсменов?*

4. *Сколькими способами из четырёх членов легкоатлетической серии, показавших одинаковые лучшие результаты на тренировках по бегу на 100 м, можно выбрать трёх участников соревнований по бегу на 100 м?*

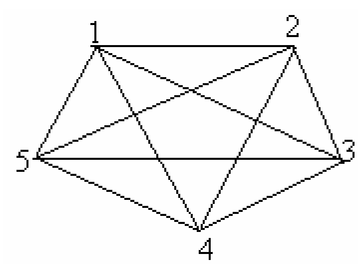
Если из некоторой совокупности необходимо выбрать два элемента, то подсчёт количества способов, с помощью которых это можно сделать, можно выполнить с помощью так называемого ***способа точек и отрезков***. Изложим сущность этого способа.

Элементы данной совокупности изображают в виде точек, расположенных так, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Затем соединяют каждые две точки отрезком прямой. Каждый из полученных отрезков изображает вариант выбора двух элементов из данной совокупности. Нужно только выяснить, являются ли они различными.

Задача 3. Сколькими способами имеющиеся два билета на футбольный матч команд — участников розыгрыша кубка лиги чемпионов — можно распределить между пятью друзьями — футбольными болельщиками?

Анализируем. Имеем совокупность из пяти друзей. Из этой совокупности нужно выбрать двоих, которые получат желанные билеты. Для подсчёта количества вариантов выбора можно воспользоваться методом точек и отрезков.

Решаем. Изобразим 5 друзей точками с номерами 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Соединим эти точки отрезками (см. рис.). Получили 10 отрезков. Каждый из них определяет двух друзей, которые получат билеты. Например, отрезок 24 означает, что билеты получат друзья, обозначенные цифрами 2 и 4. Следовательно, искомое количество способов распределения билетов равно 10.



Ответ. 10-ю.

1. *Каким отрезком фиксируется тот факт, что билеты достались друзьям, обозначенным цифрами 3 и 5?*

2. *Если бы было три билета, можно ли было подсчитать количество способов распределения их по одному среди 5 друзей методом точек и отрезков?*

3. *Сколькими способами имеющиеся два билета на футбольный матч* *можно распределить между шестью друзьями?*

Ещё один способ перебора возможных вариантов связан с применением таблиц. Он используется как при нахождении количества способов выбора заданного количества элементов из данной совокупности, так и при решении задач на определение количества способов разбиения совокупности различных или одинаковых предметов на заданное количество групп.

Задача 4. Сколькими способами можно распределить 4 одинаковых карандаша между тремя детьми?

Анализируем. Так как, по условию, карандаши одинаковые, то различные способы распределения карандашей отличаются только количеством карандашей, полученных каждым из детей. Поскольку в условии не предъявляется никаких требований к распределению, то каждый из детей может получить от 0 до 4-х карандашей. Все способы распределения можно представить в таблице.

Решаем. Так как карандаши одинаковые, то нет смысла как-то их обозначать: они неразличимы. Детей обозначим цифрами 1, 2, 3. Составим таблицу, в которой строки соответствуют детям, а столбцы — вариантам распределения. На пересечении строки и столбца указывается количество карандашей, которое досталось соответствующему ребенку.

Решение представлено в следующей таблице.

№ варианта / **№ ребенка**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	4	0	0	3	3	1	1	0	0	2	2	0	2	1	1
2	0	4	0	1	0	3	0	3	1	2	0	2	1	2	1
3	0	0	4	0	1	0	3	1	3	0	2	2	1	1	2

Чтобы не пропустить ни одного варианта, вначале рассматривались все способы распределения, при которых один ребёнок получил все карандаши, а остальные остались без карандашей; затем все способы, при которых один ребёнок получил 3 карандаша, один — один карандаш, а одному карандаши не достались; далее все способы, при которых двое из детей получили по 2 карандаша; и, наконец, все способы, когда один ребёнок получил два карандаша, а двое других по одному. Итак, всего 15 способов распределения 4-х одинаковых карандашей между тремя детьми.

Ответ. 15-ю.

1. *Сколько имеется способов распределения, при которых каждый ребёнок получит хотя бы один карандаш?*

2. *Сколько имеется способов распределения, при которых ровно один ребёнок останется без карандашей?*

3. *Сколькими способами 4 одинаковых карандаша можно распределить между двумя детьми?*

Существенным условием в задаче 4 было то, что карандаши одинаковые. Посмотрим, как изменится решение, если карандаши будут различными.

Задача 5. Сколькими способами можно распределить два различных карандаша между тремя детьми?

Анализируем. Так как, по условию, карандаши различные, то различные способы распределения карандашей отличаются не только количеством карандашей, полученных каждым из детей, но и самими карандашами. Поскольку распределяются 2 карандаша, то каждый из детей может получить от 0 до 2-х карандашей. Все способы распределения можно представить в таблице.

Решаем. Так как карандаши различные, то обозначим их цифрами 1, 2, а детей — буквами А, Б, В. Составим таблицу, в которой строки соответствуют детям, а столбцы вариантам распределения. На пересечении строки и столбца указываются карандаши, которые достались соответствующему ребенку.

Решение представлено в следующей таблице. Чтобы не пропустить ни одного варианта, вначале рассматривались все способы распределения, при которых один ребёнок получил оба карандаша, а остальные остались без карандашей; затем все способы, при которых один ребёнок получил карандаш 1, один — карандаш 2, а одному карандаши не достались. Других способов распределения нет. Итак, всего 9 способов распределения 2-х различных карандашей между тремя детьми.

В клетках таблицы, на пересечении строк и столбцов указываются номера карандашей, полученных соответствующим ребенком.

№ варианта / **№ ребенка**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
А	1, 2	–	–	1	1	–	2	2	–
Б	–	1, 2	–	2	–	1	1	–	2
В	–	–	1, 2	–	2	2	–	1	1

Ответ. 9.

1. *Есть ли способы распределения, при которых каждый ребёнок получил хотя бы 1 карандаш?*

2. *Для каких способов распределений больше шансов: для тех, корда карандаши получает один ребёнок, или для тех, в которых карандаши получают двое из детей?*

3. *Сколькими способами можно распределить два различных карандаша между двумя детьми?*

В задачах 4 и 5 находилось количество способов распределения заданного количества карандашей, одинаковых или различных, между детьми, то есть речь шла о распределении заданного количества элементов, одинаковых или различных, между различимыми группами. В следующей задаче потребуется найти количество способов распределения элементов на неразличимые группы.

Задача 6. Сколькими способами можно разложить на 3 кучки:

1) 5 одинаковых карандашей; 2) 3 различных карандаша?

Анализируем. В отличие от задач 4 и 5 в данной задаче карандаши не распределяются между детьми, а раскладываются на кучки, которые неразличимы друг от друга. Если карандаши одинаковые, то содержимое кучек при различных способах раскладывания карандашей будет отличаться друг от друга только количеством карандашей в них, причём два способа раскладывания, при которых наборы количеств карандашей в кучках отличаются только порядком, не считаются различными. Например, если 6 одинаковых карандашей раскладываются в 3 кучки, то результаты раскладывания (3, 2, 1) и (2, 1, 3) не являются различными.

Если карандаши различные, то содержимое кучек при различных способах раскладывания карандашей могут отличаться друг от друга не только количеством карандашей в них, но и самими карандашами.

Как и в задачах 4 и 5, ответы на поставленные вопросы можно получить с помощью таблиц.

Решаем. Кучки обозначим цифрами 1, 2, 3.

1) Обозначения для карандашей не вводим. Составим таблицу, в которой строки соответствуют кучкам, а столбцы вариантам раскладывания. На пересечении строки и столбца указывается количество карандашей, которое попало в соответствующую кучку. Решение представлено в следующей таблице.

Кучка	1	2	3	4	5
Первая.	5	4	3	3	2
Вторая.	0	1	2	1	2
Третья.	0	0	0	1	1

Всего 5 способов.

2) Обозначим карандаши буквами а, б, в. Составим таблицу, в которой строки соответствуют кучкам, а столбцы вариантам раскладывания. На пересечении строки и столбца указываются карандаши, которые попали в соответствующую кучку. Решение представлено в следующей таблице.

Кучка	1	2	3	4	5
Первая.	а, б, в	а, б	а, в	б, в	а
Вторая.	-	в	б	а	б
Третья.	-	-	-	-	в

Всего 5 способов.

Ответ. 1) 5-ю. 2) 5-ю.

1. *Сколькими способами можно разложить на 3 кучки 5 одинаковых карандашей так, чтобы в каждой кучке был хотя бы один карандаш?*

2. *Сколькими способами можно разложить на 3 кучки 4 одинаковых карандаша?*

3. *Сколькими способами можно разложить на 3 кучки 3 различных карандаша так, чтобы ровно в одной кучке не было ни одного карандаша?*

4. *Сколькими способами можно разложить на 2 кучки 3 различных карандаша?*

5. *Сколькими способами 5 одинаковых карандашей можно распределить между тремя детьми?*

Задание 1) фактически равносильно представлению числа 5 в виде суммы трёх целых неотрицательных слагаемых, в котором не учитывается порядок слагаемых: $5 = 5 + 0 + 0$; $5 = 4 + 1 + 0$; $5 = 3 + 2 + 0$; $5 = 3 + 1 + 1$; $5 = 2 + 2 + 1$.

Проверь себя

1. На почте есть три вида конвертов и три вида разных марок. Сколько можно образовать всевозможных наборов конвертов с марками?

А. 3. **Б.** 6. **В.** 9. **Г.** 27.

2. Сколькими способами из трёх различных подарков можно выбрать по подарку для двух детей? Ответ на вопрос дайте с помощью дерева возможных вариантов.

А. 3-мя. **Б.** 4-мя. **В.** 5-ю. **Г.** 6-ю.

3. Сколькими способами из шести участников математического кружка, имеющих примерно одинаковые успехи в занятиях математикой, можно выбрать двух для участия в районной олимпиаде по математике?

А. 30-ю. **Б.** 15-ю. **В.** 12-ю. **Г.** 9-ю.

4. Сколькими способами четыре одинаковых карандаша можно распределить между двумя детьми так, чтобы каждый получил хотя бы один карандаш?

А. 5-ю. **Б.** 4-мя. **В.** 3-мя. **Г.** 1-м.

5. Сколькими способами 3 различные конфеты можно распределить между двумя детьми?

А. 5-ю. **Б.** 6-ю. **В.** 8-ю. **Г.** 9-ю.

6. Сколькими способами можно разложить на 2 кучки 5 одинаковых конфет?

А. 3-мя. **Б.** 4-мя. **В.** 5-ю. **Г.** 6-ю.

Реши сам

1. В кондитерской кофейне есть мороженое трех типов: "сливочное", "каштан" и "пломбир". Анна и Борис решили купить себе по одной порции мороженого, выбирая их наугад. Сколькими способами они могут выбрать: 1) по одной порции; 2) по одной порции одного вида; 3) по одной порции разных видов?

2. Постройте дерево возможных вариантов для задания **1** 1).

3. Сколькими способами из четырёх членов шахматной секции, сильнейших, по мнению тренера, можно выбрать двух для участия:

1) в командных соревнованиях по шахматам;

2) в командных соревнованиях по шахматам, одного для первой доски, другого — для второй?

4. Сколькими способами пять одинаковых конфет можно распределить:

1) между двумя детьми;

2) между двумя детьми так, чтобы каждый получил хотя бы одну конфету?

5. Сколькими способами четыре различные конфеты можно распределить:

1) между двумя детьми;

2) между двумя детьми так, чтобы каждый получил хотя бы одну конфету?

6. Сколькими способами четыре конфеты можно разложить на 2 кучки, если конфеты:

1) одинаковые; 2) различные?

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 6. **2.** Одинаково часто. **3.** При 4-х.

Задача 2. 1. Спортсмен, обозначенный цифрой 2. **2.** Например, потому, что в варианте 123 стартует спортсмен 1, в в варианте 231 — спортсмен 2. **3.** 12. **4.** 4.

Задача 3. 1. Отрезком 35. **2.** Нет. **3.** 15-ю.

Задача 4. 1. 3. **2.** 9. **3.** 5-ю.

Задача 5. 1. Нет. **2.** Для тех, в которых карандаши получают двое из детей. **3.** 4-мя.

Задача 6. 1. 2-мя. **2.** 4-мя. **3.** 3-мя. **4.** 4-мя. **5.** 21-м.

Ответы на задания «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6
В	Г	Б	В	В	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 1) 9-ю; 2) 3-мя; 3) 6-ю. Введите обозначения для типов мороженого.

2. На концах первого слоя веток проставьте обозначения типов мороженого, которые можно купить, например, для Анны.

3. 1) 6-ю; 2) 12-ю. Обратите внимание на то, в каком задании порядок выбора спортсменов влияет на результаты выбора.

4. 1) 6-ю; 2) 4-мя. Для решения задания 2) исключите способы распределения, при которых один ребёнок получает все карандаши.

5. 1) 16-ю. 2) 14-ю. Составьте таблицу подобно тому, как это сделано при решении задачи 5.

6. 1) 3-мя; 2) 11-ю. Можно вначале решить эту задачу для одинаковых конфет, а потом из каждого способа разложения конфет получить столько способов, сколько есть вариантов выбора соответствующего количества конфет из 4-х различных.

2. Правила умножения, сложения и дополнения

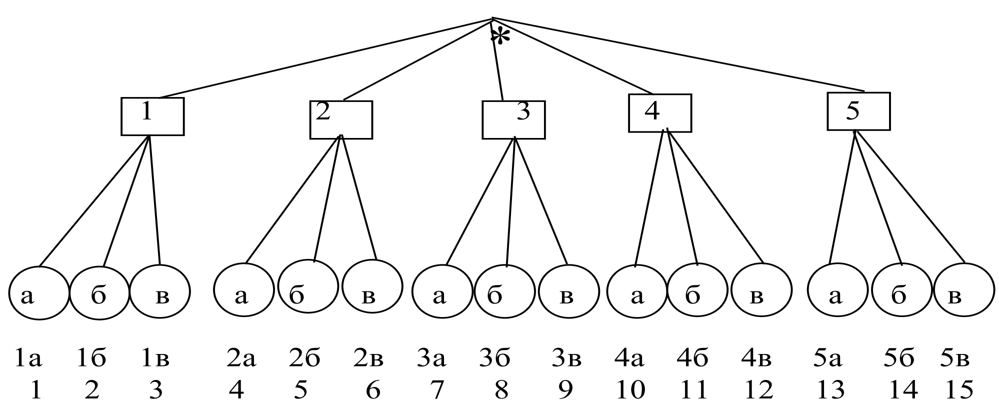
Метод перебора применим для решения таких комбинаторных задач, где количество элементов в совокупности и количество элементов, которые выбирают из этой совокупности, задаются числами, причём небольшими. Если же они задаются большими числами, то непосредственный перебор вариантов выбора или распределения становится очень громоздким и даже таким, который невозможно выполнить. Тем более этот метод неприменим, если данные в задаче задаются не числами, а буквами. В этих случаях комбинаторные задачи можно решить, применяя комбинаторные правила умножения и сложения.

Задача 1. Из города А в город В ведут десять дорог, а из В в С — восемь дорог. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?

Анализируем. Данные в задаче выражаются достаточно большими числами. Какой бы приём метода перебора — перебор закодированных элементов, или дерево возможных вариантов, или таблицы — мы ни выбрали, решение будет очень громоздким. Если представить, например, что изображаем дерево, где от «корня» выходит 10 веток, а от конца каждой из них по 8 веток, то вряд ли такой рисунок поместится на листе бумаги.

Применим другой метод, но чтобы подвести к нему, уменьшим данные. Пусть из А в В ведут 5 дорог, а из В в С — 3 дороги.

Решаем. Обозначим дороги из А в В числами 1, 2, 3, 4, 5, а дороги из В в С — буквами а, б, в. Построим дерево возможных вариантов:



На первом уровне дерева 5 “узлов” (дорог из А в В). Из каждого узла выходит 3 ветки (дороги из В в С). Всего получилось $5 \times 3 = 15$ путей из А в С.

Если количество дорог из А в В будет равно 10, а из В в С — 8, то изобразить дерево возможных вариантов будет сложно. Задачу легче решить рассуждением. Из А в В можно добраться по любой из 10 дорог. По какой бы дороге мы ни прибыли бы в В, есть 8 путей, по которым можно добраться из В в С. Всего получим $10 \times 8 = 80$ различных путей из А в С через В.

Ответ. 80.

1. *Сколькими путями, проходящими через город В, можно добраться из С в А?*

2. *Сколькими путями, проходящими через город В, можно будет добраться из А в С, если две дороги из В в С будут заблокированы?*

3. *Сколько дорог ведёт из А в В, если из В в С ведёт 6 дорог, а из А в С можно добраться через В 54-мя путями?*

Мы использовали так называемое ***правило умножения***. Сформулируем его:

Если объект А можно выбрать *m* способами и если после *каждого* такого выбора объект В можно выбрать *n* способами, то выбор пары (А, В) в указанном порядке можно осуществить $m \times n$ способами.

Обратите внимание, каким бы способом ни был выбран объект А, второй должен выбираться одним и тем же количеством способов. Иными словами, из каждого узла одного уровня дерева должно выходить одно и то же количество веток.

В задаче 1 мы фактически применяли правило умножения для 2-х объектов: пути из А в В и пути из В в С. Правило умножения справедливо для выбора любого конечного количества объектов. В общем виде его можно сформулировать так:

Если объект A_1 может быть выбран n_1 различными способами, A_2 – n_2 различными способами и т. д., $A_к$ – $n_к$ различными способами, то *k* объектов $A_1, A_2, \ldots, A_к$ в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_к$ способами.

Задача 2. Составляются дорожные знаки, состоящие из геометрической фигуры (круга, квадрата, треугольника или шестиугольника), буквы и цифры. Сколько таких знаков можно составить?

Анализируем. В задаче 1 вначале выбирался первый объект (путь из А в В), затем для каждого способа выбора этого объекта выбирался второй объект — путь из В в С. В данной задаче выбираются 3 объекта: геометрическая фигура (их совокупность указана в условии), буква (в русском языке их 33) и цифра (их 10). Для решения задачи можно воспользоваться сформулированным выше обобщённым правилом умножения.

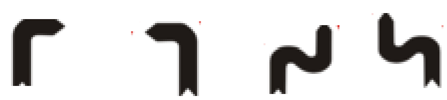
Решаем. Вначале нужно выбрать геометрическую фигуру. Этот выбор может быть сделан четырьмя способами (всего четыре фигуры). При любом выборе фигуры можно выбрать одну из 33-х букв. Поэтому фигуру и букву можно выбрать $4 \times 33 = 132$ способами. Для любого из этих 132 вариантов есть 10 способов выбора цифры. Всего получается $4 \times 33 \times 10 = 1320$ знаков.

Ответ. 1320.

1. *Каким будет ответ в задаче, если первой выбрать букву, второй — цифру и третьей — геометрическую фигуру?*

2. *Каким будет ответ в задаче, если не использовать буквы ё, й, ь, ы, ъ?*

3. *Сколько будет указанных дорожных знаков, на которых, кроме того, проставлен один из значков, изображённых на рисунке и указывающих на закругление дороги или на опасные повороты дороги?*



В условиях задач 1 и 2 содержались данные о количестве элементов, из которых нужно выбирать элементы на каждом этапе. В следующей задаче такая информация имеется только о первом этапе. Количество элементов в совокупности, из которой выбираются элементы на последующих этапах, необходимо устанавливать по ходу решения.

Задача 3. В классе 25 человек.

1) Сколькими способами можно выбрать в классе старосту и его заместителя?

2) Сколькими способами можно в этом классе составить расписание дежурства на 5 дней, если на каждый день назначается один дежурный и никто не должен дежурить более одного раза?

Анализируем. В задаче рассматривается совокупность из 25 элементов (учащихся класса). В задании 1) из этой совокупности нужно выбрать 2 элемента (старосту и заместителя), а в задании 2) — 5 элементов (дежурных на 5 дней). В обоих заданиях первый элемент выбирается из всей совокупности, а выбор последующих элементов производится из части совокупности, оставшейся после выбора предыдущего элемента: выбор старосты сокращает круг кандидатов на роль его заместителя, выбранный старостой не может быть и заместителем; выбор дежурного на первый день сокращает возможности выбора дежурных на второй день, ведь никто не должен дежурить дважды. Искомые количества способов можно найти с помощью правила умножения.

Решаем. 1) Старостой может быть любой из 25 учащихся. Для каждого способа выбора старосты на роль заместителя могут претендовать 24 оставшихся учащихся. Таким образом, всего есть $25 \times 24 = 600$ разных вариантов выбора старосты и его заместителя.

2) На первый день мы можем назначить дежурным любого из 25 человек. Кто бы ни дежурил в первый день, выбор дежурного на второй день уже не является независимым от того, кто дежурил в первый день: никто не должен дежурить более одного раза. Предстоит выбор только из 24 человек. Итак, на первые 2 дня дежурных, по правилу умножения, можно назначить 25×24 способами. Для любого выбора дежурных на первые два дня, на третий день есть 23 возможности, т.к. можно назначить любого, кроме тех, кто дежурил в первые два дня. Поэтому, по обобщённому правилу умножения, дежурных на первые три дня можно назначить $25 \times 24 \times 23$ способами. Рассуждая аналогично, получим, что общее количество вариантов составления расписания дежурства на 5 дней равно $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6375600$.

Ответ. 1) 600-ми; 2) 6 375 600-ми.

1. *Каким был бы ответ в задании 1), если бы нужно было выбрать старосту, заместителя и казначея?*

2. *Каким был бы ответ в задании 2), если бы в классе было 20 учащихся и составлялось бы расписание на 4 дня?*

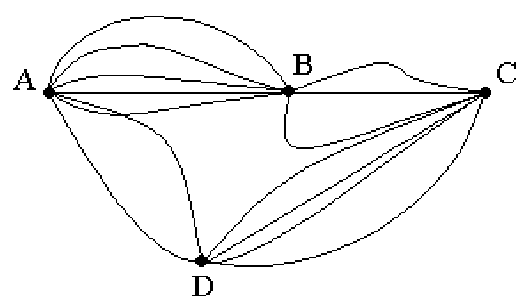
3. *Каким был бы ответ в задании 2), если бы не было условия, что никто не должен дежурить более одного раза?*

Часто совокупность всех способов выполнения определенного действия можно разбить на два или несколько классов. Например, из Минска до Москвы можно добраться через Смоленск, а можно через Брянск. Следовательно, все пути из Минска в Москву распределяются на два класса: к первому классу относятся все пути, которые проходят через Смоленск, ко второму — все пути через Брянск.

Все целые числа из некоторого промежутка можно разделить на три класса в зависимости от остатка, которые они дают при делении на 3: к первому классу относятся числа, делящиеся на 3, то есть дают в остатке 0, ко второму — те, которые при делении на 3 дают в остатке 1, к третьему — те, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

В следующих задачах рассматривается метод вычисления количества элементов всей совокупности, если известны или можно найти количества элементов в каждом классе, на которые разбита данная совокупность. Сначала будет рассматриваться случай, когда классы, на которые распределена совокупность, не имеют общих элементов, а затем — случай, когда совокупность состоит из двух классов, имеющих общие элементы.

Следующая задача является обобщением задачи 1.



Задача 4. Из города A в город B ведут 5 дорог, а из города B в город C — три

дороги. Пусть, кроме того, из города A в город D можно попасть двумя путями, из C в D — четырьмя (см. рис.). Сколькими способами можно добраться из A в C ?

Анализируем. Все рассматриваемые пути из A в C можно разделить на 2 класса: пути из A в C, проходящие через город B, и пути из A в C, проходящие через город D, причем, каждый путь входит в один и только в один класс: каждый путь из A в C проходил или через B, или через D, ни один путь не проходил через оба этих города. Количество возможных маршрутов в каждом классе можно подсчитать, воспользовавшись правилом умножения. Общее количество путей равняется сумме количеств путей в обоих классах.

Решаем. Возможны 2 случая: путь из A в C проходит через город B или через город D. В каждом из этих случаев количество возможных маршрутов легко подсчитать, воспользовавшись правилом умножения.

В первом случае $5 \times 3 = 15$ маршрутов; во втором — $2 \times 4 = 8$ вариантов. Складывая, получаем общее количество маршрутов: $15 + 8 = 23$.

Ответ. 23-мя.

1. *Сколькими способами можно добраться из A в C, если из A в C через B можно добраться 10-ю путями, а из A в C через D можно добраться 6-ю путями?*

2. *Каким был бы ответ в задаче, если бы из города A в город B вели 5 путей, а из города B в город C — три пути; из города A в город D можно было попасть тремя путями, из D в C — двумя?*

3. *Каким был бы ответ в задаче, если бы из города A в город B вели 5 путей, а из города B в город C — три пути; из города A в город D можно было попасть тремя путями, из D в C — двумя; из города A в город E можно было попасть двумя путями, из E в C — одним путем?*

4. *Есть ли путь, который соединяет город B с городом D без захода в го-*

рода А и С?

При решении задачи фактически было использовано утверждение, которое называют **правилом сложения**. Его можно сформулировать так:

Если некоторый объект А можно выбрать *m* способами, а другой объект В можно выбрать *n* способами, причём ни один из способов выбора А не совпадает с каким-нибудь способом выбора В, то выбор “либо А, либо В” можно осуществить *m* + *n* способами.

В задаче 4 объектом А был путь из А в С через В, а объектом В — путь из А в С через D.

Правило сложения можно применять тогда, когда все варианты, которые рассматриваются в задаче, можно разбить не только на два класса, а на любое конечное количество классов, причем, каждый вариант должен входить в один и только в один класс.

Задача 5. Четверо учащихся Олег, Андрей, Сергей и Владимир участвуют в легкоатлетической эстафете 100 + 200 + 400 + 800 (м). Сколькими способами их можно распределить по этапам так, чтобы Олег бежал на дистанции, более длинной, чем дистанция Андрея?

Анализируем. Все распределения учащихся по этапам, которые удовлетворяют условиям задачи, можно разбить на три класса: Олег бежит на дистанции 800 м, или на 400 м, или на 200 м, поскольку он должен бежать на дистанции, более длинной, чем дистанция Андрея. Количество распределений учащихся в каждом классе можно вычислить, пользуясь правилом умножения, а ответ на поставленный вопрос можно получить на основании правила сложения.

Решаем. Если Олег бежит на дистанции 800 м, то для Андрея существуют три возможных этапа: 100 м, 200 м, 400 м. На каком бы из этих этапов не бежал он, для Сергея остаются два возможных этапа, а именно те, на которых не бегут Олег и Андрей. На каких бы этапах не бежали Олег, Андрей и Сергей, для Владимира остается один этап. Следовательно, в этом случае учащиеся могут распределиться по этапам 3·2·1 = 6 способами.

Если Олег бежит на дистанции 400 м, то для Андрея есть 2 возможности, для Сергея — две и для Владимира — одна, то есть распределение учащихся по этапам можно осуществить 2·2·1 = 4 способами.

Если Олег бежит на дистанции 200 м, то у Андрея лишь одна возможность — этап 100 м, у Сергея — две возможности, у Владимира — одна, то есть в этом случае учащиеся могут быть распределены по этапам 1·2·1 = 2 способами.

Никакие два из трёх рассмотренных классов распределения учащихся по этапам не имеют общих элементов: они отличаются, по крайней мере, тем этапом, на котором бежит Олег. Поэтому общее количество распределений учащихся по этапам равняется сумме количеств распределений в каждом классе. Складывая, получим 6 + 4 + 2 = 12 вариантов.

Ответ. 12.

1. *Если Олег бежит на дистанции 200 м, то мог ли Андрей бежать на дистанции 400 м?*

2. *Мог ли Олег бежать на дистанцию 100 м?*

3. *Если Олег бежит на дистанции 800 м, то можно ли было начинать вычислять количество распределений других учащихся по этапам не с Андрея, а с других учащихся?*

4. *Если Олег бежит на дистанции 400 м, то можно ли было начинать вычислять количество распределений других учащихся по этапам не с Андрея, а с других учащихся?*

5. *Каким был бы ответ в задаче, если бы Олег бежал на дистанции, более короткой, чем дистанция Андрея?*

При использовании правила сложения нужно следить, чтобы ни один из способов выбора объекта А не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта В, т.е., чтобы ни одна комбинация не попала сразу в два класса. Если такие совпадения есть, правило сложения утрачивает силу, и мы получаем лишь $m + n — k$ способов выбора, где k — количество совпадений. Общее правило сложения можно сформулировать так:

Количество способов выбора "*A* или *B*" (то есть по крайней мере одного из двух объектов) равняется $m + n - k$, где m — количество способов выбора *A*, n — количество способов выбора *B*, k — количество способов выбора *A и B*.

Задача 6. В классе каждый ученик изучает хотя бы один иностранный язык: английский или немецкий. 25 человек изучают английский, 10 учащихся — немецкий, а пятеро изучают оба языка.

1) Сколько учеников в классе?

2) Сколько из них изучает только немецкий язык?

Анализируем. Если будем выбирать случайно ученика в указанном классе, то можем выбрать изучающего английский язык (объект A), можем выбрать изучающего немецкий язык (объект B), при этом может оказаться, что выбран изучающий и английский, и немецкий язык (объект A и B). Чтобы ответить на вопрос задания 1), можно воспользоваться общим правилом сложения, сформулированным выше.

Для ответа на вопрос задания 2) нам известны количество учащихся, изучающих немецкий язык, и количество учащихся, изучающих два языка.

Решаем. В классе 25 учащихся изучают английский язык, 10 человек — немецкий. При этом пятеро из них изучают оба языка, т.е. они вошли и в число тех, кто изучает английский, и в число тех, кто изучает немецкий язык. Иными словами, если сложим 25 + 10, мы их учтём дважды. Поэтому в классе
$25 + 10 – 5 = 30$ учащихся.

Немецкий язык изучает 10 человек, из них и английский изучают пятеро. Значит, только немецкий изучают 10 – 5 = 5 учащихся.

Ответ. 1) 30; 2) 5.

1. *Сколько учащихся в классе изучает только английский язык?*

2. *Если бы в классе двое учащихся были освобождены от изучения иностранного языка, сколько учащихся было бы в классе?*

3. *Если бы в классе было 35 учащихся, каждый из которых изучал хотя бы один иностранный язык: английский или немецкий, причём 25 человек изучали английский, 10 учащихся — немецкий, то сколько учащихся изучало бы оба языка?*

4. *Если бы в классе было 35 учащихся, каждый из которых изучал хотя бы один иностранный язык: английский или немецкий, причём 23 человек изучали английский, 15 учащихся — немецкий, то сколько учащихся изучало бы оба языка?*

Как правило, в комбинаторных задачах предлагается найти количество конфигураций элементов некоторой совокупности, которые удовлетворяют определенным условиям. Оказывается, что иногда проще найти количество тех конфигураций элементов данной совокупности, которые не удовлетворяют этим условиям. Целесообразно научиться пользоваться этим приемом, который иногда называют ***правилом дополнения.*** Приведём его формулировку.

Чтобы найти количество элементов некоторой совокупности, которые удовлетворяют определенному условию, можно из общего количества элементов этой совокупности вычесть количество тех ее элементов, которые не удовлетворяют этому условию.

Задача 7. Энциклопедия состоит из пяти томов — с первого по пятый. Сколькими способами ее можно поставить на пятиместной полке в беспорядке, то есть так, чтобы тома не стояли друг за другом в порядке возрастания их номеров?

Анализируем. Попытки непосредственно перебрать все необходимые комбинации, или подсчитать их количество обнаруживают сложность этого задания. Но задание значительно упрощается, если мы осознаем, что существует лишь один способ размещения томов энциклопедии друг за другом в порядке возрастания их номеров. Все остальные способы их расстановки относятся к беспорядку.

Решаем. Количество всех способов расстановки томов энциклопедии можно вычислить по правилу умножения. Для первого тома на полке есть 5 мест. Какое бы место не занял этот том, для второго тома есть 4 места. Первые два тома можно расставить $5 \cdot 4 = 20$ способами. Для любого способа расстановки первых двух томов третий том может занять любое из трех оставшихся мест на полке. Продолжая далее аналогично, получим, что количество всех способов расстановки томов энциклопедии равняется $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Следовательно, в беспорядке тома энциклопедии можно расставить на полке $120 - 1 = 119$ способами.

Ответ. 119-ю.

1. *Сколько существует способов размещения томов энциклопедии друг за другом в порядке возрастания их номеров?*

2. *Сколькими способами энциклопедию из трех томов — с первого по третий — можно поставить на трехместной полке в беспорядке, то есть так, чтобы тома не стояли друг за другом в порядке возрастания их номеров?*

3. *Сколькими способами энциклопедию из четырех томов — с первого по четвертый — можно поставить на четырехместной полке так, чтобы тома не стояли друг за другом в порядке возрастания их номеров?*

4. *Сколькими способами энциклопедию из трех томов — с первого по третий — можно поставить на трехместной полке так, чтобы только один том стоял на своем месте?*

Проверь себя

1. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами из них можно выбрать одну перчатку на левую руку и одну на правую?

А. 12-ю. **Б.** 30-ю. **В**. 36-ю. **Г**. Ответ отличен от приведенных.

2. Надо послать 4 срочных письма. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трёх курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

А. 81. **Б.** 64. **В**. 24. **Г**. 12.

3. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами из них можно выбрать одну перчатку на левую руку и одну на правую так, чтобы они были различных размеров?

А. 25-ю. **Б.** 30-ю. **В**. 36-ю. **Г**. 42-мя.

4. У двух коллекционеров есть по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут сделать честный обмен?

А. 100-ми. **Б.** 200-ми. **В.** 300-ми. **Г.** 500-ми.

5. Алфавит племени УА-УА состоит из двух букв У и А. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из трёх букв. Сколько слов в языке племени?

А. 8. **Б.** 13. **В**. 14. **Г**. 16.

6. В классе 28 учащихся, каждый из них занимается хотя бы одним видом деятельности: спортом или художественным творчеством. Спортом занимается 16 учащихся, 5 человек занимаются и спортом, и художественным творчеством. Сколько человек занимается художественным творчеством?

А. 22. **Б.** 17. **В**. 12. **Г**. 7.

7. Карточки в наборе из пяти различных карточек лежат в определенном порядке. Петя пробует угадать этот порядок. Сколько у него возможностей для ошибок?

А. 120.   **Б.** 119.   **В.** 60.   **Г.** 1.

Реши сам

1. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может:

1) подняться на гору и спуститься с неё;

2) подняться на гору и спуститься с неё, если спуск и подъем происходят по различным путям?

2. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов?

3. Сколькими способами из 6 различных карандашей можно выдать по одному карандашу четырём детям?

4. В урне 10 пронумерованных шаров, из которых 7 белых и 3 красных. Из нее один за другим с возвращением извлекли два шара. Сколькими способами из урны можно извлечь одноцветные шары?

5. Алфавит племени Гав – Гав состоит из трёх букв Г, А, В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из четырёх букв. Сколько слов в языке племени Гав – Гав?

6. Староста одного класса предоставил новому классному руководителю такую информацию. В классе учится 35 учащихся, из них 23 занимаются спортом, 24 — художественным творчеством, 15 учащихся — и спортом, и художественным творчеством, 5 учащихся не занимаются ни одним из этих видов деятельности. Найдите ошибку в этих данных.

7. Имеется 3 красных карандаша, 4 синих и 2 зеленых. Сколькими способами можно выбрать из них несколько карандашей так, чтобы среди выбранных были карандаши всех трех цветов?

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 80-ю. **2.** 60-ю. **3.** 9.

Задача 2. 1. 1320. **2.** 1120. **3.** 5280.

Задача 3. 1. 13800. **2.** 116280. **3.** 9 765 625.

Задача 4. 1. 6-ю. **2.** 21-м. **3.** 23-мя. **4.** Нет.

Задача 5. 1. Нет. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** Нет. **5.** 12.

Задача 6. 1. 20. **2.** 32. **3.** 0. **4.** 3.

Задача 7. 1. 120. **2.** 5-ю. **3.** 23-мя. **4.** 3-мя.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6	7
В	А	Б	Г	В	Б	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 1) 25-ю; 2) 20-ю. Для каждого задания установите, сколькими дорогами турист может спускаться с горы.

2. 60. Воспользуйтесь тем, что из совокупности 5 элементов выбираются 3, причём порядок их выбора существенный.

3. 360-ю. Начните решение такими рассуждениями: первый ребёнок может получить любой из 6 карандашей.

4. 58-ю. Извлечение двух одноцветных шаров происходит в двух случаях: извлекаются два белых шара или два красных. Обратите внимание на то, что шары извлекаются с возвращением: извлекается первый шар, записывается его цвет, затем он возвращается в урну, содержимое урны тщательно перемешивается, потом извлекается второй шар.

5. 120. Подсчитайте количество слов, содержащих одну букву, две буквы, три буквы, четыре буквы, и примените обобщённое правило сложения.

6. По данным старосты класса $35 - 5 = 30$ учащихся занимаются спортом или художественным творчеством. Но это противоречит общему правилу сложения: $30 \neq 23 + 24 - 15$.

7. Учитывая, что, например, красный карандаш может либо войти, либо не войти в число выбранных, вычислите сначала количество способов выбора красных карандашей. Среди этих способов подсчитайте количество таких, при которых среди нескольких выбранных карандашей будет, по крайней мере, один красный. Для этого воспользуйтесь правилом дополнения. Так же рассмотрите синие и зеленые карандаши. Далее воспользуйтесь правилом умножения.

3. Упорядоченный выбор нескольких элементов из одного множества с возвращением и без возвращения

Многие комбинаторные задачи сводятся к выбору определенного количества элементов из некоторой совокупности различных элементов. Этот выбор можно осуществить с возвращением или без возвращения (элемент, который извлекается из совокупности, возвращается или не возвращается в данную совокупность). На результаты выбора может влиять порядок извлечения элементов, а может и не влиять. В первом случае имеем упорядоченный выбор, во втором — неупорядоченный. Следовательно, имеем четыре типа комбинаторных задач, два из которых станут предметом рассмотрения в данном пункте. В данном пункте будут рассматриваться задачи, которые сводятся к упорядоченному выбору с возвращением и без возвращения.

Задача 1. Сколько существует пятизначных чисел: 1) образованных лишь из нечётных цифр; 2) с различными цифрами?

Анализируем. Имеется совокупность, состоящая из десяти цифр: 0, 1, 2, …, 8, 9. Надо образовать из них пятизначные числа, то есть выбрать из данной совокупности пять цифр. Обращаем внимание на то, что существенным является порядок выбора элементов, потому что числа 17539 и 75139, состоящие из одних и тех же цифр, являются разными. Изменился порядок извлечённых элементов — изменился результат опыта, то есть получили другое пятизначное число. Такой выбор называют ***упорядоченным***.

В задании 1) требуется составить пятизначные числа, содержащие только нечётные цифры. Поскольку других ограничений на пятизначные числа в задании не содержатся, то такой выбор следует осуществлять с возвращением, то есть выбирается один элемент (первая цифра пятизначного числа), фиксируется и возвращается в данную совокупность. Следующий элемент (вторая цифра пятизначного числа) выбирается наугад из всей совокупности. После его фиксации он возвращается в данную совокупность и следующий элемент (третья цифра пятизначного числа) опять выбирается из всей совокупности и т. д. Следовательно, имеем выбор ***с возвращением.*** Результаты выбора с возвращением могут содержать одинаковые элементы.

В задании 2) надо образовать всевозможные пятизначные числа с различными цифрами, то есть выбрать из данной совокупности пять элементов (пять цифр), причем так, чтобы первым не был выбран 0. Поскольку, по условию, пятизначные числа должны состоять из различных цифр, то такой выбор следует осуществлять без возвращения, то есть выбирается один элемент (первая цифра пятизначного числа), фиксируется и не возвращается в данную совокупность. Следующий элемент (вторая цифра пятизначного числа) выбирается наугад из оставшейся совокупности. После его фиксации он не возвращается в данную совокупность и следующий элемент (третья цифра пятизначного числа) опять выбирается из оставшейся совокупности и т. д. Следовательно, имеем ***выбор без возвращения.***

Решаем. Применим правило умножения. Нужно последовательно произвести 5 действий: выбрать первую, вторую, ..., пятую цифру числа.

1) Поскольку каждое число должно состоять из нечётных цифр, то выбор каждой цифры осуществляется из совокупности, содержащей пять элементов: 1, 3, 5, 7, 9. Следовательно, первую цифру можно выбрать 5-ю способами. Какой бы не была первая цифра, вторую цифру можно выбрать также 5-ю способами. Таким образом, первые две цифры можно выбрать $5 \cdot 5 = 25$ способами. Продолжая такие рассуждения, получим, что всего существует $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$ пятизначных чисел, в записи которых все цифры нечётны.

2) Первой цифрой может быть любая, кроме нуля, то есть имеется 9 способов выбора первой цифры. Какой бы не была первая цифра, на втором месте может стоять любая из 10 цифр, кроме той, которая стоит на первом месте, то есть

имеется 9 вариантов выбора второй цифры. Следовательно, первые две цифры можно выбрать $9 \cdot 9 = 81$ способом. Для любого из этих 81 способа выбора первых двух цифр третью цифру можно выбрать 8 способами (на третьем месте может стоять любая из 10 цифр, кроме двух выбранных). Таким образом, первые три цифры можно выбрать $81 \cdot 8 = 648$ способами. Продолжая и т. д., получим, что всего существует $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$ пятизначных чисел с различными цифрами.

Ответ. 1) $5^5 = 3125$; 2) 27 216.

1. *Сколько существует двузначных чисел: 1) образованных лишь из нечётных цифр; 2) с различными цифрами?*

2. *Сколько из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно образовать: 1) пятизначных чисел; 2) пятизначных чисел с различными цифрами?*

3. *Сколько из цифр 0, 1, 2, 3, 4 можно образовать: 1) пятизначных чисел; 2) пятизначных чисел с различными цифрами?*

В рассмотренной задаче нетрудно было выбрать как совокупность элементов, из которой нужно было извлекать элементы, так и количество элементов, которые надо было извлечь. Иногда эту совокупность и это количество придется правильно определять.

Задача 2. Поезд состоит из 8 вагонов. Каждый из 5 пассажиров выбирает себе вагон наугад. Сколькими способами можно осуществить этот выбор: 1) без дополнительных условий; 2) так, чтобы все они оказались в разных вагонах?

Анализируем. Иногда во время решения такой задачи путают, что надо выбирать: вагонам пассажиров, или пассажирам вагоны. Естественно, что пассажиры выбирают вагоны. Следовательно, мы имеем совокупность из 8 элементов (вагонов), из которой необходимо выбрать 5 элементов. Этот выбор является упорядоченным, потому что если, например, поменяем местами два вагона, выбранные двумя пассажирами, то получим другой результат выбора.

В задании 1 никаких дополнительных требований к выбору вагонов не предъявляется, поэтому каждый пассажир выбирает для себя вагон из всех восьми, то есть в задаче рассматривается выбор с возвращением. В задании 2) пассажиры должны выбирать различные вагоны. Поэтому первый пассажир выбирает для себя вагон из всех восьми, следующий — из семи оставшихся вагонов и т. д., то есть в задаче рассматривается выбор без возвращения.

Решаем. 1) Первый пассажир может выбрать любой из 8 вагонов. Какой бы вагон он не выбрал, у второго пассажира есть также 8 возможностей для выбора вагона, то есть два пассажира могут, по правилу умножения, выбрать вагоны $8 \cdot 8 = 8^2$ способами. Для каждого из этих 8^2 способов выбора вагонов двумя пассажирами третий пассажир может выбрать себе вагон 8-ю способами. Поэтому три пассажира могут выбрать вагоны 8^3 способами. Продолжая аналогично и т. д., получим, что 5 пассажиров могут выбрать вагоны $8^5 = 32\,768$ способами.

2) Первый пассажир может выбрать любой из 8 вагонов. Какой бы вагон он не выбрал, у второго пассажира есть только 7 возможностей для выбора вагона, то есть два пассажира могут, по правилу умножения, выбрать вагоны $8 \cdot 7 = 56$ способами. Для каждого из этих 56 способов выбора вагонов двумя пассажирами третий пассажир может выбрать себе вагон 6-ю способами. Поэтому три пассажира могут выбрать вагоны $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ способами. Продолжая аналогично и т. д., получим, что 5 пассажиров могут выбрать вагоны $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ способами.

Ответ. 1) $8^5 = 32\,768$ способами; 2) 6 720 способами.

1. *Сколько раз применялось комбинаторное правило умножения во время решения задания 1)?*

2. *Сколькими способами 8 пассажиров могут выбрать вагоны в поезде, состоящем из 5 вагонов: 1) без дополнительных условий; 2) так, чтобы все они оказались в разных вагонах?*

3. *Можно ли осуществить из совокупности, которая содержит меньше элементов, чем следует выбрать, упорядоченный выбор: 1) с возвращением; 2) без возвращения?*

В рассмотренных задачах сравнительно легко определялась совокупность элементов, из которой осуществлялся выбор. Для решения следующей задачи эта совокупность явно не задается.

Задача 3. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы? В группу может входить 1 человек, или 2, 3, 4 человека, или 5, 6, ,., 15 человек.

Анализируем. На первый взгляд, для решения задачи нужно найти, сколькими способами можно из 15 человек образовать группы, где количество людей равно 1, 2, ..,, 14 или 15, а затем применить правило сложения. Но это очень громоздкий путь. Есть и другой способ решения.

Поскольку каждый из 15 человек может или войти в группу, или не войти, то имеем совокупность из двух элементов («входит»; «не входит»), из которой выбирается 15 элементов. Нужно определить, является ли этот выбор упорядоченным или неупорядоченным, с возвращением или без возвращения.

Решаем. Из совокупности двух элементов нужно выбрать 15 элементов. Этот выбор является упорядоченным (если для двух лиц поменяем результаты выбора «входит»; «не входит», то получим другую группу) и с возвращением (ведь больше одного лица может войти в группу). Поэтому, используя комбинаторное правило умножения, получим 2^{15} различных групп.

Но группа не может быть пустой. Поэтому из 2^{15} различных групп мы должны исключить группу, где каждый из 15 человек выбрал элемент «не входит». Общее количество групп равняется $2^{15} - 1 = 32\ 767$.

Ответ. $2^{15} - 1 = 32\ 767$.

1. *Сколькими способами можно выбрать из 4 человек группу людей для работы, если в группу может входить 1 человек, или 2, 3, 4 человека?*

2. *Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы, если в группу может входить лишь 1 человек?*

3. *Сколькими способами можно выбрать из n человек группу людей для работы, если в группу может входить 1 человек, или 2, 3, 4 человека, или 5, 6 ,..., n человек?*

В некоторых задачах, связанных с упорядоченным выбором, приходится, кроме правила умножения, применять комбинаторные правила сложения и дополнения.

Задача 4. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее количество имен равняется 300, а ребенку дают не больше, чем три имени?

Анализируем. Ребенку можно дать или одно имя, или два, или три имени. Следовательно, ответом на вопрос задачи служит, на основании комбинаторного правила сложения, сумма количеств способов, которыми ребенку можно дать одно имя, два и три имени.

Решаем. Одно имя можно дать 300-ми способами: этим именем может быть любое имя из 300 имеющихся.

Найдем количество способов, которыми ребенку можно дать два имени. Имеем совокупность из 300 имен, из которой необходимо выбрать два имени. Этот выбор является выбором без возвращения: ребенку дают разные имена. Этот выбор является упорядоченным: если поменять порядок имен, получим другое имя для ребенка. Поэтому, по правилу умножения имеем $300 \cdot 299$ способов.

Аналогично вычисляется количество способов, которыми ребенку можно дать три имени. Из совокупности, которая содержит 300 имен, выбираются три имени. Этот выбор является упорядоченным, без возвращения. Поэтому имеем $300 \cdot 299 \cdot 298$ способов.

Следовательно, количество способов, которыми можно назвать ребенка, равняется $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26\,820\,600$.

Ответ. 26 820 600 способов.

1. *Сколькими способами английскому ребенку можно дать четыре имени?*

2. *Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее количество имен равняется 200, а ребенку дают не больше, чем два имени?*

3. *Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее количество имен равняется 200, а ребенку дают два или три имени?*

Проверь себя

1. Турист путешествует из города A до города D через города B и C. Из каждого города A, B, C можно добраться в следующий город пятью видами транспорта: железнодорожным, автомобильным, воздушным, речным и гужевым. Сколькими способами турист может добраться из A в D через B и C: 1) без всяких дополнительных условий; 2) если он не хочет дважды пользоваться одним и тем же видом транспорта?

А. 1) 27; 2) 125. **Б.** 1) 125; 2) 60. **В.** 1) 120; 2) 60. **Г.** 1) 60; 2) 27.

2. Имеется материал пяти разных цветов. Сколькими способами из него можно составить трехцветной полосатый флаг, если: 1) крайние полосы могут быть одного цвета; 2) все полосы разных цветов?

А. 1) 125; 2) 10. **Б.** 1) 100; 2) 27. **В.** 1) 80; 2) 60. **Г.** 1) 60; 2) 125.

3. Сколькими способами из 6 различных предметов можно выбрать по крайней мере один предмет?

А. 6^2. **Б.** $6^2 - 1$. **В.** 2^6. **Г.** $2^6 - 1$.

4. На сколько больше нужно словарей для перевода с любого из 6 языков на любой из этих 6 языков, чем для перевода с любого из 5 языков на любой из этих 5 языков?

А. На 10. **Б.** На 8. **В.** На 6. **Г.** На 5.

Реши сам

1. Во время передачи сообщений по телеграфу раньше использовали код Морзе. В этом коде буквы, цифры, знаки препинаний обозначались точками и тире. Сколько можно составить комбинаций из точек и тире в азбуке Морзе, содержащих 2 знака: 1) выбранные произвольно; 2) если эти знаки различны?

2. Азбука некоторого языка содержит 15 букв. Словом будем называть любую последовательность букв. Сколько можно составить из них: 1) пятибуквенных слов; 2) пятибуквенных слов с разными буквами?

3. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять различных монет так, чтобы ни один карман не был пустым?

4. В соревнованиях по гимнастике участвует 10 спортсменов. Трое судей должны независимо друг от друга пронумеровать их в порядке, который отображает их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым по крайней мере двое судей. В скольких вариантах будет определен победитель?

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 1) 5^2 2) 81. **2.** 1) 9^5; 2) 15 120. **3.** 1) $4\cdot 5^4$; 2) 96.

Задача 2. 1. 4. **2.** 1) 5^8; 2) 0. **3.** 1) Да; 2) нет.

Задача 3. 1. $2^4 - 1$. **2.** 15. **3.** $2^n - 1$.

Задача 4. 1. $300\cdot 299\cdot 298\cdot 297$. **2.** $200 + 200\cdot 199$. **3.** $200\cdot 199 + 200\cdot 199\cdot 198$.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Б	В	Г	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 1) 4; 2) 2. Можно воспользоваться перебором вариантов.

2. 1) 15^5; 2) 360 360. Не ошибитесь при выборе совокупности, из которой выбираются элементы.

3. $2^9 - 2$. Сначала подсчитайте, сколькими способами можно разложить в два кармана девять различных монет.

4. В 280-и. Вычислите сначала, сколькими способами трое судей могут выбрать победителя, а потом, сколькими способами они могут назвать трех разных кандидатов, и, наконец искомое количество способов.

4. Перестановки

Частным случаем задач, рассмотренных в предыдущем пункте, являются задачи, в которых требуется подсчитать количество способов, с помощью которых n различных предметов можно разместить на n местах. Такие расположения называют ***перестановками.*** Фактически в этих задачах идет речь об упорядоченном выборе всех элементов совокупности без возвращения.

Задача 1. Сколькими способами можно расставить на пятиместной полке пять различных книг?

Анализируем. Эту задачу можно решить применением правила умножения.

Решаем. Будем рассуждать так же, как и при решении предыдущих задач. На первое место можно поставить любую из пяти книг. Для любой книги, расположенной на первом месте, на второе место можно поставить любую из 4-х оставшихся книг. Следовательно, первые два места на полке можно заполнить $5 \times 4 = 20$ способами. При любом заполнении первых двух мест на полке на третье место можно поставить любую из 3-х оставшихся книг. Значит, первые три места на полке можно заполнить $5 \times 4 \times 3 = 60$ способами. И т. д. Таким образом, всего получается: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ способов.

Ответ. 120-ю.

Произведение $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ является произведением пяти первых натуральных чисел, его обычно обозначают 5! и читают «5 – факториал». И вообще, произведение первых n натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ обозначают $n!$ и читают «n – факториал». Ясно, что $2! = 1 \times 2 = 2$; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$; $4! = 24$.

1. *Сколькими способами можно заполнить на данной полке первые четыре места?*

2. *Сколькими способами можно расставить на четырёхместной полке четыре различные книги?*

3. *Сколькими способами можно расставить на семиместной полке семь* *различных книг?*

4. *Чему равно: 1) $20! \times 21$; 2) $n! \times (n + 1)$?*

5. *Чему равно: 1) $50! : 48!$; 2) $n! : (n - 1)!$?*

Так как $n! = (n - 1)! \times n$ для всех натуральных чисел $n > 1$, то, чтобы это равенство оставалось справедливым и для $n = 1$, полагают $0! = 1$.

Аналогично задаче 1 можно получить, что n различных предметов можно расположить в ряд $n(n - 1)(n - 2) \times . . . \times 2 \times 1$ различными способами, т. е. ***число перестановок из n элементов равно n!***

В задаче 1 находилось количество перестановок из нескольких различных элементов. Если среди элементов, из которых образуются перестановки, есть одинаковые, то формула для их количества принимает другой вид.

Задача 2. Сколько перестановок можно составить из букв слова: 1) «тетрадь»; 2) «перешеек»; 3) «калькулятор»?

Анализируем. Если бы в заданных словах все буквы были различны, можно было бы воспользоваться тем, что количество перестановок из n элементов равно $n!$. Но в приведенных словах есть одинаковые буквы. Этим результатом воспользоваться нельзя, так как перестановки, полученные только переменой мест одинаковых букв, на самом деле одинаковы. Все перестановки разбиваются на группы одинаковых. Остаётся подсчитать в каждом случае количество этих групп.

Решаем. 1) В слове «тетрадь» 7 букв. Если бы все они были различны, то из них можно было бы составить 7! перестановок. Однако же перестановки, которые получаются только переменой местами букв «т» и «т», на самом деле одинаковы. Таким образом, полученные 7! перестановок разбиваются на пары одинаковых. Поэтому количество различных перестановок равно $7! : 2 = 2520$.

2) В слове «перешеек» 8 букв. Если бы они были различны, то из них можно было получить 8! перестановок. Поскольку 4 буквы «е» можно переставлять 4! способами, то все 8! перестановок разбиваются на 4! групп одинаковых перестановок. Поэтому различных перестановок всего $8! : 4! = 1680$.

3) В слове «калькулятор» 11 букв, среди которых 2 пары одинаковых. Отождествляя перестановки, отличающиеся лишь перестановкой буквы “к”, но не “л”, получим 11!:2! различных перестановок. Отождествляя теперь перестановки, отличающиеся переменой мест букв “л”, получим: 11! : (2! × 2!) = 9 979 200.

Ответ. 1) 2520; 2) 1680; 3) 9 979 200.

?

1. *Сколько перестановок можно составить из букв слова «задача»?*

2. *Сколько перестановок можно составить из букв слова «мама»?*

3. *Сколько перестановок можно составить из букв слова «математика»?*

В задачах 1 и 2 требовалось найти количество перестановок из совокупности либо различных элементов, либо содержащих и одинаковые, но никаких дополнительных условий не предъявлялось. В следующей задаче будет необходимо найти количество перестановок, удовлетворяющих определённым условиям.

Задача 3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «олово» так, чтобы 3 буквы «о» шли подряд?

Анализируем. Если переставлять только буквы «о», то полученные перестановки будут одинаковыми. Чтобы найти искомое количество перестановок, можно использовать два способа. Первый из них состоит в том, что вначале находят перебором вариантов количество мест для расположения трёх букв «о» подряд. Затем для каждого из этих расположений определяется количество перестановок для остальных букв и применяется правило умножения.

Сущность второго способа состоит в том, что три буквы «о» рассматриваются как единое целое, как одна буква, и вычисляется количество перестановок из элементов, количество которых равно увеличенному на 1 количеству остальных букв.

Решаем. 1-й способ. В слове «олово» 5 букв. Три буквы «о» подряд могут занимать 1-е, 2-е, 3-е места, или 2-е, 3-е, 4-е, или 3-е, 4-е, 5-5. Всего три способа их расположения. На оставшихся двух местах две буквы «л» и «в» можно расположить 2! = 2 способами. Применив правило умножения, получим, что буквы данного слова можно переставить так, чтобы 3 буквы «о» шли подряд, $3 \cdot 2 = 6$ способами.

2-й способ. «Свяжем» три буквы «о», тогда искомое количество способов равно количеству перестановок из 3-х элементов л, в, {ооо}, т. е. $3! = 6$.

Ответ. 6-ю.

1. *Сколько мест имеется для расположения двух букв «о» подряд, если переставлять буквы слова «слово»?*

2. *Сколькими способами можно переставить буквы слова «слово» так, чтобы две буквы «о» шли подряд?*

3. *Числу перестановок из какого количества различных элементов равняется количество способов, которыми можно переставить буквы слова «слово» так, чтобы две буквы «о» шли подряд?*

Следующая задача является обобщением предыдущих. В ней речь идёт о применении формулы для вычисления количества перестановок из n элементов.

Задача 4. Сколькими способами n лиц A_1, A_2, …, A_n, которые должны выступить на собрании, можно разместить в списке ораторов, если A_1 должен выступать непосредственно перед A_2?

Анализируем. Пользуясь формулой для количества перестановок из n элементов, можно указать, сколькими способами n человек можно расположить в списке ораторов, если не ставить никаких дополнительных условий. Так как, по условию, A_1 должен выступать непосредственно перед A_2, то искомое количество способов можно найти применением правила умножения и формулой для количества перестановок из n элементов.

Решаем. Оратор A_1 в списке ораторов может занимать любое место от 1-го до $(n - 1)$-го, он не может выступать последним. Тогда при любом месте, которое занимает он в списке ораторов, для A_2 есть единственная возможность. Таким образом, по правилу умножения, A_1 и A_2 можно расположить в списке $(n - 1) \cdot 1 = (n - 1)$-м способом. Осталось расположить $n - 2$ ораторов на оставшихся $n - 2$ местах.

Применяя формулу для количества перестановок из n элементов, получим, что для любого расположения A_1 и A_2 имеется $(n-2)!$ способов для размещения в списке ораторов остальных выступающих. Следовательно, искомое количество способов равно $(n-1)\cdot(n-2)! = (n-1)!$.

Ответ. $(n-1)!$.

1. *Если первым располагать в списке ораторов A_2, то сколько мест он может занимать в этом списке?*

2. *Сколькими способами n лиц A_1, A_2, ..., A_n, которые должны выступить на собрании, можно разместить в списке ораторов, если A_1 и A_2 должны выступать друг за другом, безразлично, в каком порядке?*

3. *Сколькими способами n лиц A_1, A_2, ..., A_n, которые должны выступить на собрании, можно разместить в списке ораторов, если A_1 и A_2 не должны выступать друг за другом?*

Проверь себя

1. Сколько перестановок можно составить из букв слова «лиса»?

А. 16. **Б.** 24. **В**. 12. **Г**. 120.

2. Сколько перестановок можно составить из букв слова «деление»?

А. 5040. **Б.** 2520. **В**. 840. **Г**. 720.

3. Сколько мест имеется для расположения трёх букв «о» подряд, если переставлять буквы слова «болото»?

А. 4. **Б.** 5. **В**. 6. **Г**. 7.

4. Сколькими способами 10 лиц A_1, A_2, …, A_{10}, которые должны выступить на собрании, можно разместить в списке ораторов, если A_1, A_2, A_3 должны выступить первыми в указанном порядке?

А. $3!\cdot 7!$. **Б.** $9!$. **В**. $8!$. **Г**. $7!$.

Реши сам

1. Сколькими способами 5 человек могут разместиться в очереди в кассу?

2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр числа 31242?

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «болото» так, чтобы 3 буквы «о» шли подряд?

4. Сколькими способами группу из 8 человек можно расположить с одной стороны прямоугольного стола, на которой 8 мест, так, чтобы два определенных лица оказались: 1) сидящими рядом; 2) сидящими не рядом?

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 120-ю. **2.** 120-ю. **3.** 5040-а. **4.** 1) 21!; 2) $(n + 1)!$. **5.** 1) 2450; 2) n.

Задача 2. 1. 120. **2.** 6. **3.** 151 200.

Задача 3. 1. 3. **2.** 24. **3.** Из 4-х.

Задача 4. 1. $n - 1$. **2.** $2\cdot(n - 1)!$. **3.** $(n - 1)! \cdot(n - 2)$.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4
Б	В	А	Г

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 120-ю. Обратите внимание на то, что количество размещений 5 человек в очереди равно числу перестановок из 5 элементов.

2. 60. Искомое количество равно числу перестановок из 5 элементов, среди которых два одинаковых.

3. 24-мя. Примените один из способов, использованных при решении задачи 3.

4. 1) 2·7!; 2) 6·7!. 1) Вначале установите, сколькими способами можно выбрать места для двух определённых лиц, а затем для остальных, и примените правило умножения. 2) Примените правило дополнения.

5. Неупорядоченный выбор нескольких элементов из одного множества без возвращения и с возвращением

Как мы отмечали выше, многие комбинаторные задачи сводятся к выбору определенного количества элементов из некоторой совокупности различных элементов. Этот выбор можно осуществить с возвращением или без возвращения. На результаты выбора может влиять порядок извлечения элементов, а может и не влиять. В первом случае имеем упорядоченный выбор, во втором — неупорядоченный. Следовательно, имеем четыре типа комбинаторных задач. В п.3 рассматривались два из этих четырех типов. В этом пункте будем рассматривать комбинаторные задачи двух других типов.

Решение задач на неупорядоченный выбор без возвращения опирается на методы вычисления количества результатов упорядоченного выбора без возвращения и количества перестановок из совокупности различных элементов. В следующей задаче попробуем объяснить различие между упорядоченным и неупорядоченным выбором.

Задача 1. В классе 25 человек. В класс пришел новый учитель, который не знает учащихся и вызывает трех учащихся наугад. Сколькими способами он может это сделать, если вызывает учащихся:

1) для ответа на три различные вопроса;

2) для выполнения одной и той же письменной работы?

Анализируем. В задаче идёт речь о выборе трёх элементов (учащихся) из 25. Выбор осуществляется без возвращения: тот, кто будет отвечать на первый вопрос, уже не будет отвечать на второй; для выполнения одной и той же письменной работы вызываются трое различных учащихся. В задании 1) идет речь об упорядоченном выборе: если учащихся закодируем номерами 1, 2, 3,..., 25, то результаты выбора имеют, например, вид: (1, 2, 3), (5, 7, 23), и т. д., вообще (a_1, a_2, a_3), где a_1, a_2, a_3 принимают значения от 1 до 25, причем a_1, a_2, a_3 все различные. Запись (1, 2, 3) означает, что на первый вопрос будет отвечать учащийся №1, на второй — №2, на третий — №3. Выбор (2, 1, 3) отличается от предыдущего, потому что теперь на первый вопрос будет отвечать №2, а на второй — № 1. В задании 2) и набор (1, 2, 3), и набор (2, 1, 3) означают один и тот же результат выбора учащихся: ведь всем назначена одна и та же письменная работа. В этом задании речь идёт о ***неупорядоченном выборе без возвращения***.

Решаем. 1) Используем правило умножения. Для ответа на первый вопрос учащегося можно выбрать 25 способами; на роль отвечающего на второй вопрос могут претендовать 24 учащихся, для ответа на третий можно вызвать каждого из 23 оставшихся учащихся. Всего, по правилу умножения, имеем $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ способов.

2) Эта задача внешне похожа на предыдущую. Казалось бы, тоже можно было бы рассуждать так: первого ученика можно выбрать 25 способами, при любом способе его выбора второго можно выбрать 24 способами, третьего — 23 способами. Однако при этом возникает вопрос: сколько раз мы учли каждый состав вызванных учащихся. Очевидно столько, сколько перестановок можно составить из 3-х элементов, то есть $3! = 6$. Чтобы исключить одинаковые способы, нужно произведение $25 \cdot 24 \cdot 23$ разделить на 3! Получим $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 2300$.

Ответ. 1) 13 800; 2) 2 300.

1. *Является ли набор (1, 2, 1) результатом выбора трех учащихся?*

2. *Сколькими способами учитель может вызывать наугад двух учащихся для ответа на два различных вопроса?*

3. *Сколькими способами учитель может вызывать наугад двух учащихся для выполнения одной и той же письменной работы?*

4. *Какими были бы ответы на вопросы задачи, если бы в классе было 15 учащихся?*

При решении подобных задач целесообразно научиться определять, зависят ли результаты выбора от порядка расположения элементов или нет. Для этого можно закодировать все элементы, рассмотреть результаты выбора, которые состоят из одних и тех же элементов, но отличаются порядком расположения элементов, и выяснить, описывают они один и тот же результат выбора или разные последствия выбора. В первом случае следует количество способов выбора, полученных по правилу умножения, разделить на количество перестановок из k элементов, где k — количество выбираемых элементов.

Проиллюстрируем этот вывод при решении следующей задачи.

Задача 2. В спортивном клубе 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать команду из 4-х лиц для участия: 1) в беге на 100 м; 2) в эстафете 4×100 м?

Анализируем. В задаче идет речь о выборе без возвращения четырех лиц из 20. Обозначим членов спортивного клуба символами a_1, a_2, …, a_{20}. Согласно приведенным рекомендациям, рассмотрим результаты выбора, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком расположения элементов, например, (a_1, a_2, a_3, a_4) и (a_1, a_4, a_2, a_3). Выясним, описывают они один и тот же результат выбора или различные исходы выбора. Понятно, что идет речь об одном и том же составе участников бега на 100 м, но о различных участниках эстафеты 4×100 м: в первом наборе спортсмен 2 бежит на 2-ом этапе, а во втором наборе — на третьем. Поэтому в задании 1) нужно подсчитать количество результатов неупорядоченного выбора 4-х элементов из 20, а в задании 2) — упорядоченного.

Решаем. Первое лицо можно выбрать 20-ю способами. Для любого выбранного лица второго спортсмена можно выбрать 19-ю способами. По правилу умножения имеем, что двух спортсменов можно выбрать $20 \cdot 19 = 380$ способами. Продолжая и т. д., получим, что четырех спортсменов можно выбрать $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ способами.

1) Так как выбор неупорядоченный, то произведение $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ мы должны разделить на 4!. Искомое количество способов будет равняться

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = 4845.$$

2) Поскольку выбор упорядоченный, то искомое количество способов равняется 20·19·18·17 = 116 280.

Ответ. 1) 4 845; 2) 116 280.

1. *Во сколько раз количество способов выбора двух спортсменов для участия в беге на 100 м и 200 м больше количества способов выбора двух спортсменов для участия в беге на 100 м?*

2. *Сколькими способами можно выбрать из 20 спортсменов трех участников бега на 200 м?*

3. *Сколькими способами можно выбрать из 20 спортсменов трех участников эстафеты 100 м + 200 м + 400 м?*

Среди указанных ранее четырех типов выбора определенного количества элементов из совокупности различных элементов нерассмотренным остался один, а именно неупорядоченный выбор с возвращением. Вычисление количества способов такого выбора сводится к нахождению количества результатов неупорядоченного выбора без возвращения.

Задача 3. В кондитерском кафе было 4 вида пирожных: наполеоны, эклеры, слоеные и песочные. Готовясь к встрече подруги, Татьяна зашла в кафе, чтобы купить семь пирожных. Сколькими способами она может это сделать?

Анализируем. Представим себе, как происходит выбор пирожных. Сначала Татьяна выбрала пирожное определенного вида. Следующее пирожное она может выбирать или из полного набора, или из всех видов, кроме уже выбранного и т. д. Имеем выбор с возвращением: выбрали первый элемент (вид пирожных), зафиксировали, возвратили в данный набор (не пирожное, а лишь название его вида) и следующий выбор осуществляем из всей совокупности.

Этот выбор является неупорядоченным, потому что безразлично, в каком порядке Татьяна выбирала пирожные, ее покупка характеризуется количеством приобретенных пирожных каждого вида, а ни в коем случае не порядком выбора. Следовательно, имеем неупорядоченный выбор с возвращением семи элементов из совокупности, содержащей элементы четырех типов.

Решаем. Рассмотрим метод вычисления количества вариантов такого выбора. Изобразим семь пирожных, которые Татьяна намеревается купить, в виде семи точек. Между ними поставим три перегородки (на одну меньше, чем видов пирожных).

..|.|...|.;   ....|||...; |.......||

На рис. приведены три варианта покупки семи пирожных. Охарактеризуем их содержание. Левее первой перегородки отмечены пирожные первого вида (наполеоны), между первой и второй перегородками — второго вида (эклеры), между второй и третьей — третьего вида (слоёные), правее третьей — четвертого вида (песочные).

Укажем приведенные варианты покупки:

1) два наполеона, один эклер, три слоёных и одно песочное;
2) четыре наполеона, три песочных;
3) семь эклеров.

Вычислим, сколькими способами Татьяна может осуществить запланированную покупку. Количество способов выбора семи пирожных из совокупности пирожных четырех видов совпадает с количеством способов выбора из десяти мест (7 точек + 3 перегородки) трех мест для перегородок. Поскольку от изменения местами перегородок между собой результат не изменяется, то это количество способов равняется: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$.

Ответ. 120.

1. *Как изобразить с помощью точек и перегородок такую покупку Татьяны: два наполеона, два эклера, три слоёных и два песочных пирожных?*

2. *Сколькими способами Татьяна может купить 5 пирожных?*

3. *Сколькими способами Татьяна может купить: 1) 4 пирожных; 2) 3 пирожных, если будет покупать пирожные различных видов?*

4. *Каким будет ответ в задаче, если в кафе будут пирожные трех видов?*

Некоторые задачи еще следует привести к рассмотренной схеме, то есть к неупорядоченному выбору с возвращением определенного количества элементов из совокупности, содержащей элементы заданного количества типов, то есть построить математическую модель рассматриваемой ситуации. После этого можно применить описанный метод.

Задача 4. Сколькими способами из десяти экземпляров одного и того же романа, десяти экземпляров одной и той же приключенческой книги и десяти экземпляров одного и того же томика стихов можно выбрать восемь книг?

Анализируем. Можно считать, что есть совокупность элементов трех типов: романы, приключенческие книги и томики стихов. Из этой совокупности выбираем восемь элементов (восемь книг). Этот выбор является выбором с возвращением (среди выбранных книг обязательно будут книги одного и того же типа). Выбор является неупорядоченным, потому что безразлично, в каком порядке выбирались книги, выбор характеризуется лишь количеством книг каждого типа. Следовательно, задача сведена к тому же виду, что и предыдущая.

Решаем. Поставим восемь точек (столько, сколько выбираем книг) и две перегородки (на одну меньше, чем типов книг). Количество различных способов выбора восьми книг равняется количеству способов выбора из десяти мест (восемь точек + 2 перегородки) двух мест для перегородок, то есть $\frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$.

Ответ. 45.

1. *Сколькими способами из книг, о которых идет речь в задаче, можно выбрать две книги?*

2. *Если к книгам, о которых идет речь в задаче, прибавить еще 10 книг на историческую тематику, сколькими способами из них можно выбрать во-*

семь книг?

3. *Изменится ли ответ в задаче, если каждого типа книг будет не 10, а 20?*

Определенный интерес представляют задачи рассмотренного вида, где нужно, чтобы среди выбранных элементов было определенное количество элементов какого-то вида.

Задача 5. В большом количестве имеются монеты стоимостью 50, 25, 10, 5, 2 и 1 зедов (зед — условная денежная единица). Сколькими способами из них можно выбрать:

1) четыре монеты;

2) четыре монеты так, чтобы среди них обязательно были монеты стоимостью 50 и 25 зедов?

Анализируем. Задание 1) аналогично предыдущим. Оно решается методом точек и перегородок. При выполнении задания 2) существенным является то, что монеты каждого типа считаются одинаковыми и выбрать любое количество монет из монет любого типа можно единственным образом.

Решаем. 1) Поставим четыре точки (столько, сколько должны выбрать монет) и пять перегородок (на одну меньше, чем количество видов монет). Количество различных способов выбора четырех монет из шести равняется количеству способов выбора из 9 мест (четыре точки + 5 перегородок) пяти мест для перегородок, то есть $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$.

2) Чтобы среди вынутых монет были монеты стоимостью 50 и 25 зедов, сначала возьмем по одной монете отмеченных стоимостей. Тем самым две монеты уже будут выбраны. Это можно сделать единственным способом. Остальные 4 – 2 = 2 монеты можно выбирать из всех шести типов монет. Количество способов их выбора равняется количеству неупорядоченных выборок с возвращением из семи элементов по пять, или количеству способов выбора из 7 мест (две точки + пять

перегородок) мест для 5-и перегородок, то есть $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21$.

Заметим, что количество способов выбора из 9 мест пяти мест для перегородок равняется количеству способов выбора из 9 мест 9 – 5 = 4 мест для перегородок, или $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126$. Точно так же количество способов выбора из 7 мест 5 мест для перегородок равняется количеству способов выбора из 7 мест 7 – 5 = 2 мест для перегородок, или $\frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$.

Ответ. 1) 126; 2) 21.

1. *Сколькими способами из указанных в условии монет можно выбрать три монеты?*

2. *Сколькими способами из указанных в условии монет можно выбрать три монеты так, чтобы среди них были монеты стоимостью 50 зедов и 25 зедов?*

3. *Сколькими способами из указанных в условии монет можно выбрать восемь монет?*

Проверь себя

1. В первенстве страны по футболу участвует 16 команд. Каждая команда играет с каждой из остальных по одной игре. Сколько всех игр будет сыграно?

А. 40. **Б.** 60. **В.** 120. **Г.** 240.

2. Во сколько раз количество способов выбора трех учащихся из некоторой группы для участия в школьной конференции меньше количества способов выбора трех учеников для выполнения обязанностей старосты, его заместителя и казначея из той же группы?

А. Не хватает данных для ответа. **Б.** В 2 раза. **В.** В 3 раза. **Г.** В 6 раз.

3. Сколькими способами можно выбрать 2 карты из 36, различая их только по цвету?

А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 6.

4. Сколькими способами можно выбрать 5 цветков для букета, если есть цветы трех видов: розы, астры и ромашки, причем каждый цветок имеется в большом количестве?

А. 21. **Б.** 30. **В.** 35. **Г.** 42.

5. Сколькими способами можно выбрать 5 цветков для букета, если имеются цветы трех видов: розы, астры и ромашки, так, чтобы в букете было, по крайней мере, по одному цветку каждого вида? Каждый цветок имеется в большом количестве.

А. 4. **Б.** 6. **В.** 9. **Г.** 12.

Реши сам

1. В дежурстве по школе участвуют 16 учащихся. Жребием определяются обязанности каждого. Сколькими способами могут быть определены три учащихся, которые дежурят на улице около школы, если их обязанности: 1) не различаются; 2) различаются?

2. Рассматривается спортивная лотерея "6 из 49". Сколькими способами можно отобрать из 49 видов спорта 6 видов спорта?

3. Сколькими способами можно выбрать 9 карт из 36, различая их только по масти?

4. Сколькими способами можно выбрать 11 цветков для букета, если имеются цветы четырех видов: розы, астры, ромашки и хризантемы, причем каждый цветок имеется в большом количестве?

5. Сколькими способами можно выбрать 11 цветков для букета, если имеются цветы четырех видов: розы, астры, ромашки и хризантемы, так, чтобы в букете было по крайней мере по одному цветку каждого вида? Каждый цветок имеется в большом количестве.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. Нет. **2.** 600. **3.** 300. **4.** 1) 2730; 2) 455.

Задача 2. 1. В 2 раза. **2.** 1140. **3.** 6840.

Задача 3. 1. . . | . . | . . . | . . **2.** 56. **3.** 1) 1; 2) 4. **4.** 36.

Задача 4. 1. 6. **2.** 165. **3.** Нет.

Задача 5. 1. 56. **2.** 6. **3.** 1287.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5
В	Г	Б	В	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 1) 560; 2) 3360. Выясните, в каком случае мы имеем упорядоченный выбор, а в каком — неупорядоченный.

2. 13 983 816. Выясните, существенным ли является порядок появления выигрышных номеров.

3. 220. Воспользуйтесь методом точек и перегородок.

4. 364. Обратите внимание на то, что идет речь о неупорядоченном выборе с возвращением 11 элементов из четырех элементов.

5. 120. Выберите сначала по одному цветку каждого вида, потом останется выбрать 7 цветков из цветов четырех видов.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Задания для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	10 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	15 задач	10 задач
«отлично»	Решено не менее	20 задач	16 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Многие его задания аналогичны заданиям «Проверь себя», к которым приведены ответы. Пользуйтесь этим.

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д».

1. Сколькими способами коллектив из четырёх человек может выбрать из своего состава руководителя и казначея?

А. 12-ю. **Б.** 8-ю. **В.** 6-ю. **Г.** 4-мя.

2. Четыре друга обменялись сувенирами. Сколько для этого понадобилось сувениров?

А. 4. **Б.** 6. **В.** 8. **Г.** 12.

3. Четыре друга обменялись при встрече рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

А. 4. **Б.** 6. **В.** 8. **Г.** 12.

4. Сколькими способами 5 одинаковых конфет можно разделить между двумя детьми А и В так, чтобы А досталось две конфеты?

А. 20-ю. **Б**. 10-ю. **В**. 2-мя. **Г.** 1-м.

5. Сколькими способами 4 различные конфеты можно разделить между двумя детьми так, чтобы одному достались три конфеты, а другому — одна?

А. 8-ю. **Б**. 4-мя. **В**. 2-мя. **Г.** 1-м.

6. Сколькими способами 6 одинаковых конфет можно разложить: 1) на 3 кучки; 2) на 3 кучки так, чтобы в каждой кучке была хотя бы одна конфета?

А. 1) 7-ю; 2) 2-мя. **Б**. 1) 6-ю; 2) 3-мя. **В**. 1) 7-ю; 2) 3-мя. **Г.** 1) 6-ю; 2) 2-мя.

7. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?

А. 49-ю. **Б.** 81-м **В**. 16-ю. **Г**. 63-мя.

8. В магазине "Всё для чая" продаётся 5 разных чашек, 3 разных блюдца и 4 разные чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

А. 125-ю. **Б.** 32-мя **В**. 12-ю **Г**. 60-ю.

9. На железной дороге 10 станций. На каждом билете печатаются названия станций отправления и прибытия. Сколько различных билетов можно напечатать?

А. 50. **Б.** 100. **В.** 90. **Г.** 45.

10. Сколько имеется двузначных чисел, в которых цифры имеют разную четность?

А. 20. **Б.** 25. **В.** 45. **Г.** 50.

11. В урне 20 пронумерованных шаров, из которых 7 белых, 8 красных и 5 синих. Из неё один за другим с возвращением извлекают два шара. Сколькими способами из урны можно извлечь одноцветные шары?

А. 131-м. **Б.** 138-ю. **В.** 280-ю. **Г.** 330-ю.

12. В спортивной секции 15 участников. Все они занимаются прыжками в длину или в высоту. 8 человек занимаются прыжками в длину, 10 — прыжками в высоту. Сколько спортсменов занимаются обоими видами прыжков?

А. 4. **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** 1.

13. Сколькими способами из 5 учащихся можно выбрать группу учащихся для работы? В группу могут входить 1, 2, ..., 5 учащихся.

А. 15-ю. **Б.** 16-ю. **В.** 31-м. **Г.** 32-мя.

14. Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если: 1) каждая из них может повторяться несколько раз; 2) все они состоят из различных цифр?

А. 1) 1296; 2) 180. **Б.** 1) 216; 2) 360. **В.** 1) 216; 2) 180. **Г.** 1) 1296; 2) 360.

15. Сколькими способами можно направить 3 срочных письма, если для передачи писем можно послать четырех курьеров и: 1) каждое письмо можно дать любому из курьеров; 2) каждому курьеру можно дать не более одного письма?

А. 1) 64; 2) 24. **Б.** 1) 81; 2) 24. **В.** 1) 81; 2) 12. **Г.** 1) 64; 2) 12.

16. Три юноши и четыре девушки выбирают место работы. В городе есть три фирмы, куда принимают только мужчин, одна фирма, куда принимают только женщин, и две фирмы, в которых нужны и мужчины, и женщины. Сколькими способами они могут распределиться между этими фирмами?

А. 206. **Б.** 307. **В.** 10125. **Г.** 15552.

17. На сколько больше существует способов рассадить 4 учащихся на 10 местах, чем 4 учащихся на 9 местах?

А. На 2016. **Б.** На 3439. **В.** На 786432. **Г.** На 4.

18. Вратарь футбольной команды десять раз вбрасывает мяч в игру. Тренер советовал ему подавать мяч каждый раз другому игроку. Сколько возможных вариантов может выбрать вратарь? Футбольная команда состоит из 11 игроков.

А. 11!. **Б.** 10!. **В.** 9!. **Г.** $\frac{10!}{2}$.

19. Сколько перестановок можно составить из букв слова «молоко»?

А. 720. **Б.** 360. **В.** 240. **Г.** 120.

20. Числу перестановок из какого количества различных элементов равняется количество способов, которыми можно переставить буквы слова «молоток» так, чтобы три буквы «о» шли подряд?

А. Из 5. **Б.** Из 6. **В.** Из 7. **Г.** Из 8.

21. Сколькими способами 5 человек могут разместиться в очереди в кассу так, чтобы В оказался стоящим за А и между ними никто не стоял?

А. 120. **Б.** 24. **В**. 48. **Г**. 60.

22. Сколькими способами четырех туристов можно разделить на две группы по два туриста в каждой для поиска коллеги, который заблудился?

А. 8. **Б.** 6. **В.** 4. **Г.** 3.

23. Сколькими способами шесть туристов можно разделить на три группы по два туриста в каждой для поиска коллеги, который заблудился?

А. 15. **Б.** 30. **В.** 45. **Г.** 90.

24. Сколькими способами 6 одинаковых шаров могут быть разложены в 4 пакета?

А. 84. **Б.** 126. **В.** 252. **Г.** 504.

25. Имеются монеты достоинством 1, 2, 5, 10, 25, 50 коп. в большом количестве. Сколькими способами из них можно выбрать 2 монеты?

А. 36 **Б**. 30 **В**. 21 **Г.** 15

26. Сколькими способами 12 экземпляров одной книги можно разделить между тремя классами так, чтобы каждому классу достались по крайней мере три книги?

А. 56. **Б.** 28. **В.** 10. **Г.** 1.

Основное задание

1. Имеется 4 вида конвертов без марок и три вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

2. Фирме надо послать три срочных письма. Сколькими способами это можно сделать, если для этой цели есть четыре курьера, но каждому курьеру можно дать не более одного письма?

3. В розыгрыше первенства школы по футболу принимает участие 5 команд. Сколько есть вариантов для прогнозирования:

1) первых двух призёров;

2) команды, которая займёт первое место и команды, которая займёт второе место?

4. Сколькими способами 5 одинаковых конфет можно разделить между двумя детьми так, чтобы одному достались две конфеты, а другому три?

5. Сколькими способами 4 различные конфеты можно разделить между тремя детьми А,Б и В так, чтобы А и Б достались досталось по одной конфете, а В — две?

6. Сколькими способами три конфеты можно разложить на 3 кучки, если конфеты: 1) одинаковые; 2) различные?

7. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих языков?

8. Сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при условии, что любые стоящие рядом буквы различны?

9. Сколькими способами на общем собрании футболистов футбольного клуба «Победа», на котором присутствовало 25 игроков, можно избрать капитанов основного и дублирующего составов и их заместителей, если любой футболист может претендовать на эту должность?

10. Игральный кубик подбрасывается дважды. В скольких случаях сумма выпавших очков не превышает 4?

11. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько книг? (Стопка может состоять и из одной книги.)

12. В колледже студенты изучают математику или экономику. 200 студентов изучают математику, 150 — экономику. Сколько студентов в колледже, если:

1) 20 студентов изучают оба предмета;

2) ни один из студентов-математиков не изучает экономику;

3) каждый студент-экономист изучает математику?

13. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

14. Имеется выпуклый шестиугольник. Сколько имеется направленных отрезков, начало и конец которых совпадают с его вершинами?

15. В некотором небольшом государстве автомобильные номера состоят из одной цифры, или из двух, трех, четырех цифр. Найдите количество таких номеров.

16. Есть 3 кресла и 4 стула. Сколькими способами можно выбрать из них несколько предметов для сидения так, чтобы среди выбранных были предметы обоих видов?

17. На книжной полке стоят 5 книг-детективов, 4 книги на приключенческую тематику и три книги исторического характера. Сколько существует вариантов для выбора нескольких книг так, чтобы среди выбранных книг были книги всех отмеченных видов?

18.Сколько перестановок можно составить из букв слова “линейка”?

19. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9-ти дней подряд она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

20. Сколькими способами можно переставить буквы слова «колобок» так, чтобы 3 буквы «о» шли подряд?

21. Сколькими способами на полке можно расставить 20 книг, среди которых трехтомник А. С. Пушкина, так, чтобы:

1) эти тома стояли рядом в порядке возрастания их номеров;

2) эти тома стояли рядом?

22. Сколькими способами 12 рабочих можно разбить на 3 бригады по 4 человека в каждой? Бригады выполняют одну и ту же работу.

23. Сколькими способами 12 рабочих можно разбить на 3 бригады по 4 человека в каждой? Бригады выполняют разные работы.

24. Сколькими способами 6 одинаковых карандашей можно распределить между тремя детьми?

25. Сколькими способами можно выбрать 12 марок для коллекции, если имеются марки четырех видов с изображением: животных, рыб, птиц и насекомых, причем каждый вид марок имеется в большом количестве?

26. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить в 5 разных пакетах, если ни один из пакет не должен быть пустым?

Указания к задачам основного задания

1. Введите обозначения для конвертов и марок, каждый способ выбора конверта с маркой состоять из пары введенных обозначений.

2. Можно воспользоваться деревом возможных вариантов.

3. Можно воспользоваться методом точек и отрезков

4. Выпишите все способы распределения 5 одинаковых конфет между двумя детьми и выберите из них искомые.

5. Введите обозначения для конфет, воспользуйтесь методом перебора, можно воспользоваться таблицей..

6. Можно вначале решить эту задачу для одинаковых конфет, а потом из каждого способа разложения одинаковых конфет получить столько способов, сколько есть вариантов выбора соответствующего количества конфет из 4-х различных.

7. Обратите внимание на то, что каждый словарь переводит с одного языка на любой из остальных среди перечисленных.

8. Обратите внимание на то, что только рядом стоящие буквы должны быть различны, а, например, первая и третья буквы могут быть и одинаковыми.

9. Воспользуйтесь комбинаторным правилом умножения.

10. Учтите, что сумма очков может равняться 2, или 3, или 4. Воспользуйтесь комбинаторным правилом сложения.

11. Всевозможные выкладывания 5 книг в стопку можно разбить на 5 классов: стопки из одной книги, из двух книг, из трёх книг, из четырёх книг, из пяти книг.

12. Воспользуйтесь общим правилом сложения.

13.Воспользуйтесь правилом дополнения.

14. Обратите внимание на то, что направленные отрезки образуют упорядоченную выборку без возвращения.

15. Обратите внимание на то, что автомобильные номера из двух, трех, четырех цифр представляют собой упорядоченные выборки с возвращением из 10 эдементов.

16. Учитывая, что, например, кресло может либо войти, либо не войти в число выбранных, вычислите сначала количество способов выбора кресел. Среди этих способов подсчитайте количество таких, при которых среди нескольких выбранных предметов будет по крайней мере одно кресло. Для этого воспользуйтесь правилом дополнения. Так же рассмотрите стулья. Далее воспользуйтесь правилом умножения.

17. Примите во внимание то, что выбор детективов является упорядоченным выбором с возвращением из двух эдементов («войдёт», «не войдёт») по 5 (числу детективов).

18. Обратите внимание на то, что все буквы в данном слове различны.

19. Задание равносильно нахождению количества перестановок из совокупности 9 элементов, состоящей из трёх групп одинаковых элементов, в которых соответственно 2, 3, 4 элемента.

20. Примените один из способов, использованных при решении задачи 3 в пункте 4 «Перестановки».

21. Вначале установите, сколькими способами можно выбрать места для трёхтомника, а затем для остальных книг, и примените правило умножения.

22. В задаче идет речь о разбиении совокупности различных элементов на группы, которые не различаются между собой.

23. В отличие от предыдущей задачи порядок групп является существенным.

24. Воспользуйтесь методом точек и перегородок.

25. Обратите внимание на то, что нужно выбрать 12 элементов из четырёх видов.

26. Сначала можно положить в каждый пакет по одной монете, а потом разложить 7 монет в 5 пакетах.

Дополнительное задание

1. У одного ученика 5 книг по математике, у другого — 4 детектива. Сколькими способами можно обменять: 1) одну книгу первого ученика на одну книгу другого; 2) две книги первого ученика на две книгу другого?

2. В клетке сидят мартышки. Служитель зоопарка должен давать каждой из них по два разных плода. Капризные мартышки не любят получать одинаковые наборы. У служителя есть только бананы, яблоки, груши, киви, персики и хурма. Сколько мартышек он может угостить?

3. В клетке сидят мартышки. Служитель зоопарка должен давать каждой из них по три разных плода. Капризные мартышки не любят получать одинаковые наборы. У служителя есть только бананы, яблоки, груши и персики. Хватит ли у него плодов, чтобы угостить 25 мартышек?

4. Сколькими способами 5 одинаковых предметов можно разместить по 3-м различным ящикам?

5. Сколькими способами 6 одинаковых предметов можно разместить по 4-м различным ящикам так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет?

6. Сколькими способами 6 одинаковых предметов можно разместить ао 4-м одинаковым ящикам?

7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи, чтобы они не били друг друга?

8. Сколькими способами из колоды из 36 карт можно вынуть четыре карты, чтобы они были разных мастей и среди них не было карт с одинаковым названием?

9. Известно, что собрание из некоторого количества учащихся может выбрать двух человек для обращения к директору школы 21-м способом. Сколько учащихся участвовало в этом собрании?

10. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

11. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?

12. Имеется 2 кресла, 4 стула и 3 табуретки. Сколькими способами можно выбрать из них несколько предметов для сидения так, чтобы среди выбранных были предметы всех трех видов?

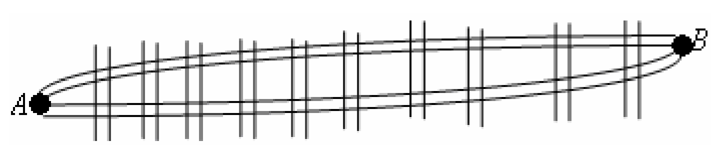
13. Сколько существует людей с разным набором зубов, если у каждого есть по крайней мере один зуб? Наибольшее количество зубов у человека равняется 32.

14. Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материал шести различных цветов?

15. В прошлом была распространена лотерея «Спортпрогноз». В этой лотерее нужно было предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча — победа одной из команд либо ничья; счёт роли не играл. Сколькими способами можно заполнить один вариант в этой лотерее?

16. Из букв слова "учебник" образуются слова из четырех букв (то есть произвольные последовательности четырех букв). Сколько можно образовать слов таких, которые содержат только гласные буквы или только согласные буквы?

17. Из города A в город B ведут два шоссе, которые соединяются 10 про-



селочными дорогами (см. рис.). Сколькими способами можно проехать из A в B так, чтобы: 1) дорога не пересекала
себя; 2) выехать из A разными шоссе и дорога не пересекала себя?

18. Найдите сумму четырехзначных чисел, которые получают всевозможными перестановками цифр 1, 2, 3, 4.

19. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

20. Сколько слов можно образовать из букв слова «биссектриса»?

21. Сколькими способами n лиц $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которые должны выступить на собраниях, можно разместить в списке ораторов, если A_2 не должен выступать до того, как выступит A_1?

22. Рассматривается спортивная лотерея “5 из 36”. Сколькими способами можно отобрать из 36 видов спорта:

1) 5 видов спорта;

2) 5 видов спорта так, чтобы все они были выигрышными (таких 5);

3) 5 видов спорта так, чтобы среди них не было ни одного выигрышного;

4) 5 видов спорта так, чтобы среди них было ровно 3 выигрышных;

5) 5 видов спорта так, чтобы среди них было не менее 3-х выигрышных?

23. Сколькими способами можно распределить $3n$ различных предметов между тремя людьми так, чтобы каждый получил n предметов?

24. Сколькими способами можно выбрать 9 карт из 36, различая их только по масти?

25. Сколькими способами 4 чёрных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных пакетов (некоторые пакеты могут бать пустыми)?

26. Сколько решений имеет уравнение: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 9$:

1) в целых неотрицательных числах;

2) в целых положительных числах?

Указания к задачам дополнительного задания

1. 1) Можно воспользоваться методом перебора закодированных элементов. 2) Воспользоваться комбинаторным правилом умножения.

2. Можно воспользоваться методом точек и отрезков.

3. Можно воспользоваться деревом возможных вариантов.

4. Можно воспользоваться таблицей.

5. Можно воспользоваться таблицей.

6. Можно воспользоваться таблицей.

7. Воспользуйтесь комбинаторным правилом умножения.

8. Воспользуйтесь комбинаторным правилом умножения нескольких элементов.

9. Выразите количество способов выбора двух учащихся через количество участников собрания.

10. Все способы расстановки белого и чёрного королей на шахматной доске, удовлетворяющие условию, можно разбить на 3 класса: один из королей стоит в одной из 4-х угловых клеток, или на одной из 4-х крайних горизонталей и вертикалей, исключая 4 угловые клетки, или в клетке, находящейся вне крайних горизонталей и вертикалей.

11. Примените правило дополнения.

12. Вычислите сначала количество способов выбора кресел и среди них таких, при которых среди нескольких выбранных предметов для сидения будет по крайней мере одно кресло. Так же рассмотрите стулья и табуретки. Дальше воспользуйтесь правилом умножения.

13.Можно каждый набор зубов представить в виде последовательности нулей и единиц (нуль означает, что на данном месте нет зуба, и единица, что есть). Вычислите количество таких последовательностей.

14.Не забудьте, что три выбранных цвета материала могут занимать различ ные места на полотнище флага.

15. Обратите внимание на то, что выбор итогов матчей является упорядоченным выбором с возвращением.

16. Вычислите, пользуясь правилом умножения, количество слов, которые содержат гласные буквы, и количество слов, которые содержат лишь согласные буквы.

17.Обратите внимание на то, что: 1) в 11 точках пути есть выбор между двумя возможностями; 2) выбор в начальной точке уже сделан.

18. Обратите внимание на то, что каждая цифра появляется в каждом разряде 6 раз. Далее вычислите сумму цифр в каждом разряде.

19. Задание равносильно нахождению количества перестановок из совокупности 8 элементов, в которой три группы одинаковых элементов, каждая из которых содержит 2 элемента.

20. См. указание к заданию 19.

21.. Обратите внимание на то, что в каждой паре перестановок, которые образуются друг из друга изменением мест A_1 и A_2, лишь одна удовлетворяет требованию .

22. 1) Воспользуйтесь тем, что результат выбора является неупорядоченной выборкой без возвращения.

23. Обратите внимание на то, что результаты выделения предметов каждому лицу являются неупорядоченными выборками без возвращения.

24. Можно разложить колоду на четыре части по 9 карт в каждой, потом вынимать из каждой части по одной карте так, чтобы среди них не было карт с одинаковым названием.

25. Найдите, сколькими способами могут быть разложены в 6 пакетов шары каждого цвета, и примените правило умножения.

26. Решение задания 1) сводится к нахождению количества способов распределения девяти точек (9 — правая часть уравнения) по четырем ячейкам (4 неизвестных). Задание 2) отличается от предыдущего тем, что ни одно из не известных не может принимать значение, равное 0.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Комбинаторика без формул и ее применение

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие