Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Бродский Я. С., Павлов А. Л.

Задачи на растворы, смеси и сплавы

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8-9 классов

Донецк 2024

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Б 881

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»(протокол № 5 от 21 января 2021 г.)

Бродский Я. С., Павлов А. Л. Задачи на растворы, смеси и сплавы. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 8 – 9 классов. — 58 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 8-9 классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике «Реальная математика», утвержденной Ученым Советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (протокол №4 05.05.2017). Ее цель — развитие умений и навыков у обучающихся применять математику для решения жизненных проблем, формирование умения учиться, самостоятельно приобретать знания.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, основу которого составляет система задач. Для каждой задачи приводится анализ и решение. Анализ предназначен для оказания помощи в поиске метода решения задачи. Для контроля за усвоением приемов решения задач предлагаются вопросы после каждой задачи, задания в конце блока. Вторая часть пособия содержит систему заданий для проверки овладения обучающимися действиями и приёмами, представленными в первой части

Пособие составлено на основе заданий конкурсов «Золотой ключик», «Золотой сундучок». Его можно использовать для подготовки к участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Пособие адресовано обучающимся 8-9 классов. Оно может быть использовано учителями математики для организации внеурочного обучения.

Содержание

Дорогой друг!

Умение применять математику является одним из важнейших умений, ради которых математику изучают с первого до последнего класса. Математика нужна человеку не только в его работе, но и в обычной жизни, быту. Научиться применять математику для решения жизненных проблем не просто, но можно.

Применение математики для различных задач можно схематически представить в виде трёх этапов.

1 этап. Перевод задачи на язык математики (построение математической модели).

2 этап. Решение математической задачи.

3 этап. Осмысление полученного решения, его применение для решения исходной задачи.

Метод решения задач по этой схеме называют ***математическим моделированием***. Развитие навыков математического моделирования и является главной целью настоящего пособия. Оно посвящено задачам, широко применяемым в практической деятельности, в жизненных ситуациях, в других дисциплинах, в частности в химии.

Пособие состоит из двух частей. В первой части представлен материал для обучения, а во второй — задания для проверки овладения материалом первой части. Они названы ***контрольным заданием***. Конечно, контрольное задание можно выполнять и не прорабатывая первую часть пособия, но, во-первых, это будет значительно труднее, и, во-вторых, пользы от такой работы будет значительно меньше.

Первая часть пособия состоит из нескольких блоков, содержащих:

1) краткое напоминание необходимого теоретического материала, если он изучался, или изложение пока незнакомого материала, необходимого для понимания приведенных решений задач и решения предложенных задач;

2) решения задач, сопровождаемые заданиями для осмысления этих решений, применения рассмотренных методов к решению других задач (в тек сте эти задания отмечены знаком **?**);

3) подразделы «Готовимся к решению задач», «Проверь себя», «Реши сам».

Подраздел «Готовимся к решению задач» предназначен для восстановления объема знаний и умений, необходимого для овладения содержанием блока.

Подраздел «Проверь себя» состоит из заданий с выбором ответов, а «Реши сам» — из заданий, требующих не только указывать ответ, но и приводить их решения. Оба подраздела предназначены для самостоятельной проверки усвоения идей и методов, представленных в решённых задачах.

Изучать первую часть пособия нужно с ручкой в руке. Это означает, что её нужно не просто читать, а воспроизводить все рассуждения, преобразования, вычисления, то есть разбираться в решениях и восстанавливать все этапы решения задач.

Контрольное задание состоит из:

- ***контрольного теста***, задания которого подобны заданиям «Проверь себя»;
- ***основного задания***, состоящего из задач, подобных решённым в пособии и тем, которые представлены в подразделе «Реши сам»;
- ***дополнительного задания***, содержащего более трудные по сравнению с основным заданием задачи.

Во всех составляющих контрольного задания задачи, соответствующие разным блокам, отделяются друг от друга знаком

В конце пособия приведены задания для исследования, предназначенные для тех, кто любит думать, искать решения новых задач, экспериментировать, другими словами, исследовать. Эта часть не входит в контрольное задание. Надеемся, что работа над пособием и выполнение контрольного задания будут приятными и интересными для всех, кто любит математику и хотел бы научиться её применять для решения жизненных задач.

Желаем успехов!

Рекомендации для обучающихся

Работа над первой частью пособия состоит, в основном, из освоения идей, методов, используемых в приведенных решениях типовых задач, самостоятельного решения подобных задач. Постарайтесь следовать таким рекомендациям.

1. Чтобы решить задачу, нужно***:***

- сначала проанализировать её условия и вытекающие из них следствия;

- уяснить требования задачи;

- попытаться найти путь к выполнению требований задачи.

2. Чтобы лучше осознать задачу и её решение, целесообразно подумать над вопросами, которые предлагаются после каждой задачи. Они позволяют выяснить:

- разобрались ли вы с условием задачи и с её требованиями;

- поняли ли вы приведенное решение задачи;

- можете ли вы решить задачу, которая немного отличается от решенной.

Ответы к этим вопросам приведены в конце каждого блока.

3. В начале каждого блока вам будут предлагаться задания «Готовимся к решению задач», с помощью которых вы сможете восстановить тот объем знаний и умений, который необходим для овладения содержанием блока.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. Воспользуйтесь указаниями и советами к ним.

4. В конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Проверь себя», с помощью которых вы сможете самостоятельно проверить, на сколько глубоко вы овладели идеями и методами, использованными при решении задач. Эти задания аналогичны решённым в тексте пособия. Для этих заданий нужно выбрать правильный ответ из четырёх предложенных. Помните, что среди приведенных ответов есть правильный, и он только один.

Выполните все эти задания, сравните свои ответы с ответами, приведенными в пособии. К тем заданиям, для которых они не совпадают, возвратитесь ещё раз, найдите причину несовпадения ответов. Если решение

каких-то заданий вызывает трудности, проанализируйте приведенное решение соответствующей задачи.

5. Кроме того, в конце каждого блока вам будут предлагаться задания «Реши сам». Они имеют то же предназначение, что и задания «Проверь себя». Эти задания от заданий «Проверь себя» отличаются тем, что для них не приводятся ответы, из которых нужно выбрать правильный.

Решите эти задачи. Они также аналогичны задачам, решённым в модуле, хотя и имеют определённые отличия. Если решение какой-то задачи вызывает трудности, проанализируйте приведенное в блоке решение соответствующей задачи.

Ответы и указания к этим заданиям приведены в конце каждого блока.

6. Чтобы проверить окончательно усвоение учебного материала раздела, выполните контрольное задание.

Сначала выполните контрольный тест и оцените свою готовность к выполнению основного задания.

Обязательно выполните основное задание. Пользуйтесь указаниями к задачам задания, решениями аналогичных задач в первой части пособия.

Выполнять дополнительное задание целесообразно, если успешно выполнено основное задание. Его выполнение позволяет оценить глубину усвоения учебного материала раздела.

При необходимости используйте указания к задачам основного и дополнительного заданий.

Помните!

Главная цель изучения темы — выполнить контрольное задание.

Выбирайте оптимальный путь для достижения главной цели, учитывая свою готовность, опыт и способности.

Задачи на растворы, смеси и сплавы

Задачи на растворы, смеси и сплавы охватывают большой круг ситуаций — создание смесей товаров разной цены, смешение жидкостей с различным содержанием соли, кислот различной концентрации, сплавление металлов с различным содержанием некоторого металла и др. Эти задачи часто применяются в производственных ситуациях, в быту, в обучении в различных дисциплинах.

Довольно часто приходится смешивать различные жидкости, порошки, а иногда даже газообразные или твёрдые вещества, разбавлять что-то водой или наблюдать испарение воды, то есть усыхание.

Сплавы — это материалы, имеющие металлические свойства и состоящие из двух или большего числа химических элементов, из которых хотя бы один является металлом. Например, чугун — это сплав железа с 2 – 4% углерода. Сплавы широко используются в промышленности. Их свойства значительно отличаются от свойств металлов. Например, прочность на разрыв сплава меди и цинка (латуни) в три раза выше, чем у меди и в шесть раз выше по сравнению с цинком. Железо хорошо растворимо, а его сплав с хромом и никелем (нержавеющая сталь) — устойчив в разбавленной серной кислоте.

При решении задач на смеси, растворы, сплавы принимаются следующие допущения.

1. В результате смешивания получается однородная масса. Это означает, что интересующая нас характеристика смеси одинакова для любой части смеси.
2. Масса раствора, смеси, сплава равна сумме масс всех составляющих. Все рассматриваемые величины могут измеряться как их массой, так и объёмом.
3. При смешивании нескольких растворов (сплавлении нескольких металлов) масса нового раствора (сплава) равна сумме масс смешиваемых растворов (сплавляемых металлов).
4. При смешивании нескольких растворов (сплавлении нескольких металлов) масса вещества в новом растворе (сплаве) равна сумме масс этого вещества в смешиваемых растворах (сплавляемых слитков).

1. Понятие концентрации вещества

Одной из наиболее распространённых характеристик смеси является концентрация конкретной составляющей смеси.

Концентрацией составляющей смеси называется отношение величины (массы, объёма и т. п.) этой составляющей к общей величине смеси.

На практике концентрацию принято выражать в сотых долях единицы, то есть в процентах. Содержание какого-либо драгоценного металла в сплаве с примесями обычно называют ***пробой*** и обозначают числом тысячных долей единицы. Например, говоря о золоте 573-й пробы, подразумевают, что в каждых 1000 г такого «золота» содержится только 573 г чистого золота.

Напомним решения основных трёх задач на проценты. Они представлены в следующей таблице.

№	Задача.	Ответ	Комментарии
1.	**Найти *p* % от числа *a*.**	$\frac{a \cdot p}{100}$	**Задача сводится к нахождению дроби $\frac{p}{100}$ от числа *a*.**
2.	**Найти число, если *p* % от него равно *b*.**	$\frac{b \cdot 100}{p}$	**Задача сводится к нахождению числа по данной величине *b* его дроби $\frac{p}{100}$.**
3.	**Найти, сколько процентов составляет число *b* от числа *a*.**	$\frac{b \cdot 100}{a}\%$	**Задача сводится к нахождению отношения *b* к *a*, выраженного в процентах.**

Готовимся к решению задач

1. В каких количествах нужно смешать жидкость с её растворителем, чтобы получить 100 г 20-процентного раствора этой жидкости?

2. Какова концентрация соли в растворе, если в 680 г воды было растворено 120 г соли?

3. Изделие массой 250 г содержит 200 г чистого золота. Какова проба золота в этом изделии?

4. Сколько золота 800-й пробы выйдет из 200 г чистого золота?

5. Какова масса чистого серебра, из которого получили 5 кг серебра 720-й пробы?

6. Сколько можно получить бронзы, содержащей 15% олова, если взять для сплава 72 кг олова?

7. Из молока жирностью 5% изготовляют сыр жирностью 15,5% и при этом выходит сыворотка жирностью 0,5%. Сколько сыра выйдет из 1 т молока?

8. При проверке влажность зерна оказалась равной 25%. 2 ц этого зерна просушили, после чего его масса уменьшилась на 30 кг. Определите влажность зерна после просушки.

9. До просушки влажность зерна была равна 23%, а после просушки оказалась равной 12%. На сколько процентов уменьшилась масса зерна после просушки?

Решение задач

В следующей задаче благодаря усушке повышается концентрация рассматриваемых предметов.

Задача 1. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20% воды. Сколько сухих фруктов получается из 20 кг свежих фруктов?

Анализируем. Из условия можно найти массу воды в свежих фруктах, массу абсолютно сухих фруктов. Тем самым будем знать и массу абсолютно сухих фруктов в сухих фруктах. Легко найти процент абсолютно сухих фруктов в сухих фруктах. Для ответа на поставленный вопрос останется применить решение задачи о нахождении числа, если известно, чему равно определённое количество процентов от него.

Решаем. Свежие фрукты содержат 100 – 72 = 28% абсолютно сухих фруктов, поэтому в 20 кг свежих фруктов содержится $\frac{20 \cdot 28}{100} = 5{,}6$ кг абсолютно сухих фруктов. Так как сухие фрукты содержат 20% воды, то они содержат

100 – 20 = 80% абсолютно сухих фруктов. Следовательно, 5,6 кг абсолютно сухих фруктов — это 80% сухих фруктов, которые можно получить из 20 кг свежих фруктов. Всего из 20 кг свежих фруктов можно получить $\frac{5,6\cdot 100}{80}=7$ кг сухих фруктов.

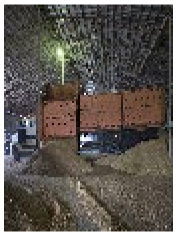
Ответ. 7 кг.

1. Сколько кг воды содержат 20 кг свежих фруктов?

2. На сколько кг воды меньше в сухих фруктах, чем в свежих?

3. Сколько сухих фруктов получается из 20 кг свежих фруктов, если сухие фрукты будут содержать 30% воды?

В отличие от задачи 1 в следующей задаче требуется найти изменение не массы вещества при усушке, а её процента.



Задача 2. В соответствии с требованиями стандартов, зерно засыпается на длительное сохранение при влажности до 14%. На сколько процентов примерно уменьшится масса зерна при его просушке перед сохранением, если влажность свежесобранного зерна равна 24%?

Анализируем. Влажность зерна — это процентное содержание влаги в этом зерне. Зная влажность свежесобранного зерна, можно выразить массу «сухого» зерна через массу собранного зерна (задача на проценты первого типа).

Так как известна влажность зерна после просушки, то можно выразить массу просушенного зерна через массу собранного (задача на проценты второго типа).

Зная массы собранного и просушенного зерна, можно найти их разность, а затем, сколько процентов составляет эта разность от массы собранного зерна (задача на проценты третьего типа).

Решаем. Обозначим массу собранного зерна через a. Так как его влажность составляет 24 %, то масса «сухого» зерна составляет 100 – 24 = 76 %, а его масса равна $0{,}76a$.

Влажность подсушенного зерна составляет 14 %. Поэтому масса сухого зерна, равная 0,76a, составляет 100 – 14 = 86 % от массы подсушенного зерна. Следовательно, масса подсушенного зерна приближённо равна $\frac{0,76a \cdot 100}{86} \approx 0,88a$.

Масса зерна уменьшилась примерно на a – 0,88a = 0,12a. Это составляет $\frac{0,12a}{a} \cdot 100\% = 12\%$ от массы собранного зерна.

Ответ. 12 %.

1. *Какой процент от массы свежесобранного зерна составляет масса подсушенного зерна?*

2. *Какой процент от массы свежесобранного зерна составляла бы масса подсушенного зерна, если бы влажность свежесобранного зерна составляла 20%?*

3. *Сколько процентов от массы «сухого» зерна составляет масса подсушенного зерна?*

В задачах 1 и 2 рассматривался процесс усушки вещества. В следующей задаче речь будет идти о разбавлении жидкости путём добавления чистой воды.

Задача 3. Сколько воды нужно добавить к 40 л спирта крепостью в 60°, чтобы получить спирт крепостью в 40°?

Анализируем. Крепость спирта — это процентное содержание чистого спирта в разбавленном. Другими словами, и влажность зерна, и крепость спирта, и проба драгоценного металла являются фактически концентрацией одного вещества, содержащегося в другом: воды в зерне, чистого спирта в разбавленном, драгоценного металла в сплаве. Известны крепости двух видов спирта. Зная объём разбавленного спирта и его крепость, можно найти объём чистого спирта (первая задача на проценты). Используя найденный объём чистого спирта и крепость второго вида разбавленного спирта, можно найти его объём (вторая задача на проценты). Это даст возможность найти искомый объём добавленной воды.

Решаем. По условию, в исходных 40 л спирта содержится 60% чистого спирта, что составляет $\frac{40 \cdot 60}{100} = 24$ л. Требуется добавлением воды получить спирт, содержащий 40% чистого спирта. Объём таким образом разбавленного спирта будет равен $\frac{24 \cdot 100}{40} = 60$ л. Следовательно, придётся добавить 60 – 40 = 20 л.

Ответ. 20 л.

1. Сколько л чистого спирта содержится в полученном разбавленном спирте?

2. Какой был бы ответ в задаче, если бы требовалось из 50 л спирта крепостью 80° получить спирт крепостью 50°?

3. Спирт какой крепости получится, если к 40 л спирта крепостью в 60° добавить 8 л воды?

Проверь себя

1. Ягоды содержат 99% воды и 1% сухого вещества. При сушке часть воды испарилась, в результате чего воды стало 98%. Сколько сейчас весят ягоды, если до сушки они весили 100 кг?

А. 99 кг. **Б.** 98,99 кг. **В.** 98 кг. **Г.** 50 кг.

2. Чернослив содержит 25% влаги. Его получают из сливы, содержащей 90% влаги, путем сушки. Сколько нужно килограмм сливы, для получения 5 кг чернослива?

А. 36,5 кг. **Б.** 37 кг. **В.** 37,5 кг. **Г.** 38 кг.

3. К 250 г золота 800-й пробы прибавили 150 г меди. Какой пробы получился сплав?

А. 450-й. **Б.** 500-й. **В.** 550-й. **Г.** 600-й.

Реши сам

1. На поле собрали 100 кг огурцов, содержащих 99 % воды. К моменту доставки их на рынок в огурцах осталось 98 % воды. Какова теперь масса огурцов?

2. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограмм винограда потребуется для получения 82 кг изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм — 5 %?

3. В 800 г 25-процентного раствора прибавлено 200 г воды. Какой процентной концентрации получился раствор?

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. 80 г и 20 г. Примените первую процентную задачу.

2. 15%. Примените третью процентную задачу. Обратите внимание на то, что масса раствора равна сумме масс воды и соли.

3. 800-я. Примените третью процентную задачу.

4. 250 г. Примените вторую процентную задачу.

5. 3,6 кг. Примените первую процентную задачу.

6. 480 кг. Примените вторую процентную задачу.

7. 300 кг. Найдите массу жира в 1 т молока и составьте уравнение для массы сыра.

8. ≈ 11, 8%. Определите массу воды в первоначальном зерне и в просушенном.

9. На 12,5%. Введите обозначение для исходной массы зерна, выразите через него массы воды в зерне до и после просушки, а также массу зерна после просушки.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 14,4 кг; **2.** На 13 кг. **3.** 8 кг.

Задача 2. 1. 88%. **2.** 93%. **3.** ≈116%.

Задача 3. 1. 24 л. **2.** 30 л. **3.** 50°.

Ответы на задания «Проверь себя»

1	2	3
Г	В	Б

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 50 кг. Найдите **массу** абсолютно сухих огурцов и примените первую процентную задачу.

2. 779 кг. Введите обозначение для искомой массы винограда, выразите через него массу абсолютно сухого винограда Составьте и решите уравнение.

3. 20%. Примените первую и третью процентные задачи.

2. Арифметические способы решения задач на смеси, растворы и сплавы

Речь идёт о нахождении двух или нескольких чисел по их сумме и разности, нахождении двух или нескольких чисел по их сумме (или разности) и кратному отношению, нахождении неизвестного по разности двух величин и др.

Готовимся к решению задач

1. Предприниматель купил 240 кг картофеля по 40 руб. за 1 кг и 80 кг по 60 руб. за 1 кг. Какова средняя цена купленного картофеля?

2. Предприниматель купил 240 кг картофеля по 40 руб. за 1 кг и некоторое количество по 60 руб. за 1 кг. В среднем покупка обошлась ему по 45 руб. за 1 кг. Сколько кг дорогого картофеля было куплено?

3. Предприниматель купил 180 кг дешёвого картофеля и 120 кг по 60 руб. за 1 кг. В среднем покупка обошлась ему по 48 руб. за 1 кг. Какова цена 1 кг дешёвого картофеля?

4. В двух коробках 75 конфет; в одной на 15 конфет больше, чем в другой. Сколько конфет в каждой коробке?

5. Два куска серебра имели общую массу 2400 г. Один из кусков был в 3 раза тяжелее другого. Из большего куска изготовили чайные ложки массой 18 г каждая, а из меньшего столовые ложки по 50 г каждая. Сколько всего изготовлено ложек?

6. Завод изготовил грузовых автомобилей в 4 раза больше, чем легковых, причём количество грузовиков превышало количество легковых автомобилей на

480. Сколько было изготовлено тех и других автомашин в отдельности?

7. Спортивное общество приобрело лыжные костюмы двух сортов — по 16400 руб. и по 11200 руб. за костюм, причём тех и других костюмов поровну. За первые заплатили на 208000 руб. больше, чем за вторые. Сколько рублей израсходовали на покупку лыжных костюмов?

8. Для консервирования применяют спирт крепостью 80°. Сколько воды нужно добавить к 2 л спирта крепостью 96°, чтобы получить спирт указанной крепости?

9. Для консервирования применяют 3-процентный раствор формалина. У хозяйки имеется 1,5 л 40-процентного формалина. Она добавила 18,5 л воды. Получила ли она формалин нужной концентрации?

10. Для консервирования применяют 2-процентный раствор формалина. Хозяйка получила 30 л такого формалина добавлением воды к 40-процентному формалину. Какой объём 40-процентного формалина она использовала?

Решение задач

В следующей задаче будет использовано среднее арифметическое двух и нескольких чисел.

Задача 1. Сплавили два слитка серебра одинаковой массы, один из которых имеет 700-ю пробу. В результате получили слиток 500-й пробы. Какова проба второго слитка?

Анализируем. Эта задача аналогична следующей.

Купили два вида конфет одинаковой массы, один из которых по цене 700 руб. за 1 кг. Вся покупка обошлась в 500 руб. за 1 кг. Какова цена второго вида конфет?

Так как конфеты одинаковой массы, то цена смеси двух видов конфет равна среднему арифметическому цен обоих видов конфет. Поэтому требуется по значению одной величины и среднему арифметическому двух величин найти значение второй величины. Аналогично решается задача 1.

Решаем. Поскольку слитки одинаковой массы, то проба слитка, получен ного сплавлением двух слитков, равна среднему арифметическому проб обоих слитков. Таким образом, требуется найти пробу второго слитка, зная пробу первого слитка и среднее арифметическое обоих слитков. Так как среднее арифметическое двух чисел равно их полусумме, то есть 500-я проба равна полусумме 700-й и искомой проб, то их сумма равна 500·2 = 1000. Следовательно, искомая проба равна 1000 – 700 = 300.

Ответ. 300-я.

1. *Зависит ли ответ от величины одинаковых масс слитков?*

2. *Чему равна концентрация раствора, полученного смешиванием трёх растворов одинакового объёма, концентрации которых равны 70%, 50% и 45%?*

3. *Смешали 3 раствора одинакового объёма. Концентрации двух из них равны 80% и 65%. Получили раствор, концентрация которого равна 60%. Какова концентрация третьего раствора?*

Следующая задача будет посвящена применению процентных вычислений.

Задача 2. Пять литров раствора с 35% содержанием растворенного в воде вещества смешали с четырьмя литрами 20 % раствора того же вещества и еще прибавили один литр чистой воды. Найдите процентное содержание вещества в полученном растворе.

Анализируем. Для нахождения процентного содержания вещества в растворе нужно найти объём вещества в каждом растворе (задача на проценты первого типа), объём раствора, полученного после смешивания двух растворов и добавления воды, и вычислить их процентное отношение (задача на проценты третьего типа).

Решаем. Объём вещества в первом растворе равен $\frac{5 \cdot 35}{100} = 1{,}75$ (л), а его объём во втором растворе равен $\frac{4 \cdot 20}{100} = 0{,}8$ (л). Объём этого вещества в полученном после смешивания растворе равен 1,75 + 0,8 = 2,55 (л).

Объём полученного раствора равен сумме объёмов двух смешиваемых растворов, сложенной с 1 л чистой воды, то есть он равен 5 + 4 + 1 = 10 (л).

Процентное содержание вещества в полученном растворе равно $\frac{2{,}55 \cdot 100}{10} = 25{,}5\%$.

Ответ. 25,5 %.

1. *Чему равнялось бы процентное содержание вещества в растворе, если бы не добавляли литра чистой воды?*

2. *Увеличилось бы или уменьшилось бы процентное содержание вещества в растворе, если бы смешали 4 л первого раствора и 5 л второго без добавления воды?*

3. *В каких пределах может находиться процентное содержание вещества в растворе, полученном от смешения 40-% и 20-% растворов того же вещества?*

Следующую задачу можно будет решить, применив метод нахождения двух чисел по их сумме и разности.

Задача 3. Для изготовления столовых и чайных ложек сплавили два куска серебра, из которых один был на 900 г тяжелее другого и получили сплав массой в 4500 г. Больший кусок был 800-й пробы, а меньший — 600-й пробы. Какой пробы получились ложки?

Анализируем. В предыдущей задаче, зная объёмы двух растворов и концентрации некоторого вещества в этих растворах, требовалось определить концентрацию этого вещества после смешения растворов. Объём полученного раствора находился сложением объёмов исходных растворов. В отличие от этого, в данной задаче известны масса полученного слитка, то есть сумма исходных масс, и их разность. По этим данным можно найти массу каждого слитка. Для этого уравниваем массы растворов, уменьшая массу одного из них на данную разность, или увеличивая массу другого на ту же величину. Затем полученную сумму масс делим на 2. При этом в первом случае получим массу меньшего куска, во втором — массу большего. В дальнейшем задача решается подобно задаче 2.

Решаем. Вначале найдём массы каждого куска серебра. Приравняв их массе меньшего куска, получим, что после сплавления масса полученного слитка равнялась бы 4500 – 900 = 3600 г. Тогда масса меньшего куска равняется 3600:2 = 1800 г, а масса большего — 1800 + 900 = 2700 г.

Масса серебра в меньшем куске равна $\frac{1800 \cdot 600}{1000} = 1080$ (г), а его масса в большем куске равна $\frac{2700 \cdot 800}{1000} = 2160$ (г). Масса серебра в полученном слитке равна 1080 + 2160 = 3240 (г).

Проба серебра в полученном слитке, а значит и проба ложек, равна $\frac{3240 \cdot 1000}{4500} = 720$.

Ответ. 720-я.

1. *Сколько процентов от масс исходных слитков и полученного слитка составляют массы серебра в них?*

2. *Как можно было получить удвоенную массу большего куска серебра7*

3. *Известно, что на столовые ложки израсходовано на 1800 г меньше, чем на чайные. Сколько изготовлено тех и других ложек, если на столовую ложку шло 54 г серебра, а на чайную — 30 г?*

В следующей задаче, как и в предыдущей, фактически известны пробы двух сплавов, сумма их масс. Для её решения понадобится найти массы каждого сплава. Это можно будет сделать, применив метод нахождения величин по их сумме и отношению.

Задача 4. Первый сплав содержит 20% меди, второй — 50% меди. Масса второго сплава больше массы первого в 5 раз.

Сплавив эти сплавы, получили сплав массой 5,4 кг. Сколько процентов меди он содержит?

Анализируем. В условии даются пробы двух сплавов Известна масса сплава, полученного их сплавлением. Требуется определить пробу этого сплава. Как мы видели в предыдущих задачах, для этого, кроме проб исходных данных, нужно знать их массы. Для их вычисления можно применить метод нахождения двух величин по их сумме и отношению. И то, и другое известно. Массу меньшего сплава примем за одну часть, тогда по условию можно найти, сколько частей составляют масса большего сплава и их сумма. По этим данным и сумме масс обоих сплавов, можно найти, какая масса приходится на 1 часть, то есть массу меньшего, а затем и большего сплава. В дальнейшем задача решается подобно задаче 2.

Решаем. Примем массу меньшего сплава за 1 часть, тогда масса большего сплава составит 5 частей, а масса сплава, полученного сплавлением обоих сплавов — 1 + 5 = 6 частей. Поскольку масса этого сплава равна 5,4 кг, то на одну часть приходится 5,4:6 = 0.9 (кг), то есть масса меньшего сплава равна 0,9 кг. Тогда масса большего сплава равна 0,9·5 = 4,5 (кг).

Масса меди в меньшем сплаве равна $\frac{0,9 \cdot 20}{100} = 0,18$ (кг), а её масса в большем сплаве равна $\frac{4.5 \cdot 50}{100} = 2,25$ (кг). Масса меди в полученном сплаве равна 0,18 + 2,25 = 2,43 (кг).

Следовательно, полученный сплав содержит $\frac{2,43 \cdot 100}{5,4} = 45\%.$ меди.

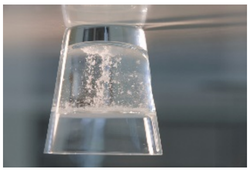
Ответ. 45%.

1. *Какую пробу имеет медь в сплавленном сплаве?*

2. *Сколько частей составляла бы разность масс обоих сплавов, если бы больший сплав был на 8 кг тяжелее меньшего, а его масса была больше массы меньшего в 5 раз?*

3. Из сплава, рассмотренного в задаче, ювелирная мастерская изготовила два письменных прибора, массы которых относятся, как 1:2. Каковы массы этих приборов?

Для решения следующей задачи используется так называемый метод нахождения неизвестного по разности двух величин.



Задача 5. Имеется два раствора соли, массы которых 960 г и 1680 г, оба раствора одинаковой концентрации. В первом растворе соли на 90 г меньше, чем во втором. Растворы смешали. Какова концентрация полученного раствора?

Анализируем. Представим себе мысленно, что из сосуда с большим раствором отлили в свободный сосуд часть этого раствора, масса которой равна массе меньшего раствора. Часть раствора, оставшегося в этом сосуде, имеет массу, равную разности масс исходных растворов. Известна масса соли, содержащейся в этой части, поскольку растворы однородны. Так как оба раствора одинаковой концентрации, то ту же концентрацию имеет и образованная часть раствора. Известны масса этой части раствора и масса соли, содержащейся в ней. Воспользовавшись определением концентрации (см. блок «Понятие концентрации вещества»), можно определить концентрацию этой части раствора. Искомая концентрация равна ей.

Решаем. Разность масс данных растворов равна 1680 – 960 = 720 (г). Разность масс соли в этих растворах, по условию равна 90 г. Часть раствора массой 720 г содержит 90 г соли. Так как концентрация составляющей смеси — это отношение величины этой составляющей к общей величине смеси, то концентрация соли в этой части раствора равна $\frac{90 \cdot 100}{720} = 12{,}5\%$. Поскольку оба раствора одинаковой концентрации, то каждый из них и раствор, полученный их смешиванием, имеют ту же концентрацию, равную 12,5%.

Ответ. 12.5%.

1. *Какова концентрация соли в большем растворе?*

2. *Достаточно ли было бы данных в условии, если бы растворы были различной концентрации?*

3. *Во сколько раз масса соли в большем растворе превышает массу соли в меньшем?*

Проверь себя

1. Смешали 2 раствора кислоты одинакового объёма, 50-процетный и 80-процентный. Раствор какой концентрации получили?

А. 50%. **Б.** 55%. **В.** 60%. **Г.** 65%.

2. Смешали 20 л 60-процентного раствора кислоты с 30 л 40-процентного раствора той же кислоты. Определите процентную концентрацию получившегося раствора кислоты.

А. 45%. **Б.** 48%. **В.** 52%. **Г.** 55%.

3. Сплавили два куска металла, масса одного из них на 650 г больше массы другого. Получили слиток, содержащий 400 г меди, что составляет 32% массы слитка. Чему равна масса большего куска?

А. 300 г. **Б.** 450 г. **В.** 750 г. **Г.** 950 г.

4. Сплавили два слитка серебра, один из которых содержит в 1,5 раза серебра больше, чем другой. Концентрация серебра в слитке с меньшим содержанием серебра составляет 48%. Получили слиток массой 2400 г, содержащий 60% серебра. Чему равна концентрация серебра в слитке с большим содержанием серебра?

А. 65%. **Б.** 70%. **В.** 72%. **Г.** 75%.

5. Имеется две чашки с раствором кофе (без молока и сахара), объёмы которых 300 см^3 и 400 см^3, оба раствора одинаковой концентрации. В первой чашке кофе на 10 см^3 меньше, чем во втором. Растворы смешали. Какова концентрация полученного раствора?

А. 10%. **Б.** 15%. **В.** 20%. **Г.** 25%.

Реши сам

1. Сплавили золото 375-й пробы с золотом такой же массы. Получили золото 500-й пробы. Какая проба второго куска золота?

2. Смешали 2 л 15-процентного раствора соли, 3л 20-процентного раствора и 5 л 30-процентного раствора одной и той же соли. Найдите процентную концентрацию смеси.

3. Сплавили два куска металла, один из которых содержит на 200 г меди больше, чем другой. Получили слиток массой 2500 г, содержащий 40% меди. Чему равна масса меди в меньшем слитке?

4. Первый сплав содержит 30 г серебра, второй — 250 г серебра. Масса второго сплава больше массы первого в 2,5 раза. Сплавив эти сплавы, получили сплав массой 700 г. На сколько больше процентов серебра содержит второй сплав по сравненю со сплавленным?

5. Имеется две чашки с раствором кофе (без молока и сахара), объёмы которых 300 см^3 и 400 см^3, оба раствора одинаковой концентрации. В первой чашке кофе на 10 см^3 меньше, чем во втором. Какова концентрация первого раствора?

Ответы и указания к заданиям «Готовься к решению задач»

1. 45 руб. Найдите отношение общей стоимости картофеля к их общей массе.

2. 80 кг. Воспользуйтесь тем, что общая стоимость картофеля равна произведению средней цены 1 кг на общую массу купленного картофеля.

3. 40 руб. Воспользовавшись указанием к предыдущему заданию, найдите общую стоимость купленного картофеля, затем стоимость дешёвого картофеля и искомую цену 1 кг дешёвого картофеля.

4. 45 и 30. Примените метод нахождения двух величин по их сумме и разности.

5. 112. Примените метод нахождения двух величин по их сумме и отношению.

6. 640 и 160. Примените метод нахождения двух величин по их разности и отношению.

7. 1104000 руб. Обратите внимание на то, что тех и других лыжных костюмов приобрели поровну. Поэтому можно применить метод нахождения неизвестного по разности двух величин.

8. 0,4 л. Можно найти объём имеющегося «чистого» спирта (первая процентная задача), затем объём раствора после добавления воды (вторая процентная задача), затем искомый объём воды.

9. Да. Вначале можно найти объём имеющегося «чистого» формалина (первая процентная задача), затем объём раствора после добавления воды и, наконец, концентрацию формалина в полученном растворе (третья процентная задача).

10. 1,5 л. Найдите объём «чистого» формалина в требуемом растворе (первая процентная задача), затем объём 40-процентного формалина, содержащего полученный объём «чистого» формалина (первая процентная задача).

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. Нет. **2.** 55%. **3.** 35%.

Задача 2. 1. ≈28,3%. **2.** Уменьшится. **3.** От 20% до 40%.

Задача 3. 1. 80% и 60%. **2.** К массе сплавленного слитка прибавить разность масс исходных слитков. **3.** 25 столовых ложек и 90 чайных.

Задача 4. 1. 450-ю. **2.** 4. **3.** 1,8 кг и 3,5 кг.

Задача 5. 1. 12,5%. **2.** Нет. **3.** В 1,75 раза.

Ответы на задания «Проверь себя»

1	2	3	4	5
Г	Б	Г	В	А

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 625-я. Обратите внимание на то, что второй сплав слиток имеет такую же массу, как и первый.

2. 24%. Воспользуйтесь первой и третьей процентными задачами.

3. 400 г. Примените метод нахождения двух величин по их сумме и разности.

4. На 10%. Примените метод нахождения двух величин по их сумме и отношению.

5. 10%. Обратите внимание на то, что оба раствора одинаковой концентрации. Поэтому можно применить метод нахождения неизвестной концентрации по разности двух величин.

3. Отношение величин смешиваемых растворов, сплавленных металлов

В задачах предыдущего блока, в основном, по объёмам двух растворов и концентрациям некоторого вещества в этих растворах определялась концентрация этого вещества после смешения растворов. Настоящий блок посвящён нахождению и применению отношения объёмов двух растворов, необходимых для получения раствора заданной концентрации

Готовимся к решению задач

1. Отношение числа мальчиков в классе к числу девочек равно $\frac{4}{5}$.

а) Кого в классе больше — мальчиков или девочек?

б) Сколько в классе мальчиков, если число девочек равно 20?

в) Сколько в классе девочек, если число мальчиков равно 16?

г) Сколько всего в классе учащихся, если число девочек равно 10?

д) Сколько в классе мальчиков и сколько девочек, если всего в классе 27 учащихся?

2. В сплаве массой 250 кг содержится 20 кг меди.

а) Во сколько раз масса сплава больше массы меди, содержащейся в нём?

б) Какую часть сплава составляет медь?

3. Смешали 75 г какао и 25 г сухого молока. Какой процент смеси составляет какао? Сухое молоко?

4. Определите, в каком из двух пакетов семена лучшей всхожести, если из 20 семян, взятых из первого пакета, проросло 14, а из 25 семян, взятых из второго пакета, проросло 18.

5. В сплав входит медь, олово и сурьма в отношении 4:15:6. Сколько процентов сплава составляет каждый металл?

6. К сплаву массой 600 г, содержащему 20% меди, добавили 40 г меди. Каким стало процентное содержание меди в новом сплаве?

7. Может ли концентрация раствора, полученного смешиванием двух растворов различной концентрации, превышать обе эти концентрации?

Решение задач

В следующей задаче по данным пробам двух слитков металла и пробе слитка, полученного их сплавлением, устанавливается отношение масс двух исходных слитков.

Задача 1. Сплавили два слитка золота 750-й пробы и 900-й пробы и получили слиток 840-й пробы. В каком отношении масс были взяты исходные слитки?

Анализируем. Введя обозначения для искомых масс обоих слитков, можно выразить через них массы чистого золота, содержащегося в них, массу сплавленного слитка, а также массу чистого золота, содержащегося в нём. Так как при сплавлении нескольких слитков металла масса вещества в полученном сплаве равна сумме масс этого вещества в сплавляемых слитках, то можно, приравняв два полученных выражения для массы чистого золота в сплавленном слитке, будем иметь линейное уравнение с двумя переменными. Особенностью этого уравнения является отсутствие свободного члена в нём. Поэтому из него можно найти отношение переменных, то есть искомое отношение.

Решаем. Обозначим массы данных слитков через x г и y г. Используя определение концентрации, получим, что эти слитки содержат соответственно $0{,}75x$ г и $0{,}9y$ г чистого золота. В результате сплавления слитков получили слиток массой $(x + y)$ г, содержащий $0{,}84(x + y)$ г чистого золота. Имеем уравнение $0{,}75x + 0{,}9y = 0{,}84(x + y)$, которое равносильно уравнению $0{,}06y = 0{,}09x$ или $3x = 2y$. Отсюда $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Итак, исходные слитки нужно взять в отношении 2:3.

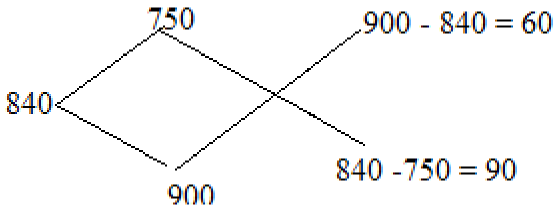
Ответ. 2:3.

1. *Какого слитка нужно взять в большем количестве: 750-й пробы или 900-й пробы?*

2. *Если бы требовалось получить 100 г золота 840-й пробы, сколько грамм каждого из данных слитков понадобилось бы для этого?*

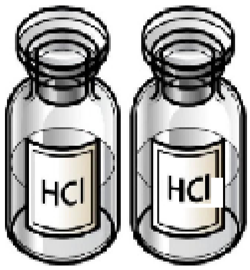
3. *В каком отношении масс нужно взять данные слитки, чтобы сплавлением получить золото 800-й пробы?*

Эта и подобные задачи могут быть решены так называемым старинным способом. Сущность его следующая. Слева пишут пробу 840 слитка, полученного сплавлением, затем друг под другом записывают пробы 750 и 900 исходных слитков, подсчитывают и записывают крест-накрест соответствующие разности



900 – 840 = 60 и 840 – 750 = 90 (см. рис.). Теперь можно сделать вывод: для получения золота 840-й пробы нужно взять золото 750-й и 900-й проб в отношении $\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$.

Следующая задача служит обоснованием старинного способа решения подобных задач.

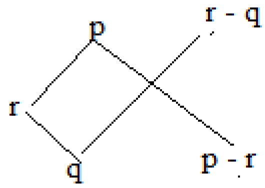


Задача 2. В каком отношении нужно смешать раствор p-процентной концентрации с раствором q-процентной концентрации, чтобы получить раствор r-процентной концентрации?

Анализируем. Введя обозначения для объёмов исходных растворов, можно выразить через них объёмы рассматриваемого вещества в каждом из этих растворов, а также объём раствора, полученного их смешиванием, и объём вещества в нём. Учитывая, что объём вещества в смешанном растворе равен сумме объёмов этого вещества в двух исходных растворах, получим уравнение, из которого можно найти искомое отношение.

Решаем. Пусть взято x л p-процентного раствора и y л q-процентного Концентрация r раствора, полученного смешением этих растворов, больше одной из этих концентраций и меньше другой. Пусть для определённости $r < p,\ \ r > q$. Первый раствор содержит $\frac{x \cdot p}{100}$ л вещества, а второй — $\frac{y \cdot q}{100}$ л этого вещества. Объём полученного после смешивания раствора равен (x + y) л. Снова, применяя первую задачу на проценты, получим, что объём вещества в растворе равен $\frac{(x+y)\cdot r}{100}$ л. Так как он равен сумме объёмов вещества в исходных растворах, то имеем уравнение:

$$\frac{x \cdot p}{100} + \frac{y \cdot q}{100} = \frac{(x+y)\cdot r}{100} \text{ или } xp + yq = (x + y)r.$$



Отсюда (p – r)x = (r – q)y. Так как $r \neq p$, то $\frac{x}{y} = \frac{r-q}{p-r}$. Таким образом, отношение объёма раствора большей концентрации к объёму раствора меньшей концентрации равно отношению разности концентрации смешанного раствора с меньшей концентрацией раствора к разности большей концентрации раствора с концентрацией смешанного раствора (см. рис.).

Ответ. $\frac{x}{y} = \frac{r-q}{p-r}$.

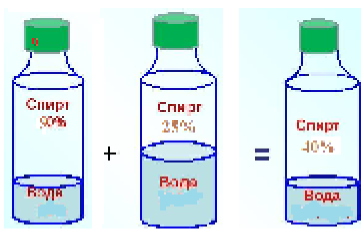
1. *Сколько л вещества содержится в а л 30-процентного раствора?*

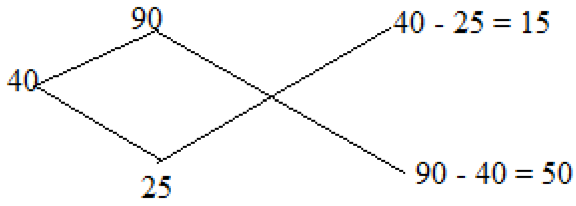
2. *Как изменится ответ, если $r > p$, $r < q$?*

3. *В каком отношении нужно сплавить золото 375-й пробы с золотом 750-й пробы, чтобы получить золото 500-й пробы?*

Проиллюстрируем применение старинного метода к решению задач с числовыми данными.

Задача 3. В каком отношении надо смешать 90-градусный спирт с 25-градусным спиртом, чтобы получить 40-градусный спирт?





Анализируем. Достаточно применить изложенный алгоритм старинного метода.

Решаем. Решение изображено на рисунке. Следовательно, указанные растворы нужно взять в отношении 15:50 или 3:10.

Ответ. 3:10.

1. *Какого спирта нужно взять 10 частей?*

2. *Чтобы получить 130 г 40-градусного спирта, сколько грамм 90-градусного спирта нужно взять?*

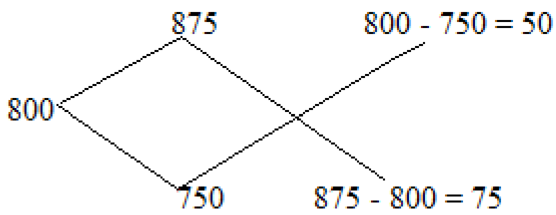
3. *Какую концентрацию спирта могут иметь два раствора спирта одинакового объёма для того, чтобы, смешав их, получить 40-градусный спирт?*

Применение старинного метода позволяет решать многие задачи на смеси, растворы и сплавы, не прибегая к уравнениям.

Задача 4. Из двух слитков составлен сплав серебра 800-й пробы. Первый слиток был 875-й пробы, а второй 750-й. Определить массу сплава, если первый слиток был легче второго на 1,25 кг.

Анализируем. С помощью старинного метода можно найти отношение масс исходных слитков. Затем, применив метод нахождения величин по по их разности и кратному отношению, можно будет завершить решение задачи.

Решаем. В условии есть все данные для нахождения отношения масс данных слитков. Применим старинный метод (см. рис.). Получили, что массы данных слитков относятся, как 50:75 или как 2:3. Поэтому разность масс 1,25 кг составляет 3 – 2 = 1 часть, а сумма масс, то есть масса сплава, — 3 + 2 = 5 частей. Та-



ким образом, она равна 1,25·5 = 6,25 (кг). Следовательно, искомая масса сплава равна 6,25 кг.

Применяя старинный метод нахождения отношения величин составляющих, полезно для самоконтроля делать проверку. В данном случае, массы слитков можно обозначить $2x$ кг и $3x$ кг, где x кг — общая мера этих масс. Тогда первый слиток содержит $2x \cdot 0{,}875 = 1{,}75x$ кг серебра, второй — $3x \cdot 0{,}75 = 2{,}25x$ кг, а сплав — $1{,}75x + 2{,}25x = 4x$ (кг). Проба серебра в сплаве равна $(4x:5x) \cdot 100\% = 80\%$, что соответствует условию.

Ответ. 6,25 кг.

1. *Чему равна масса большего слитка?*

2. *Изменился бы ответ, если бы мы ошибочно установили, что отношение масс исходных сплавов равно 3:2?*

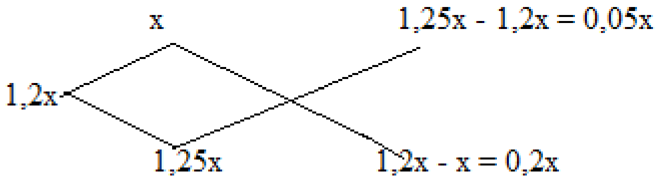
3. *Из двух слитков составлен сплав золота 875-й пробы. Первый слиток был 900-й пробы, а второй 800-й. Определить массу сплава, если первый слиток был легче второго на 100 г.*

Рассмотренный старинный метод применим к задачам, где не приводятся концентрации растворов, смесей, сплавов, а требуется «смешать» их, чтобы величина вещества изменилась в заданное число раз. Как отмечалось выше, к ситуациям, описанных в рассмотренных задачах, относится и стоимость единицы смеси, удельный вес или давление, к которым применимы аналогичные рассуждения.

Задача 5. Индийский чай дороже грузинского в 1,25 раза. В каком отношении нужно смешать индийский чай с грузинским, чтобы получить чай, который дороже грузинского в 1,2 раза?

Анализируем. В этой задаче роль растворов играют чаи, роль концентраций — стоимости единицы продукции. Можно ввести обозначение для стоимости грузинского чая, выразить через него стоимость индийского чая и стоимость смешанных чаев. Затем применить старинный метод нахождения отношения масс обоих видов чая.

Решаем. Пусть единица грузинского чая стоит x руб. Тогда единица индийского чая стоит $1{,}25x$ руб. а единица смешанного чая должна стоить $1{,}2x$ руб. Применим старинный метод для нахождения отношения масс обоих видов чая (см. рис.). Получили, что отношение массы индийского чая к массе грузинского равно $0{,}05x{:}0{,}2x = 1{:}4$.



Возможно, у кого-то возникли сомнения в правомерности применения старинного метода к решению подобных задач. Проведём проверку, использовав другой метод решения этой задачи. Пусть для получения необходимого смеси чаёв понадобилось a г грузинского чая и b г индийского. Стоимость их смеси равна, с одной стороны, $ax + 1{,}25bx$, а с другой — $1{,}2x(a + b)$. Имеем уравнение $ax + 1{,}25bx = 1{,}2x(a + b)$ или $0{,}05b = 0{,}2a$. Отсюда $a{:}b = 0{,}05{:}0{,}2 = 1{:}4$. Результат тот же, но применение старинного метода существенно проще.

Ответ. 1:4.

1. *Какая величина играет роль массы раствора?*

2. *Чему равнялась бы масса смешанного чая, если бы взяли 100 г индийского?*

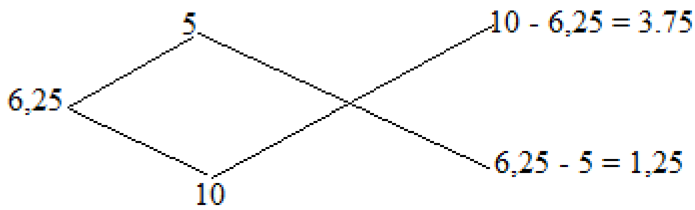
3. *Чему равняется отношение массы грузинского чая к массе смешанного?*

Рассмотренный старинный метод применим к задачам, в которых рассматриваются сплавы, погружённые в воду. Как известно, если твердое тело погрузить в жидкость, оно вытеснит **объем жидкости, равный объему погруженной в жидкость части тела**. Это закон Архимеда.

Задача 6. Сплав массой 500 г, состоящий из двух металлов, теряет в воде 80 г. Сплав такой же массы из первой составляющей теряет в воде 100 г, а из второй — 50 г. Найти массы составляющих металлов в сплаве.

Анализируем. Сплав при погружении в воду теряет в весе столько, сколько весит вода, вытесняемая этим металлом. Так как плотность воды равна 1 г/см^3, то численно масса потерянной части сплава, равна объёму воды, вытесняемой этим сплавом, а значит, и объёму сплава. Исходя из этого, можно найти объёмы сплава и его составляющих. Поскольку их массы известны, можно найти их плотности, как отношение массы к объёму. Применив к плотностям старинный метод нахождения отношения составляющих в сплаве, можно будет найти массы составляющих металлов в сплаве.

Решаем. Из изложенного вытекает, что объёмы 500 г сплава и 500 г металлов, его составляющих соответственно равны 80 см^3, 100 см^3, 50 см^3. Так как плотность равна отношению массы к объёму, то плотности сплава и его составляющих соответственно равны $\frac{500}{80} = 6{,}25\ \text{г}/\text{см}^3, \frac{500}{100} = 5\ \text{г}/\text{см}^3, \frac{500}{50} = 10\ \text{г}/\text{см}^3$.



Для нахождения отношения масс составляющих металлов применим старинный метод (см. рис.). Следовательно, отношение массы первой составляющей к массе второй равно $\frac{1{,}25}{3{,}75} = \frac{1}{3}$. Поэтому их массы соответственно равны $\frac{500 \cdot 1}{1+3} = 125\ \text{г}, \frac{500 \cdot 1}{1+3} = 375\ \text{г}$.

Ответ. 125 г и 375г.

1. *Как выразить массу вещества через его объём и плотность?*

2. *Что в данной задаче играет роль концентрации?*

3. *Какую часть своей массы теряет при погружении в воду любое тело?*

Проверь себя

1. Смешали 60-процентный раствор кислоты с 40-процентным раствором той же кислоты. Получен 45-процентный раствора кислоты. В каком отношении были взяты исходные растворы?

А. 3:4. **Б.** 1:2. **В.** 2:3. **Г.** 1:3.

2. В каком отношении надо смешать растворы 40-процентной концентрации и 60-процентной концентрации, чтобы получить раствор 45-процентной концентрации?

А. 3:1. **Б.** 3:2. **В.** 2:1. **Г.** 4:3.

3. В каком отношении надо смешать 30-процентный раствор борной кислоты с 15-процентным, чтобы получить 20-процентный раствор?

А. 1:3. **Б.** 2:3. **В.** 1:2. **Г.** 3:4.

4. Из двух растворов азотной кислоты получили смешением раствор 36-процентной концентрации. Первый раствор был 60-процентный, а второй — 30-прорцентный. Определить массу полученного раствора, если первый раствор был легче второго на 3 кг.

А. 4 кг. **Б.** 5 кг. **В.** 5,5 кг. **Г.** 6 кг.

5. Индийский чай дороже грузинского на 10 зедов (зед — условная денежная единица). В каком отношении нужно смешать индийский чай с грузинским, чтобы получить чай, который дороже грузинского на 2 зеда?

А. 3:2. **Б.** 4:3. **В.** 2:1. **Г.** 4:1.

6. Смешан спирт двух сортов объёмом 70 см^3 крепостью в 84° и 70°, и получена смесь крепостью в 75°. Каковы объёмы каждого из двух исходных растворов спирта?

А. 25 см^3 и 45 см^3. **Б.** 20 см^3 и 50 см^3.

В. 30 см^3 и 40 см^3. **Г.** 45 см^3 и 25 см^3.

Реши сам

1. Имеется 400 г 4,5-процентного раствора соли, 250 г 6-процентного раствора соли и 600 г 7-процентного раствора соли. Определите процентную концентрацию соли в растворе, полученном смешением всех растворов.

2. Требуется сделать сплав из серебра 840-й и 560-й пробы так, чтобы получилось 3,5 кг серебра 720-й пробы. Сколько надо взять серебра каждого вида?

3. Какой концентрации нужно взять азотную кислоту, чтобы, смешав её с 30-процентной кислотой, масса которой превосходит вчетверо массу кислоты неизвестной концентрации, получить смесь концентрации 36%?

4. Смешан спирт двух сортов крепостью в 84° и 70°, и получено 560 г смеси крепостью в 75°. Определите массы исходных растворов.

5. Сколько надо прибавить олова к куску бронзы массой 2 кг и содержащему 12% олова, чтобы повысить содержание в нём олова до 20% общей массы?

6. Смешали два раствора серной кислоты, концентрация одного из них на 8% меньше концентрации другого. Концентрация полученного раствора равна 19%. Определить концентрации серной кислоты в каждом растворе, если отношение масс растворов равно 5:3.

Ответы и указания к заданиям «Готовься к решению задач»

1. а) Девочек; обратите внимание на первую фразу в условии; **б)16;** воспользуйтесь тем, что число девочек составляет 5 частей, а число мальчиков — 4, определите, сколько человек приходится на 1 часть; **в) 20;** воспользуйтесь указанием к заданию б); **г) 18;** определите, сколько человек в данном задании приходится на 1 часть и сколько частей составляет число учащихся в классе; **д) 12 и 15;** определите, сколько учащихся в этом задании приходится на 1 часть.

2. а) В 12,5 раза; найдите отношение массы сплава к массе меди в нём; **б) 0,08;** найдите отношение массы меди к массе сплава.

3. 25%. Воспользуйтесь третьей процентной задачей.

4. Во втором. Найдите всхожести семян из каждого пакета.

5. 16%, 60%, 24%. Найдите, сколько частей составляет масса всего сплава и воспользуйтесь третьей процентной задачей.

6. 25%. Найдите массы сплава и меди в сплаве после добавления меди.

7. Нет. Воспользуйтесь тем, что среднее (гармоническое) любого набора чисел, среди которых есть различные, больше, чем наименьшее число этого набора, но меньше, чем наибольшее.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 900-й пробы. **2.** 40 г и 60 г. **3.** 2:1.

Задача 2. 1. 0,3a. 2. $\frac{x}{y}=\frac{r-p}{q-r}$. 3. 1:2.

Задача 3. 1.25-градусного. 2.10 г. 3. Например, 60-градусный и 20-градусный.

Задача 4. 1.3,75 кг. 2. Нет. 3. 200 г.

Задача 5. 1.Стоимость смешиваемого чая. 2.400 г. 3. 4:5.

Задача 6. 1. Масса вещества равна произведению его объёма на плотность. 2. Плотности сплава и его составляющих. 3. Равную величине, обратной плотности этого вещества.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3	4	5	6
Г	**А**	**В**	**Б**	**Г**	**А**

Ответы к заданиям «Реши сам»

1. 6%. Найдите массы полученных после смешивания растворов всего раствора и соли, содержащейся в нём.

2. 2 кг и 1,5 кг. Можно найти отношение масс данных сплавов.

3. 60%. Введите обозначение для неизвестной концентрации, выразите через него отношение масс двух растворов кислоты, составьте и решите уравнение.

4. 200 г и 360 г. Можно, пользуясь старинным методом, найти отношение масс исходных растворов.

5. 200 г. Обратите внимание на то, что концентрация олова в добавляемом куске равна 199%.

6. 16% и 24%. Введите обозначение для концентрации кислоты в одном растворе, выразите через него концентрацию кислоты в другом растворе, а также отношение масс двух растворов кислоты, составьте и решите уравнение.

4. Применение линейных уравнений и систем линейных уравнений для решения задач на смеси, растворы и сплавы

Многие задачи, рассмотренные выше и решённые арифметическими способами или старинным способом, могли быть решены составлением и решением уравнения первой степени. Линейные уравнения или уравнения, приводимому к такому, использовались в некоторых задачах, решённым старинным способом, в задаче, посвящённой обоснованию этого способа. Настоящий пункт посвящён решению задач, которые наиболее эффективно решаются с помощью линейных уравнений или систем линейных уравнений.

Сущность этого метода состоит в следующем.

Выбирают некоторое неизвестное значение величины или количества и обозначают его какой-нибудь буквой.

Выражают через введенную букву другие неизвестные значения величины или количества.

Составляют два выражения, в которые входит выбранная буква, и приравнивают их, пользуясь условием.

Равенство, которое получается, называют ***уравнением***. Такой перевод условия задачи на язык математики называют ***составлением уравнения по условию задачи***.

Решают составленное уравнение, находят значение величины или количества, обозначенное введенной буквой. Пользуясь найденным значением неизвестного, нужно выполнить требования задачи.

Иногда приходится вводить две переменные. Если составлено одно уравнение с двумя переменными, то, как правило, оно имеет бесконечно много решений. Однако есть задачи, в которых достаточно найти какое-то соотношение между ними: сумму, отношение и т. д.

Во многих случаях для перевода задачи на математический язык приходится использовать две буквы, а то и больше букв. При этом получают, в зависимости от условия, несколько уравнений с переменными. Если требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие всем составленным уравнениям, то их называют ***системой уравнений***.

Систему линейных уравнений с двумя переменными вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

можно решить различными методами: методом подстановки, методом сложения.

Готовимся к решению задач

1. В сплаве меди с оловом масса меди относится к массе олова как 3:2 Сколько процентов от массы сплава составляет масса меди?

А. 40%. **Б.** 45%. **В.** 50%. **Г.** 60%.

2. Сплавили 20 кг одного сплава с 30 кг другого сплава, каждый из которых содержит 30% меди. Каков процент меди в полученном сплаве?

3. Продали 1 ц абрикос по 160 руб. за 1 кг и по 120 руб. за 1 кг. В среднем за 1 кг получили 150 руб. Сколько кг каждого вида абрикос было продано?

4. В банке денежный вклад увеличивается на 10% за год. Сколько денег вкладчик положил на вклад, если через год у него на вкладе было 44 000 руб.?

А. 39 000 руб. **Б.** 40 000 руб.

В. 41 000 руб. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

5. Составьте уравнение для нахождения неизвестного x.

1) В первом ящике x кг крупы, а во втором — вдвое больше, чем в первом. Если из второго ящика пересыпать 10 кг в первый, то в обоих ящиках крупы станет поровну.

А. $2x + 10 = x - 10$. **Б.** $2(x - 10) = x + 10$.

В. $2x - 10 = x + 10$. **Г.** $2(x + 10) = x - 10$.

2) В первом мешочке x шариков, что в три раза меньше, чем во втором. Если из второго мешочка переложить 5 шариков в первый, то в обоих мешочках шариков будет поровну.

3) В первом баке x литров воды, во втором — на 40 л воды больше, чем в в первом, а в третьем — $\frac{5}{8}$ того объёма воды, который содержится в первых двух баках вместе. В трёх баках 260 л.

6. В кружке, содержащей 250 г воды, размешали 50 г сахара, а в стакане, содержащем 100 г воды, — 20 г сахара. Какой раствор слаще: в кружке или в ста кане?

7. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $x:2 = 4:8$; 2) $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=2:x$; 3) $3:x = 8:3{,}2$; 4) $1{,}4:2 = 7:x$.

8. Плата за квартиру выросла с 240 зедов за месяц до 360 зедов (зед — условная денежная единица). На сколько процентов выросла плата за квартиру?

А. На 60%. **Б.** На 50%. **В.** На $33\frac{1}{3}$%. **Г.** На 20%.

9. Известно, что 1 кг конфет стоит a зедов, а 1 кг печенья — b зедов. Купили 5 кг конфет и 3 кг печенья (зед — условная денежная единица). Составьте формулу для стоимости покупки S.

10. Решите систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 5x-y=8, \\ 2x+3y=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x-3y=34, \\ 5x+3y=31; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 5x+6y=9. \end{cases}$

11. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $x + 4y = 7$; 2) $x + 4y = 9$; 3) $x + 4y = 15$.

12. Решите уравнение: 1) $\frac{5}{x}-2=6+\frac{1}{x}$; 2) $2+\frac{4}{x}=\frac{7x-1}{x}$.

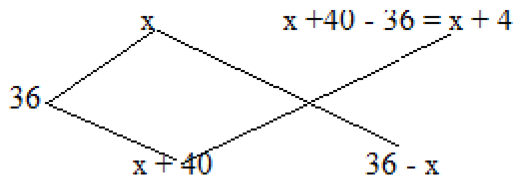
Решение задач

Иногда рассмотренный старинный метод фактически помогает выразить искомые или другие величины через введенные обозначения и составить уравнение, позволяющее решить задачу.

Задача 1. Имелось два сплава меди, причём процентное содержание меди в первом сплаве на 40% меньше процентного содержания меди во втором сплаве. Оба сплава сплавили, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентные содержания меди в каждом сплаве, если отношение масс этих сплавов равно 3:2.

Анализируем. Введя обозначение для процентного содержания меди в первом сплаве, можно выразить через него процентное содержание меди во втором сплаве. Так как известно процентное содержание меди в сплавленном сплаве, то с помощью старинного метода можно выразить через введенное обозначение отношение масс исходных сплавов. Приравняв полученное выражение данному отношению, будем иметь уравнение, из которого можно найти искомые процентные содержания меди в исходных сплавах.

Решаем. *Первый способ.* Пусть процентное содержание меди в первом сплаве равно x%, тогда второй сплав будет содержать (x + 40)% меди. Чтобы выразить через x отношение масс данных сплавов, применим старинный метод (см. рис.). Это выражение имеет вид $\frac{x+4}{36-x}$. Из условия имеем уравнение $\frac{x+4}{36-x}=\frac{3}{2}$. Формально это уравнение не является линейным, но оно легко приводится к линейному несложными преобразованиями: $2(x+4) = 3(36 – x)$, $2x + 8 = 108 – 3x$, $2x + 3x = 108 – 8$, $5x = 100$. Отсюда $x = 20$. Следовательно, процентные содержания меди в сплавах соответственно равны 20% и 60%.



Второй способ. Эту задачу можно решить, не прибегая к старинному методу, а воспользовавшись обычными процентными вычислениями.

Пусть процентное содержание меди в первом сплаве равно x%, тогда второй сплав будет содержать (x + 40)% меди. Так как отношение масс этих сплавов равно 3:2, то эти массы соответственно равны $3y$ г и $2y$ г, где y — общая мера этих масс, а масса сплава, полученного их сплавлением, равна $3y + 2y = 5y$ (г). Зная массы всех трёх сплавов и процентные содержания меди в них, можно найти массы меди в этих сплавах, применив решение первой задачи на проценты. Они соответственно равны $\frac{3y\cdot x}{100}$ г, $\frac{2y\cdot(x+40)}{100}$ г, $\frac{5y\cdot 36}{100}=1{,}8y$ г. Поскольку при сплавлении нескольких металлов масса вещества в новом сплаве равна сумме масс этого вещества в сплавляемых слитках, то имеем уравнение:

$$\frac{3y\cdot x}{100}+\frac{2y\cdot(x+40)}{100}=1{,}8y.$$

Формально это уравнение не линейное. Разделив обе части уравнения на $y \neq 0$ и умножив обе его части на 100, получим $3x + 2(x + 40) = 180$ или линейное уравнение $5x = 20$, откуда $x = 20$. Получен тот же результат, что и первым способом. Но в первом способе удалось ограничиться обозначением значения одной величины.

Ответ. 20% и 60%.

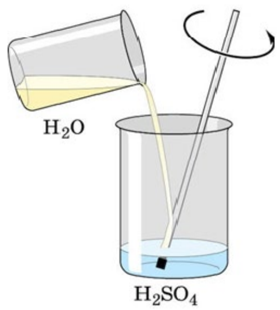
1. *Что больше: x% или 36%?*

2. *Чему равно отношение массы меди в первом сплаве к массе меди в сплавленном сплаве?*

3. *Чему равно отношение масс меди в исходных сплавах?*

Решение следующей задачи приводит к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Задача 2. В сосуде находится определённое количество смеси воды с кислотой. Чтобы уменьшить концентрацию кислоты на 34%, в сосуд надо долить 3 л воды, а чтобы уменьшить её на 17%, надо долить 1 л воды. Какова концентрация кислоты в сосуде?



Анализируем. Введя обозначения для концентрации кислоты в сосуде и объёма раствора в сосуде, можно будет, пользуясь процентными вычислениями, выразить через них объёмы безводной кислоты в сосуде до и после доливания воды. Эти объёмы равны, так как добавление чистой воды не меняет объёма безводной кислоты в сосуде. Приравняв их, получим уравнение с двумя переменными. Проделав то же самое для другой ситуации с добавлением чистой воды, будем иметь второе уравнение с двумя переменными, а значит и систему двух уравнений с двумя переменными. Решив её, найдём искомую концентрацию кислоты в сосуде.

Решаем. Пусть объём раствора в сосуде равен x л, а концентрация кислоты в растворе — p%. Пользуясь первой процентной задачей, будем иметь, что в растворе $\frac{px}{100}$ л безводной кислоты. После доливания в сосуд 3 л воды объём раствора стал равным (x + 3) л, концентрация кислоты в растворе — (p – 34)%, а объём безводной кислоты в полученном растворе — $\frac{(p-34)(x+3)}{100}$ л. Получили первое уравнение $\frac{px}{100} = \frac{(p-34)(x+3)}{100}$. Аналогично составляется второе уравнение: $\frac{px}{100} = \frac{(p-17)(x+1)}{100}$. Итак, имеем следующую систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \frac{px}{100} = \frac{(p-34)(x+3)}{100}, \\ \frac{px}{100} = \frac{(p-17)(x+1)}{100}. \end{cases}$$

Полученные уравнения не линейные, но после несложных преобразований придём к системе двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} px = px - 34x + 3p - 102, \\ px = px - 17x + p - 17 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 3p - 102 = 34x, \\ p - 17 = 17x. \end{cases}$$

Решив её, например, методом сложения, получим: p = 68. Следовательно, концентрация кислоты в сосуде равнялась 68%.

Ответ. 68%.

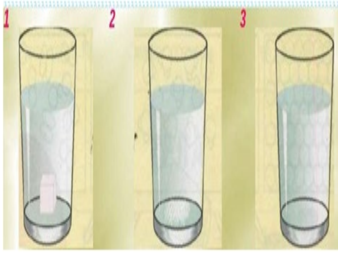
1. Как формулируется и решается первая процентная задача?

2. Какое уравнение получится, если из первого уравнения системы вычесть удвоенное второе?

3. Можно ли решить полученную систему уравнений методом подстановки?

Иногда решение задач на сплавы и растворы приводят к таким системам уравнений, в которых одно уравнение с одной переменной, а другое — с двумя.

Задача 3. 80 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нём будет в 2 раза больше, чем в первом сосуде. Найдите массу раствора, находящегося в первом сосуде.



Анализируем. Из условия вытекает, что легко составить уравнение для нахождения массы соли в сосудах. Поэтому целесообразно ввести обозначение для массы соли в одном из сосудов. Второе уравнение системы составляется из тех соображений, что концентрации соли в двух сосудах после того, как весь раствор разлили в два сосуда, были равными. Поскольку для нахождения концентрации соли, кроме массы соли в сосуде, нужно знать массу раствора в этом сосуде, необходимо ввести обозначение для неё. Получим систему двух уравнений с двумя переменными, решив которую, найдём искомую величину.

Решаем. Обозначим массу соли в первом сосуде и массу раствора, находящегося во этом сосуде, соответственно через a кг и c кг. Тогда во втором сосуде вначале было (a + 2) кг соли, а после добавления 1 кг соли, её стало (a + 3) кг. Так как количество соли в нём стало в 2 раза больше, чем в первом сосуде, то имеем первое уравнение: $a + 3 = 2a$.

Поскольку масса раствора во втором сосуде равна (80 – a) кг, то концентрации соли в сосудах первоначально были соответственно равны $\frac{a}{c}$ и $\frac{a+2}{80-c}$. Эти концентрации равны, ибо растворы получены делением одного и того же раствора. Имеем второе уравнение: $\frac{a}{c} = \frac{a+2}{80-c}$ и систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a + 3 = 2a, \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{a+2}{80-c}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 3, \\ 80a = 2ac + 2c, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 3, \\ 80a = 2ac + 2c, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 3, \\ c = 3. \end{cases}$$

Следовательно, в первом сосуде находится 30 л раствора.

Ответ. 30 л.

1. *Какова масса раствора была во втором сосуде первоначально?*

2. *Какова масса соли во втором сосуде после добавления 1 кг соли?*

3. *Какова концентрация соли во втором сосуде после добавления 1 кг соли?*

Проверь себя

1. Имеется два раствора кислоты, причём процентное содержание первого раствора составляет $\frac{3}{4}$ процентного содержания второго раствора. Оба раствора смешали, в результате чего получен раствор с процентным содержанием 53%. Определите процентные содержания растворов, если отношение объёмов этих растворов равно 7:8.

А. 45% и 60%. **Б.** 42% и 56%. **В.** 36% и 48%. **Г.** 30% и 40%.

2. В двух сосудах содержится по 75 г растворов кислоты: в первом 60-процентной, во втором 40-процентной. Смешав эти растворы, получили 100 г 48- процентной кислоты. Какого раствора взяли больше и во сколько раз?

А. Первого в 1,5 раза. **Б.** Второго в 1,5 раза.

В. Первого в 3 раза. **Г.** Второго в 3 раза.

3. 80 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде масса раствора оказалось на 20 кг больше, чем в первом. Если во второй сосуд добавить 10 кг раствора с 10-процентным содержанием соли, то количество соли в нём будет в 2 раза больше, чем в первом сосуде. Найдите концентрацию соли в растворе, находящемся в первом сосуде.

А. 15%. **Б.** 12%. **В.** 10%. **Г.** 8%.

Реши сам

1. Смешали два раствора спирта, крепость одного из них в 1,5 раза меньше крепости другого, в результате получен спирт крепостью 48°. Определите крепости спирта в исходных растворах, если отношение объёмов этих растворов равно 3:2.

2. В двух сосудах содержится по 100 г растворов кислоты: в первом 60-процентной, во втором 30-процентной. Как получить, смешивая эти растворы, 150 г 40-процентной кислоты?

3. 80 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде масса раствора оказалось на 20 кг больше, чем в первом. Если во второй сосуд добавить 10 кг раствора с 15-процентным содержанием соли, то концентрация соли в нём будет в 1,5 раза больше, чем в первом сосуде. Найдите массу соли в растворе, находящемся во втором сосуде первоначально.

Ответы и указания к заданиям «Готовимся к решению задач»

1. Г. Найдите, сколько процентов от количества частей, определяющих массу сплава, составляет количество частей, приходящихся на массу меди.

2. 30%. Обратите внимание на то, что сплавили два сплава с одинаковым содержанием меди в них.

3. 75 кг и 25 кг. Введите обозначение для массы одного вида проданных абрикос, выразите через него массу другого вида, стоимость каждого вида абрикос, составьте и решите уравнение.

4. Б. Воспользуйтесь второй процентной задачей.

5. 1) В. Выразите через x первоначальную массу крупы во втором ящике, массы крупы в каждом ящике после пересыпания. **2)** $\boldsymbol{3x - 5 = x + 5}$**.** Выразите через x первоначальное число шариков во втором мешочке, число шариков в каждом мешочке после перекладывания. **3)** $\boldsymbol{x + (x + 40)} + \frac{5}{8}(2x + 40) = 260$. Выразите через х объёмы воды во втором и третьем баках.

6. Одинаковая сладость. Воспользуйтесь тем, сто сладость раствора — это отношение массы сахара, содержащегося в растворе, к массе раствора.

7. 1) 1; 2) 1; 3) 1,2; 4) 10. Воспользуйтесь основным свойством пропорции.

8. Б. Найдите, на сколько зедов возросла плата и примените третью процентную задачу.

9. (5*a* + 3*b*) зедов. Воспользуйтесь тем, что стоимость нескольких единиц товара равна произведению цены одной единицы на количество единиц.

10. 1) (1; –3); систему можно решить и методом подстановки, и методом сложения; **2) (5; 2); 3) (–3; 4);** системы 2) и 3) удобнее решать методом сложения.

11. 1) (3; 1); 2) (1; 2), (5; 1); 3) (11; 1), (7; 2), (3; 3); установите для каждого уравнения, какие натуральные значения может принимать y, и для каждого найдите соответствующие значения x.

12. 1) x = 0,5; 2) x = 1; в каждом уравнении сделайте замену $\frac{1}{x} = y$.

Ответы на вопросы к задачам

Задача 1. 1. 36%. 2. 1:3. 3. 1:2.

Задача 2. 1. Найти p % от числа a: $\frac{a \cdot p}{100}$. 2. $p - 68 = 0$. 3. Да.

Задача 3. 1. 50 кг. 2. 6 кг. 3. $11\frac{13}{17}$%.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

1	2	3
А	Б	В

Ответы и указания к заданиям «Реши сам»

1. 40° и 60°. Введите обозначение для крепости спирта в одном растворе, выразите через него крепость спирта в другом растворе, а также отношение объёмов растворов, для чего можно воспользоваться старинным методом.

2. Смешать 50 г первого раствора и 100 г второго. Найдите отношение масс растворов, для чего можно воспользоваться старинным методом.

3. 1,875 кг. Первоначальные объёмы растворов можно найти по их сумме и разности либо составив м решив уравнение. Введите обозначение для массы соли в первом сосуде, выразите через него первоначальные концентрации соли в обоих сосудах, массу соли во втором сосуде первоначально и после добавления, концентрацию соли во втором сосуде после добавления, составьте и решите уравнение.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает обязательное выполнение контрольного теста и основного задания. Оцениваются результаты выполнения основного задания, а результаты выполнения контрольного теста позволяют судить о степени готовности к выполнению основного задания. Ещё одну оценку можно получить за выполнение дополнительного задания. Задания для исследования не оцениваются.

Все составляющие контрольного задания разделены знаком на части, соответствующие блокам рассматриваемой темы.

Критерии оценок

Оценка		**Основное Задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	8 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	10 задач	8 задач
«отлично»	Решено не менее	13 задач	10 задач

Контрольный тест

1. Собрали 100 кг грибов, их влажность оказалось равной 99%. Когда их подсушили, влажность снизилась до 95%. Какова масса подсушенных грибов?

А. 5 кг. **Б.** 20 кг. **В.** 50 кг. **Г.** 95 кг.

2. В некотором хозяйстве собрали 55 т риса, его влажность оказалась равной 20%. Для длительного хранения его подсушили до 12%. Во сколько раз уменьшилась его масса?

А. В 1,1 раза. **Б.** В 1,2 раза. **В.** В 1,3 раза. **Г.** В 1,4 раза.

3. Сколько воды нужно добавить к 800 г 25-процентного раствора, чтобы получить 16-процентный раствор?

А. 200 г. **Б.** 300 г. **В.** 350 г. **Г.** 450 г.

4. Сплавили два слитка серебра, 800-й и 500-й проб. Получили слиток 650-й пробы. Каково отношение масс исходных слитков?

А. Определить нельзя. **Б.** 2:1. **В.** 1:1. **Г.** 1:2.

5. Смешали три раствора кислоты: 2 л 45-процентной концентрации, 3 л 60-процентного раствора и 5 л 25-процентного. Чему равна процентная концентрация получившегося раствора?

А. 36%. **Б.** 37,5%. **В.** 38%. **Г.** 39,5%.

6. Сплавили два куска металла, масса одного из них на 650 г больше массы другого. Получили слиток, содержащий 400 г меди, что составляет 32% массы слитка. Чему равна масса меньшего куска7

А. 300 г. **Б.** 450 г. **В.** 750 г. **Г.** 950 г.

7. Сплавили два слитка серебра, один из которых содержит в 1,5 раза серебра больше, чем другой. Концентрация серебра в слитке с большим содержанием серебра составляет 72%. Получили слиток массой 2400 г, содержащий 60% серебра. Чему равна концентрация серебра в другом слитке?

А. 45%. **Б.** 48%. **В.** 52%. **Г.** 54%.

8. В ресторане посетителям предлагали кофейные напитки, изготовленные из двух видов кофе: арабики и робусты. Напитки содержали кофеин в одинаковой концентрации. Напиток из арабики подавался порцией объёмом 75 см^3, а из робусты — 50 см^3, причём первый напиток содержал кофеина на 5 см^3 больше, чем второй. Какова концентрация кофеина в порции из робусты?

А. 15%. **Б.** 20%. **В.** 25%. **Г.** 30%.

9. Сплавили два слитка серебра 500-й пробы и 800-й пробы и получили слиток 720-й пробы. В каком отношении масс были взяты исходные слитки?

А. 5:8. **Б.** 8:5. **В.** 4:11. **Г.** 11:4.

10. Сплавили 200 г золота p-й пробы с 250 г золота 500-й пробы. Получили сплав 700-й пробы. Чему равно p?

А. 910. **Б.** 925. **В.** 950. **Г.** 960.

11. К 15 л серной кислоты крепостью 32% добавили 80-процентной серной кислоты и получили 40-процентную серную кислоту. Сколько литров серной кислоты было добавлено?

А. 9 л. **Б.** 7,5 л. **В.** 5 л. **Г.** 3 л.

12. Кофе Arabica Brassily дешевле кофе Jacobs Barista в 1,5 раза. Чтобы получить смешением кофе, который дороже Arabica Brassily в 1,3 раза, какого кофе нужно взять больше и во сколько раз?

А. Arabica Brassily, в 1,5 раза. **Б.** Arabica Brassily в 1,3 раза.

В. Jacobs Barista в 1,5 раза. **Г.** Jacobs Barista в 1,3 раза.

13. Из двух растворов спирта различной крепости объёмом 60 л и 40 л отлили по 24 л. Каждую из отлитых частей растворов смешали с остатком другого раствора. Сравните крепости спирта p и q в полученных растворах.

А. $p < q$. **Б.** $p = q$. **В.** $p > q$. **Г.** Сравнить нельзя.

14. Сплав цинка при погружении в воду весит меньше на $\frac{1}{7}$ своего веса. Чему равна плотность цинка?

А. Определить невозможно. **Б.** 7,5 г/см^3. **В.** 7 г/см^3. **Г.** 6,5 г/см^3.

15. Смешали два раствора серной кислоты, концентрация одного из них на 8% меньше концентрации другого. Концентрация полученного раствора равна 21%. Определить концентрации серной кислоты в первом растворе, если отношение масс растворов равно 3:5.

А. 16%. **Б.** 22%. **В.** 24%. **Г.** 28%.

16. В двух сосудах содержится по 100 г растворов кислоты: в первом 60-процентной, во втором 30-процентной. Смешивая эти растворы, нужно получить 150 г раствора кислоты. Какую наибольшую концентрацию может иметь полученный раствор?

А. 55%. **Б.** 50%. **В.** 48%. **Г.** 45%.

17. Имеется два сплава золота и серебра, в первом массы этих металлов находится в отношении 2:3, во втором — в отношении 3:7. Сколько необходимо взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором отношение масс золота и серебра равнялось бы 5:11?

А. 4 кг и 4 кг. **Б.** 3 кг и 5 кг. **В.** 2 кг и 6 кг. **Г.** 1 кг и 7 кг.

Основное задание

1. Собрали 42 кг свежих грибов, содержащих по массе 95% воды. Когда их подсушили, они стали весить 3 кг. Каков процент содержания воды в подсушенных грибах?

2. Слиток золота 916-й пробы сплавили с куском меди. Получили сплав 896-й пробы. Какую часть массы этого сплава составляет масса куска меди7

3. Какой крепости получили спирт после добавления к 60 л спирта крепостью в 60° 20 л воды?

4. Сплавили два слитка серебра одинаковой массы, один из которых был 600-й пробы. Получили сплав 725-й пробы. Какова проба второго слитка?

5. Имеется 900 г 6-процентного раствора соли. Сколько нужно израсходовать раствора, чтобы потом, долив его водой до 400 г, получить 4-процентный раствор?

6. Сплавили два куска металла, один из которых содержит на 200 г меди больше, чем другой. Получили слиток массой 2500 г, содержащий 40% меди. Чему равна масса меди в слитке с большим содержанием меди?

7. Первый сплав содержит 30 г серебра, второй — 250 г серебра. Масса второго сплава больше массы первого в 2,5 раза. Сплавив эти сплавы, получили сплав массой 700 г. На сколько больше процентов серебра содержит второй сплав по сравнению с первым?

8. В ресторане посетителям предлагали кофейные напитки, изготовленные из двух видов кофе: арабики и робусты. Напитки содержали кофеин в одинаковой концентрации. Напиток из арабики подавался порцией объёмом 75 см^3, а из робусты — 50 см^3, причём первый напиток содержал кофеина на 5 см^3 больше, чем второй. Какова концентрация кофеина в порции из арабики?

9. Сплавили два слитка золота 600-й и 900-й проб. Получили сплав 720-й пробы. Масса какого из исходных слитков больше и во сколько раз?

10. Сплавили m г золота 600-й пробы и некоторое количество золота 900-й пробы. Получили сплав 720-й пробы. Сколько взято золота 900-й пробы?

11. Требуется сделать сплав из серебра 840-й и 560-й пробы так, чтобы получилось 3,5 кг серебра 720-й пробы. Сколько надо взять серебра каждого сорта?

12. Кофе Arabica Brassily дешевле кофе Jacobs Barista в 1,5 раза. Чтобы получить смешением кофе, который дороже Arabica Brassily в 1,1 раза, какого кофе нужно взять больше и во сколько раз?

13. Из двух растворов кислоты различного процентного содержания объёмом 110 л и 90 л отлили по одинаковому объёму. Каждую из отлитых частей растворов смешали с остатком другого раствора, после чего процентное содержание обоих растворов стало одинаковым. Каков объём каждой из отлитых частей растворов?

14. Сплав из золота и серебра массой 13 кг 410 г при полном погружении в воду стал весить 12 кг 510 г. Определите количество золота и серебра в сплаве, если известно, что плотность золота равна 19,3 г/см^3, а плотность серебра 10,5 г/см^3.

15. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, процент содержания железа в оставшейся руде повысился на 20. Определить, какое количество железа осталось ещё в руде.

16. В сосуде находится определённое количество смеси воды с кислотой. Чтобы уменьшить концентрацию кислоты на 34%, в сосуд надо долить 3 л воды, а чтобы уменьшить её на 17%, надо долить 1 л воды. Каков объём раствора в сосуде?

17. Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором меди в 5 раз меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди.

Указания к задачам основного задания

1. Пользуясь первой процентной задачей, найдите массу «абсолютно сухих» грибов в собранных грибах. далее определите массу воды в подсушенных грибах и, применив третью процентную задачу, — процент содержания воды в подсушенных грибах.

2. Воспользуйтесь тем, что массы «чистого» золота в исходном слитке и в полученном сплаве одинаковы.

3. Найдите объёмы полученного раствора и «чистого» спирта в нём и воспользуйтесь третьей процентной задачей.

4. Обратите внимание на то, что оба слитка одинаковой массы.

5. Введите обозначение для массы израсходованной части раствора, выразите через него массу соли в полученном растворе и, применив третью процентную задачу, составьте уравнение.

6. Найдите массу меди в сплавленном сплаве и воспользуйтесь методом нахождения двух величин по их сумме и разности.

7. Воспользовавшись методом нахождения двух величин по их сумме и отношению, найдите массы обоих сплавов, затем, применив третью процентную задачу, определите процентное содержание серебра в каждом сплаве.

8. Обратите внимание на то, что напитки содержали кофеин в одинаковой концентрации. Поэтому искомую концентрацию можно найти по разности двух величин.

9. Отношение масс исходных слитков можно найти старинным методом.

10. Можно найти отношение масс старинным методом.

11. Найдя отношение масс сплавов старинным методом, искомые массы можно найти по их сумме и отношению.

12. Введя обозначение для цены кофе Arabica Brassily, можно старинным методом найти отношение количеств обоих видов кофе.

13. Можно, введя обозначения для объёмов отлитых частей растворов и концентраций кислоты в исходных растворах, выразить через них объёмы «чистой кислоты» в растворах, полученных смешиванием, а затем по условию составить уравнение и решить его.

14. Воспользуйтесь тем, что сплав при погружении в воду теряет в весе столько, сколько весит вода, вытесняемая этим металлом.

15. Введите обозначение для массы железа в исходной руде, выразите через него процентное содержание железа в исходной руде, а также в руде, оставшейся после удаления примесей, затем составьте и решите уравнение.

16. Введите обозначения для объёмов раствора и кислоты в нём. Выразите через них процентные содержания кислоты в исходной смеси и в предполагаемых смесях после доливания 3 л и 1 л воды. Составьте и решите систему уравнений с двумя неизвестными.

17. Введите обозначения для количества частей каждого сплава, необходимых взять для получения нужного сплава.

Дополнительное задание

1. Только что добытый каменный уголь содержит 1% воды, а после двухнедельного пребывания на воздухе он содержит 10% воды. Добыли 1 т угля. Какой будет его масса через 2 недели?

2. В некотором хозяйстве собрали урожай риса, его влажность оказалась равной p%. Для длительного хранения его подсушили до q%. Какая часть собранного урожая получилась при этом??

3. К 40-процентному раствору добавили 300 г воды. Получили раствор, концентрация которого составила 30%. Какова масса исходного раствора?

4. Сплавили два слитка серебра 600-й и 750-й проб. Получили сплав массой 1300 г 675-й пробы. Найдите массы исходных слитков.

5. Смешали спирт двух сортов объёмом 0,07 л крепостью в 84° и в 70°, получена смесь крепостью в 75°. После этого к смеси добавили ещё 0,005 л спирта первого сорта и 0,135 л спирта второго сорта. Какой крепости получили спирт?

6. Сплавили два куска металла, один из которых содержит на 200 г меди больше, чем другой, а концентрация меди в другом составляет 25%. Получили слиток массой 2500 г, содержащий 40% меди. Чему равна концентрация меди в первом слитке?

7. Для изготовления столовых и чайных ложек, сплавили два куска серебра, из которых один кусок был 150-й пробы, второй —500-й. Масса второго сплава больше массы первого в 2,5 раза. Сплавив эти сплавы, получили сплав массой 700 г. На столовые ложки израсходовано в 1,5 раза серебра меньше, чем на чайные. Какой пробы получились ложки и сколько изготовлено тех и других, если на стольвую ложку шло 56 г серебра, а на чайную — 30 г?

8. В ресторане посетителям предлагали кофейные напитки, изготовленные из двух видов кофе: арабики и робусты. Напитки содержали зёрна кофе в одинаковой концентрации. Напиток из арабики подавался порцией объёмом 120 см^3, а из робусты — 80 см^3, причём порция первого напитка содержала зёрна кофе на 5 см^3 больше, чем порция второго. Зёрна арабики содержат 1,5% кофеина, а зёрна робусты — 3%. В порции какого вида кофейного напитка больше кофеина и на сколько?

9. Имеется 90 г 80-процентной уксусной кислоты. Какое наибольшее количество 9-процентного столового уксуса из неё можно получить?

10. Сплавили 250 г серебра p-процентной пробы и 125 г серебра q-процентной пробы ($p < q$). Получили сплав 500-й пробы. Определите p и q.

11. Сколько пресной воды нужно добавить к 4 кг морской воды, чтобы умень шить содержание соли в ней в 2.5 раза?

12. Кофе Arabica Brassily дешевле кофе Jacobs Barista в 1,5 раза. Смешением этих двух сортов кофе получен кофе, который дороже Arabica Brassily в 1,2 раза. Какую часть от массы полученной смеси составляет масса того сорта кофе, которого больше в смеси?

13. От двух кусков сплава с различным содержанием меди массой m и n кг отрезали по куску одинаковой массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

14. Латунь состоит из меди и цинка. Сколько содержится меди и цинка в 126 кг латуни, если 89 кг меди теряют в воде 10 кг; 7,1 кг цинка теряет в воде 1 кг, а 126 кг латуни теряют в воде 15 кг?

15. В двух сплавах медь и цинк относятся как 4:1 и 1:3. После совместной переплавки 10 кг первого сплава, 16 кг второго сплава и нескольких килограммов чистой меди получен сплав, в котором медь и цинк относятся как 3:2. Определить массу нового сплава.

16. В трёх сосудах содержится по 100 г растворов кислоты; в первом 70-процентный, во втором 60-процентный, в третьем 30-процентный. Как, смешивая эти растворы, получить 250 г 56-процентной кислоты?

17. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплаве одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько олова содержится в полученном новом сплаве?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Найдите массу «абсолютно сухого» угля в добытой 1 т угля (первая процентная задача), затем примените вторую процентную задачу.

2. Введите обозначение для массы собранного урожая, выразите через него массу «абсолютно сухого» риса (первая процентная задача) и массу собранного риса после подсушки (вторая процентная задача).

3. Введите обозначение для массы исходного раствора, выразите через него массу вещества, содержащегося в растворе, процентное содержание этого вещества в растворе после добавления воды.

4. Обратите внимание на то, что проба полученного сплава равна среднему арифметическому проб исходных слитков.

5. Найдите объём чистого спирта в исходных растворах и в добавленных растворах, объём полученной смеси и объём чистого спирта в ней. Затем примените третью процентную задачу.

6. Найдите массу меди в сплавленном сплаве (первая процентная задача) и воспользуйтесь методом нахождения двух величин по их сумме и разности. Затем можно найти массы обоих кусков металла (вторая процентная задача) и искомую концентрацию (третья процентная задача).

7. Пробу сплавленного сплава можно найти старинным методом. Воспользовавшись методом нахождения двух величин по их сумме и отношению, можно найти массы серебра, израсходованные на те и другие ложки.

8. Воспользовавшись разностью двух величин, можно найти объём напитка, содержащего 1 см^3 зёрени кофе, а затем и количества зёрен, содержащихся в каждом напитке. Применив первую процентную задачу, можно найти объёмы кофеина в каждом напитке.

9. Воспользуйтесь первой и второй процентными задачами.

10. Воспользовавшись старинным методом, можно получить линейное уравнение относительно p и q. Обратите внимание на то, что оно имеет бесконечное множество решений, однако можно наложить ограничения на p и q.

11. Введите обозначения для процентного содержания соли в морской воде и для объёма пресной воды. Выразите через них массу соли в 4 кг морской воды, и процентное содержание соли после добавления воды. Составьте уравнение.

12. Введя обозначение для цены кофе Arabica Brassily, можно старинным мето дом найти отношение количеств обоих видов кофе и искомое отношение.

13. Можно, введя обозначения для объёмов отрезанных частей сплавов и процентных содержаний меди в исходных сплавах, выразить через них массы меди в сплавах, полученных сплавлением, а затем по условию составить уравнение и решить его.

14. Воспользуйтесь тем, что сплав при погружении в воду теряет в весе столько, сколько весит вода, вытесняемая этим металлом. См. решение задачи 6 из блока «Отношение величин смешиваемых растворов, сплавленных металлов»

15. Воспользовавшись методом нахождения двух величин по их сумме и отношению, найдите массы меди и цинка в двух сплавах. Введя обозначение для массы добавленной меди, выразите через него отношение масс меди и цинка в переплавленном сплаве, составьте и решите уравнение.

16. Введите обозначения для масс частей растворов, которые необходимо смешать, выразите через них массы чистой кислоты в каждом растворе, составьте систему двух уравнений с тремя переменными. Понимая, что она имеем бесконечное множество решений, постарайтесь подобрать хоть одно из них.

17. Обратите внимание на то, что процентное содержание цинка в первом и втором сплаве одинаково.

Задачи для исследования

1. Из полного бака, содержащего c^{n-}л ($n \in \boldsymbol{N}$) чистой кислоты, отлили a л и долили бак водой. После тщательного перемешивания (до получения однородного раствора) из бака опять отлили a л раствора, снова долили бак водой и тщательно перемешали. После того как такая операция была проведена m раз, $m \leq n$, жидкость в баке содержала $c^{n-m}(c-1)^m$ л чистой кислоты. Определите:

1) количество чистой кислоты в баке после каждой операции;

2) концентрацию кислоты в баке после каждой операции; 3) величину a.

2. Два одинаковых сосуда наполнены чистым спиртом. Из первого сосуда отли ли $\frac{1}{n}$ $(n \geq 3)$ его содержимого и налили в него такое же количество воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили столько же и налили такое же количество воды. Из второго сосуда отлили $\frac{2}{n}$ его содержимого и налили в него такое же количество воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили столько же и налили такое же количество воды. Эти операции повторили m раз ($m \geq 2$). Определите:

1) какую часть объёма каждого сосуда составляет объём оставшегося в нём чистого спирта после двух, трёх, и т д., m указанных операций;

2) крепости оставшегося в каждом сосуде спирта после одной, двух, трёх, и т д., m указанных операций.

3. Два одинаковых сосуда наполнены чистым спиртом. Из первого сосуда отлили a л спирта и налили в него такое же количество воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили a л и налили столько же литров воды. Из второго сосуда отлили $2a$ л спирта и налили в него такое же количество воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили $2a$ л и налили такое же количество воды. Эти операции повторили m раз ($m \geq 2$). Определите, какую часть объёма сосуда составляет a л, если:

1) после двух указанных операций крепость окончательной смеси в первом сосуде превосходит крепость окончательной смеси во втором сосуде в 4 раза; в $\frac{9}{4}; \frac{16}{9}; \frac{25}{16}; \ldots, \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2$ раз;

2) после трёх указанных операций крепость окончательной смеси в первом сосуде превосходит крепость окончательной смеси во втором сосуде в 8 раз; в $\frac{27}{8}; \frac{64}{27}; \frac{125}{64}; \ldots, \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^3$ раз;

3) после m указанных операций крепость окончательной смеси в первом сосуде превосходит крепость окончательной смеси во втором сосуде в 2^m раз; в $\left(\frac{3}{2}\right)^m; \left(\frac{4}{3}\right)^m; \left(\frac{5}{4}\right)^m; \ldots, \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^m$ раз.

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Задачи на смеси, растворы и сплавы

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 8-9 классов

Учебное пособие