Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К.

Уравнения

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов

Донецк 2025

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К. Уравнения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов. — Донецк. 2025. — 45 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-х классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике в открытом математическом колледже (ОМК), рекомендованной Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики (приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 25.06.2016г. № 863).

Пособие ориентировано на овладение обучающимися такими важнейшими понятиями, как уравнение, ОДЗ уравнения, равносильность и следование. Кроме традиционных квадратных и дробно-рациональных уравнений предлагаются задания более высокого уровня сложности: уравнения, содержащие выражения со знаком модуля, ~~и~~ уравнения с параметрами. Большое внимание уделено решению уравнений методами замены переменных и разложения на множители.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Завершается пособие контрольным заданием, работа над которым обеспечивает контроль усвоения содержания темы. Контрольное задание, наряду с контрольным тестом, содержит основные и дополнительные задачи.

Пособие может быть использовано обучающимися девятых классов, учителями математики для организации внеурочного обучения математике.

Содержание

Предисловие

Математическое образование является базой профессионального образования для многих профессий. Поэтому очень важно помочь обучающимся получить добротную математическую подготовку.

Предлагаемое пособие направлено на углубление математических знаний девятиклассников, на совершенствование их умений решать сложные задачи, в частности прикладные, на подготовку к итоговому оцениванию по математике, к продолжению обучения в профильной школе.

Пособие ориентировано на овладение обучающимися понятиями уравнения, ОДЗ уравнения, равносильности и следования, методами решения квадратных и дробно-рациональных уравнений, уравнений, содержащих знак модуля и уравнений с параметрами.

В пособии содержатся понятия и утверждения, которые изучались в школьном курсе математики, некоторое их расширение, углубление. объяснения и советы, которые помогут обучающимся при решении задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Каждый блок содержит образцы решения задач. Овладеть необходимым теоретическим материалом, проверить степень его усвоения помогут обучающимся вопросы для самоконтроля. К ним приведены указания и ответы. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного и дополнительного заданий. Выполнение контрольного теста заключается в выборе правильного ответа из нескольких приведенных. В зависимости от намерений и возможностей обучающихся, они могут выполнять только контрольный тест, или контрольный тест и основное задание, или контрольный тест, основное и дополнительное задание.

Пособие предназначается для обучающихся 9-х классов разного типа образовательных учреждений, учителей математики. Оно может быть частично использовано обучающимися 10-х и 8-х классов.

Введение для обучающихся

Уважаемые друзья!

Настоящее пособие посвящено повторению таких важнейших понятий, как уравнение, ОДЗ уравнения, равносильность и следование. Кроме традиционных квадратных и дробно-рациональных уравнений, рассматриваются задания более высокого уровня сложности: уравнения, содержащие выражения со знаком модуля, и уравнения с параметрами.

Выполнение контрольного задания, приведенного в пособии, поможет вам развить свои умения решать уравнения различными методами. Все необходимые для выполнения контрольного задания сведения и разъяснения приведены в пособии.

Убедиться в том, что вы усвоили данную тему, помогут тест для самоконтроля и задания для самостоятельного решения с ответами и указаниями, содержащимися в пособии. Если ваши ответы на тестовые задания не совпадают с приведенными в пособии, проанализируйте ошибки и учтите их в своей дальнейшей работе.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач. Работа над контрольным тестом состоит в выборе по каждому тестовому заданию правильного ответа среди предложенных. Помните, что правильный ответ среди них всегда имеется, и он ровно один.

Основное задание, кроме обязательного выполнения контрольного теста, предполагает решение основных задач. Те, кого заинтересуют дополнительные задачи, могут получить еще одну оценку. В пособии приведены олимпиадные задания для тех, кто хотел бы глубже овладеть методами решения уравнений.

Надеемся, что работа над пособием будет для вас интересной и полезной.

Желаем вам успехов!

Введение для учителей

Уважаемые коллеги!

Настоящее пособие может быть использовано для организации дополнительного обучения математике, проведения факультативных занятий в 9-ом классе. Оно позволит также организовать самостоятельное обучение обучающихся математике, дополнительное к школьному.

Приведенный в пособии теоретический материал, решение типовых задач достаточны для обеспечения готовности к самостоятельной работе над заданиями. Эту готовность можно проверить с помощью теста для самоконтроля. Наличие ответов и указаний к заданиям теста дает возможность корректировать подготовку обучающихся к обучению. В пособии помещены задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним. Оказание помощи в их решении является важной составляющей в управлении самостоятельной работой обучающихся. Формирование у обучающихся определенной последовательности действий при проработке учебного материала является необходимым условием формирования умения самостоятельно учиться.

Предложенное пособие может быть использовано как для организации индивидуального обучения, так и для проведения факультативов и других коллективных форм обучения. В начале рассмотрения темы необходимо помочь обучающимся осознать главную цель темы, ее основных заданий. Сжатый обзор теоретического материала и рекомендации к его проработке являются следующим шагом в работе с обучающимися. Наибольшее внимание следует уделить решению задач для самостоятельной работы. Именно они готовят обучающихся к выполнению контрольного задания. Целесообразно сделать акцент на самоконтроле. Надеемся, что предложенное пособие будет вашим надежным помощником в организации обучения математике, дополнительного к школьному, в организации самостоятельной работы обучающихся, в обеспечении предпрофильного обучения математике.

Уравнения

Введение

Вы уже знаете, какую большую роль играют уравнения при решении разнообразных задач как в математике, так и в других учебных дисциплинах. Поэтому очень важно научиться работать с уравнениями: составлять, решать, исследовать их. Ведь фактически сама алгебра возникла в связи с решением различных уравнений.

Рецептов для решения произвольных уравнений не существует. Обычно действуют таким образом: с помощью разного рода преобразований и логических рассуждений приводят эту задачу к одной или нескольким более простым, новые уравнения также приводят к более простым и так до тех пор, пока не дойдем до таких, способ решения которых известен.

Чем больше разнообразных уравнений вы решите, тем легче будете справляться с новыми. Работая над данным пособием, вы обогатите свой опыт в этом направлении. В данном пособии рассматриваются целые рациональные и дробно-рациональные уравнения, а также основные методы их решения — разложение на множители и замена переменной. Кроме того, здесь обсуждаются вопросы равносильности уравнений; рассматриваются причины появления «посторонних» корней и потери корней. Даны рекомендации, как избежать этих и других неурядиц при решении уравнений. Все эти вопросы требуют тщательного разбора с карандашом в руках.

1. Что такое уравнение и его корни

Решения многих задач в науке, технике и повседневной жизни сводятся к составлению и решению уравнений.

Пример 1. При свободном падении тело движется по закону $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где s — пройденный путь, м; t — время, с; v_0 и a — некоторые постоянные.

Известно, что за первые 2 с тело проходит 10 м, а за первые 3 с — 18 м. Сколько секунд тело будет падать с высоты 130 м?

Решение. Так как при $t = 2$ значение $s = 10$, а при $t = 3$ значение $s = 18$, то для нахождения постоянных v_0 и a имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 10 = 2v_0 + 2a, \\ 18 = 3v_0 + \dfrac{9a}{2}. \end{cases}$$

Решая её, получим $v_0 = 3$, $a = 2$. Таким образом, тело движется по закону $s = t^2 + 3t$, и решение задачи свелось к решению квадратного уравнения $t^2 + 3t = 130$. ■

Эта задача показывает, как важно научиться составлять и решать разнообразные уравнения. Напомним некоторые основные понятия теории уравнений.

Возьмём два выражения, содержащие некоторую переменную и поставим между ними знак равенства.

Два выражения с переменной, соединённые знаком равенства, образуют уравнение. Переменную в уравнении обычно называют неизвестным.

Например, $2t - 5 = 0$, $x^2 = 3x - 2$, $\sqrt{a+2} = a$, $\dfrac{y}{4y-1} = y + 2$ — все это уравнения с одним неизвестным.

Если вместо переменной в уравнение подставить какое-либо её значение, то получим числовое равенство — верное или неверное. Так, подставив $x = 2$ в уравнение $x^2 = 3x - 2$, получим верное числовое равенство $4 = 4$. А если подставить $x = 0$, то получим неверное равенство $0 = -2$.

Значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство, называется корнем или решением уравнения.

В рассмотренном случае число $x = 2$ является корнем уравнения $x^2 = 3x - 2$, а число $x = 0$ его корнем не является.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Решить уравнение $(x - 1)(x - 2) = 0$ — это значит, найти оба его корня $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. А решить уравнение $x^2 + 4 = 0$ — это значит доказать, что оно не имеет корней.

Уравнения могут иметь различный вид в зависимости от образующих его выражений. Наиболее простые — это линейные и квадратные.

2. Квадратные уравнения и методы их решения

Квадратным уравнением называется уравнение вида $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$**, где** $\boldsymbol{a \neq 0}$ (если $a = 0$, то получим линейное уравнение).

Число a называется ***первым или старшим коэффициентом***, b — ***вторым коэффициентом***, c — ***свободным членом уравнения***.

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называется ***приведенным***.

Дискриминантом квадратного уравнения называется выражение $D = b^2 - 4ac$.

От дискриминанта зависит, сколько корней имеет уравнение.

Если $D > 0$, то уравнение имеет 2 корня, которые можно найти по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \qquad (1)$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет решений.

При рассмотрении примера 1 было получено квадратное уравнение $t^2 + 3t - 130 = 0$. Решим его. Дискриминант уравнения равен $D = 9 + 4 \cdot 130 = 529 = 23^2$. Тогда $t_1 = \frac{-3 - 23}{2} = -13, \quad t_2 = \frac{-3 + 23}{2} = 10$. По смыслу задачи неизвестное t должно быть неотрицательным числом. Потому решением задачи является только число $t = 10$. Итак, тело с высоты 130 м упадёт за 10 с.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - x + \sqrt{6} = 6 - 2x$.

Решение. Перенесём все члены уравнения в левую часть и приведём подобные. Получим квадратное уравнение $x^2 + x + \left(\sqrt{6} - 6\right) = 0$. Найдём

дискриминант уравнения: $D = 1 - 4\left(\sqrt{6} - 6\right) = 1 - 4\sqrt{6} + 24 = \left(1 - 2\sqrt{6}\right)^2 > 0$.

Тогда, согласно формуле (1), имеем:

$$x_1 = \frac{-1 - 1 + 2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} - 1,\ x_2 = \frac{-1 + 1 - 2\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6} - 1; \quad -\sqrt{6}.$

Пример 3. * Найти точки пересечения кривой $2x^2 + 4x + 2y^2 - - 4y - 5(x + 1)(y - 1) + 4 = 0$ с осью абсцисс.

Решение. У искомых точек ордината равна 0, т. е. $y = 0$. Подставив $y = 0$ в уравнение кривой, получим уравнение $2x^2 + 4x + 5(x + 1) + 4 = 0$. После раскрытия скобок и приведения подобных имеем квадратное уравнение $2x^2 + 9x + 9 = 0$. Его дискриминант $D = 81 - 72 = 9$. Следовательно, $x_1 = -3, \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$

Ответ: $A\left(-3; 0\right), \quad B\left(-\frac{3}{2}; 0\right).$

Если в квадратном уравнении второй коэффициент b — четное число, то для нахождения корней удобнее пользоваться следующей формулой:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}. \qquad (2)$$

Например, при решении уравнения $x^2 - 16x - 132 = 0$ целесообразно использовать формулу (2), так как вычисления будут более простыми: $x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64 + 132} = 8 \pm \sqrt{196} = 8 \pm 14.$ (Попробуйте это же уравнение решить с помощью формул (1)!)

Квадратные уравнения вида $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ и $ax^2 = 0$ ($a \neq 0$) называются ***неполными***. Их можно решать, не пользуясь формулами (1) и (2).

Так, для $ax^2 + bx = 0$ имеем $x(ax + b) = 0$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$. Уравнение $ax^2 + c = 0$ приводится к виду $x^2 = -\frac{c}{a}$. Если $-\frac{c}{a} \geq 0$, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; если же $-\frac{c}{a} < 0$, то корней нет.

Пример 4. Произведение двух последовательных натуральных чисел в три раза больше меньшего из них. Найдите эти числа.

Решение. Пусть n и $(n + 1)$ — искомые числа. Тогда, согласно условию задачи, получим уравнение $n(n + 1) = 3n$ или $n^2 - 2n = 0$. Решим уравнение, учитывая, что n — натуральное число: $n(n - 2) = 0$. Отсюда $n = 2$.

Ответ: 2; 3.

Корни квадратного уравнения можно находить не только по формулам (1) и (2), но и с помощью **теоремы Виета** (особенно, когда речь идёт о целых корнях):

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \qquad (3)$$

Справедливо и обратное утверждение:

Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют системе (3), то они являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Пример 5. Решить уравнение $x^2 - 5x - 14 = 0$.

Решение. Найдём числа x_1 и x_2 такие, чтобы $x_1 + x_2 = 5$ и $x_1 \cdot x_2 = -14$. Разложим число – 14 на множители: $-14 = (-1) \cdot 14 = 1 \cdot (-14) = (-2) \cdot 7 = 2 \cdot (-7)$. Поскольку сумма корней равна 5, нам подойдут только числа – 2 и 7. Эти числа и являются корнями уравнения на основании теоремы, обратной теореме Виета.

Ответ: – 2; 7.

Теорема Виета позволяет также определять знаки корней, не решая уравнения. Так, уравнение $x^2+3\sqrt{2}x+2=0$ имеет корни, так как $D = 10 > 0$. Они имеют один и тот же знак, так как $x_1 \cdot x_2 = 2 > 0$. Корни отрицательны, так как $x_1+x_2=-3\sqrt{2}<0$.

Пример 6. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа, обратные корням уравнения $x^2 + 3x – 40 = 0$.

Решение. Корнями уравнения $x^2 + 3x – 40 = 0$ являются числа $x_1 = 5$, $x_2 = -8$ (Проверьте!). Тогда корнями искомого уравнения $x^2 + px + q = 0$, согласно условию, являются числа $\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{8}$. По теореме Виета имеем

$p = -\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{40}$, $q = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{40}$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2-\frac{3}{40}x-\frac{1}{40}=0$ или $40x^2 – 3x – 1 = 0$.

Ответ: $40x^2 – 3x – 1 = 0$.

Пример 7. Не решая уравнения $x^2 – 3x – 5 = 0$, найти сумму кубов его корней.

Решение. Дискриминант данного уравнения равен 29 и поэтому уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2. По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = 3$, а $x_1 \cdot x_2 = -5$. Преобразуем сумму кубов корней квадратного уравнения следующим образом:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)=$$

$$=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right).$$

Подставив $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 \cdot x_2 = -5$, получим:

$$x_1^3+x_2^3 = 3\cdot(3^2 – 3\cdot(– 5)) = 3\cdot(9 + 15) = 3\cdot 24 = 72.$$

Ответ: 72.

3. Дробно-рациональные уравнения и их решение

Выражение, составленное из чисел и переменной, над которыми производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем, называется ***рациональным выражением***.

Уравнение, содержащее только рациональные выражения, называются ***рациональными***.

Например, $\frac{2x-1}{x+3}=x,\quad x^2-3\sqrt{2}x=1,\quad x^4+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{6}=0$ — рациональные уравнения.

Рациональное выражение, не содержащее в знаменателе переменную, называется ***целым рациональным выражением***.

Уравнения, содержащие только целые рациональные выражения, называются ***целыми рациональными уравнениями***.

Так, второе и третье из приведенных выше уравнений являются ***целыми рациональными уравнениями***. В отличие от них первое уравнение называют ***дробным рациональным уравнением***.

Рациональное уравнение, содержащее дробное выражение, называется ***дробно-рациональным***.

Например, первое из приведенных выше уравнений, а также уравнения $\frac{1}{x-5}=2,\quad \frac{2x-1}{x}=x-\frac{1}{x+3},\quad (3x-2)^2-\frac{4}{3-x}=1$ ***являются дробно-рациональными***.

К решению дробно-рациональных уравнений сводятся многие задачи.

Пример 8. Ученик решил прочитать книгу, содержащую 480 страниц, за несколько дней. Но каждый день он читал на 20 страниц больше, чем предполагал, и поэтому прочитал книгу на 4 дня раньше. За сколько дней была прочитана книга?

Решение. Пусть ученик планировал читать ежедневно по x страниц. Тогда он прочитал бы книгу за $\frac{480}{x}$ дней. В действительности ученик ежедневно читал по $(x+20)$ страниц и прочитал книгу за $\frac{480}{x+20}$ дней. Согласно условию задачи составим уравнение: $\frac{480}{x}-\frac{480}{x+20}=4$ или $\frac{120}{x}-\frac{120}{x+20}=1.$ Перенесём все члены уравнения в одну часть и приведём их к общему знаменателю. Получим $\frac{x^2+20x-2400}{x(x+20)}=0.$ Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Решив квадратное уравнение $x^2+20x-2400=0$, получим $x_1=40$, $x_2=-60$. Второе значение x отрицательно, поэтому не может быть решением задачи. При $x=40$ знаменатель $x(x+20)$ не равен нулю, то есть $x=40$ — корень уравнения. Следовательно, ученик каждый день читал по 60 страниц. Книга была прочитана за $\frac{480}{60}=8$ дней.

Ответ: За 8 дней.

Пример 9. Решить уравнение $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}$.

Решение. Приведём дроби, входящие в уравнение, к общему знаменателю. Для этого разложим знаменатели дробей на множители:

$$\frac{3}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{3}{2x(x+3)}=0.$$

Наименьший общий знаменатель дробей равен $2x(x-3)^2(x+3)$. Сложив дроби, получим уравнение $\frac{x^2-6x-27}{2x(x-3)^2(x+3)}=0.$ Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Приравняв к нулю числитель, получим квадратное уравнение $x^2-6x-27=0$, корнями которого являются числа $x_1=9$, $x_2=-3$. Проверим, обращают ли эти числа в нуль знаменатель дроби:

$2 \cdot 9 \cdot (9 - 3)^2 \cdot (9 + 3) \neq 0$, а $2 \cdot (-3) \cdot (-3 - 3)^2 \cdot (3 - 3) = 0$.

Ответ: 9.

При решении дробно-рациональных уравнений полезно поступать следующим образом:

1) Перенести все выражения в левую часть и привести их к наименьшему общему знаменателю;
2) сложить все дробные и целые выражения;
3) приравнять числитель полученной дроби к нулю;
4) решить целое уравнение;
5) проверить, обращают ли корни целого выражения в нуль знаменатель исходного уравнения;
6) отобрать из них числа, которые не обращают в нуль знаменатель исходного уравнения. Это и будут его корни;
7) записать ответ.

Как Вы заметили, при решении дробно-рациональных уравнений могут появиться «посторонние» корни, которые необходимо «отсеивать» с помощью специальной проверки.

А какие еще «неприятности» могут возникнуть при решении уравнений и как их избежать? Об этом и пойдет речь в следующем пункте.

4. Равносильные и неравносильные переходы

Решая уравнение, прежде всего, стремятся его упростить: переносят его члены из одной части в другую, раскрывают скобки, приводят подобные слагаемые, сокращают дроби и т.п. После преобразований получается новое уравнение. Естественно возникает вопрос, будет ли полученное уравнение иметь те же самые корни, что и исходное?

Если уравнения имеют одни и те же корни, то они называются равносильными. Уравнения, не имеющие корней, также считаются равносильными.

Равносильность двух уравнений обозначается знаком $\Leftrightarrow$. Например, $F(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = 0$.

Например, $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ и $x + 1 = 0$ — равносильные уравнения, так как оба уравнения имеют единственный корень $x = -1$. А вот уравнения $(x + 1)(x^2 - 4) = 0$ и $x + 1 = 0$ неравносильны, так как первое уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, а второе — корень $x = -1$.

Замена уравнения равносильным ему уравнением называется ***равносильным переходом***.

Как вам уже известно, равносильные уравнения получаются, если:

1) переносить члены уравнения из одной части в другую с противоположным знаком;
2) прибавлять к обеим частям уравнения одно и то же число;
3) умножать обе части уравнения на одно и то же число, **отличное от нуля.**

Иногда приходится выполнять более сложные преобразования, которые приводят к неравносильным уравнениям и появлению «посторонних» корней. С этим мы уже встречались при решении дробно-рациональных уравнений. Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 10. Если в уравнении $7 - 2x + \frac{5}{x-2} = 11 - 4x + \frac{5}{x-2}$ перенести все члены уравнения в левую часть и привести подобные члены, то получим уравнение $2x - 4 = 0$, корнем которого является число $x = 2$. Однако, это число не является корнем исходного уравнения, так как оно обращает в нуль знаменатель дроби $\frac{5}{x-2}$. Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

Пример 11. Если в уравнении $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ сократить дробь

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1,$$

то получим квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = -2$, и $x_2 = 1$. Второе из этих чисел не может быть корнем исходного уравнения (почему?). Подставив число $x = -2$ в уравнение, убеждаемся, что это корень уравнения.

Пример 12. Если в уравнении $x^2 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2 - 4 = 0$ заменить $\left(\sqrt{x}\right)^2$ на x, получим уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$. Число $x_1 = -4$ не является корнем исходного уравнения, так как $\sqrt{-4}$ не имеет смысла. Подставив $x = 1$ в уравнение, убеждаемся, что это его корень.

Во всех рассмотренных примерах при решении уравнений мы получили «посторонние» корни. Давайте выясним причину их появления.

Обратите внимание, что выражения, образующие уравнения, определены не для всех действительных чисел. Так, выражение $\frac{x^3-1}{x-1}$ определено только для тех значений x, которые не обращают в нуль знаменатель дроби, то есть на множестве $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Выражение $x^2 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2 - 4$ определено на множестве $[0; +\infty)$, так как квадратный корень имеет смысл только для неотрицательных чисел.

Множество значений неизвестного, при которых определены выражения, образующие уравнение, называется ***областью допустимых значений уравнения*** или коротко — **ОДЗ**.

Так, ОДЗ уравнения $7 - 2x + \frac{5}{x-2} = 11 - 4x + \frac{5}{x-2}$ является множество $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, ОДЗ уравнения $\frac{x^3-1}{x-1} = 3$ — множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, ОДЗ уравнения $x^2 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2 - 4 = 0$ — множество $[0; +\infty)$.

Заметим, что решая каждое из этих уравнений, мы переходили к уравнению с более широкой ОДЗ. Например, выполнив преобразование $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ в уравнении $x^2 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2 - 4 = 0$, мы получили уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$, ОДЗ которого является множество $(-\infty; +\infty)$. В результате этого некоторые корни нового уравнения не попали в ОДЗ исходного уравнения и поэтому оказались «посторонними» корнями. Ведь корни уравнения обязательно принадлежат его ОДЗ.

Так, в нашем случае один из корней квадратного уравнения $x = -4$ не принадлежит ОДЗ исходного уравнения (то есть множеству $[0; +\infty)$) и поэтому не является его корнем. Аналогично обстоят дела и с другими рассмотренными выше уравнениями (проверьте!).

Следовательно, одна из причин появления «посторонних» корней уравнения — это переход к уравнению с более широкой ОДЗ. К расширению ОДЗ и появлению «посторонних» корней могут привести, например, следующие преобразования:

- освобождение уравнения от знаменателя;
- приведение подобных членов;
- сокращение дробей;
- замена выражения $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2$ выражением $f(x)$.

Если в результате этих преобразований получено новое уравнение с более широкой ОДЗ, то необходима проверка. Чтобы отсеять «посторонние» корни, достаточно проверить, принадлежат ли ОДЗ исходного уравнения полученные в ходе решения корни.

Если же в результате этих преобразований получено уравнение с той же ОДЗ, что и исходное уравнение, то эти уравнения равносильны. Например, уравнение $(x + 1)^2 = 2(5x - 1) + 6$ равносильно уравнению $x^2 - 8x - 3 = 0$, полученному из него раскрытием скобок и приведением подобных членов.

«Посторонние корни» при указанных преобразованиях также можно отсеять простой проверкой, без нахождения ОДЗ.

При решении уравнений необходимо внимательно следить за каждым переходом от одного уравнения к другому.

Пример 13. Решить уравнение $x^2 + \frac{5x^2 - 10x}{x-2} - 14 = 0.$

Решение. Упростив выражение $\frac{5x^2 - 10x}{x-2} = \frac{5x(x-2)}{x-2} = 5x,$ получим уравнение $x^2 + 5x - 14 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = -7$, $x_2 = 2$. В результате этого преобразования получено уравнение с более широкой ОДЗ. Действительно, ОДЗ данного уравнения — это множество $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, а ОДЗ полученного уравнения — множество $(-\infty; +\infty)$. Число $x = 2$ не является корнем данного уравнения, ибо не приналеджит его ОДЗ.

Ответ: $x = -7$.

5. Метод замены переменной

Вы уже умеете решать квадратные и простейшие дробно-рациональные уравнения. Сейчас мы займемся решением более сложных рациональных уравнений. Общего рецепта, как решать любое уравнение, не существует. Однако существуют методы, которые полезны во многих случаях. Один из таких методов — метод замены переменной в уравнениях.

Рассмотрим уравнение $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$. Хотя это и уравнение четвертой степени, решить его нетрудно. Заметим, что неизвестное в уравнении входит только в четной степени (в нем отсутствуют члены с x и x^3). Это подсказывает целесообразность обозначения x^2 через t, т.е. $x^2 = t$ (обычно говорят, «введем новую переменную»). Тогда $x^4 = t^2$ и уравнение запишется как $t^2 - 3t + 2 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет два корня $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Возвращаясь к старой переменной x, получим два новых уравнения $x^2 = 1$ и $x^2 = 2$, корнями которых будут числа ± 1, $\pm\sqrt{2}$. Эти же числа являются корнями исходного уравнения.

Уравнение, которое мы решили, называется ***биквадратным*.** Как вы убедились, при решении подобных уравнений полезна замена $x^2 = t$. В других случаях для упрощения уравнений приходится выполнять более сложные замены переменной.

Пример 14. Решить уравнение $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.

Решение. Чтобы упростить уравнение, введем новую переменную $t = x^2 + x + 1$. Тогда уравнение примет вид: $t(t + 1) = 12$ или $t^2 + t - 12 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа $t_1 = -4$ и $t_2 = 3$. Но на этом решение задачи не заканчивается, так как мы нашли только корни вспомогательного уравнения. Возвращаясь к старой переменной x, получим, что

$x^2 + x + 1 = -4$, $x^2 + x + 1 = 3$. Дискриминант первого из этих уравнений $x^2 + x + 5 = 0$ равен -19, так что уравнение корней не имеет. Решая второе уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, находим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Эти числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: –2; 1.

Пример 15. Решить уравнение $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3.$

Решение. Если уравнение представить в виде $3\left(\frac{x^2 - 3x}{2}\right) - 6\left(\frac{2}{x^2 - 3x}\right) = 3,$ то легко заметить целесообразность замены $\frac{x^2 - 3x}{2} = t$. Выполнив эту замену, получим уравнение $3t - \frac{6}{t} = 3,$ которое равносильно квадратному уравнению $t^2 - t - 2 = 0$. Корнями квадратного уравнения являются числа $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Переходя к старой переменной, получим $\frac{x^2 - 3x}{2} = -1$ или $\frac{x^2 - 3x}{2} = 2$. Решив каждое из этих уравнений, найдём корни исходного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 4$.

Ответ: –1; 1; 2; 4.

Метод замены переменной требует большого искусства, так как совсем непросто увидеть, какую замену полезно выполнить. Чем больше разнообразных уравнений решено, тем легче будет справиться с новым.

6. Метод разложения на множители

В этом пункте мы познакомимся с ещё одним очень важным методом решения уравнений — методом разложения на множители. Этот метод сводит решение заданного уравнения к решению нескольких более простых уравнений.

Допустим, нужно решить уравнение $(x^2 - 2)(x - 3) = 0$. Несмотря на то, что это уравнение третьей степени, его легко решить. Действительно, произведение $(x^2 - 2)(x - 3)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей $(x^2 - 2)$ или $(x - 3)$ обращается в нуль. Следовательно, решив уравнения $x^2 - 2 = 0$ и $x - 3 = 0$, мы получим корни исходного уравнения: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 3$.

Обобщим сказанное. Если заданное **целое** уравнение удастся представить в виде $P_1(x) \cdot P_2(x) = 0$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — некоторые многочлены, то его ***решение сводится к решению уравнений $P_1(x) = 0$ и $P_2(x) = 0$. Объединив корни этих двух уравнений, мы получим все корни исходного уравнения.***

В этом случае говорят, что **уравнение $P_1(x) \cdot P_2(x) = 0$ равносильно совокупности уравнений $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$.**

Рассуждая аналогично, получим, что целое уравнение вида $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x) = 0$ равносильно совокупности трех уравнений $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = 0$.

Чтобы заменить данное уравнение $P(x) = 0$ совокупностью более простых уравнений, прежде всего, необходимо его левую часть разложить на множители. Если $P(x)$ — многочлен, то существуют специальные способы разложения его на множители. С некоторыми из них Вы уже знакомы. Это — вынесение множителя за скобки, группировка, использование формул сокращенного умножения. Например, многочлен $5x^3 - 5x$ можно разложить на множители, вынеся за скобки $5x$ и применяя формулы сокращенного умножения: $5x^3 - 5x = 5x(x^2 - 1) = 5x(x - 1)(x + 1)$.

Многочлен $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ можно разложить на множители, используя способ группировки:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^3 + 2x) = (x^2 + 1)^2 - 2x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 1 - 2x) = (x^2 + 1)(x - 1)^2.$$

Решим несколько уравнений методом разложения на множители.

Пример 16. Решить уравнение $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение. Как мы уже показали выше, уравнение можно преобразовать к виду $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = 0$. Следовательно, оно равносильно совокупности двух уравнений: $x^2 + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$. Первое из этих уравнений корней не имеет, корнем второго уравнения является единственное число $x = 1$. Это число является и корнем исходного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 17. Решить уравнение $(x^3 + 1)(x - 3) + (2x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$.

Решение. Так как $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, то вынесем за скобки общий множитель $x^2 - x + 1$. Получим уравнение $(x^2 - x + 1)((x + 1)(x - 3) + 2x - 1) = 0$ или $(x^2 - x + 1)(x^2 - 4) = 0$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений $x^2 - x + 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$. Первое уравнение корней не имеет. Корнями второго уравнения, а значит и исходного, являются числа 2 и – 2.

Ответ: 2; – 2.

Пример 18. Определить количество точек пересечения графиков функций $y = x^2(2x - 3)$ и $y = 9x$.

Решение. Приравняв ординаты точек пересечения графиков, получим уравнение $x^2(2x - 3) = 9x$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и вынесем общий множитель x. Получим уравнение $x(2x^2 - 3x - 9) = 0$, которое равносильно совокупности уравнений $x = 0$, $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Итак, графики функций пересекаются в точках с абсциссами $x = 0$, $x = 3$, $x = -\frac{3}{2}$, то есть они имеют три точки пересечения.

Ответ: три.

Замечание. Заметим, что если бы мы разделили обе части уравнения на x, то потеряли бы его корень $x = 0$. Делить обе части уравнения на какое-либо выражение ***опасно***! «Посторонние» корни удается отобрать с помощью проверки, а вот потерянные корни восстановить очень нелегко.

Пример 19. Решить уравнение $(x + 2)(4x^2 - 1) = 16x^4 - 8x^2 + 1$.

Решение. Заметив, что в правой части стоит полный квадрат, представим уравнение в виде $(x + 2)(4x^2 - 1) = (4x^2 - 1)^2$. Перенесём все члены уравнения в левую часть и вынесем общий множитель $4x^2 - 1$. Получим уравнение $(4x^2 - 1)(4x^2 - x - 3) = 0$, равносильное совокупности уравнений $4x^2 - 1 = 0$, $4x^2 - x - 3 = 0$. Корнями первого являются числа $\pm\frac{1}{2}$, второго — числа 1 и $-\frac{3}{4}$.

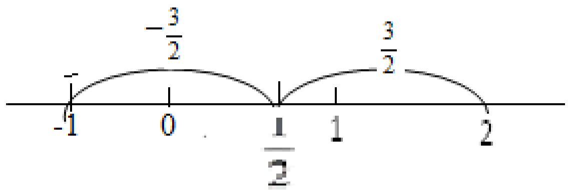

Рис. 1

Ответ: $\pm\frac{1}{2}$; 1; $-\frac{3}{4}$.

Если бы мы разделили обе части уравнения на $4x^2 - 1$, то потеряли бы корни $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

7. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

С простейшими уравнениями, содержащими неизвестное под знаком модуля, вы уже встречались. Например, таким уравнением является уравнение $|2x - 1| = 3$. Его можно решить двумя способами. Первый способ — использовать геометрический смысл модуля. Как известно, $|x_1 - x_2|$ — это расстояние между двумя точками на оси с координатами x_1 и x_2. Представив заданное уравнение в виде $2\left|x-\frac{1}{2}\right|=3$ или $\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$, найдем точки на оси, которые удалены от точки $\frac{1}{2}$ на расстояние $\frac{3}{2}$ (см. рис. 1). Это точки $x=-1$ и $x = 2$. Таким образом, корнями уравнения являются числа $x_1=-1$, $x_2 = 2$.

Второй способ решения вытекает из определения модуля. Модуль выражения ($2x$ – 1) равен 3 тогда и только тогда, когда оно принимает значение либо 3, либо – 3. Таким образом, уравнение $|2x – 1| = 3$ равносильно совокупности уравнений $2x – 1 = 3$, $2x – 1 =- 3$. Решив линейные уравнения, получим $x_1 = 2$, $x_2 =- 1$. Эти числа являются и корнями исходного уравнения.

А теперь попробуем решить более сложные уравнения с модулями.

Пример 20. Решить уравнение $\left|\frac{x^2-6x-7}{x^2+6x-7}\right|=1$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\frac{x^2-6x-7}{x^2+6x-7}=-1$, $\frac{x^2-6x-7}{x^2+6x-7}=1$. Это дробно-рациональные уравнения. Решим их по общей схеме. Вначале первое:

$$\frac{x^2-6x-7}{x^2+6x-7}=-1,\ x^2-6x-7=-x^2-6x+7,\ 2x^2=14,\ x^2=7,\ x_{1,2}=\pm\sqrt{7}.$$

Так как оба числа $\pm\sqrt{7}$ не обращают в нуль знаменатель дроби ($x^2 + 6x – 7$), то они являются корнями заданного уравнения. Решим второе уравнение: $\frac{x^2-6x-7}{x^2+6x-7}=1$, $x^2 – 6x – 7 = x^2 + 6x – 7$, $12x = 0$, $x = 0$.

Число $x = 0$ не обращает в нуль знаменатель уравнения, поэтому также является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 =-\sqrt{7}$, $x_3 = 0$.

Пример 21. Найти точки пересечения графиков функций $y = |x + 4 – x^2|$ и

$y = |x^2 - 5x + 4|$.

Решение. В точках пересечения графиков значения функций должны совпадать, т.е. $|x + 4 - x^2| = |x^2 - 5x + 4|$. Известно, что модули двух чисел совпадают тогда и только тогда, когда эти числа либо равны, либо противоположны. Поэтому полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $x + 4 - x^2 = x^2 - 5x + 4$ и $x + 4 - x^2 = -x^2 + 5x - 4$. Решив эти уравнения, получим соответственно: $x = 0$, $x = 3$, $x = 2$. Следовательно, $A(0; 4)$, $B(3; 2)$, $C(2; 2)$ — точки пересечения графиков функций.

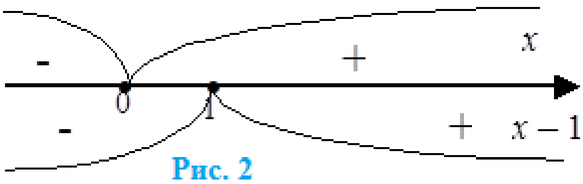

Рис. 2

Ответ: (0; 4); (3; 2); (2; 2).

Пример 22. Найти наименьший корень уравнения $\dfrac{5}{3-|x-1|} = |x| + 2$.

Решение. Чтобы раскрыть знаки модулей в уравнении, нужно учесть знаки выражений $(x - 1)$ и x. Проще всего это сделать, найдя точки, в которых функции, стоящие под знаком модуля, меняют знак. Выражение $x - 1$ меняет свой знак в точке $x = 1$. При $x < 1$ это выражение принимает отрицательные значения, при $x > 1$ — положительные. Выражение x меняет свой знак в точке $x = 0$. Нанесём эти точки на числовую ось и получим три интервала, на которых оба выражения сохраняют определённые знаки (см. рис. 2). На каждом из выделенных промежутков решим уравнение. Такой метод решения называют ***методом интервалов***.

1) Пусть $x \le 0$. Тогда уравнение примет вид $\dfrac{5}{3+x-1} = -x + 2$ или $\dfrac{5}{x+2} = 2 - x$. Это дробно-рациональное уравнение. Легко проверить, что оно не имеет корней.

2) Пусть $0 < x \leq 1$. На этом промежутке уравнение примет вид $\frac{5}{3+x-1}=x+2$ или $\frac{5}{x+2}=x+2$. Корнями этого дробно-рационального уравнения являются числа $x=-2\pm\sqrt{5}$. Число $-2-\sqrt{5}$ меньше нуля, то есть оно не принадлежит указанному промежутку и поэтому не будет корнем исходного уравнения. Число $-2+\sqrt{5}$ больше нуля и меньше 1 (последнее утверждение следует из неравенства $-2+\sqrt{5}-1=-3+\sqrt{5}<0$, так как $\sqrt{5}<3$). Следовательно, число $-2+\sqrt{5}$ принадлежит промежутку (0; 1] и является корнем заданного уравнения.

3) Пусть $x > 1$. На этом промежутке уравнение примет вид $\frac{5}{3-x+1}=x+2$ или $\frac{5}{4-x}=x+2$. Его корнями будут числа – 1 и 3. Только второе из этих чисел удовлетворяет условию $x > 1$ и поэтому является корнем исходного уравнения. Итак, уравнение имеет два корня $-2+\sqrt{5}$ и 3. Наименьший из этих корней $-2+\sqrt{5}$.

Ответ: $-2+\sqrt{5}$.

8. Уравнения с параметрами

Рассмотрим два уравнения с неизвестным x: $2x - 3 = 0$ и $ax = b$. Это два линейных уравнения относительно x, но второе отличается от первого тем, что в нем не определены коэффициенты a и b, т.е. вместо a и b можно подставить любые числа. В этом случае говорят, что заданное уравнение содержит параметры a и b. Вообще говоря, здесь мы имеем целое семейство линейных уравнений. Уравнение $2x - 3 = 0$ решить легко: $x = \frac{3}{2}$. Решение второго уравнения намного сложнее, так как могут возникнуть различные ситуации в зависимости от параметров a и b. Например, если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $x=\frac{b}{a}$. Если же $a = 0$, то уже нельзя делить обе части уравнения на a. Как же поступать в этом случае? Заметим, что левая часть уравнения $0 \cdot x$ равна нулю при любом значении неизвестного x. Поэтому, если $b = 0$, то уравнение превращается в верное равенство при любом x, т.е. любое число будет корнем данного уравнения. И, наконец, если $a = 0$, а $b \neq 0$, то корней нет ($x \cdot 0 \neq b$).

Итак, мы получили «полную информацию» об уравнении в зависимости от значений параметров. А именно: если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$; если $a = 0$, $b = 0$, то x — любое число; если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Несколько сложнее решается уравнение второй степени с параметром. Прежде всего, необходимо обратить внимание на старший коэффициент уравнения. Если он при некоторых значениях параметра обращается в нуль, то в этих случаях мы имеем дело с линейными уравнениями. Во всех остальных случаях уравнение будет квадратным. Дискриминант этого уравнения также может зависеть от параметра. Поэтому необходимо провести исследования, при каких значениях параметра уравнение будет иметь один корень, два корня или не иметь корней.

Все эти случаи должны быть отражены в ответе, т.е. указываются значения параметра и соответствующие ему корни уравнения.

Пример 23. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 2px + p^2 - p + 2 = 0$ имеет два корня?

Решение. Квадратное уравнение имеет два корня, если его дискриминант больше нуля. Составим дискриминант заданного уравнения. Он зависит от параметра p: $\frac{D}{4} = p^2 - p^2 + p - 2 = p - 2$. Дискриминант больше нуля, если

$p - 2 > 0$, т.е. $p > 2$.

Ответ: уравнение имеет два решения при $p > 2$.

Пример 24. Решить уравнение $(k - 1)x^2 - 3x - 1 = 0$.

Решение. Если $k = 1$, то данное уравнение принимает вид $-3x - 1 = 0$, т.е. превращается в линейное уравнение, которое имеет единственный корень $x = -\frac{1}{3}$.

Если $k \neq 1$, то имеем квадратное уравнение, решение которого зависит от его дискриминанта. Составим дискриминант: $D = 9 + 4(k - 1) = 4k + 5$.

Если $4k + 5 > 0$ и $k \neq 1$, то уравнение имеет два корня : $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4k+5}}{k-1}$.

Если $4k + 5 = 0$, т.е. $k = -\frac{5}{4}$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3}{-\frac{5}{4} - 1} = -\frac{4}{3}$. Наконец, если $4k + 5 < 0$, то уравнение корней не имеет.

Ответ: Если $k > -\frac{5}{4}$, $k \neq 1$, то $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4k+5}}{k-1}$; если $k = -\frac{5}{4}$, то $x = -\frac{4}{3}$; если $k = 1$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $k < -\frac{5}{4}$, то уравнение корней не имеет.

Пример 25. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a + 2)x + a = 3$ наименьшая?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Используя теорему Виета, находим

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a + 2)^2 - 2(a - 3) = a^2 + 2a + 10 = (a + 1)^2 + 9$.

Наименьшее значение это выражение принимает при $a = -1$. При $a = -1$ дискриминант уравнения $D = (a + 2)^2 - 4(a - 3) = (-1 + 2)^2 - 4(-1 - 3) = 17 > 0$. Следовательно, при $a = -1$ заданное уравнение имеет корни, причем сумма квадратов этих корней наименьшая.

Ответ: При $a = -1$.

Проверь себя! Тест для самоконтроля.

1. Сколько корней имеет уравнение $2x^2 + 6x + 3 = 0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Больше двух.

2. Укажите все точки пересечения графика функции $y = x^2 + 3x$ с осью абсцисс.

А. (0; 0). **Б.** (0; 0) , (– 3; 0). **В.** (0; 0), (3; 0).

Г. Точек пересечения с осью абсцисс нет.

3. Какое из следующих уравнений не имеет корней?

А. $x^2 + 3 = 0$. **Б.** $x^2 - 3 = 0$. **В.** $(x + 3)^2 = 0$. **Г.** $(x + 3)^2 = 3$.

4. Сколько общих точек имеют графики функций $y = (x - 1)^3$ и $y = (x - 1)^2$?

А. Ни одной. **Б.** Одну. **В.** Две. **Г.** Больше двух.

5. Диагональ квадрата равна $5\sqrt{2}$. Найдите сторону квадрата.

А. 5 или –5. **Б.** 5. **В.** $5\sqrt{2}$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

6. Укажите все значения параметра c, при которых уравнение $x^2 + 2x + c = 0$ имеет два различных корня.

А. $c < 1$. **Б.** $c \le 1$. **В.** $c > 1$. **Г.** $c > -1$.

7. Не решая уравнения, определите знаки корней уравнения $x^2 - 105x + 17 = 0$.

А. + +. **Б.** + –. **В.** – –. **Г.** Определить нельзя.

8. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет своими корнями противоположные числа. Какой из коэффициентов уравнения обязательно равен 0?

А. a. **Б.** b. **В.** c. **Г.** b и c.

9. При каких значениях c уравнение $x^2 - 14x + c = 0$ имеет корень –1?

А. –15. **Б.** 13. **В.** 15. **Г.** Таких значений c нет.

10. Из формулы $\frac{1}{x} - y = 2$ выразите переменную x.

А. $x = \frac{1}{y} + 2$. **Б.** $x = \frac{1}{y+2}$. **В.** $x = y + 2$. **Г.** $x = \frac{1}{2-y}$.

11. Квадратное уравнение с рациональными коэффициентами имеет корнем число $1+\sqrt{3}$. Укажите второй корень уравнения.

А. $\sqrt{3}$. **Б.** $\sqrt{3}-1$. **В.** $1-\sqrt{3}$. **Г.** $1+\sqrt{3}$.

12. Сколько точек с абсциссой, равной 3, лежит на окружности $(x - 4)^2 + y^2 = 1$?

А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Три.

13. Сколько корней имеет уравнение $2x^2 - |x| = 0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Три.

14. Наибольшее число корней системы двух квадратных уравнений с одним неизвестным равно …

А. 4. **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** 1.

15. Укажите среди ниже приведенных пару равносильных уравнений.

А. $x^2 + \dfrac{1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ и $x^2 = 1$. **Б.** $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$ и $x + 1 = 2$.

В. $(x - 1)(x^2 - 2) = 0$ и $x - 1 = 0$. **Г.** $(x - 1)(x^2 + 2) = 0$ и $x - 1 = 0$.

16. Известно, что $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$, $x \neq 0$. Наибольшее значение $\dfrac{y}{x}$ равно …

А. $\dfrac{1}{2}$. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** 4.

17. Укажите все значения a, при которых равносильны уравнения $\dfrac{x^2-5x+4}{x-a} = 0$ и $x^2 - 5x + 4 = 0$.

А. Любые a. **Б.** $a \neq 1$. **В.** $a \neq 1$, $a \neq 4$. **Г.** $a \neq 4$.

18. Сколько корней имеет уравнение $(x^2 - 16)^2 + |x^2 + 4x| = 0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Больше двух.

19. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение $ax + 3x = 2x + 1 + a$ имеет бесконечно много корней.

А. Таких a нет. **Б.** Любые a. **В.** $a \neq -1$. **Г.** $a = -1$.

20. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором пересекаются графики функций $y = 2x^2 + x$ и $y = a$.

А. $-\dfrac{1}{8}$. **Б.** $-\dfrac{1}{2}$. **В.** -1. **Г.** Такого значения a нет.

21. Укажите все значения параметра b, при которых корни квадратного уравнения $\left(1-b^2\right)x^2 + 2x + b - 1 = 0$ имеют разные знаки.

А. $b < -1$. **Б.** $-1 < b < 1$. **В.** $b > -1$, $b \neq 1$. **Г.** Таких значений b нет.

22. Сколько корней имеет уравнение $x(x^2 + 1) = 1$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Три.

Ответы к заданиям теста для самоконтроля

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
В	Б	А	В	Б	А	А	Б	А	Б	В
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Б	Г	В	Г	В	В	Б	Г	А	В	Б

Указания к заданиям теста для самоконтроля

1. Найдите дискриминант уравнения.

2. Решите уравнение $x^2 + 3x = 0$.

3. Учтите, что выражение x^2 не может принимать отрицательные значения.

4. Решите уравнение $(x - 1)^3 = (x - 1)^2$. Учтите, что сокращать обе части уравнения на $(x - 1)^2$ нельзя — потеряете корни.

5. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

6. Решите неравенство $D > 0$, где D — дискриминант заданного уравнения.

7. Воспользуйтесь теоремой Виета.

8. Воспользуйтесь теоремой Виета и тем, что $x_2 = -x_1$.

9. Вспомните определение корня уравнения.

10. Решите уравнение $\frac{1}{x} - y = 2$ относительно переменной x, считая y некоторым заданным числом.

11. Так как квадратное уравнение имеет рациональные коэффициенты, то, согласно теореме Виета, сумма и произведение его корней должны быть рациональными числами.

12. Подставьте $x = 3$ в уравнение окружности и найдите y.

13. Рассмотрите два случая: $x \geq 0$ и $x < 0$.

14. Решением системы двух уравнений с одним неизвестным является число, удовлетворяющее обоим уравнениям системы.

15. Сравните корни каждой пары уравнений. Решая уравнения, учитывайте возможность как приобретения «посторонних» корней, так и потери корней.

16. Разделив обе части уравнения на x^2 ($x \neq 0$) и, выполнив замену, решите полученное уравнение.

17. Уравнения будут равносильны, если значения a не совпадают с корнями уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$.

18. Сумма неотрицательных выражений равна нулю в том и только в том случае, если эти выражения одновременно обращаются в нуль, то есть при одном и том же значении переменной.

19. Сведите уравнение к линейному уравнению $kx = b$ и исследуйте, в каком случае оно имеет бесконечно много корней.

20. Выясните, при каких значениях параметра a уравнение $2x^2 + x = a$ имеет корни.

21. Примените теорему Виета к приведенному квадратному уравнению, учитывая, что произведение его корней отрицательно.

22. Представьте уравнение в виде $x^2 + 1 = \frac{1}{x}$ и постройте графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = \frac{1}{x}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2}{3} - \frac{7}{6}x + 1 = 0$; 2) $\left(0,3x - \frac{1}{5}\right)(x-3) = 2$; 3) $x^2 + 2x + 4\sqrt{2}(x+2) = 0$;

4) $\frac{7}{x+1} - \frac{x+4}{2-2x} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$; 5) $\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{9-6x+x^2} = \frac{3}{2x^2+6x}$;

6) $\frac{5x^2-19x+18}{x^2-3x+2} = 3$; 7) $\frac{4x^2-9}{2x+3} + 2x = -9$; 8) $\frac{x^2+x+16}{x^2-x+1} - \frac{36-x}{x^3+1} = \frac{x-6}{x+1}$;

9) $x^3 + 7x^2 - 8x = 0$; 10) $(4x-1)(8x+7) = (4x-1)^2$; 11) $(x+1)(x^2-5x) + 6x + 6 = 0$;

12) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; 13) $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 = 3x + 3$; 14) $\left(\frac{2x}{x+3}\right)^2 - \frac{14x}{x+3} = -10$;

15) $(2x + 1)^2(4x^2 + 4x) = 12$; 16) $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) = 12$; 17) $|x| - 2 = |x - 2|$;

18) $2(x - 4)^2 - |x - 4| - 1 = 0$; 19) * $\dfrac{(x^2 - x - 2)(x - 3)}{x - 2} = 3x - 9$;

20) * $2x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$.

2. Найдите точки пересечения графиков функций:

1) $y = x^3 - 5x^2$ и $y = x - 5$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ и $y = 27$;

3) $y = |3x - 1|$ и $y = \dfrac{1}{|4x - 1|}$; 4) * $y = \left(\dfrac{x^2 + 6}{x^2 - 4}\right)^2$ и $y = \left(\dfrac{5x}{4 - x^2}\right)^2$.

3. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = x^2 + \left(\sqrt{5x + 6}\right)^2$ принимает значение 2.

4. На графике функции $y = x^2 - 5x + 3$ найдите точки, в которых абсциссы и ординаты отличаются только знаком.

5. Какова область определения функции:

1) $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4} + \dfrac{x - 1}{2x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{(x - 2)^2} - 1}$; 3) * $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x^2 + 5x - 3)^2 - x^4}$?

6. Докажите, что коэффициенты уравнения $x^2 + bx + c = 0$ являются целыми числами, если его корни равны $5 + 3\sqrt{2}$ и $5 - 3\sqrt{2}$.

7. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Не решая уравнения, вычислите:

1) $\dfrac{x_1 + x_2}{2x_1x_2}$; 2) $x_2x_1^2 + x_1x_2^2$; 3) * $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

8. Один из корней уравнения $4x^2 - a(a - 5)x + 2a^2 = 0$ равен 1. Найдите a и другой корень уравнения.

9. * Найдите все значения k, при которых уравнение $x^2 - 2(k - 3)x - 3 + k^2 = 0$ имеет:

1) один корень; 2) два различных корня; 3) один из корней, равный нулю.

10. * Докажите, что график функции $y = x^2 + (2c + 6)x + 12c$ имеет общие точки с осью абсцисс при любых значениях параметра c.

11. Решите уравнение при любом значении параметра a:

1) $x^2 + 2(a - 1)x + a^2 - 1 = 0$; 2) $ax^2 - 6x + 9 = 0$.

12. * Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни. Составьте такое квадратное уравнение, чтобы его корни:

1) отличались от корней данного уравнения только знаками;

2) были обратны корням данного уравнения ($c \neq 0$);

3) были на 1 меньше корней данного уравнения.

13. * Докажите, что если уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ ($a \neq 0$) имеют общий корень, то и уравнение $cx^2 + ax + b = 0$ имеет тот же корень.

14. * Докажите, что уравнение $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$, где a, b, c — стороны треугольника, не имеет корней.

15. * Дано квадратное уравнение $x^2 + 2bx + c = 0$.

1) Найдите такую зависимость между параметрами c и b, при которой уравнение всегда имеет один корень. Постройте график этой зависимости.

2) Где на координатной плоскости расположены точки $A(b;\ c)$, для которых данное уравнение имеет два корня?

16. Два автомобиля выехали одновременно из пункта А в пункт В. Первый автомобиль двигался со скоростью 80 км/ч, второй — 60 км/ч. Через полчаса в том же направлении выехал третий автомобиль. Найдите скорость третьего автомобиля, если известно, что он догнал первого на 1 час 15 мин позже, чем второго.

17. Длина окружности заднего колеса повозки на 0,5 м больше длины окружности переднего колеса. На расстоянии 300 м переднее колесо делает на 50 оборотов больше заднего. Определите длину переднего и заднего колёс повозки.

18. В выпуклом многоугольнике число всех диагоналей равно 230. Определите число сторон этого многоугольника.

19. * Цифра десятков двузначного числа на 3 больше цифры его единиц. Произведение этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равно 574. Найдите это число.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

1. 1) $\frac{3}{2}$; 2; 2) -1; $4\frac{2}{3}$; 3) -2; $-4\sqrt{2}$; 4) 6; $-2,2$; 5) 9. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю. Учтите, что знаменатель дроби не должен равняться нулю; 6) 3; 7) корней нет; 8) $-2; \frac{7}{9}$. Приведите все дроби к наименьшему общему знаменателю; 9) – 8; 0; 1; 10) $-2; \frac{1}{4}$. Перенесите все члены уравнения в одну его часть и вынесите общий множитель; 11) – 1; 2; 3. Разложите левую часть уравнения на множители путём группировки; 12) ± 1; ± 3; 13) 1; – 2. Перенесите все члены уравнения в одну его часть и выполните замену переменной; 14) – 5. Уравнение целесообразно решать методом замены переменной; 15) – 1, 5; 0, 5. Раскройте квадрат суммы и сделайте замену; 16) 0; 4; 17) $x \geq 2$. Используя метод интервалов, раскройте модули; 18) 3; 5. Учитывая, что $(x-4)^2 = |x-4|^2$, выполните замену переменной; 19) 3; 20) ± 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. **2.** 1) $A(5;\ 0)$; $B(1;\ -4)$; $C(-1;\ -6)$. Задача сводится к решению уравнения $x^3 - 5x^2 = x - 5$; 2) $A(-6;\ 27)$. Обратите внимание, что при сокращении дроби можно получить посторонний корень; 3) $A(0;\ 1)$; $B\left(\frac{7}{12}; \frac{3}{4}\right)$; 4) $A(3;\ 9)$, $B(-3;\ 9)$. **3.** – 1. При решении уравнения учитывайте его ОДЗ. **4.** $A(1;\ -1)$; $B(3;\ -3)$. **5.** 1) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$. В область определения функции не входят те значения x, которые обращают в нуль знаменатели дробей; 2) $(-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$. Учтите, что $\sqrt{a^2} = |a|$; 3) $\left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$. При нахождении области определения функции учитывайте, что подкоренное выражение не может быть отрицательным, а знаменатель дроби не может равняться нулю. **6.** Воспользуйтесь теоремой

Виета. **7.** 1) $-\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) –45. Воспользуйтесь теоремой Виета. **8.** a = –4, x_2 = 8 или a = – 1, $x_2 = \frac{1}{2}$. **9.** 1) k = 2; 2) k < 2. Число корней квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта; 3) $k = \pm\sqrt{3}$. **10.** Докажите, что уравнение $x^2 + (2c + 6)x + 12c = 0$ имеет корни при любом значении c. **11.** 1) Если $a < 1$, то $x_{1,2} = 1 - a \pm \sqrt{2(1-a)}$; если $a = 1$, то $x_1 = x_2 = 0$; если $a > 1$, то корней нет; 2) если $a = 0$, то $x = \frac{3}{2}$; если $a < 1$, $a \neq 0$, то $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9(1-a)}}{a}$; если $a = 1$, то $x_1 = x_2 = 3$; если $a > 1$, то корней нет. **12.** 1) $ax^2 - bx + c = 0$; 2) $cx^2 + bx + a = 0$; 3) $ax^2 + (b + 2a)x + a + b + c = 0$. Сделав уравнение приведенным, воспользуйтесь теоремой Виета. **13.** Докажите вначале, что общим корнем первых двух уравнений является 1, то есть $a + b + c = 0$. **14.** Найдите дискриминант данного уравнения и при его оценивании примените свойство сторон треугольника. **15**. 1) $c = b^2$; 2) ниже параболы $c = b^2$. **16.** 100 км/ч. **17.** 1,5 м; 2 м. **18.** 23. **19.** 41.

Контрольное задание

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного задания и дополнительного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		**Контрольный тест**	**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	11 задач	8 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	15 задач	10 задач	7 задач
«отлично»	Решено не менее	18 задач	14 задач	9 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям теста самоконтроля, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Сколько корней имеет уравнение $x^2+3\sqrt{2}x+5=0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Больше двух.

2. Укажите все точки пересечения графика функции $y = x + 3x^2$ с осью абсцисс.

А. (0; 0). **Б.** $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$. **В.** (0; 0), $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. **Г.** (0; 0), $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

3. Какое из следующих уравнений имеет единственный корень?

А. $x^2 - 1 = 0$. **Б.** $x^2 + 1 = 0$. **В.** $(x - 1)^2 = 1$. **Г.** $(x - 1)^2 = 0$.

4. Найдите сумму корней уравнения $(x - 1)^2 = 3(x - 1)$.

А. 4. **Б.** 5. **В.** –5. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

5. Площадь квадрата равна $\frac{3}{4}$. Чему равна его сторона?

А. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Б.** $\frac{9}{16}$. **В.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Г.** $\frac{3}{8}$.

6. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 4x + 1 = 0$ имеет только один корень.

А. 4. **Б.** 0; 4. **В.** –4. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

7. Не решая уравнения $x^2-\sqrt{2}x-0{,}1=0$, определите знаки его корней.

А. + +. **Б.** + – . **В.** – –. **Г.** Определить нельзя.

8. Один из корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен нулю. Какой из коэффициентов уравнения обязательно равен нулю?

А. a. **Б.** b. **В.** c. **Г.** b и c.

9. При каком значении b уравнение $3x^2 - bx + 2 = 0$ имеет корнем число 2?

А. –7. **Б.** 7. **В.** 4. **Г.** Определить нельзя.

10. Из формулы $x + \frac{1}{y-2} = 1$ выразите переменную y.

А. $y = 2 + \frac{1}{1-x}$. **Б.** $y = 2 + \frac{1}{x-1}$. **В.** $y = 3 - x$. **Г.** $y = \frac{1}{1-x}$.

11. Корнями какого из уравнений являются числа $-4+\sqrt{3}$ и $-4-\sqrt{3}$?

А. $x^2 + 8x + 13 = 0$. **Б.** $x^2 - 8x + 13 = 0$. **В.** $x^2 - 8x - 13 = 0$. **Г.** $x^2 + 8x - 13 = 0$.

12. Сколько точек с ординатой 2 лежит на окружности $x^2 + (y-1)^2 = 3$?

А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Больше двух.

13. Сколько общих точек имеют графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = 2|x|$?

А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Больше двух.

14. Наибольшее число корней совокупности двух квадратных уравнений равно …

А. 4. **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** 1.

15. Укажите среди ниже приведенных пару равносильных уравнений.

А. $\frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{x+1}$ и $x^2 = 1$. **Б.** $x^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2 = 0$ и $x^2 + x = 0$.

В. $|x + 1| = 2$ и $(x + 1)^2 = 4$. **Г.** $x(x - 1) = 3x$ и $x - 1 = 3$.

16. Известно, что $3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0$, $y \neq 0$. Наименьшее значение $\frac{x}{y}$ равно …

А. –3. **Б.** –2. **В.** $-\frac{1}{2}$. **Г.** $\frac{1}{3}$.

17. Укажите все значения параметра b, при которых равносильны уравнения $x^2 + 2x - 3 + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x+b}$ и $x^2 + 2x - 3 = 0$.

А. При любом значения b. **Б.** $b \neq 1$. **В.** $b \neq 1$, $b \neq -3$. **Г.** $b \neq -1$, $b \neq 3$.

18. Сколько корней имеет уравнение $(x^3 + 1)^2 + |x^2 + x| = 0$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Больше двух.

19. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение $ax - 2x = 3(x - 1)$ имеет единственный корень.

А. Любые значения a. **Б.** $a \neq 2$. **В.** $a \neq 5$. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

20. Укажите все значения a, при которых графики функций $y = x^2 + 2x$ и $y = x + a$ не пересекаются.

А. $a \le -\frac{1}{4}$. **Б.** $a < -\frac{1}{4}$. **В.** $a > -\frac{1}{4}$. **Г.** $a > \frac{1}{4}$.

21. Укажите все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $(a-1)x^2 + (a-2)x + 1 = 0$ имеют разные знаки.

А. Таких значений a нет. **Б.** $a > 1$. **В.** $a < 1$. **Г.** $a > 2$.

22. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^3}{x^2+1} = 1$?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Три.

Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений.

1. Решите уравнения $2x^2 - 1 = 0$, $\sqrt{3}x^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)x - 1 = 0$ и расположите их корни в порядке убывания.

2. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 2x - 8}{16 - x^2} = \frac{1}{4 + x}$; 2) $\frac{16x^4 - 1}{16x^2 - 4} = 4x + 2{,}5$; 3) $x^3 + 1 + 4x(x^2 - x + 1) = 0$;

4) $x^4 + 5x^2 + x^3 + 5x = 0$; 5) $(x^2 + 6x)(x + 3)^2 + 14 = 0$; 6) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3$;

7) $x^2 - 6\left(\sqrt{x-3}\right)^2 - 13 = 0$; 8) $2x^2 - 5\sqrt{x^2} + 6x = 0$.

3. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются $-2\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{5}$.

4. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

1) $y = x^4 + 3$ и $y = 4x^2$; 2) $y = |3x^2 + 6x + 4|$ и $y = |x^2 + x + 2|$.

5. Какова область определения функции $y = \frac{x-3}{x^4 - 16x^2}$?

6. На графике функции $y = x^2 + 4x + 2$ найдите точки, у которых абсцисса равна ординате.

7. С аэродрома вылетели одновременно два самолёта: один на восток, другой – на юг. Через два часа расстояние между ними составляло 2 000 км. Найдите скорости самолётов, если скорость одного составляла $\frac{3}{4}$ скорости другого.

8. Два сварщика, работая вместе, выполнили заказ за 7 дней, причём второй начал работать на 1,5 дня позже первого. За сколько дней каждый из них может выполнить этот заказ, работая отдельно, если второму потребуется на 3 дня меньше, чем первому?

Дополнительное задание

1. Решите уравнение: 1) $\frac{|x^2 - 2x - 7| - 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = 0$; 2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x^2 = 15$;

3) $4x^2 + |2x^3 - x^2 - 3x| = 12x - 9$; 4) $ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$.

2. Найдите нули функции:

1) $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 19$; 2) $y = \sqrt{x+1} \cdot (4x^2 - 1)(x^2 + 3x - 18)$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{3x^2 + y^2}{xy}$, если известно, что

$2x^2 - 5x + 2y^2 + 10y + 5(x - 2)(y + 1) + 10 = 0$ и $y \neq 0$.

4. В скольких точках пересекаются графики функций $y = f(x)$ и $y = -f\left(\frac{1}{x}\right)$, если $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$?

5. При каких значениях a графики функции $y=\frac{4}{x}$ и $y = a - x$ имеют только одну общую точку? Найдите эту точку. Сделайте рисунок.

6. Найдите все значения k, при которых корни уравнения $x^2 + 2(a - 5)x + (a^2 - 7a + 13) = 0$ являются взаимно обратными числами.

7. Докажите, что если $c(a + b + c) \le 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни.

8. На плоскости дано несколько точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Всякие две точки соединены отрезком. Таких отрезков оказалось 190. Сколько точек было на плоскости?

9. Количество десятков двузначного числа вдвое больше количества его единиц. Если переставить цифры числа, то произведение вновь полученного числа на первоначальное будет равно 2268. Найдите это число.

Указания к задачам дополнительного задания

1. 1) Разложите многочлен, который стоит в знаменателе, на множители способом группирования.

2) Преобразуйте выражение, которое содержит корень.

3) Задача подобна заданию 18 теста для самоконтроля.

4) См. решение примера 23 из п. 8.

2. 1) Выделите в многочлене полный куб.

2) Учтите область определения функции.

3. Проанализируйте решение задания 16 теста для самоконтроля.

4. Найдите функцию $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$, заменив переменную x на переменную $\frac{1}{x}$ в выражении $\frac{x+1}{x-1}$.

5. Сведите решение задачи к исследованию квадратного уравнения с параметром.

6. Сначала установите, для каких значений a уравнение имеет два корня. Потом воспользуйтесь теоремой Виета.

7. Оцените дискриминант квадратного уравнения с учетом данного неравенства.

9. Любое двузначное число можно записать в виде $10x + y$, где x — цифра десятков, y — цифра единиц.

Олимпиадные задачи

1. Докажите, что уравнение $(x – a)(x – b) + (x – b)(x – c) + (x – c)(x – a) = 0$ имеет действительные корни.

2. Уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + px + q = 0$ имеют общий корень. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являютя другие корни этих уравнений.

3. Если p_1, p_2, q_1, q_2 — действительные числа, удовлетворяющие уравнению $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, то хотя бы одно из уравнений $x^2 +p_1x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеет действительные корни. Докажите это.

4. Не решая уравнения $(x^2 + 4x)^2 – 7(x^2 + 4x) + 5 = 0$, найдите сумму квадратов его корней.

5. Даны уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (1) и $–ax^2 + bx + c = 0$ (2). Докажите, что если x_1 и x_2 — какие-то корни уравнений (1) и (2), то найдётся такой корень x_3 уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, что будет справедливо одно из неравенств $x_1 \le x_2 \le x_3$ или $x_1 \ge x_2 \ge x_3$.

6. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, то он не имеет целых корней.

7. Докажите, что уравнение $x^{12} – x^9 + x^4 – x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

8. Найдите квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, который в точках 2007, 2008, 2009 принимает соответственно значения 3, 0 и 3.

9. Решите уравнение $x^3 + 142x + 2007 = 0$.

10. Решите уравнение $2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2 = 0$.

Указания к решению олимпиадных задач

1. Сведите к квадратному уравнению и докажите, что его дискриминант является неотрицательным числом.

2. Воспользуйтесь теоремой Виета. Выразите общий корень через коэффициенты уравнений.

3. Докажите, что сумма дискриминантов уравнений является неотрицательной.

4. Выполните замену переменной и воспользуйтесь теоремой Виета.

5. Вычислите значение трёхчлена $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ в точках x_1 и x_2, сравните знаки этих значений.

6. Допустите, что многочлен имеет целый корень x_0 и рассмотрите два случая: этот корень является чётным числом и нечетным числом. В первом случае рассмотрите разность $P(x_0) - P(0)$, во втором — $P(x_0) - \mathrm{P}(1)$.

7. Рассмотрите три случая: $x \le 0$, $0 < x \le 1$, $x > 1$ и докажите, что в каждом из этих случаев многочлен принимает положительные значения.

8. Можно составить и решить систему трех уравнений с тремя неизвестными.

9. Разложите левую часть на множители, воспользовавшись разложением свободного члена уравнения на множители.

10. Можно обе части уравнения разделить, например, на $(x^2 + 1)^2$, а потом выполнить замену переменной.

Послесловие

Необходимость решать уравнение как первой, так и второй степени еще в древние времена была вызвана потребностями нахождения площадей земельных участков, построением крепостей в военных целях, развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне. Правила решения этих уравнений, которые изложены в вавилонских трудах, близки к современным, но неизвестно, как вавилоняне дошли до них.

Дальнейший взнос в проблему решения квадратных и более сложных уравнений внесли индийские ученые (Ариабхатта, V ст., Брахмагупта, VII ст.), среднеазиатские (ал-Хорезми), европейские математики (Леонардо Фибоначчи, XIII ст., Тарталья, Кардано, Бомбелли, XVI ст.).

Введение современной символики в математику, развитие и обогащение учения о числе существенно способствовали прогрессу и в области изучения и решения произвольных уравнений. Обогащались как типы уравнений, так и методы их решения. В частности, существенное развитие приобрела теория приближенного решения уравнений, что важно для разнообразных применений математики.

Благодаря открытию метода координат, начиная с XVII ст. становится возможным графическое решение уравнений. По графику можно, в первую очередь, установить количество решений уравнения. Но найдя это, следует точно сформулировать и доказать соответствующие утверждения: ведь графики нельзя построить абсолютно точно, точки их пересечения можно найти только приближенно.

С дальнейшим изучением математики в связи с введением новых понятий, функций, средств моделирования процессов и явлений окружающего мира будет обогащаться и содержание понятия "уравнение". Наиболее завершенной на наше время является теория алгебраических уравнений.

Алгебраическое уравнение имеет вид $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Число n называется степенью уравнения. Уравнения первой степени решаются с помощью арифметических операций. Формула для решения уравнения второй степени содержит операцию извлечения квадратного корня. Решение уравнения произвольной степени в течение многих веков считалось главной задачей алгебры.

В 1799 году Гаусс доказал замечательную теорему, которую часто называют основной теоремой алгебры:

Любое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один корень. В основной теореме алгебры идет речь о так называемых комплексных корнях.

Отметим, что гипотеза о правильности этой теоремы высказывалось почти за три столетия до этого. Параллельно проходили поиски формул или алгоритмов для решения алгебраических уравнений произвольной степени.

В XVI веке эта задача была решена для уравнений 3-й и 4-й степеней. Хотя соответствующие формулы громоздки для практического вычисления корней, принципиальное значение их большое: они позволяют записать корни уравнений 3-й и 4-й степеней как некоторую функцию от коэффициентов этих уравнений. Эта функция содержит операции извлечения корней 3-й и 4-й степеней. Долго изучали вопрос о том, существует ли формула, которая выражает корни уравнения 5-й степени через его коэффициенты с помощью арифметических действий и радикалов. Негативный ответ на этот вопрос был получен в работах Абеля (1802 - 1829) и Галуа (1811 - 1832) в первой половине XIX ст.

В школьном курсе математики рассматриваются системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Те методы, которые использовались для их решения, можно обобщить на произвольную систему уравнений первой степени. Если количество уравнений равняется количеству неизвестных, применяется аппарат теории определителей (детерминантов). Но этого аппарата не хватает для изучения таких систем линейных уравнений, в которых количество уравнений не равно количеству неизвестных. Оказалось необходимым, в частности, разработать так называемую теорию матриц, то есть систем чисел, расположенных в квадратные или прямоугольные таблицы из нескольких строк и столбиков. Эта теория оказалась очень глубокой и нашла применение далеко за пределами теории систем линейных уравнений.

Тем, кто хочет продолжить работу над темой "Уравнения", можно порекомендовать такие направления этой работы:

1. Овладение методами нахождения целых корней уравнений с целыми коэффициентами (теорема Безу, схема Горнера и т. п).

2. Знакомство с функциональными методами решения уравнений, неравенств, их систем.

Афанасьева Ольга Николаевна

Бродский Яков Соломонович

Павлов Александр Леонидович

Слипенко Анатолий Константинович

Уравнения

Пособие для дополнительного изучения математики

обучающимися 9 классов

Учебное пособие