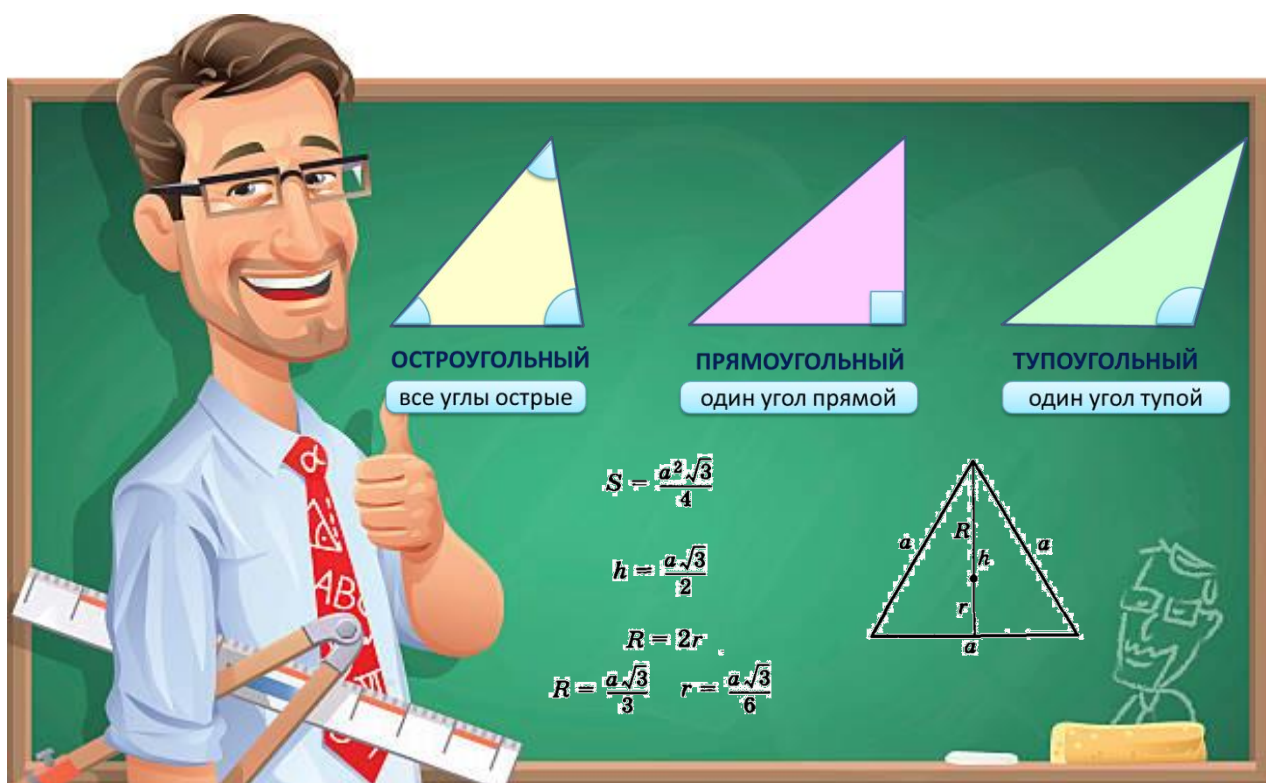




Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л.,
Слипенко А. К.

Геометрия треугольников, четырехугольников, окружностей



Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9-х классов

Донецк 2025

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К. Геометрия треугольников, четырёхугольников, окружностей. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов.— Донецк. — 58 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-х классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике в открытом математическом колледже (ОМК), рекомендованной Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики (приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 25.06.2016г. № 863).

Пособие ориентировано на повторение основного содержания школьного курса планиметрии, развитие у обучающихся навыков решения нестандартных планиметрических задач. В нем приведены формулировки утверждений, часто используемых при решении задач, образцы решений планиметрических задач, а также советы и указания по их решению. Оно содержит тесты для самоконтроля с ответами и указаниями, которые помогут повторить материал, изученный в школе, а также решить задачи для самостоятельной работы, при необходимости применив указания.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Завершается пособие контрольным заданием, работа над которым обеспечивает контроль усвоения содержания темы. Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач.

Пособие может быть использовано обучающимися девятых классов, учителями математики для организации внеурочного обучения математике.

Содержание

Предисловие	4
Введение для обучающихся	5
Введение для учителей	6
Геометрия треугольников, четырехугольников, окружностей.....	7
Введение	7
1. Геометрия треугольников	8
2. Геометрия четырехугольников.....	21
3. Геометрия окружностей.....	26
4. Как решается геометрическая задача	31
Тест для самоконтроля.....	38
Задачи для самостоятельной работы.....	43
Указания к задачам для самостоятельной работы.....	46
Контрольное задание	47
Контрольный тест	48
Инструкция по выполнению теста	48
Основное задание	51
Указания к задачам основного задания	53
Дополнительное задание	53
Указания к задачам дополнительного задания.....	55
Олимпиадные задачи	55
Указания к решению олимпиадных задач	56
Послесловие	57

Предисловие

Математическое образование является базой профессионального образования для многих профессий. Поэтому очень важно помочь обучающимся получить добротную математическую подготовку.

Предлагаемое пособие направлено на углубление математических знаний девятиклассников, на совершенствование их умений решать сложные задачи, в частности прикладные, на подготовку к итоговому оцениванию по математике, к продолжению обучения в профильной школе.

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков решения планиметрических задач различными методами.

В пособии содержатся определения понятий и формулировки утверждений, которые изучались в школьном курсе математики, некоторое их расширение, углубление. объяснения и советы, которые помогут обучающимся при решении задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Каждый блок содержит образцы решения задач. Овладеть необходимым теоретическим материалом, проверить степень его усвоения помогут обучающимся вопросы для самоконтроля. К ним приведены ответы. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения и указания к ним.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного и дополнительного заданий. Выполнение контрольного теста заключается в выборе правильного ответа из нескольких приведенных. В зависимости от намерений и возможностей обучающихся, они могут выполнять только контрольный тест, или контрольный тест и основное задание, или контрольный тест, основное и дополнительное задание.

Пособие предназначается для обучающихся 9-х классов разного типа образовательных учреждений, учителей математики. Оно может быть частично использовано обучающимися 10-х и 8-х классов.

Введение для обучающихся

Уважаемые друзья!

Настоящее пособие посвящено повторению основного содержания школьного курса планиметрии, развитию навыков решения планиметрических задач различными методами: геометрическим (требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем), алгебраическим (искомая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами фигуры или с помощью уравнений), комбинированным (в процессе решения применяется и геометрический, и алгебраический методы).

Выполнение контрольного задания, приведенного в пособии, поможет вам развить свои умения решать нестандартные планиметрические задачи. Все необходимые для выполнения контрольного задания сведения и разъяснения приведены в пособии.

Убедиться в том, что вы усвоили данную тему, помогут тест для самоконтроля и задания для самостоятельного решения с ответами и указаниями, содержащиеся в пособии. Если ваши ответы на тестовые задания не совпадают с приведенными в пособии, проанализируйте ошибки и учтите их в своей дальнейшей работе.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач. Работа над контрольным тестом состоит в выборе для каждого тестового задания правильного ответа среди предложенных. Помните, что правильный ответ среди них всегда имеется, и он ровно один.

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений. Дополнительное задание предполагает решение более сложных задач. В пособии приведены олимпиадные задания для тех, кто хотел бы глубже овладеть методами решения планиметрических задач.

Надеемся, что работа над пособием будет для вас интересной и полезной.

Желаем вам успехов!

Введение для учителей

Уважаемые коллеги!

Настоящее пособие может быть использовано для организации дополнительного обучения математике, проведения факультативных занятий в 9-ом классе. Оно позволит также организовать самостоятельное изучение обучающимися математики, дополнительного к школьному.

Приведенный в пособии теоретический материал, который сопровождается решением типовых задач, достаточен для обеспечения готовности к самостоятельной работе над заданиями. Эту готовность можно проверить с помощью теста для самоконтроля. Наличие ответов и указаний к заданиям теста дает возможность корректировать подготовку учеников к обучению. В пособии помещены задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним. Оказание помощи в их решении является важной составляющей в управлении самостоятельной работой обучающихся. Формирование у обучающихся определенной последовательности действий при проработке учебного материала является необходимым условием формирования умения самостоятельно учиться.

Предложенное пособие может быть использовано как для организации индивидуального обучения, так и для проведения факультативов и других коллективных форм обучения. В начале рассмотрения темы необходимо помочь обучающимся осознать главную цель темы, ее основных заданий. Сжатый обзор теоретического материала и рекомендации к его проработке являются следующим шагом в работе с обучающимися. Наибольшее внимание следует уделить решению задач для самостоятельной работы. Именно они готовят обучающихся к выполнению контрольного задания. Целесообразно сделать акцент на самоконтроле. Надеемся, что предложенное пособие будет вашим надежным помощником в организации обучения математике, дополнительного к школьному, в организации самостоятельной работы обучающихся, в обеспечении предпрофильного обучения математике.

Желаем вам успехов в обучении и воспитании детей!

Геометрия треугольников, четырехугольников, окружностей

Введение

Какие задачи школьной математики считаются самыми сложными? По-видимому, большинство из вас ответит: геометрические. Почему? Потому, что в алгебре разработано много алгоритмов решения типовых задач. Если есть алгоритм, то есть программа действий, а трудности, если они возникают, имеют чаще всего технический характер, а не принципиальный.

Другое дело — задачи геометрические. Алгоритмов их решения, как правило, нет, выбрать теорему, с помощью которой можно решить задачу, из большого списка геометрических утверждений тоже непросто. Поэтому главный рецепт для решения геометрических задач можно сформулировать так: желаешь научиться решать задачи — решай их!

Обучение геометрии является важным средством развития человека, в частности развития его логического мышления, образного мышления (в том числе и пространственного). Овладение планиметрией является необходимым условием усвоения стереометрии — геометрии пространства. Геометрические знания во все времена составляли сердцевину полноценного общего образования.

Данное пособие посвящено систематизации и углублению знаний и умений, связанных с основными геометрическими фигурами планиметрии и методами решения планиметрических задач. Именно благодаря решению задач можно основательно повторить, систематизировать и углубить свои знания. Теоретический материал в планиметрии безграничен. Поэтому важно сконцентрировать внимание на ключевых утверждениях и хорошо их усвоить. Предложенная в пособии система задач направлена именно на это.

Важную роль в пособии играют образцы решения задач. При решении геометрических задач обычно используются три главных метода: *геометрический* — когда необходимое утверждение получается с помощью логических рассуждений из ранее доказанных теорем; *алгебраический* — когда искомая

геометрическая величина вычисляется на основе разных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений; **комбинированный** — когда на одних этапах решения задачи проводится геометрическим методом, а на других — алгебраическим.

Овладение методами решения геометрических задач будет эффективнее, если рассматривать на примере одной задачи возможности использования разных геометрических и алгебраических методов. Поэтому советуем после решения любой задачи, в частности и той, которая разобрана в пособии, еще раз вернуться к ней и попробовать решить ее иначе.

Безусловно, работа над этим пособием не исчерпывает повторения всей планиметрии, а является лишь важным шагом на пути подготовки к итоговым экзаменам, к продолжению обучения в профильной школе.

1. Геометрия треугольников

Планиметрические задачи на вычисление и доказательство зачастую сводятся к решению треугольников, т.е. к вычислению их элементов (сторон, углов, высот, медиан, биссектрис) по некоторым из них. Одним из методов, применяемых при этом, является выделение прямоугольного треугольника, после чего всё сводится к работе с этим треугольником. При этом используется чаще всего теорема Пифагора и соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника с помощью тригонометрических функций.

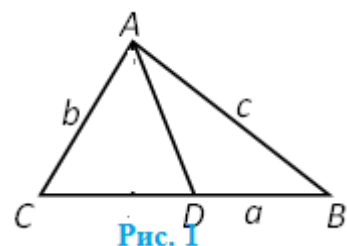
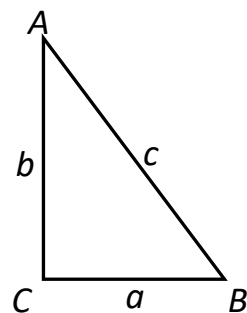
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

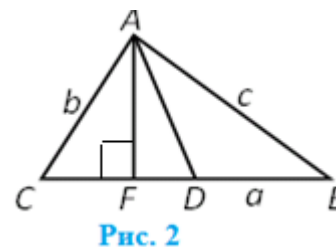
$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$$

Задача 1. Выразить медиану AD треугольника ABC через (рис. 1) его стороны a , b , c .

Решение. Выделим прямоугольный треугольник, одной из сторон которого будет медиана AD . Для



этого достаточно провести высоту AF . Будем предполагать, что угол C — острый. Тогда высота AF пересечёт сторону BC , а не её продолжение (см. рис. 2).



Обозначим CF через x , тогда $FB = a - x$. Из прямоугольных треугольников AFC и AFB соответственно имеем: $AF^2 = b^2 - x^2$, $AF^2 = c^2 - (a - x)^2$. Откуда $b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2$. Решая это уравнение относи-

тельно x , получим $x = CF = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$. Далее,

$$DF = CD - CF = \frac{a}{2} - \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a};$$

$$AF^2 = AC^2 - CF^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} \right)^2.$$

Из треугольника ADF имеем

$$AD^2 = AF^2 + FD^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c^2 - b^2}{2a} \right)^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2);$$

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Аналогично задача решается, если угол C тупой, то есть если точка F лежит на продолжении стороны BC . Рекомендуем рассмотреть этот случай самостоятельно.

Ответ. $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$

В этой задаче для нахождения неизвестной медианы было составлено уравнение: один и тот же элемент (высота AF) выражался через известные и неизвестные величины двумя различными способами и полученные выражения приравнивались. Этот метод часто используется в планиметрии.

В следующей задаче также возможны различные значения для данных, но, в отличие от задачи 1, методы решения для различных случаев отличаются друг от друга.

Задача 2. Внутри угла величиной α с вершиной в точке O взята точка A . Расстояние от точки A до одной из сторон угла равно a , а проекция OA на другую его сторону равна b . Найти OA .

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда заданный угол острый. Пусть проекция точки A на одну сторону угла — точка B , а на другую — точка C , $AB = a$, $OC = b$ (рис. 3).

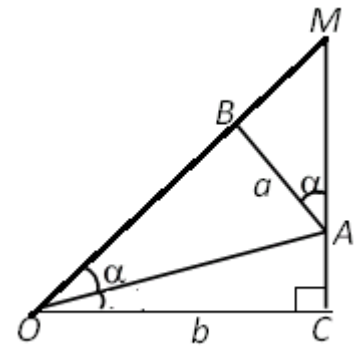


Рис. 3

Продолжим AC до пересечения с OB в точке M .

Из треугольника OCM имеем $OM = \frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha}$.

Углы BAM и BOC равны между собой, так как они дополняют один и тот же угол BMA до 90° . Из прямоугольного треугольника AMB получим

$$BM = AB \cdot \operatorname{tg} \alpha = a \cdot \operatorname{tg} \alpha. \text{ Тогда } OB = OM - BM = \frac{b}{\cos \alpha} - a \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{b - a \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Значит, } OA = \sqrt{OB^2 + BA^2} = \sqrt{\left(\frac{b - a \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + a^2} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \sin \alpha}.$$

Задача решена в предположении, что угол BOC острый. А что будет в других случаях?

Если $\alpha = 90^\circ$ и $a = b$, то OA может принимать любое значение, большее a (рис. 4). Если же $a \neq b$, то задача не имеет решения.

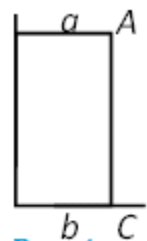


Рис. 4

Пусть $\alpha > 90^\circ$. Возможны три случая расположения точки A относительно сторон угла (рис. 5).

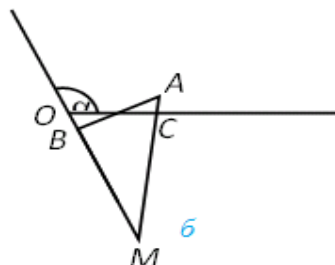
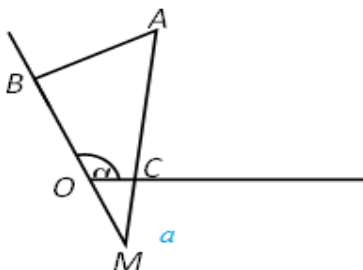
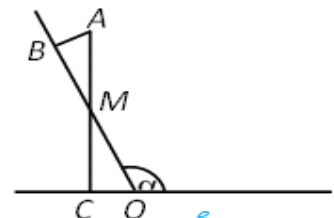


Рис. 5



$$\text{В первых двух случаях получим } OA = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}{\cos \alpha}.$$

В третьем случае $OA = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \alpha}}{\cos \alpha}$.

Ответ. Если $0 < \alpha < 90^\circ$, то $OA = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}$.

Если $\alpha = 90^\circ$, то при $a = b$ $OA > a$, при $a \neq b$ решения нет.

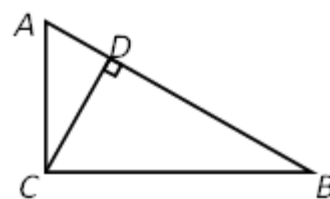
Если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то в зависимости от расположения точки A (см. рис. 5)

$$OA = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}{\cos \alpha} \quad \text{или} \quad OA = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \alpha}}{\cos \alpha}.$$

Рассмотренная задача показывает, что окончив решение, необходимо подумать, не упущены ли какие-то случаи, нюансы, т. е. провести исследование, анализ решения. И вообще, при выполнении чертежа нужно попытаться рассмотреть все возможные конфигурации, соответствующие условиям задачи. В некоторых случаях, хотя рассуждения для каждого варианта будут иметь некоторые отличия, но ответ будет одним и тем же. Например, в задаче 1 для острого и тупого угла. В других случаях ответы будут различные (как в задаче 2). В третьих с помощью рассуждений можно доказать невозможность той или иной конфигурации.

Приведём несколько утверждений, связанных с прямоугольным треугольником, полезных при решении задач.

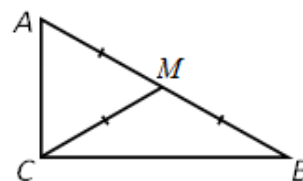
Высота CD , опущенная на гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC , делит этот треугольник на два подобных между собой и подобных исходному треугольнику.



$$CD^2 = AD \cdot BD; \quad AC^2 = AB \cdot AD; \quad BC^2 = AB \cdot BD.$$

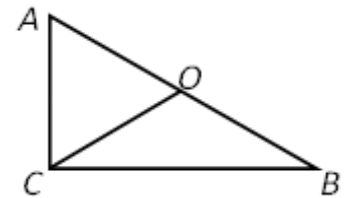
Медиана, выходящая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы.

$$CM = \frac{1}{2} AB.$$



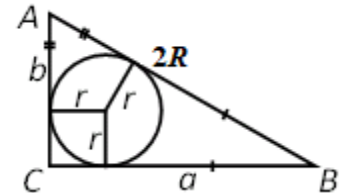
Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы.

$$R = AO = BO = CO = \frac{1}{2}AB.$$



Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружности.

$$a + b = 2R + 2r.$$



В следующей задаче выполняется дополнительное построение, которое часто применяется в задачах, где речь идёт о медианах.

Задача 3. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $BSKM$. Доказать, что отрезок DM в два раза больше медианы BP треугольника ABC .

Решение. Построим рисунок по условию задачи (рис. 6). Так как надо доказать, что $DM = 2BP$, то можно попытаться удвоить медиану BP , построив треугольник до параллелограмма $ABCF$, а затем доказать, что $DM = BF$. Для выполнения указанного построения можно медиану BP продлить, на продолжении отложить $PF = BP$ и соединить точку F с C и A .

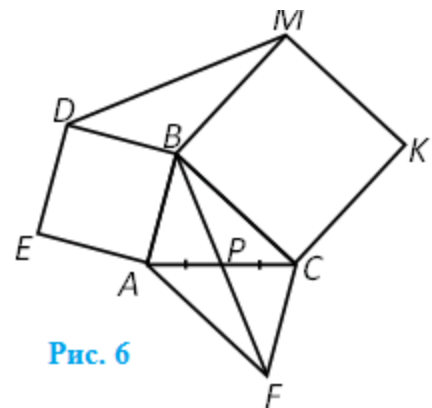


Рис. 6

Существуют три основных пути геометрического доказательства равенства двух отрезков.

1) рассматривают эти отрезки как стороны двух треугольников и доказывают, что такие треугольники равны;

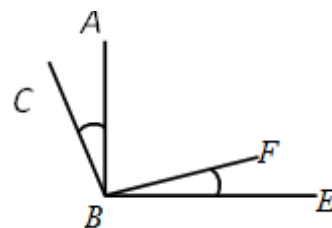
2) рассматривают эти отрезки как стороны одного треугольника и доказывают, что этот треугольник равнобедренный;

3) заменяют отрезок a равным ему отрезком a' , отрезок b равным ему отрезком b' и доказывают, что $a' = b'$.

Воспользуемся первым путём. Рассмотрим треугольники DMB и BCF . У них: $CF = AB = BD$, (как противоположные стороны параллелограмма $ABCF$); $BC = BM$, (как стороны квадрата $BMKC$); $\angle DBM = \angle BCF$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Значит, $\triangle DMB = \triangle BFC$ (по двум сторонам и углу между ними) а потому $DM = BF$. Так как $BF = 2BP$, то $DM = 2BP$. ■

Эта задача решена чисто геометрическим методом. При её решении мы воспользовались теоремой о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами.

Если углы ABC и FBE оба острые или оба тупые и $AB \perp BE$, $BC \perp BF$, то $\angle ABC = \angle FBE$.



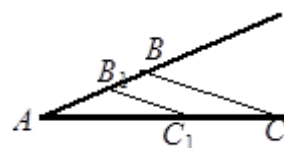
В рассмотренной задаче 3 мы также воспользовались дополнительным построением — продолжили отрезок на определённую длину. Приходится делать и другие дополнительные построения: проводить прямую, параллельную или перпендикулярную какой-то прямой, проводить вспомогательную биссектрису, окружность и др.

Часто при решении геометрических задач используется теорема Фалеса и её обобщение — теорема о пропорциональных отрезках. Напомним их.

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

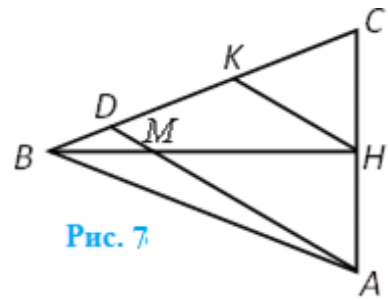


Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.



$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}$$

Задача 4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, BH — высота (рис 7). На стороне BC взята точка D так, что $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{4}$. В каком отношении отрезок AD делит высоту BH ?



Решение. Если в задаче требуется найти отношение каких-либо величин, нужно ввести в рассмотрение какую-либо линейную величину, считая её известной, и выразить через неё те величины, отношение которых требуется найти.

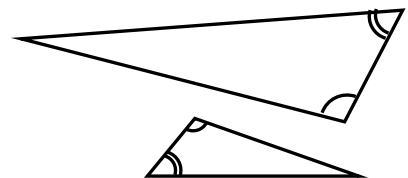
Пусть $BD = a$, тогда $CD = 4a$, $AB = BC = 5a$. Проведём $HK \parallel AD$. Так как HK — средняя линия треугольника ADC , то $DK = KC = 2a$. Применим теорему о пропорциональных отрезках. Если M — точка пересечения отрезков AD и BH , то

$$\frac{BM}{MH} = \frac{BD}{DK}; \text{ но } \frac{BD}{DK} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}. \text{ Значит, } \frac{BM}{MH} = \frac{1}{2}.$$

Ответ.1:2.

Иногда решить задачу помогает подобие треугольников. Чаше применяется первый признак подобия треугольников.

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Однако в некоторых задачах используются и другие признаки.

Два треугольника подобны, если:

две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы между ними равны;

три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого.

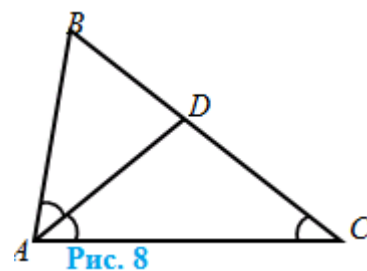
При составлении отношений соответствующих сторон подобных треугольников обращайте внимание на порядок выбора треугольников (то есть в

числителях отношений должны быть длины сторон одного треугольника, а в знаменателях — другого) и помните, что соответственные стороны лежат против равных углов.

Следует иметь в виду, что в подобных треугольниках равны между собой не только отношения соответствующих сторон, но и отношения соответствующих высот, медиан, радиусов вписанных или описанных окружностей, периметров и вообще любых соответствующих линейных элементов или их сумм.

Задача 5. В треугольнике ABC известно, что угол A в два раза больше угла C , сторона BC на 2 см больше стороны AB , $AC = 5$ см. Найти AB и BC .

Решение. Условие о том, что угол A вдвое больше угла C , наталкивает на мысль о целесообразности проведения биссектрисы угла A : в этом случае образуются равные углы (рис. 8). Пусть AD — биссектриса угла A , тогда $\angle DAC = \angle DCA$ и треугольник DAC — равнобедренный, $AD = DC$.



Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$. Тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$. Треугольники BAD и BCA подобны, так как $\angle B$ — общий, $\angle BAD = \angle BCA$ (первый признак). Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AD} \quad \text{или} \quad \frac{x}{x+2-y} = \frac{x+2}{x} = \frac{5}{y}.$$

Получили систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2-y} = \frac{5}{y}; \\ \frac{x+2}{x} = \frac{5}{y}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy = 5x - 5y + 10; \\ xy + 2y = 5x. \end{cases}$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим $-2y = -5y + 10$,

т. е. $y = \frac{10}{3}$. Значит, $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{2}$, откуда $x = 4$.

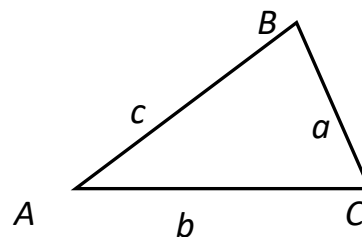
Ответ. $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Одной из наиболее применимых теорем в планиметрии является **теорема косинусов**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos A$$

Она позволяет:

- а) по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону;
- б) по трём сторонам треугольника находить косинусы его углов;
- в) устанавливать вид треугольника.



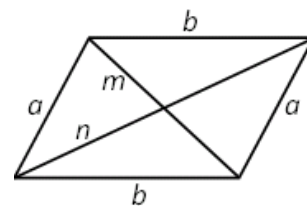
Из теоремы косинусов вытекает следующее утверждение.

Треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли квадрат наибольшей стороны соответственно меньше, равен или больше суммы квадратов двух других сторон.

Ещё одним из следствий теоремы косинусов является теорема о соотношении между сторонами и диагоналями параллелограмма.

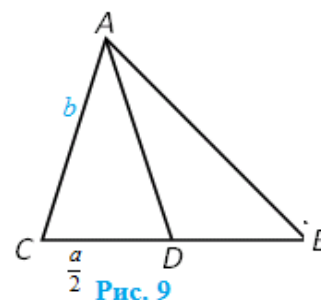
Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон

$$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2).$$



Обратимся ещё раз к задаче 1. Многие задачи допускают несколько способов решения. Первый способ был чисто алгебраическим: искомая геометрическая величина вычислялась с помощью уравнений и на основании зависимостей между элементами треугольника. Рассмотрим ещё два способа, один из которых алгебраический, а второй можно отнести к комбинированным.

2-й способ решения задачи 1. Составим вначале план решения задачи, не производя вычислений. Медиана AD может быть определена из треугольника ACD , в котором $AC = b$, $CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ (рис 9). Неизвестный угол C может быть найден из треугольника ABC по тео-



реме косинусов. План решения составлен. Из треугольника ABC по теореме косинусов имеем: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$, или $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Отсюда $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$. Теперь из треугольника ADC вычислим AD^2 :

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos C = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2b \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$\text{Ответ: } AD = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

3-й способ решения задачи 1. Опять воспользуемся дополнительным построением: удвоением медианы. Продлим медиану AD и на её продолжении отложим отрезок DE , равный AD (рис. 10).

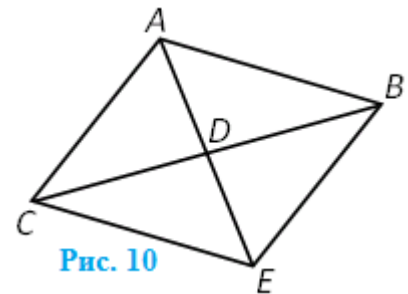


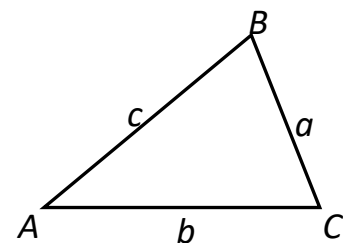
Рис. 10

Точку E соединим с B и C . В полученном четырёхугольнике $ABEC$ диагонали AE и BC точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, $ABEC$ — параллелограмм (признак параллелограмма). Воспользуемся теоремой о соотношении между сторонами и диагоналями параллелограмма: $AE^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$, или $4AD^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, откуда

$$AD = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Часто используется и **теорема синусов**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$



где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами a, b, c .

Она позволяет:

- а) по стороне и двум прилежащим ей углам найти неизвестные стороны;
- б) по двум сторонам треугольника и углу против одной из них найти третью сторону и неизвестные углы. Эта задача может иметь или два решения, или одно, или не иметь решений;

в) найти радиус окружности, описанной около треугольника, если известны сторона и противолежащий ей угол, или три стороны треугольника. Угол при этом найдётся по теореме косинусов.

Задача 6. На основании BC равнобедренного треугольника ABC взята произвольная точка D . Доказать, что радиусы окружностей, описанных соответственно около треугольников ABD и ACD , равны между собой.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно (рис.11). По теореме синусов

$$O_1D = \frac{AB}{2 \sin(\angle ADB)}; \quad O_2D = \frac{AC}{2 \sin(\angle ADC)}.$$

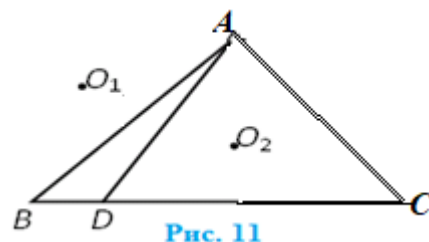


Рис. 11

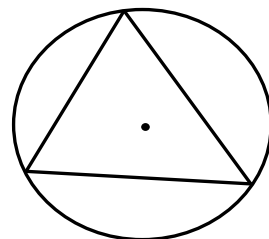
Из того, что

$$AB = AC, \quad \angle ADB = 180^\circ - \angle ADC, \quad \sin(\angle ADB) = \sin(180^\circ - \angle ADC) = \sin(\angle ADC),$$

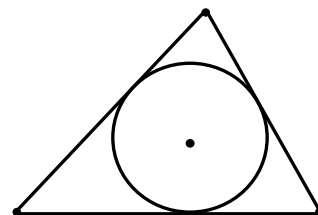
следует то, что требовалось доказать. ■

В планиметрических задачах, связанных с треугольником, часто приходится иметь дело с вписанной и описанной окружностями.

Около всякого треугольника можно описать окружность и при том только одну. Центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



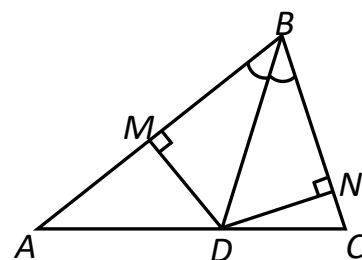
Во всякий треугольник можно вписать окружность и при том только одну. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.



Приведём ряд свойств биссектрисы и медианы треугольника.

Биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла.

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, про-



порциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Задача 7. Доказать, что если ℓ — длина биссектрисы угла треугольника, заключённой между сторонами a и b и делящей противоположную сторону на отрезки длиной соответственно x и y , то $\ell^2 = ab - xy$.

Решение. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC , $\angle ACD = \angle DCB = \alpha$ (рис. 12). Применим к треугольникам ACD и CDB теорему косинусов

$$x^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cdot \cos \alpha;$$

$$y^2 = b^2 + \ell^2 - 2b\ell \cdot \cos \alpha$$

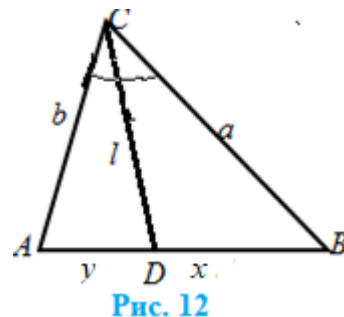


Рис. 12

Выразим из каждого из этих равенств $\cos \alpha$ и приравняем полученные выражения: $\frac{a^2 + \ell^2 - x^2}{2a\ell} = \frac{b^2 + \ell^2 - y^2}{2b\ell}$. Из свойства биссектрисы имеем: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Из двух последних равенств получим: $a(b^2 + \ell^2 - y^2) = b\left(a^2 + \ell^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2}\right)$.

$$\text{Отсюда: } ab(a - b) - \ell^2(a - b) - \frac{a \cdot y^2}{b}(a - b) = 0.$$

$$\text{Если } a \neq b, \text{ то } \ell^2 = ab - \frac{a \cdot y^2}{b} = ab - xy.$$

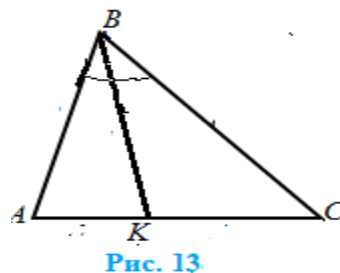
Если $a = b$, то равенство $\ell^2 = ab - xy$ становится очевидным. ■

Обратим ваше внимание на ещё одно требование к чертежу. Если в задаче идёт речь о фигуре общего вида, то необходимо, чтобы её чертёж не содержал особенностей, присущих некоторым определённым типам этой фигуры. Так, в задаче 7 не следует изображать треугольник ABC равнобедренным: это может привести к тому, что задача будет решена только в частном случае. Если в задаче речь идёт о четырёхугольнике, то не следует изображать его в виде трапе-

ции или параллелограмма (если это не оговорено в условии). Если речь идёт о произвольной трапеции, то не нужно изображать её равнобедренной или прямоугольной.

Задача 8. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K . Известно, что $BC = 2$, $KC = 1$, $BK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найти AC и AB .

Решение. Согласно свойству биссектрисы $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$ (рис. 13). Обозначив AK через x , получим, что $AB = 2x$. На основании утверждения, доказанного в задаче 7, можно записать



$$BK^2 = AB \cdot BC - AK \cdot CK \quad \text{или} \quad \frac{9}{2} = 2x \cdot 2 - x. \quad \text{Отсюда} \quad x = \frac{3}{2}, \quad AB = 3, \quad AC = 2,5.$$

Ответ. $AB = 3$, $AC = 2,5$.

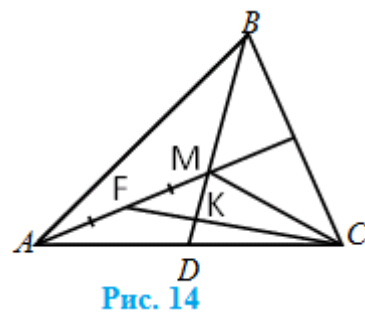
Если бы нам не было известно соотношение $\ell^2 = ab - xy$, то мы, как и при его доказательстве, дважды применили бы теорему косинусов, получили бы квадратное уравнение относительно x , имеющее два корня. Пришлось бы отсеивать посторонний корень.

Задача 9. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . В каком отношении делит медиану, выходящую из вершины B , прямая, проходящая через точку C и середину отрезка AM ?

Решение. Требуется найти отношение $\frac{BK}{KD}$. Из

свойства медиан вытекает, что $MD = \frac{1}{3}BD$ (рис. 14).

Так как MD и CF — медианы треугольника AMC , K — точка их пересечения, то согласно тому же свойству



$$\text{медиан} \quad KD = \frac{1}{3}MD = \frac{1}{9}BD. \quad \text{Тогда} \quad BK = BD - KD = \frac{8}{9}BD; \quad \frac{BK}{KD} = \frac{8}{1}.$$

Ответ. 8:1.

2. Геометрия четырехугольников

Хотя предыдущий пункт и был посвящен геометрии треугольника, в нем в ряде задач мы имели дело с четырехугольниками. Так, в задаче 3 конфигурация фигур содержала квадраты, для ее решения треугольник был достроен до четырехугольника, приходилось доказывать, что он является параллелограммом. Один из способов решения задачи 1 тоже предусматривал достроение треугольника до параллелограмма и применение метрических соотношений между сторонами и диагоналями параллелограмма. В данном пункте продолжается рассмотрение задач, связанных с четырехугольниками. Они будут посвящены:

- 1) установлению вида четырехугольника;
- 2) установлению и применению свойств четырехугольника;
- 3) четырехугольникам, вписанным в окружность и описанным вокруг нее;
- 4) конфигурациям фигур, которые содержат четырехугольники.

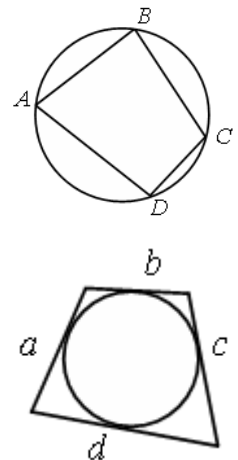
Приведём теоремы, которые часто применяются при решении задач.

Около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180° .

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

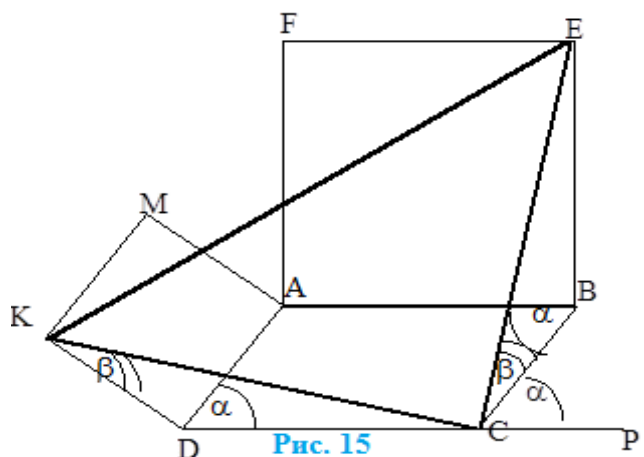
В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.

$$a + c = b + d$$



Задача 10. Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах AB и AD построены, соответственно, квадраты $ABEF$ и $ADKM$. Доказать, что треугольник KEC — равнобедренный и прямоугольный.

Решение. Рассмотрим треуголь-



ники KCD и BCE (рис. 15). Они равны по двум сторонам и углу между ними: $KD = CB$ ($KD = AD$, $AD = BC$), $CD = BE$ ($CD = AB$, $AB = CD$), $\angle KDC = \angle CBE$ (оба угла равны сумме прямого угла и острого угла параллелограмма, который обозначен через α). Следовательно, треугольник KEC — равнобедренный. Докажем, что он прямоугольный. Обозначим величины углов DKC и BCE через β . Они равны как углы равных треугольников, лежащих против равных сторон. $\angle BCP = \angle ADC = \alpha$, как соответственные углы при параллельных и секущей. $\angle KCD = 180^\circ - \beta - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \beta - \alpha$ (так как сумма углов треугольника равна 180°). Поэтому $\angle KCE = 180^\circ - (90^\circ - \beta - \alpha) - \beta - \alpha = 90^\circ$. Значит, треугольник KEC — прямоугольный. ■

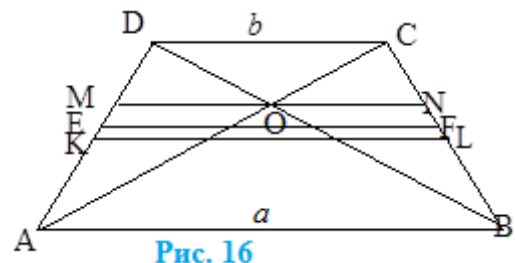
Следующая задача посвящен рассмотрению важных свойств трапеции.

Задача 11. Дана трапеция с основаниями a и b . Найти длину отрезка, параллельного основаниям, лежащего между боковыми сторонами трапеции и

а) проходящего через точку пересечения её диагоналей;

б) делящего трапецию на две подобные трапеции.

Решение. а) Треугольники DOC и AOB (рис. 16) подобны по двум углам: $\angle DOC = \angle AOB$, как вертикальные, $\angle CDO = \angle OBA$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных и секущей. Из по-



добия треугольников вытекает $\frac{DO}{OB} = \frac{DC}{AB}$, $\frac{DO}{OB} = \frac{b}{a}$, $OB = \frac{a}{b}DO$, $BD = \frac{a+b}{b}DO$.

Треугольники CDB и NOB также подобны по двум углам: $\angle B$ — общий, $\angle CDB = \angle NOB$ как соответственные при параллельных и секущей. Из подобия

треугольников вытекает: $\frac{NO}{DC} = \frac{OB}{DB}$, $\frac{NO}{b} = \frac{aDO}{(a+b)DO}$, $ON = \frac{ab}{a+b}$.

Точно также находим: $ON = \frac{ab}{a+b}$, $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

б) Пусть отрезок KL параллелен основаниям трапеции и делит трапецию

$ABCD$ на две подобные трапеции $ABLK$ и $KLCD$. Из подобия этих трапеций вытекает, что $\frac{DC}{KL} = \frac{KL}{AB}$, $KL = \sqrt{AB \cdot DC} = \sqrt{ab}$.

Ответ: $MN = \frac{2ab}{a+b}$; $KL = \sqrt{ab}$.

Длину отрезка MN можно представить в виде: $MN = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. По-

следнее выражение называют средним гармоническим чисел a и b , то есть отрезок MN является средним гармоническим оснований трапеции. Отрезок KL является средним геометрическим длин оснований трапеции. Напомним, что средняя линия EF является средней арифметической длин оснований трапеции. Таким образом, получили геометрическую интерпретацию соотношений между тремя средними: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

В следующей задаче используется условие, необходимое и достаточное для того, чтобы около четырёхугольника можно было описать окружность.

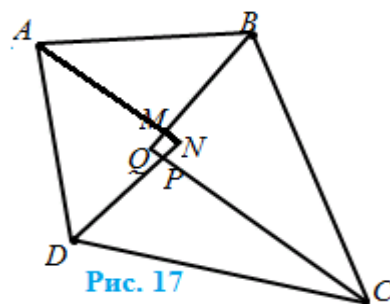
Задача 12. Доказать, что биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника образуют четырёхугольник, вокруг которого можно описать окружность.

Решение. Пусть AN , BQ , CQ , DN — биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (рис. 17).

Если какие-то три биссектрисы пересекаются в одной точке, то в пересечении биссектрис образуется треугольник, около которого всегда можно описать окружность.

Будем предполагать, что никакие три биссектрисы не пересекаются в одной точке.

Чтобы убедиться в том, что около четырёхугольника $MNPQ$ можно описать окружность, достаточно показать, что $\angle QMN + \angle NPQ = 180^\circ$.



Действительно, $\angle QMN = \angle AMB = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2}$;

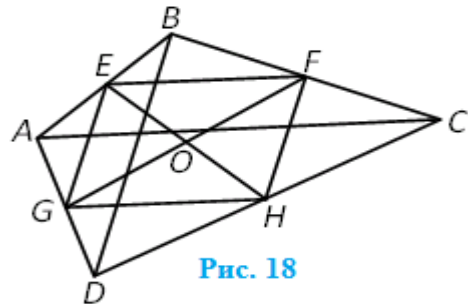
$$\angle NPQ = \angle CPD = 180^\circ - (\angle PCD + \angle PDC) = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle D}{2}.$$

Тогда $\angle QMN + \angle NPQ = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. ■

В следующей задаче фактически доказывается важное свойство четырёхугольника: если середины сторон выпуклого четырёхугольника последовательно соединить отрезками, то полученный четырёхугольник будет параллелограммом.

Задача 13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E, F, H, G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD, AD ; O — точка пересечения отрезков EH и FG . Известно, что $EH = a$, $FG = b$, $\angle FOH = 60^\circ$. Найти длины диагоналей четырёхугольника.

Решение. Так как EF — средняя линия треугольника ABC , то $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$ (рис. 18). Аналогично $GH \parallel AC$, $GH = \frac{1}{2}AC$,



поэтому $EF \parallel GH$, $EF = GH$.

Точно также $EG \parallel BD$, $EG = \frac{1}{2}BD$; $FH \parallel BD$, $FH = \frac{1}{2}BD$; $EG \parallel FH$, $EG = FH$.

Отсюда следует, что $EFGH$ — параллелограмм, у которого диагонали a и b , а угол между ними равен 60° . Для нахождения BD и AC достаточно найти FH и EF . Из треугольника OFH по теореме косинусов имеем

$$FH^2 = OF^2 + OH^2 - 2OF \cdot OH \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Так как $BD = 2FH$, то $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

Из треугольника OEF по теореме косинусов имеем:

$$FE^2 = OE^2 + OF^2 - 2OF \cdot OE \cdot \cos 120^\circ = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

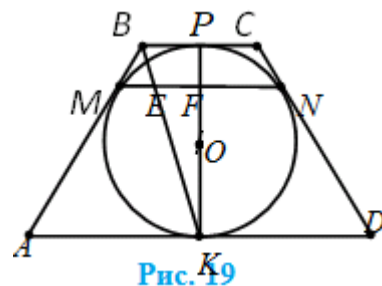
Откуда $AC = 2EF = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ и $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

Заметим, что если в задаче фигурирует середина одной или нескольких сторон четырёхугольника, то стоит при необходимости соединить середины каких-то других сторон или диагоналей и рассмотреть средние линии соответствующих треугольников.

Задача 14. Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N , K — середина AD . В каком отношении прямая BK делит отрезок MN ?

Решение. Если выполнить этот чертёж “правильно”, он может подсказать какие-либо геометрические соотношения между элементами фигуры. Пусть точка P — середина BC , O — центр вписанной в трапецию окружности (рис. 19). Может возникнуть гипотеза, что $ME = EF$. Попробуем доказать это равенство.



Точки P , O , K лежат на одной прямой, перпендикулярной BC и AD . Эта прямая делит отрезок MN пополам: $MF = FN$. Докажем, что E — середина MF . $AM = AK$, $BM = BP$, как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки. Обозначим: $AM = a$, $BM = b$. Из подобия треугольников BME и BAK имеем: $\frac{BM}{AB} = \frac{ME}{AK}$ или $\frac{b}{a+b} = \frac{ME}{a}$. Отсюда $ME = \frac{ab}{a+b}$.

Аналогично из подобия треугольников EFK и BPK имеем $\frac{EF}{BP} = \frac{FK}{KP}$, но $\frac{FK}{FP} = \frac{AB}{BM} = \frac{a}{b}$. Поэтому $\frac{EF}{b} = \frac{a}{a+b}$, $EF = \frac{ab}{a+b}$, т. е. $ME = EF$. Значит, $ME : EN = 1 : 3$.

Ответ. 1: 3.

3. Геометрия окружностей

В этом пункте будут рассматриваться задачи, посвященные:

- 1) конфигурациям, которые содержат окружности, круги;
- 2) взаимному расположению окружностей;
- 3) окружностям, вписанным в многоугольники и описанным вокруг них;
- 4) фигурам, отличающимся от окружностей, но при их рассмотрении

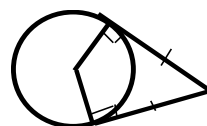
уместно применить вспомогательную окружность.

Приведём ряд теорем, которые часто используются при решении задач, связанных с окружностью.

Свойства касательных к окружности

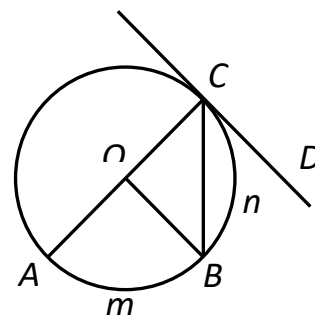
Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Отрезки двух касательных, проведенных к окружности из одной точки, от этой точки до точек касания равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.



Измерение углов, связанных с окружностью

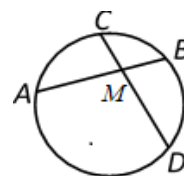
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Угол между касательной к окружности и хордой, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла.



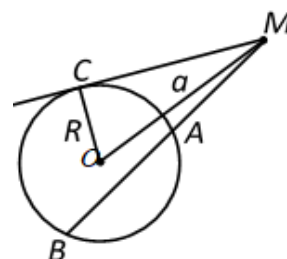
$$\angle AOB = \cup AmB; \angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB; \angle BCD = \frac{1}{2} \cup CnD.$$

Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке M внутри окружности, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.



Если из точки M, лежащей вне окружности, провести к окружности секущую MAB и касательную MC, то



$$AM \cdot BM = CM^2 = a^2 - R^2, \text{ где } a = OM.$$

В следующей задаче существенно используется измерение углов, связанных с окружностью.

Задача 15. Вокруг четырёхугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD описана окружность радиуса 2. Найти длину стороны CD , если $AB = 3$.

Решение. Пусть O — центр окружности (рис. 20). Сторону CD сможем найти из треугольника OCD , если удастся найти $\cos \angle DOC$. Так как в треугольнике AOB известны все три стороны, то можно найти $\angle AOB$. Это центральный угол, опирающийся на дугу AB . Тем самым будет найден угол ADB , опирающийся на ту же дугу. Угол CAD дополняет его до 90° . Так как он вписанный и опирается на дугу DC , то мы сможем найти и $\angle DOC$.

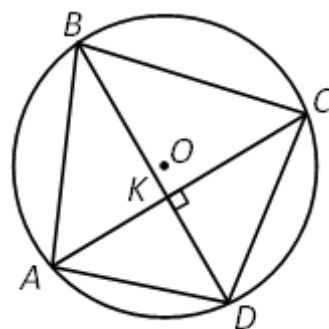


Рис. 20

План решения задачи составлен. Реализуем его. Из треугольника AOB по теореме косинусов имеем $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB$,

$$\text{откуда } \cos \angle AOB = \frac{AO^2 + BO^2 - AB^2}{2 \cdot AO \cdot BO} = \frac{4 + 4 - 9}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{8}.$$

$$\text{Далее } \angle AOB + \angle DOC = 2(\angle ADB + \angle CAD) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Поэтому } \cos \angle DOC = \cos(180^\circ - \angle AOB) = -\cos \angle AOB = \frac{1}{8} \quad \text{Наконец, из}$$

треугольника DOC по теореме косинусов найдём DC :

$$DC = \sqrt{OD^2 + OC^2 - 2 \cdot OD \cdot OC \cdot \cos \angle DOC} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt{7}.$$

$$\text{Ответ: } DC = \sqrt{7}.$$

Если в задаче идет речь об окружности, вписанной в многоугольник, то, как правило, стоит провести радиусы в точки касания окружности к сторонам и найти пары равных отрезков касательных, проведенных из одной точки.

Задача 16. В равнобедренном треугольнике с углом 120° радиус вписанной окружности равен R . Внутри треугольника лежат две равные касающиеся

друг друга окружности, каждая из которых касается одной боковой стороны треугольника и вписанной в треугольник окружности. Найти радиусы этих окружностей.

Решение. Возможны 2 случая: равные окружности касаются внутренним или внешним образом окружности, вписанной в данный треугольник ABC .

1-й случай: O_1 и O_2 — центры равных окружностей, O — центр вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 21).

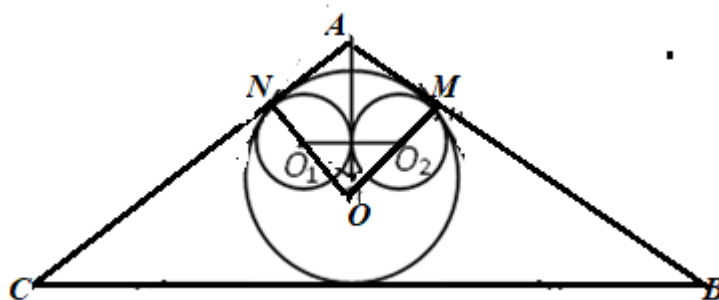


Рис. 21

Обозначим

$O_1N = O_2M = r$. Тогда $OO_1 = OO_2 = R - r$; $O_1O_2 = 2r$. Так как $\angle NAO = 60^\circ$; $\angle NOA = 30^\circ$, $\angle O_1OO_2 = 60^\circ$, $OO_1 = OO_2$, то треугольник O_1OO_2 — правильный. Поэтому $R - r = 2r$, $r = \frac{R}{3}$.

2-й случай: Обозначим $O_2N = O_2E = y$ (рис. 22). Из треугольника AO_2E имеем $AE = O_2E \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = y\sqrt{3}$. Из треугольника OO_2E получим

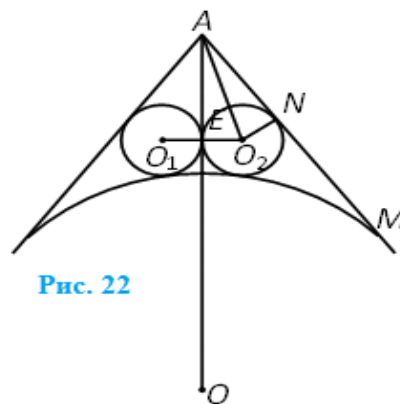


Рис. 22

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - EO_2^2} = \sqrt{(R + y)^2 - y^2} = \sqrt{R^2 + 2Ry}.$$

Из треугольника AOM имеем: $AO = \frac{OM}{\sin 60^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Так как $AO = AE + OE$, то

$$\frac{2R}{\sqrt{3}} = y\sqrt{3} + \sqrt{R^2 + 2Ry}.$$

Решая это уравнение, получим $\frac{4R^2}{3} + 3y^2 - 4Ry = R^2 + 2Ry$, или

$$3y^2 - 6Ry + \frac{R^2}{3} = 0.$$

Отсюда $y = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - R^2}}{3} = R \left(1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$. Так как $y < R$, то $y = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) R$.

Ответ. $\frac{R}{3}; \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) R$.

В предыдущей задаче мы имели дело с окружностями, которые касались друг друга. В таких случаях целесообразно проводить линию центров, то есть прямую, которая проходит через центры этих окружностей, причем, следует иметь в виду, что точка касания окружностей лежит на линии центров.

Задача 17. В треугольник вписана окружность радиуса r . Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Доказать, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Решение. Так как отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны между собой, то периметр p треугольника ABC (рис. 23) равен сумме периметров “маленьких” треугольников $p = p_1 + p_2 + p_3$, где p_1, p_2, p_3 — периметры этих треугольников. Каждый из ма-

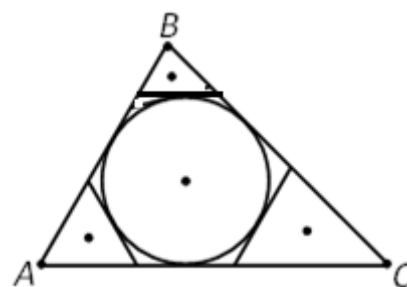


Рис. 23

леньких треугольников подобен треугольнику ABC ввиду того, что касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC , параллельны сторонам этого тре-

угольника (первый признак подобия). Отсюда $\frac{r_1}{r} = \frac{p_1}{p}, \frac{r_2}{r} = \frac{p_2}{p}, \frac{r_3}{r} = \frac{p_3}{p}$.

Складывая почленно эти равенства, получим $r_1 + r_2 + r_3 = r \cdot \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p} = r$. ■

В следующей задаче рассматривается конфигурация четырёхугольника с окружностью.

Задача 18. Дан квадрат со стороной 1. Найти радиус окружности, проходящей через одну из вершин квадрата, середину одной из сторон, не содержащих этой вершины, и центр квадрата.

Решение. Пусть окружность с центром O проходит через вершину C квадрата $ABCD$, его центр M и середину K стороны AD . Радиус MO окружности продлим до пересечения с окружностью в точке L (рис.24), то есть точка L лежит на диаметре.

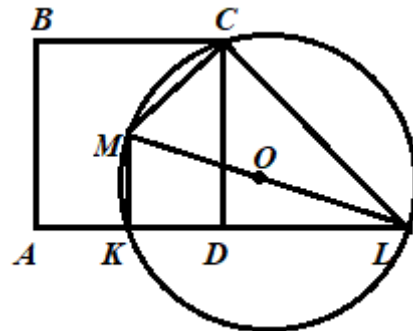


Рис. 24

Точка L лежит и на прямой AD . Это вытекает из того, что угол MKD прямой и так как он является вписанным в окружность, то он опирается на диаметр ML . Из треугольника MKL имеем:

$$KL = \sqrt{ML^2 - MK^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4}}, \text{ где } R \text{ — радиус окружности. Отсюда}$$

$$DL = KL - KD = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}. \text{ Из треугольника } MCL \text{ получим:}$$

$$CL^2 = ML^2 - MC^2 = 4R^2 - \frac{1}{2}. \text{ Тогда из треугольника } DCL \text{ по теореме Пифаго-}$$

$$\text{ра будем иметь } CL^2 = CD^2 + DL^2 \text{ или } 4R^2 - \frac{1}{2} = 1 + \left(\sqrt{4R^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2. \text{ Решая}$$

$$\text{это уравнение, получим: } R = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Ответ. } R = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Довольно часто для решения планиметрической задачи полезно провести вспомогательную окружность, которая дает возможность найти определенные соотношения между элементами геометрических фигур, особенно между углами. Фактически идет речь о доказательстве того, что по крайней мере какие-то четыре точки лежат на одной окружности.

Задача 19. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Доказать, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

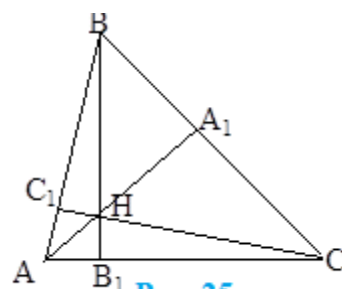


Рис. 25

Решение. Пусть H — точка пересечения высот

треугольника ABC (рис. 25). Так как углы HB_1C и CA_1H являются прямыми и их сумма равна 180° , то около четырехугольника HA_1CB_1 можно описать окружность, то есть точки H, A_1, C, B_1 лежат на одной окружности с диаметром CH (поскольку угол CA_1H является прямым и вписанным в эту окружность). Следовательно, имеет место равенство углов:

$$\angle A_1B_1H = \angle A_1CH = \angle BCC_1 = 90^\circ - \angle B,$$

как углов, вписанных в эту окружность и опирающихся на одну и ту же дугу HA_1 . Точно также на одной окружности лежат точки H, A, B_1, C_1 и $\angle HB_1C_1 = 90^\circ - \angle B$. Таким образом, $\angle A_1B_1H = \angle HB_1C_1$. Аналогично утверждение доказывается для других углов. ■

4. Как решается геометрическая задача

Приведем некоторые общие положения, на которые мы опирались, решая геометрические задачи. Этими положениями целесообразно руководствоваться при дальнейшем решении геометрических задач.

1. Решение геометрической задачи следует, как правило, начинать с рисунка: правильного, четкого, достаточно большого, удобного для дополнительных построений.

Рисунок должен быть "лаконичным", то есть целесообразно изображать только те элементы, которые функционируют при решении задачи. Например, если в задаче идет речь о радиусе окружности или о его точках, то не всегда следует изображать саму окружность. Рисунок должен быть правильным, то есть прямые углы нужно изображать прямыми, равнобокую трапецию — равнобокой и т. д. Такой рисунок может помочь решить задачу. Но, с другой стороны, фигуру общего вида не следует изображать так, чтобы ее можно было принять за частный случай: произвольный треугольник не следует изображать прямоугольным или равнобедренным, произвольный четырехугольник — параллелограммом или трапецией. Иногда полезно (как вспомогательное построение) сделать "выносной" рисунок, то есть отдельно рассмотреть фрагменты довольно сложного рисунка.

2. На основании условия задачи целесообразно выявить характерные черты и особенности заданной конфигурации.

Иногда задачу нельзя решить в общем виде и только специальный подбор числовых данных дает возможность ее решить. В иных случаях числовые данные не играют такой определяющей роли, их конкретный подбор только облегчает вычисления. Есть задачи, которые целесообразнее решать в общем виде, а числовые данные подставлять в окончательный результат.

3. Четко осознать, какие утверждения могут быть использованы в решении.

При решении задачи необходимо постоянно обращаться к "банку утверждений", который содержит основные теоремы школьного курса планиметрии, а также ряд утверждений, которые формулируются в некоторых базовых задачах. Следует осознать характерные признаки тех понятий, которые использованы в задаче.

4. Проанализировать целесообразность проведения дополнительных геометрических построений.

Чаще всего используют такие дополнительные построения: проведение прямой, параллельной или перпендикулярной к одной из прямых; удваивание медианы треугольника, достроение треугольника до параллелограмма; проведение вспомогательной биссектрисы; проведение вспомогательной окружности и т. п.

5. Составить план решения задачи.

Существуют разные стратегии поиска планов решения задачи. Иногда он направлен от данных к искомой величине. То есть величины, заданные в условии задачи, и те, которые нужно найти, связывают цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие. В иных случаях путь решения прослеживается от конца к началу. И, наконец, в более сложных задачах поиск пути решения можно вести в двух направлениях — с начала (что можно найти?) и с конца (что нужно найти?).

6. Проанализировать, какие методы могут быть применены для реализации плана.

Иногда целесообразно попробовать воспользоваться *методом опорного элемента*, сущность которого состоит в том, что один и тот же элемент (отрезок, угол, площадь и т. п.) выражаются через известные и неизвестные величины двумя разными способами и полученные выражения приравняются.

Если в задаче нужно найти отношение каких-то величин, или углы (они иногда находятся с помощью тригонометрических величин острого угла, то есть отношений сторон прямоугольного треугольника), то, как правило, задача решается *методом вспомогательного параметра*. Это значит, что вводится обозначение для какого-то линейного элемента (стороны, высоты, радиуса и т. п.), потом через нее выражаем те величины, отношение которых нужно найти. При этом вспомогательный параметр сокращается. Метод вспомогательного параметра применяется также в задачах на подобие фигур.

7. Реализовать план решения задачи.

8. Провести исследование, анализ решения.

Закончив решение задачи, стоит подумать о том, не пропущены ли какие-то частные случаи, возможные положения конфигурации и т. п.

9. По завершению решения задачи необходимо сделать проверку.

Проверка, кроме проверки правильности проведения рассуждений, вычислений, применения геометрических утверждений, может опираться на нахождение размерности окончательного результата, другие способы ее решения.

10. Решив задачу, целесообразно попробовать решить ее другим способом.

Следует сравнить разные способы решения, выбрать оптимальный. Проиллюстрируем сформулированные рекомендации на примере решения следующей задачи.

Задача 20. Две окружности радиусов 75 см и 48 см касаются друг друга и некоторой прямой. Найдите:

- 1) расстояние от точки касания данных окружностей до заданной прямой;

2) радиус наибольшей окружности, которая касается той же прямой и которую можно расположить между данными окружностями;

3) длины общих внешних касательных к данным окружностям, проведенным через точки, лежащие на данной прямой между этими точками и точками касания с окружностями, и углы, которые они образуют с данной прямой;

Решение. Начнем решение задачи с построения рисунка к ней. Пусть O и O_1 — центры данных окружностей, касающиеся друг друга в точке C и касающиеся данной прямой в точках A и B (рис. 26).

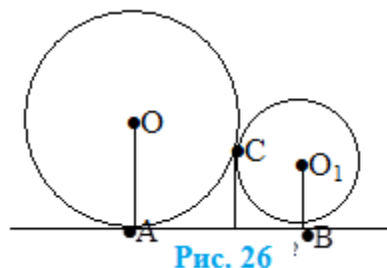


Рис. 26

1) Нужно найти расстояние от точки C до прямой AB , то есть длину отрезка CD , перпендикулярного прямой AB . На основании условия отметим, что радиусы OA и O_1B перпендикулярны прямой AB (рис. 27).

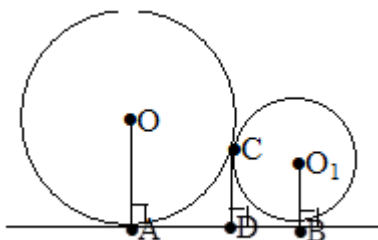


Рис. 27

Попробуем выполнить дополнительные построения. В задаче имеем дело с окружностями, которые касаются друг друга. Целесообразно провести линию центров, то есть прямую OO_1 , проходящую через центры этих окружностей, и найти точку её пересечения F с прямой AB (рис. 28).

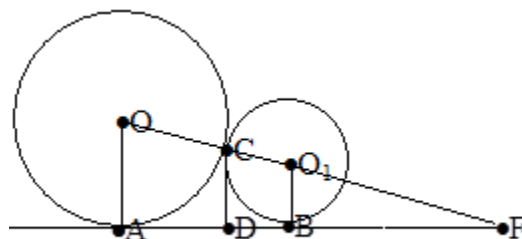


Рис. 28

Выясним взаимное размещение точки C и прямой AB . Точка касания C лежит на линии центров (рекомендуем это доказать самостоятельно, что можно сделать, например, методом от противного). Получили конструкцию из нескольких прямоугольных треугольников. Искомый элемент является катетом одного из них. Осталось понять, что эти треугольники подобны (Почему?): $\triangle OAF \sim \triangle CDF \sim \triangle O_1BF$.

Так как треугольники OAF и CDF подобны, то $\frac{OA}{CD} = \frac{OF}{CF}$. В этой пропорции известен отрезок OA , отрезок CD нужно найти, для двух других состав-

ляющих этой пропорции OF и CF известны их части OC и CO_1 (обозначим их соответственно через R и r), кроме того они имеют общий неизвестный отрезок O_1F . Это подсказывает нам попробовать обозначить его, например, буквой a : $O_1F = a$. Тем самым будет применен метод вспомогательного параметра, о котором шла речь в рекомендациях. Тогда в предыдущей пропорции будем иметь две неизвестные величины $x = CD$ и a .

Так как треугольники CDF и O_1BF подобны, то $\frac{CD}{O_1B} = \frac{CF}{O_1F}$. Сравнивая

две полученных пропорции, замечаем, что в одной отрезки CD и O_1F стоят в знаменателе, во второй — в числителе. Попробуем перемножить почленно эти две пропорции, предварительно подставив обозначения отрезков, которые фигурируют в них.

Имеем: $\frac{R}{x} = \frac{R+r+a}{r+a}$ и $\frac{x}{r} = \frac{r+a}{a}$. После умножения получим:

$\frac{R}{r} = \frac{R+r+a}{a}$. Получили уравнение с одним неизвестным a .

Заметим, что мы избрали путь, о котором говорилось в предыдущих рекомендациях: иногда целесообразнее задачу решать в общем виде, а числовые данные подставлять в окончательный результат. Решая последнее уравнение относительно a , получим: $a = \frac{(R+r)r}{R-r}$.

Теперь из второй пропорции можно найти неизвестное расстояние CD .

Последовательно будем иметь: $CD = x = \frac{r \cdot (r+a)}{a} = \frac{r \cdot \left(r + \frac{(R+r)r}{R-r} \right)}{\frac{(R+r)r}{R-r}} = \frac{2Rr}{R+r}$.

После подстановки числовых данных имеем: $CD = \frac{2400}{41}$ (см).

2) Нужно найти радиус наибольшей окружности, которая касается той же прямой и которую можно расположить между данными окружностями. Поско

льку эта окружность наибольшая, то она должна касаться двух данных окружностей. Опять начнем с построения рисунка (рис. 29).

Попробуем составить план решения задачи. Обозначим искомый радиус третьей окружности через x . Видим, что стороны треугольника OO_1O_2 являются линиями центров трех пар окружностей.

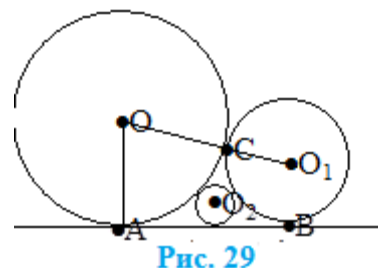


Рис. 29

Попробуем это как-то использовать. Опять понадобятся дополнительные построения. Через точку O_1 проведем прямую, параллельную AB , которая пересекается с OA в точке M . В образованном прямоугольном треугольнике OO_1M известны две стороны: $OO_1 = R + r$, $OM = R - r$. Можно найти третью сторону O_1M или AB . Это побуждает нас выполнить ту же работу относительно линии центров OO_2 :

из точки O_2 провести перпендикуляры O_2N к AB и O_2K к OA . Сможем найти отрезок O_2K . Точно также можно найти отрезок O_2L , L — точка пересечения перпендикуляра O_2L к O_1B (рис. 30).

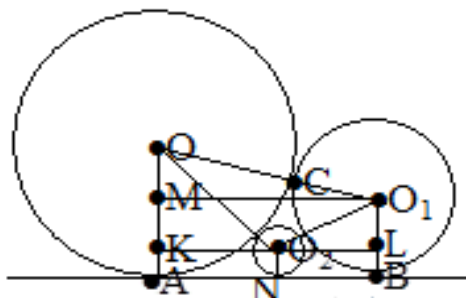


Рис. 30

Теперь можно воспользоваться методом опорного элемента: выразить двумя способами длину отрезка AB через известные величины и неизвестный радиус x , составить и решить уравнение относительно x . Таким образом,

$$AB = O_1M = \sqrt{OO_1^2 - OM^2} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Точно так же $O_2K = 2\sqrt{Rx}$, $O_2L = 2\sqrt{rx}$. Поскольку $AB = O_2K + O_2L$, то имеем уравнение $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}$, откуда $x = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}$. Подставляя чис-

ловые данные, получим:

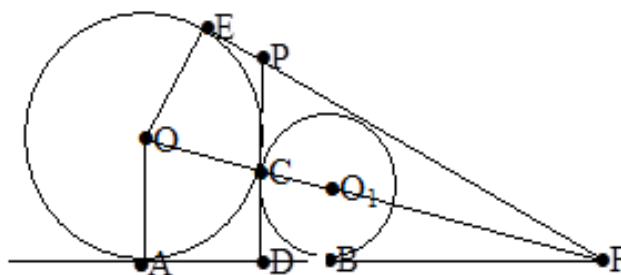
$$x = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} = \frac{\sqrt{75 \cdot 48}}{\sqrt{75} + \sqrt{48}} = \frac{60}{9\sqrt{3}} = \frac{20}{3\sqrt{3}} \text{ (см).}$$


Рис. 31

3) Две данные окружности имеют две общие внешние касательные и одну внутреннюю. Изобразим их на рис. 31. Пусть EF и AF — общие внешние касательные, DP — общая внутренняя касательная. Воспользуемся результатами решения задания 1). Там найдено, что $OF = \frac{(R+r)R}{R-r} = \frac{1025}{3}$ (см). Тогда из пря-

моугольного треугольника OEF имеем:

$$AF = EF = \sqrt{OF^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{(R+r)^2 R^2}{(R-r)^2} - R^2} = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r} = \frac{1000}{3},$$

$\operatorname{tg} \angle EFO = \frac{OE}{EF} = 0,225$. Значит, $\angle EFO \approx 12,7^\circ$. Поскольку $\angle EFO = \angle AFO$ (почему?), то $\angle EFO \approx 25,4^\circ$. Внутренняя общая касательная образует с прямой AB

прямой угол. Очевидно, что $DP = 2DC = \frac{4Rr}{R+r} = \frac{4800}{41}$ (см).

Ответы. 1) $\frac{2400}{41}$; 2) $\frac{20}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1025}{3}$; $\frac{4800}{41}$; $\approx 25,4^\circ$.

По завершению решения задачи необходимо выполнить проверку его правильности. Кроме проверки правильности проведения рассуждений, вычислений, применения утверждений, в данной задаче можно провести проверку путем сравнения длин найденных отрезков с длинами данных отрезков и между собой. Также целесообразно проверить размерность формул, полученных в ходе решения. Закончив решение задачи, стоит провести исследование, анализ решения, рассмотреть частные или предельные случаи. В данной задаче можно поставить вопрос, а как изменится решение, если данные окружности касаются друг друга не внешне, а внутренне. Тогда расстояние от точки касания до прямой равняется нулю, общих касательных, кроме данной прямой, не существует. Поскольку эту касательную можно провести из произвольной точки прямой, то отпадает задание о вычислении длины касательной. Окружности, которая бы содержалась между данными окружностями и касалась данной прямой, не существует (рис. 32).

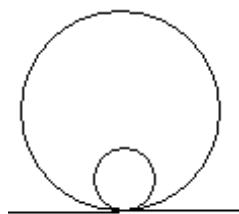


Рис. 32

Целесообразно также рассмотреть случай, когда данные окружности имеют одинаковый радиус. В этом случае расстояние от точки касания до прямой равняется радиусу окружности, радиус наибольшей окружности, которую можно поместить между данными окружностями так, чтобы она касалась данной прямой, равняется $\frac{\sqrt{R}}{2}$, где R — радиус данных окружностей. Общая внешняя касательная образует с данной прямой угол 0° (рис. 33).

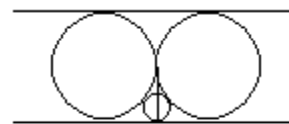


Рис. 33

Попробуем решить задачу иным способом. Обратимся к заданию 1).

Проведем через точку O_1 прямую, параллельную прямой AB (рис. 34). Она пересекает отрезки OA и CD в точках M и N , соответственно. Будем искать неизвестное расстояние CD в виде: $CD = CN + ND = CN + MA = CN + OA - OM$. Известно, что $OA = R$, $OM = R - r$. Из подобия треугольников OMO_1 и

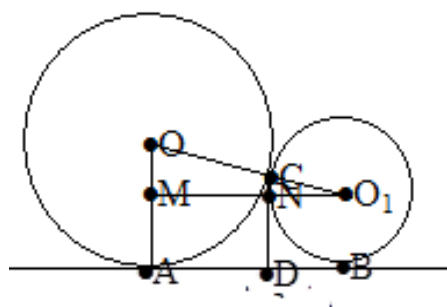


Рис. 34

CNO_1 вытекает $CD = CN + ND = CN + MA = CN + OA - OM$. Известно, что $OA = R$, $OM = R - r$. Из подобия треугольников OMO_1 , CNO_1 вытекает

$$\frac{R+r}{r} = \frac{R-r}{CN}, \quad CN = \frac{(R-r)r}{R+r}. \text{ Следовательно}$$

$$CD = R - (R-r) + \frac{(R-r)r}{R+r} = \frac{2Rr}{R+r}. \text{ Получили тот же результат.}$$

Тест для самоконтроля

1. Углы треугольника относятся как 1: 2: 3. Этот треугольник ...

- А. остроугольный. Б. тупоугольный.
В. прямоугольный. Г. может быть любым.

2. Длины сторон треугольника выражаются различными целыми числами: одна равна 5 м, вторая — 4 м. Длина третьей стороны не может равняться ...

- А. 2 м. Б. 7 м. В. 8 м. Г. 9 м.

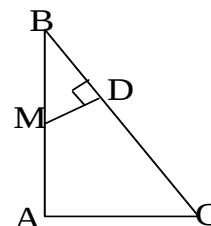
3. Из одной точки, расположенной вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр длиной 6 см и наклонная длиной 10 см. Длина проекции наклонной на прямую равняется ...

А. 4 см. Б. $\sqrt{136}$ см. В. 8 см. Г. величине, отличной от приведенных.

4. В прямоугольном треугольнике один из углов равняется 60° , а катет, прилежащий к нему, равняется 12 см. Гипотенуза равняется ...

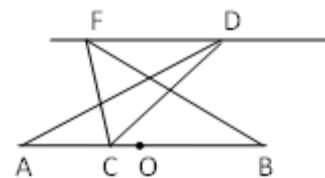
А. $12\sqrt{3}$ см. Б. 18 см. В. $18\sqrt{3}$ см. Г. 24 см.

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90^\circ$) через середину M катета AB проведен перпендикуляр MD к гипотенузе BC , $AB = 12$ см, $BD = 4$ см. Гипотенуза BC равняется ...



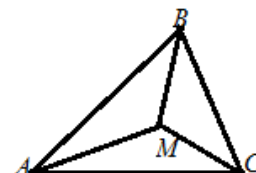
А. 18 см. Б. 16 см. В. 24 см. Г. 36 см.

6. Точка O — середина отрезка AB , $FD \parallel AB$. Сравните площади треугольников ADC и FCB , равные S и S_1 соответственно.



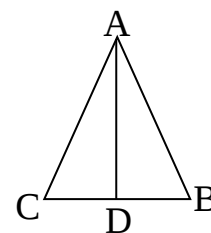
А. $S < S_1$. Б. $S = S_1$. В. $S > S_1$. Г. Сравнить невозможно.

7. В треугольнике ABC угол A равняется 40° , угол B равняется 70° , M — точка пересечения биссектрис. Угол AMB равняется ...



А. 30° . Б. 125° . В. 105° . Г. 70° .

8. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равняются, соответственно, 12 см и 10 см. Высота, опущенная на основание, равняется ...



А. 6 см. Б. 13 см. В. $\sqrt{119}$ см. Г. 8 см.

9. Медиана AD равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равняется 6 см, а периметр треугольника ABD равняется 27 см. Периметр треугольника ABC равняется ...

А. 54 см. Б. 66 см. В. 42 см. Г. 30 см.

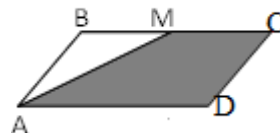
10. Угол между высотами параллелограмма равняется 25° . Углы параллелограмма соответственно равняются

А. 25° и 155° . Б. 50° и 130° . В. 65° и 115° . Г. 40° и 140° .

11. Площадь параллелограмма равняется S , $MB = MC$.

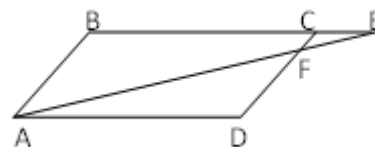
Чему равняется площадь закрашенной фигуры?

А. $\frac{2}{3}S$. Б. $\frac{3}{4}S$. В. $\frac{7}{8}S$. Г. $\frac{5}{6}S$.



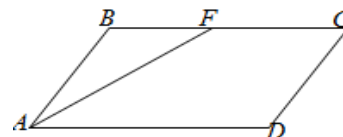
12. На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$, $AD = 12$ см, $CE = 4$ см. Отношение площадей треугольников ABE и CFE равняется ...

А. 4:1. Б. 8:1. В. 64:1. Г. 16:1.



13. Биссектриса AF угла A в параллелограмме $ABCD$ делит сторону BC на отрезки 7 см и 14 см (считая от вершины B). Периметр параллелограмма равен ...

А. 56 см. Б. 42 см. В. 28 см. Г. 70 см.



14. Два равных отрезка точкой пересечения делятся пополам. Концы их последовательно соединили. Полученный четырехугольник является ...

А. трапецией. Б. квадратом. В. ромбом. Г. прямоугольником.

15. В прямоугольной трапеции основания равняются 5 см и 17 см, а большая боковая сторона — 13 см. Высота трапеции равняется ...

А. 12 см. Б. 11 см. В. 5 см. Г. 8 см.

16. Через точку данной окружности проведены две хорды, каждая из которых равняется радиусу. Угол между ними равняется ...

А. 150° . Б. 120° . В. 135° . Г. 60° .

17. Из точки, лежащей вне круга, ограниченного данной окружностью, проведены к данной окружности две взаимно перпендикулярные касательные. Радиус окружности равняется 10 см. Длина отрезка каждой касательной от данной точки до точки касания равняется ...

А. 10 см. Б. 5 см. В. $\frac{10}{\sqrt{2}}$ см. Г. величине, отличной от приведенных.

18. Определите взаимное расположение окружностей, радиусы которых равняются, соответственно, 4 см и 6 см, а центры удалены друг от друга на 8 см.

А. Одна находится внутри круга, ограниченного другой окружностью.

Б. Пересекаются в двух точках.

В. Одна находится вне круга, ограниченного другой окружностью.

Г. Касаются друг друга.

19. В окружности провели хорду длиной 8 см, удаленную от центра на 3 см. Диаметр окружности равняется ...

А. 5 см. **Б.** 12 см. **В.** 10 см. **Г.** величине, отличной от приведенных.

20. Наибольшее и наименьшее расстояния от точки, расположенной внутри круга, до точек окружности, ограничивающей этот круг, равняются 10 см и 4 см соответственно. Радиус круга равняется ...

А. 3 см. **Б.** 7 см. **В.** 14 см. **Г.** 6 см.

21. Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон треугольника, является точкой пересечения ...

А. высот треугольника. **Б.** медиан треугольника.

В. биссектрис треугольника.

Г. серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

22. Сколько окружностей можно провести через три данные точки?

А. Одну. **Б.** Две. **В.** Четыре. **Г.** Ответ отличен от приведенных.

23. Чему равняется внутренний диаметр трубы, если внешний диаметр ее равняется 100 мм, а толщина стенок — 5 мм?

А. 95 мм. **Б.** 90 мм. **В.** 80 мм. **Г.** 97,5 мм.

24. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединили. Полученный четырехугольник является ...

А. параллелограммом. **Б.** прямоугольником. **В.** ромбом. **Г.** трапецией.

25. Длины боковой стороны и основания равнобедренного треугольника могут быть пропорциональными числам ...

А. 1 и 2. **Б.** 1 и 3. **В.** 1 и 4. **Г.** 3 и 5.

Ответы к тесту для самоконтроля

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
В	Г	В	Г	А	А	Б	Г	В	А	Б	Г	А
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Г	В	Б	А	Б	В	Б	В	Г	Б	А	Г	

Указания к заданиям теста для самоконтроля

1. Воспользуйтесь теоремой о сумме углов треугольника.
2. Примените неравенство треугольника.
3. Примените теорему Пифагора.
4. Воспользуйтесь свойством катета, лежащего против угла 30° .
5. Примените подобие треугольников.
6. Воспользуйтесь формулой площади треугольника.
7. Используйте определение биссектрисы и теорему о сумме углов треугольника.
8. Примените теорему Пифагора.
9. Вначале найдите половину периметра треугольника.
10. Воспользуйтесь свойствами углов параллелограмма.
11. Используйте формулу площади параллелограмма.
12. Примените отношение площадей подобных треугольников.
13. Воспользуйтесь свойством углов при параллельных и секущей.
14. Используйте признаки параллелограмма и прямоугольника.
15. Проведите высоту трапеции.
16. Рассмотрите треугольник, образованный хордой и двумя радиусами, проведенными в концы хорды.
17. Проведите радиусы в точки касания.
18. Сравните расстояние между центрами с суммой радиусов.
19. Примените теорему Пифагора.
20. Выясните, как связаны наибольшее и наименьшее расстояния от точки, расположенной внутри круга, до точек окружности с длиной диаметра круга.

21. Воспользуйтесь геометрическим местом точек, равноудалённых от сторон угла.
22. Рассмотрите различные случаи расположения точек.
23. Выясните, из чего складывается внешний диаметр трубы.
24. Воспользуйтесь свойствами средней линии треугольника.
25. Примените неравенство треугольника.

Задачи для самостоятельной работы

1. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см.

Найдите:

- а) высоты треугольника;
- б) медианы треугольника;
- в) площади кругов, вписанного в треугольник и описанного около треугольника;
- г) расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей;
- д) радиус окружности, построенной на основании треугольника, как на хорде и касающейся боковых сторон треугольника;
- е) в каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании;
- ж) длину отрезка, концы которого совпадают с основанием высот, проведённых к боковым сторонам;
- з) длину отрезка, концы которого совпадают с точками пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника;
- и) сумму периметров трёх треугольников, отсекаемых от данного треугольника тремя касательными, проведёнными к окружности, вписанной в данный треугольник.

2. В треугольнике длины двух сторон составляют 6 и 8 см. Найдите длину третьей стороны, если:

- а) медиана третьей стороны равна 5 см;
- б) площадь треугольника равна $19,2 \text{ см}^2$;

в) медиана меньшей стороны равна $\sqrt{73}$ см;

г) полусумма высот, проведённых к данным сторонам, равна третьей высоте;

д) медианы, проведённые к этим сторонам, взаимно перпендикулярны;

е) одна из сторон параллелограмма, вписанного в данный треугольник, имеет длину 4 см и лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны данным сторонам треугольника. Чему равна другая сторона параллелограмма?

ж) биссектриса угла между данными сторонами равна 6 см;

з) углы, противолежащие данным сторонам, относятся как 1 : 2 .

3. Перпендикуляр, проведённый из вершины B тупого угла параллелограмма $ABCD$ на его диагональ AC , делит эту диагональ на отрезки 41 и 57 см. Разность сторон параллелограмма равна 14 см. Найдите:

а) стороны и диагонали параллелограмма;

б) площадь параллелограмма и его высоты;

в) синус угла между высотами;

г) отрезки, на которые биссектриса острого угла параллелограмма, делит большую сторону и меньшую диагональ;

д) отрезки, на которые биссектриса угла между диагональю и стороной делит противоположную сторону;

е) длину биссектрисы острого угла параллелограмма;

ж) площадь четырёхугольника, вершины которого совпадают с серединами сторон параллелограмма;

з) вид четырёхугольника, образованного биссектрисами углов параллелограмма;

и) отношение расстояний от любой точки диагонали AC до прямых BC и CD ;

к) площадь параллелограмма, определённого прямыми, проведёнными через вершины параллелограмма параллельно его диагоналям;

л) стороны треугольника, в который вписан данный параллелограмм так, что его диагонали параллельны двум сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на третьей стороне треугольника.

4. Две окружности, радиусы которых 4 см и 12 см, касаются внешним образом.

а) Найдите длину их общей касательной.

б) Вычислите центральные углы, образованные радиусами каждой из окружностей, проведёнными в точки касания окружностей, с их общими внешними касательными.

в) Найдите основание равнобедренного треугольника, боковые стороны которого являются внешними касательными окружностей, а основание касается большей из окружностей.

г) Вычислите угол между хордами, соединяющими точку касания окружностей с точками касания их общей внешней касательной. Зависит ли величина этого угла от длин радиусов?

д) Найдите длины хорд, соединяющие точку касания окружностей с точками касания одной из общих внешних касательных.

е) Вычислите длины оснований и высоту трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания. Можно ли в эту трапецию вписать окружность? Чему равен её радиус?

ж) Постройте с помощью циркуля и линейки общую касательную к данным окружностям. Сколько решений имеет задача? Пригоден ли используемый Вами метод для построения общей касательной к двум окружностям, не имеющим общих точек?

5. Сторона AB треугольника ABC равна 15, сумма двух других сторон равна 27. Радиус окружности, вписанной в треугольник равен 4. Найдите:

а) высоту, опущенную на данную сторону;

б) косинус угла C ;

в) стороны AC и BC ;

г) медиану данной стороны;

- д) радиус окружности, описанной около данного треугольника;
- е) радиус окружности, проходящей через точки A , B и центр вписанной окружности.

Указания к задачам для самостоятельной работы

1. г) Обратите внимание на то, какой вид имеет треугольник ABC .
 - д) Выразите искомый радиус из двух других прямоугольных треугольников.
 - е) Вспомните, как биссектриса внутреннего угла треугольника делит его противоположную сторону.
 - ж) Не забудьте, что искомый отрезок находится вне треугольника.
 - з) Примените результат задачи 1 е).
 - и) Примените свойство касательных, проведённых к окружности из одной точки.
2. а) Примените задание №10 из теста для самоконтроля.
 - б) Найдите вначале синус угла между данными сторонами.
 - в) Рассмотрите два возможных случая.
 - г) Выразите разными способами площадь данного треугольника.
 - д) Найдите вначале сумму квадратов медиан, проведённых к данным сторонам.
 - е) Будьте внимательны при построении чертежа.
 - ж) Примените теорему косинусов.
 - з) Примените теорему синусов.
3. в) Докажите, что угол между высотами равен острому углу параллелограмма.
 - е) Можно воспользоваться теоремой косинусов.
 - ж) Вспомните свойство средней линии треугольника.
 - з) Воспользуйтесь тем, что сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180° .

и) Сравните площади треугольников MBC и MDC , где M — точка на диагонали AC .

к) Сравните площади данного параллелограмма с искомой площадью.

4. в) Рассмотрите подобные треугольники.

г) Рассмотрите углы, образованные линией центров с упомянутыми в задаче хордами.

е) Используйте результат решения задачи 4 б).

ж) Постройте на отрезке, соединяющем центры окружностей, как на диаметре, окружность.

5. б) Найдите $\cos \angle C$ с помощью теоремы косинусов. Выразите сумму квадратов сторон AC и BC через их сумму и произведение. Произведение $AC \cdot BC$ выразите из формулы площади треугольника. Получите тригонометрическое уравнение для угла C .

е) Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Радиус окружности, описанной около треугольника AO_1C можно найти по теореме синусов. Покажите, что $\sin \angle AO_1B = \cos \frac{\angle C}{2}$.

Контрольное задание

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного задания и дополнительного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		Контрольный тест	Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	14 задач	8 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	18 задач	12 задач	5 задач
«отлично»	Решено не менее	22 задачи	16 задач	7 задач

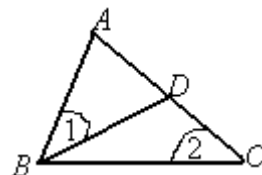
Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям теста самоконтроля, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

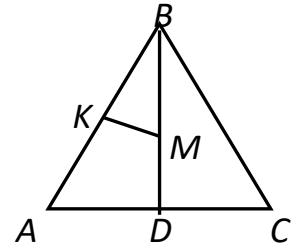
- Углы треугольника относятся как 2: 3: 5. Этот треугольник ...
А. может быть любым. Б. является остроугольным.
В. является тупоугольным. Г. является прямоугольным.
- Стороны треугольника выражаются разными целыми числами; одна равняется 3 м, вторая — 2 м. Третья сторона может равняться...
А. 1 м. Б. 4 м. В. 5 м. Г. 2 м.
- Внутренний угол треугольника равняется разности двух внешних углов, не смежных с ним. Этот треугольник ...
А. остроугольный. Б. прямоугольный.
В. тупоугольный. Г. может быть любым.
- Треугольник ABC — равнобедренный: $AB = BC = a$; $AC = b$; $BD \perp AC$, AM — биссектриса угла BAC , $DK \parallel AM$, где K принадлежит BC . Отношение $BM:MK$ равняется ...
А. $a:b$. Б. $a:2b$. В. $2a:b$. Г. число, которое отличается от приведенных.
- В треугольнике ABC , изображенном на рисунке, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 4$ см, $AC = 9$ см. Сторона AB равняется ...
А. 18 см. Б. 6 см. В. 5 см. Г. 9 см.



6. На рисунке $AB = BC$; $BD \perp AC$; $AC = 12$, $AK = BK$; $KM \perp AB$, $BD = 8$. Отрезок MD равен ...

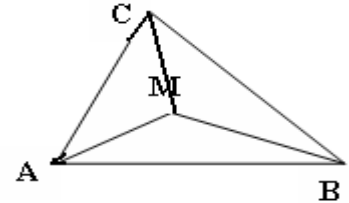
- А. $\frac{7}{4}$. Б. $\frac{25}{4}$. В. 5.

Г. числу, отличающемуся от приведенных.



7. В треугольнике ABC угол A равняется 42° , M является точкой пересечения биссектрис треугольника, а угол AMB равняется 136° . Угол B равняется ...

- А. 46° . Б. 94° . В. 47° . Г. 23° .

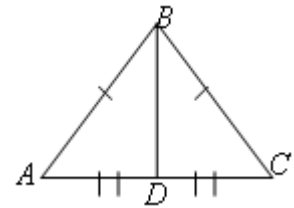


8. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к его основанию, и боковая сторона равняются, соответственно, 12 см и 13 см. Основание равняется ...

- А. 5 см. Б. 10 см. В. $\sqrt{313}$ см. Г. 2 см.

9. Медиана BD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равняется 10 см, а его периметр равняется 80 см. Периметр треугольника ABD равняется ...

- А. 40 см. Б. 45 см. В. 60 см. Г. 50 см.



10. Тупой угол параллелограмма равняется 140° . Угол между высотами параллелограмма равняется ...

- А. 80° . Б. 20° . В. 40° . Г. 160° .

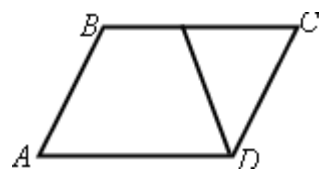
11. Пусть N — точка пересечения медиан AK и BM треугольника ABC , $MD \parallel AK$, где D принадлежит BC . Отношение $BD:DC$ равняется ...

- А. 1,5. Б. 2. В. 2,5. Г. 3.

12. В трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) можно вписать окружность. Какое соотношение является правильным?

- А. $AB = CD$. Б. Сумма углов A и C равняется 180° .
В. Угол A равняется углу D . Г. $AB + CD = BC + AD$.

13. Биссектриса угла D в параллелограмме $ABCD$ разделяет сторону BC на отрезки 7 см и 14 см (считая от вершины C). Периметр параллелограмма равняется ...



А. 56 см. Б. 70 см. В. 42 см. Г. 35 см.

14. Два неравных отрезка точкой пересечения делятся пополам. Их концы последовательно соединены. Полученный четырехугольник является ...

А. параллелограммом. Б. ромбом. В. прямоугольником. Г. квадратом.

15. Сторона ромба равняется 10 см, одна из диагоналей — 16 см. Вторая диагональ равняется ...

А. 6 см. Б. $\sqrt{156}$ см. В. $\sqrt{356}$ см. Г. 12 см.

16. Из точки данной окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Угол между ними равняется ...

А. 30° . Б. 45° . В. 60° . Г. величине, отличающейся от приведенных.

17. Из точки, лежащей вне окружности, проведены к ней взаимно перпендикулярные касательные, отрезки которых от данной точки до точек касания равны по 8 см каждая. Радиус окружности равняется ...

А. 4 см. Б. 8 см. В. 4 см. Г. величине, отличающейся от приведенных.

18. Определите взаимное размещение окружностей, радиусы которых равняются, соответственно, 2 см и 6 см, а центры удалены друг от друга на 8 см.

А. Одна находится внутри второй. Б. Пересекаются в двух точках.

В. Не имеют общих точек. Г. Касаются друг друга.

19. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Точка A находится на расстоянии 5 см от центра и на расстоянии 3 см от точки касания. Диаметр окружности равняется ...

А. 2 см. Б. 8 см. В. 6 см. Г. величине, которая отличается от приведенных.

20. Наибольшее и наименьшее расстояния от точки вне окружности до этой окружности равняются 8 см и 2 см. Радиус окружности равняется ...

А. 3 см. Б. 6 см. В. 10 см. Г. 5 см.

21. Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, является точкой пересечения ...

А. высот треугольника. Б. медиан треугольника В. биссектрис треугольника.

Г. серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

22. Сколько окружностей можно провести через три данные точки, которые не лежат на одной прямой?

А. Четыре. Б. Одну. В. Две. Г. Ответ отличается от приведенных.

23. Внутренний диаметр трубы равняется 80 мм, а толщина стенок — 4 мм. Внешний диаметр ее равняется ...

А. 84 мм. Б. 88 мм. В. 76 мм. Г. 72 мм.

24. Середины сторон трапеции последовательно соединили. Полученный четырехугольник является ...

А. прямоугольником. Б. параллелограммом. В. ромбом. Г. трапецией.

25. Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника не могут быть пропорциональны числам ...

А. 3 и 5. Б. 3 и 4. В. 2 и 3. Г. 1 и 2.

Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений.

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 9$ см и $BC = 12$ см.

1.1. Вычислите проекции катетов на гипотенузу.

1.2. Найдите радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной около него. Проверьте, что сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей. Справедливо ли это соотношение для произвольного прямоугольного треугольника?

1.3. Проверьте, что медианы треугольника m_1 , m_2 , m_3 удовлетворяют соотношению $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$. Удовлетворяют ли этому соотношению медианы произвольного прямоугольного треугольника?

1.4. Докажите, что если для медиан m_1 , m_2 , m_3 некоторого треугольника выполняется соотношение $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$, то этот треугольник прямоуголь-

ный.

1.5. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

1.6. Найдите периметр квадрата, вписанного в треугольник, и имеющего с ним общий угол.

1.7. Найдите биссектрисы углов треугольника.

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ см, $BC = 4$ см и высотой $h = 6$ см.

2.1. Найдите боковые стороны и диагонали трапеции. Проверьте, что основания a , b , боковая сторона c и диагональ d удовлетворяют соотношению $d^2 = ab + c^2$. Справедливо ли это соотношение для произвольной равнобедренной трапеции?

2.2. Вычислите радиус окружности, описанной около трапеции. Всегда ли около равнобедренной трапеции можно описать окружность?

2.3. Выясните, можно ли в эту трапецию вписать окружность. Какое условие необходимо и достаточно для того, чтобы в равнобедренную трапецию можно было вписать окружность?

2.4. Вычислите расстояние между серединами диагоналей трапеции.

2.5. Выясните, будут ли диагонали трапеции взаимно перпендикулярными.

2.6. Какую сторону трапеции пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону?

3. В окружности проведены два радиуса. Как провести хорду, чтобы она этими радиусами разделилась на 3 равные части?

4. В точках пересечения окружностей с радиусами 4 см и 8 см касательные к ним взаимно перпендикулярны. Вычислите длину их общей внешней касательной.

5. К двум окружностям радиусов R и r , находящимся в положении внешнего касания, проведены их общие касательные — внутренняя и две внешние. Точки касания их внешних касательных A , B , C , D последовательно соединены.

Найдите длину отрезка внутренней касательной, заключённой между внешними касательными.

6. В угол вписаны две окружности, одна из которых касается сторон угла в точках K_1 и K_2 , а другая — в точках L_1 и L_2 . Докажите, что прямая K_1L_2 отсекает на этих окружностях равные хорды.

Указания к задачам основного задания

1.4. Используйте соотношение между сторонами и диагоналями параллелограмма.

1.7. Обратите внимание на диагональ квадрата в предыдущем задании.

2.2. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC , проходит и через точку D . Другой способ решения задачи состоит в рассмотрении треугольников BOC и AOD , где O — центр описанной окружности. Выясните, где лежит центр описанной окружности.

3. Продлите хорду, соединяющую концы радиусов, в обе стороны и по каждую сторону отложите отрезки, равные хорде.

4. Заметьте, что касательная к одной окружности в точке их пересечения проходит через центр другой.

5. Примените свойство касательных, проведённых к окружности из одной точки.

6. Покажите, что произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной, проведённой из той же точки, что и секущая.

Дополнительное задание

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 9$ см и $BC = 12$ см.

1.1. Докажите, что биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины прямого угла. Справедливо ли это утверждение для произвольного прямоугольного треугольника?

1.2. Найдите расстояние между точкой пересечения биссектрис и точкой пересечения медиан.

1.3. Вычислите радиус окружности, касающейся одного катета и продолжения другого катета и гипотенузы.

1.4. Вычислите радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD , на которые данный треугольник поделится перпендикуляром CD , опущенным из вершины прямого угла на гипотенузу.

1.5. Найдите радиус круга с центром на гипотенузе, который касается большего катета и проходит через вершину противоположного острого угла.

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ см, $BC = 4$ см и высотой $h = 6$ см.

2.1. Вычислите длину перпендикуляра, проведённого через середину одной из боковых сторон до прямой, которая проходит через другую боковую сторону.

2.2. Найдите длину отрезка, заключённого между точками пересечения прямых, соединяющих середину большего основания с концами меньшего, с диагоналями трапеции.

2.3. Вычислите расстояние между точками, в которых окружность с центром на большем основании и касающаяся сторон AB , BC , CD , касается боковых сторон AB и CD .

3. Через точку A окружности с радиусом 10 см проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC . Вычислите радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB = 16$ см.

4. Из одной точки окружности проведены 2 хорды длиной 10 см и 12 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

5. Две окружности, радиусы которых 4 см и 12 см, касаются внешним образом. Вычислите площадь S треугольника, образованного центрами окружностей O_1 , O_2 и точкой, лежащей на их общей внешней касательной и удалённой от середины отрезка O_1O_2 на 16 см.

6. AC и BD — две хорды окружности радиуса R , пересекающиеся под прямым углом в точке M . Найдите $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$.

Указания к задачам дополнительного задания

- 1.1. Продлите биссектрису до пересечения с окружностью, описанной около треугольника.
- 1.2. Можно применить утверждение, полученное в задаче 1.10.
- 1.3. Не забудьте рассмотреть два случая.
- 1.5. Рассмотрите подобные треугольники.
- 2.1. Сравните площадь треугольника, вершины которого совпадают со серединой боковой стороны и концами другой, с площадью трапеции.
- 2.2. Примените подобие треугольников.
- 2.3. Найдите высоту треугольника, образованного радиусами, проведёнными в точки касания окружности с боковыми сторонами, и отрезком, соединяющим точки касания.
3. Установите расположение центров окружностей и точки их касания.
4. Рассмотрите 2 случая: хорды лежат по одну и по разные стороны от центра.
5. Продлите линию центров и общую внешнюю касательную до пересечения.
6. Прибавьте $2AM \cdot CM$ и вычтите $2BM \cdot DM$.

Олимпиадные задачи

1. Вычислите углы равнобедренного треугольника, в котором центры вписанного и описанного кругов взаимно симметричны относительно основания треугольника.
2. Пусть стороны выпуклого четырехугольника соответственно равняются a, b, c, d , а его площадь равняется S . Докажите, что $S \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.
3. В прямоугольном треугольнике острый угол равняется 15° . Докажите, что произведение катетов равняется квадрату половины гипотенузы.
4. Через произвольную точку общей хорды двух **пересекающихся** кругов проведено в этих кругах по хорде. Докажите, что концы двух последних хорд лежат на одной окружности.

5. Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность правильного треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB . Докажите, что $AD + BD = DC$.
6. Сколько сторон может быть в выпуклом многоугольнике, все диагонали которого имеют одинаковую длину?
7. На продолжении стороны AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $AC = CD$. Пусть M — середина стороны AB , а K — точка пересечения отрезков BC и DM . Докажите, что площадь треугольника BKD равняется площади четырехугольника $AMKC$.
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK . Известно, что центры окружностей, вписанной в треугольник ABK и описанной вокруг треугольника ABC , совпадают. Найдите углы треугольника ABC .
9. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике середины диагоналей и точка пересечения прямых, которые соединяют середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.
10. Даны треугольник ABC и точка O . Обозначим через M_1, M_2, M_3 центры масс треугольников OAB, OBC, OCA соответственно. Докажите, что треугольники $M_1M_2M_3$ и ABC подобны и найдите коэффициент подобия.

Указания к решению олимпиадных задач

1. Соедините центры вписанной и описанной окружностей с вершинами треугольника и рассмотрите полученные треугольники.
2. Проведите диагонали четырехугольника и воспользуйтесь формулой площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.
3. Достройте треугольник до прямоугольника и вычислите его площадь разными способами.
4. Соедините концы двух последних хорд и докажите, что вокруг полученного четырехугольника можно описать окружность.
5. Можно воспользоваться теоремой косинусов.
6. Докажите методом от противного, что в n -угольнике, где $n > 6$, это невозможно. Возьмите для этого его сторону AB и две пересекающиеся диагонали AD

и BC (вершины C и D не являются соседними с A и B). Тогда неравенство $AD + BC < AC + BD$ противоречит равенству диагоналей.

7. Воспользуйтесь тем, что BC и DM — медианы треугольника ABD .

8. Воспользуйтесь тем, что биссектриса угла B одновременно является высотой и медианой треугольника ABC .

9. Воспользуйтесь свойством средней линии треугольника и свойствами параллелограмма.

10. Воспользуйтесь теоремой, обратной теореме о пропорциональных отрезках.

Послесловие

Геометрия, как известно, возникла из потребностей практики, что нашло отражение в ее названии: гео — земля, метрио — измерение. К VII ст. до н. э. геометрия имела эмпирический характер и предназначалась полностью для обеспечения потребностей практической деятельности людей. Объектом этой геометрии были физические тела. Благодаря усилиям греческих математиков VII - III ст. до н. э. геометрия стала образцом построения научных теорий. Именно в геометрии впервые был применен аксиоматический метод, который характеризуется выделением первичных понятий и отношений и построением теории дедуктивным методом. Геометрия Древней Греции была изложена в книгах Евклида. Она не опиралась на методы алгебры и анализа, оперировала непосредственно с геометрическими образами. Такую геометрию обычно называют синтетической.

Практически два тысячелетия в геометрии Евклида неизменными оставались как предмет, так и методы исследования. Открытие метода координат и его приложения привело к созданию аналитической геометрии в XVII веке благодаря работам Р. Декарта и П. Ферма. В результате расширился перечень фигур, которые рассматриваются (кривые и поверхности второго порядка). В отличие от синтетической геометрии, в аналитической геометрии главным инструментом доказательств был метод координат (хотя аналитическая геометрия

тоже излагалась дедуктивно). Этот метод позволил "алгебраизировать" геометрические задачи, свести их к алгебраическим преобразованиям и вычислениям.

Несмотря на то, что история геометрии, как науки, так и учебной дисциплины, насчитывает несколько тысячелетий, и сейчас внимание к ней остается неизменным. Ведь бессмысленно говорить о достижениях в математике и ее приложениях, не опираясь на классические результаты, в основе которых лежит геометрия простейших плоских фигур. Но и сама элементарная геометрия постоянно обогащается новыми фактами и методами. Достаточно, например, вспомнить многочисленные открытия А. Брокара (1845 - 1922) в геометрии треугольника и круга, или же сенсационную теорему Ф. Морлея о том, что точки пересечения трисектрис углов треугольника являются вершинами правильного треугольника. Это говорит о больших возможностях, которые открывает перед любознательным умом данная тема.

Если у вас появилось желание углубить свои знания по планиметрии, научиться решать планиметрические задачи, то у вас есть значительные возможности для этого. Существует много литературы для школьников, посвященные планиметрии, которую можно найти в интернете.

Афанасьева Ольга Николаевна
Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович
Слипенко Анатолий Константинович

Геометрия треугольников, четырехугольников, окружностей

Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9 классов
Учебное пособие