Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К.

Функции и их графики

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов

Донецк 2025

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К. Функции и их графики. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов. — Донецк. — 54 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-х классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике в открытом математическом колледже (ОМК), рекомендованной Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики (приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 25.06.2016г. № 863).

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков чтения и построения графиков функций, умений применять графики функций для решения уравнений и неравенств.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Завершается пособие контрольным заданием, работа над которым обеспечивает контроль усвоения содержания темы. Контрольное задание, наряду с контрольным тестом, содержит основные и дополнительные задачи.

Пособие может быть использовано обучающимися девятых классов, учителями математики для внеурочного изучения математики.

Содержание

Предисловие

Математическое образование является базой профессионального образования для многих профессий. Поэтому очень важно помочь обучающимся получить добротную математическую подготовку.

Предлагаемое пособие направлено на углубление математических знаний девятиклассников, на совершенствование их умений решать сложные задачи, в частности прикладные, на подготовку к итоговому оцениванию по математике, к продолжению обучения в профильной школе.

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков чтения и построения графиков функций, умений применять графики функций для решения уравнений и неравенств.

В пособии содержатся понятия и утверждения, которые изучались в школьном курсе математики, некоторое их расширение, углубление. объяснения и советы, которые помогут обучающимся при решении задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Каждый блок содержит образцы решения задач. Овладеть необходимым теоретическим материалом, проверить степень его усвоения помогут обучающимся вопросы для самоконтроля. К ним приведены указания и ответы. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного и дополнительного заданий. Выполнение контрольного теста заключается в выборе правильного ответа из нескольких приведенных. В зависимости от намерений и возможностей обучающихся, они могут выполнять только контрольный тест, или контрольный тест и основное задание, или контрольный тест, основное и дополнительное задание.

Пособие предназначается для обучающихся 9-х классов разного типа образовательных учреждений, учителей математики. Оно может быть частично использовано обучающимися 10-х и 8-х классов.

Введение для обучающихся

Уважаемые друзья!

Настоящее пособие посвящено функциям и их графикам. Хорошо усвоить материал настоящего задания очень важно для вашей успешной учебы как в 9-м, так и при последующем обучении. Важно это и для «внешкольной» жизни. Человеку часто приходится встречаться с различными зависимостями между величинами. Эти зависимости могут быть заданы по-разному: с помощью таблицы, графика, описания или формулы. Умение обращаться с ними, извлекать из них нужную информацию необходимы каждому современному человеку.

Выполнение контрольного задания, приведенного в пособии, поможет вам развить свои умения читать и строить графики, применять графики функций для решения уравнений и неравенств, исследования реальных процессов. Все необходимые для выполнения контрольного задания сведения и разъяснения приведены в пособии.

Убедиться в том, что вы усвоили данную тему, помогут тест для самоконтроля и задания для самостоятельного решения с ответами и указаниями, содержащимися в пособии. Если ваши ответы на тестовые задания не совпадают с приведенными в пособии, проанализируйте ошибки и учтите их в своей дальнейшей работе.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач. Работа над контрольным тестом состоит в выборе для каждого тестового задания правильного ответа среди предложенных. Помните, что правильный ответ среди них всегда имеется, и он ровно один.

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений. Дополнительное задание предполагает решение более сложных задач. В пособии приведены творческие задания для тех, кто хотел бы глубже овладеть методами исследования функций.

Надеемся, что работа над пособием будет для вас интересной и полезной.

Желаем успехов!

Введение для учителей

Уважаемые коллеги!

Настоящее пособие может быть использовано для организации дополнительного обучения математике, проведения факультативных занятий в 9-ом классе. Оно позволит также организовать самостоятельное изучение математики обучающимися, дополнительное к школьному.

Приведенный в пособии теоретический материал, решение типовых задач достаточны для обеспечения готовности к самостоятельной работе над заданиями. Эту готовность можно проверить с помощью теста для самоконтроля. Наличие ответов и указаний к заданиям теста дает возможность корректировать подготовку обучающихся к обучению. В пособии помещены задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним. Оказание помощи в их решении является важной составляющей в управлении самостоятельной работой обучающихся. Формирование у обучающихся определенной последовательности действий при проработке учебного материала является необходимым условием формирования умения самостоятельно учиться.

Предложенное пособие может быть использовано как для организации индивидуального обучения, так и для проведения факультативов и других коллективных форм обучения. В начале рассмотрения темы необходимо помочь обучающимся осознать главную цель темы, ее основных заданий. Сжатый обзор теоретического материала и рекомендации к его проработке являются следующим шагом в работе с обучающимися. Наибольшее внимание следует уделить решению задач для самостоятельной работы. Именно они готовят обучающихся к выполнению контрольного задания. Целесообразно сделать акцент на самоконтроле. Надеемся, что предложенное пособие будет вашим надежным помощником в организации обучения математике, дополнительного к школьному, в организации самостоятельной работы обучающихся, в обеспечении предпрофильного обучения математике.

Желаем успехов в обучении и воспитании детей!

Функции и их графики

Введение

Человеку очень часто приходится иметь дело с разными зависимостями между величинами. Это происходит, в первую очередь, тогда, когда он учится в школе, или в высшем учебном заведении. Чтобы убедиться в этом, достаточно полистать страницы учебников по физике, химии, техническим дисциплинам, журналов. Умение устанавливать зависимости и их исследовать необходимо для решения жизненных задач, а тем более для решения производственных задач во всех сферах деятельности человека.

Среди разных зависимостей особое место занимают функциональные зависимости между величинами. Они могут задаваться по-разному: с помощью таблицы, графика, формулы, словесного описания. Умение пользоваться ими, добывать из них необходимую информацию нужны каждому человеку.

Среди этих умений наиболее важными является:

- чтение графиков функций (то есть установление по графику их свойств и характеристик);
- построение разными методами графиков функций, заданных формулами;
- моделирование процессов и явлений с помощью функций и задач, связанных с ними.

Главной целью данного пособия является создание условий для приобретения обучающимися указанных умений. Определенный опыт операций с функциями вы уже имеете. Его обогащению и расширению посвящено данное пособие.

Работа над этим пособием поможет вам развить умение читать и строить графики функций, применять функции для решения уравнений и неравенств, прикладных задач, будет способствовать усвоению математики и физики 9 класса, подготовке к обучению в старших профильных классах, где функции являются одним из главных объектов изучения.

1. Функции и способы их задания

В мире все взаимосвязано. Математика позволяет понять связи, исследовать их и управлять ими. Очень часто изменение одной величины влечет за собой изменение многих других. Так, с изменением радиуса окружности меняются ее длина, площадь соответствующего круга, периметр правильного треугольника, вписанного в эту окружность и т.п.

При изучении различных зависимостей в математике обычно отвлекаются от конкретного физического или геометрического смысла переменных величин и обозначают их «обезличенными» буквами x, y, t и т.п.

Зависимости между двумя переменными могут обладать различными свойствами. Среди них особое место занимают ***функциональные зависимости***. Это такие зависимости, когда каждому допустимому значению одной переменной соответствует ***ровно одно*** значение другой переменной. При этом первую переменную называют ***независимой переменной***, или ***аргументом***, а вторую — ***зависимой переменной***. По традиции независимую переменную чаще всего обозначают через x, а зависимую — через y. Но чтобы подчеркнуть связь рассматриваемых функций с реальными зависимостями, будем часто использовать обозначения переменных, соответствующих их физическому смыслу. Например, в формуле $s = \frac{at^2}{2}$ под s обычно понимают пройденный телом путь, a — ускорение, t — время.

Формула $y = x^2$ устанавливает функциональную зависимость между переменными x и y (если независимой переменной является переменная x!). Формула $x^2 + y^2 = 1$ также отражает зависимость между переменными x и y. Но эта зависимость не является функциональной, так как почти всем допустимым значениям одной переменной соответствуют два значения другой:
если $x_0 \neq \pm 1$, то x_0 соответствуют два значения y: $\sqrt{1-x_0^2}$ и $-\sqrt{1-x_0^2}$;
если $y_0 \neq \pm 1$, то y_0 соответствуют два значения x: $\sqrt{1-y_0^2}$ и $-\sqrt{1-y_0^2}$.

Функциональную зависимость переменной y от переменной x обозначают так: $y = f(x)$, или $y = g(x)$, или $y = \varphi(x)$ и т.д. Все значения, которые может принимать независимая переменная, называют ***областью определения функции*** и обозначают $D(f)$ или $D(g)$ или $D(\varphi)$ и т.п.

Задать функцию означает:

1) указать ее область определения;
2) указать правило, согласно которому каждому значению независимой переменной из области определения функции соответствует единственное значение зависимой переменной.

Коротко это можно записать так: $y = f(x)$, $x \in D(f)$; $y = g(x)$, $x \in D(g)$; $y = \varphi(x)$, $x \in D(\varphi)$.

Значение зависимой переменной y, которое соответствует значению независимой переменной $x=a$ называется ***значением функции*** в точке $x=a$ и обозначается $f(a)$, $g(a)$ и т. п.

Все значения, которые принимает зависимая переменная, называют ***множеством значений функции*** и обозначают $E(f)$, $E(g)$, $E(\varphi)$ и т.д.

Функции называются равными, если они имеют одинаковые области определения и в каждой точке области определения принимают равные значения.

Например, функции $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ и $y = x^2 - 1$ являются равными, а функции $y = \frac{x^3}{x}$ и $y = x^2$ не являются равными, так как у них не совпадают области определения (проверьте это самостоятельно).

Обратите внимание, что функции $y = x^2$ и $y = x^2$, $x \geq 0$ — это разные функции, так как у них не совпадают области определения: у первой область определения $(-\infty; +\infty)$, у второй — $[0;+\infty)$ по условию. Это же относится и к функциям $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ и $y = x - 1$.

Существуют различные способы задания правила нахождения одной переменной по другой. Их обычно называют способами задания функции. Чаще всего встречаются ***аналитический***, ***графический*** и ***табличный*** способы задания функции.

Аналитический способ задания функции состоит в указании формулы, по которой определяют значения зависимой переменной по значениям аргумента.

Например, $y = 2x - 1, \quad x = t^2 + 2t - 1, \quad u = \dfrac{v}{v+1}$.

Если функция задана формулой и не указано никаких ограничений на значения аргумента, то ее областью определения считается множество всех значений аргумента, при которых выполнимы все операции, участвующие в этой формуле. Это множество называют ***естественной областью определения*** данной функции.

Задание «Найти область определения функции $y = f(x)$» означает найти ее естественную область определения. Так, область определения функции $y = x^2$ — все действительные числа (множество $(-\infty; +\infty)$), а область определения функции $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ — все действительные числа за исключением числа $x = 1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль, и она не имеет смысла (множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$).

Ограничения на аргумент естественно возникают, если функция описывает какой-либо реальный процесс или явление. Так, для функции $s = 5t^2$, отражающей зависимость пройденного пути s от времени t, естественно считать, что $t \geq 0$.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-5}$.

Решение. Выражение $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ содержит несколько операций. Среди изученных операций не всегда осуществимы две: извлечение корня квадратного и деление. Нельзя разделить на нуль и нельзя извлечь корень квадратный из отрицательного числа. Поэтому естественной областью определения данной функции является множество чисел x, для которых одновременно выполняются условия: $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-5 \neq 0. \end{cases}$

Решив эту систему, получим: $D(f)) = [-3;5) \cup (5;+\infty)$.

Ответ. $D(f)) = [-3;5) \cup (5;+\infty)$.

Другой способ задания функции — графический. Существует много приборов, которые изображают линии в некоторой прямоугольной системе координат. Эти линии отображают зависимость между исследуемыми величинами. Например, с помощью прибора, который называется термографом, получают линию изменения температуры среды со временем (рис. 1).

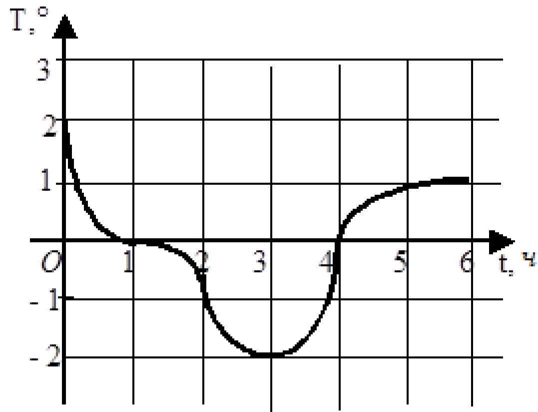


Рис. 1

По указанному рисунку можно для каждого момента времени $0 \leq t \leq 6$ определить единственное значение температуры T. Таким образом, линия определяет некоторую функциональную зависимость переменной T от переменной t. Такой способ задания функции называют ***графическим***. Не любая линия на координатной плоскости описывает функцию.

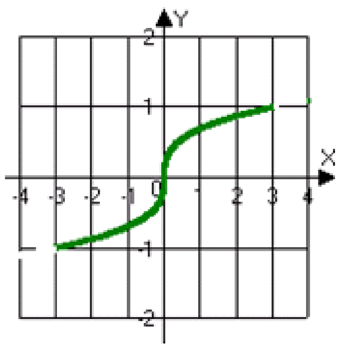


Рис. 2

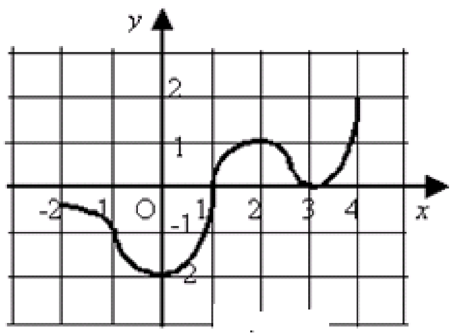


Рис. 3

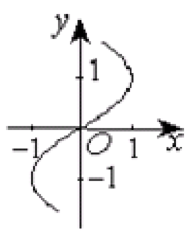


Рис. 4

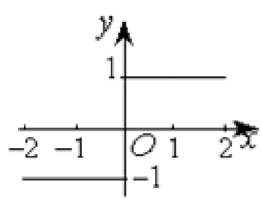


Рис. 5

Зависимость переменной y от переменной x, которая задана графически, является функциональной тогда и только тогда, когда любая прямая, параллельная оси y, и сама ось y пересекают заданное множество на координатной плоскости не более чем в одной точке. Кривые на рисунках 2 и 3 определяют функциональные зависимости y от x, а на рисунках 4 и 5 — нет. Например, на рис. 4 существуют две различные точки с одной абсциссой $x = \frac{1}{2}$, то есть одному значению x отвечают два значения y.

Функции, заданные графически, воспринимаются легче всего. Поэтому обычно от аналитического способа задания функции переходят к ее графическому заданию, то есть строят график функции, заданной формулой.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты — соответствующими значениями функции. Другими словами, график функции $y = f(x)$ — это множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где x принимает все значения из области определения функции.

Например, графиком функции $y = 2x - 1$, как известно, является прямая, а графиком функции $y = x^2$ — парабола.

Табличный способ задания функции заключается в составлении таблицы, в которой для каждого значения независимой переменной указано значение зависимой переменной. Этим способом широко пользуются при изучении разных предметов. Его особенность связана с тем, что в таблице можно указать лишь конечное количество значений аргумента.

2. Чтение графиков функций

Исследование реальных процессов и явлений часто сводится к исследованию функций, которые описывают эти процессы и явления. Исследовать функцию — означает установить ее характерные особенности, в частности найти:

1) ***область определения функции***;
2) ***нули функции*** — значения аргумента, при которых функция равна нулю;

3) ***промежутки знакопостоянства функции***, т.е. промежутки, где значения функции имеют один и тот же знак (или только +, или только –);
4) ***промежутки возрастания функции***, т.е. промежутки, где большему значению аргумента соответствует большее значение функции;
5) ***промежутки убывания функции***, т.е. промежутки, где большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции;
6) ***наибольшее и наименьшее значения функции***, если они существуют;
7) ***множество значений функции.***

Довольно легко исследовать функцию, заданную графически. Область определения функции — это проекция ее графика на ось x. Нули функции — это точки пересечения графика функции с осью x. График функции на промежутке знакопостоянства лежит по одну сторону от оси x, на промежутке возрастания поднимается вверх при росте аргумента, а на промежутке убывания — опускается вниз. Множество значений функции — проекция графика на ось y.

Исследование функции по ее графику называют ***чтением графика***. ***Прочитать график функции*** означает установить, по возможности, все ее свойства по графику.

Пример 2. Прочитать график функции $y = f(x)$, изображенный на рис. 2..

Решение. Область определения функции — отрезок [–3; 3]. Функция имеет один нуль: $x = 0$. Положительные значения функция принимает при $0 < x \le 3$, отрицательные — при $-3 \le x < 0$. Она возрастает на всей области определения, потому что при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Множеством значений функции является отрезок [–1; 1]. Следовательно, наименьшее значение функции равняется –1, а наибольшее — 1. ■

График функции $y = f(x)$ даёт возможность приближённо решать уравнения вида $f(x) = a$.

Пример 3. Сколько корней имеют уравнения $f(x) = \frac{1}{3}$ и $f(x) = 3$, если функция $y = f(x)$ задана графически на рис 2?

Решение. Пересечём график функции прямой $y = \dfrac{1}{3}$ (рис. 6). Легко заметить, что эта прямая пересекает график функции в одной точке. Приближённое значение абсциссы этой точки равно $\dfrac{1}{3}$.

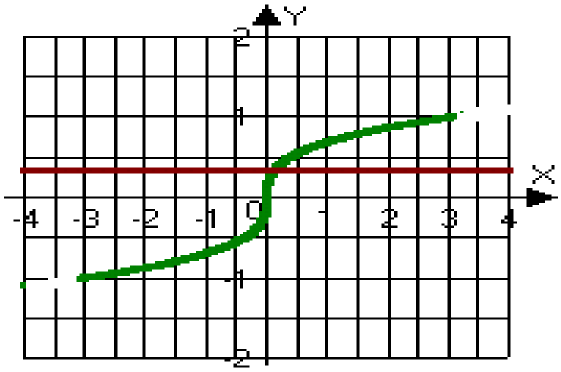


Рис. 6

Поэтому уравнение $f(x) = \dfrac{1}{3}$ имеет один корень, который прбличжённо равен $\dfrac{1}{3}$.

Уравнннние $f(x) = 3$ не имеет корней, так как прямая $y = 3$ не пересекает график функции $y = f(x)$. ■

Нетрудно найти решение и обобщения рассмотренной задачи.

Пример 4. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$, если функцию $y = f(x)$ задано графически на рис 2, а a — произвольное число?

Решение. Если $|a| \le 1$, то прямая $y = a$ пересекает график функции $y = f(x)$ в одной точке. Таким образом, уравнение $f(x) = a$ при $|a| \le 1$ имеет один корень. При $|a| > 1$ корней нет, потому что прямая $y = a$ при этих значениях a не пересекает график функции $y = f(\mathrm{x})$.

Ответ. При $|a| \le 1$ уравнение имеет один корень, при $|a| > 1$ корней нет,

Пример 5. Прочитать график функции $y = g(x)$, который задан на рис. 3.

Решение. Прочитать график функции $y = g(x)$, заданный на рис. 3, немного сложнее, чем на рис. 2. Область ее определения — отрезок [–2; 4]. Функция имеет два нуля: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Положительные значения она принимает на промежутках (1; 3) и (3; 4] ($f(3) = 0$!), отрицательные — на промежутке [–2; 1).

Функция возрастет на каждом из промежутков [0; 2] и [3; 4]. Было бы ошибкой утверждать, что функция растет на объединении этих промежутков. Действительно, если $x_1 = 1{,}7$, а $x_2 = 3{,}2$, то из графика хорошо видно, что $f(x_1) > f(x_2)$, хотя $x_1 < x_2$. На каждом из промежутков [–2; 0] и [2; 3] функция убывает.

Множество значений функции — отрезок [–2; 2]. Следовательно, –2 является наименьшим, а 2 — наибольшим значением функции. ■

Пример 6. По графику изменения температуры воздуха (рис. 1) определить:

1) время, в течение которого температура возрастала;
2) наименьшую температуру воздуха;
3) сколько раз температура равнялась 0,5°.

Решение. 1) Температура возрастала с 3 час до 6 час.

2) Наименьшей температура воздуха была в 3 час и равнялась –2°.

3) Температура воздуха равнялась 0,5° дважды за 6 ч наблюдений. ■

3. Простейшие функции и их свойства

Функции, которые заданы аналитически, исследовать непросто. Для этого надо уметь исследовать функции, из которых построены более сложные. А для этого повторим, систематизируем и углубим знания об основных функциях, которые изучались в курсе алгебры: $y = kx + b,\ y = \dfrac{k}{x},\ y = ax^2 + bx + c,\ y = \sqrt{x}$.

3. 1. Линейная функция

Наиболее простым и важным в математике является класс линейных функций.

Линейной функцией называют функцию вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа. Графиком линейной функции $y = kx + b$ служит прямая, образующая с осью x такой угол φ, что $k = tg\varphi$. (рис.7 а, б, в). Ось y прямая пересе-

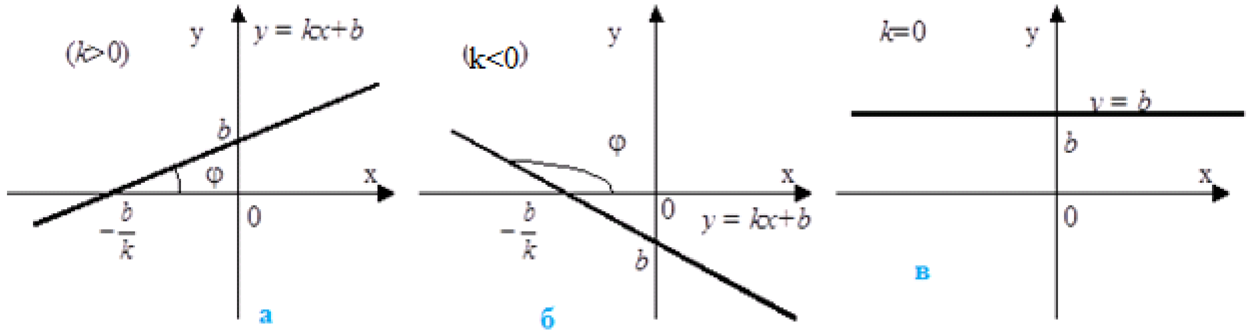


Рис. 7

кает в точке с координатами (0; b).

Справедливо и обратное утверждение: «Любая прямая, не параллельная оси ординат и отличная от неё, служит графиком некоторой линейной функции».

Одной из часто встречающихся задач является задача о нахождении линейной функции по заданным условиям. Например, по двум точкам, через которые проходит ее график, или по точке, через которую проходит график, и углу его наклона к одной из осей.

Пример 7. Найти линейную функцию $y = kx + b$, график которой:

1) проходит через точки A (–1;1) и B (2;4);

2) составляет угол 30° с осью абсцисс и проходит через точку ($-\sqrt{3}$;2).

Решение. 1) По условию $k\cdot(-1) + b = 1$, $k \cdot 2 + b = 4$. Для нахождения k и b имеем систему линейных уравнений, которую решим методом подстановки:

$$\begin{cases} b-k=1 \\ b+2k=4, \end{cases} \begin{cases} b=k+1 \\ k+1+2k=4, \end{cases} \begin{cases} b=k+1 \\ 3k=3, \end{cases} \begin{cases} b=k+1 \\ k=1, \end{cases} \begin{cases} b=1+1=2 \\ k=1. \end{cases}.$$

Следовательно, искомая функция $y = x + 2$.

2) По условию: $k = tg30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $k\left(-\sqrt{3}\right)+b=2$.

Следовательно, $b = 2 + 1 = 3$, и искомая функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+3$.

Ответ. 1) $y = x + 2$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+3$.

Свойства линейной функции определяются легко по значениям параметров k и b. Например, функция $y = kx + b$ будет убывающей тогда и только тогда, когда $k < 0$. Этот факт хорошо “виден” на рис. 7 б: функция $y = kx + b$ убывающая тогда и только тогда, когда угол наклона графика этой функции к оси x — тупой. А логическое его доказательство выглядит так. Пусть $x_1 < x_2$ и функция убывающая. Следовательно, $kx_1 + b > kx_2 + b$. Отсюда $k(x_1 - x_2) > 0$. Так как $x_1 - x_2 < 0$, то $k < 0$. Таким образом, из убывания функции $y = kx + b$ следует условие $k < 0$. Если провести эти рассуждения в обратном порядке, получим доказательство обратного утверждения.

Характерным свойством линейной функции является то, что когда переменная x увеличивается равномерно, т.е. на одно и то же число, переменная y также изменяется равномерно. Возьмем, например, функцию $y = -3x + 2$. Пусть x принимает значения 0, 2, 4, 6, 8, …, каждое из которых больше предыдущего на одно и то же число 2. Соответствующие значения y будут 2, –4, –10, –16, –22, … . Каждое из значений y меньше предыдущего на одно и то же число — на 6. Советуем самостоятельно провести доказательство характерного свойства линейной функции в общем случае.

Линейные функции находят широкое применение при описании различных явлений и процессов, протекающих именно равномерно, т.е. с постоянной скоростью.

Среди линейных выделяются функции вида $y = kx$. Они выражают прямо пропорциональную зависимость величин, которая часто встречается в науке и жизни :

а) зависимость стоимости товара от его количества при постоянной цене;

б) зависимость расстояния от времени при равномерном движении;

в) зависимость силы тока от напряжения при постоянном сопротивлении;

г) зависимость изменения длины металлического стержня от температуры, до которой его нагревают;

д) зависимость давления газа в сосуде от его температуры при постоянном объёме газа;

е) зависимость длины окружности от её радиуса.

3.2 Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называют функцию вида $y = \frac{k}{x}$, где k — вещественное число, отличное от нуля.

График функции $y = \frac{k}{x}$ — гипербола. Ее расположение на координатной плоскости зависит от знака k. При $k > 0$ ветки гиперболы находятся в I и III координатных углах (рис. 8 а), при $k < 0$ — во II и IV (рис. 8 б). График функции $y = \dfrac{k}{x}$ симметричен относительно начала координат.

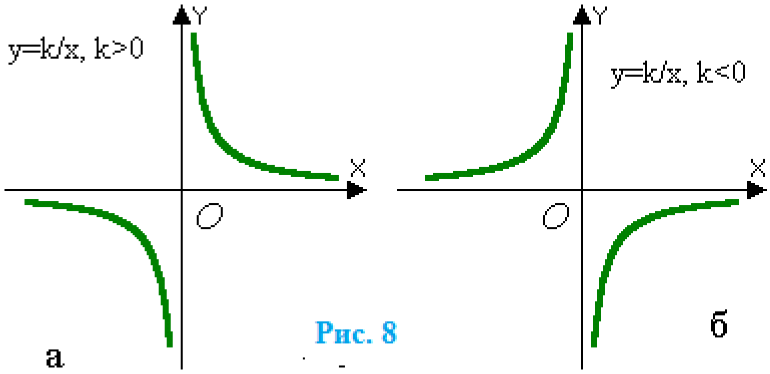


Рис. 8

Основные свойства функции:

1) Область определения функции — множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) при $k > 0$ функция принимает положительные значения на промежутке $(0; +\infty)$, отрицательные — на промежутке $(-\infty; 0)$;

при $k < 0$ функция принимает положительные значения на промежутке $(-\infty; 0)$, отрицательные — на промежутке $(0; +\infty)$;

нулей функция не имеет;

3) при $k > 0$ функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;

при $k < 0$ функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;

4) множеством значений функции является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 8. График обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A(-1; 2)$. Проходит ли он через точку $B(-0{,}5; 4)$?

Решение. Поскольку график функции проходит через точку $A(-1; 2)$, то справедливо равенство $2 = \dfrac{k}{-1}$. Отсюда находим $k = -2$. Заданная функция имеет вид $y = -\dfrac{2}{x}$. Проверим, проходит ли её график через точку $B(-0{,}5; 4)$, то есть, выполняется ли условие $4 = \dfrac{-2}{-0{,}5}$. Условие выполняется. Следовательно, график функции проходит через точку B.

Ответ. Проходит.

Обратная пропорциональность имеет широкие приложения для описания зависимостей между величинами. Она часто связана с прямой пропорциональностью. Действительно, если s_0 — расстояние между пунктами A и B, то время t равномерного движения из A в B обратно пропорционально скорости движения v: $t = \frac{s_0}{v}$. Обратно пропорциональными являются:

- зависимость между сторонами прямоугольника при заданной площади;

- зависимость между давлением газа и его объемом при постоянной температуре;

- зависимость между концентрацией жидкости и объемом растворяемого вещества при заданном количестве жидкости.

3.3 Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — некоторые числа, а x — аргумент.

Сейчас мы рассмотрим свойства и график лишь функции $y = x^2$, а исследование квадратичной функции в общем виде проведем в п. 4. 4.

Основные свойства функции $y = x^2$:

1) функция определена на всей числовой оси;

2) функция принимает неотрицательные значения, $x = 0$ — единственный ее нуль;

3) функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;

4) противоположным значениям аргумента отвечают равные значения функции, то есть график является симметричным относительно оси y.

Графиком функции является парабола (рис. 9).

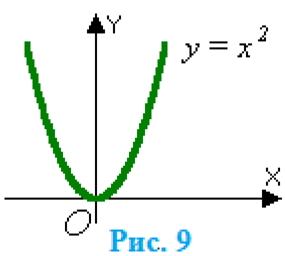


Рис. 9

Квадратичные функции естественно возникают при исследовании равнопеременных процессов. Самым простым из них является равнопеременное движение материальной точки по прямой: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$,

где x_0 — начальное положение точки (положение в момент времени t = 0); v_0 — начальная скорость движения (скорость в момент времени t = 0); a — ускорение движения. Зависимость кинетической энергии тела w, масса которого равняется m, от скорости v выражается формулой $w = \frac{mv^2}{2}$, зависимость электрической мощности N от силы тока I — формулой $N = RI^2$ и т. д.

3.4 Функция $y = \sqrt{x}$

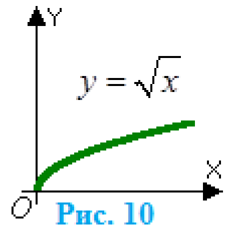


Рис. 10

Еще одной важной функцией, с которой вы знакомы, является функция $y = \sqrt{x}$. График этой функции изображен на рис. 10. Напомним ее основные свойства:

1) областью определения является промежуток $[0; +\infty)$;
2) функция принимает неотрицательные значения;
3) $x = 0$ — единственный ее нуль;
4) функция возрастает в области определения;
5) множеством значений является промежуток $[0; +\infty)$;
6) наименьшее значение, равное 0, функция принимает в точке x = 0, наибольшего значения она не имеет.

Пример 9. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Найти:

1) значения аргумента, при которых функция принимает значение 3;
2) значение функции при $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Решение.1) Чтобы найти значение аргумента, при котором функция принимает значення 3, необходимо решить уравнение $3 = \sqrt{x}$. Таким образом, x = 9.

3) Данное числовое выражение можно записать в виде

$$4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2.$$

Найдем значение функции в этой точке: $y=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1$.

Ответ. 1) $x = 9$, 2) $y=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1$

Пример 10. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}+2x=1$?

Решение. Заменим данное уравнение равносильным ему: $\sqrt{x}=1-2x$. Если x_0 — корень уравнения, то при этом значении аргумента совпадают значения функций $y=\sqrt{x}$ и $y = 1 - 2x$, то есть графики этих функций имеет общую точку. Поэтому достаточно построить графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y = 1 - 2x$ и найти количество их общих точек. Графики этих функций построены на рис. 11. Они имеют одну общую точку. Поэтому уравнение имеет один корень.

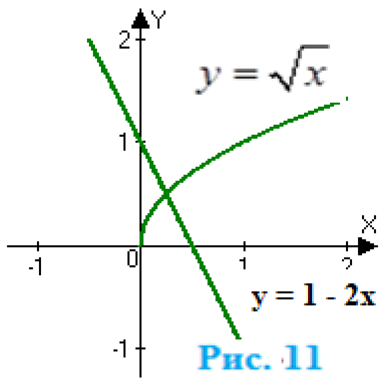


Рис. 11

Ответ. Один.

Функция $y=\sqrt{x}$ также применяется для описания реальных процессов и явлений. Расстояние, которое проходит тело при свободном падении под действием силы притяжения, изменяется со временем по закону $s=\frac{gt^2}{2}$. Тогда время, за которое тело опустится на s м, находят по формуле $t=\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{s}$. Тот же характер имеет зависимость:

1) силы тока I, A от площади поперечного сечения проводника S, мм^2: $I=k\sqrt{S}$;

2) периода колебания маятника T, с, от его длины l, м: $T=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$.

4. Построение графиков функций

Построить график функции в буквальном смысле невозможно, так как невозможно точно изобразить точку (x_0; $f(x_0)$) на координатной плоскости, а тем более их бесконечную совокупность. Поэтому под построением графика функции понимают построение линии, которая отражает главные особенности идеального графика. Такие линии называют эскизами графиков. Итак, построить график функции означает построить эскиз графика, т.е. отразить графически все основные свойства функции.

Графики некоторых функций вам хорошо известны ($y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$ и др.). А как построить график незнакомой функции? Начиная с младших классов, вы строили графики функций «по точкам». В некоторых случаях (например, при построении графика функции $y = kx + b$) этот метод дает хорошие результаты. Однако, составляя таблицы значений функций, можно и не заметить существенных особенностей функции и в итоге построить неверный график. Например, чтобы построить график функции $y = \frac{1}{x}$, составим таблицу ее значений.

x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	–1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Теперь изобразим соответствующие точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией. Получим кривую, изображенную на рис.12.

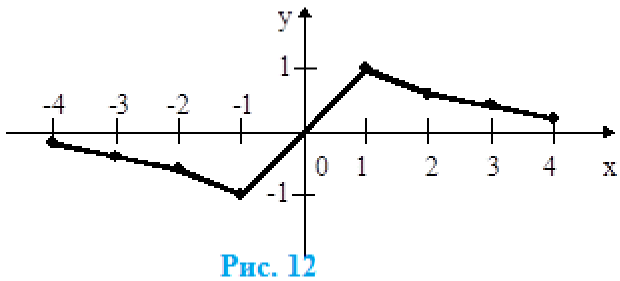


Рис. 12

Однако, эта кривая совершенно не похожа на настоящий график $y = \frac{1}{x}$. Вы его хорошо знаете — это гипербола. Почему же мы допустили ошибку? Потому, что график функции нужно строить не по произвольно выбранным точкам, а по ***характерным*** для данной функции. К характерным точкам относятся точки пересечения графика функции с осями координат, точки, которые разделяют промежутки возрастания и убывания функции, точки, в которых график как бы «разрывается» (например, точка $x = 0$ для гиперболы). Одна из главных задач при построении графика функции состоит в исследовании свойств функции и выявлении ее характерных точек.

Вернемся к построению графика функции $y = \frac{1}{x}$. Выбор значений аргумента у нас определялся равномерностью их расположения на видимом участке оси x. Правда, надо было бы рассмотреть и точку $x = 0$, но она не входит в область определения функции, и ее просто отбросили. И совершенно зря! Потому что поведение функции вблизи этой точки и определяет вид графика. Если значения аргумента положительны и близки к нулю, то соответствующие значения функции большие (чем ближе к нулю x тем больше y!). Для отрицательных значений аргумента, близких к нулю, значения функции отрицательные, большие по модулю числа. В результате получаем настоящую гиперболу. Приведенный пример показывает, к каким ошибкам может привести построение графика по «случайным» точкам.

Пример 11. Построить график функции $y = x(x-1)(x+2)$.

Решение. Область определения функции $y = x(x-1)(x+2)$ — все действительные числа. Данная функция является многочленом, корнями которого являются числа $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. В этих точках график пересекает ось x. Они разбивают ось x на промежутки, на которых функция сохраняет знак. Выясним эти знаки, вычислив значения функции в некоторых точках этих промежутков. Например, $f(2) = 2\cdot(2-1)\cdot(2+2) = 8 > 0$. Следовательно, на промежутке $(1; +\infty)$ функция положительна. Действуя аналогично, придем к выводу, что функция положительна и на промежутке $(-2; 0)$. На двух остальных она отрицательна (рис. 13).

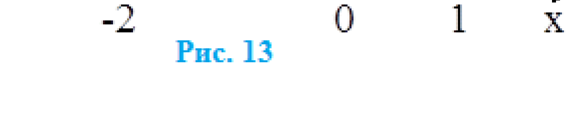


Рис. 13

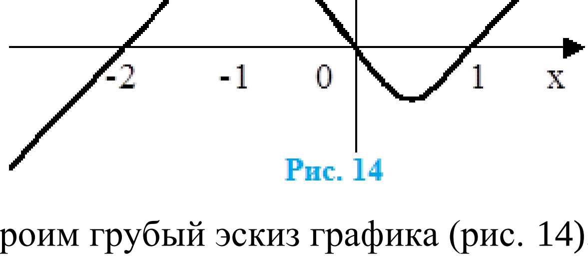
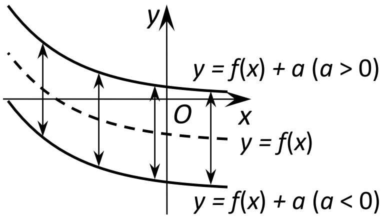
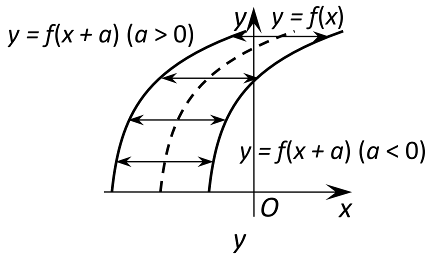
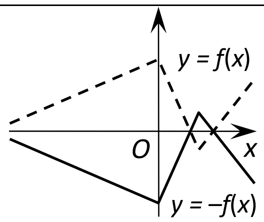
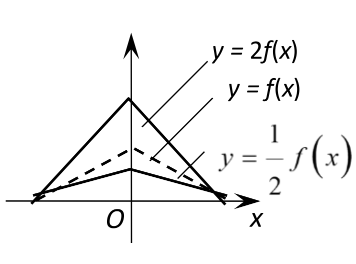
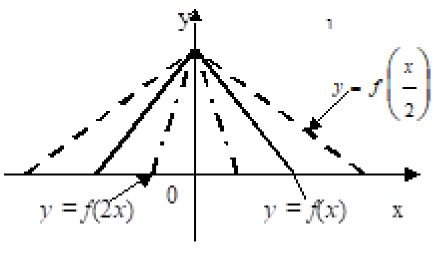


Рис. 14

Учитывая полученную информацию, построим грубый эскиз графика (рис. 14).

Конечно, мы не выяснили, на каких промежутках функция убывает, а на каких она возрастает. Другими словами, мы не знаем расположения вершины «горба» и дна «ямы» на рис. 14. Но это непростая задача, к которой мы вернемся в следующем учебном году. ■

Построение графика функции на основе исследования ее свойств и выявление характерных точек является одним из главных приемов построения графиков. Другой прием основан на идее геометрических преобразований графиков. С этим приемом построения графиков Вы уже встречались. Напомним основные его правила.

	График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси y на a единиц вверх, если $a > 0$, и на a единиц вниз, если $a < 0$.
	График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси x на a единиц влево, если $a > 0$ и на a единиц вправо, если $a <0$.
	График функции $y = \ – f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением его относительно оси x.
	График функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в a раз от оси x при $a > 1$ и сжатием в $\frac{1}{a}$ раз к оси x при $0 < a < 1$.
	График функции $y = f(ax)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием его к оси y в a раз при $a > 1$ и растяжением в $\frac{1}{a}$ раз от оси y $0 < a < 1$.

Пример 12. На рис. 15 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте графики функции: 1) $y = f(x + 1)$; 2) $y = f(x + 1) + 2$; 3) $y = \frac{1}{3} f(x)$; 4) $y = \frac{1}{3} f(x+1)$.

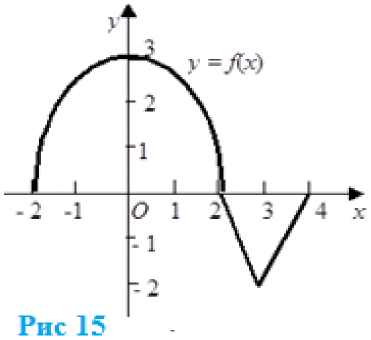


Рис 15

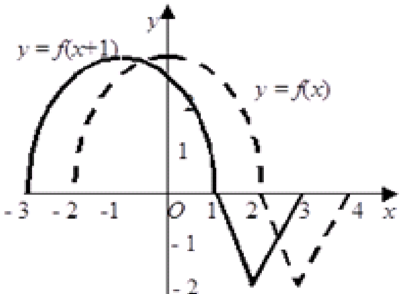


Рис. 16

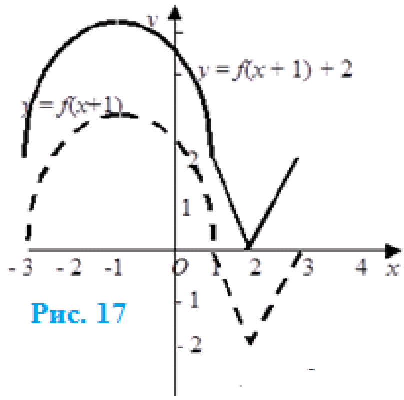


Рис. 17

Решение. 1) График функции $y = f(x + 1)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси x на 1 единицу влево (рис.16).

2) График функции $y = f(x + 1) + 2$ можно получить с помощью следующих двух преобразований: сдвига графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на 1 единицу влево, а затем сдвига полученного графика вдоль оси y на 2 единицы вверх (рис. 16 и 17). Построение можно выполнить и в другой последовательности: сначала перенести график функции $y = f(x)$ вдоль оси y, а затем — вдоль оси x. Результат будет тот же (проверьте это самостоятельно).

3) Чтобы получить график функции $y = \frac{1}{3} f(x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ сжать к оси x втрое (рис. 18).

4) Для построения графика функции $y = \frac{1}{3} f(x+1)$ можно график функции

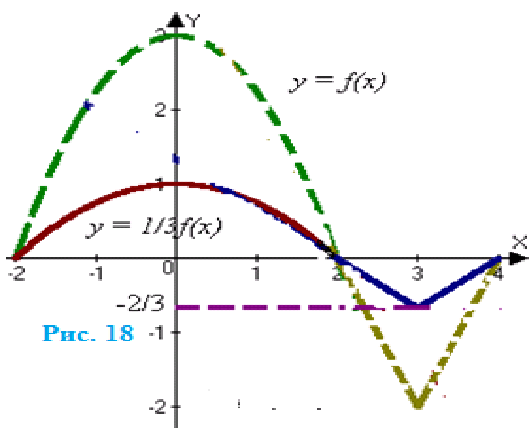


Рис. 18

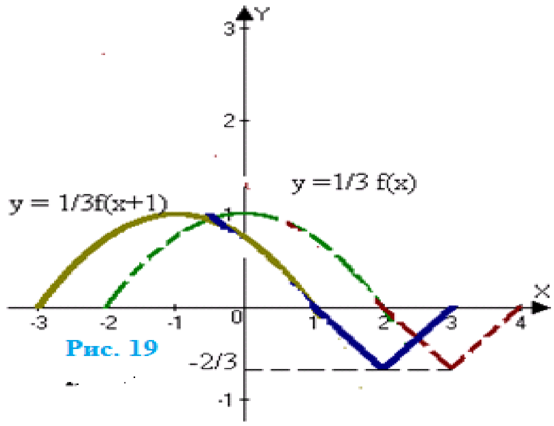


Рис. 19

$y = f(x)$ сжать к оси x втрое и полученный график сдвинуть вдоль оси x влево на 1 единицу (рис. 18 и 19).

Как известно, графиком квадратичной функции является парабола. Ее можно получить из параболы $y = x^2$ с помощью определённых геометрических преобразований.

Пример 13. Построить графики функций:

1) $y = (x - 1)^2$; 2) $y = 2\,(x - 1)^2$; 3) $y = 2(x - 1)^2 - 2$; 4) $y = -2x^2 + 4x$.

Решение. 1) График функции $y = (x - 1)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом последнего вдоль оси x на 1 единицу вправо (рис.20).

2) График функции $y = 2(x - 1)^2$ получается из графика функции $y = (x - 1)^2$ растяжением от оси x в два раза (рис.21).

3) График функции $y = 2(x - 1)^2 - 2$ получается из графика функции $y = 2(x - 1)^2$ сдвигом его на 2 единицы вниз (рис.22).

4) Чтобы построить график последней функции, выделим полный квад-

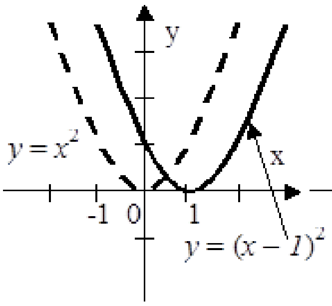


Рис. 20

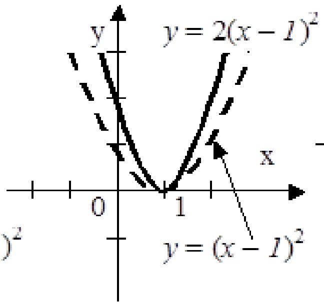


Рис. 21

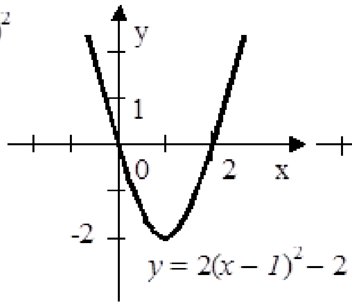


Рис 22

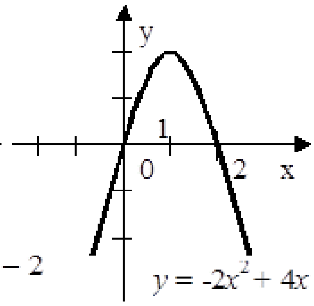


Рис. 23

рат в трехчлене $-2x^2 + 4x$: $-2x^2 + 4x = -2(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(2(x - 1)^2 - 2)$.

Следовательно, искомый график получается из предыдущего симметрией относительно оси x (рис.23). ■

Замечание 1. Построение графика функции с помощью геометрических преобразований основывается на формировании образа графика с помощью сдвигов, сжатий, симметрий. Для его уточнения целесообразно строить несколько характерных точек графика путем вычисления значений функций. Например, целесообразно найти точки пересечения графика с осями координат.

Замечание 2. Обратите внимание на то, что для построения графика последовательность преобразований можно выбрать по-разному. В рассмотрен ном примере это могла быть следующая последовательность:

$$y = x^2 \to y = 2x^2 \to y = 2(x-1)^2 \to y = -2(x-1)^2 \to y = -2(x-1)^2 + 2.$$

Для построения графика функции $y = -2x^2 + 4x$ в предыдущем примере мы выделили полный квадрат в многочлене $-2x^2 + 4x$. Это дало возможность определить, с помощью каких геометрических преобразований можно получить график заданной функции из графика функции $y = x^2$.

В общем случае график функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, можно получить из графика функции $y = x^2$ с помощью геометрических преобразований. Вид этих преобразований и последовательность выполнения определяется выделением полного квадрата в трехчлене $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Полученное представление позволяет охарактеризовать расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ на координатной плоскости:

абсцисса вершины равна $-\frac{b}{2a}$; ордината вершины равна $c - \frac{b^2}{4a}$;

ветви направлены вверх, если $a > 0$; ветви направлены вниз, если $a < 0$.

Если к тому же найти еще ряд точек графика, в частности, точки пересечения его с осями, то построение упростится (не нужно выполнять последовательно все преобразования!).

Пример 14. Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$.

Решение. Здесь $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$, $c = 6$. Абсцисса вершины параболы равна

$-\frac{-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$, ордината $y(3) = \frac{1}{2}3^2 - 3 \cdot 3 + 6 = 1{,}5$.

Ветви параболы направлены вверх. Для уточнения их расположения найдем точку пересечения графика с осью y (с осью x он не пересекается!): $f(0) = 6$. Этой информации уже достаточно, чтобы построить грубый эскиз искомого графика (рис. 24). Для уточнения эскиза можно построить еще ряд точек графика, вычисляя значения функции. Например, $f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1-3+6=3{,}5$,

$f(2)=\frac{1}{2}\cdot 4-6+6=2$.■

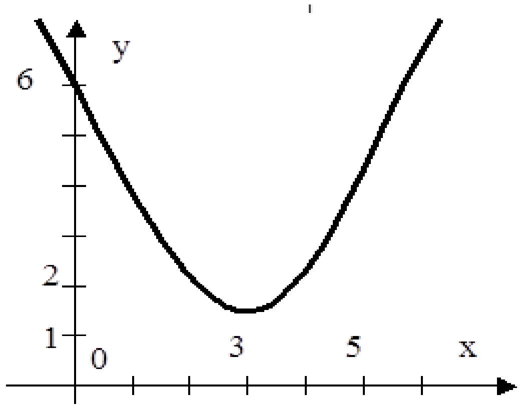


Рис. 24

Пример 15. На сколько единиц необходимо сдвинуть параболу $y = -x^2 - 1$ вдоль осей x и y, чтобы получить параболу $y = -x^2 - 6x + 10$?

Решение. В выражении $-x^2 - 6x + 10$ выделим полный квадрат: $-x^2 - 6x + 10 = -(x^2 + 6x + 9 - 19) = -((x + 3)^2 - 19) = -(x + 3)^2 + 19$.

Теперь нетрудно дать ответ на поставленный вопрос. Путем сдвига параболы $y = -x^2 - 1$ на 20 единиц в направлении оси y получим параболу $y = -x^2 + 19$. Сдвинув ее на 3 единицы в направлении, противоположном направлению оси x, получим параболу $y = -(x + 3)^2 + 19$. Таким образом, параболу $y = -x^2 - 1$ необходимо сдвинуть на 3 единицы в направлении, противоположном направлению оси x, и на 20 единиц в направлении оси y. ■

Графики функций широко используются при исследовании и решении уравнений и неравенств. Соответствующий прием называется ***графическим методом*** решения уравнений и неравенств.

Пример 16. Сколько корней имеет уравнение $x(x^2-2x-3)=-4$?

Решение. Заданное уравнение равносильно уравнению $x^2-2x-3=\frac{-4}{x}$. Построим графики функций $y=x^2-2x-3$ и $y=-\frac{4}{x}$ на одном рисунке. График функции $y=-\frac{4}{x}$ — это гипербола, ветви которой расположены во 2-й и 4-й четвертях (Почему?). Для построения параболы $y=x^2-2x-3$ найдем: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ — нули функции; $x_0=-\frac{b}{2a}=1$, $y_0 = f(x_0)=f(1)=-4$ — координаты вершины; (0; –3) — точку пересечения с осью y (см. рис. 25).

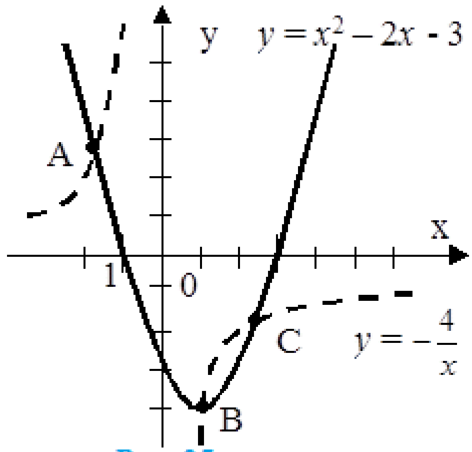


Рис. 25

Всякому корню уравнения соответствует точка пересечения графиков и наоборот (корень уравнения — это абсцисса точки пересечения!). Остается только подсчитать число этих точек. Графики имеют три общие такие точки A, B, C. Следовательно, уравнение имеет три корня.

Ответ. Три.

Пример 17. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{2x+1} = x^2 - 4$?

Решение. Дать ответ на поставленный вопрос путем аналитического решения уравнения вряд ли удастся. Даже если избавимся от иррациональности, получим уравнения четвертой степени. В данном случае целесообразнее применить графический метод.

Построим на одном рисунке графики функций $y = \sqrt{2x+1} = \sqrt{2}\sqrt{x+0,5}$ и $y = x^2 - 4$. График функции $y = \sqrt{2x+1}$ получим из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом на 0,5 единицы в направлении, противоположном направлению оси x и растяжением от оси x в $\sqrt{2}$ раз (рис. 26). График функции $y = x^2 - 4$ получим из графика функции $y = x^2$ сдвигом на 4 единицы в направлении, противоположном направлению оси y (рис. 26). Графики пересекаются в одной точке. Таким образом, уравнение имеет один корень.

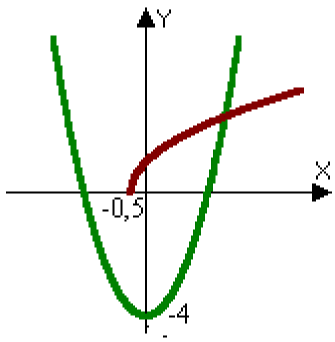


Рис. 26

Ответ. Один.

Пример 18. Дана функция $y = \frac{(x-2)^3}{2-x}$.

1) Построить её график.

2) Найти все значения a, при которых уравнение $\frac{(x-2)^3}{2-x}=a$ имеет корни.

Решение. 1) Заданная функция совпадает с функцией $y = -(x - 2)^2$, $x \neq 2$ (проверьте это!). Чтобы построить её график, необходимо из параболы $y = -(x - 2)^2$ удалить точку $A(2; 0)$. Точку A удаляем, поскольку функция $y=\frac{(x-2)^3}{2-x}$ не определена при $x = 2$ и значит, точка A не принадлежит графику функции. Обратите внимание на то, что этот график не является параболой. Таким образом, имеем искомый график (рис. 27).

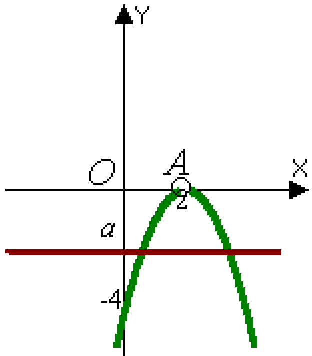
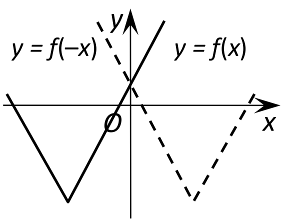


Рис. 27

2) Применим графический метод исследования уравнений. Проведём на рис. 27 прямую $y = a$. Из рисунка видно, что если $a < 0$, то уравнение имеет два корня, а если $a \geq 0$, то уравнение корней не имеет. ■

В завершение рассмотрим еще одно геометрическое преобразование графиков функций. Построим график функции $y = f(-x)$ по графику функции $y = f(x)$. Отметим, что если функция $y = f(x)$ принимает значение $f(x_0)$ в точке x_0, то функция $y = f(-x)$ принимает то же значение в точке $-x_0$. Это означает, что если точка $A(x_0; f(x_0))$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $B(-x_0; f(x_0))$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$. Точки A и B симметричны относительно оси y. Следовательно, график функции $y = f(-x)$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением последнего относительно оси y.

	График функции $y = f(-x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением его относительно оси y.

Сравните построение графиков функций $y = -f(x)$ и $y = f(-x)$.

Пример 19. Построить график функции $y=\sqrt{1-x}$.

Решение. Построение графика можно осуществить по следующей схеме:

$$y=\sqrt{x} \to y=\sqrt{1+x} \to y=\sqrt{1+(-x)},$$

то есть сначала сдвинуть график функции $y=\sqrt{x}$ на 1 единицу в направлении, противоположном оси x, а потом полученный график симметрично отобразить относительно оси y (рис. 28). ■

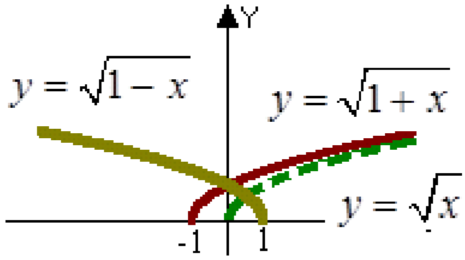


Рис. 28

Подумайте, можно ли поменять местами геометрические преобразования: сначала симметрично отобразить график функции $y=\sqrt{x}$ относительно оси y, а затем полученный график сдвинуть на 1 единицу в направлении, противоположном направлению оси x?

Представьте эту функцию в виде $y=\sqrt{-(x-1)}$ и подумайте, каким ещё способом можно построить график этой функции.

Геометрические преобразования, изученные ранее, позволили:

а) сдвигать график функции $y = f(x)$ вдоль осей ($y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$);

б) сжимать или растягивать график функции $y = f(x)$ от оси x ($y = a{\cdot}f(x)$), $a > 0$);

в) симметрично отображать график функции $y = f(x)$ относительно осей координат ($y = -f(x)$, $y = f(-x)$);

г) сжимать или растягивать график функции $y = f(x)$ от оси y ($y = f(ax)$, $a > 0$).

5. Функции, содержащие выражение с модулем

Рассмотрим сначала простейший случай — функцию $y = |x|$. По определению модуля, имеем: $y=|x|=\left[\begin{array}{lll} x, & для & x\geq 0, \\ -x, & для & x<0. \end{array}\right.$

Таким образом, для $x \geq 0$ функция $y = |x|$ совпадает с функцией $y = x$, а для $x < 0$ — с функцией $y = -x$. Пользуясь этим разъяснением, легко построить график функции $y = |x|$ (рис.29).

Легко заметить, что этот график является объединением той части графика функции $y = x$, которая лежит не ниже оси x и линии, полученной зеркальным отображением относительно оси x, той его части, которая лежит ниже оси x. Этот способ пригоден и для построения графика функции $y = |kx + b|$. Если

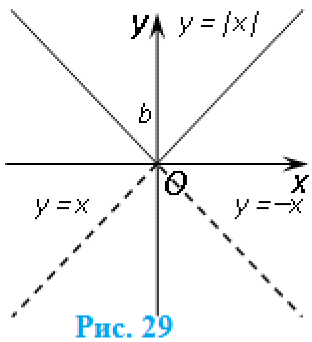


Рис. 29

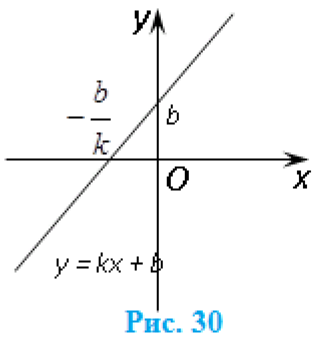


Рис. 30

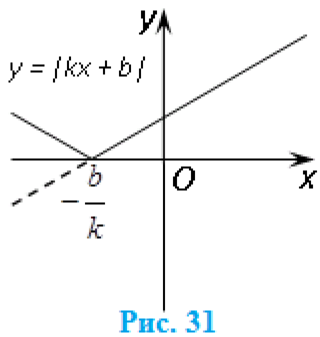
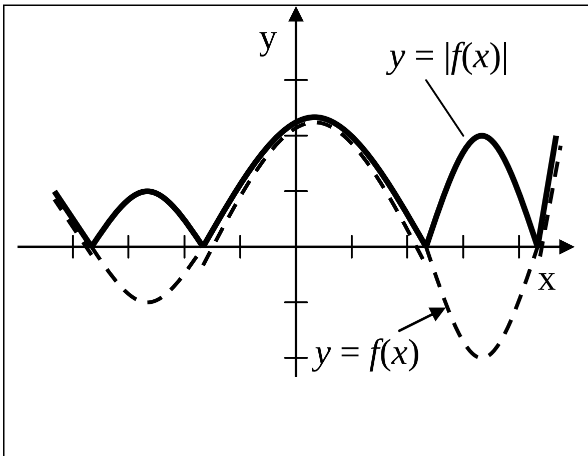


Рис. 31

график функции $y = kx + b$ изображен на рис. 30, то графиком функции $y = |kx + b|$ является линия, изображенная на рис. 31.

Указанный прием пригоден для построения графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y = f(x)$, если учесть, что $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) \leq 0. \end{cases}$



Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = |f(x)|$, нужно участки графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси абсцисс, оставить без изменения, а участки, лежащие под осью абсцисс, отобразить симметрично относительно этой оси.

Пример 20. Постройте график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$.

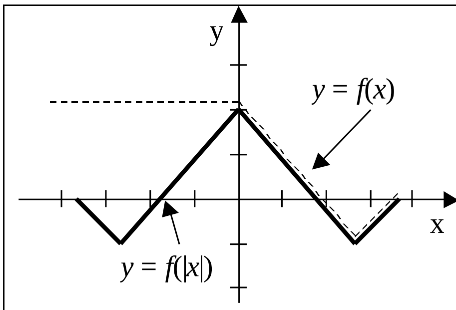
Решение. Сначала построим график квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 3$. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Представим функцию в виде $y = (x - 1)^2 - 4$. График этой функции можно подучить из графика функции $y = x^2$ сдвигами вдоль осей x и y.

Второй способ. Находим нули функции, решив уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Абсцисса вершины параболы равна $-\frac{-2}{2} = 1.$ Следовательно, координаты вершины (1; –4). По этим точкам мы строим эскиз графика. Независимо от способа построения, получаем график на рис.32.

Воспользовавшись теперь правилом построения графика функции $y = |f(x)|$, по графику функции $y = f(x)$, получим искомый график (рис. 33). ■

Теперь выясним, как можно построить график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$. Легко заметить, что для $x \geq 0$ график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Для $x < 0$ $f(|x|) = f(-x)$.



Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(|x|)$, надо построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$, а затем продолжать его в левую полуплоскость $x < 0$ с помощью симметричного отображения относительно оси ординат.

Замечание: При построении графика функции $y = f(|x|)$ по графику функции $y = f(x)$ мы «забываем» о той его части, которая лежит в левой полуплоскости. И связано это с тем, что функция $y = f(|x|)$ — четная, а потому ее график определяется частью, лежащей в правой полуплоскости.

Пример 21. Построить графики функций:1) $y = x^2 - 2|x| - 3$; 2) $y = \left|2 - 2|x|\right|$.

Решение.1) На рис 32 изображен график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Согласно

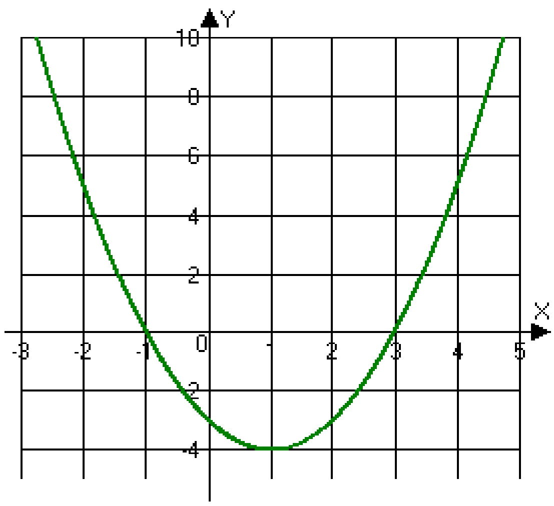


Рис 32

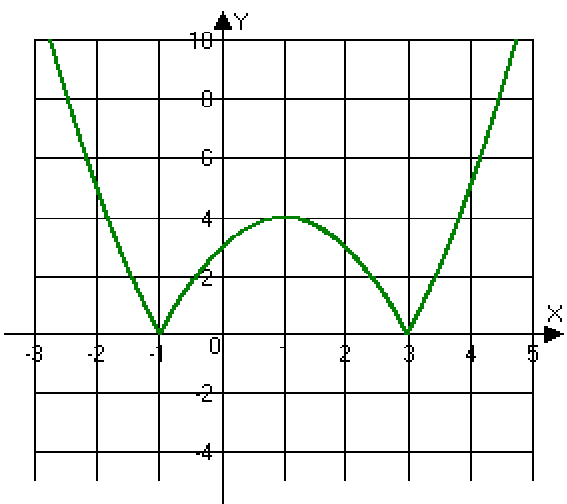


Рис. 33

вышеприведенному правилу, оставляем ту часть графика функции, которая находится в правой полуплоскости, и отображаем ее симметрично относительно оси y. Получим график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$ (рис. 34).

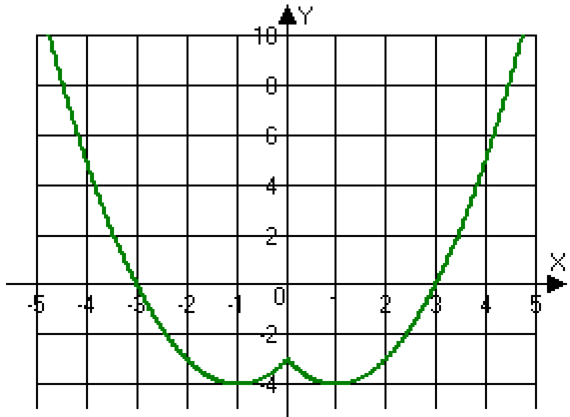


Рис. 34

2) Построим сначала график функции $y = 2 - 2x$ (рис.35). Затем построим гра-

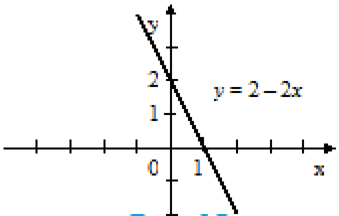


Рис. 35

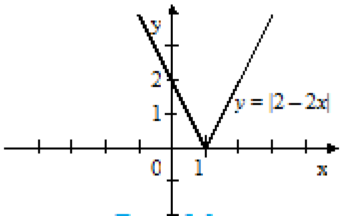


Рис. 36

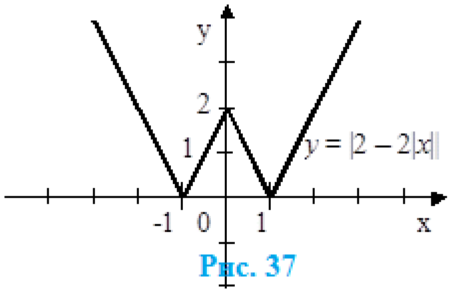


Рис. 37

фик функции $y = |2 - 2x|$ (рис. 36), пользуясь правилом построения графика функции $y = |f(x)|$. А из него получим искомый график (рис.37), воспользовавшись правилом построения графика $y = f(|x|)$.■

Пример 22. Построить график функции $y = |2 - 2x| + |x - 3|$.

Решение. Для построения графика функции $y = |2 - 2x| + |x - 3|$ воспользуемся «методом интервалов». Найдем значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль. Таких значений два: $x = 1$ и $x = 3$. Они разбивают числовую ось на три промежутка: $(-\infty; 1)$, $[1; 3]$, $(3,+\infty)$, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют свой знак.

Раскроем теперь модули на каждом из этих промежутков. При $x \in (-\infty; 1)$ имеют место соотношения:

$2 - 2x > 0$, $x - 3 < 0$ и $|2 - 2x| + |x - 3| = 2 - 2x - (x - 3) = -3x + 5$.

При $x \in [1; 3]$: $2 - 2x \le 0$, $x - 3 \le 0$, $|2 - 2x| + |x - 3| = -(2 - 2x) - (x - 3) = x + 1$.

При $x \in (3,+\infty)$: $2 - 2x < 0$, $x - 3 > 0$, $|2 - 2x| + |x - 3| = -(2 - 2x) + x - 3 =$
$3x - 5$.

Итак, функцию $y = |2-2x|+|x-3|$ можно задать следующим образом:

$$y=\begin{cases}-3x+5 & \text{при} \quad x<1,\\ x+1 & \text{при} \quad 1\le x\le 3,\\ 3x-5 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Осталось только изобразить на каждом промежутке соответствующую ему часть графика (рис.38). ■

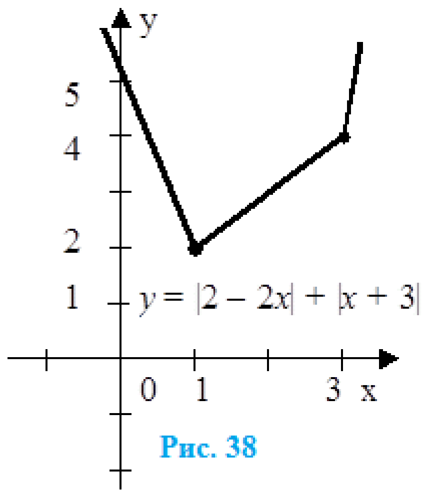


Рис. 38

Пример 23. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$.

1) Найти область определения функции.
2) Построить ее график.
3) Указать нули функции и промежутки знакопостоянства.
4) Найти промежутки возрастания и убывания функции.
5) При каких значениях *a* уравнение *f(x)* = *a* имеет два корня?

Решение. 1) Функция определена при $|x + 1| \neq 0$, то есть для всех значений x, кроме $x = -1$.

2) Упростим выражение $\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$, раскрыв знак модуля. Если $x + 1 < 0$, то есть $x < -1$, то $\dfrac{x^2-1}{|x+1|}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x+1)}=-(x-1)=-x+1$. Следовательно, на промежутке $(-\infty; -1)$ заданная функция имеет вид $y = -x + 1$.

Если $x + 1 > 0$, то есть $x > -1$, то $\dfrac{x^2-1}{|x+1|}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1$. Значит, на промежутке $(-1; +\infty)$ заданная функция имеет вид $y = x - 1$. На разных промежутках функция задана разными формулами. В таких случаях функцию удобно представлять в виде: $y=\begin{cases}-x+1, \text{ якщо } x<-1,\\ x-1, \text{ якщо } x>-1.\end{cases}$ Построим её график. На промежутке $(-\infty; -1)$ — это часть прямой $y = -x + 1$, а на промежутке $(-1; +\infty)$ — это часть прямой $y = x - 1$. Кроме этого, нужно учитывать, что в точке $x = -1$

функция не определена (удалена точка). Получим график, изображённый на рис. 39.

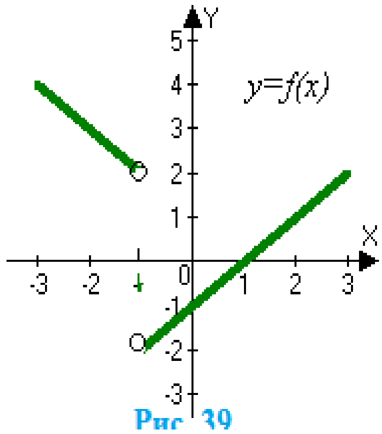


Рис. 39

3) Точка $x = 1$ — нуль функции. Функция положительна на множестве $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$, отрицательна на интервале $(-1; 1)$.

4) Функция убывает на интервале $(-\infty;-1)$ и возрастает на интервале $(-1; +\infty)$.

5) Чтобы найти количество корней уравнения $f(x) = a$, будем пересекать график функции $y = f(x)$ прямыми $y = a$. Прямая $y = a$ пересекает график функции $y = f(x)$ в двух точках, если $a > 2$. При этих значениях a уравнение имеет два корня. ■

Тест для самоконтроля

1. Всегда ли зависимость между переменными вида $ax + by + c = 0$ задает функцию y от x?

2. Может ли график функции $y = f(x)$ пересекать прямую $x = b$ в двух точках?

3. Совпадают ли функции: 1) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$ и $y = x$; 2) $y = \sqrt{x^2}$ и $y = |x|$?

4. Какова зависимость между сторонами прямоугольника с площадью S?

5. Может ли множество значений функции, заданной на всей числовой оси, состоять из одной точки?

6. Из формулы $S = \dfrac{at^2}{2}$ найдите зависимость переменной $t > 0$ от переменной S.

Какова область определения полученной функции?

7. Укажите все значения параметра c, при которых график функции $y = \sqrt{x + c}$ проходит через точку с абсциссой $x = 2$?

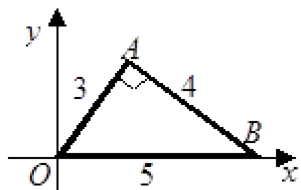


Рис. 40

8. Запишите уравнение прямой OA на рис. 40.

9. При каких значениях k и b график функции $y = kx + b$:

1) проходит только через I и III четверти координатной плоскости;

2) отсекает треугольник во II четверти?

10. График функции $y = 2x + 3$ сдвинули на одну единицу в направлении, противоположном направлению оси y. Каково уравнение нового графика?

11. На сколько единиц нужно сдвинуть параболу $y = x^2$ вдоль оси x, чтобы полученная парабола прошла через точку $A(3; 4)$?

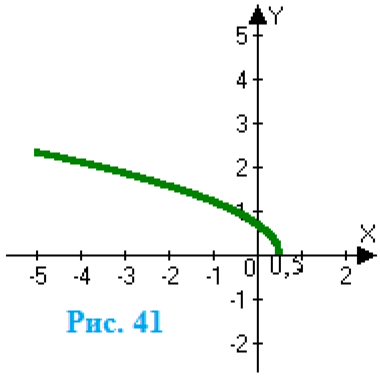


Рис. 41

12. График функции, изображенной на рис. 41, получили из графика функции $y = \sqrt{x}$ с помощью геометрических преобразований. Каково уравнение этого графика?

13. Сколько существует квадратичных функций, которые проходят через точки $A(1; 0)$ и $B(0; 1)$?

14. На каком промежутке убывает функция $y = -(x + 3)^2$?

15. Сколько общих точек имеют параболы $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = 2x^2 - 5x + 3$?

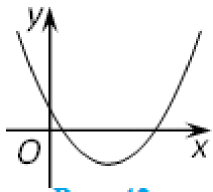


Рис. 42

16. На рис. 42 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Укажите знаки a, b, c.

17. Функция $y = f(x)$ убывает. Какая из следующих функций возрастает?

А. $y = f(x + 2)$. **Б.** $y = f(x) - 2$. **В.** $y = 2f(x)$. **Г.** $y = -f(x)$.

18. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \le 0, \\ x - 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$ Чему равно значение функции в точке $x = 0$? $x = -1$? $x = 1$?

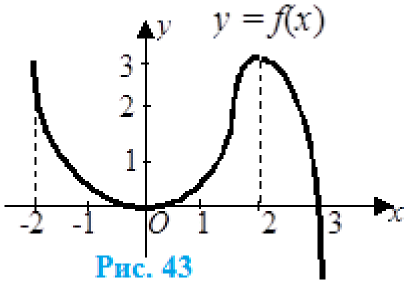


Рис. 43

19. График функции $y = f(x)$ изображен на рис. 43. При каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два корня?

20. При каких значениях a уравнение $|x| = x^2 + a$ имеет три корня?

21. Найдите зависимость площади круга S от длины его окружности l?

Ответы и указания к тесту для самоконтроля

1. Не всегда. Например, при $b = 0$.

2. Нет. Вспомните определение функциональной зависимости: каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y.

3. 1) Нет. Они имеют различную область определения. 2) Да.

4. Обратно пропорциональны: $xy = S$, $x > 0$, $y > 0$.

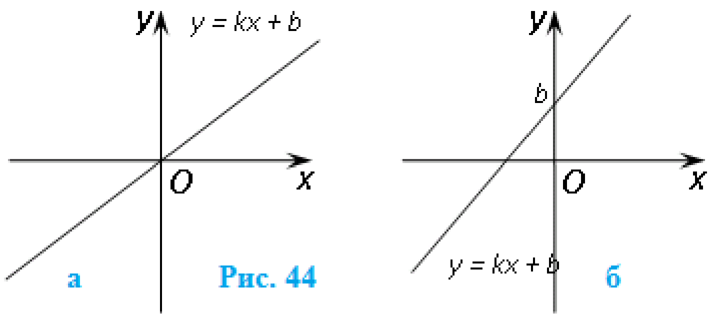
5. Да. Например, функция $y = 1$.

6. $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot S}{a}}$, $S \geq 0$. Решите уравнение $S = \dfrac{at^2}{2}$ относительно t, учитывая, что $t \geq 0$.

7. $-2 \leq c < +\infty$. Функция проходит через точку с абсциссой $x = 2$, если выражение $\sqrt{2 + c}$ имеет смысл.

8. $y = \dfrac{4}{3}x$. Прямая проходит через начало координат. Её угловой коэффициент равен $\operatorname{tg} \angle AOB = \dfrac{4}{3}$.

9. 1) $b = 0$, $k > 0$ (см. рис. 44 а); 2) $k > 0$, $b > 0$ (см. рис. 44 б).



а Рис. 44 б

10. $y = 2x + 2$. Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ на одну единицу в направлении, противоположном направлению оси у приведёт к графику функции $y = f(x) - 1$.

11. На 1 единицу или на 5 единиц в направлении оси x. Воспользуйтесь тем, что парабола $y = (x + a)^2$ проходит через точку $A(3;\ 4)$, то есть решите уравнение $(3 + a)^2 = 4$.

12. $y = \sqrt{0{,}5 - x}$. График построен по схеме

$$y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{x + 0{,}5} \to y = \sqrt{0{,}5 + (-x)}.$$

13. Бесконечно много, поскольку коэффициенты квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определяются системой $\begin{cases} a + b + c = 0, \\ c = 1, \end{cases}$ имеющей бесконечно много решений.

14. $[-3;\ +\infty)$. График квадратичной функции направлен ветвями вниз. Точка $A(-3;\ 0)$ является вершиной параболы.

15. Одна. Решите уравнение $x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 5x + 3$.

16. $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$. $a > 0$, так как ветви параболы направлены вверх; $c = f(0) > 0$. Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a} > 0$. Поскольку $a > 0$, то отсюда вытекает, что $b < 0$.

17. Г. Отображение графика функции относительно оси x изменяет характер мотонности функции. Действительно, из неравенства $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $-f(x_2) < -f(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Сдвиги графика вдоль осей или сжатие графика к оси x не изменяют характера монотонности функции.

18. $f(0) = 0$; $f(-1) = 1$; $f(1) = 0$.

19. $a = 0$, $a = 3$. Только прямые $y = 0$ и $y = 3$ пересекают график функции $y = f(x)$ ровно в двух точках.

20. $a =$ 0. Постройте на одном рисунке графики функций $y = |x|$ и $y = x^2 + a$. Найдите такое число a, чтобы графики пересекались в 3-х точках. Можно поступить иначе: построить график функции $y = |x| - x^2$ и пересечь его прямой $y = a$ в 3-х точках.

21. $S = \dfrac{l^2}{4\pi}$. Это вытекает из двух соотношений: $S = \pi r^2$, $l = 2\pi r$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{-x}$; 2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$; 3) $y = \sqrt{2 - |x|}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2 - 4x - 12}$.

2. По графику функции, изображенному на рис. 45, укажите:

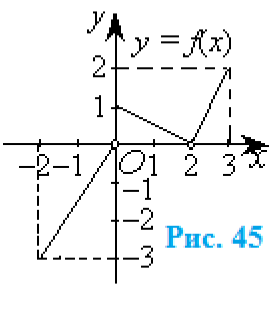


Рис. 45

1) область определения;
2) множество значений;
3) нули функции;

4) промежутки знакопостоянства

5) промежутки возрастания и убывания;

6) наибольшее и наименьшее значения;

7)* количество корней уравнения $f(x) = a$.

3. Найдите линейную функцию, если известно, что ее график:

1) проходит через точку А(1; –2) и параллелен оси абсцисс;

2) параллелен графику функции $y = -0{,}2x + 7$ и проходит через точку пересечения графиков функций $y = x - 2$ и $y = -3x + 18$;

4. Найдите квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

1) ее график проходит через точки $O(0,0)$; $A(1; -1)$; $B(-1; 2)$;

2) $x = 1$ — один из ее нулей и наибольшее значение 4 она принимает в точке $x = -1$.

5. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - x - 2$; 2) $y = x^2 - 4x + 4$; 3) $y = -x^2 - 2x + 3$;

4) $y = -9x^2 - 6x - 1$; 5) $y = 2x^2 - 4x + 3$; 6) $y = -(x - 1)^2 + 1$;

7) $y = \frac{(x+3)(5-x)}{4}$; 8) $y = |2x - 1|$; 9) $y = |2|x| - 1|$;

10*) $y = |2|x| - 1| - 2$; 11) $y = \frac{1}{x} - 2$; 12) $y = \frac{1}{x+2}$;

13) $y = \frac{1}{|x+2|}$; 14*) $y = \frac{1}{||x|+2|}$; 15) $y = \frac{1}{x+2} - 2$;

16)* $y = \frac{1-2x}{x}$; 17) $y = \sqrt{x-1}$; 18*) $y = \sqrt{|x|-1}$;

19) $y = \sqrt{1-x}$; 20) $y = |x^2 - x - 2|$; 21*) $y = x^2 - |x| - 2$;

22*) $y = |x^2 - |x| - 2|$; 23) $y = |x| - |x+1|$; 24)* $y = (x+2)x^2(x-1)$;

25)* $y = x^3 - 2x^2 + x$; 26)* $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$; 27)* $y = \frac{x}{x^2 + x}$.

6*. Дана функция $f(x) = |x - 2| + 2x + |x + 2|$.

1) Постройте график функции $y = f(x)$.

2) Найдите ее наименьшее значение.

3) Существует ли наибольшее значение функции?

4) Решите уравнение $f(x) = |x|$.

7. Сколько корней имеет уравнение:

1) $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$; 2)* $x(x^2 - 4x + 4) = -1$; 3)* $\frac{1}{|x|-1} = a$?

8. Задайте формулой функцию, график которой изображен на: 1) рис. 46 а; 2) рис. 46 б; 3*) рис. 46 в.

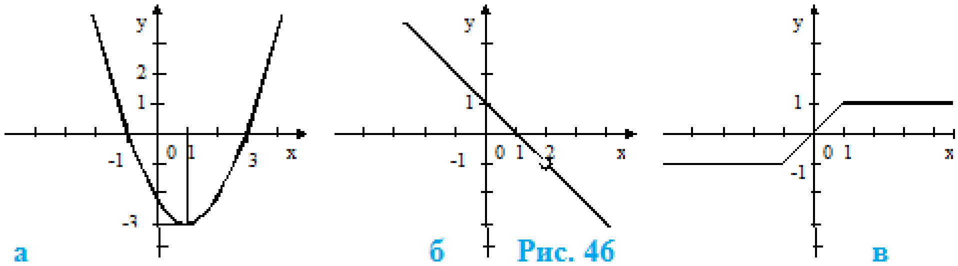


Рис. 46

9. На рис. 45 дан график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(3x)$; 2) $y = 3f(x)$; 3) $y = |f(x)|$; 4*) $y = f(|x|)$;

5) $y = f(x + 2)$; 6) $y = -f(x)$; 7) $y = f(-x)$; 8)* $y = |f(x) - 1|$.

10. Площадь прямоугольника равна 2 кв. ед. Найдите зависимость ширины прямоугольника от его длины и постройте график этой зависимости.

11. При свободном падении тела с начальной скоростью v_0 зависимость пути от времени выражается формулой $S = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, где S — путь, м; t — время, с; $g \approx 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Постройте график этой зависимости, если $v_0 = 10$ м/с.

12. Напряжение в некоторой цепи падает равномерно (по линейному закону). В начале опыта напряжение было равно 12 В, а по окончании опыта, длившегося 8 с, напряжение упало до 6,4 В. Выразите напряжение как функцию времени t и постройте график этой функции.

13. Некоторое количество газа занимало при 20 °С объем 107 см^3, при 40 °С объем стал равен 114 см^3. Составьте, исходя из закона Гей-Люссака, функцию, выражающую зависимость объема V газа от температуры Т. Каков будет объем при 0 °С?

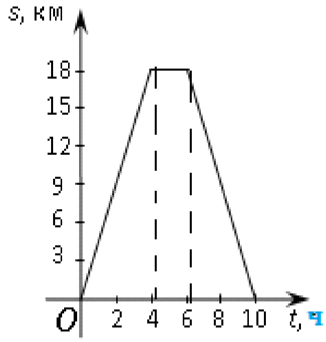


Рис. 47

14. На рис. 47 изображен график движения пешехода из пункта А в пункт В и обратно — из пункта В в пункт А.

1) Сколько примерно времени шел пешеход из А в В, из В в А?

2) С какой скоростью шел пешеход из А в В, из В в А?

3) Задайте с помощью формул функцию $s(t)$, где s — расстояние пешехода от пункта А.

Ответы к заданиям для самостоятельной работы

1. 1) $-3 < x \le 0$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-2; 2]$; 4) $[2{,}5; 6) \cup (6; +\infty)$.

2. 1) $[-2; 2) \cup (2; 3]$; 2) $[-3; 0) \cup (0; 2]$; 3) не имеет нулей; 4) $f(x) < 0$ на промежутке $[-2; 0)$ и $f(x) > 0$ на $[0; 2) \cup (2; 3]$; 5) $f(x)$ возрастает на каждом из промежутков $[-2; 0)$, $(2; 3]$, убывает на промежутке $[0; 2)$; 6) наибольшее значение функции $f(3) = 2$, наименьшее равно $f(-2) = -3$. 7) если $a < -3$, $a = 0$, $a > 2$, то уравнение решений не имеет; если $-3 \le a < 0$, $1 < a \le 2$, то уравнение имеет одно решение; если $0 < a \le 1$, то уравнение имеет два решения. **3.** 1) $y = -2$; 2) $y = -0{,}2x + 4$. **4.** 1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$.

6*. 1) Раскрыв модули, получите функцию, график которой легко построить: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -2, \\ 2x + 4, & \text{если } -2 < x \le 2, \\ 4x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$; 2) 0; 3) нет; 4)* $-\frac{4}{3}$. Постройте на одном рисунке графики функций $y = f(x)$ и $y = |x|$. **7.** 1) 2; воспользуйтесь графическим методом; 2) 1; представьте уравнение в виде $x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{x}$; 3) если $a < -1$, $a > 0$, то два корня; если $a = -1$, то одни корень, если $-1 < a \le 0$, то решений нет. Постройте график функции $y = \frac{1}{|x| - 1}$ и пересекайте его прямыми $y = a$.

8. 1) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$; обратите внимание, что точка $A(1; -2)$ — вершина параболы, а $x = -1$ — нуль; 2) например, $y=\frac{(1-x)(x-2)}{x-2}$; обратите внимание, что прямая с «выколотой» точкой; 3) если не стремиться задать функцию одной формулой, то задача простая $y=\begin{cases}-1, & \text{если } x\le -1,\\ x, & \text{если } -1<x\le 1\\ 1, & \text{если } x>1.\end{cases}$. Попробуйте эту функцию задать одной формулой. **10.** $y=\frac{2}{x}$, $x > 0$; **11.** При построении графика обратите внимание на то, что $t \ge 0$. **12.** $u = -0{,}7t + 12$, $t \ge 0$. **13.** 1) $v = 100 + 0{,}35t$, $t \ge 0$; 2) 100 см^3. Известно, что между объемом газа и его температурой существует линейная зависимость.

14. 1) 4ч, 4ч.; 2) 4,5 км/ч; 4,5 км/ч; 3) $s(t)=\begin{cases}4{,}5t, & \text{если } 0\le t\le 4,\\ 18, & \text{если } 4<t<6,\\ 45\text{-}4{,}5t, & \text{если } 6\le t\le 10.\end{cases}$

Контрольное задание

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного задания и дополнительного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		**Контрольный тест**	**Основное задание**	**Дополнительное задание**
«зачтено»	Решено не менее	10 задач	20 задач	–
«хорошо»	Решено не менее	14 задач	28 задач	7 задач
«отлично»	Решено не менее	17 задач	36 задач	10 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям теста для самоконтроля, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Какая из следующих зависимостей между переменными задает функцию аргумента x?

А. $x^2 + y^2 = 1$. **Б.** $|y| = x$. **В.** $y^2 = x$. **Г.** $y = |x|$.

2. График функции $y = f(x)$ не может пересекать в нескольких точках прямую …

А. $y = 1$. **Б.** $x = 1$. **В.** $x + y = 1$. **Г.** $y = x$.

3. Какая из следующих пар функций состоит из неравных функций?

А. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$. **Б.** $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$, $g(x) = x$, $x \geq 0$.

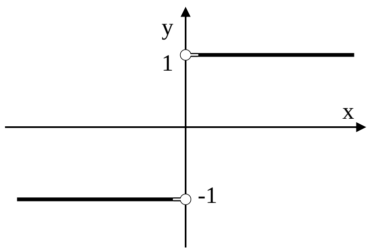
В. $f(x) = \dfrac{x}{x}$, $g(x) = 1$. **Г.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

4. Какова зависимость площади квадрата от его стороны?

А. Линейная. **Б.**. Обратная пропорциональность.

В. Квадратичная. **Г.** Зависимость не является функциональной.

5. Укажите множество значений функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке.

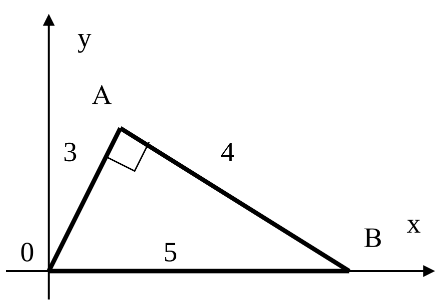


А. $(–1; 1)$. **Б.** $[–1; 1]$. **В.** $\{–1; 1\}$. **Г.** $\{1\}$.

6. График функции $y = k\sqrt{x}$ проходит через точку $M(4; –4)$. Чему равно k?

А. 2. **Б.** 4. **В.** –2. **Г.** Определить нельзя.

7. Угловой коэффициент прямой AB (см. рис.) равен…



А. $\dfrac{4}{3}$. **Б.** $\dfrac{3}{4}$. **В.** $-\dfrac{3}{4}$. **Г.** $-\dfrac{4}{3}$.

8. График линейной функции не может располагаться…

А. только в III и IV четвертях. **Б.** только в I и II четвертях.

В. только во II и IV четвертях. **Г.** только во II и III четвертях.

9. График функции $y = 2x^2$ сдвинут на 2 единицы в положительном направлении оси x. Каково уравнение нового графика?

А. $y = 2x^2 + 1$. **Б.** $y = 2(x + 1)^2$. **В.** $y = 2x^2 - 1$. **Г.** $y = 2(x - 1)^2$.

10. На сколько единиц нужно сдвинуть график функции $y = \dfrac{1}{x}$ вдоль оси x, чтобы он прошел через точку $A(2; 1)$?

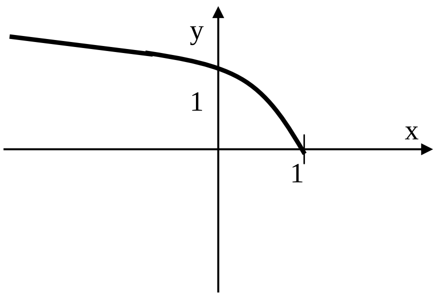
А. На $\dfrac{1}{2}$ единицы в направлении оси x.

Б. На 1 единицу в направлении, противоположном направлению оси x.

В. На 1 единицу в направлении оси x.

Г. На $\dfrac{1}{2}$ единицы в направлении, противоположном направлению оси x.

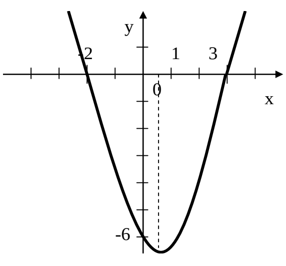
11. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке.

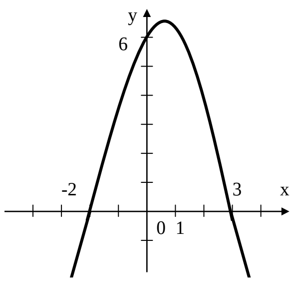


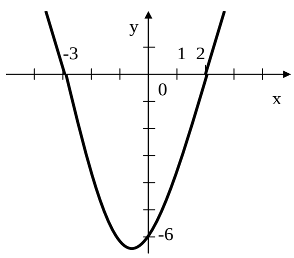
А. $y = \sqrt{x} + 1$. **Б** $y = \sqrt{x + 1}$.

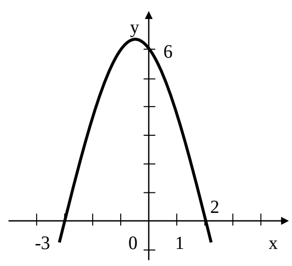
В. $y = \sqrt{x - 1}$. **Г.** $y = \sqrt{1 - x}$.

12. График функции $y = -(2 + x)(3 - x)$ изображен на рисунке …









. **А.** **Б.** **В.** **Г.**

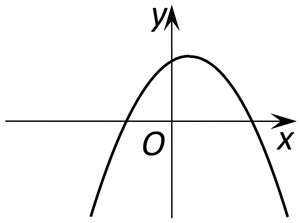
13. Укажите промежуток, на котором возрастает функция $y = -(x - 4)^2$.

А. $(-\infty; 4]$. **Б.** $(-\infty; -4)$. **В.** $[4; +\infty)$. **Г.** $[-4; +\infty)$.

14. Сколько общих точек имеют графики функций $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ и $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$?

А. 0. **Б.** 1. **В.** Бесконечное множество.

Г. Ответ отличается от приведенных.



15. На рисунке изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Укажите знаки a, b, c.

А. $a > 0, b > 0, c > 0$. **Б.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

В. $a < 0, b < 0, c > 0$. **Г.** $a < 0, b < 0, c < 0$.

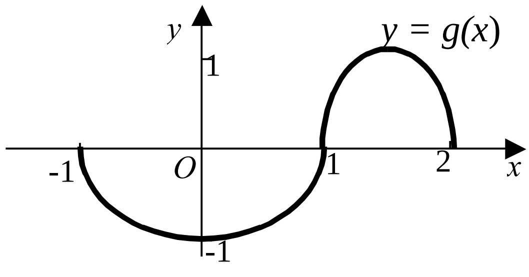
16. Функция $y = f(x)$ — возрастающая. Какая из следующих функций будет убывающей?

А. $y = f(x - 2)$; **Б.** $y = f(2x)$; **В.** $y = -f(x)$; **Г.** $y = \dfrac{f(x)}{2}$.

17. Дана функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, \text{якщо } x < -1, \\ \sqrt{x+1}, \text{якщо } x \geq -1. \end{cases}$ Каково значение этой функции в точке $x = -\dfrac{1}{2}$?

А. $-\dfrac{2}{3}$. **Б.** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$. **В.** $-\dfrac{3}{2}$. **Г.** Ответ отличается от приведенных.

18. График функции $y = g(x)$ изображен на рисунке. Укажите все значення a, при которых уравнение $g(x) = a$ имеет три корня.



А. $a \geq 0$. **Б.** $a = 0$. **В.** $a < 0$.

Г. Таких значений a не существует.

19. * При яких значеннях a уравнение $\dfrac{|x|}{x} = ax$ имеет ровно два корняі?

А. При любом a. **Б.** При $a > 0$. При **В.** $a < 0$.

Г. Ответ отличается от приведенных.

20. Известно, что объем шара V и площадь его поверхности S вычисляются соответственно по формулам $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ и $S=4\pi R^2$, где R — радиус шара. Найдите зависимость V от S.

А. $V=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. **Б.** $V=\frac{S}{3}$. **В.** V не зависит от S.

Г. Ответ отличен от приведенных.

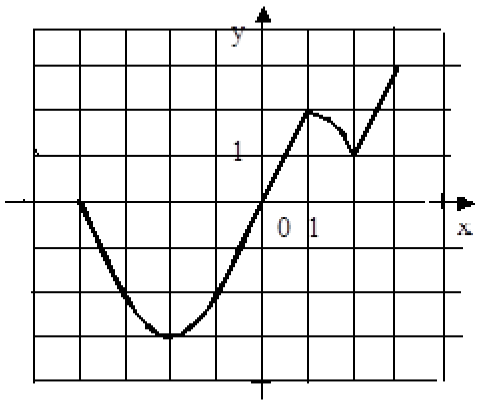
Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений.

1. Найдите область определения функции:

1) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}$. 2) $y=\frac{x}{x^2+9x-10}$. 3) $y=\frac{\sqrt{5-x}}{x}$.

2. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, укажите:



1) область определения,
2) множество значений,
3) нули функции,
4) промежутки знакопостоянства,
5) промежутки возрастания,
6) наибольшее и наименьшее значения,
7) число решений уравнения $f(x) = 1$, $f(x) = 1{,}5$.

3. Найдите линейную функцию $y = kx + b$, если известно, что:

1) при $x = -10$ ее значение $y = 41$, а при $x = 6$—$y = 9$;

2) график функции проходит через точку A (3; –5) под углом 135° к оси x;

3) график функции параллелен графику функции $y = x$ и проходит через точку $A(2; -1)$.

4. Найдите линейную функцию, график которой симметричен графику функции $f(x) = 2x + 1$ относительно:

1) оси x; 2) оси y; 3) начала координат; 4)* прямой $y = x$.

5. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рис.:1)1; 2) 2;3) 3.

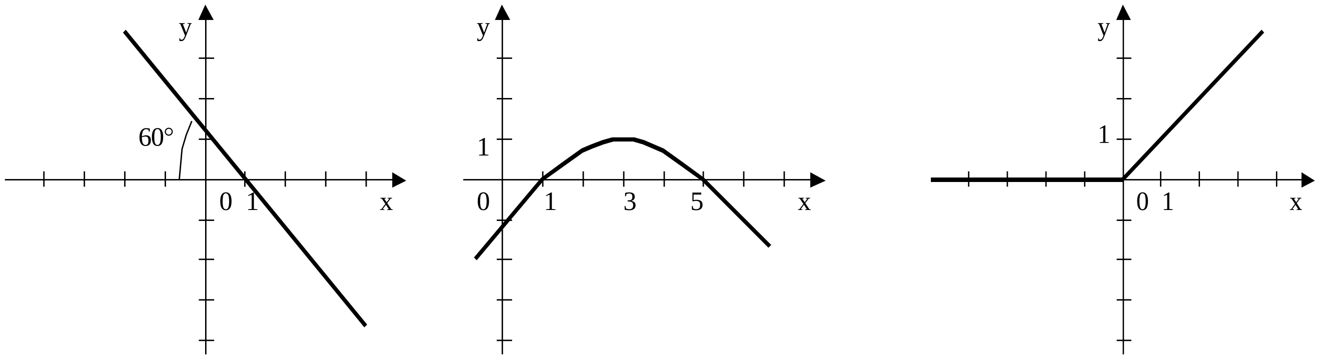


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

6. Парабола $y = ax^2 + bx$ проходит через точки $B(-1; 5)$ и $C(1; 0)$. Найдите ординату такой точки данной параболы, абсцисса которой равна 5.

7. Постройте график функции:

1) $y = (x+2)^2 - 3$; 2) $y = 2x^2 + 8x + 2$; 3) $y = x - x^2 - 1$;

4) $y = -3x^2 + 2x + 1$; 5) $y = |4 - 2x|$; 6) $y = |4 - 2|x||$;

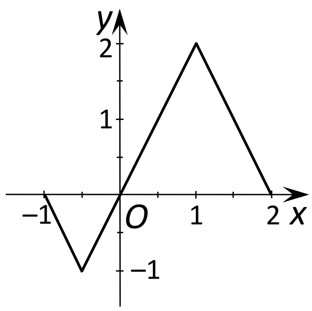
7) $y = -3x^2 + 2|x| + 1$; 8) $y = |-3x^2 + 2|x| + 1|$; 9) $y = -\dfrac{2}{x+1}$;

10) $y = -\dfrac{2}{|x|+1}$; 11) $y = |x^3 + 1|$; 12) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$;

13) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$; 14) $y = |x+3| + |x| + 1$.

8. Сколько корней имеет уравнение:

1) $(x^2 + 1)x = 1$; 2) $\sqrt{x} - 4x^2 + x = 0$?



9. На рисунке задан график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(2x)$; 2) $y = 2f(x)$; 3) $y = f(x + 2)$; 4) $y = |f(x)|$.

10. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x$ на отрезке: 1) [2,5; 3,5]; 2) [0; 3,5].

Указания к задачам основного задания

1. При решении этих задач учитывайте, что знаменатель дроби не должен рав няться нулю, а подкоренное выражение не может принимать отрицательные значения.

2. См. решение примера 5 на стр. 14.

3. См. решение примера 7 на с.16.

4. 1), 2) Вспомните построение графиков функций $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$.

3) Обратите внимание, что точки, симметричные относительно начала координат, имеют вид $A(x; y)$, $B(-x; -y)$.

4) Используйте тот факт, что точки, симметричные относительно прямой $y = x$, имеют вид $A(x; y)$, $B(y; x)$.

5. 1) Найдите угол наклона искомой прямой с осью x и точку, через которую она проходит.

2) Вспомните, что для восстановления квадратичной функции нужно знать либо три произвольные точки, через которые проходит ее график, либо две точки, одна из которых — ее вершина.

3) Для выполнения этого задания прочтите пункт «Функции, содержащие модуль». Постарайтесь задать функцию одной формулой.

6. Найдите коэффициенты a, b, c, используя заданные условия. Затем найдите значение полученной функции в точке $x = 5$.

8. 1), 2) Преобразуйте уравнения так, чтобы воспользоваться графическим способом решения.

10. Постройте график функции $y = x^2 - 2x$ и рассмотрите его на заданных отрезках.

Дополнительное задание

1. В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти ее значений записаны неверно. Найдите и исправьте их: 1) в табл. 1; 2) в табл. 2.

Табл. 1

x	–2	–1	0	1	2
y	–1	3	1	2	–3

Табл. 2

x	–15	–10	0	10	15
y	–33	–13	7	17	27

2. Прямая $y = \frac{7}{15}x + \frac{1}{3}$ проходит через две точки с целыми координатами $A(10;\ 5)$ и $B(-20;\ -9)$.

1) Найдите на прямой еще одну точку с целыми координатами.

2)* Укажите все точки прямой с целочисленными координатами.

3. Постройте график функции:

1) $y = -0{,}125x^2 + 4x + 32$; 2) $y = x(x + 2)(x - 1)^2$;

3) $y = \left|\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}\right|$; 4) $y = \frac{x + 4}{x^2 - x - 20}$.

4. Найдите на отрезке [–1; 1] наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \frac{1}{x^2 - x + 1}$; 2) $y = 2 - ax - 3x^2$.

5. Найдите кубичный многочлен вида $y = x^3 + px^2 + qx + r$, если известно, что его график пересекает ось x в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$.

6. Приведите пример многочлена, график которого сходен по форме с изображенным на: а) Рис. 1; б) Рис. 2.

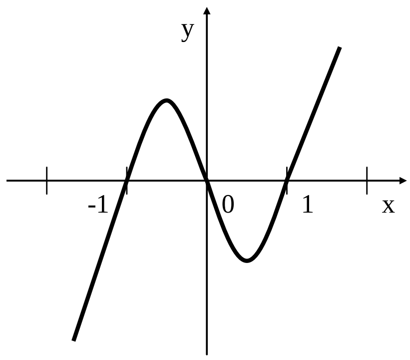


Рис. 1

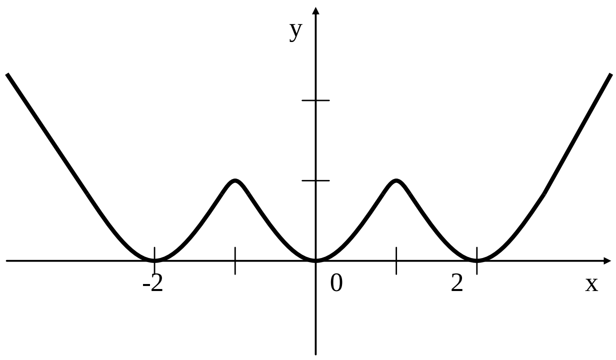


Рис. 2

7. Сколько решений имеет уравнение:

1) $\frac{1}{x^2 - x + 1} = x$; 2) $|x - 2| + x + |x + 2| + |x + 4| = a$?

Указания к задачам дополнительного задания

1. 2) Постройте заданные точки в координатной плоскости. Исследуйте их расположение.

2. Воспользуйтесь характерным свойством линейной функции (см. стр. 17).

3. 2) Учтите нули и знаки заданной функции.3) Преобразуйте выражение, стоящее под знаком модуля, учитывая область определения заданной функции.

4.1) Оцените знаменатель дроби на отрезке [–1; 1].

2) Обратите внимание, что расположение вершины параболы $y = 2 - ax - 3x^2$ зависит от параметра a. Поэтому и ответ будет зависеть от a.

5. Запишите условие того, что график заданной функции проходит через точки (1; 0), (2; 0), (3; 0).

6. Обратите внимание на свойства многочленов, изображенных на графиках.

Исследовательские задания

1. Конструирование функций с заданными свойствами

Найдите функцию …

а) имеющую 101 нуль;

б) областью определения которой является промежуток [–5; 2);

в) множеством значений которой является множество $(-\infty;-3]\cup(5;+\infty)$;

г) возрастающую на промежутке [–3; 2] и убывающую на промежутке [4, 7];

д) имеющую наибольшее значение и не имеющую наименьшего значения.

Сформулируйте самостоятельно задания на конструирование функций.

2. Исследование множества целочисленных точек графика

Дана функция $y=ax+b$. Подберите, если можно, a и b такие, чтобы график этой функции …

а) проходил хотя бы через одну целочисленную точку;

б) не проходил бы ни через одну целочисленную точку;

в) проходил ровно через одну целочисленную точку;

г) проходил ровно через n целочисленных точек.

Рассмотрите приведенные задания для функции $y=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$.

3. Исследование симметрий графиков функций

Найдите все функции, вида …

1) $y = kx + l$; 2) $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$; 3) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$;

4) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + l, a \neq 0$; 5) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$,

графики которых: а) симметричны относительно оси y;

б) симметричны относительно начала координат;

в) симметричны относительно некоторой прямой $x = k$;

г) симметричны относительно некоторой точки оси x;

д) симметричны относительно некоторой прямой $y = kx + l$.

4. Исследование инвариантности свойств функций при преобразованиях

Изучите, как изменяются характеристики функции $y = f(x)$ (область определения, множество значений, нули функции и т.п.) и ее свойства (возрастание или убывание, положительность или отрицательность, четность, нечетность) при замене ее на функцию …

1) $y = f(x + a)$; 2) $y = f(x) + a$; 3) $y = kf(x)$; 4) $y = f(px)$; 5)$y=f(|x|)$;

6) $y=|f(x)|$; 7) $y = kf(p(x – a)) + b$; 8) $y = k|f(p|x| – a)| + b$.

Послесловие

Для тех, кого заинтересовала тема, кто хотел бы расширить свои знания, получить материалы для размышлений, для рассуждений, приведем краткий обзор направлений дальнейшей работы.

Понятие функции возникло сравнительно недавно — в XVII ст. Идею функциональной зависимости начали использовать очень давно. Например, вавилонские ученые установили эмпирически зависимости между геометрическими величинами. Так, они считали, что площадь круга S равняется $3r^2$, где r — радиус круга. Они составили много таблиц значений разных зависимостей: квадратов и кубов чисел, суммы квадратов и кубов чисел и т. п. Древнегреческие математики также нашли много зависимостей. Например, они составили таблицы зависимости между длиной хорды и величиной дуги, которую она стягивает.

Ученые средневековья составляли графики зависимостей путем построения отрезков, перпендикулярных некоторой прямой и длины которых отображали значение величин. Но отсутствие буквенной алгебры, понятия переменной мешало ученым сформировать понятие функции. И только в XVII веке в связи с географическими и астрономическими открытиями, созданием машин и механизмов возникли условия для создания математики, которая бы изучала зависимости величин, в частности связанных с движением.

Введению понятия функции наука обязана французскому философу и математику Рене Декарту (1596 - 1650). Он впервые начал применять буквы для записи зависимостей, изображать их на координатной плоскости. Идеи Декарта быстро нашли признание и стали широко применяться математиками. Понадобилось меньше века, чтобы функции и связанные с ними задачи стали одними из важнейших математических объектов. Это в значительной степени связано с тем, что исследование функций имело непосредственное приложение к решению многих прикладных задач, в частности тех, которые связаны с движением. И хотя общепризнанного определения понятия функции не существовало почти до середины XIX века, ученые широко пользовались этим понятиям, разрабатывали теории исследования отдельных классов функций.

В современной математике понятие функции является одним из важнейших. Существует много разделов математики, которые занимаются изучением функций и их приложениями к описанию явлений и процессов.

Изучение разных классов функций и методов их исследования будет одним из главных направлений обучения математике в старших классах.

Надеемся, что изучение соответствующего учебного материала и работа над контрольным заданием расширила и углубила ваши знания о функциях, их исследовании и построении графиков. Безусловно, этот материал не исчерпывает всех знаний о функциях, доступных для девятиклассников.

Интересными и полезными являются задачи о построении эмпирических зависимостей. Достаточно часто удается построить зависимость между величинами в табличной форме, например, путем измерения и регистрации его результатов. Возникает задача построения формулы, которая бы соответствовала этой зависимости, то есть для значений аргумента, которые содержатся в таблице, давала те же значения зависимой величины, что и в таблице, или близкие к ним.

Заслуживают внимание так называемые разрывные функции, то есть функции, значения которых в некоторых точках изменяются не непрерывно, а скачкообразно. Эти функции естественно возникают для описания процессов, в которых величины резко изменяются в некоторые моменты времени. Например, скорость тела при его столкновении с другим телом, напряжение в момент включения тока и т. п. Построение графиков разрывных функций, их чтение является более сложным заданием в сравнении с непрерывными функциями.

Афанасьева Ольга Николаевна
Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович
Слипенко Анатолий Константинович

Функции и их графики

Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9 классов

Учебное пособие