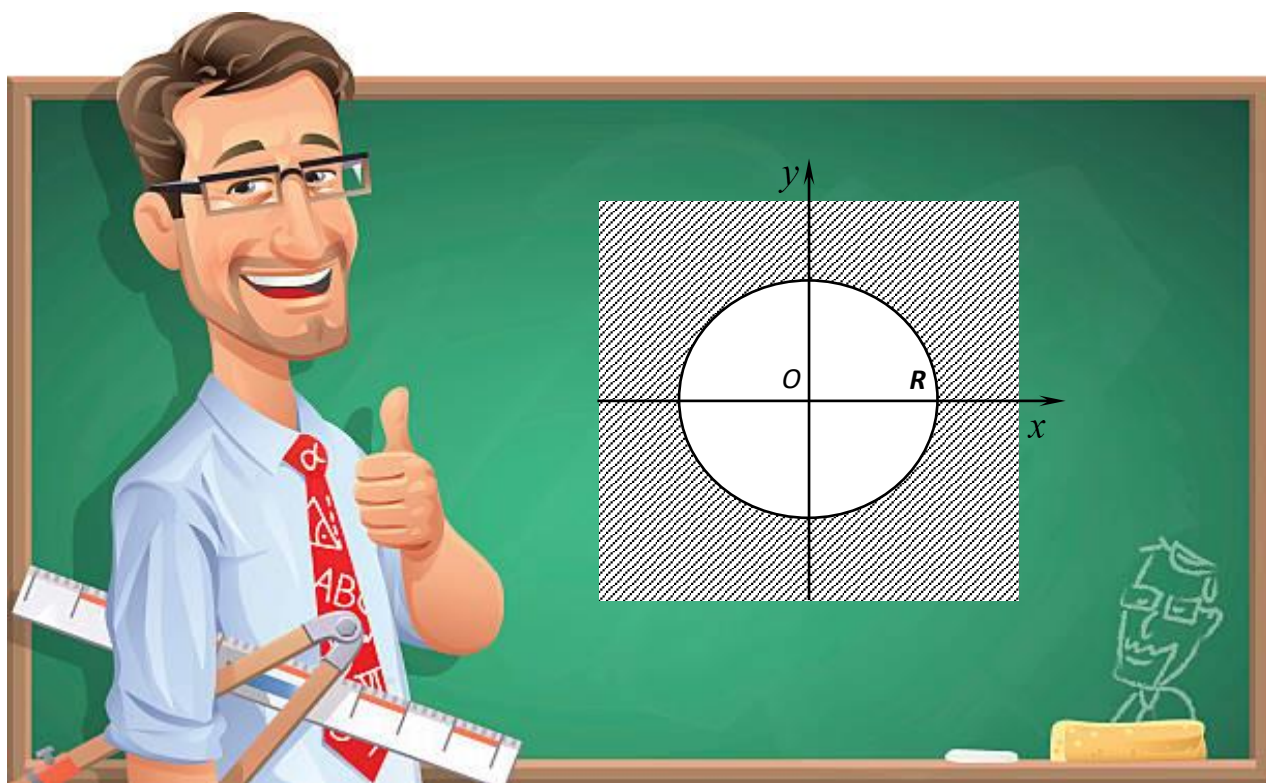




Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л.,
Слипенко А. К.

Метод координат на плоскости и его применения



Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9-х классов

Донецк 2025

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

ББК 22.1я72

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К. Метод координат на плоскости и его применения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов. — Донецк. — 50 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-х классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике в открытом математическом колледже (ОМК), рекомендованной Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики (приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 25.06.2016г. № 863).

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков исследования уравнений с двумя переменными и построения фигур, ими определяемых, на расширение и углубление представлений обучающихся о методе координат на плоскости и его применениях.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Завершается пособие контрольным заданием, работа над которым обеспечивает контроль усвоения содержания темы. Контрольное задание, наряду с контрольным тестом, содержит основные и дополнительные задачи.

Пособие может быть использовано обучающимися девятых классов, учителями математики для организации внеурочного обучения математике.

Содержание

Предисловие	4
Введение для обучающихся	5
Введение для учителей	6
Метод координат на плоскости и его применения.....	7
Введение	7
1. Метод координат на прямой.....	8
2. Геометрия координатной плоскости	11
3. Задание фигур на координатной плоскости	15
4. Составление уравнений фигур	25
5. Применения метода координат	28
6*. Параметрические уравнения.....	31
Тест для самоконтроля.....	34
Ответы к тесту для самоконтроля	36
Задания для самостоятельного решения	36
Указания к заданиям для самостоятельного решения	39
Контрольное задание	39
Критерии оценок	40
Контрольный тест	40
Инструкция по выполнению теста	40
Основное задание	43
Указания к задачам основного задания	45
Дополнительное задание	45
Указания к задачам дополнительного задания.....	46
Олимпиадные задачи	47
Указания к олимпиадным задачам	47
Послесловие	48

Предисловие

Математическое образование является базой профессионального образования для многих профессий. Поэтому очень важно помочь обучающимся получить добротную математическую подготовку.

Предлагаемое пособие направлено на углубление математических знаний девятиклассников, на совершенствование их умений решать сложные задачи, в частности прикладные, на подготовку к итоговому оцениванию по математике, к продолжению обучения в профильной школе.

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков исследования уравнений с двумя переменными и построения фигур, ими определяемых, на углубление представлений у них о методе координат на и его применениях.

В пособии содержатся понятия и утверждения, которые изучались в школьном курсе математики, некоторое их расширение, углубление. объяснения и советы, которые помогут обучающимся при решении задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Каждый блок содержит образцы решения задач. Овладеть необходимым теоретическим материалом, проверить степень его усвоения помогут обучающимся вопросы для самоконтроля. К ним приведены ответы. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения и указания к ним.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного и дополнительного заданий. Выполнение контрольного теста заключается в выборе правильного ответа из нескольких приведенных. В зависимости от намерений и возможностей обучающихся, они могут выполнять только контрольный тест, или контрольный тест и основное задание, или контрольный тест, основное и дополнительное задание.

Пособие предназначается для обучающихся 9-х классов разного типа образовательных учреждений, учителей математики. Оно может быть частично использовано обучающимися 10-х и 8-х классов.

Введение для обучающихся

Уважаемые друзья!

Настоящее пособие посвящено одному из основных методов исследований в математике и её приложениях — методу координат. Это универсальный метод, которым мы широко пользуемся в своей жизни. В математике он имеет особое значение, так как позволяет сводить решения задач к вычислениям, к решению алгебраических задач.

Выполнение контрольного задания, приведенного в пособии, поможет вам развить свои умения исследовать уравнения с двумя переменными и изображать фигуры, ими определяемых, расширить и углубить представления о методе координат на плоскости и его применениях. Все необходимые для выполнения контрольного задания сведения и разъяснения приведены в пособии.

Убедиться в том, что вы усвоили данную тему, помогут тест для самоконтроля и задания для самостоятельного решения с ответами и указаниями, содержащиеся в пособии. Если ваши ответы на тестовые задания не совпадают с приведенными в пособии, проанализируйте ошибки и учтите их в своей дальнейшей работе.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач. Работа над контрольным тестом состоит в выборе для каждого тестового задания правильного ответа среди предложенных. Помните, что правильный ответ среди них всегда имеется, и он ровно один.

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений. Дополнительное задание предполагает решение более сложных задач. В пособии приведены олимпиадные задания для тех, кто хотел бы глубже овладеть методом координат.

Надеемся, что работа над пособием будет для вас интересной и полезной.

Желаем вам успехов!

Введение для учителей

Уважаемые коллеги!

Настоящее пособие может быть использовано для организации дополнительного обучения математике, проведения факультативных занятий в 9-ом классе. Оно позволит также организовать самостоятельное изучение математики обучающимися, дополнительное к школьному.

Приведенный в пособии теоретический материал, который сопровождается решением типовых задач, достаточен для обеспечения готовности к самостоятельной работе над заданиями. Эту готовность можно проверить с помощью теста для самоконтроля. Наличие ответов и указаний к заданиям теста дает возможность корректировать подготовку учеников к обучению. В пособии помещены задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним. Оказание помощи в их решении является важной составляющей в управлении самостоятельной работой обучающихся. Формирование у обучающихся определенной последовательности действий при проработке учебного материала является необходимым условием формирования умения самостоятельно учиться.

Предложенное пособие может быть использовано как для организации индивидуального обучения, так и для проведения факультативов и других коллективных форм обучения. В начале рассмотрения темы необходимо помочь обучающимся осознать главную цель темы, ее основных заданий. Сжатый обзор теоретического материала и рекомендации к его проработке являются следующим шагом в работе с обучающимися. Наибольшее внимание следует уделить решению задач для самостоятельной работы. Именно они готовят обучающихся к выполнению контрольного задания. Целесообразно сделать акцент на самоконтроле. Надеемся, что предложенное пособие будет вашим надежным помощником в организации обучения математике, дополнительного к школьному, в организации самостоятельной работы обучающихся, в обеспечении предпрофильного обучения математике.

Желаем вам успехов в обучении и воспитании детей!

Метод координат на плоскости и его применения

Введение

Среди всех общих математических методов, с которыми знакомятся и которые используют школьники, наиболее универсальным и применимым является метод координат. Этим методом человек пользуется повседневно (фамилия и имя — тоже своеобразные координаты).

Основная идея метода координат — положения какого-то объекта с помощью числа или набора чисел — выглядит и естественной, и целесообразной. Она широко используется во всех сферах человеческой деятельности. В математике метод координат имеет особое значение. Он дает возможность сводить решение разнообразных задач к вычислениям, к алгебраическим задачам.

Сущность метода координат на плоскости заключается в установлении соответствия между точками плоскости и упорядоченными парами чисел, в использовании этого соответствия для задания фигур уравнениями. Применение метода координат связано с решением двух основных задач:

- составить уравнение, которое определяет данную фигуру;
- по данному уравнению фигуры исследовать ее свойства, изобразить ее.

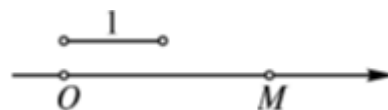
Этот метод очень плодотворен, потому что "срабатывает" в двух противоположных направлениях. С одной стороны, он переводит геометрические соотношения в аналитические и дает возможность решать геометрические задачи средствами алгебры, с другой — осуществляет переход от аналитических соотношений к геометрическим с целью получения наглядного представления об абстрактных ситуациях, которые описываются языком уравнений и неравенств.

Изучение координатного метода, выяснение его сути, ознакомление с основными правилами задания фигур на плоскости с помощью аналитических выражений, рассмотрение методов решения геометрических задач координатным методом является неотъемлемой составляющей математического образования. Главной целью данного пособия является раскрытие сущности метода координат путем рассмотрения его разных приложений.

1. Метод координат на прямой

Понятие координатной прямой лежит в основе метода координат на прямой.

Координатной прямой называется прямая, на которой выбрано направление, начало координат, единицу измерений (масштаб).

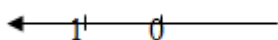


Иногда вместо термина «координатная прямая» используют термины «числовая ось» или «числовая прямая».

Обычно координатную прямую изображают так:



но можно и так:



Более удобным является первое изображение координатной прямой, потому что мы привыкли читать слева направо. Такое изображение числовой прямой позволяет пользоваться, например, выражением: точка A находится правее точки C . В дальнейшем будем именно это «стандартное» изображение подразумевать в задачах и вопросах, если в них используются термины «правее», «левее».

Точки числовой оси, лежащие правее начала отсчета O , образуют положительную полуось, а левее — отрицательную полуось.

Если быть точнее, то положительную полуось образуют все точки A координатной прямой, лежащие по одну сторону начала отсчета O и такие, что луч OA с началом в точке O имеет такое же направление, как и координатная прямая.

Координатой точки на координатной прямой называется число, равное расстоянию от этой точки до начала координат, если точка находится на положительной полуоси, и противоположное ему, если точка лежит на отрицательной полуоси.

Тот факт, что точка M имеет координату a , обозначают так: $M(a)$. Модуль координаты точки на координатной прямой равен расстоянию от точки до начала координат, а знак указывает полуось, на которой расположена точка.

Начало отсчета имеет координату, равную нулю: $O(0)$.

Превращение прямой в координатную прямую позволяет каждой точке прямой поставить в соответствие число. И наоборот, каждому числу соответствует ровно одна точка на координатной прямой. Когда говорят «точка -12 », то имеют в виду точку, координата которой равна -12 .

Введение координат на прямой устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками прямой и множеством вещественных чисел.

По координатам точек можно определять их взаимное расположение на координатной прямой, измерять расстояния между ними, находить середины отрезков, точки, симметричные данной точке и т. д.

Чтобы записать удобную для использования формулу расстояния между точками $A(a)$ и $B(b)$, напомним определение модуля числа:

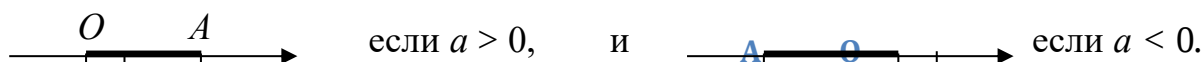
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a - \text{положительное число или нуль,} \\ -a, & \text{если } a - \text{отрицательное число.} \end{cases}$$

Например: $|-13| = 13$; $|10,2| = 10,2$; $|-0,7| = 0,7$.

Главное геометрическое назначение модуля числа содержится в следующем утверждении.

Утверждение 1. Модуль числа a равен расстоянию от точки $A(a)$ до начала отсчета O : $|a| = AO$.

Справедливость этого утверждения следует из рисунков:

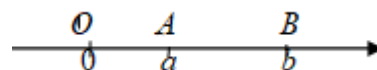


Утверждение 2. Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ вычисляется по формуле: $AB = |b - a|$.

Для доказательства этой формулы рассмотрим различные случаи:

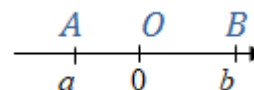
1. Пусть $0 < a < b$, т.е. точки расположены так: .

Тогда $AB = OB - OA = b - a = |b - a|$, т. к. $b - a > 0$.



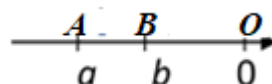
2. Пусть $a < 0 < b$, т.е. имеем такой рисунок:

Тогда $AB = AO + OB = |a| + b = -a + b = b - a = |b - a|$, т.к. $b - a > 0$.



3. Пусть теперь $a < b < 0$, т.е. точки расположены так:

Тогда $AB = AO - BO = |a| - |b| = -a + b = b - a = |b - a|$, т.к.



$b - a > 0$.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях $a < b$. Если же $a > b$ то, рассуждая аналогично, получим $AB = |a - b|$. Осталось вспомнить, что $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$. Следовательно, наша формула верна во всех случаях.

С помощью модуля числа легко записать соотношения, определяющие некоторые множества на координатной прямой.

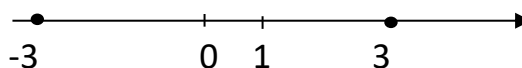
Задача 1. Отметьте на координатной прямой множество всех точек x , для которых: 1) $x < 3$; 2) $|x| = 3$; 3) $|x| < 3$; 4) $|x - 2| \leq 3$.

Решение. 1) Условию $x < 3$ соответствуют все точки координатной прямой, лежащие левее точки $A(3)$ (исключая саму точку $A(3)$).

Изображается это так:



2) Равенству $|x| = 3$ соответствуют точки координатной прямой, расстояние от которых до начала отсчета равно 3. Таких точек две: $A(3)$ и $B(-3)$. Изобразим их на координатной прямой:



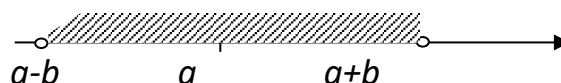
3) Неравенству $|x| < 3$ соответствуют все точки координатной прямой, которые удалены от начала отсчета на расстояние, меньшее 3:



4) Неравенству $|x - 2| \leq 3$ соответствуют все точки координатной прямой, которые удалены от точки $B(2)$ на расстояние, не превышающее 3. Они образуют промежуток, концы которого имеют координаты -1 и 5 :

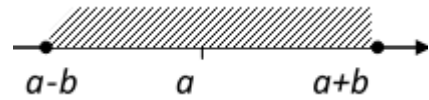


Замечание. Рассмотренные примеры показывают, что неравенство $|x - a| < b$ при $b > 0$ определяет на координатной прямой промежуток с центром в точке $A(a)$ и длиной $2b$. Изображается это множество так:



Не закрашенные кружочки означают, что соответствующие точки координатной прямой не рассматриваются (иначе говорят "выколоты"). А решение неравенства

$|x - a| \leq b$ изображается так:

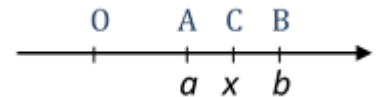


Утверждение 3. Координата x середины отрезка с концами $A(a)$ и $B(b)$ определяется по формуле: $x = \frac{a + b}{2}$.

Эта формула доказывается, как и формула для вычисления расстояния между точками, рассмотрением различных случаев.

Если $0 < a < b$, т.е. точки расположены так:

$$\text{то } OC = OA + \frac{AB}{2} = a + \frac{|b - a|}{2} = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

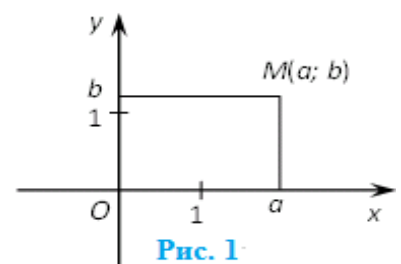


Попробуйте самостоятельно продолжить обоснование формулы в остальных случаях.

2. Геометрия координатной плоскости

Применение метода координат требует свободной ориентации на координатной плоскости. Напомним некоторые основные понятия и формулы.

Система координат на плоскости полностью определяется парой взаимно перпендикулярных прямых, на которых выбраны направления, одинаковые единицы измерения длины, и точка их пересечения O является началом координат на каждой из этих прямых (рис. 1).



Прямоугольная система координат на плоскости состоит из двух перпендикулярных координатных прямых (осей координат) с общим началом координат и одинаковыми единицами масштаба.

Координатной плоскостью называется плоскость, на которой выбрана прямоугольная система координат.

Первую координатную ось (ось абсцисс) обозначается, обычно, через x , а вторую (ось ординат) — через y . Выбор системы координат на плоскости будем обозначать $(O; x; y)$.

Координатные оси на плоскости делят ее на четыре части — координатные углы или *квадранты*.

Каждой точке M координатной плоскости соответствует упорядоченная пара $(a; b)$ действительных чисел — **прямоугольные координаты** точки M .

Прямоугольными координатами точки плоскости называют координаты ортогональных проекций этой точки на координатные оси, записанные в определенном порядке.

Запись $M(a; b)$ означает, точка M имеет координаты a, b (рис. 1). Модуль координаты точки на координатной плоскости равен расстоянию от точки до соответствующей координатной оси, а знак указывает полуось, на которой расположена проекция точки на координатную прямую.

Введение координат на плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и множеством упорядоченных пар вещественных чисел.

Каждой точке M плоскости соответствует упорядоченная пара $(a; b)$ действительных чисел, прямоугольных декартовых координат точки M . И наоборот, каждой упорядоченной паре чисел соответствует единственная точка плоскости. Это позволяет как бы отождествить точку M с парой $(a; b)$ («точка $(a; b)$ » — это точка, координаты которой равны $(a; b)$) и решать многие геометрические задачи алгебраическими средствами. Так, расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$

и $B(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

а координаты $(x; y)$ середины отрезка AB находят из соотношений

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Задача 1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-4; 4)$, $B(2; 4)$, $C(-1; 2)$.

Решение. Найдём длины сторон треугольника ABC :

$$AB = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (4 - 4)^2} = 6, \quad BC = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{13},$$

$$AC = \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{13}.$$

Избежать применения неудобной для вычислений в данной ситуации формулы Герона поможет тот факт, что треугольник ABC равнобедренный с основанием AB . Середина стороны AB , т. е. точка D с координатами $x = \frac{-4 + 2}{2} = -1$ и $y = \frac{4 + 4}{2} = 4$ является основанием высоты CD данного треугольника. Поэтому $CD = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = 2$, и для площади S треугольника ABC имеем значение: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6(\text{кв.ед.})$.

Ответ. 6 кв. ед.

Умение ориентироваться на координатной плоскости предполагает умение находить координаты точек при их простейших преобразованиях: параллельном переносе, симметрии относительно прямых, параллельных осям координат, гомотетии с центром в начале координат и др.

Задача 2. Доказать, что точки $A(2a - x; y)$ и $B(x; y)$ симметричны относительно прямой $x = a$.

Решение. Рассмотрим случай, когда $2a - x > x, y > 0$ (рис. 2). Требование задачи в остальных случаях доказывается аналогично. Точки A и B лежат на прямой AB , параллельной оси x , так как они имеют одинаковые ординаты. Следовательно, они лежат на прямой, перпендикулярной прямой $x = a$. Осталось показать, что и на одинаковом расстоянии от нее. Но это следует из того, что точка C пересечения AB с прямой $x = a$ является серединой отрезка AB : $x_0 = \frac{x + 2a - x}{2} = a, y_0 = \frac{y + y}{2} = y$. ■

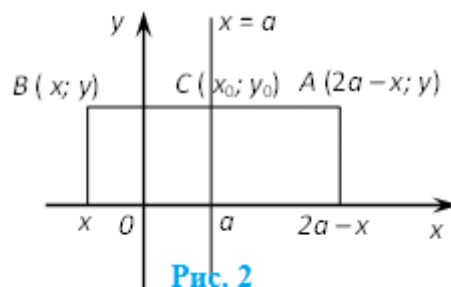


Рис. 2

Весьма полезной с точки зрения многочисленных приложений является задача о делении отрезка в данном отношении (обобщение формул для координат

середины отрезка).

Задача 3. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Найти координаты $(x; y)$ точки C отрезка AB , делящей его в отношении λ (считая от точки A): $\frac{AC}{CB} = \lambda$.

Решение. Спроектировав точки A, B, C на координатные оси, получим, соответственно, точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 (рис. 3). По теореме о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем: $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{A_2C_2}{C_2B_2}$. Не-

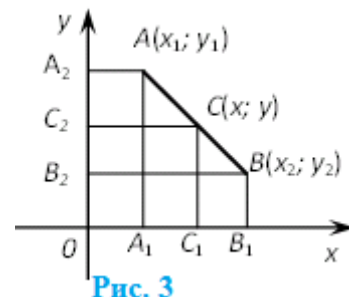


Рис. 3

трудно убедиться, что $\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$, $\frac{A_2C_2}{C_2B_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$. Отсюда

$x - x_1 = (x_2 - x)\lambda$, $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ и, аналогично, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$. Случай, когда отрезок AB параллелен одной из координатных осей, даёт те же результаты.

Ответ. $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Формулы для координат точки, делящей отрезок в данном отношении, могут быть использованы при нахождении координат центра масс (или центра тяжести) двух материальных точек M_1 и M_2 , если даны их координаты. Из физики известно, что центр масс M двух материальных точек M_1 и M_2 находится на отрезке M_1M_2 и определяется с помощью “правила рычага”: $m_1M_1M = m_2MM_2$, где m_1 — масса, сосредоточенная в точке M_1 , а m_2 — в точке M_2 . Отсюда следует, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$, считая от

точки M_1 . Воспользовавшись найденными в примере 3 формулами при $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$

и немного преобразовав их, получим формулы для координат центра масс M двух материальных точек M_1 и M_2 :

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Эти формулы легко обобщаются на случай n материальных точек $M(x_1; y_1)$, $M(x_2; y_2)$, ..., $M(x_n; y_n)$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Координаты $(x; y)$ центра масс M этой системы находят по формулам:

$$x = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

При этом предполагается, что нахождение центра масс для трёх точек M_1, M_2, M_3 сводится к нахождению сначала центра масс M двух из них, например, M_1 и M_2 , а затем центра масс точки M_3 и точки M , в которой сосредоточена сумма масс $m_1 + m_2$ точек M_1 и M_2 . Аналогично поступают в случае произвольного числа материальных точек. При этом, оказывается, порядок группировки точек не сказывается на результате.

3. Задание фигур на координатной плоскости

Главной целью геометрии является изучение свойств различных фигур и отношений между ними. Поэтому очень важно научиться задавать фигуры на координатной плоскости алгебраическими соотношениями и использовать их для изучения фигур.

Под фигурой в планиметрии будем понимать любую совокупность точек плоскости, в том числе состоящую из нескольких “простых” фигур. Например, две точки — это фигура, состоящая из двух точек, объединение окружности и прямой — фигура, состоящая из точек окружности и точек прямой.

Задать фигуру — значит указать способ, по которому можно узнавать, принадлежит ли та или иная точка данной фигуре или нет. На координатной плоскости это легко делать с помощью уравнений. И вы уже хорошо знакомы с этим способом задания фигуры. Сначала вы научились задавать некоторые линии (прямую, параболу, гиперболу и др.) как графики функций, т. е. уравнениями $y = f(x)$. А затем, познакомились с заданием фигур, которые не могут быть графиком функции, — с помощью уравнений с двумя переменными. Например,

окружность с центром в точке $A(a; b)$ и радиусом R (рис. 4) задаётся уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Это уравнение легко получить, используя формулу расстояния от центра $A(a; b)$ до произвольной точки $M(x; y)$ окружности.

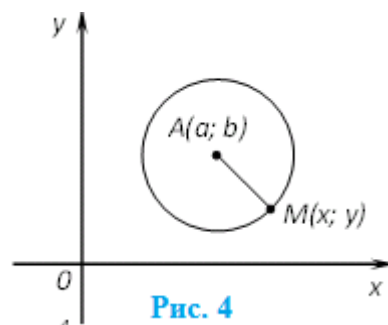


Рис. 4

Всякая прямая на координатной плоскости (в том числе и прямая, параллельная оси y , которая не является графиком функции y от x) может быть задана уравнением $ax + by + c = 0$, где хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Подобным образом могут быть заданы и многие другие фигуры на координатной плоскости. Например, уравнение $x^2 - y^2 = 0$ определяет фигуру, которая состоит из всех точек $(x; y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Что это за фигура? Легко убедиться, что точки прямой $x = y$ удовлетворяют данному уравнению ($y^2 - y^2 = 0$!), т. е. принадлежат этой фигуре. Можно ли утверждать, что данное уравнение определяет на плоскости прямую? Нет. Точки прямой $x = -y$ тоже удовлетворяют этому уравнению ($(-y)^2 - y^2 = 0$!). Поэтому фигуре принадлежит и прямая $x = -y$ (рис. 5).

А есть ли точки, удовлетворяющие уравнению, но не принадлежащие указанным прямым? Таких точек нет, в чём легко убедиться, записав уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 0$. Левая часть уравнения может обращаться в нуль только в том случае, когда либо $x - y = 0$, либо $x + y = 0$, т. е. либо точка лежит на прямой $x = y$, либо на прямой $x = -y$. Таким образом, данное уравнение определяет пару пересекающихся прямых ("крест" биссектрис).

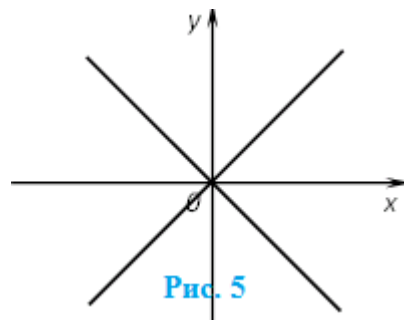


Рис. 5

Итак, на координатной плоскости фигуры можно задавать с помощью уравнений с двумя переменными. Эти уравнения имеют вид $F(x, y) = 0$. Здесь через $F(x, y)$ обозначено выражение, содержащее переменные x, y . Например, для прямой — $F(x, y) = ax + by + c$, для креста биссектрис — $F(x, y) = x^2 - y^2$,

для окружности — $F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$,

Уравнение с двумя переменными $F(x, y) = 0$ называется уравнением данной фигуры Φ , если выполнены условия:

- 1) координаты $(x_0; y_0)$ каждой точки фигуры Φ удовлетворяют данному уравнению ($F(x_0, y_0) = 0$);
- 2) каждая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, принадлежит фигуре Φ .

Вывод. Чтобы показать, что данное уравнение является уравнением данной фигуры, нужно доказать два утверждения, соответствующие двум условиям определения.

Замечание. Вы, наверное, обратили внимание на некоторое различие стиля в предыдущих абзацах. В одном месте мы пишем “точка удовлетворяет уравнению ...”, а в другом — “точка, координаты которой удовлетворяют уравнению”. Конечно же, последнее выражение точнее. Но так как на координатной плоскости мы отождествили точки и пары чисел (их координаты), то нет ошибок и в первом выражении. Тем более что оно удобнее (короче). По тем же причинам вместо слов “фигура, заданная уравнением $F(x, y) = 0$ ” будем иногда писать “фигура $F(x, y) = 0$ ”. Поскольку уравнению $F(x, y) = 0$ соответствует на координатной плоскости некоторая фигура, то одна из главных наших задач — научиться строить эту фигуру. Если уравнение $F(x, y) = 0$ можно представить в виде $y = f(x)$, то дело сводится к построению графика функции. Например, уравнение $x^2 + x + y = 0$ можно представить в виде

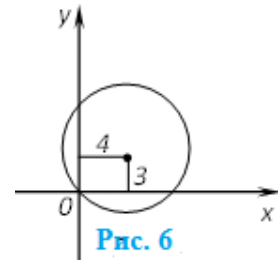
$$y = \frac{-x}{x+1} = \frac{-x-1+1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1},$$

так как $x = -1$ данному уравнению не удовлетворяет (проверьте!). А такие графики можно строить с помощью преобразований. Рассмотрим уравнения, не сводящиеся к виду $y = f(x)$.

Задача 1. Построить фигуру, заданную уравнением:

$$1) x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0; \quad 2) x + |x| = y + |y|; \quad 3)^* x - [x] = y - [y].$$

Решение. 1) Данное уравнение чем-то похоже на уравнение окружности. Но, вместе с тем, оно по виду существенно отличается от приведённого выше уравнения окружности. Нельзя ли его преобразовать к виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$? Оказывается, можно. Как и в случае с параболой, где уравнение $y = ax^2 + bx + c$ сводится к уравнению $y = a(x - x_0)^2 + d$, достаточно выделить полные квадраты, содержащие переменные x и y :
 $x^2 - 6x + y^2 - 8y = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + y^2 - 2 \cdot 4y + 16 - 16 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 25$
 Таким образом, исходное уравнение можно записать в виде $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. А это уравнение определяет окружность с центром в точке (3; 4) и радиусом 5 (рис. 6).



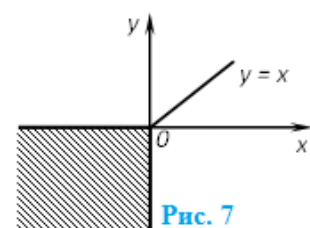
2) Второе уравнение содержит модули. Здесь нужно поступать так же, как при построении графиков функций, содержащих модули: “раскрывать” модули. Разобьём координатную плоскость на части, в которых можно “раскрыть модули”. В нашем примере такими частями являются координатные четверти (квадранты).

I четверть: $x \geq 0, y \geq 0$. В этом случае $|x| = x, |y| = y$ и уравнение принимает вид $2x = 2y$ или $x = y$. Следовательно, часть искомой фигуры, лежащая в I четверти, совпадает с биссектрисой координатного угла.

II четверть: $x \leq 0, y \geq 0$. В этом случае $|x| = -x, |y| = y$ и уравнение принимает вид $x - x = 2y$ или $y = 0$. Часть искомой фигуры, лежащая во II четверти, совпадает с отрицательной полуосью координатной оси x .

III четверть: $x \leq 0, y \leq 0$. Так как $|x| = -x, |y| = -y$, то уравнение принимает вид $x - x = y - y$ или $0 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любая точка $(x; y)$. Следовательно, вся III четверть принадлежит нашей фигуре.

IV четверть: $x \geq 0, y \leq 0$. Уравнение принимает вид $x = 0$ (проверьте!) и определяет отрицательную полуось координатной оси y . Данное уравнение определяют



фигуру, изображённую на рисунке 7. ■

Замечание 1. Вы, наверное, обратили внимание на то, что точки координатных осей мы включили в разные четверти. Вообще четверти — это части координатной плоскости, на которые её разбивают координатные оси. Другими словами, четверти задаются строгими неравенствами $x > 0$, $y > 0$ и так далее. Но при построении фигур, заданных уравнениями с модулями, можно присоединять к четвертям и их границы.

Замечание 2. После преобразования второго уравнения мы пришли к равенству $0 = 0$. Уравнение ли это? Если да, то куда подставлять значения переменных? В этом случае нужно вернуться к тому уравнению, из которого получено уравнение $0 = 0$. В примере это было уравнение $x - x = y - y$. А здесь есть куда подставлять переменные. Легко убедиться, что при такой подстановке мы будем получать верное равенство $0 = 0$. А если в результате преобразования получено числовое равенство $2 = 0$? Это значит, что никакие значения переменных не могут удовлетворить исходному уравнению. Другими словами, решений нет, то есть нет точек, координаты которых удовлетворяют рассматриваемому уравнению.

3)* Для построения фигуры, заданной уравнением $x - [x] = y - [y]$, где $[x]$ — целая часть числа x , разобьём координатную плоскость на квадратики со стороной 1 (рис. 8) и рассмотрим вид уравнения в каждом из них. При $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ и $[x] = [y] = 0$ уравнение принимает вид: $x = y$. Следовательно, в рассматриваемом квадратике искомая фигура является кусочком прямой (диагональю без верхнего конца). В квадратике $1 \leq x < 2$, $0 \leq y < 1$ имеем: $[x] = 1$, $[y] = 0$, т. е. уравнение принимает вид $x - 1 = y$ и тоже является кусочком прямой, параллельной предыдущей. Анализируя далее, получим, что в квадратике $k \leq x < k + 1$, $l \leq y < l + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$) уравнение имеет вид $x - k = y - l$ или $y = x + l - k$, что опять-таки является диагональю

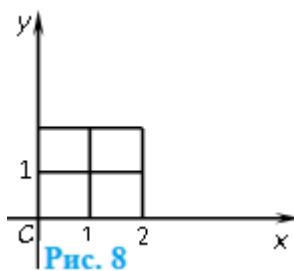


Рис. 8

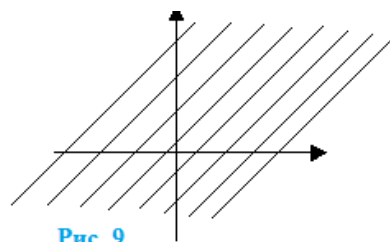


Рис. 9

квадрата, параллельной прямой $y = x$. Поскольку разность $m = l - k$ вместе с целыми k и l пробегает все целые числа, то нашу фигуру составляют все прямые $y = x + m$, где $m \in \mathbb{Z}$ (рис. 9). ■

Зная уравнение фигуры, всегда можно узнать: принадлежит ли фигуре данная конкретная точка или нет? Достаточно подставить её координаты в уравнение. Например, очень легко определить: проходит ли линия $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ через начало координат? (Да: $(0^2 + 0^2 + 0)^2 = 0^2 + 0^2$!).

Иногда по уравнению нетрудно построить фигуру. В других случаях это сделать не просто (попробуйте построить фигуру $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$). Но в любом случае уравнение содержит всю информацию о фигуре и часть этой информации можно добыть, исследуя её уравнение. Например, даже не зная, какую фигуру задаёт уравнение $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$, можно сделать вывод, что эта фигура симметрична относительно оси y . Действительно, точка, симметричная точке $(x; y)$ относительно оси y , имеет координаты $(-x; y)$. И легко убедиться, что они одновременно либо принадлежат фигуре, либо не принадлежат: $((-x)^2 + y^2 + y)^2 - (-x)^2 + y^2 = (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 + y^2$.

В общем случае, фигура $F(x, y) = 0$ симметрична относительно оси y , если $F(-x, y) = F(x, y)$. Аналогично выясняется симметрия относительно оси x . Более того, нетрудно обнаружить и симметрию относительно прямых, параллельных осям. Например, точки $(x; y)$ и $(2a - x; y)$ симметричны относительно прямой $x = a$ (см. пример 2), и если $F(x, y) = F(2a - x, y)$, то фигура симметрична относительно прямой $x = a$.

Вывод. Исследование уравнения с двумя переменными позволяет изучить свойства фигуры, заданной уравнением, и даже построить эту фигуру (разумеется, как и при построении графиков функций, — приближённо, т. е. эскиз).

Задача 2. Построить фигуру, заданную уравнением $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Решение. Легко убедиться, что оси координат являются осями симметрии данной фигуры, а начало координат — ее центром симметрии (проверьте

это самостоятельно!). Следовательно, достаточно построить часть фигуры, лежащей, например, в 1-ой четверти. А в этой четверти исходное уравнение можно записать в виде $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, $0 \leq x \leq 3$, так как $y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \geq 0$ и, следовательно, $|x| \leq 3$, а, по условию, $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Построим эскиз графика полученной функции. При $x = 0$ имеем $y = 2$. Функция обращается в нуль при $x = 3$. Осталось заметить, что функция убывающая, так как при увеличении аргумента x от 0 до 3 значение выражения $1 - \frac{x^2}{9}$ уменьшается, а следовательно уменьшается значение функции $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$

(свойство корня!). На рисунке 10 изображён график этой функции. Правда непонятно, почему мы нарисовали линию, обращённую выпуклостью вверх, а не вниз? Но это сложный вопрос. К нему мы вернёмся в старших классах.

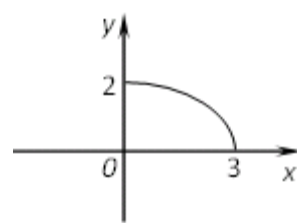


Рис. 10

А сейчас, чтобы сделать правильный выбор, нам достаточно построить несколько точек графика, пользуясь вычислительными средствами. Например,

$$y(1) = 2\frac{\sqrt{8}}{3} \approx 1,8; \quad y(2) = 2\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 1,2.$$

Отразив полученный график относительно осей и начала координат, получим искомую фигуру (рис.11). ■

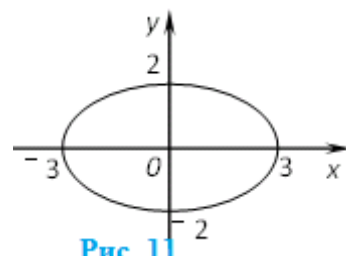


Рис. 11

Построенная фигура называется *эллипсом*. Эллипсы можно наблюдать при настройке изображения в телевизоре по испытательной таблице. При этом поворотами ручек настройки изображения по вертикали и горизонтали мы стремимся из эллипса получить окружность. Этот пример свидетельствует о наличии глубокой связи между эллипсами и окружностями. Действительно, если окружность $x^2 + y^2 = 9$ сжать к оси x с коэффициентом сжатия $k = \frac{2}{3}$, то мы

получим эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. При таком сжатии точка $(x_0; y_0)$ переходит в точку

$\left(x_0; \frac{2}{3}y_0\right)$ (рис. 12). И если точка лежала на окружности,

т. е. выполнялось равенство $x_0^2 + y_0^2 = 9$, то точка

ка $\left(x_0; \frac{2}{3}y_0\right)$ лежит на эллипсе:

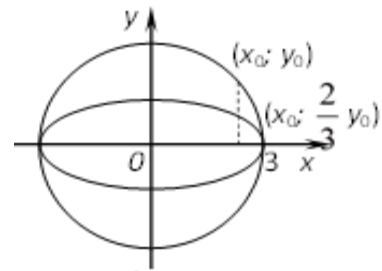


Рис. 12

$$\frac{x_0^2}{9} + \frac{\left(\frac{2}{3}y_0\right)^2}{4} = \frac{x_0^2}{9} + \frac{4y_0^2}{9 \cdot 4} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{9} = 1.$$

Нетрудно показать, что всякая точка эллипса получается из некоторой точки окружности при таком сжатии.

В общем случае, если окружность $x^2 + y^2 = a^2$ сжать к оси x с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$ (если $b \geq a$, то на самом деле это растяжение!), то мы получим фигуру, заданную уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, которая называется эллипсом. Таким

образом, эллипс можно определить как фигуру, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Исследование уравнения эллипса

в общем случае мало чем отличается от исследования конкретного эллипса в задаче 2. Вот только, если $b > a$, то эллипс будет вытянут не вдоль оси x , а

вдоль оси y .

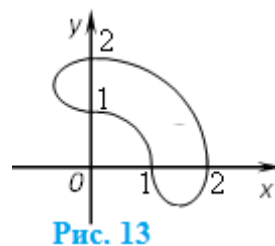
Эллипс — замечательная фигура, которая часто встречается в жизни людей: тень от круглого обруча, край поверхности воды в наклонённом стакане и т. д. Но наиболее замечательно то, что по эллипсам движутся планеты Солнечной системы и некоторые кометы. В частности, траектория движения Земли представляет собой эллипс, не очень сильно отличающийся от окружности. А вот траектория кометы Галлея, которая приближается к нам один раз в 75 лет (последний раз она приближалась в 1986 году), — очень сильно сплюснутый

эллипс. У эллипса много замечательных свойств, используемых в математике и ее приложениях.

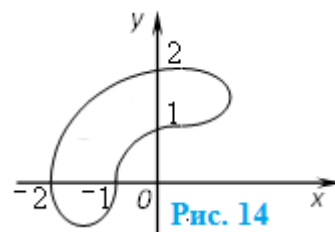
При построении графиков функций мы широко пользовались геометрическими преобразованиями: сдвигами вдоль осей, сжатиями к осям и растяжениями от осей, отображениями от осей. Этот метод применим и для построения фигур, заданных уравнениями $F(x, y) = 0$. И мы им уже воспользовались в задаче 2. Проиллюстрируем ещё его применение.

Задача 3. Фигура на рис. 13 задана уравнением $F(x, y) = 0$. Построить фигуры, заданные уравнениями:

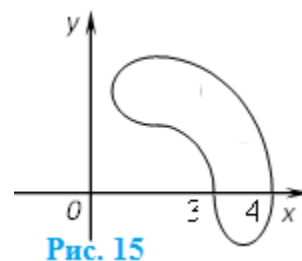
- 1) $F(-x, y) = 0$; 2) $F(x - 2, y) = 0$; 3) $F(|x|, y) = 0$.



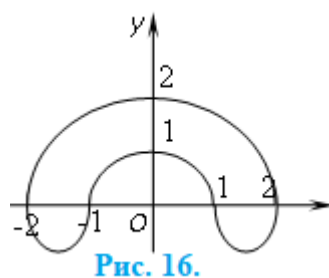
Решение. 1) Точки (x, y) и $(-x, y)$ симметричны относительно оси y . Следовательно, фигура, заданная уравнением $F(-x, y) = 0$, получается из данной отображением относительно оси y (рис. 14).



2) Точки (x, y) и $(x - 2, y)$ получаются друг из друга сдвигом вдоль оси x на две единицы. Фигура, заданная уравнением $F(x - 2, y) = 0$, получается из данной фигуры сдвигом вдоль оси x на 2 единицы вправо (рис. 15).



3) При $x \geq 0$ уравнение $F(|x|, y) = 0$ совпадает с исходным уравнением. Следовательно, в правой полуплоскости $x \geq 0$ искомая фигура совпадает с данной. А при $x \leq 0$ уравнение $F(|x|, y) = 0$ превращается в уравнение $F(-x, y) = 0$. А это значит, что точка, симметричная точке (x, y) относительно оси y , принадлежит данной фигуре. Следовательно, отобразив в левую полуплоскость часть данной фигуры, расположенную в правой полуплоскости, получим часть искомой фигуры в левой полуплоскости. Объединив полученные части фигур в левой и правой полуплоскостях, получим искомую фигуру (рис. 16). ■



Фигуры можно задавать не только уравнениями, но и неравенствами. Так,

неравенство $x^2 + y^2 \leq R^2$ определяет на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиусом R . Действительно, выражение $x^2 + y^2$ является квадратом расстояния от точки $M(x; y)$ до начала координат, точки O . Данное неравенство означает, что $OM^2 \leq R^2$ или $OM \leq R$, т. е. фигура является указанным кругом.

Неравенство $x \leq 1$ определяет множество точек плоскости, находящихся левее прямой $x = 1$, включая саму прямую. Более общо, неравенство $ax + by + c \geq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, определяет полуплоскость ограниченную прямой $ax + by + c = 0$, включая эту прямую.

При построении фигуры, заданной неравенством $F(x, y) \geq 0$ (или $F(x, y) > 0$), обычно приходится сначала строить фигуру, заданную уравнением $F(x, y) = 0$, а затем выяснять, какая часть плоскости удовлетворяет неравенству.

Задача 4. Построить фигуру, заданную неравенством $(2x - y + 1)(x + y) > 0$.

Решение. Построим сначала фигуру, заданную уравнением $(2x - y + 1)(x + y) = 0$. Эта фигура состоит из двух прямых $2x - y + 1 = 0$ и $x + y = 0$ (рис. 17), которые разбивают плоскость на четыре части. Чтобы выяснить, какие из этих частей входят в фигуру, достаточно выбрать по одной точке в каждой из них и определить знак выражения $(2x - y + 1)(x + y)$. При этом мы считаем, что знак этого выражения в других точках той же части такой же (Почему?). Взяв точки $(1; 0)$, $(0; 2)$, $(-3; 0)$, $(0; -1)$ и проделав указанную процедуру, получим искомую фигуру, изображённую на рис. 18. Штриховая линия означает, что её точки не принадлежат фигуре. ■

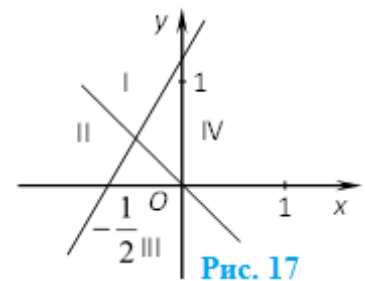


Рис. 17

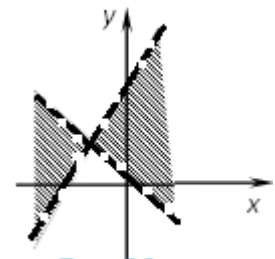


Рис. 18

Замечание. Фигуру в задаче 4 можно было построить, рассматривая со-

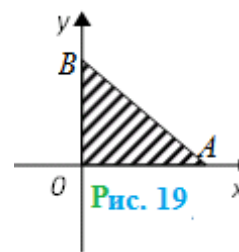
вокупность систем неравенств $\begin{cases} 2x - y + 1 > 0, \\ x + y > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - y + 1 < 0, \\ x + y < 0 \end{cases}$. Каждая из них

задаёт пересечение двух полуплоскостей. И мы естественно пришли к заданию фигур системами уравнений и неравенств.

Пусть у нас имеются две фигуры A и B , заданные уравнениями $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$. Фигура, состоящая из общих точек этих фигур (её называют пересечением и обозначают $A \cap B$), задаётся системой $\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$. Действительно, если точка (x_0, y_0) принадлежит и фигуре A , и фигуре B , то и $F(x_0, y_0) = 0$ и $G(x_0, y_0) = 0$. Следовательно, точка (x_0, y_0) является решением системы уравнений. И наоборот, каждое решение системы (x_0, y_0) определяет точку, которая принадлежит и фигуре A , и фигуре B .

Аналогично обстоит дело при задании фигур неравенствами. Например, треугольник с вершинами в точках $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ и $B(0; 1)$ (рис. 19) можно задать системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 1 \leq 0. \end{cases}$$



В дальнейшем будем называть уравнения, неравенства, их системы словом «соотношения». Каждое соотношение с двумя переменными определяет на координатной плоскости фигуру, которую называют геометрическим образом этого соотношения (речь может идти и о фигуре, состоящей из пустого множества точек).

4. Составление уравнений фигур

Наряду с исследованием соотношений, определяющих фигуру, и построением фигуры по этим соотношениям, другой важной задачей является задача составления соотношений, задающих фигуру.

Приведённые выше задачи и ваш школьный опыт позволяют сделать вывод: составление соотношений, задающих фигуру, начинается с выбора системы координат. Ясно, что вид соотношений зависит от этого выбора. Поэтому его нужно сделать таким, чтобы соотношения, задающие фигуру, имели наиболее простой вид, либо не-

которую стандартную форму.

Задача 1. На плоскости даны точки A и B . Найти множество точек плоскости, находящихся от A вдвое дальше, чем от B .

Решение. Выберем на плоскости систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой A , а положительная полуось абсцисс имела направление от A к B . За единицу масштаба возьмём отрезок AB . Тогда точка A будет иметь координаты $(0; 0)$, точка B — координаты $(1; 0)$. Координаты произвольной точки M искомой фигуры обозначим через $(x; y)$.

По условию $AM = 2BM$, или $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Преобразуем это уравнение так, чтобы оно приняло знакомый вид. Для этого, возведя обе части в квадрат, раскрыв скобки, приведя подобные члены, получим:

$$x^2 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \text{ или } 3x^2 - 8x + 3y^2 + 4 = 0.$$

$$\text{Отсюда } x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} + y^2 + \frac{4}{3} = 0 \text{ или } \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$



Рекомендуем самостоятельно подробно провести выкладки, обратив внимание на эквивалентность преобразований.

Итак, искомым множеством точек является окружность, центр которой лежит на луче AB на расстоянии $\frac{4}{3}AB$ от точки A , и радиуса, равного $\frac{2}{3}AB$. ■

Важно ещё раз подчеркнуть, что только эквивалентность преобразований “промежуточного” уравнения дала возможность сделать окончательный вывод. Если бы при преобразованиях мы получили уравнение-следствие, то вывод был бы менее определённым. Мы могли бы утверждать только, что точки искомой фигуры принадлежат окружности.

Простой иллюстрацией сказанному является возведение в квадрат уравнения прямой $y = x$. Приходим к уравнению-следствию $y^2 = x^2$, которое, в свою очередь, эквивалентно уравнению $x^2 - y^2 = 0$ и, как мы уже знаем, задаёт пару пересекающихся прямых.

Задача 2. Найти множество точек плоскости, равноудалённых от данной

прямой d и данной точки F , не лежащей на этой прямой.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось ординат проходила через точку F перпендикулярно прямой d , а ось абсцисс делила пополам отрезок оси ординат между точкой F и прямой d (рис. 20). Отрезок OF возьмём в качестве масштабной единицы. Точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда расстояние MK точки M до прямой d и отрезок MF равны.

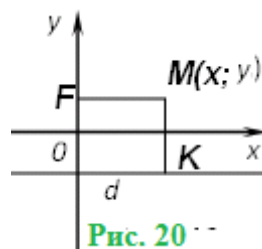


Рис. 20

Поскольку $MK = y + 1$ (почему?) и $F(0; 1)$, то, вычисляя длину отрезка MF и сравнивая её с длиной MK , получим уравнение искомой фигуры:

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = y + 1 \text{ или } x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1, \text{ или } y = \frac{1}{2}x^2. \blacksquare$$

Замечание 1. Рассуждения не усложнятся, если в предыдущей задаче масштабную единицу выбрать другой. Можно взять, например, $OF = p$. Тогда получим параболу $y = \frac{1}{2p}x^2$.

Замечание 2. В задаче 2 получена любопытная геометрическая характеристика параболы, впрочем, как и в примере 1 получена одна из геометрических характеристик окружности. Наличие таких характеристик открывает новые возможности в приложениях математики к моделированию процессов, явлений. Вот и следующая задача даёт довольно неожиданную геометрическую характеристику для известной вам линии.

Задача 3. Найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть величина постоянная.

Решение. Выберем систему координат с началом в точке A и осью абсцисс AB . Положим $AB = a$, тогда в выбранной системе координат $A(0; 0)$, $B(a; 0)$. Точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда $AM^2 - MB^2 = b$, где b — постоянная величина. Поскольку $AM^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 = (x - a)^2 + y^2$, то $AM^2 - MB^2 = x^2 + y^2 - ((x - a)^2 + y^2) = b$. Отсюда

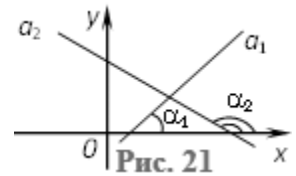
$x = \frac{b+a^2}{2a}$. Последнее уравнение является уравнением прямой, параллельной оси y

и отстоящей от точки A на расстоянии $\left| \frac{b+a^2}{2a} \right|$. ■

5. Применения метода координат

Применение метода координат в геометрии можно проиллюстрировать наиболее просто и вместе с тем убедительно при исследовании взаимного расположения прямых.

Пусть заданы две прямые a_1 и a_2 уравнениями: $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_2$. Коэффициенты k_1 и k_2 имеют простой (и очень важный для нас) геометрический смысл: $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, где α_1 и α_2 — углы наклона прямых к оси x (рис. 21). Из этого следует, что прямые a_1 и a_2 параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $l_1 \neq l_2$ (если $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$, то прямые совпадают). Предлагаем запомнить и условие перпендикулярности прямых a_1 и a_2 : $k_1 \cdot k_2 = -1$. Для тех, кто пожелает доказать это условие, предлагаем воспользоваться, например, тем, что $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ (рис. 21), либо $\alpha_1 = 90^\circ + \alpha_2$, вспомнить определение тангенса тупого угла и проверить соотношение $\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$.



Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и: а) параллельной прямой $y = 3x - 1$, б) перпендикулярной этой прямой.

Решение. Ясно, что искомые прямые имеют вид $y = kx$ (вспомните геометрический смысл коэффициента l), поэтому решением задачи при условии а) является прямая $y = 3x$. А для перпендикулярной прямой $k = -\frac{1}{3}$, поэтому её

уравнение имеет вид $y = -\frac{1}{3}x$. ■

В случае с исследованием взаимного расположения прямых мы уже располагаем уравнениями прямых в прямоугольной системе координат (причём в специальном виде!), и уже по уравнениям судим о геометрических свойствах пря-

мых. В других более сложных ситуациях можно выделить такие основные этапы решения задач координатным методом:

- 1) перевод задачи на координатный (аналитический) язык;
- 2) преобразования аналитического выражения;
- 3) обратный перевод, т. е. перевод ответа с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Обратите внимание на то, что эти этапы довольно чётко прослеживаются в рассмотренных выше примерах на отыскание множеств точек, удовлетворяющих определённым геометрическим свойствам. Кроме таких задач, в планиметрии координатным методом можно успешно решать задачи на обоснование либо нахождение зависимостей между элементами фигур.

Задача 2. В треугольнике ABC стороны $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, BD — медиана. Доказать, что $BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы точка A была началом координат, а луч AC определял направление оси x . Точки A , D , C имеют координаты:

$A(0; 0)$, $D\left(\frac{b}{2}; 0\right)$, $C(b; 0)$. Обозначим координаты точки B через $(x; y)$, тогда

$c^2 = x^2 + y^2$, $a^2 = (x - b)^2 + y^2 = x^2 - 2bx + b^2 + y^2$, или $a^2 = c^2 - 2bx + b^2$. Наконец,

$BD^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - xb + \frac{b^2}{4} = c^2 - xb + \frac{b^2}{4}$. Осталось определить значение x из предпоследнего соотношения и подставить в последнее. ■

До сих пор мы больше говорили о том, что координатный метод сводит решение геометрических задач к алгебраическим. Однако, нередко случаи, когда геометрическая трактовка алгебраических выражений помогает решать арифметические либо алгебраические задачи. И, конечно, отыскать соответствующую трактовку помогает метод координат.

Задача 3*. Найти все целые числа x , y , z , удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 = z^2$.

Решение. Ясно, что если $z = 0$, то $x = y = 0$. Пусть $z \neq 0$ и тройка чисел x_1 ,

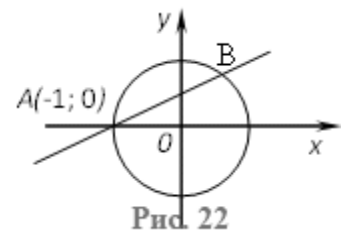
y_1, z_1 удовлетворяют уравнению. Тогда $\left(\frac{x_1}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2 = 1$, то есть $\left(\frac{x_1}{z_1}; \frac{y_1}{z_1}\right)$ —

точка с рациональными координатами, лежащая на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Наоборот, если точка $\left(\frac{p_1}{q_1}; \frac{p_2}{q_2}\right)$ с рациональными координатами лежит на

окружности $x^2 + y^2 = 1$, то $\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2 = 1$; $(p_1q_2)^2 + (q_1p_2)^2 = (q_1q_2)^2$. Та-

ким образом, числа p_1q_2, p_2q_1, q_1q_2 составляют целочисленное решение данного уравнения. Итак, задача о нахождении решений уравнения сведена к задаче нахождения точек с рациональными координатами на окружности $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 22).



Проведём через точку $A(-1; 0)$ прямую $y = kx + 1$. Поскольку координаты точки A удовлетворяют уравнению прямой, то $-k + 1 = 0$, и уравнение прямой принимает вид $y = kx + k$.

Координаты точки B пересечения этой прямой с окружностью находим из системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = k(x + 1). \end{cases}$

А именно, $x = \frac{1-k^2}{1+k^2}$, $y = \frac{2k}{1+k^2}$. Из этих формул следует, что при рациональных k координаты $(x; y)$ точки B — рациональные числа. Наоборот, если координаты $(x; y)$ точки B рациональные числа, то k также рациональное число, ибо $k = \frac{y}{x+1}$.

Таким образом, координаты всех рациональных точек окружности, кроме точки $A(-1; 0)$, определяются по указанным формулам. Положив в этих формулах $k = \frac{m}{n}$, где m, n — целые числа, будем иметь: $x = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$, $y = \frac{2mn}{n^2 + m^2}$.

Последнее означает, что целые решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ имеют вид: $x = n^2 - m^2$, $y = 2mn$, $z = n^2 + m^2$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

Замечание 1. Целочисленные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ называют пифагоровыми числами, ибо с геометрических позиций речь идёт о катетах и гипотенузах прямоугольных треугольников. Полученные формулы при $n = 2$, $m = 1$ дают значения длин сторон $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ знаменитого египетского треугольника.

Замечание 2. Внимательный читатель должен был заметить некоторую некорректность в рассуждениях и выводах в задаче 3. Так, значение z у нас всегда неотрицательно, хотя легко увидеть, что если числа x_1, y_1, z_1 составляют решение данного уравнения, то любая тройка x_2, y_2, z_2 , где $|x_2| = |x_1|$, $|y_2| = |y_1|$, $|z_2| = |z_1|$, также является его решением. Но мы допустили эту “вольность” и не очень следили за знаками, чтобы избежать загромождений и без того не простых выкладок и дать вам возможность проанализировать рассуждения и внести необходимые поправки.

6*. Параметрические уравнения

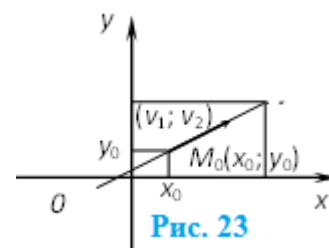
До сих пор мы пользовались представлением о линии, как о совокупности точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Теперь же под линией будем понимать след движущейся точки, т. е. траекторию движения.

Если точка движется по координатной плоскости, то её положение в каждый момент времени характеризуется координатами $(x(t), y(t))$, которые зависят от параметра t , изменяющегося на некотором промежутке $[a; b]$. Задание функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ определяет траекторию движения. Поэтому систему функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, называют параметрическими уравнениями линии, состоящей из точек $(x(t); y(t))$.

Задача 1. Составить параметрическое уравнение прямой.

Решение. Представим нашу прямую, как траекторию точки, которая движется прямолинейно и равномерно. Выберем систему координат, и пусть в этой

системе координат прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$, а вектор скорости имеет координаты $(v_1; v_2)$ (рис. 23). Тогда проекции $x(t)$, $y(t)$ движущейся точки M на оси x , y изменяются по закону: $x = x_0 + v_1t$, $y = y_0 + v_2t$. Следовательно, искомое параметрическое уравнение прямой — $x = x_0 + v_1t$, $y = y_0 + v_2t$. Чтобы точка прошла всю прямую, необходимо, чтобы параметр t изменялся от $-\infty$ до $+\infty$.



Ответ. $x = x_0 + v_1t$, $y = y_0 + v_2t$

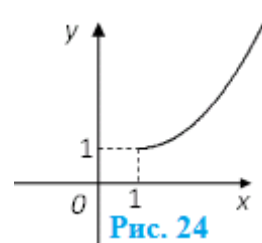
Одной из важнейших является задача построения линии по её параметрическому заданию. Очень часто она может быть сведена к построению линии, заданной уравнением вида $F(x, y) = 0$. Для этого нужно исключить параметр t из параметрических уравнений, например, выразив его из одного уравнения и подставив в другое.

Задача 2. Построить линию $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 4t^2$, $t \geq 0$.

Решение. Найдя t из первого уравнения и подставив во второе, получим:

$$y = 1 + 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad y = (x-1)^2 + 1. \quad \text{Однако, по условию}$$

$t \geq 0$ и, следовательно, $x-1 \geq 0$, т. е. $x \geq 1$. Таким образом, искомая линия является частью параболы $y = (x-1)^2 + 1$ (её половинкой!) (рис. 24). ■



Парабола в предыдущей задаче возникла не случайно. Легко заметить, что закон движения $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 4t^2$ соответствуют равнопеременному движению точки. Действительно, её проекция на ось x движется равномерно ($x = x_0 + v_1t$). А проекция на ось y движется с постоянным ускорением ($y = \frac{at^2}{2} + v_2t + y_0$). Результирующее движение является равнопеременным и его траекторией является парабола. Вот поэтому после прямых она является наиболее “уважаемой” в школьной математике. А ещё в математике и её приложениях имеет важное значение окружность. Она является траекторией вра-

щения материальной точки вокруг заданной точки.

Задача 3. Составить параметрическое уравнение окружности.

Решение. Будем считать окружность траекторией движущейся материальной точки M . Выберем систему координат с началом в центре окружности так, что движение против часовой стрелки началось в точке $(R; 0)$, R — радиус окружности.

Если φ — угол между радиусом OM (рис. 25) и осью x , то $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$. Это очевидно, когда угол φ острый.

А для любого угла φ под $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ будем понимать координаты проекции движущейся

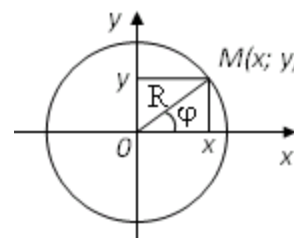


Рис. 25

точки на оси координат. Таким образом, уравнения $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$ составляют параметрическое уравнение окружности. Для полного прохождения окружности достаточно, чтобы угол φ изменился от 0° до 360° , т. е. $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$.

Ответ. $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$.

Если угол поворота φ равномерно зависит от времени, т. е. $\varphi = \omega t$, где ω — угловая скорость, то параметрическое уравнение окружности можно записать в следующем виде:

$$x = R \cos \omega t, y = R \sin \omega t, 0^\circ \leq t \leq \frac{360^\circ}{\omega}.$$

Так как координаты точек окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = R^2$, то подставляя $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$ мы получаем соотношение $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Это важное соотношение, имеющее простой геометрический смысл: сумма квадратов координат точек единичной окружности равна 1.

Задача 4. Определить траекторию движения точки по закону:

$$x = 3 \cos \varphi, y = 2 \sin \varphi + 1, 0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$$

Решение. Выразим $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ через x и y соответственно: $\cos \varphi = \frac{x}{3}$,

$\sin \varphi = \frac{y-1}{2}$. Воспользовавшись тождеством $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, получим:

$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. Так как полученное уравнение и исходное равносильны (опре-

деляют одно и то же множество точек координатной плоскости, то, следовательно, искомая траектория — эллипс.

Ответ. Эллипс.

Тест для самоконтроля

1. Точка A расположена на оси ординат на расстоянии 6 от начала координат. Какие координаты имеет точка A ?
2. Верно ли, что при $m = 3$ точки $A(1; m)$ и $B(-1; -3)$ расположены на одинаковом расстоянии от оси x ?
3. Какие координаты имеет проекция точки $(1; -3)$ на ось ординат?
4. Чему равно расстояние от точки $C(a; b)$ до оси ординат, если точка C лежит во II четверти?
5. Известно, что в некоторой системе координат точки A и B имеют координаты $A(7; 2)$, $B(-7; 2)$. Можно ли восстановить систему координат?
6. Можно ли однозначно восстановить систему координат на плоскости, если известны:
а) координаты данной точки и начало координат;
б) координаты двух точек и масштабная единица?
7. Верно ли, что отрезок с концами $(-a^2; -b^2)$, $(c^2; d^2)$, пересекает:
а) ось x ; б) ось y ?
8. Симметричны ли точки $A(2; -1)$ и $B(4; 3)$ относительно точки $M(3; 1)$?
9. Относительно какой координатной оси симметричны точки $(a; b)$ и $(-a; b)$?
10. Верно ли, что из формулы $AB = \sqrt{4^2 + (x-1)^2}$ следует, что точки A и B имеют координаты: $A(0; 1)$, $B(4; x)$?
11. Для точки $M(1; 2)$ построили точку M' , симметричную относительно начала координат. Какова длина отрезка MM' ?

12. Можно ли по координатам вершин четырехугольника узнать, является ли он: а) параллелограммом; б) прямоугольником; в) выпуклым?
13. Как изменятся координаты точек, если: а) направления координатных осей изменить на противоположные; б) масштабы на осях увеличить в 2 раза?
14. Верно ли, что уравнение $y^2 - x^2 = 0$ является уравнением биссектрис I и III координатных углов?
15. Можно ли фигуру на плоскости, состоящую из двух точек, задать уравнением с двумя переменными?
16. Верно ли, что уравнения $xy = 1$ и $y = \frac{1}{x}$ определяют одну и ту же фигуру?
17. Какую фигуру на плоскости определяет уравнение $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 1$?
18. Какая из следующих систем неравенств определяет квадрат?
- а) $\begin{cases} |x| > 1, \\ |y| > 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \geq 1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \leq 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x| < 1, \\ |y| < 1 \end{cases}$
19. Верно ли, что точка (2; 1) лежит внутри круга, ограниченного окружностью:
- а) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 30$; б) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$?
20. Может ли точка (1;1) быть центром окружности, проходящей через точки (5; 4) и (4; -3)?
21. Имеет ли оси симметрии линия $x^2 - y^2 = 1$?
22. Верно ли, что прямая $x = 3$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 4$?
23. Сколько общих точек имеют линии $x^2 + y^2 = 1$ и $y = \frac{1}{x}$?
24. Пересекаются ли окружности $x^2 + y^2 = 1$ и $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 1$?
25. Всегда ли уравнение $ax + by + c = 0$ является уравнением прямой?
26. Всякая ли прямая на координатной плоскости может быть задана уравнением вида $y = kx + \ell$?
27. Верно ли, что угловой коэффициент прямой $y = kx + \ell$ равен тангенсу угла между этой прямой и прямой $y = 0$?

28. Какой геометрический смысл имеют модули параметров a , b в уравнении

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 ?$$

29. Всегда ли параллельны прямые, если равны их угловые коэффициенты?

30. Лежат ли точка $M(1; -3)$ и начало координат по одну сторону от прямой $2x - y + 5 = 0$?

31. Могут ли разные параметрические уравнения задавать одну и ту же линию?

32. Определяют ли одну и ту же линию параметрические уравнения:

а) $x = t, y = t$; б) $x = t^2, y = t^2$; в) $x = t^3, y = t^3$; г) $x = t^4, y = t^4$?

33. По какой траектории движется точка, если закон ее движения имеет вид:

а) $x = 2t - 1, y = t + 1$; б) $x = t + 1, y = t^2$; в) $x = t^2, y = t^2$; г) $x = -\sin t, y = \cos t$?

34. Верно ли, что движение по закону $x = t^2, y = t^2$ является равномерным?

Ответы к тесту для самоконтроля

1. (0; 6) или (0; -6). 2. Да. 3. (0; -3). 4. -a. 5. Да. 6. а) Нет, б) Нет. 7. а) Да, если $b^2 + d^2 \neq 0$. б) Да, если $a^2 + c^2 \neq 0$. 8. Да. 9. Оси y . 10. Нет. 11. $\sqrt{20}$. 12. а) Да, б) да, в) да. 13. а) Изменяться на противоположные, б) уменьшатся в 2 раза. 14. Нет. 15. Да. 16. Да. 17. Окружность. 18. в). 19. а) Да, б) нет. 20. Да. 21. Да. 22. Нет. 23. 0. 24. Нет. 25. Нет, например, при $a = b = 0$, $c = 1$. 26. Нет. 27. Нет. 28. Расстояний от точек пересечения прямой с осями до начала координат. 29. Нет, они могут быть совпадающими. 30. Да. 31. Да. 32. Одинаковые линии определяют уравнения а) и в), б) и г). 33. а) По прямой; б) По параболе; в) По лучу; г) По окружности. 34. Нет.

Задания для самостоятельного решения

1. Выпишите координаты вершин:

- 1) квадрата со стороной a , если диагонали квадрата лежат на осях x и y ;
- 2) правильного шестиугольника со стороной a , если одна из его диагоналей лежит на оси x , а центр находится в начале координат;
- 3) правильного шестиугольника со стороной a , если начало координат находится в вершине шестиугольника, а ось x направлена от этой вершины к

соседней.

2. Даны точки $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(2; -2)$.

1) Докажите, что точки A , B и C не лежат на одной прямой.

2) Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

3) Найдите длину биссектрисы, проведённой из вершины C .

4) Определите расстояние от начала координат до центра тяжести треугольника ABC .

5) Какие массы должны быть сосредоточены в точках A , B , C , чтобы центром масс этой системы была середина медианы, проведённой из вершины A ?

6) Определите вид треугольника ABC .

7) Выберите точку D так, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был параллелограммом.

8)* При каких значениях k , l точки прямой $y = kx + l$ будут равноудалены от точек A и B ?

3. Постройте фигуру, заданную соотношением:

1) $(x - 1)(x + 1) = 0$; 2) $|y| = 2$; 3) $\frac{x+1}{x-1} = 0$; 4) $y^2 \geq 4$;

5) $-1 \leq x \leq 0$; 6) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$; 7) $\frac{x}{y} \geq 0$; 8) $x|x| = y|y|$;

9) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$; 10) $|y| \leq |x|$; 11)* $|x + y| = |y| - x$; 12)* $|x - 1| + |y - 2| \leq 1$;

13) $x^2 + y^2 = 4x + 4y$; 14) $x^2 + y^2 < 4x + 6y$; 15) $(5x + y - 2)(x - y - 3) > 0$;

16)* $x = [y]$; 17)* $[x] = [y]$; 18) $9x^2 + 25y^2 = 225$.

4*. Дана фигура и её уравнение $F(x, y) = 0$. Как построить фигуру, заданную уравнением:

1) $F(-x, y) = 0$; 2) $F(x, -y) = 0$; 3) $F(-x, -y) = 0$; 4) $F(x - a, y) = 0$;

5) $F(x, y + b) = 0$; 6) $F(x - a, y + b) = 0$; 7) $F(2a - x, y) = 0$; 8) $F(2a - x, 2b - y) = 0$;

9) $F(x, ky) = 0$, $k > 0$; 10) $F(|x|, y) = 0$; 11) $F(|x|, |y|) = 0$?

5*. Определить траекторию тела, движущегося по закону:

- 1) $x = -1 + 3t$, $y = 4 - 2t$; 2) $x = 2 + t$, $y = 1 - 2t^2$; 3) $x = 3 + t^2$, $y = 2 - t^2$;
 4) $x = 2 \cos t$, $y = 1 - 2t^2$; 5) $x = -\sin t$, $y = \cos t$; 6) $x = \cos t$, $y = \sin^2 t$;
 7) $x = 2 - 3 \cos 5t$, $y = 4 \sin 5t - 1$; 8) $x = 40\sqrt{2}t$, $y = -5t^2 + 40\sqrt{2}t$.

6. Составьте соотношения, задающие следующие фигуры:

- 1) прямую, проходящую через точку $(-2; -3)$ и образующую с осью x угол 150° ;
- 2) прямую, проходящую через точки $(-2; 3)$ и $(-2; 5)$;
- 3) окружность с центром в точке $(-3; 4)$ и проходящую через начало координат;
- 4) окружность радиуса R , расположенную в 1 четверти и касающуюся осей координат;
- 5)* окружность с центром в точке $(2; 0)$ и касающуюся прямой $y = x$;
- 6) окружность, concentricкую с окружностью $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$ и касающуюся окружности $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$;
- 7) дугу окружности единичного радиуса с центром в начале координат, находящуюся в первой четверти;
- 8) прямую $y = x$ и окружность $x^2 + y^2 = 4$;
- 9) множество точек, находящихся на расстоянии 2 от оси y ;
- 10) полосу между прямыми $x = -2$ и $x = 4$;
- 11) кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 4$.

7. На плоскости даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек C таких, что длина медианы AD треугольника ABC равна a .

8*. Дана окружность радиуса R и на ней точка A . Найдите множество точек, делящих всевозможные хорды окружности, содержащие точку A , в одном и том же отношении λ .

9*. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество точек M , для которых:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Указания к заданиям для самостоятельного решения

2. 3) Вспомните, в каком отношении биссектриса делит противоположную сторону треугольника.

4) Центр тяжести треугольника (точка пересечения медиан) делит каждую из медиан в отношении 1:2, считая от стороны, к которой проведена медиана.

5) Масса, конечно, определяется не однозначно.

7) Можно воспользоваться свойствами диагоналей параллелограмма.

3. 2), 11), 12) Раскройте модули.

4) Рассмотрите эквивалентное неравенство $(y + 2)(y - 2) \geq 0$.

7) Сравните с неравенством $xu \geq 0$.

13), 14) Дополните члены, содержащие x и y , до полных квадратов.

16), 17) Напомним, что $[y]$ означает целую часть y , так, например, $[3,5] = 3$, $[-4,2] = -5$.

4. Вспомните соответствующий материал, относящийся к построению графиков функций.

5. После исключения параметра t обращайте внимание на то, какие значения принимают неизвестные x и y . В примерах, где фигурируют тригонометрические функции, целесообразно пользоваться тождеством: $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$.

6. 4) Подумайте, где находится центр искомого круга. 7) Кроме уравнения окружности, используйте неравенства, определяющие первую четверть.

7. Выбрав в качестве начала координат точку A и отрезок AB в качестве масштабной единицы, “пустите” ось x по прямой AB .

8. Решите сначала задачу при $\lambda = 1$.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или

всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		Контрольный тест	Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	10 задач	4 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	14 задач	6 задач	4 задач
«отлично»	Решено не менее	17 задач	8 задач	6 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям теста для самоконтроля, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

- Точка B лежит на оси ординат на расстоянии 3 от начала координат. Какие координаты имеет точка B ?
 А. $(0; 3)$ или $(0; -3)$. Б. $(-3; 0)$. В. $(3; 0)$. Г. $(3; 0)$ или $(-3; 0)$.
- Укажите все значения параметра p , при которых точки $A(-2; 3)$ и $B(p; -2)$ расположены на одинаковом расстоянии от оси ординат?
 А. -2 . Б. 2 . В. -2 и 2 . Г. -3 и 3 .
- Чему равна ордината точки, лежащей на прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $(2; -1)$?
 А. 1 . Б. -1 . В. 2 . Г. 0 .

4. Какая из точек $(2; -5)$, $(3; 2)$, $(-4; 1)$, $(-1; -2)$ расположена дальше всех от оси абсцисс?
- А. $(2; -5)$. Б. $(3; 2)$. В. $(-4; 1)$. Г. $(-1; -2)$.
5. При каком значении a точки $P(a; 4)$ и $Q(4; -20)$ симметричны относительно точки $(-2; a)$?
- А. 0. Б. -8. В. 12. Г. Таких значений нет.
6. Точка B симметрична точке $(x; y)$ относительно точки $(a; b)$. Координаты точки B равны ...
- А. $(2a + x; 2b + y)$. Б. $(a + x; b + y)$. В. $(a - 2x; b - 2y)$. Г. $(2a - x, 2b - y)$.
7. Какое соотношение должно связывать координаты двух точек $(a; b)$ и $(c; d)$, чтобы они были симметричны относительно оси x ?
- А. $a = c$. Б. $a = c, b = -d$. В. $a = -c, b = d$. Г. $-d = b$.
8. Точка расположена во II четверти на расстоянии 2 от оси абсцисс и на расстоянии $\sqrt{5}$ от начала координат. Какие координаты имеет точка, расположенная симметрично данной относительно оси ординат?
- А. $(2; 1)$. Б. $(1; 2)$. В. $(-1; -2)$. Г. $(-2; -1)$.
9. Координаты точки M , лежащей на оси абсцисс и одинаково удаленной от точек $(1; 1)$ и $(-3; -1)$, равны ...
- А. $(-1; 0)$. Б. $(0; -1)$. В. $(-2; 0)$. Г. $(0; -2)$.
10. Если середина отрезка находится в точке $(2; -1)$, а его концы расположены на осях координат, то длина отрезка равна ...
- А. 20. Б. $\sqrt{20}$. В. $\sqrt{1,25}$. Г. 1,25.
11. Как изменятся координаты точек, если сместить начало координат вдоль оси абсцисс на единицу в положительном направлении?
- А. Не изменятся. Б. Обе координаты увеличатся на единицу.
- В. Ордината y не изменится, а абсцисса x уменьшится на единицу.
- Г. Ордината y не изменится, а абсцисса x увеличится на единицу.
12. Какую фигуру на плоскости задает уравнение $x^2 + xy = 0$?
- А. Параболу. Б. Окружность. В. Прямую. Г. Две пересекающиеся прямые.

13. Какое из следующих уравнений определяет параболу?

А. $xy = 1$. Б. $x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$. В. $y^2 = 2x$. Г. $x^2 = 1$.

14. Какое из следующих соотношений не является уравнением окружности?

А. $x^2 + y^2 = 4$. Б. $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

В. $x^2 + (y - 1)^2 = 17$. Г. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$

15. Площадь фигуры, заданной системой $\begin{cases} |x - 2| \leq 1, \\ |y| \leq 2 \end{cases}$, равна ...

А. 2. Б. 8. В. 4. Г. 16.

16. Укажите все значения параметра a , при которых точка $(a; 1)$ лежит на окружности $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$?

А. $\{-3\}$. Б. $\{7\}$. В. $\{-3; 7\}$. Г. $\{3; -3\}$.

17. Точка $(1; -1)$ принадлежит фигуре, заданной соотношением ...

А. $x^2 + y^2 < 1$. Б. $|y| < 2$. В. $|x| > 1$. Г. $y > x^2 - 1$.

18. Какая из следующих кривых не проходит через начало координат?

А. $xy + y^2 + x = 0$. Б. $y^2 + xy + y = 0$. В. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Г. $xy = 2$.

19. Какая из следующих фигур симметрична относительно оси абсцисс?

А. $x^2 + 2y + y^2 = 4$. Б. $y = x^3$. В. $x = |y|$. Г. $(x + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$.

20. Сколько общих точек имеют линии $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ и $x = 1$?

А. 1. Б. 2. В. 0. Г. 3.

21. Одну общую точку имеют линии ...

А. $x - y = 0$ и $x^2 + y^2 = 4$. Б. $x^2 + y^2 = 4$ и $\sqrt{y}(x - y) = 0$.

В. $x^2 + y^2 = 4$ и $\frac{1}{\sqrt{y}}(x - y)$ Г. $x^2 + y^2 = 4$ и $\frac{\sqrt{y}}{x - y} = 0$.

22. Какое из следующих уравнений является уравнением прямой?

А. $|x| + |y| = 1$. Б. $x^2 - y^2 = 1$. В. $x^2 = 0$. Г. $x^2 = 4$.

23. Уравнение $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, всегда можно представить в виде ...

А. $y = kx + \ell$. Б. $x = ky + \ell$. В. $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ Г. $x = d$.

24. Угол наклона прямой к оси абсцисс может равняться ...

А. -170° . Б. 210° . В. 170° . Г. 270° .

25. Расстояние между точками пересечения прямой $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$ с осями координат равно ...
- А. 5. Б. 25. В. 12. Г. $\sqrt{5}$.
26. Угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых могут ~~быть~~ равняться ...
- А. 3 и $\frac{1}{3}$. Б. 3 и -3 . В. 3 и $-\frac{1}{3}$. Г. $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$.
27. Выясните взаимное расположение прямых $2x + 3y - 3 = 0$ и $3x - y + 11 = 0$.
- А. Пересекаются. Б. Параллельны
В. Перпендикулярны Г. Не пересекаются
28. Уравнение $x = x_0 + v_1 t, y = y_0 + v_2 t$ является параметрическим уравнением прямой при ...
- А. $a \leq t \leq b$. Б. $t \geq 0$. В. $-\infty < t < +\infty$. Г. $t > 0$.
29. Траекторией движения точки по закону $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$ является ...
- А. окружность. Б. полуокружность. В. отрезок. Г. луч.
30. Какая из следующих линий не является окружностью?
- А. $x = 2\cos t, y = 2\sin t$. Б. $x = -\sin t, y = \cos t$.
В. $x = 3\cos t, y = \sin 3t$. Г. $x = 3\sin t, y = -3\cos t$.

Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений.

- Тело, находящееся в точке $A(3; -1)$, переместилось в точку $B(2; 3)$, а затем в точку $C(-3; -4)$.
 - Какова длина пути, пройденного телом?
 - В каком направлении переместилось тело?
 - На какое расстояние удалилось тело от своего первоначального положения?

2. Точки $M_1(2; 4)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3(2; 1)$ являются серединами сторон треугольника ABC .

1) Найдите координаты вершин треугольника ABC .

2) Определите расстояние от начала координат до центра масс треугольника ABC .

3) Найдите координаты центра масс системы материальных точек M_1 , M_2 , M_3 , в которых сосредоточены, соответственно, массы 5 кг, 3 кг, 2 кг.

3. Даны точки $A(1; 3)$, $B(3; 6)$, $C(6; 4)$, $D(5; 25)$.

1) Является четырёхугольник $ABCD$ параллелограммом?

2) Найдите координаты такой точки M , чтобы четырёхугольник $ABCM$ был параллелограммом.

3) Определите вид треугольника ABD (прямо-, остро-, тупоугольный).

4) Составьте уравнение прямой, которая: а) параллельна, б) перпендикулярна прямой CB и проходит через точку A .

4. Постройте фигуру, заданную соотношением:

1) $y^4 = 1$; 2) $(x - y)(x - 2y) = 0$; 3) $\frac{x - y}{x - 2y} = 0$;

4) $|y| = x^2 - x$; 5) $x^2 + y^2 = 2y$; 6) $(x - y)(x - 2y) \leq 0$.

5. Напишите уравнение окружности:

1) проходящей через точки $(1; 0)$, $(-5; 0)$ и радиус которой 10;

2) проходящей через точку $(2; 1)$ и касающейся осей координат.

6. Составьте соотношения, задающие следующие фигуры:

1) пару прямых: $y = 3x$ и $y = x - 3$;

2) точку $A(-1; 2)$;

3) отрезок с концами $A(-1; 2)$ и $B(2; -1)$;

4) квадрат с вершинами в точках $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; -1)$.

7. Постройте траекторию тела, движущегося по закону:

1) $x = 3 + t^2$, $y = 2 - t^2$; 2) $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$.

8. Даны две точки A и B . Найдите множество всех точек M , для каждой из кото-

рых: 1) $AM^2 + BM^2 = 4$; 2) $2AM^2 - MB^2 = 2AB^2$.

9. Отрезок постоянной длины l скользит своими концами по сторонам прямого угла. Постройте траекторию движения середины этого отрезка.

10. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество точек M , для которых $MA + MC = MB + MD$.

Указания к задачам основного задания

2. 2) Напомним, что центром масс треугольника является точка пересечения его медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

3. 1) Обратите внимание на признаки параллелограмма, связанные со свойствами диагоналей.

4) Составьте уравнение прямой CB с угловым коэффициентом.

4. 1) Попробуйте разложить $y^4 - 1$ на множители.

4) Раскройте модули.

5) Члены, содержащие y , дополните до полного квадрата.

5. 3), 2) Вспомните, где лежит центр окружности, касающейся сторон угла.

6. 2) Напомним, что уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задаёт точку $(0; 0)$.

7. 3), 2) Обратите внимание на то, какие значения принимают x и y .

8. Ось абсцисс целесообразно направить по прямой AB , а в качестве начала координат взять середину отрезка AB .

9. Систему координат определите с помощью прямого угла. В качестве параметра возьмите угол, образованный отрезком с одной из сторон угла.

Дополнительное задание

1. Линия задана уравнением $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$.

1) Докажите, что линия расположена в круге с центром в начале координат и радиусом 10.

2) Докажите, что линия не симметрична относительно оси x .

3) Найдите наименьший радиус круга с центром в начале координат, который содержит данную линию.

2. Постройте фигуру, заданную соотношением:

$$1) |y| < |x|; \quad 2) y = \left[\frac{1}{x} \right]; \quad 3) x - [x] > y - [y].$$

3. Определите траекторию движения тела, движущегося по закону:

$$1) x = R \cos t - 1, y = R \sin t + 1; \quad 2) x = a \cos t, y = b \sin t;$$

$$3) x = at^2 + 1, y = bt^2 + 2.$$

4. Определите траекторию движения тела, брошенного под углом α к поверхности земли с начальной скоростью v_0 .

5. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Найдите множество точек P , для которых $2PC^2 = PA^2 + PB^2$.

6. Сколько точек с целочисленными координатами лежит на окружности $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$?

7. При каких значениях параметра c система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = c \end{cases}$ не имеет решений;

имеет единственное решение; имеет бесконечное множество решений? Какие ещё случаи возможны?

Указания к задачам дополнительного задания

1. 2), 3. Можно исследовать данное уравнение, считая $x^2 + y^2 = r^2$ квадратом расстояния точки кривой до начала координат.

2. 3), 4). Напомним, что знаком $[x]$ обозначена целая часть x (Например, $\left[\frac{1}{3} \right] = 0$,

$\left[-\frac{1}{3} \right] = -1$ и т. д.). В то же время $x - [x]$ — дробная часть x . Заметим, что

$$0 \leq x - [x] < 1; \text{ так, } -\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{3} \right] = \frac{2}{3} \text{ и т. п.}$$

4. 1) Разложив скорость на вертикальную и горизонтальную составляющие, запишите параметрические уравнения траектории, как функцию от времени.

6. Раскройте скобки и выразите $\sqrt{2}$ через x и y . Впрочем, задача успешно реша-

ется прямым перебором точек.

7. Рассмотрите решения, как точки пересечения окружности и прямой.

Олимпиадные задачи

1. На координатной плоскости найдите множество точек, координаты $(x; y)$ ко-

торых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 0, \\ |x| + |y| \leq 3. \end{cases}$$

2. Имеем пять точек $(-2; 8)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{9}\right)$. Какое наибольшее количество из них может принадлежать линии, определяемой уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1?$$

3. Докажите, что удвоенная площадь треугольника, вершины которого имеют целые координаты, является целым числом.

4. Из угла прямоугольного бильярда размерами 2007×2008 выпустили шар под углом 45° к борту. Докажите, что после нескольких отражений от бортов шар попадет в некоторый угол бильярда. Определите длину пути, пройденного шаром.

5. Имеем три точки на плоскости. Найдите множество всех точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых до этих трех точек является постоянной.

6. На сторонах AB , BC , CD , DA квадрата $ABCD$ построены внутренним образом правильные треугольники ABK , BCL , CDM , DAN . Докажите, что середины сторон этих треугольников, которые не являются сторонами квадрата, и середины отрезков KL , LM , MN , NK образуют правильный двенадцатиугольник.

Указания к олимпиадным задачам

1. Воспользуйтесь задачами 1 и 4 из п. 3 «Задание фигур на координатной плоскости».

2. Подставьте координаты всех точек в уравнение фигуры. Получите пять линейных уравнений относительно неизвестных a , b . Путем перебора выясните, какие системы, составленные из этих уравнений, имеют решения.

3. Постройте прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \min x_i$, $x = \max x_i$, $y = \max y_i$, $y = \min y_i$, где (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ — вершины треугольника.
4. Постройте в прямоугольной системе координат "сетку" из прямоугольников размерами 2007×2008 , ограниченных прямыми $x = 2007k$, $y = 2008l$, где k, l — целые неотрицательные числа. Отражение шара от борта замените симметричным отражением траектории шара от соответствующей стороны прямоугольника. Тогда шар будет идти по прямой $y = x$.
5. Если $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ — данные точки, то запишите сумму квадратов расстояний от произвольной точки $M(x; y)$ искомого множества до этих точек. Она должна быть постоянной. Выделите в полученном соотношении суммы полных квадратов вида $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.
6. Введите систему координат, начало которой находится в центре квадрата, а оси направлены вдоль лучей OK и ON . Докажите, что вершины многоугольника лежат на окружности и вычислите стороны многоугольника.

Послесловие

Хотя в той или иной мере к аналогам координат в математике ученые обращались всегда, но введение в математику координатного метода связывают с французскими математиками Р. Декартом (1596 - 1650) и П. Ферма (1601 - 1665). И хотя исторически первым к идее характеризовать точки плоскости с помощью пар чисел — координат пришел П. Ферма, опубликовал и активно пропагандировал координатный метод Р. Декарт. Ему и отдают первенство открывателя аналитической геометрии. Ведь именно Р. Декарт в своей книге "Геометрия", напечатанной в 1637 г., дал четкое представление об этом методе, продемонстрировал его возможности при решении задач. Он сформулировал идею моделирования геометрических фигур алгебраическими средствами и с ее помощью получил решение нескольких классических задач геометрии.

Как и любая глубокая и интересная математическая идея, идея прямоугольных координат на плоскости для алгебраизации геометрии приобрела важные и многочисленные новые приложения, обобщения.

В первую очередь, кроме привычных для нас прямоугольных координат на плоскости, ввели к рассмотрению и применениям другие системы координат. Например, очень распространенные сейчас в математике полярные координаты, когда расположение точки M на плоскости характеризуется двумя числами (ρ, φ) : расстоянием ρ от фиксированной точки O плоскости и углом наклона φ отрезка OM к фиксированному лучу Ox (рис. 26). Во многих случаях обращение к полярным координатам дает преимущества. Так, уравнение окружности с центром O и радиусом 1 имеет очень простой вид: $\rho = 1$, что дает выгоды при изучении некоторых геометрических фигур.

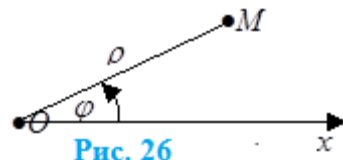


Рис. 26

Естественным является введение прямоугольных и других систем координат в пространстве, когда расположение точки характеризуется с помощью тройки координат, и применение координатного метода в пространстве. Это мнение было выражено еще в трудах Декарта, а в значительной мере реализовано французским математиком А. Клеро (1713 - 1765).

Большое влияние координатный метод имел на развитие учения о числе. Мы уже привыкли отождествлять вещественное число с точкой координатной прямой. Но еще в 16 в. проблемы алгебраического решения уравнений привели к необходимости расширения вещественных чисел. Ведь, например, уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных решений. А поскольку вещественных чисел (точек прямой) не хватает для решения заданного уравнения, то стоит "поискать" его среди точек плоскости. Этот замысел можно реализовать так.

Обозначим через i точку плоскости $(0; 1)$ (рис. 27) и положим $i^2 = -1$. Тогда все точки $(a; b)$ можно записать в виде $a + bi$, где a или $(a; 0)$ — вещественное число, и все действия над новыми, комплексными числами выполняются как действия над многочленами с учетом того, что $i^2 = -1$. Введение комплексных чисел не только решило проблему существования решений алгебраических уравнений, но и открыло новые горизонты в математике и ее приложениях.

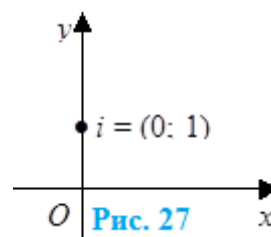


Рис. 27

Метод координат широко применяется для нахождения геометрических мест точек, описания свойств фигур, в частности кривых. Пользуясь этим методом, достаточно легко можно исследовать такие важные в науке, технике и даже в повседневной жизни кривые, как эллипс, гипербола, парабола.

Метод координат дает возможность рассматривать многомерные фигуры, например, четырехмерный куб. Эти возможности метода координат нашли широкое приложение в математике для построения многомерных пространств, в частности бесконечной размерности.

Метод координат позволяет решать арифметические задачи. Яркой иллюстрацией такого приложения является поиск пифагоровых чисел, то есть таких целых чисел x , y , z , что $x^2 + y^2 = z^2$. Трудно сегодня представить возможность описывать движение тел, решать задачи оптимизации, в частности задачи линейного программирования, без использования метода координат.

Афанасьева Ольга Николаевна
Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович
Слипенко Анатолий Константинович

Метод координат и его применения

Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9 классов
Учебное пособие