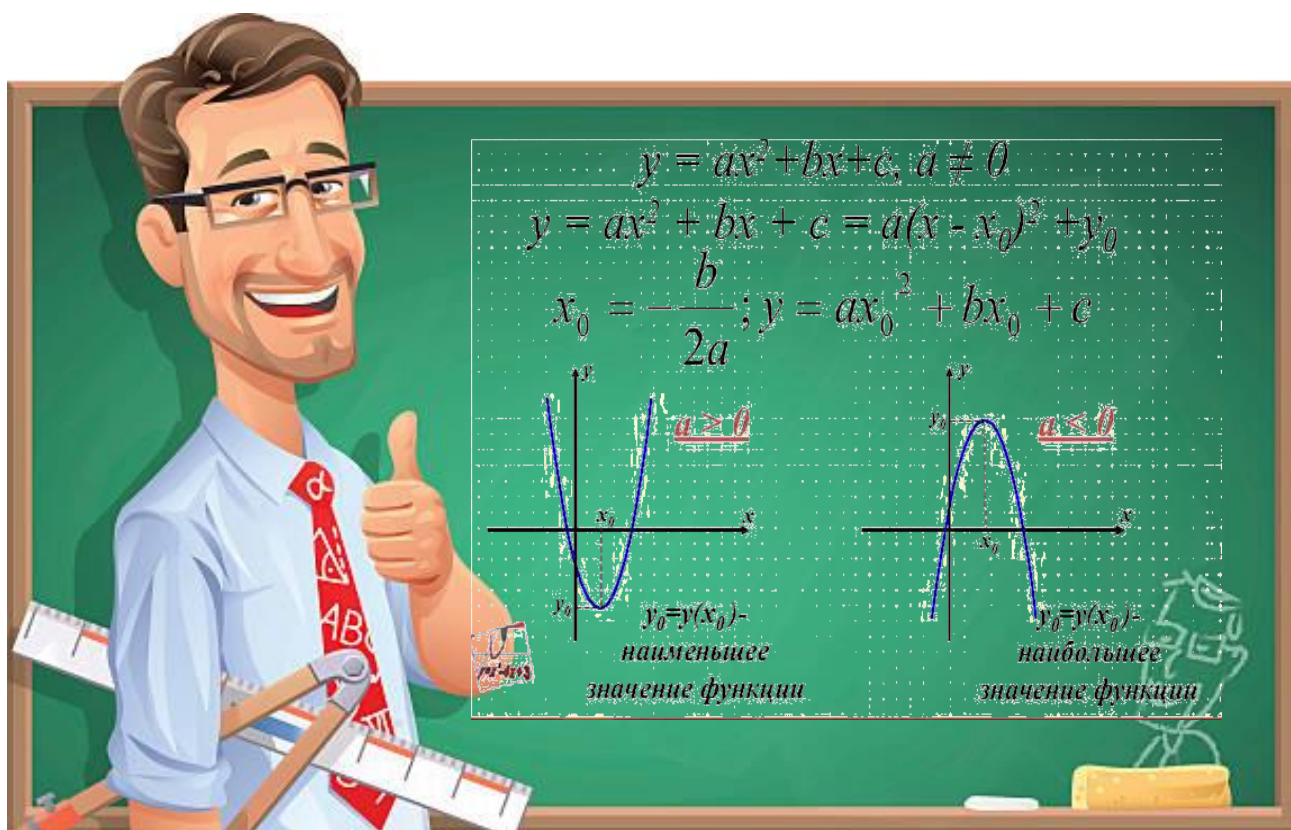




Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л.,
Слипенко А. К.

Квадратичная функция и ее применения



Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9-х классов

Донецк 2025

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К. Квадратичная функция и ее применения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов. — Донецк. — 60 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-х классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике в открытом математическом колледже (ОМК), рекомендованной Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики (приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 25.06.2016г. № 863).

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков исследования квадратичных функций, их применения при решении геометрических задач на нахождение наилучшего, оптимального варианта, в задачах физики, при решении уравнений, неравенств и их систем.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Завершается пособие контрольным заданием, работа над которым обеспечивает контроль усвоения содержания темы. Контрольное задание, наряду с контрольным тестом, содержит основные и дополнительные задачи.

Пособие может быть использовано обучающимися девятых классов, учителями математики для организации внеурочного обучения математике.

Содержание

Предисловие	4
Введение для обучающихся	5
Введение для учителей	6
Квадратичная функция и ее применения.....	7
Введение	7
1. Повторим квадратные уравнения.....	8
2. Свойства квадратичной функции.....	18
3. Применение квадратичной функции.....	33
Тест для самоконтроля.....	39
Ответы к заданиям теста для самоконтроля.....	42
Задачи для самостоятельной работы.....	42
Указания к задачам для самостоятельной работы.....	45
Контрольное задание	47
Критерии оценок	47
Контрольный тест	48
Инструкция по выполнению теста	48
Основное задание	51
Указания к выполнению основного задания	53
Дополнительное задание	54
Указания к выполнению дополнительного задания.....	55
Олимпиадное задание	56
Указания к выполнению олимпиадного задания	57
Послесловие	58

Предисловие

Математическое образование является базой профессионального образования для многих профессий. Поэтому очень важно помочь обучающимся получить добротную математическую подготовку.

Предлагаемое пособие направлено на углубление математических знаний девятиклассников, на совершенствование их умений решать сложные задачи, в частности прикладные, на подготовку к итоговому оцениванию по математике, к продолжению обучения в профильной школе.

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков исследования квадратичной функции, их применения при решении геометрических задач на нахождение наилучшего, оптимального варианта, в задачах физики, при решении уравнений, неравенств и их систем.

В пособии содержатся понятия и утверждения, которые изучались в школьном курсе математики, некоторое их расширение, углубление. объяснения и советы, которые помогут обучающимся при решении задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Каждый блок содержит образцы решения задач. Овладеть необходимым теоретическим материалом, проверить степень его усвоения помогут обучающимся вопросы для самоконтроля. К ним приведены ответы. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения и указания к ним.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного и дополнительного заданий. Выполнение контрольного теста заключается в выборе правильного ответа из нескольких приведенных. В зависимости от намерений и возможностей обучающихся, они могут выполнять только контрольный тест, или контрольный тест и основное задание, или контрольный тест, основное и дополнительное задание.

Пособие предназначается для обучающихся 9-х классов разного типа образовательных учреждений, учителей математики. Оно может быть частично использовано обучающимися 10-х и 8-х классов.

Введение для обучающихся

Уважаемые друзья!

Настоящее пособие посвящено одной из основных функций, изучаемых в школьном курсе математики. К исследованию квадратичной функции сводятся многие важные для практической деятельности человека задачи. Квадратичная функция находит применение при решении геометрических задач на нахождение наилучшего, оптимального варианта, в задачах физики. С изучением квадратичной функции тесно связано решение квадратных уравнений, неравенств и их систем.

Выполнение контрольного задания, приведенного в пособии, поможет вам развить свои умения исследовать квадратичные функции, применять их при решении геометрических задач, в задачах физики, при решении уравнений, неравенств и их систем. Все необходимые для выполнения контрольного задания сведения и разъяснения приведены в пособии.

Убедиться в том, что вы усвоили данную тему, помогут тест для самоконтроля и задания для самостоятельного решения с ответами и указаниями, содержащиеся в пособии. Если ваши ответы на тестовые задания не совпадают с приведенными в пособии, проанализируйте ошибки и учтите их в своей дальнейшей работе.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач. Работа над контрольным тестом состоит в выборе для каждого тестового задания правильного ответа среди предложенных. Помните, что правильный ответ среди них всегда имеется и он ровно один.

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений. Дополнительное задание предполагает решение более сложных задач. В пособии приведены олимпиадные задания для тех, кто хотел бы глубже овладеть квадратичными функциями.

Надеемся, что работа над пособием будет для вас интересной и полезной.

Желаем успехов!

Введение для учителей

Уважаемые коллеги!

Настоящее пособие может быть использовано для организации дополнительного обучения математике, проведения факультативных занятий в 9-ом классе. Оно позволит также организовать самостоятельное изучение математики обучающимися, дополнительное к школьному.

Приведенный в пособии теоретический материал, который сопровождается решением типовых задач, достаточен для обеспечения готовности к самостоятельной работе над заданиями. Эту готовность можно проверить с помощью теста для самоконтроля. Наличие ответов и указаний к заданиям теста дает возможность корректировать подготовку обучающихся. В пособии помещены задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним. Оказание помощи в их решении является важной составляющей в управлении самостоятельной работой обучающихся. Формирование у обучающихся определенной последовательности действий при проработке учебного материала является необходимым условием формирования умения самостоятельно учиться.

Предложенное пособие может быть использовано как для организации индивидуального обучения, так и для проведения факультативов и других коллективных форм обучения. В начале рассмотрения темы необходимо помочь обучающимся осознать главную цель изучения темы, ее основных задач. Сжатый обзор теоретического материала и рекомендации к его проработке являются следующим шагом в работе с обучающимися. Наибольшее внимание следует уделить решению задач для самостоятельной работы. Именно они готовят обучающихся к выполнению контрольного задания. Целесообразно сделать акцент на самоконтроле. Надеемся, что предложенное пособие будет вашим надежным помощником в организации обучения математике, дополнительного к школьному, в организации самостоятельной работы обучающихся, в обеспечении допрофильного обучения математике.

Желаем успехов в обучении и воспитании детей!

Квадратичная функция и ее применения

Введение

Среди всего многообразия функций, которые возникают в математике и ее приложениях, особое значение имеют линейные и квадратичные функции. С одной стороны, они достаточно простые и ими нетрудно пользоваться, а с другой — они адекватно моделируют два вида прямолинейного движения: равномерное и равнопеременное.

Данное пособие посвящено одному из важнейших видов функций — квадратичным функциям. К исследованию квадратичной функции сводится огромное количество важных для практической деятельности человека задач. Квадратичная функция появляется всегда, когда скорость изменения величины является линейной функцией, то есть ускорение ее изменения — постоянно.

Квадратичные функции широко используются в задачах физики. Математической моделью свободного падения тела на Землю является квадратичная функция. Немало других физических зависимостей выражаются с помощью квадратичной функции. К ним относятся зависимость кинетической энергии тела от скорости его движения, зависимость электрической мощности от силы тока, зависимость потенциальной энергии пружины от ее сжатия или растяжения, зависимость электростатического поля от его напряженности и др.

Квадратичные функции применяются при решении геометрических задач, в частности тех, которые касаются выбора наилучшего варианта. Например, площадь треугольника с заданными суммой длин двух сторон и углом между этими сторонами является квадратичной функцией отклонения большей из этих сторон от заданной полусуммы. Аналогично, площадь прямоугольника с заданным периметром выражается с помощью квадратичной функции отклонения одной из его сторон от четвертой части периметра. Подобные примеры можно продолжить.

С изучением квадратичной функции тесно связано решение уравнений, неравенств и их систем. Такие задачи часто встречаются на выпускных, вступительных экзаменах, в частности в заданиях ЕГЭ. Поэтому свободное владе-

ние свойствами квадратичной функции является необходимым условием успешного прохождения этих экзаменов.

Прорабатывая данное пособие, попробуйте:

- видеть квадратичную функцию даже там, где о ней явно не идет речь;
- научиться исследовать квадратичную функцию: находить промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшее или наименьшее значение;
- овладеть графической интерпретацией квадратичной функции (умением распознавать, читать, строить ее график как по заданной формуле, так и по характерным свойствам).

Изучая квадратичную функцию, вы овладеете общими приемами исследования. Много задач, которые решаются с помощью квадратичной функции, в старших классах вы будете решать с помощью производной. Поэтому работа над данным пособием поможет вам в будущем быстрее и лучше овладеть важным и сложным математическим понятием — производной.

В данном пособии рассматриваются применение квадратичной функции для исследования зависимостей различных величин. Для этого приводятся все необходимые сведения о квадратичной функции, изучаемые в школьном курсе математики. В частности, методы нахождения нулей квадратичной функции, то есть методы решения квадратных уравнений.

1. Повторим квадратные уравнения

Так как квадратичная функция задается соотношением $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b и c — некоторые числа, то ее изучение базируется на исследовании квадратных уравнений, то есть уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Напомним кратко методы решения квадратных уравнений, условия существования их решений, зависимость между корнями и коэффициентами уравнения.

№	Название понятия или утверждения	Содержание понятия или утверждения
1.	Общий вид квадратного уравнения	$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$
2.	Неполное квадратное уравнение	$ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = 0$
3.	Приведенное квадратное уравнение	$x^2 + bx + c = 0$
4.	Дискриминант	$D = b^2 - 4ac$
5.	Формулы для решения	Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней; если $D > 0$, то оно имеет два корня $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$ если $D = 0$, то оно имеет один корень $-\frac{b}{2a}$
6.	Теорема Виета	Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$
7.	Теорема, обратная к теореме Виета	Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0.$
8.	Разложение квадратного трехчлена на линейные множители	Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$

Прокомментируем приведенные утверждения. Их активному повторению будет способствовать рассмотрение приведенных далее примеров.

Если коэффициент при x — чётное число, равное $2k$, то корни находятся по формулам: $x_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}$, $x_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$. Заметим, что выражение $k^2 - ac$ равно $\frac{D}{4}$. Полученные формулы иногда называют формулами с «чётным» коэффициентом. Они несколько упрощают вычисление корней уравнений с целыми коэффициентами.

Пример 1. Найти все значения k , при которых квадратное уравнение $x^2 + (2k + 6)x + 24 + 4k = 0$ имеет:

- 1) ровно один корень;
- 2) противоположные корни;
- 3) один из корней, равный нулю.

Решение. 1) Квадратное уравнение имеет один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Удобно воспользоваться формулой с «чётным» коэффициентом: $\frac{D}{4} = (k + 3)^2 - 24 - 4k = k^2 + 2k - 15$. Применив формулу с «чётным» коэффициентом для решения уравнения $k^2 + 2k - 15 = 0$, получим, что данное квадратное уравнение имеет один корень при $k = -5$ и при $k = 3$.

2) Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет противоположные корни тогда и только тогда, когда $b = 0$, $ac < 0$. Коэффициент при x обращается в нуль при $k = -3$. При этом значении k свободный член $24 + 4k$ положителен. Соответствующее уравнение $x^2 + 12 = 0$ корней не имеет. Итак, не существует значений k , при которых данное квадратное уравнение имеет противоположные корни.

3) Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один из корней, равный нулю, тогда и только тогда, когда $c = 0$, $b \neq 0$. Свободный член $24 + 4k$ обращается в нуль при $k = -6$, при этом значении k коэффициент при x в нуль не обращается, поэтому данное уравнение имеет один из корней, равный нулю, при $k = -6$.

Ответ: 1) $\{-5; 3\}$; 2) не существует; 3) -6 .

Теорема Виета остаётся справедливой и для уравнения с дискриминантом, равным нулю, т. е. когда $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Действительно,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = -\frac{b}{2a} \left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{(b^2 - 4ac) + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

так как дискриминант $b^2 - 4ac$ равен нулю.

Теорема Виета вместе с теоремой, обратной ей, дают возможность:

- подбирать устно рациональные корни квадратного уравнения;
- упрощать решение квадратного уравнения;
- составлять квадратные уравнения по их корням;
- находить значение некоторых многочленов от двух переменных, равных корням квадратного уравнения, не решая уравнения;
- находить неизвестные коэффициенты квадратного уравнения по определенным соотношениям между его корнями;
- определять знаки корней квадратного уравнения, не решая его, и т. п.

Иногда целые корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами нетрудно “подобрать”. Проанализируем эту ситуацию в общем виде. Пусть каким-то образом найдены числа m и n такие, что $m + n = -b$, $mn = c$ (именно так иногда подбирают устно корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$). Тогда числа m и n являются корнями уравнения, так как

$$m^2 + bm + c = m^2 - (m + n)m + mn = 0, \quad n^2 - (m + n)n + mn = 0.$$

Корни подобраны, но почему уравнение не имеет других корней? Этот вывод вытекает из того, что квадратное уравнение не может иметь более двух корней.

Приведенные рассуждения являются фактически доказательством теоремы, обратной теореме Виета. Следовательно, основанием для утверждения о том, что подобранные числа являются корнями квадратного уравнения, служит именно теорема, обратная к теореме Виета.

Иногда устно можно подобрать и корни квадратного уравнения со старшим коэффициентом $a \neq 1$. При этом бывает удобным свести решение квадрат-

ного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами к решению приведенного уравнения тоже с целыми коэффициентами умножением обеих частей уравнения на старший коэффициент a (напоминаем, что $a \neq 0$) и последующей заменой $y = ax$: $a^2x^2 + abx + ac = 0$, $y^2 + by + ac = 0$.

Например, рассмотрим уравнение $4x^2 + 3x - 1 = 0$. Умножив обе его части на 4 и сделав замену $y = 4x$, получим уравнение $y^2 + 3y - 4 = 0$. Его корнями, по теореме, обратной теореме Виета, являются числа -4 и 1 ($-4 + 1 = -3$, $-4 \cdot 1 = -4$).

Возвращаясь к неизвестной x по формуле $x = \frac{y}{4}$, получим, что корни исходного

уравнения равны $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Иногда приходится находить значение выражений, зависящих от корней квадратного уравнения. Если эти выражения удастся выразить через сумму и произведение корней, то их значения можно найти пользуясь теоремой Виета.

Пример 2. Дано квадратное уравнение $-3x^2 + 5x - 1 = 0$.

1) Найти разность квадратов его корней.

2) Определить знаки его корней.

3) Составить квадратное уравнение, корни которого равны значениям арифметических квадратных корней из корней данного.

Решение. 1) Пусть x_1 и x_2 — корни данного квадратного уравнения. По теореме Виета имеем: $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$. Требуется найти значение выра-

жения $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \frac{5}{3}(x_1 - x_2)$.

Так как $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$, то

$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{13}}{3}$ или $x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{13}}{3}$. Следовательно,

$$x_1^2 - x_2^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{5\sqrt{13}}{9}, \text{ или } x_1^2 - x_2^2 = -\frac{5\sqrt{13}}{9}.$$

Понятно, почему мы получили неоднозначный ответ: с самого начала мы не определили, какой из корней считать первым, а какой — вторым.

2) Так как $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$, то есть произведение корней данного уравнения является

положительным числом, то корни имеют одинаковые знаки, а именно, они положительны, ибо $-\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$, то есть их сумма является положительным числом.

3) Пусть корни искомого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равны y_1 и y_2 . По условию, $y_1 = \sqrt{x_1}$, $y_2 = \sqrt{x_2}$ (заметим, что эти выражения имеют смысл, так как корни являются положительными числами). Для решения задачи нужно найти p и q . Применив теорему Виета и воспользовавшись ходом выполнения задания 1), получим:

$$q = y_1 y_2 = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{\frac{1}{3}}; \quad p = -(y_1 + y_2) = -(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2});$$

$$p^2 = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = \frac{5}{3} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Поскольку p — отрицательное число, то $p = -\sqrt{\frac{5}{3} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Следовательно,

искомое уравнение имеет вид $x^2 - \sqrt{\frac{5}{3} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}}x + \sqrt{\frac{1}{3}} = 0$. Попробуйте составить

это уравнение, непосредственно вычисляя $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $\sqrt{x_1 x_2}$.

Ответ: 1) $\frac{5\sqrt{13}}{9}$, или $-\frac{5\sqrt{13}}{9}$; 2) положительны; 3) $x^2 - \sqrt{\frac{5}{3} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}}x + \sqrt{\frac{1}{3}} = 0$.

Во втором задании примера 2 определялись знаки корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по его коэффициентам a , b и c . Приведем в удобной форме необходимые и достаточные условия того, чтобы квадратное уравнение имело положительные корни, отрицательные корни, корни разных знаков.

Информация о корнях	Условия
Два положительных корня	$D > 0, ab < 0, ac > 0$
Два отрицательных корня	$D > 0, ab > 0, ac > 0$
Два корня разных знаков	$ac < 0$

Один корень	$D = 0$
Один отрицательный корень	$D = 0, ab > 0, ac > 0$
Один положительный корень	$D = 0, ab < 0, ac > 0$

Во всех строках таблицы, кроме третьей, приводятся определенные требования к дискриминанту, обеспечивающие наличие корней. Обращаем внимание на то, что условие $ac < 0$ в третьей строке обеспечивает положительность дискриминанта, а потому и существование корней квадратного уравнения.

Замечание. В приведенных рассуждениях использовалось геометрическое толкование корней квадратного уравнения: количество корней совпадает с количеством точек, их изображающих. Предлагаем самостоятельно сформулировать соответствующие условия для алгебраического толкования корней квадратного уравнения, при котором наличие одного корня означает “совпадение” двух корней. При этом толковании в области вещественных чисел квадратное уравнение или имеет два корня, или не имеет их вообще.

Пример 3. Определить знаки корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ в зависимости от значений параметра a .

Решение. Если $a = 0$, то уравнение становится линейным, корень которого равен $-\frac{5}{3}$. Если $a \neq 0$, то дискриминант квадратного уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен $9 + 20a$. Используя результаты, содержащиеся в таблице, приведенной выше, можно сделать такие выводы: при $a < -\frac{9}{20}$ уравнение корней не имеет; при $a = -\frac{9}{20}$ оно имеет один отрицательный корень; при $-\frac{9}{20} < a < 0$ оно имеет два отрицательных корня; при $a > 0$ его корни имеют разные знаки. Напомним, что при $a = 0$ оно имеет один отрицательный корень. Рекомендуем самостоятельно провести все рассуждения, которые привели к таким выводам. ■

На теореме Виета основано решение целого класса уравнений.

Пример 4. Решить уравнение $415x^2 + 1367x + 952 = 0$.

Решение. Решение этого уравнения по формулам корней квадратного уравнения приводит к громоздким вычислениям. Однако если заметить, что $415 - 1367 + 952 = 0$, то есть что $x = -1$ является корнем уравнения, то второй корень находится по теореме Виета. Так как $x_1 x_2 = \frac{952}{415}$, то $x_2 = -\frac{952}{415}$.

Ответ: $-\frac{952}{415}, -1$.

Замечание. Если $a + b + c = 0$, то 1 является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если же $a - b + c = 0$, то -1 — корень этого уравнения. Иногда целесообразно сразу проверить, не являются ли числа 1 и -1 корнями квадратного уравнения. При положительном ответе второй корень находится легко с применением теоремы Виета. Аналогично решается, например, уравнение $2x^2 + (1 - \sqrt{5})x - 3 + \sqrt{5} = 0$. Его корни 1 и $\frac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

С помощью теоремы Виета можно получить разложение квадратного трёхчлена с неотрицательным дискриминантом на линейные множители. Если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то понятно, что такой квадратный трёхчлен не может быть разложен на линейные множители, ибо в противном случае нули линейных множителей были бы корнями уравнения.

Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители позволяет:

- разлагать многочлены (не только квадратные трёхчлены) на множители;
- решать алгебраические уравнения, неравенства, их системы разложением на множители.

Пример 5. Разложить на множители:

1) $3a^2 + 7ab - 6b^2$, $b \neq 0$; 2) $3a^2 + 7ab + 6b^2$, $b \neq 0$.

Решение. 1) *Первый способ.* Будем рассматривать данное выражение как квадратный трёхчлен относительно a , считая b параметром. Тогда его дискри-

минант равняется $49b^2 + 72b^2 = 121b^2$, а корни — $\frac{-7b-11b}{6} = -3b$,
 $\frac{-7b+11b}{6} = \frac{2}{3}b$. Поэтому $3a^2 + 7ab - 6b^2 = 3(a + 3b)\left(a - \frac{2}{3}b\right) = (a + 3b)(3a - 2b)$.

Второй способ. Имеем: $3a^2 + 7ab - 6b^2 = b^2\left(3\frac{a^2}{b^2} + 7\frac{a}{b} - 6\right)$. Обозначим $\frac{a}{b}$

через t и применим разложение $3t^2 + 7t - 6 = (t + 3)(2t - 2)$. Тогда получим:

$$3a^2 + 7ab - 6b^2 = b^2\left(\frac{a}{b} + 3\right)\left(3\frac{a}{b} - 2\right) = (a + 3b)(3a - 2b).$$

2) Рассуждая аналогично решению предыдущего задания, придем к выводу, что дискриминант квадратного трехчлена относительно a равен $-23b^2$, поэтому при $b \neq 0$ он корней не имеет и на множители не разлагается.

Ответ: 1) $(a + 3b)(3a - 2b)$; 2) не разлагается.

Пример 6. Разложить на множители $(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$.

Решение. Данное выражение можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно любой переменной, входящей в него. Сгруппировав его члены и расположив их по степеням x , получим:
 $x^2(y + z) + x(2yz + y^2 + z^2) + (y^2z + yz^2)$.

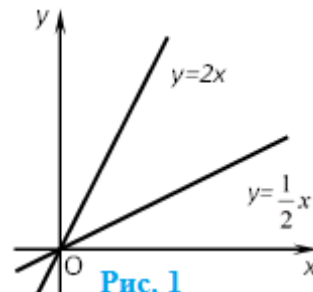
Вынося общий множитель $y + z$ за скобки, будем иметь:
 $(y + z)(x^2 + x(y + z) + yz)$. Квадратный трехчлен $x^2 + x(y + z) + yz$ имеет корни:
 $x_1 = -y$, $x_2 = -z$ (проверьте это!). Поэтому $x^2 + x(y + z) + yz = (x + y)(x + z)$.

Ответ: $(y + z)(x + y)(x + z)$.

Рассмотрим задачу на построение изображения фигуры, координаты точек которой удовлетворяют уравнению с двумя переменными, воспользовавшись разложением квадратного трехчлена на линейные множители.

Пример 7. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$.

Решение. Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трёхчлен относительно y , считая x параметром. Его корни равны $y_1 = \frac{1}{2}x$, $y_2 = 2x$ (рекомендуем убедиться в этом самостоятельно). Разложив левую часть уравнения на множители, получим $\left(y - \frac{1}{2}x\right)(y - 2x) = 0$. Искомое множество является объединением двух прямых с уравнениями $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ (рис. 1). ■



В ряде задач умение увидеть в выражении квадратный трёхчлен, умение воспользоваться его свойствами помогает, как и в предыдущем примере, решить их.

Пример 8. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^2 - xy - y^2 - 4x + y - 7 = 0, \\ 2x^2 - 5xy - 3y^2 + 7y - 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Традиционный приём решения подобных систем состоит в преобразовании системы. Пытаются подобрать такие коэффициенты, что после умножения на них обеих частей уравнений и сложения одно из неизвестных исключается. Но, во-первых, это не всегда можно сделать, а во-вторых, даже если и можно, то не всегда легко. Можно попытаться, рассматривая левые части уравнений как квадратные трёхчлены относительно одной из переменных, выразить одно из неизвестных через другое. Этот приём приведёт к цели, если дискриминант квадратного трёхчлена будет полным квадратом. Придётся проверить в худшем случае четыре возможности: левую часть каждого уравнения можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно x или y .

Для данной системы к успеху приводит рассмотрение левой части второго уравнения как квадратного трёхчлена относительно x : $ax^2 + bx + c$. Здесь $a = 2$, $b = -5y$, $c = -3y^2 + 7y - 2$. Его дискриминант равен

$$(5y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3y^2 + 7y - 2) = 49y^2 - 56y + 16 = (7y - 4)^2.$$

Следовательно, его корни $x_1 = 3y - 1$, $x_2 = -0,5y + 1$ (проверьте это, учитывая, что $\sqrt{(7y-4)^2} = |7y-4|$). Второе уравнение можно переписать в виде $(x - 3y + 1)(2x + y - 2) = 0$. Данная система распадается на две:

$$\begin{cases} x = 3y - 1, \\ 3x^2 - xy - y^2 - 4x + y - 7 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -0,5y + 1, \\ 3x^2 - xy - y^2 - 4x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, получим четыре решения исходной системы.

Ответ: $(-1; 0), \left(\frac{61}{23}; \frac{28}{23}\right), (-3; 8), (3; -4)$.

2. Свойства квадратичной функции

Квадратичной функцией называется функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b и c — некоторые числа, x — переменная. Если $a = 0$, то функция является линейной. В дальнейшем, если функция $y = ax^2 + bx + c$ названа квадратичной, то предполагается, что $a \neq 0$.

Основные свойства квадратичной функции можно получить из ее записи в виде $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, которую называют **выделением полного квадрата**. Из этой формулы вытекают основные свойства квадратичной функции, приведенные в следующей таблице.

Название свойства	$a > 0$	$a < 0$
Область определения	Все действительные числа	Все действительные числа
Промежутки возрастания	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$
Промежутки убывания	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Нули функции	Если $D > 0$, то $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$; если $D < 0$, то нулей нет.	
Наибольшее значение	Нет	$\frac{4ac - b^2}{4a}$
Наименьшее значение	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	Нет
Множество значений	$\left[\frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty \right)$	$\left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$
Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при $x \neq -\frac{b}{2a}$ если $D < 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при $x \in \mathbf{R}$	Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; если $D \leq 0$, то функция положительных значений не принимает
Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; если $D \leq 0$, то функция отрицательных значений не принимает	Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при $x \neq -\frac{b}{2a}$; если $D < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при $x \in \mathbf{R}$

Поясним некоторые утверждения, содержащиеся в приведенной таблице.

При $a > 0$ наименьшее значение функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает в точке

$x_0 = -\frac{b}{2a}$ и оно равно $\frac{4ac - b^2}{4a}$, ведь в равенстве $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ вто-

рое слагаемое является постоянным, а первое — неотрицательным при всех значениях x . Полезно отметить, что если x_1 и x_2 — нули квадратичной функции и $x_1 \neq x_2$, то точка $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ является абсциссой вершины параболы и серединой отрезка $(x_1; x_2)$. Наибольшего значения квадратичная функция при $a > 0$ не имеет, поскольку с ростом x первое слагаемое неограниченно растет.

Из свойств функции $y = x^2$ и из формулы $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ вытекает, что при $a > 0$ квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ возрастает при $x \geq -\frac{b}{2a}$ и убывает при $x \leq -\frac{b}{2a}$. Это значит, что если $a > 0$ и $x_1 < x_2$ — нули квадратичной функции, то x_1 лежит на промежутке убывания функции, а x_2 — на промежутке возрастания.

Промежутки знакопостоянства находим из разложения квадратного трехчлена на линейные множители. Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. При $a > 0$ квадратичная функция принимает положительные значения, если $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, то есть когда множители имеют одинаковые знаки: при $x < x_1$ (оба множителя отрицательны) или при $x > x_2$ (оба множителя положительны).

Рекомендуем самостоятельно установить остальные свойства квадратичной функции.

Формула $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ позволяет, исходя из графика функции $y = x^2$ (параболы), построить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Он получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль оси абсцисс на $\left| -\frac{b}{2a} \right|$ единиц, сжатием к оси x в a раз, если $a > 1$ (или растяжением от оси x в a раз, если $0 < a < 1$), сдвигом вдоль оси ординат на $\left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right|$. Направление переносов

зависит от знаков чисел $-\frac{b}{2a}$ и $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Следовательно, графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Ее вершина лежит в точке $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, а ее ветви направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$. Если она пересекает ось абсцисс, то точками пересечения являются точки $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Ось ординат парабола всегда пересекает в точке $(0; c)$.

Пример 9. Дана квадратичная функция $y = -2x^2 - 3x + 2$.

- 1) Построить её график.
- 2) Найти её наибольшее и наименьшее значения.
- 3) При каких значениях x её график расположен выше оси абсцисс?

Решение. 1) Рассмотрим два способа построения графика. Один основан на использовании геометрических преобразований, другой — сводится к построению графика по характерным точкам на основании её свойств.

Выделим полный квадрат из данного трёхчлена. Соответствующую формулу запоминать не обязательно, целесообразнее соответствующие преобразования выполнять для каждого квадратного трёхчлена. Имеем:

$$\begin{aligned} -2x^2 - 3x + 2 &= -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) = -2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 1\right) = -2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) = \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}. \end{aligned}$$

График данной функции получается из графика функции $y = 2x^2$ симметричным отображением относительно оси абсцисс, сдвигом вдоль оси абсцисс на $\frac{3}{4}$ единиц в отрицательном направлении оси абсцисс и сдвигом на $\frac{25}{8}$ единиц вдоль оси ординат в положительном направлении (рис. 2, а - г).

Другими словами, построение графика осуществим по такой схеме:

$$y = x^2 \rightarrow y = 2x^2 \rightarrow y = -2x^2 \rightarrow y = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow y = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}.$$

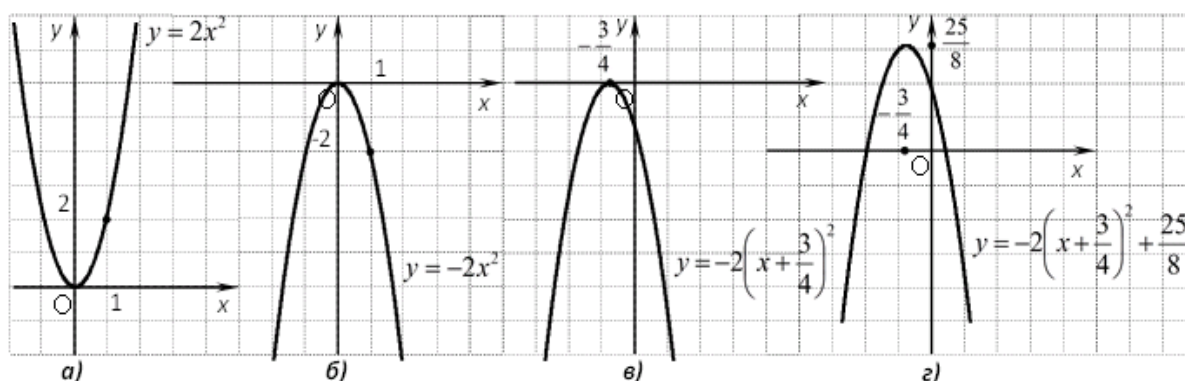


Рис. 2

Построим график той же квадратичной функции по характерным точкам (вершина параболы, точки пересечения с осями), пользуясь её свойствами. Абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ вычисляется по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$. В

нашем случае она равна $-\frac{-3}{2 \cdot (-2)} = -\frac{3}{4}$. Ординату вершины найдём, вычислив

значение квадратичной функции при $x = -\frac{3}{4}$: $y\left(-\frac{3}{4}\right) = -2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = \frac{25}{8}$.

Итак, вершина параболы находится в точке $\left(-\frac{3}{4}; \frac{25}{8}\right)$. Её ветви направлены вниз.

Так как нули данной квадратичной функции равны -2 и $0,5$, то парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-2; 0)$ и $(0,5; 0)$. Ось ординат парабола пересекает в точке $(0; 2)$. По этим данным можно построить эскиз графика. Для его уточнения можно построить ещё несколько точек, вычисляя значения квадратичной функции: $y(1) = -3$, $y(-1) = 3$ (рис. 3).

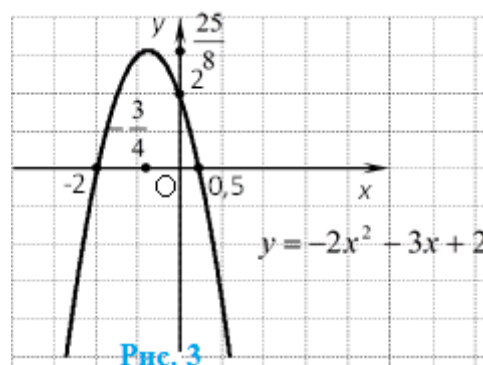


Рис. 3

2) Наименьшего значения квадратичной функции не существует, наибольшее её значение равно $\frac{25}{8}$, его функция принимает при $x = -\frac{3}{4}$.

3) Из графика находим, что парабола расположена выше оси абсцисс при $-2 < x < 0,5$.

Ответ: 1) Рис. 2 г) или рис. 3; 2) наименьшего значения не существует, наибольшее равно $\frac{25}{8}$; 3) $(-2; 0,5)$.

Как и для других классов функций, для квадратичных функций важными являются задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Пример 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции, если они существуют:

1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = x^2 - 7x + 10, x \in [1; 3]$; 3) $y = x^2 - 7x + 10, x \in (1; 3)$;

4) $y = x^2 - 7x + 10, x \in [4; 6]$; 5) $y = x^2 - 7x + 10, x \in [0; 6]$.

Решение. Нужно найти наибольшее и наименьшее значения пяти *различных* функций, так как функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ считают равными, если совпадают их области определения и в каждой точке области определения совпадают значения функций. В примере 10 все функции имеют разные области определения.

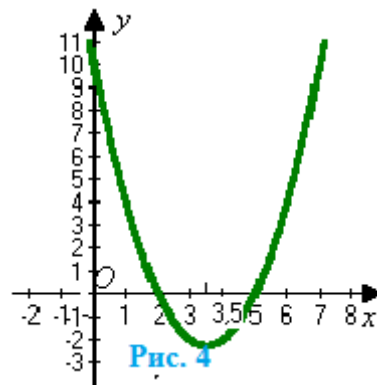
1) Квадратичная функция $y = x^2 - 7x + 10$ наименьшее значение принимает при $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2} = 3,5$ и оно равно $3,5^2 - 7 \cdot 3,5 + 10 = -2,25$. Наибольшего значения она не имеет.

2) Функция $y = x^2 - 7x + 10, x \in [1; 3]$ убывает в своей области определения, потому наибольшее значение она принимает на левом конце промежутка $[1; 3]$, а наименьшее — на правом: $y_{\text{наим.}} = y(3) = -2, y_{\text{наиб.}} = y(1) = 4$.

3) Функция $y = x^2 - 7x + 10, x \in (1; 3)$ тоже убывает в своей области определения, но ее областью определения является интервал $(1; 3)$, он не имеет концов, и для произвольного значения $x_0 \in (1; 3)$ значения функции на промежутке $(x_0; 3)$ меньше, чем в точке x_0 , а на промежутке $(1; x_0)$ — больше. Поэтому данная функция не принимает в точке x_0 ни наибольшего, ни наименьшего значения.

4) Функция $y = x^2 - 7x + 10$, $x \in [4; 6]$ является возрастающей в своей области определения, поэтому наибольшее значение она принимает на правом конце промежутка $[4; 6]$, а наименьшее — на левом: $y_{\text{наим.}} = y(4) = -2$, $y_{\text{наиб.}} = y(6) = 4$.

5) Очевидно, что своё наименьшее значение функция $y = x^2 - 7x + 10$ принимает в точке $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2} = 3,5$ — абсциссе вершины. Оно равно $y(x_0) = -2,25$. Наибольшее значение — на одном из концов отрезка $[0; 6]$: $y(0) = 10$, $y(6) = 4$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 10. Эти результаты можно получить из графика (рис. 4) или проиллюстрировать на нем.



Ответ: 1) Не имеет и $-2,25$; 2) 4 и -2 ; 3) не имеет; 4) 4 и -2 ; 5) 10 и $-2,25$.

Рассмотрение графика квадратичной функции дает один из способов решения квадратных неравенств. Он вытекает из сущности графической иллюстрации решения неравенств $f(x) > b$, $f(x) < b$. На координатной плоскости строят эскиз графика функции $y = f(x)$ и прямую $y = b$. Тогда решениями неравенства $f(x) > b$ будут все те значения x , для которых точки $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ находятся выше прямой $y = b$, а решениями неравенства $f(x) < b$ — все те значения x , для которых они находятся ниже этой прямой.

Фактически решения неравенств $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ содержатся в последних двух строках таблицы в предыдущем пункте данного пособия. Но совсем необязательно помнить решения для всех комбинаций знаков D и a . Важно лишь уметь правильно строить эскиз графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

Пример 11. Решить неравенство $-2x^2 + 7x - 5 > 0$.

Решение. Так как дискриминант $D = 9 > 0$, то квадратный трехчлен $-2x^2 + 7x - 5$ имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2,5$. Поэтому график функции $y = -2x^2 + 7x - 5$ пересекает ось x в этих точках, а поскольку $a = -2 < 0$, то график имеет вид, как на рис. 5. Поэтому решениями неравенства являются все x

из промежутка $1 < x < 2,5$.

Ответ: $1 < x < 2,5$.

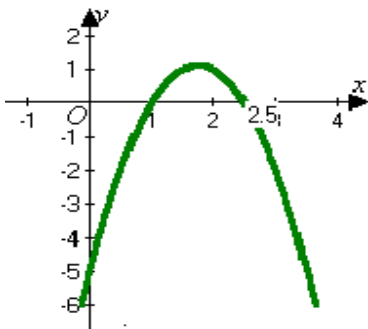


Рис. 5

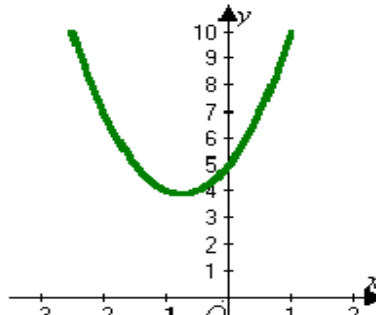


Рис. 6

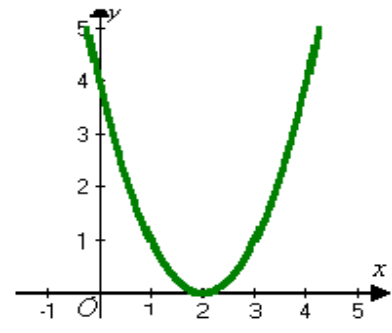


Рис. 7

Пример 12. Решить неравенство $2x^2 + 3x + 5 < 0$.

Решение. Так как $D = 9 - 40 < 0$, то график функции $y = 2x^2 + 3x + 5$ имеет вид, как на рис. 6. Ветви параболы направлены вверх, график не пересекает ось x и лежит в верхней полуплоскости $y > 0$, потому неравенство не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 13. Решить неравенство $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Решение. Так как $D = 0$, то график функции $y = x^2 - 4x + 4$ имеет вид, как на рис. 7. Ветви параболы направлены вверх, график касается оси x в точке $x = 2$ и лежит в верхней полуплоскости $y > 0$, поэтому неравенству удовлетворяют все x , кроме $x = 2$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Отметим, что существует другой способ решения квадратных неравенств с положительным дискриминантом — это метод интервалов.

Важное место среди функций занимают так называемые кусочные функции, то есть функции, которые на различных промежутках задаются различ-

ными формулами, например
$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ x - x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ -2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Именно кусочные функции во многих случаях являются математическими моделями реальных ситуаций.

Пример 14. Кабина лифта поднимается в течение первых 4 с равноускоренно, достигая скорости 4 м/с. С этой скоростью кабина движется в течение 8 с, а последние 3 с она движется равнозамедленно.

- 1) Записать закон изменения ее скорости.
- 2) Записать закон движения кабины.
- 3) На какой высоте окажется кабина через 15 с?
- 4) Построить график зависимости скорости от времени.
- 5) Построить график закона движения кабины.

Решение. Идея решения первых двух заданий заключается в следующем. Записываем общий вид зависимости скорости (или координаты тела) от времени. Он содержит неизвестные параметры, которые находим по некоторым начальным данным, составляя уравнение или систему уравнений.

Рассмотрим движение кабины на трех промежутках времени.

1) а) На промежутке времени $[0; 4]$ скорость изменялась линейно по закону $v(t) = at + b$. По условию $v(0) = 0$, $v(4) = 4$. Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = b, \\ 4 = 4a + b. \end{cases}$$

Отсюда $a = 1$, $b = 0$. Следовательно, $v(t) = t$, то есть ускорение движения на этом промежутке времени равнялось 1 м/с^2 .

б) На промежутке времени $[4; 12]$ скорость была постоянной и равнялась 4 м/с : $v(t) = 4$.

в) Так как на промежутке времени $[12; 15]$ движение кабины было равнозамедленным, то скорость изменялась линейно. Пусть закон изменения скорости имел вид $v(t) = at + b$. Известно, что $v(12) = 4$, $v(15) = 0$. Имеем систему уравнений относительно a и b :

$$\begin{cases} 4 = 12a + b, \\ 0 = 15a + b. \end{cases}$$

Отсюда $a = -\frac{4}{3}$, $b = 20$. Следовательно, $v(t) = -\frac{4}{3}t + 20$. Ускорение на этом

промежутке времени равнялось $a = -\frac{4}{3}$ м/с². Следовательно,

$$v(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t \leq 4, \\ 4, & \text{если } 4 \leq t \leq 12, \\ -\frac{4}{3}t + 20, & \text{если } 12 \leq t \leq 15. \end{cases}$$

Таким образом, скорость движения кабины задается кусочной функцией.

2) Закон равнопеременного движения тела имеет вид: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$,

где x_0 — начальная координата тела (в момент времени $t = 0$), v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

а) Так как на промежутке времени $[0; 4]$ движение было равноускоренным с ускорением $a = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, то $x = \frac{t^2}{2}$. Заметим, что $x(4) = 8$.

б) На промежутке времени $[4; 12]$ движение было равномерным, $x = k + v_0 t$, $v_0 = 4$. Поскольку $x(4) = 8$, то $8 = k + 4 \cdot 4$, $k = -8$, $x = 4t - 8$, $x(12) = 40$.

в) Наконец, на промежутке времени $[12; 15]$ движение было равнозамедленным с ускорением $a = -\frac{4}{3}$, закон движения имеет вид $x = x_0 + v_0 t - \frac{2t^2}{3}$.

Имеем данные о положении кабины в момент времени $t = 12$: $x(12) = 40$.

Если бы по этому закону кабина двигалась с самого начала, то из закона

изменения скорости $v(t) = -\frac{4}{3}t + 20$ на этом промежутке времени вытекает, что

$v_0 = v(0) = 20$. Из того, что $x(12) = 40$, делаем вывод: $40 = x_0 + 20 \cdot 12 - \frac{2}{3} \cdot 12^2$.

Отсюда $x_0 = -104$, $x(t) = -104 + 20t - \frac{2t^2}{3}$.

$$\text{Имеем } x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{если } 0 \leq t \leq 4, \\ 4t - 8, & \text{если } 4 \leq t \leq 12, \\ -\frac{2t^2}{3} + 20t - 104, & \text{если } 12 \leq t \leq 15. \end{cases}$$

Закон движения тоже задается кусочной функцией.

3) Так как

$$x(15) = -104 + 20 \cdot 15 - \frac{2 \cdot 15^2}{3} = 46, \text{ то через 15}$$

с cabina лифта окажется на высоте 46 м.

4) График скорости изображен на рис. 8.

5) График закона движения изображен на рис.

9.

Ответ: 1)

$$v(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t \leq 4, \\ 4, & \text{если } 4 \leq t \leq 12, \\ -\frac{4}{3}t + 20, & \text{если } 12 \leq t \leq 15. \end{cases}$$

$$2) x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{если } 0 \leq t \leq 4, \\ 4t - 8, & \text{если } 4 \leq t \leq 12, \\ -\frac{2t^2}{3} + 20t - 104, & \text{если } 12 \leq t \leq 15. \end{cases}$$

3) 46 м; 4) рис. 8; 5) рис. 9.

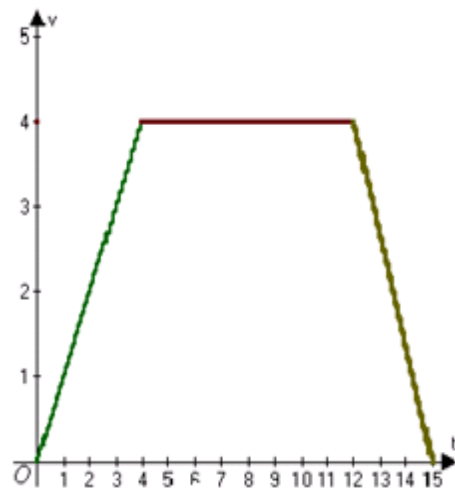


Рис. 8

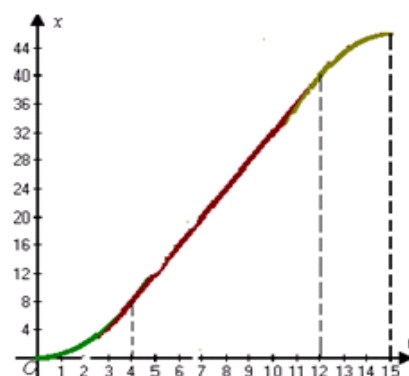


Рис. 9

Пример 15. Построить график функции :

1) $y = (x + 1)|x - 1|$; 2) $y = 2x^2 - |3x - 1|$; 3) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

Решение. Данные функции содержат переменную под знаком модуля. Будем избавляться от знака модуля, рассматривая промежутки, на которых выражение под знаком модуля сохраняет знак. В результате получим кусочные функции.

1)Так как

$$(x+1)|x-1| = \begin{cases} (x+1)(1-x) = 1-x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ (x+1)(x-1) = x^2-1, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

то необходимо построить графики функций $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$ и оставить те их части, которые соответствуют указанным промежуткам (рис. 10).

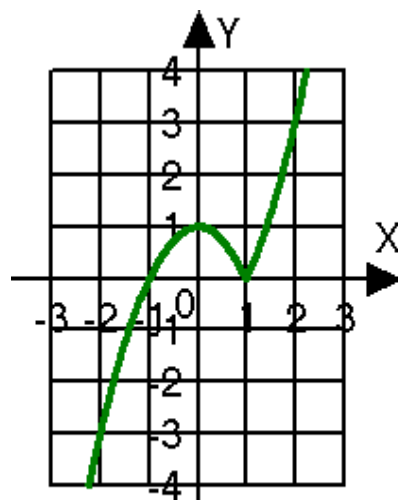


Рис. 10

2) Аналогично имеем:

$$2x^2 - |3x - 1| = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1, & \text{если } x \leq \frac{1}{3}, \\ 2x^2 - 3x + 1, & \text{если } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

График изображен на рис. 11.

3) Так как $|x^2 - 2|x| - 3| = ||x|^2 - 2|x| - 3|$, то график заданной функции можно построить с помощью графика функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (рис. 12 а).

Сначала построим график функции $y = f(|x|)$. Для этого построим график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$ и симметрично отобразим его относительно оси ординат левую полуплоскость (рис. 12 б).

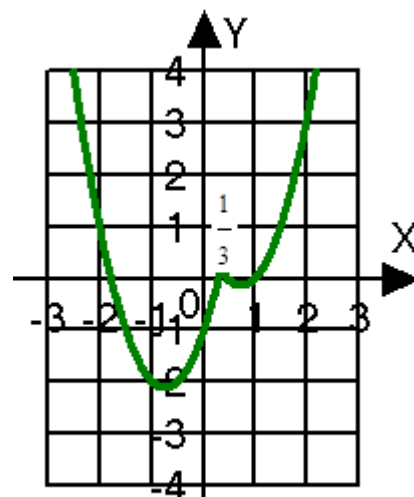


Рис. 11

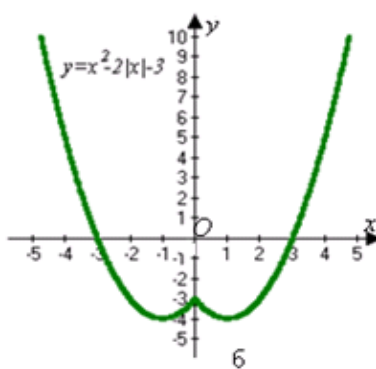
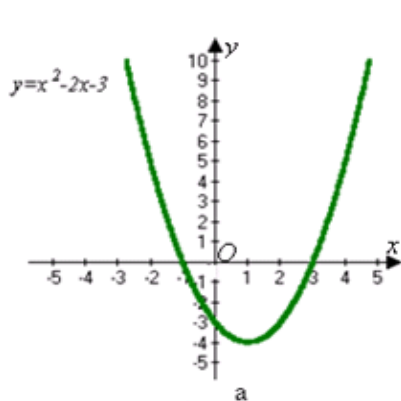
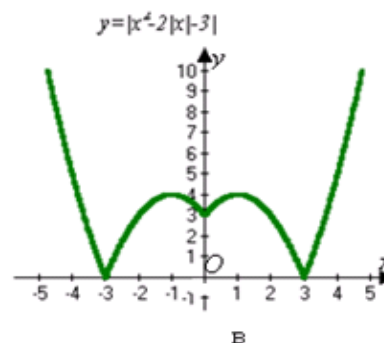


Рис. 12



Для построения графика функции $y = |f(|x|)|$ часть графика функции $y = f(|x|)$, лежащую выше оси абсцисс, оставляем без изменения, а часть, лежащую под осью абсцисс, отображаем симметрично относительно этой оси (рис. 12 в). ■

Пример 16. Построить график функции $y = \frac{x^3 - x^2}{|x - 1|}$.

Решение. Областью определения данной функции являются все вещественные числа, кроме $x = 1$. Так как $\frac{x^3 - x^2}{|x - 1|} = \frac{x^2(x - 1)}{|x - 1|} = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1, \end{cases}$ то

функция в точке $x = 1$ делает скачок от $y = -1$ до $y = 1$. Необходимо построить графики функций $y = -x^2$ и $y = x^2$ и оставить те их части, которые соответствуют указанным промежуткам (рис. 13). Обращаем еще раз ваше внимание на то, что в точке $x = 1$ функция не определена (на графике «выколоты» соответствующие точки). ■

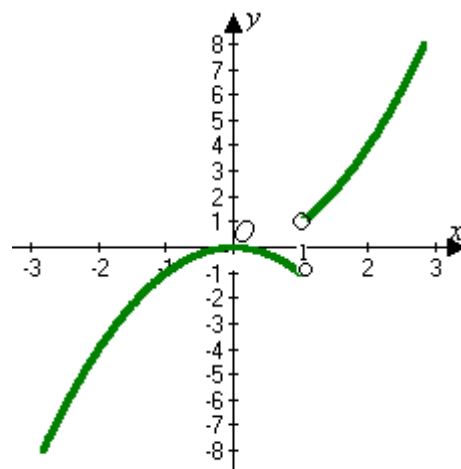


Рис. 13

Функции, графики которых изображены на рис. 10, 11, 12 б, 12 в, 13, являются кусочными. Обращаем внимание на то, что графики на всех рисунках, кроме последнего, изображаются непрерывными линиями, причем соответствующие функции определены во всех точках координатной прямой, а график функции на рис. 13 разрывается, делает скачок от -1 до 1 . Соответствующая функция не определена в точке $x = 1$.

График квадратичной функции позволяет решать задачи, которые на первый взгляд с графиком не связаны.

Пример 17. Доказать, что функция $f(x) = x(x - 2) + a(x - 1)(x - 3)$ при любом значении параметра a имеет нуль.

Решение. Заданную функцию $f(x)$ можно представить в виде: $f(x) = (a + 1)x^2 - (4a + 2)x + 3a$. Если $a = -1$, то она является линейной функцией $y = 2x - 3$, имеющей нуль $x = \frac{3}{2}$. Если $a \neq -1$, то функция является квадратичной.

Дискриминант соответствующего квадратного уравнения, разделённый на 4, равен: $(2a+1)^2 - 3a(a+1) = a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Он положителен при всех значениях a , поэтому функция $f(x)$ имеет нули при всех значениях a .

Рассмотрим другой, менее громоздкий способ решения данной задачи. Вычислим значение $f(x)$ в точках $x = 1$ и $x = 3$. Получим: $f(1) = 1 \cdot (1 - 2) = -1$; $f(3) = 3 \cdot (3 - 2) = 3$. Оказалось, что при всех значениях a график функции $f(x)$ содержит точку $(1; -1)$, лежащую ниже оси абсцисс, и точку $(3; 3)$, лежащую выше оси абсцисс. Следовательно, график функции пересекает ось абсцисс. Итак, многочлен $f(x)$ имеет корень при любом значении a . Рекомендуем проанализировать, почему были выбраны точки $x = 1$ и $x = 3$. ■

Приведенный пример иллюстрирует полезность обращения в процессе решения задач к графической иллюстрации ситуации (даже не строя графика).

Пример 18. Дана квадратичная функция $y = (a - 1)x^2 + x - 2$. Указать все значения a , при которых:

- 1) один из нулей её втрое больше второго;
- 2) она принимает отрицательные значения при всех значениях x ;
- 3) она имеет два положительных нуля.

Решение. 1) Пусть x_1 и x_2 — нули данной квадратичной функции. Так как $a - 1 \neq 0$, то по теореме Виета имеем: $x_1 + x_2 = -\frac{1}{a-1}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{a-1}$. По условию $x_1 = 3x_2$. Следовательно, $4x_2 = \frac{1}{1-a}$, а $3x_2^2 = \frac{2}{1-a}$. Отсюда $\frac{3}{16} \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{2}{1-a}$, или $\frac{1}{1-a} = \frac{32}{3}$, или $a = \frac{29}{32}$. Осталось убедиться, что при найденном значении a нули данной функции существуют:

$$D = 1 + 8 \left(\frac{29}{32} - 1 \right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} > 0.$$

2) В зависимости от знака старшего коэффициента и знака дискриминанта D соответствующего квадратного уравнения график функции может занимать

различные положения на координатной плоскости. Анализируя все эти расположения, приходим к выводу, что квадратичная функция принимает отрицательные значения при всех значениях x тогда и только тогда, когда дискриминант отрицателен (график функции не имеет общих точек с осью абсцисс) и старший коэффициент отрицателен (ветви параболы направлены вниз), т. е. если

$$\text{ли } \begin{cases} a-1 < 0, \\ D=1+8(a-1) < 0. \end{cases} \text{ Решая эту систему, получим: } a < \frac{7}{8}.$$

3) Для того, чтобы квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ имела два положительных нуля, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант соответствующего квадратного уравнения был положителен (условие существования двух нулей), выражение $\frac{c}{a}$, равное по теореме Виета произведению корней, должно быть положительно (условие, обеспечивающее одинаковые знаки нулей), выражение $-\frac{b}{a}$, равное сумме корней, должно быть положительным (условие, обеспечивающее положительность нулей). Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 8a-7 > 0, \\ \frac{-2}{a-1} > 0, \\ \frac{1}{1-a} > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > \frac{7}{8}, \\ a-1 < 0, \\ a-1 < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{7}{8} < a < 1.$$

$$\text{Ответ: 1) } \frac{29}{32}; 2) \left(-\infty; \frac{7}{8}\right); 3) \left(\frac{7}{8}; 1\right).$$

Пример 19. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + 2a-3 = 0$ имеет решение. Определить знаки этих корней в зависимости от a .

Решение. Если $a = 2$, то уравнение имеет один корень, равный 0,25. Обращаем внимание на то, что в условии говорится об уравнении, а не о квадратном уравнении. Если $a \neq 2$, то данное уравнение является квадратным, и оно

имеет решение, если $\frac{D}{4} = a^2 - (a-2)(2a-3) = -a^2 + 7a - 6 \geq 0$. Решением этого неравенства является промежуток $[1; 6]$. Если $(a-2)(2a-3) < 0$, то есть если $1,5 < a < 2$, то уравнение имеет корни разных знаков. В остальных случаях корней или нет, или он один, или они одного знака. Отдельно надо рассмотреть случай, если один из корней равен нулю. Выясним, при каких значениях a оба корня положительны. Для этого достаточно решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{4}D = -a^2 + 7a - 6 > 0, \\ (a-2)(2a-3) > 0, \\ 2a(a-2) > 0, \end{cases}$$

откуда $2 < a < 6$. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Ответ. Уравнение имеет решение при $1 \leq a \leq 6$. Если $a = 1$, то уравнение имеет один корень -1 ; если $1 < a < 1,5$, то $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; если $a = 1,5$, то $x_1 < 0$, $x_2 = 0$; если $1,5 < a < 2$, то $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; если $a = 2$, то уравнение имеет один корень $0,25$; если $2 < a < 6$, то $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; если $a = 6$, то уравнение имеет корень $1,5$.

3. Применение квадратичной функции

В этом пункте будут рассматриваться задачи на применение квадратичной функции при решении текстовых задач на наибольшее и наименьшее значения, в частности геометрических, алгебраических задач, связанных с доказательством неравенств, разложением на множители, доказательством тождеств.

Пример 20. Заготовлен материал для изгороди длиной l м. Необходимо этой изгородью огородить прямоугольную площадку, имеющую наибольшую площадь. Каковы должны быть размеры этой площадки?

Решение. Пусть ширина площадки x м. Тогда её длина должна быть равна $\left(\frac{l}{2} - x\right)$ м, и, значит, площадь $S = \left(\frac{l}{2} - x\right)x$ м². Для решения задачи остаётся найти, при каком значении x функция $S = \left(\frac{l}{2} - x\right)x$, $0 < x < \frac{l}{2}$ принимает

наибольшее значение. Можно воспользоваться готовым результатом о том, что квадратный трёхчлен $y = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$ принимает наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$. В нашем случае $a = -1$, $b = 0,5l$ и, следовательно, $-\frac{b}{2a} = -\frac{0,5l}{2 \cdot (-1)} = \frac{l}{4}$. Это значение x принадлежит интервалу $\left(0; \frac{l}{2}\right)$. Поэтому площадь будет наибольшей, если ширина прямоугольника равна $\frac{l}{4}$, тогда и длина площадки равна $\frac{l}{4}$, т. е. когда она будет квадратной. Тот же результат можно получить, преобразовав функцию выделением из неё полного квадрата.

Ответ. $\frac{l}{4} \times \frac{l}{4}$.

Таким образом, доказано утверждение:

Из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Пример 21. Поперечное сечение туннеля представляет собой прямоугольник с примыкающим к нему полукругом. Диаметр полукруга равен основанию прямоугольника. Периметр сечения туннеля должен быть равен $2p$. Какими должны быть размеры сечения, чтобы пропускная способность туннеля была наибольшей?

Решение. Обозначим через x радиус полукруга, образующего верхнюю часть туннеля, и через h — высоту прямоугольной нижней части его (рис. 14).

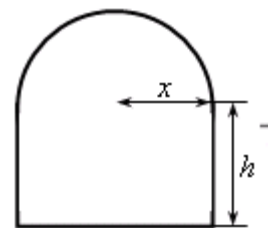


Рис. 14

Тогда $2p = 2x + 2h + \pi x$, откуда $h = p - x - \frac{1}{2}\pi x$. Пло-

щадь сечения туннеля выразится следующим образом:

$$S = 2x \left(p - x - \frac{1}{2}\pi x \right) + \frac{1}{2}\pi x^2, \text{ или } S = -\left(2 + \frac{\pi}{2} \right) x^2 + 2px, 0 < x < \frac{p}{2}.$$

Получили квадратичную функцию. Она при $x_0 = -\frac{2p}{-2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2p}{4+\pi}$,

$\left(\frac{2p}{4+\pi} \in \left(0; \frac{p}{2}\right)\right)$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{2p^2}{4+\pi}$. При этом зна-

чении x_0 имеем $h = \frac{2p}{4+\pi}$, то есть $h = x_0$.

Ответ: радиус полукруга в сечении равен высоте прямоугольника в нём и равен $\frac{2p}{4+\pi} \approx 0,275p$.

Из результатов исследования квадратичной функции на наибольшее и наименьшее значения вытекает следующее полезное следствие.

Произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшего значения тогда, когда эти множители равны.

Доказательство. В самом деле, пусть S — сумма этих двух множителей, x — первый из них и, значит $S - x$ — второй. Произведение рассматриваемых множителей $x(S - x) = -x^2 + Sx$ имеет, по доказанному ранее, наибольшее значение при $x_0 = \frac{S}{2}$, равное $y_0 = \frac{S^2}{4}$. ■

Применим доказанное следствие для решения ещё одной геометрической задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений.

Пример 22. Требуется из круговых секторов данного периметра $2p$ найти такой, площадь которого была бы наибольшей.

Решение. Пусть x — длина дуги сектора. Из условия вытекает, что $0 < x < 2p$. По периметру и длине дуги сектора можно найти радиус (см. рис. 15); он равен $\frac{1}{2}(2p - x)$. Площадь сектора, как известно, равна произведению длины дуги на половину радиуса, поэтому площадь сектора выражается функцией $S = \frac{1}{4}(2p - x)x$.

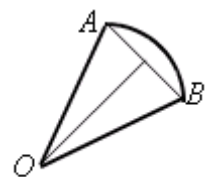


Рис. 15

Воспользуемся доказанным выше следствием. Функция $S = \frac{1}{4}(2p - x)x$ достигает наибольшего значения при том же значении x , что и функция $y = (2p - x)x$, отличающаяся от неё лишь постоянным положительным множителем. А функция $y = (2p - x)x$ представляет собой произведение двух множителей, сумма которых $(2p - x) + x = 2p$ постоянна. Следовательно, наибольшее значение функция $(2p - x)x$ и точно также функция $\frac{1}{4}(2p - x)x$ принимает при условии $(2p - x) = x$, то есть при $x = p$.

Обращаем внимание на то, что $x = p$ принадлежит промежутку $(0; 2p)$.

Ответ: Из всех круговых секторов с данным периметром $2p$ наибольшую площадь, равную $\frac{1}{4}p^2$, имеет сектор, длина дуги которого равна полупериметру, а значит и сумме двух радиусов.

Немало физических зависимостей выражается с помощью квадратичной функции. Например, зависимость координаты тела, движущегося прямолинейно под действием постоянной силы, имеет вид $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$, зависимость кинетической энергии от скорости выражается формулой $W = \frac{mV^2}{2}$, зависимость электрической мощности от тока — формулой $N = RI^2$ и т. д. В электроизмерительных приборах электромагнитной системы угол поворота стрелки пропорционален квадрату силы тока. Шкалы этих приборов называются квадратичными, они неравномерные. Приведём ещё несколько примеров.

1. Вторая космическая скорость у поверхности Земли равна 11,18 км/с. Эту скорость называют также параболической, так как при такой скорости тело будет двигаться вокруг Земли по параболической траектории (орбите). Для $v = 7,9$ км/с орбита — окружность, для $7,9 < v < 11,18$ — эллипс.

2. Тела, брошенные горизонтально или под углом к горизонту, будут двигаться по параболической траектории под действием силы тяжести (рис. 16-17).

3. Тонкая струя, выходящая сбоку из наполненного жидкостью сосуда, принимает форму параболы (рис. 18).

Пример 23. Груз падает с высоты 54 м. Разделить эту высоту на три части так, чтобы на прохождение каждой требовалось одинаковое время.

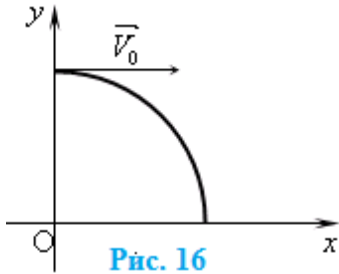


Рис. 16

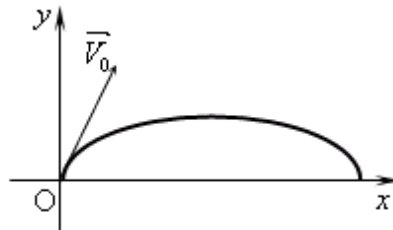


Рис. 17

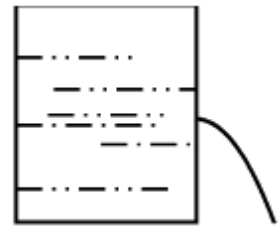


Рис. 18

Решение. Математической моделью свободного падения тела под дей-

ствием силы тяжести является квадратичная функция $h(t) = h_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где h

— высота в момент времени t , м, h_0 — начальная высота, т. е. высота в момент $t = 0$, t — время, с, g — ускорение свободного падения, м/с², v_0 — скорость в момент $t = 0$, м/с. Вначале определим, за сколько времени тело упадет на землю.

Высота h в момент падения груза на землю равна нулю. Следовательно, нужно

решить уравнение $h_0 = \frac{gt^2}{2} + v_0 t$. Предположим, что $v_0 = 0$, то есть что груз упустили, а не бросили. Составим уравнение, пользуясь условием и приближённым

значением $g \approx 10$. Получим $\frac{10t^2}{2} = 54$. Отсюда $t \approx 3,3$ (с).

Требуется высоту 54 м разделить на такие три части, на прохождение каждой из которых потребуется примерно 1,1 с. Вычислим высоту, на которой будет находиться тело через 1, 1 с. Для этого понадобится найти значение

функции $h = h_0 - \frac{gt^2}{2}$ при $t = 1,1$. $h(1,1) = 54 - \frac{10 \cdot 1,1^2}{2} \approx 48$ (м). Точно также подсчи-

таем, на какой высоте будет находиться тело в момент $t = 2,2$:

$$h(2,2) = 54 - \frac{10 \cdot 2,2^2}{2} \approx 30 \text{ (м)}.$$

Итак, на последовательное прохождение высот 6 м ($54 - 48$), 18 м ($48 - 30$) и 30 м понадобится одно и то же время 1,1 с.

График зависимости высоты тела от времени изображён на рис. 19.

Рекомендуем самостоятельно проанализировать решение задачи в случае, когда начальная скорость отлична от нуля, например, равна 1 м/с. ■

Пример 24. Доказать неравенство $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Решение. Переписав данное неравенство в виде $x^2 - x(y+1) + y^2 + 1 - y \geq 0$, заметим, что левая часть представляет собой квадратный трёхчлен относительно x с параметром y . Учитывая, что старший коэффициент положителен (равен 1), для доказательства неравенства достаточно доказать, что дискриминант квадратного трёхчлена не положителен. Так как

$$D = (y+1)^2 - 4(y^2 - y + 1) = -3y^2 + 6y - 3 = -3(y-1)^2 \leq 0,$$

то исходное неравенство доказано. ■

Это неравенство можно было доказать и иначе:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1^2 - xy - x \cdot 1 - y \cdot 1 &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2 \cdot 1^2 - 2xy - 2x \cdot 1 - 2y \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{2}((x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Понятно, что здесь использован искусственный приём, до него ещё нужно додуматься, а применение свойств квадратного трёхчлена увеличивает арсенал общих методов доказательства неравенств.

Пример 25. Найти все значения a , при которых графики функций $y = x^2 + ax + 1$ и $y = x^2 + x + a$ имеют ровно одну общую точку, лежащую: 1) на оси x ; 2) в полуплоскости $y > 0$.

Решение. 1) Если графики данных функций имеют ровно одну общую точку, лежащую на оси x , то одновременно выполняются условия:

$$\begin{cases} y = x^2 + ax + 1, \\ y = x^2 + x + a, \\ y = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x^2 + x + a = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + ax + 1 = x^2 + x + a, \\ x^2 + x + a = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

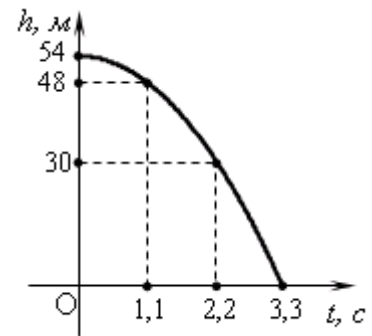


Рис. 19

Из первого уравнения имеем: если $a \neq 1$, то $x = 1$, тогда из второго уравнения получим $a = -2$. Проверка показывает, что при $a = -2$ данные функции имеют ровно одну общую точку $(1; 0)$. Если $a = 1$, то графики данных функций совпадают, но ни одна из их точек не лежит на оси абсцисс.

2) Аналогично решая это задание, получим, что при $a \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$ графики функций имеет ровно одну общую точку. При $a = 1$ графики данных функций совпадают, и все их точки лежат в полуплоскости $y > 0$. Рекомендуем самостоятельно провести подробное решение.

Ответ: 1) $a = -2$; 2) $a \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

Тест для самоконтроля

- Квадратное уравнение $ax^2 + x - b = 0$ имеет корень, равный 1, если...
 А. $-a + b = 1$. Б. $a - b = 1$. В. $a + b = 1$. Г. $a + b = 0$.
- Сколько существует значений параметра a , при которых квадратный трёхчлен $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6$ представляет собой полный квадрат?
 А. Ни одного. Б. Одно. В. Два. Г. Три.
- Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Корни уравнения $a(x-3)^2 + b(x-3) + c = 0$ равны...
 А. $x_1 + 3, x_2 + 3$. Б. $3x_1, 3x_2$. В. $x_1 - 3, x_2 - 3$. Г. $\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{3}x_2$.
- Уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет корней. Сколько корней будет иметь уравнение, полученное из данного увеличением его свободного члена?
 А. Два. Б. Один. В. Ни одного. Г. Однозначного ответа нет.
- Один из корней уравнения $35x^2 - 23x - 12 = 0$ равен 1. Второй его корень равен ...
 А. $-\frac{12}{35}$. Б. $-\frac{23}{35}$. В. $\frac{12}{35}$. Г. $\frac{23}{35}$.
- Сколько существует целых неотрицательных значений c , при которых уравнение $x^2 + cx + 6 = 0$ имеет только целые корни?

А. Одно. Б. Два. В. Три. Г. Четыре.

7. Укажите все значения p , при которых квадратное уравнение $(p-3)x^2 - 2px + 5p = 0$ имеет корни разных знаков.

А. $(-\infty; 0)$. Б. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$. В. $(0; 3)$. Г. $(3; +\infty)$.

8. Какие знаки имеют корни квадратного уравнения $4578x^2 + 3632x + 1029 = 0$?

А. ++. Б. +-. В. --. Г. Ответ отличен от приведенных.

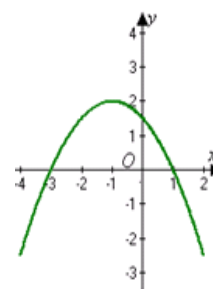
9. Укажите все значения параметра p , при которых квадратное уравнение $x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5 = 0$ имеет корни одинакового знака.

А. $(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$. Б. $(-\infty; 1]$. В. $\left[\frac{5}{9}; +\infty\right)$. Г. $\left[\frac{5}{9}; 1\right] \cup [6; +\infty)$.

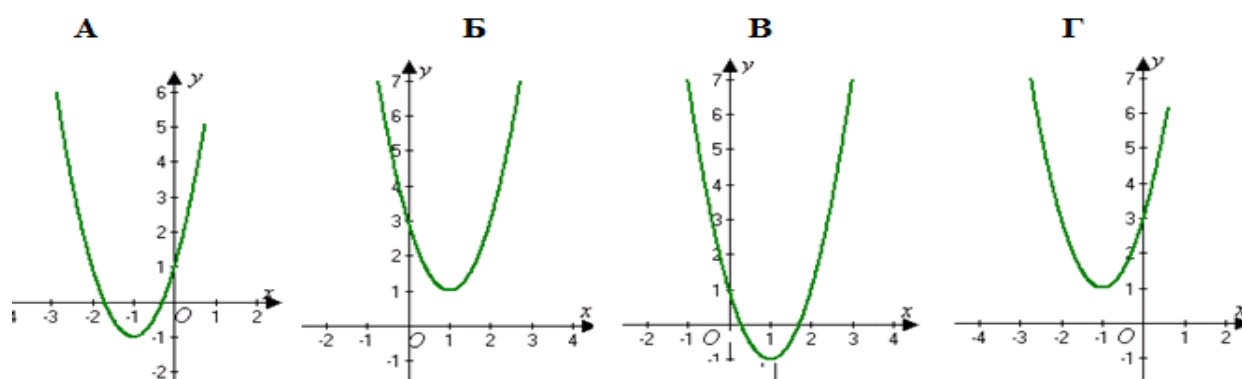
10. На рисунке изображён график функции ...

А. $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$. Б. $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$.

В. $-\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$. Г. $-\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$.



11. На каком из приведенных рисунков изображен график функции $y = 2(x-1)^2 - 1$?



12. При каких условиях график функции $y = ax^2 + bx + c$ полностью расположен в полуплоскости $y < 0$?

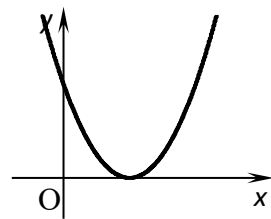
А. $a < 0$. Б. $b < 0, b^2 - 4ac \leq 0$. В. $a < 0, b^2 - 4ac < 0$. Г. $a > 0, b^2 - 4ac < 0$.

13. Какие знаки имеют числа a , b , c , если на рисунке

изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$?

А. $a > 0, b > 0, c > 0$. Б. $a < 0, b > 0, c < 0$.

В. $a > 0, b > 0, c < 0$. Г. $a > 0, b < 0, c > 0$.



14. Укажите все значения параметра a , при которых графики функций $y = x^2 + a$ и $y = -x^2 + 4$ имеют общие точки.

А. $a = 4$. Б. $a > 4$. В. $a < 4$. Г. $a \leq 4$.

15. В каких двух точках достаточно знать значения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, чтобы найти $a - b$?

А. В любых. Б. $x = 0, x = 1$. В. $x = 0, x = -1$. Г. $x = 1, x = -1$.

16. Укажите все значения x , при которых функция $y = -2x^2 + 3x + 5$ возрастает.

А. $(-\infty; -0,75]$. Б. $[-0,75; +\infty)$. В. $[0,75; +\infty)$. Г. $(-\infty; 0,75]$.

17. Сравните значения функции $f(x) = -x^2 + 2x$ в точках $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

А. $f(x_1) > f(x_2)$. Б. $f(x_1) < f(x_2)$. В. $f(x_1) = f(x_2)$. Г. Сравнить невозможно.

18. Найдите наибольшее значение функции $y = -3x^2 + 2x + 5$.

А. $-\frac{16}{3}$. Б. $\frac{1}{3}$. В. $\frac{16}{3}$. Г. $-\frac{1}{3}$.

19. Наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4x + 5$ на отрезке $[3; 4]$ равно ...

А. 5. Б. 8. В. 9. Г. 17.

20. Укажите множество значений функции $y = -2(x - 1)^2 + 3$.

А. $(-\infty; -3)$. Б. $[3; +\infty)$. В. $(-\infty; 3]$. Г. $(-\infty; 1]$.

21. При каком значении a прямая $x = -2$ является осью симметрии параболы $y = ax^2 - (a - 2)x + 1$?

А. $-0,4$. Б. $0,4$. В. $0,8$. Г. $-0,8$.

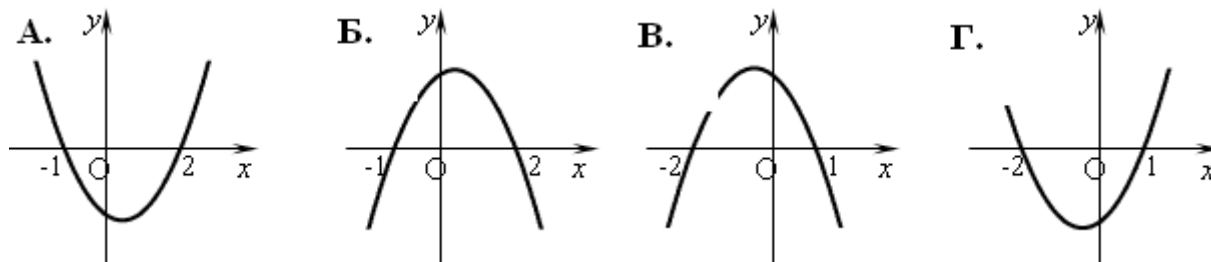
22. На графике функции $y = x^2 + 3x + 3$ найдите точки, у которых абсциссы и ординаты являются противоположными числами.

А. $(-1; 1); (-3; 3)$. Б. $(-1; 1); (3; -3)$. В. $(1; -1); (-3; 3)$. Г. $(1; -1); (3; -3)$.

23. Сколько точек с целыми неотрицательными координатами лежат ниже параболы $y = -x^2 + 8x - 15$?

А. Ни одной. Б. Одна. В. Две. Г. Три.

24. На каком из приведенных рисунков изображен график функции $y = (x - 1)(2 + x)$?



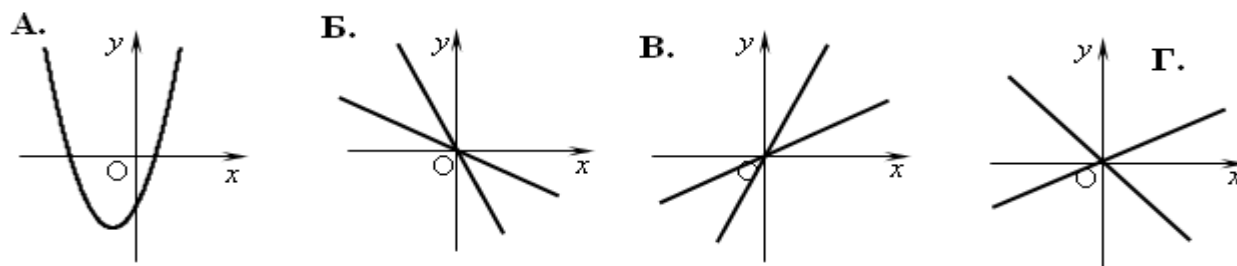
25. Множество всех вершин параболы $y = x^2 - 2ax - 1$ образует...

А. параболу. Б. прямую. В. окружность. Г. гиперболу.

26. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и $a + b + c < 0$. Какие знаки имеют числа a и c ?

А. ++. Б. -+. В. +-. Г. --.

27. На каком рисунке изображено множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - xy - 2y^2 = 0$?



Ответы к заданиям теста для самоконтроля

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
А	В	А	Г	А	Б	В	Г	Г	Б	В	В	Г	Г
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
В	Г	В	В	Б	В	Б	А	Б	Г	А	Г	Г	

Задачи для самостоятельной работы

1. Укажите все значения параметра a , при которых уравнение $(a-1)x^2 + (a+4)x + a+7 = 0$ имеет:

1) корень, равный -1 ; 2) одно решение; 3) два противоположных корня;
4) один из корней, равный нулю; 5) хотя бы один корень; 6) корни разных знаков; 7) два положительных корня; 8) два отрицательных корня?

2. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $2x^2 - 8x - 11 = 0$. Вычислите значение выражения:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 3) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$; 5) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$; 6) $\frac{x_1^4 + x_1 x_2 + x_2^4}{x_1^3 + x_2^3}$.

3. Корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ являются числа x_1 и x_2 . Составьте квадратное уравнение, корнями которого будут числа:

1) $-x_1$ и $-x_2$; 2) $2x_1$ и $2x_2$; 3) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$; 4) $\frac{3x_1}{x_2}$ и $\frac{3x_2}{x_1}$;

5) $x_1 + \frac{1}{x_1}$ и $x_2 + \frac{1}{x_2}$; 6) x_1^3 и x_2^3 ; 7) $x_1^2 + \frac{x_2}{x_1}$ и $x_2^2 + \frac{x_1}{x_2}$.

4. Разложите на множители: 1) $-3x^2 + 8x + 3$; 2) $3m^2 - 8mn - 3n^2$.

5. Решите уравнение:

1) $2x^4 + 3x^2 - 9 = 0$; 2) $2(3x - 1)^2 + 9x - 12 = 0$; 3) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 13$.

4) $2(x + 1)^2 + 3(x^3 + 1) - 9(x^2 - x + 1)^2 = 0$.

6. Дана квадратичная функция $y = 2x^2 - 7x + 6$.

1) Постройте её график.

2) Найдите её наибольшее и наименьшее значения на всей числовой оси; на отрезке $[-1; 0]$.

3) При каких значениях x её график расположен выше прямой $y = 1$?

4) При каких отрицательных значениях x она принимает положительные значения?

5) Укажите все значения a , при которых уравнение $2x^2 - 7x + 6 = a$ имеет два решения?

6) Укажите все значения a , при которых множество решений неравенства $2x^2 - 7x + 6 \leq a$ представляет собой отрезок длины 1?

7) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{1}{2x^2 - 7x + 6}$ на промежутке $[1; 6]$.

7. Решите неравенство:

- 1) $-3x^2 - 2x + 5 < 0$; 2) $x^2 + 7x + 10 > 0$; 3) $3x^2 + 2x + 5 > 0$; 4) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$;
5) $-2x^2 - 7x - 6 < 0$; 6) $9x^2 + 12x + 4 > 0$.

8. Дана квадратичная функция $y = (a-1)x^2 + x - 2$. Укажите все значения параметра a , при которых:

- 1) один из её нулей вдвое больше второго;
- 2) она принимает положительные значения при всех значениях x ;
- 3) она имеет два положительных нуля;
- 4) один из её нулей больше, а другой меньше 1.

9. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{7 + 2x - 5x^2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{7 + 2x - 5x^2}}{x^2 - 1}$; 3) $y = \sqrt{\frac{7 + 2x - 5x^2}{x^2 - 1}}$.

10. Найдите квадратичную функцию $y = x^2 + px + q$, если известно, что:

- 1) её график проходит через точки $A(-1; 0)$, $B(3; 2)$;
- 2) вершина её графика имеет координаты $A(1; 2)$;
- 3) своё наименьшее значение $y = -2$ она принимает в точке $x = 1$;
- 4) её график пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 5, а ось ординат в точке с ординатой -5 .

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции, если они существуют:

- 1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$, $x \in [-1; 1]$; 3) $y = x^2 - 7x + 10$, $x \in (-1; 1)$;
4) $y = x^2 - 7x + 10$, $x \in [4; 6]$; 5) $y = x^2 - 7x + 10$, $x \in [1; 4]$.

12. Постройте график функции

1) $y = (x - 2)|x + 2|$; 2) $y = 3x^2 - |x - 2|$; 3) $y = |2x^2 - 3|x| + 1|$; 4) $y = \frac{|x^3 + 2x^2|}{x + 2}$.

13. Тело, подброшенное вверх, движется по закону $h = 20t - 5t^2$, где h — расстояние от тела до поверхности земли, м; t — время, с.

1) На какой высоте будет тело через 1 с?

2) Через сколько секунд тело упадёт на землю?

3) На какую максимальную высоту поднимется тело?

14. Решите систему уравнений: 1) $\begin{cases} x + y + xy = 19, \\ xy(x + y) = 84; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 42, \\ xy = 15. \end{cases}$

15. Дан квадрат $ABCD$. От его вершин отложены по одному на каждой из сторон равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длиной x и точки A_1, B_1, C_1, D_1 соединены отрезками. При каком значении x площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ будет наименьшей?

16. Решите уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$.

17. Докажите, что квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два нуля тогда и только тогда, когда существует такое число m , что $af(m) < 0$.

18. Докажите, что при произвольных a, b, c функция $y = (x - a)(x - b) - c^2$ имеет хотя бы один нуль.

Указания к задачам для самостоятельной работы

1. Воспользуйтесь решением примера 1 на стр. 10 и примера 9 на стр. 22. Не забудьте проанализировать случай, когда уравнение не является квадратным ($a = 1!$).

2. Воспользуйтесь методом, применённым при решении примера 2 1) на стр. 13.

3. Воспользуйтесь методом, применённым при решении примера 2 2) на стр. 14.

4. 2) Рассмотрите этот многочлен как квадратный трёхчлен относительно одной из переменных.

5. 1) – 4) Воспользуйтесь решением примера 9 на стр. 22.

6. 1) Сделайте замену $y = x^2$.

2) Попробуйте воспользоваться результатом, полученным при решении задачи 5.1) на стр. 16.

- 3) Выполните замену $x - \frac{1}{x} = y$. Обратите внимание на то, что после замены приходим к тому же квадратному уравнению, что и в предыдущих заданиях.
- 4) Заметьте, что $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$. Можно обе части уравнения разделить на $(x^2 - x + 1)^2 \neq 0$ и сделать замену.
- 5) Воспользуйтесь построенным графиком функции.
- 6) Решите неравенство $2x^2 - 7x + 6 - a \leq 0$ и выясните, при каких значениях a длина отрезка, образованного множеством решений неравенства, равна 1.
- 7) Оцените знаменатель дроби $y = \frac{1}{2x^2 - 7x + 6}$ на промежутке $[1; 6]$.
7. См. примеры 11 – 13 на стр. 25-26.
8. 1) Примените теорему Виета.
- 2) Воспользуйтесь методом, применённым при решении примера 18 2) на стр.33.
- 3) Воспользуйтесь методом, применённым при решении примера 18 3) на стр.33..
- 4) Обратите внимание на то, что если старший коэффициент положителен, т.е. ветви графика функции направлены вверх, то 1 находится между нулями функции при условии: $f(1) < 0$. Аналогично рассмотрите случай, когда старший коэффициент отрицателен.
9. Обратите внимание на то, что при выполнении заданий 2) и 3) можно использовать результат, полученный при выполнении задания 1).
10. 1) По условию можно составить два уравнения, из которых найти p и q .
- 2) Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится в точке с абсциссой $-\frac{b}{2a}$.
- 3) Так как старший коэффициент положителен, то наименьшее значение функции совпадает с ординатой вершины её графика.
- 4) По двум точкам можно найти p и q .
11. Воспользуйтесь методом решения примера 10 на стр. 24-25.
12. См. примеры 15, 16 на стр. 29-30.

13. 3) Найдите наибольшее значение квадратичной функции.
14. Обе системы решаются аналогично системе, рассмотренной в примере 8 на стр. 17.
15. Выразите площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ через известную сторону данного квадрата (обозначьте её, например, через a) и x . Для полученной квадратичной функции найдите условие, при котором она имеет наименьшее значение.
16. Заменой $\sqrt{1-x^2} = y$ уравнение можно свести к системе
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{35}{12}. \end{cases}$$
- Эту систему можно решить заменой $x + y = u$, $xy = v$.
17. Для доказательства приведенного утверждения необходимо доказать два взаимно обратных утверждения.
18. Можно найти дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		Контрольный тест	Основное задание	Дополнительное задание
«зачтено»	Решено не менее	14 задач	5 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	18 задач	7 задач	5 задач
«отлично»	Решено не менее	22 задач	10 задач	8 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям тренажёра, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Квадратное уравнение $ax^2 - bx - 1 = 0$ имеет корень, равный -1 , если...
А. $a - b = 1$. Б. $a + b = 1$. В. $-a + b = 1$. Г. $a = b = 0$.
2. Сколько существует значений параметра a , при которых уравнение $ax^2 - 2(a-1)x + 2a = 0$ имеет один корень?
А. Ни одного. Б. Одно. В. Два. Г. Три.
3. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Корни уравнения $a(x+2)^2 + b(x+2) + c = 0$ равны ...
А. $x_1 + 2, x_2 + 2$. Б. $2x_1, 2x_2$. В. $x_1 - 2, x_2 - 2$. Г. $-2x_1, -2x_2$.
4. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня. Сколько корней будет иметь уравнение, полученное из данного уменьшением его свободного члена?
А. Два. Б. Один. В. Ни одного. Г. Однозначного ответа нет.
5. Один из корней уравнения $18x^2 + 23x + 5 = 0$ равен -1 . Второй его корень равен...
А. $-\frac{41}{18}$. Б. $-\frac{5}{18}$. В. $\frac{41}{18}$. Г. $\frac{5}{18}$.
6. Сколько существует целых положительных значений c , при которых уравнение $x^2 + 5x + c = 0$ имеет только целые корни?
А. Одно. Б. Два. В. Три. Г. Четыре.

7. Укажите все значения параметра p , при которых квадратное уравнение $-x^2 + 3x + p = 0$ имеет корни разных знаков.

- А. $p > 0$. Б. $p < 0$. В. $p \geq -\frac{9}{4}$. Г. $p \leq \frac{9}{4}$.

8. Какие знаки имеют корни квадратного уравнения $5732x^2 - 2743x + 1047 = 0$?

- А. $++$. Б. $+ -$. В. $--$. Г. Ответ отличен от приведенных.

9. Укажите все значения b , при которых квадратное уравнение

$$(b^2 - 1)x^2 + 2x + \frac{1}{b-1} = 0$$

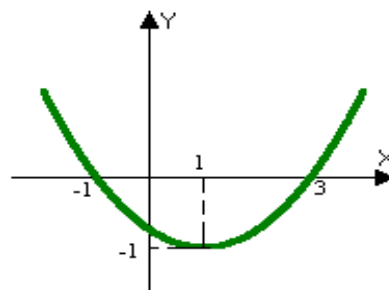
имеет корни одинакового знака.

- А. $(-1; +\infty)$. Б. $(-1; 0)$. В. $(1; +\infty)$. Г. $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

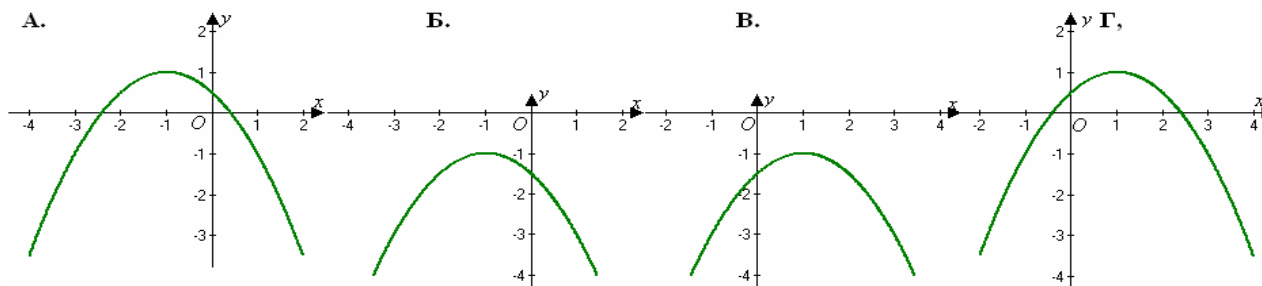
10. На рисунке изображён график функции ...

А. $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$; Б. $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$;

В. $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$; Г. $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 2$.



11. На каком из рисунков изображен график функции $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 1$?



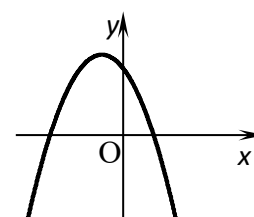
12. При каких условиях график функции $y = ax^2 + bx + c$ полностью расположен в полуплоскости $y > 0$?

А. $a > 0$. Б. $a > 0, b^2 - 4ac \leq 0$. В. $a > 0, b^2 - 4ac < 0$.

Г. $a > 0, b^2 - 4ac > 0$.

13. Какие знаки имеют числа a , b , c , если на рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$?

А. $a < 0, b > 0, c > 0$. Б. $a < 0, b > 0, c < 0$.



В. $a > 0, b > 0, c < 0$. **Г.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

14. Укажите все значения параметра a , при которых графики функций $y = (x - 1)^2$ и $y = -(x + a)^2$ имеют общие точки.

А. $a = 1$. **Б.** $a = -1$. **В.** $a \geq -1$. **Г.** $a \leq 1$.

15. В каких двух точках достаточно знать значения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, чтобы найти $a + b$?

А. В любых. **Б.** $x = 0, x = 1$. **В.** $x = 0, x = -1$. **Г.** $x = 1, x = -1$.

16. На каком из приведенных промежутков функция $y = x^2 - 4x + 5$ убывает?

А. $(-\infty; -2]$. **Б.** $[-2; +\infty)$. **В.** $[2; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; 2]$.

17. Сравните значения функции $f(x) = x^2 - 4x$ в точках $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{5}$.

А. $f(x_1) > f(x_2)$. **Б.** $f(x_1) < f(x_2)$. **В.** $f(x_1) = f(x_2)$. **Г.** Сравнить невозможно.

18. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 + 4x - 1$.

А. $-\frac{3}{2}$. **Б.** 3. **В.** $\frac{3}{2}$. **Г.** -3.

19. Наименьшее значение квадратного трёхчлена $y = x^2 + 2x - 3$ на отрезке $[-3; -2]$ равно ...

А. 0. **Б.** -4. **В.** -11. **Г.** -3.

20. Укажите множество значений функции $y = 2(x + 1)^2 - 3$.

А. $(-\infty; 3]$. **Б.** $[3; +\infty)$. **В.** $[-3; +\infty)$. **Г.** $[-1; +\infty)$.

21. При каком значении a осью симметрии параболы $y = ax^2 - 16x + 1$ является прямая $x = 4$?

А. -2. **Б.** 2. **В.** 4. **Г.** -4.

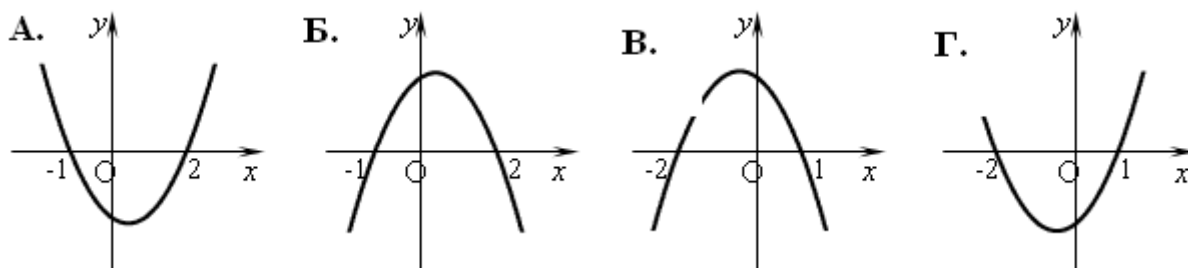
22. На графике функции $y = x^2 - 3x$ найдите точки, у которых абсциссы и ординаты равны.

А. (0; 0); (2; 2). **Б.** (0; 0); (4; 4). **В.** (0; 0); (-2; -2). **Г.** (0; 0); (-4; -4).

23. Сколько точек с целыми неотрицательными координатами лежат ниже параболы $y = -x^2 + 6x - 8$?

А. Ни одной. **Б.** Одна. **В.** Две. **Г.** Три.

24. На каком из рисунков изображён график функции $y = (x + 1)(2 - x)$?



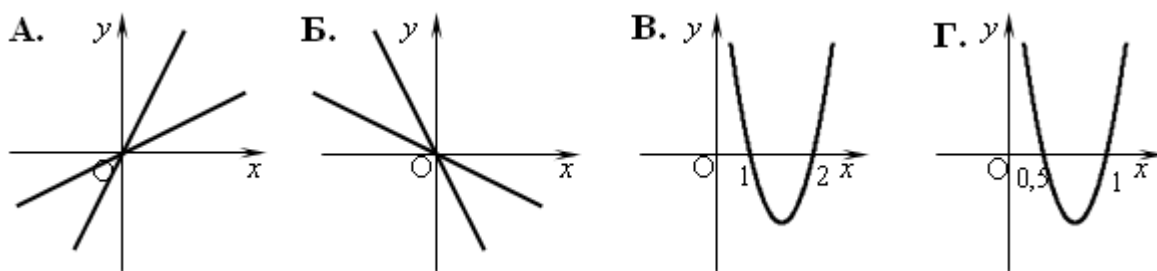
25. Множество всех вершин семейства парабол $y = x^2 + (3a - 1)x + 2,25a^2 - 1$ образует ...

А. параболу. Б. прямую. В. окружность. Г. гиперболу.

26. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Какие знаки имеют числа a и c ?

А. ++. Б. -+. В. +-. Г. --.

27. На каком рисунке изображено множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$?



Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений.

1. Укажите все значения a , при которых уравнение $(a - 2)x^2 + (a - 1)x + 2a - 5 = 0$ имеет: 1) один корень; 2) равные по модулю корни?

2. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $3x^2 - 7x - 13 = 0$. Не находя их,

вычислите значение выражения: 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 3) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$.

3. Корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются числа x_1 и x_2 . Составьте квадратное уравнение, корнями которого будут числа:

1) $2x_1$ и $2x_2$; 2) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$; 3) $x_1 + \frac{1}{x_1}$ и $x_2 + \frac{1}{x_2}$.

4. Разложите на множители: 1) $2x^2 + 5x - 3$; 2) $2a^2 + 5ab - 3b^2$.

5. Решите уравнение:

1) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$; 2) $(2x - 3)^2 + 4x - 30 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 22$.

6. Дана квадратичная функция $y = -3x^2 - 7x + 6$.

1) Постройте её график.

2) Найдите её наибольшее значение на всей числовой оси; на отрезке $[-2; -1]$.

3) При каких значениях x её график расположен выше прямой $y = 8$?

4) При каких отрицательных значениях x она принимает положительные значения?

5) Укажите все значения a , при которых уравнение $-3x^2 - 7x + 6 = a$ имеет два решения.

6) Укажите все значения a , при которых множество решений неравенства $-3x^2 - 7x + 6 \geq a$ представляет собой отрезок длиной 3.

7. Дана квадратичная функция $y = ax^2 - 2x + 3$. Укажите все значения a , при которых:

1) один из её нулей вдвое больше второго;

2) она принимает положительные значения при всех значениях x ;

3) она имеет два положительных нуля;

4) один из её нулей больше, а другой меньше 1.

8. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{4 + x - 0,5x^2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{4 + x - 0,5x^2}}{x^2 - 4}$ 3) $y = \sqrt{\frac{4 + x - 0,5x^2}{x^2 - 4}}$.

9. Найдите квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

1) её график проходит через точки $A(0;1)$, $B(1;0)$, $C(2;3)$;

2) вершина её графика имеет координаты $A(2,5;-0,25)$, а график проходит через точку $B(1;2)$;

3) своё наименьшее значение $y = -2$ она принимает в точке $x = 1$ и её график пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 5.

10. Тело движется по закону $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где $s(t)$ — расстояние, пройденное

за время t , м, t — время, с, V_0 — начальная скорость, м/с. За первые 2 с оно проходит 14 м, за первые 4 с — 36 м.

1) Какой путь пройдёт тело за первые 6 с?

2) За какое время с начала движения тело пройдёт 50 м?

3) Постройте график зависимости пройденного пути от времени.

11. Мяч бросили вертикально вверх с высоты 3 м с начальной скоростью 9 м/с.

1) Найдите зависимость высоты мяча над землёй от времени полёта.

2) Начертите график зависимости высоты от времени полёта.

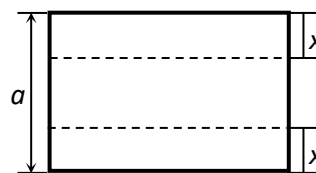
3) На какую максимальную высоту поднимется мяч?

4) Через сколько времени мяч окажется на максимальной высоте?

5) Через сколько секунд мяч упадёт на землю?

6) Когда скорость полёта больше: в начале движения или через 0,5 с?

12. Из прямоугольного листа железа, ширина которого a мм, делают жёлоб с прямоугольным сечением. С этой целью по краям листа отгибают полосы (см. рис.). Какой ширины должны быть эти полосы, чтобы получился жёлоб с наибольшей пропускной способностью?



13. Произведение двух последовательных натуральных чисел в пять раз больше меньшего из них. Найдите эти числа.

Указания к выполнению основного задания

При выполнении заданий 1–11 воспользуйтесь указаниями к решению соответствующих задач для самостоятельной работы.

11. 6) Обратите внимание на то, что до момента достижения максимальной высоты скорость движения мяча уменьшается, а потом начинает увеличиваться.

12. Выразите площадь поперечного сечения жёлоба через ширину данного прямоугольного листа железа и ширину каждой из отгибаемых по краям листа полос. Для полученной квадратичной функции установите условия, при которых она принимает наибольшее значение.

Дополнительное задание

1. Укажите все значения a , при которых уравнение $(a^2 + a - 2)x^2 + (6 + a - a^2)x + (a^2 - 3a - 10) = 0$ имеет более двух корней.

2. Выразите дискриминант приведенного квадратного трёхчлена через его корни.

3. Найдите все такие a , что для всех x , по модулю меньших 1, выполнено неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

4. Укажите все значения a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 2ax + a = 0, \\ x^2 - x - a = 0 \end{cases}$$

имеет решения.

5. Постройте квадратичную функцию

1) множеством значений которой является промежуток $\left(-\infty; \frac{27}{2}\right)$, абсцисса вершины графика которой равна $\frac{3}{4}$, и которая имеет нуль в точке с абсциссой 3;

2) принимающую положительные значения на интервале $(-0,6; 1)$ и только на нём, и наибольшее значение которой равно 3,2.

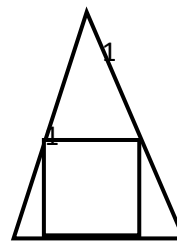
6. Найдите все функции вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, графики которых симметричны относительно прямой $x = p$.

7. О квадратном трёхчлене $f(x) = x^2 + px + q$ известно, что $f(1) = 3$, $f(3) < 1$. Каким может быть число $f(-1)$?

8. Докажите, что: **1)** если $a + 2b + c > 0$, $a < 0$, то $b^2 > ac$;

2) $a^2 + ab + b^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b = 0$.

9. Найдите наименьшую площадь равнобедренного треугольника, описанного около единичного квадрата (см. рис.)



10. В треугольник постоянного периметра $2p$ вписана окружность. К этой окружности проведена касательная параллельно стороне треугольника. Найдите наибольшую возможную длину отрезка касательной, концы которого принадлежат сторонам треугольника.

11. Мяч брошен с Земли вертикально вверх со скоростью 30 м/с. Одновременно другой мяч выпущен из рук на высоте 100 м над местом бросания первого мяча. На какой высоте и в какой момент времени мячи встретятся?

12. Докажите неравенство: $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \geq 6xy - 8xz + 8yz$.

13. Найдите значение выражения $a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$, где a и b — корни уравнения $x^2 - x + q = 0$.

14. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^2 - xy - y^2 - 4x + y - 7 = 0, \\ 5x^2 - 6xy - 4y^2 - 4x + 8y - 9 = 0. \end{cases}$$

15. Разложите на множители многочлен

$$2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2.$$

Указания к выполнению дополнительного задания

1. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет более двух решений тогда и только тогда, когда $a = b = c = 0$.

2. Воспользуйтесь формулами Виета.

3. Решите данное неравенство в каждом из трёх случаев: дискриминант больше нуля, равен нулю, меньше нуля. Для каждого случая определите, при каких значениях a значения x , по модулю меньше 1, удовлетворяют данному неравенству.

4. В предположении, что система имеет решение, установите, при каких значениях a это имеет место. Не забудьте провести рассуждения в обратную сторону.

5. 1) Подумайте, какую информацию о данной функции Вы можете извлечь из

условия. 2) Подумайте, чем являются для данной функции точки $-0,6$ и 1 .

7. Воспользуйтесь графиком соответствующей квадратичной функции. Выясните, возрастает или убывает функция при $x < 1$.

8. 1) Рассмотрите квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$.

9. Выразите площадь треугольника, например, через его основание. Можно воспользоваться оценкой для суммы двух взаимно обратных положительных чисел.

10. Выразите длину отрезка касательной к окружности, лежащего внутри треугольника, через сторону треугольника, которой она параллельна, и данный периметр треугольника. Воспользуйтесь подобием треугольников.

11. См. решение примера 23 на стр. 38.

12. Перенесите все члены в левую часть и рассмотрите левую часть неравенства как квадратный трёхчлен относительно x .

13. Воспользуйтесь симметричностью многочлена.

14. Вычтя из второго уравнения первое, получим в левой части выражение, раскладывающееся на множители.

15. Представьте данный многочлен в виде квадратного трёхчлена относительно

$$u = \frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1}.$$

Олимпиадное задание

1. Найдите общий вид квадратного трёхчлена, значения которого при целых значениях x будут целыми числами.

2. Докажите, что многочлен $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$, где a, b, c — различные числа, имеет хотя бы один корень.

3. Решите уравнение $x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0$.

4. Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ являются натуральными числами. Докажите, что $a^2 + b^2$ — составное число.

5. Решите в целых числах уравнение $21p^2 + pq - 2q^2 = 19$.

6. Разложите на множители многочлен $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.
7. Докажите, что многочлен $a(x-2)(x+1)+b(x-1)(x+2)$, где a и b — произвольные ненулевые числа, имеет хотя бы один корень.
8. Докажите, что уравнение $x^2+2px+2q=0$, где p и q — целые нечётные числа, не может иметь рациональных корней.
9. Среди всех квадратичных функций $y=x^2+px+q$, принимающих только неотрицательные значения, найдите ту, у которой сумма $p+q$ наименьшая.
10. Известно, что уравнение $x^{12}-abx+a^2=0$ имеет корень $x_0 > 2$. Докажите, что $|b| > 64$.

Указания к выполнению олимпиадного задания

1. Используйте тот факт, что значения квадратного трёхчлена при $x = \pm 1$ являются целыми числами.
2. Вычислите значения данного многочлена при значениях x , равных среднему из данных чисел a, b, c и ещё одному из этих чисел.
3. Рассмотрите левую часть уравнения как квадратный трёхчлен относительно $y = \sqrt{7}$.
4. Выразите a^2+b^2 через корни уравнения.
5. Разложите левую часть на линейные множители. Эти множители должны быть делителями числа 19.
6. Можно представить данный многочлен в виде квадратного трёхчлена относительно, например, a .
7. Воспользуйтесь методом, применённым при решении примера 7.
8. Предположите, что уравнение имеет рациональные корни, и рассмотрите всевозможные случаи для корней данного уравнения: оба целые одинаковой и различной чётности, оба дробные и т.д. Примените теорему Виета.
9. Оцените $p+q$ сверху некоторым квадратным трёхчленом относительно a .
10. Представьте левую часть уравнения в виде квадратного трёхчлена относительно a .

Послесловие

В пособии достаточно широко представлены свойства квадратичной функции и ее приложения. Но, безусловно, эти сведения не исчерпывают всех знаний об этой функции, а тем более об ее использовании.

В первую очередь заслуживают рассмотрения геометрические свойства графика квадратичной функции — параболы.

Парабола имеет *ось симметрии*. Точка пересечения параболы с осью симметрии имеет название — "*вершина*". С каждой параболой связаны еще одна прямая и одна точка, которые имеют, соответственно, названия "*директриса*" и "*фокус*". Чтобы понять их сущность, достаточно понять решение следующей задачи.

Найдите на координатной плоскости множество точек, равноудаленных от прямой $y = -p$ и точки $(0; p)$.

Решение. Пусть точка $M(x; y)$ удовлетворяет условию задачи, то есть $FM = MK$, или $FM^2 = MK^2$, где K — основание перпендикуляра, проведенного из точки M к прямой d (рис. 20). Запишем это равенство в координатах: $(x - 0)^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$

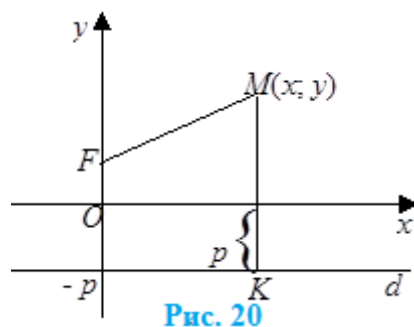


Рис. 20

или $y = \frac{1}{2p}x^2$. Последнее равенство означает, что точка M принадлежит пара-

боле. Проведя рассуждения в обратном порядке, можно убедиться, что каждая

точка параболы $y = \frac{1}{2p}x^2$ удовлетворяет условию задачи. Таким образом, ис-

комая фигура является параболой. ■

На основе рассмотренной задачи нетрудно для каждой параболы определить директрису и фокус. С фокусом параболы связано ее важное свойство.

Луч света, который выходит из фокуса после отражения от параболы будет направлен параллельно оси симметрии и наоборот.

На этом свойстве параболы основывается ее широкое приложение в проектировании прожекторов, радиолокаторов, телескопов. Существует легенда о

том, что это свойство параболы использовал древнегреческий ученый Архимед (287 - 212 до н. э.) для построения зеркала, с помощью которого он сжег флот римлян, которые пытались захватить его родной город Сиракузы.

Для конструирования указанных приборов обычно используют поверхность, образованную вращением параболы вокруг оси симметрии. Эта поверхность называется **параболоидом вращения**.

Характерные геометрические свойства параболы неотъемлемо связаны с применением параболы для описания движения тел. Самый простой случай такого приложения вам хорошо известен. Если материальная точка под действием постоянной силы движется прямолинейно, то закон ее движения имеет вид

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0$$
, где x — координата точки на траектории движения, a — ускорение движения, t — время, v_0 — начальная скорость, то есть скорость при $t = 0$, x_0 — положение точки в момент времени $t = 0$. Данным законом пользуются для исследования свободного падения тел.

Исходя из данного закона и закона равномерного движения, можно прийти к заключению, что траекторией движения материальной точки под действием постоянной силы является парабола. Поэтому камень, который бросили под углом к горизонту, будет двигаться "по параболе". Это дает возможность найти расстояние, на которое улетит камень, время его движения, наибольшую высоту, на которую он поднимется. Это самая простая баллистическая задача. Она лежит в основе решения более сложных баллистических задач.

Поверхности, образованные вращением параболы, встречаются часто в жизни человека. Параболоид вращения вы можете наблюдать ежедневно. Такую форму приобретает поверхность жидкости в стакане, если вы неполный стакан помешиваете интенсивно ложечкой, а потом вынимаете ее из стакана.

Хорошо известный аттракцион "Параболоид чудес" основан на свойствах параболоида вращения. Каждому, кто стоит внутри параболоида, который вращается вокруг оси, кажется, что он стоит на полу, а другие люди каким-то образом держатся на стенках.

Афанасьева Ольга Николаевна
Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович
Слипенко Анатолий Константинович

Квадратичная функция и ее применения

Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9 классов

Учебное пособие