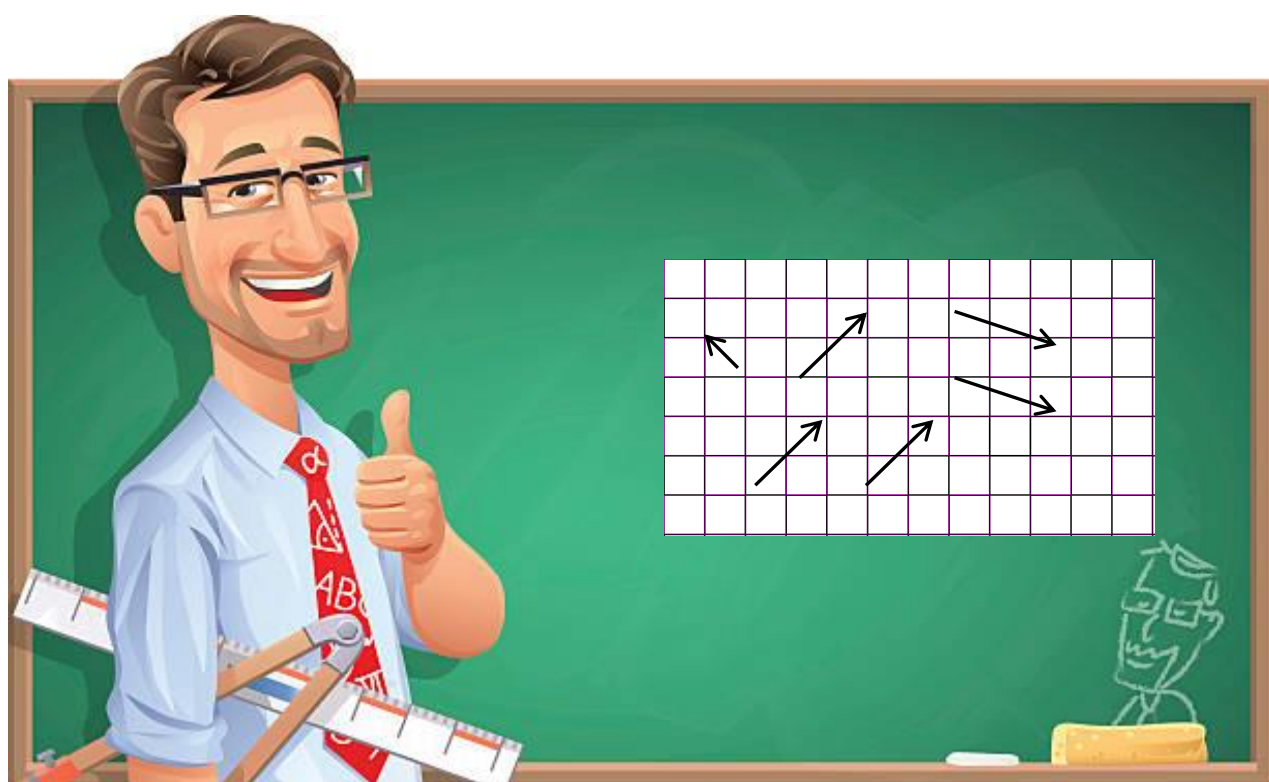




**Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения**

**Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л.,
Слипенко А. К.**

Векторы и их применения



**Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9-х классов**

Донецк 2025

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К. Векторы и их применения. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов. — Донецк. — 40 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-х классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике в открытом математическом колледже (ОМК), рекомендованной Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики (приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 25.06.2016г. № 863).

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков применения векторов к решению геометрических и физических задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Завершается пособие контрольным заданием, работа над которым обеспечивает контроль усвоения содержания темы. Контрольное задание, наряду с контрольным тестом, содержит основные и дополнительные задачи.

Пособие может быть использовано обучающимися девятых классов, учителями математики для организации внеурочного обучения математике.

Содержание

Предисловие	4
Введение для обучающихся	5
Введение для учителей	6
Векторы и их применения	7
Введение	7
1. Векторы и действия над ними	7
2. Применение векторов при решении геометрических задач	13
3. Применение векторов при решении физических задач	18
4.* Векторный метод в алгебраических задачах	21
Тест для самоконтроля	23
Задачи для самостоятельной работы.....	25
Указания к задачам для самостоятельной работы	27
Контрольное задание	28
Контрольный тест	28
Инструкция по выполнению теста	28
Основное задание.....	32
Дополнительное задание	34
Указания к задачам дополнительного задания.....	35
Олимпиадные задачи	36
Указания к олимпиадным задачам.....	36
Послесловие	37

Предисловие

Математическое образование является базой профессионального образования для многих профессий. Поэтому очень важно помочь обучающимся получить добротную математическую подготовку.

Предлагаемое пособие направлено на углубление математических знаний девятиклассников, на совершенствование их умений решать сложные задачи, в частности прикладные, на подготовку к итоговому оцениванию по математике, к продолжению обучения в профильной школе.

Пособие ориентировано на развитие у обучающихся навыков применения векторного метода при решении многих геометрических и физических задач.

В пособии содержатся понятия и утверждения, которые изучались в школьном курсе математики, некоторое их расширение, углубление. объяснения и советы, которые помогут обучающимся при решении задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Каждый блок содержит образцы решения задач. Овладеть необходимым теоретическим материалом, проверить степень его усвоения помогут обучающимся вопросы для самоконтроля. К ним приведены ответы. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения и указания к ним.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного и дополнительного заданий. Выполнение контрольного теста заключается в выборе правильного ответа из нескольких приведенных. В зависимости от намерений и возможностей обучающихся, они могут выполнять только контрольный тест, или контрольный тест и основное задание, или контрольный тест, основное и дополнительное задание.

Пособие предназначается для обучающихся 9-х классов разного типа образовательных учреждений, учителей математики, Оно может быть частично использовано обучающимися 10-х и 8-х классов.

Введение для обучающихся

Уважаемые друзья!

Настоящее пособие посвящено одному из важнейших методов исследований в математике и ее приложениях — векторному методу. Векторный метод является очень эффективным при решении многих геометрических и физических задач.

Выполнение контрольного задания, приведенного в пособии поможет вам развить свои умения и навыки применять векторный метод при решении геометрических и физических задач. Все необходимые для выполнения контрольного задания сведения и разъяснения приведены в пособии.

Убедиться в том, что вы усвоили данную тему, помогут тест для самоконтроля и задания для самостоятельного решения с ответами и указаниями, содержащиеся в пособии. Если ваши ответы на тестовые задания не совпадают с приведенными в пособии, проанализируйте ошибки и учтите их в своей дальнейшей работе.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач. Работа над контрольным тестом состоит в выборе для каждого тестового задания правильного ответа среди предложенных. Помните, что правильный ответ среди них всегда имеется, и он ровно один.

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений. Дополнительное задание предполагает решение более сложных задач. В пособии приведены олимпиадные задания для тех, кто хотел бы более глубоко овладеть векторным методом.

Надеемся, что работа над пособием будет для вас интересной и полезной.

Желаем вам успехов!

Введение для учителей

Уважаемые коллеги!

Настоящее пособие может быть использовано для организации дополнительного обучения математике, проведения факультативных занятий в 9-ом классе. Оно позволит также организовать самостоятельное обучение обучающихся математике, дополнительное к школьному.

Приведенный в пособии теоретический материал, который сопровождается решением типовых задач, достаточен для обеспечения готовности к самостоятельной работе над заданиями. Эту готовность можно проверить с помощью теста для самоконтроля. Наличие ответов и указаний к заданиям теста дает возможность корректировать подготовку учащихся к обучению. В пособии помещены задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним. Оказание помощи в их решении является важной составляющей в управлении самостоятельной работой обучающихся. Формирование у обучающихся определенной последовательности действий при проработке учебного материала является необходимым условием формирования умения самостоятельно учиться.

Предложенное пособие может быть использовано как для организации индивидуального обучения, так и для проведения факультативов и других коллективных форм обучения. В начале рассмотрения темы необходимо помочь обучающимся осознать главную цель темы, ее основных заданий. Сжатый обзор теоретического материала и рекомендации к его проработке являются следующим шагом в работе с обучающимся. Наибольшее внимание следует уделить решению задач для самостоятельной работы. Именно они готовят обучающихся к выполнению контрольного задания. Целесообразно сделать акцент на самоконтроле. Надеемся, что предложенное пособие будет вашим надежным помощником в организации обучения математике, дополнительного к школьному, в организации самостоятельной работы обучающихся, в обеспечении предпрофильного обучения математике.

Желаем вам успехов в обучении и воспитании детей!

Векторы и их применения

Введение

Изучая математику, вы постоянно обогащали и разнообразили средства моделирования объектов и явлений окружающего мира. Так, расширялось понятие о числе, которое позволило давать количественную характеристику объектов окружающего мира, с помощью новых классов геометрических фигур удается описывать многообразие их форм. Но развитие естественных наук, да и запросы самой математики требуют введения и изучения новых и новых средств моделирования. В частности, значительное количество физических величин нельзя охарактеризовать только числом, потому что важным является их направление. А поскольку направленные отрезки одновременно характеризуют и числовые значения, и направления, то на их основе и сформировалось новое математическое понятие — понятие вектора.

Основные действия над векторами тоже определились из физических рассуждений, и это в конечном итоге привело к созданию векторной алгебры, без которой сейчас невозможно представить существование физических теорий. В то же время и в самой математике векторная алгебра и ее обобщение стали удобным языком, средством получения и изложения новых результатов.

Целью данного пособия является совершенствование умений применять векторное исчисление к решению геометрических, физических, алгебраических задач. Причем, основные приложения будут касаться геометрии. И это не случайно: понятие вектора возникает на геометрических образах, геометрия широко используется при построении векторного исчисления, поэтому наблюдается и обратное влияние, взаимная польза.

1. Векторы и действия над ними

Из курсов геометрии и физики вы уже знакомы с векторами. Однако, распространенный ответ: «вектор — это направленный отрезок» требует серьезного уточнения.



Рис. 1

Рассмотрим рис. 1. Сколько векторов на нем изображено? Те из вас, которые от-

ветят, что один, несомненно правы, потому что все три направленных отрезка имеют одно и то же направление и одну и ту же длину. Следовательно, они изображают один и тот же вектор. Мы исходим из того, что вектор полностью характеризуется направлением и скаляром (длиной), а изображать его можно любым направленным отрезком, имеющим это же направление и такую же длину. Такие векторы еще называют **свободными**, в отличие от **приложенных** векторов, для которых еще нужно указывать точку приложения — начало изображения вектора. Вот приложенный вектор можно отождествлять с направленным отрезком.

Указанное выше различие векторов очень существенно для выполнения действий над векторами. Оно проявляется в физике, где, говоря о «векторе», часто подразумевают приложенный вектор. В математике мы будем иметь дело со свободными векторами. И в нашем пособии слово «вектор» следует понимать как «свободный вектор».

Вектором можно называть совокупность всех направленных отрезков, которые имеют одинаковую длину и заданное направление. Каждый из отрезков этой совокупности будем называть изображением вектора.

Понятно, что вектор полностью определяется любым своим изображением.

Векторы обозначают: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{F}$.

Все направленные отрезки, изображающие вектор $\vec{a}$, имеют одну и ту же длину и одно и то же направление, которые называют, соответственно, **длиной** (модулем, абсолютным значением) и **направлением** вектора $\vec{a}$. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$.

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковое направление и одинаковую длину.

Направленный отрезок, началом которого является точка A , а концом точка B , однозначно характеризуется упорядоченной парой точек $(A; B)$. Рассмотрим также множество пар $(A; A)$, $(B; B)$, Это множество определяет вектор, который называется **нулевым** и обозначается $\vec{0}$. Изображением нулево-

го вектора является любая точка. Модуль нулевого вектора считается равным нулю. Понятие направления для нулевого вектора не определено.

Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ через $-\vec{a}$ обозначают вектор, **противоположный** данному, т. е. имеющий такую же длину, как и вектор $\vec{a}$, но противоположное направление. Векторы, имеющие одинаковое или противоположное направления называются **коллинеарными**. Одинаково направленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначаются $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, противоположно направленные — $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, коллинеарные — $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Возможности применения векторов связаны с введением действий над векторами и созданием векторной алгебры, имеющей много общих свойств с обычной «числовой» алгеброй (хотя, конечно, имеются и существенные отличия).

Действие сложения двух векторов выполняется по правилу треугольника ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$) (рис. 2) или параллелограмма (рис. 3) (именно так в физике складываются силы). Для сложения нескольких векторов можно пользоваться и правилом многоугольника (рис. 4).

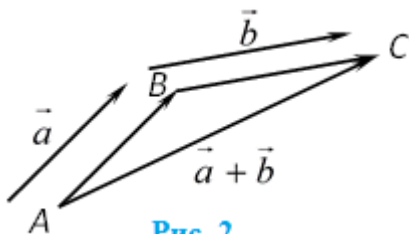


Рис. 2

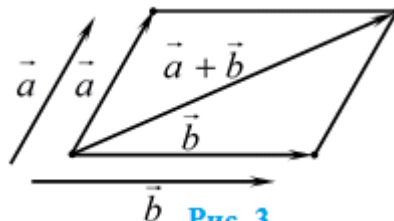


Рис. 3

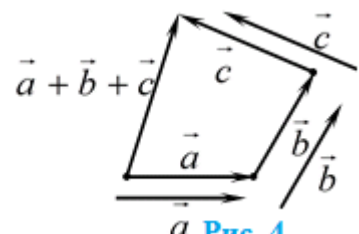


Рис. 4

Операция умножения вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$, дающая вектор $\lambda \vec{a}$, сводится к изменению длины вектора $\vec{a}$ в $|\lambda|$ раз и изменению направления на противоположное, если $\lambda < 0$.

Одной из важных операций векторной алгебры является операция разложения **вектора плоскости** $\vec{m}$ по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{m} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ (рис. 5). В частности, зафиксировав на координатных осях прямо-

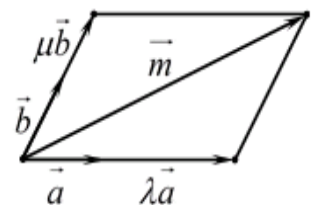


Рис. 5

угольной системы координат векторы единичной длины $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 6), для лю-

бого вектора $\vec{a}$ координатной плоскости, получаем однозначное разложение $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Именно так определяются координаты вектора $\vec{a}$: числа x и y называются **координатами вектора $\vec{a}$** .

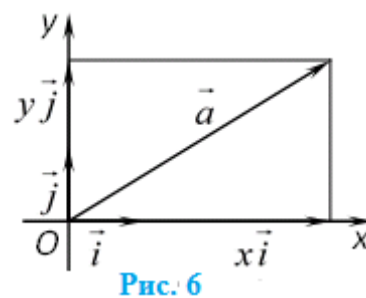


Рис. 6

Итак, в прямоугольной системе координат каждый вектор $\vec{a}$ полностью определяется упорядоченной парой чисел $(x; y)$ — своими координатами (пишем $\vec{a} = (x; y)$). При этом, если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. В частности, координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ совпадают с координатами точки A .

Операции с векторами, заданными координатами, сводятся к операциям с числами. Сложение векторов — к сложению соответствующих координат, умножение вектора на число — к умножению координат вектора на это число, т. е. если $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1)$.

В математике существует несколько различных способов умножения векторов. Наиболее важным из-за многочисленных приложений является **скалярное умножение векторов**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$). В координатной форме скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат, т. е. если $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Напомним еще некоторые формулы, связанные с заданием векторов на плоскости с помощью координат.

Таблица 1.

N	Величина, свойство	Формула
1	Длина вектора $\vec{a} = (x; y)$	$ \vec{a} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (1)
2	Длина вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$	$ \overrightarrow{AB} = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (2)

3	Угол φ между векторами $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$	$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (3)$
4	Векторы $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$ перпендикулярны	$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \quad (4)$
5	Векторы $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$ коллинеарны	$x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2$, либо $x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1. \quad (5)$

В следующих двух задачах применяются приведенные формулы.

Задача 1. Даны векторы $\vec{a} = (1; 2); \vec{b} = (1; 1); \vec{c} = (3; -1)$. Найти:

- 1) длину вектора $\vec{a}$;
- 2) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) векторы, коллинеарные вектору $\vec{a}$ и втрое длиннее;
- 4) векторы, перпендикулярные вектору $\vec{c}$;
- 5) при каком значении ρ векторы $\vec{a}$ и $\vec{d} = (\rho; -1)$ перпендикулярны;
- 6) при каком значении ρ векторы $\vec{a}$ и $\vec{m} = (-2; \rho)$ коллинеарны.

Решение. 1) Воспользуемся формулой (1) из таблицы 1: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

2) Если φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то, согласно формуле (3), в таблице 1 $\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \approx 0,9487$. Воспользовавшись калькулятором либо таблицами, находим: $\varphi \approx 18^\circ$.

3) Условиям удовлетворяют векторы $3\vec{a} = (3; 6)$ и $-3\vec{a} = (-3; -6)$.

4) Вектор $(x; y)$ перпендикулярен вектору $\vec{c} = (3; -1)$, тогда и только тогда (см. формулу (4) из табл. 1), когда $3 \cdot x - 1 \cdot y = 0$, либо $y = 3x$. Значит, все векторы, перпендикулярные вектору $\vec{c}$ (включая нулевой) имеют вид $(x, 3x)$, где x — любое действительное число.

5) Воспользуемся опять формулой (4) из таблицы 1 для векторов $\vec{a}$ и $\vec{d}$:

$$1 \cdot \rho + 2 \cdot (-1) = 0, \text{ т. е. } \rho = 2.$$

6) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{m}$ коллинеарны, если их координаты пропорциональны (см. формулу (5) из таблицы 1); т. е. $\frac{1}{-2} = \frac{2}{\rho}$, или $\rho = -4$. ■

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC равно 8 см, а высота AO равна 6 см. Найти:

- 1) длину медианы BD ;
- 2) угол между прямыми BD и AC ;
- 3) угол между медианами BD и CE .

Решение. Введем систему координат с началом в точке O , осями координат, направленными вдоль лучей OC и OA , и масштабной единицей 1 см (рис. 7 а). Тогда вершины треугольника имеют координаты: $A(0; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(4; 0)$. Найдём координаты оснований медиан.

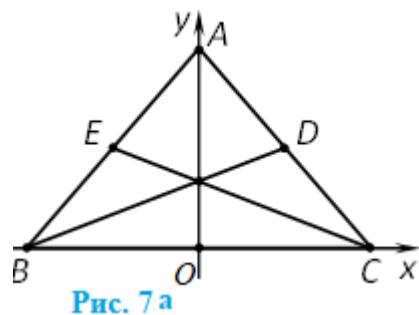


Рис. 7 а

Проведём перпендикуляры EK_1 и DK_2 к основанию BC (рис. 7 б). Применяя теорему о пропорциональных отрезках и свойство медиан треугольника, получим: $\frac{BF}{FD} = \frac{BO}{OK_2} = \frac{2}{1}$. Отсюда $OK_2 = 0,5BO = 2$

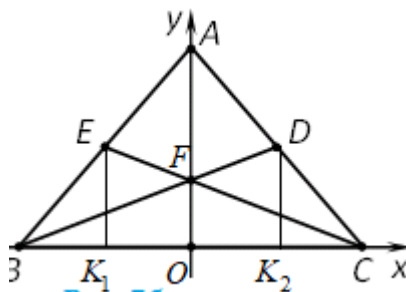


Рис. 7 б

см, то есть абсцисса точки D равна 2. Поскольку ED — средняя линия треугольника ABC , то $DK_2 = 0,5AO = 3$ см, то есть ордината точки D равна 3. Итак, $D(2; 3)$. Аналогично, $E(-2; 3)$.

1) Поскольку $\overrightarrow{BD} = (2 - (-4); 3 - 0) = (6; 3)$, то $BD = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ (см).

2) Угол φ между векторами $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC} = (4 - 0; 0 - 6) = (4; -6)$ определяется

$$\text{из соотношения: } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6 \cdot 4 + 3 \cdot (-6)}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{6}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{52}} = \frac{1}{\sqrt{65}}.$$

Откуда $\varphi \approx 83^\circ$. Этот угол совпадает с углом между прямыми BD и AC .

3) Вычислим косинус угла между векторами $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CE} = (-2 - 4; 3 - 0) = (-6; 3)$: $\cos \varphi = \frac{6 \cdot (-6) + 3 \cdot 3}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}} = \frac{-3}{5}$. Поскольку косинус отрицателен, то угол между векторами тупой и дополняет угол между прямыми BD и CE до 180° , т. е. косинус угла между прямыми равен $\left| \frac{-3}{5} \right| = \frac{3}{5}$, а сам угол приблизительно равен 53° . ■

2. Применение векторов при решении геометрических задач

Применение векторов при решении геометрических задач связано с большими возможностями моделирования геометрических объектов и отношений между ними с помощью векторной алгебры, т. е. описания их средствами векторной алгебры.

Можно выделить несколько типов геометрических задач, применение к решению которых векторного аппарата может дать хорошие результаты. К ним относятся:

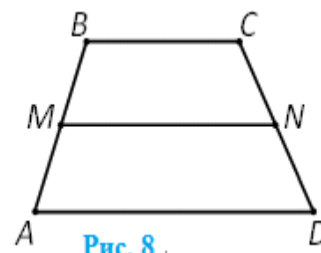
- 1) задачи на доказательство параллельности прямых и отрезков;
- 2) задачи на деление отрезка в данном отношении;
- 3) задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой;
- 4) задачи на доказательство перпендикулярности прямых (отрезков);
- 5) задачи на доказательство зависимости между длинами отрезков;
- 6) задачи на нахождение величин углов.

Понятно, что сами векторы в условии задачи, в геометрических конструкциях, как правило, не присутствуют. При их решении следует ввести векторы на соответствующих геометрических объектах, связать их алгебраическими соотношениями, переводя геометрические свойства на язык векторов, преобразовать эти соотношения по законам векторной алгебры, интерпретировать полученные векторные результаты с помощью геометрических свойств рассматриваемых объектов.

Проиллюстрируем сказанное, приведя векторное доказательство известной теоремы.

Задача 1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям.

Решение. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 8), т.е. $AM = MB$, $CN = ND$. Из четырехугольников $MBCN$ и $AMND$ имеем:



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}) = \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}, \text{ так как } \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{DN}, \text{ поэтому } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}). \end{aligned}$$

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны (даже одинаково направлены). Отсюда следует не только параллельность средней линии MN основаниям AD и BC , но и то, что $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. ■

Успех применения векторов обусловлен тем, что многие геометрические утверждения о расположении точек, прямых, отрезков и других фигур легко выразить с помощью соотношений между векторами, и наоборот. Например, тот факт, что точка M лежит на окружности радиуса r с центром O можно выразить векторным соотношением $\overrightarrow{OM}^2 = r^2$. Простейший словарь «перевода» геометрических утверждений на язык векторной алгебры приведен в таблице 2.

Таблица 2.

Геометрические утверждения	Векторные соотношения
Точки A, B, C лежат на одной прямой	$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$
Прямые AB и CD параллельны, либо совпадают	$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$
Прямые AB и CD перпендикулярны	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
Длина отрезка AB равна d	$\overrightarrow{AB}^2 = d^2$
Угол между прямыми AB и CD равен φ	$\cos \varphi = \frac{ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} }{ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} }$

При этом перевод не всегда однозначный, но это только расширяет наши возможности при применении векторов.

Задача 2. Доказать, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда при любом выборе точки O для некоторого числа λ справедливо равенство $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OA}$.

Решение. Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой, а O — произвольная точка плоскости (рис. 9). Тогда $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$. Но $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, а $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$. Поэтому $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$.

Преобразовав эти равенства, получим равенство $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OA}$. Двигаясь в «обратном направлении», можно показать, что из этого равенства следует принадлежность точек A, B, C одной прямой. ■

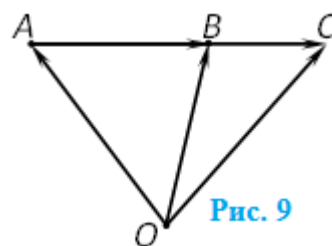


Рис. 9

Замечание. Удобство приведенного равенства состоит в том, что точка O — произвольная, ее можно выбирать самостоятельно. При этом параметр λ в равенстве будет один и тот же.

Применение векторов при решении геометрических задач проиллюстрируем еще рядом задач. Заметим, что некоторые факты, содержащиеся в задачах, для вас не новы, но векторный метод доказательства выгодно отличается от других компактностью, ясностью идеи и даже некоторой стандартностью рассуждений.

Задача 3. Доказать, что медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении 2:1 (считая от вершины).

Решение. Пусть точка M лежит на медиане CK и делит ее в отношении 2:1, считая от точки C (рис. 10). Тогда $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CK}$,

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$. Здесь мы воспользовались утвер-

ждением из задачи 2. Роль точки O у нас играет точка A .

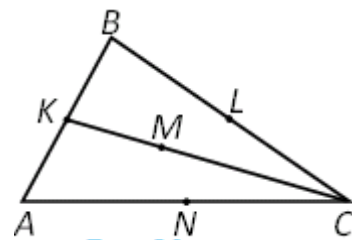


Рис. 10

Так как $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (K — середина AB), то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Но $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AL}$, где L — середина BC (AL — половина диагонали параллелограмма со сторонами AC и AB). Таким образом, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AL}$. Но это значит, что точка M лежит на медиане AL и делит ее в отношении 2:1, считая от вершины A . Доказательство того, что точка M лежит на медиане BN , где N — середина AC , и делит ее в том же отношении, аналогично. ■

Задача 4*. (теорема Птолемея). Произведение диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений противоположных сторон.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, вписанный в окружность (рис. 11). Тогда сумма его противоположных углов равна 180° . Рассмотрим равенства:

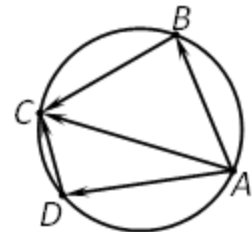
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$


Рис. 11

Из них следует равенства

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC,$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC}^2 &= \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ADC = \\ &= AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ABC, \text{ так как } \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ. \end{aligned}$$

Обозначив $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ исключим $\cos \angle ABC$ из соотношений:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ABC, \quad AC^2 = d^2 + c^2 + 2dc \cos \angle ABC.$$

$$\begin{aligned} \text{Будем иметь: } \frac{a^2 + b^2 - AC^2}{2ab} &= \frac{AC^2 - d^2 - c^2}{2dc} \text{ или } AC^2(ab + dc) = \\ &= a^2dc + b^2dc + d^2ab + c^2ab = ad(ac + bd) + bc(bd + ac) = (ad + bc)(ac + bd). \end{aligned}$$

Аналогично рассматривая выражения для вектора $\overrightarrow{BD}$, получим соотношение

$$BD^2(bc + ad) = (ab + cd)(ac + bd).$$

После перемножения полученных равенств, сокращения и извлечения

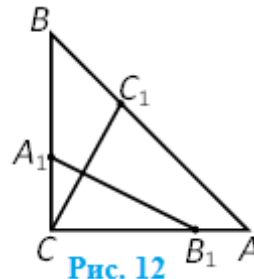
квадратного корня, получим: $AC \cdot BD = ac + bd$. ■

Задача 5*. Стороны BC , CA , AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) разделены по обходу его границы в равных отношениях соответственно точками A_1 , B_1 , C_1 . Доказать, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны.

Решение. Пусть $BA_1:CA_1 = CB_1:AB_1 = AC_1:BC_1 = \lambda$

(рис. 12). Если $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, то

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{CB_1} + \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{CB_1} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \overrightarrow{CB_1} \text{ и } \overrightarrow{CB_1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{a}.$$



Аналогично $\overrightarrow{CA_1} = \frac{1}{\lambda+1} \vec{b}$. Поэтому $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA_1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{a} - \frac{1}{\lambda+1} \vec{b}$. С другой

стороны, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{\lambda+1} \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{b}$. Вы-

числим $\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{CC_1}$, учитывая, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $a^2 = b^2$:

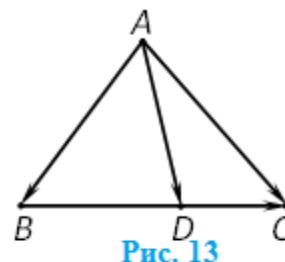
$$\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{a} - \frac{1}{\lambda+1} \vec{b} \right) \left(\frac{1}{\lambda+1} \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{b} \right) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \vec{a}^2 - \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \vec{b}^2 = 0, \text{ то}$$

есть $A_1B_1 \perp CC_1$. Наряду с этим $\overrightarrow{A_1B_1}^2 = \frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2} \vec{a}^2 = \overrightarrow{CC_1}^2$.

Отсюда $A_1B_1 = CC_1$. ■

Задача 6*. (теорема Стюарта). Пусть D — внутренняя точка стороны BC треугольника ABC (рис. 13), тогда

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC - BC \cdot BD \cdot DC = 0.$$



Решение. Поскольку $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{BD}{BC} \overrightarrow{BC}$ и

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{CD}{BC} \overrightarrow{CB}, \text{ то}$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{BD}{BC} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{CD}{BC} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} - BD \cdot CD,$$

$$\text{или } AD^2 \cdot BC = BC \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + BD \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + CD \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} - BD \cdot CD \cdot BC.$$

Воспользовавшись теоремой косинусов для треугольника ABC со сторонами

$AB = c, AC = b, BC = a$, и которую можно записать как $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$,

преобразуем последнее выражение к виду, указанному в условии теоремы.

Детальные выкладки предлагаем выполнить самостоятельно. ■

Заметим, что приведенные задачи не только дают представление о возможностях применения векторной алгебры в геометрии, но и знакомят с важными теоремами планиметрии, которые следует взять на вооружение.

3. Применение векторов при решении физических задач

Слово «вектор» происходит от латинского *veher* (тянуть, толкать). Основы векторного исчисления созданы в середине XIX века, а уже в конце XIX века им широко пользовались в физике. Секрет такого быстрого (по историческим масштабам!) и мощного проникновения векторов в физику в том, что понятие вектора хорошо описывает широкий класс физических величин — векторных величин, а операции над векторами и соотношения между векторами имеют глубокий физический смысл. Рассмотрим задачи, иллюстрирующие сказанное.

Задача 1. На материальную точку действуют две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные под углом α друг к другу, модули которых равны F_1 и F_2 . Найти модуль равнодействующей и углы, которые она образует с данными силами, если $F_1 = 48$ Н, $F_2 = 34$ Н, $\alpha = 120^\circ$.

Решение. Пусть $\vec{F}$ — равнодействующая $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, т. е. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис. 14). Пользуясь свойствами скалярного произведения, имеем:

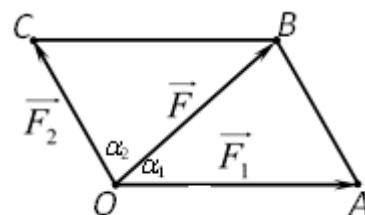


Рис. 14

$$|\vec{F}|^2 = \vec{F}^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = \vec{F}_1^2 + 2\vec{F}_1\vec{F}_2 + \vec{F}_2^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha.$$

Из треугольника AOB , применяя теорему синусов, найдем синус угла α_1 , образованного равнодействующей сил $\vec{F}$ с силой $\vec{F}_1$:

$$\sin \alpha_1 = \frac{AB}{OB} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{F_2}{F} \sin \alpha = \frac{F_2 \sin \alpha}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}}.$$

Пользуясь данными в задаче, получим $F \approx 42$ Н, $\alpha_1 \approx 35^\circ$, а угол α_2 , образованный равнодействующей со второй силой, найдем, пользуясь равенством

$$\alpha_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + 180^\circ - \alpha) = 120^\circ - 35^\circ \approx 85^\circ.$$

Ответ. ≈ 42 Н, $\approx 35^\circ, \approx 85^\circ$.

Задача 2. Лодка переправляет людей с одного берега реки на другой. Собственная скорость лодки 10 км/ч (скорость лодки в стоячей воде), а скорость течения — 5 км/ч.

1) Найти скорость удаления лодки от места отплытия, если корпус лодки направлен перпендикулярно берегам реки.

2) В каком направлении следует направить лодку, чтобы обеспечить поперечную переправу людей?

3) В каком из этих случаев люди быстрее ступят на противоположный берег?

Решение. 1) Пусть $\vec{v}_c$ — собственная скорость лодки, $\vec{v}_T$ — скорость течения реки, $\vec{v}$ — скорость удаления лодки от точки отплытия. Так как $\vec{v}$ — результирующая скорость, то $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_T$ (рис. 15).

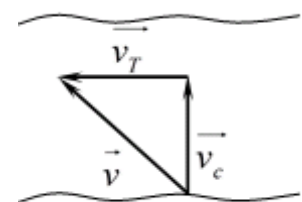


Рис. 15

Обратите внимание, что скорости — величины векторные, но в условии задачи заданы числовые значения их модулей, и в ответе также мы должны получить модуль скорости удаления. По условию $\vec{v}_c \perp \vec{v}_T$. Следовательно, $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_c|^2 + |\vec{v}_T|^2$, то есть $|\vec{v}| = \sqrt{100 + 25} = 5\sqrt{5} \approx 11$ км/ч.

2) Ситуация, при которой лодка плывет перпендикулярно берегам, изображена на рис. 16. Здесь $\vec{v} \perp \vec{v}_T$. Так как $|\vec{v}_T| = \frac{1}{2} |\vec{v}_c|$, то

угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v}_c$ равен 30° , т.е. направлять лодку нужно под углом 120° к направлению течения реки.

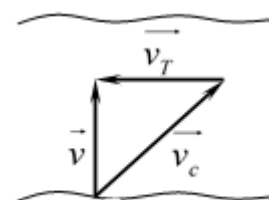
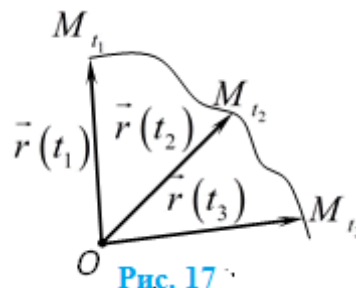


Рис. 16

3) Скорость сближения лодки с противоположным берегом во втором случае равна $|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_c|^2 - |\vec{v}_T|^2} = \sqrt{100 - 25} \approx 8,7$ км/ч и она меньше скорости сближения в первом случае, равной $|\vec{v}_c| = 10$ км/ч. Впрочем, ответ на последний вопрос задачи можно было дать и без вычислений.

Ответ. 1) ≈ 11 км/ч; 2) под углом 120° к направлению течения реки.

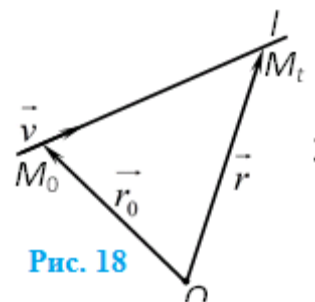
Векторы широко используются для составления законов движения. Положение движущейся материальной точки M_t можно фиксировать с помощью вектора $\overrightarrow{OM_t}$, где O — «наблюдательный пункт» (рис. 17). Его обозначают через $\vec{r}(t)$ и называют радиус-вектором точки M . Таким образом, задать закон движения точки — означает задать зависимость ее радиус-вектора от t , указав при этом область изменения переменной t : $\vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b$.



Задача 3. Доказать, что точка движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{v}$ тогда и только тогда, когда закон ее движения имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}.$$

Решение. Пусть точка движется по прямой l со скоростью $\vec{v}$ и в начальный момент ($t = 0!$) находится в точке M_0 (рис. 18). Тогда перемещение $\overrightarrow{M_0M_t}$ точки за время t пропорционально скорости $\vec{v}$: $\overrightarrow{M_0M_t} = t\vec{v}$. Вы-



разим радиус-вектор точки M_t из треугольника OM_0M_t : $\vec{r} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_t} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$. Следовательно, закон движения имеет вид: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$. При этом область изменения переменной t зависит от того, какую часть прямой проходит точка. Чтобы она «пробежала» всю прямую, t должно изменяться на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Наоборот, если точка движется по закону $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$, то $\overrightarrow{M_0M_t} = \overrightarrow{OM_t} - \overrightarrow{OM_0} = t\vec{v}$. А это значит, что в одном и том же направлении и пе-

ремещение пропорционально времени, т.е. движение равномерное. Причем скорость движения равна $\vec{v}$ ($\vec{v} = \overrightarrow{M_0 M_1}$!). ■

4.* Векторный метод в алгебраических задачах

Несмотря на то, что векторный аппарат является, по существу, алгебраическим, способы введения векторов, естественная геометрическая трактовка действий над векторами, многочисленные геометрические приложения привели к тому, что в школьном курсе математики раздел «Векторы» относится к числу геометрических. Между тем, существует немалое число алгебраических задач, которые решаются эффективно, если удастся увидеть за формальными выражениями некоторый геометрический, в частности векторный образ.

Задача 1. Доказать, что для произвольных x и y $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.

Решение. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\frac{2x}{1+x^2}$ и $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, а вектор $\vec{b}$ имеет координаты $\frac{1-y^2}{1+y^2}$ и $\frac{2y}{1+y^2}$.

$$\text{Тогда } |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2 + 1 - 2x^2 + x^4}{(1+x^2)^2}} = 1.$$

Аналогично $|\vec{b}| = 1$.

Из определения скалярного произведения следует, что для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ имеет место неравенство $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. В нашем случае

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| 2 \frac{x(1-y^2) + y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = 2 \left| \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right|, \text{ причем } |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 1. \text{ Следова-}$$

тельно, $\left| \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \leq \frac{1}{2}$. Отсюда и получаем исходное неравенство. ■

Задача 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -y(x + z), \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz = 2x + 4z + 2, \\ x^2 + y + x = -2yz. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x(x + y) + y(y + z) = 0, \\ 4(x + y)^2 + 4(y + z)^2 = (x + 1)^2 + (2z + 1)^2, \\ x(x + 1) + y(2z + 1) = 0 \end{cases}$$

и рассмотрим векторы $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x + y; y + z)$, $\vec{c} = (x + 1, 2z + 1)$. Тогда уравнения системы означают, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $4\vec{b}^2 = \vec{c}^2$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

Если $\vec{a} = 0$, то $x = y = 0$, $\vec{b} = (0; z)$, $\vec{c} = (1; 2z + 1)$, и векторное соотношение $4\vec{b}^2 = \vec{c}^2$ приводит к уравнению $4z^2 = 1 + 4z^2 + 4z + 1$, откуда $z = -\frac{1}{2}$. Мы пришли к решению системы $\left(0; 0; -\frac{1}{2}\right)$.

Если $\vec{a} \neq 0$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, поскольку оба они перпендикулярны вектору $\vec{a}$. А так как $4\vec{b}^2 = \vec{c}^2$, то $\vec{c}^2 = \pm 2\vec{b}$. Таким образом, $(x + 1; 2z + 1) = 2(x + y; y + z)$, либо $(x + 1; 2z + 1) = -2(x + y; y + z)$. Иначе,

$$\begin{cases} x + 1 = 2x + 2y, \\ 2z + 1 = 2y + 2z, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} x + 1 = -2x - 2y, \\ 2z + 1 = -2y - 2z. \end{cases}$$

Из первой системы для неизвестных x и y получим единственные значения $y = \frac{1}{2}$, $x = 0$ и, подставляя эти значения в последнее уравнение исходной системы, получим $z = -\frac{1}{2}$. Имеем, еще одно решение системы $\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Наконец, из второй системы уравнений имеем: $x = \frac{-1 - 2y}{3}$, $z = \frac{-1 - 2y}{4}$, и

после подстановки этих значений в последнее уравнение исходной системы приходим к уравнению $10y^2 - 5y + 4 = 0$, которое не имеет решений. ■

Тест для самоконтроля

1. Верно ли, что вершины квадрата задают 8 ненулевых различных векторов?
2. Являются ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равными, если прямые AB и CD параллельны, а отрезки AB и CD равны?
3. Верно ли что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$?
4. Является ли равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ необходимым для того, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом?
5. Является ли условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ достаточным для параллельности прямых AB и CD ?
6. Можно ли утверждать, что $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?
7. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$?
8. Верно ли, что $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$?
9. Верно ли, что $|\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a}|$ и $|\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{b}|$?
10. Как расположены точки A, B, M , если: а) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}$?
11. Какие значения может принимать длина суммы двух векторов, длины которых равны 3 и 4?
12. Какой геометрический смысл имеет соотношение:
а) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $||\vec{a}| - |\vec{b}|| < |\vec{a} + \vec{b}|$?
13. Верно ли, что из неравенства $k < 1$ следует неравенство $|k\vec{c}| < |\vec{c}|$?
14. Верно ли, что при $\lambda \neq 0$ из равенства $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$ следует равенство $\vec{a} = \vec{b}$?
15. Верно ли, что если $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$?
16. Верно ли, что из равенства $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ следует равенство $\vec{b} = \vec{c}$?
17. Перпендикулярны ли прямые AB и CD , если $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$?

18. Верно ли, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}$?
19. Как расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} = -3\vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; в) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 0$?
20. Всегда ли можно вектор плоскости разложить на две составляющие, если заданы направление одной и длина другой?
21. Можно ли силу в 1 Н разложить на две составляющие, модули которых равны: а) 1 Н; б) 100 Н; в) 0,3 Н?
22. Какие значения может принимать модуль вертикальной составляющей скорости точки, если модуль скорости равен 360 км/ч?
23. В каком случае две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которые начинают действовать на материальную точку, изменяют закон ее движения?
24. Обязательно ли будет тело покоиться, если на него действуют три равновесные силы, расположенные под равными друг к другу углами?
25. Чему равны координаты единичного вектора на плоскости, который образует с осью x угол: а) 45° ; б) 120° ?
26. При каких значениях α вектор $\vec{a} = (\sin \alpha; \cos \alpha)$ является единичным?
27. Верно ли, что точка движется под углом 60° к оси x , если она переместилась на вектор $\vec{S} = (3; 4)$?
28. Чему равна проекция вектора $\vec{m}$ на ось x , если $|\vec{m}| = 2$, а угол между вектором $\vec{m}$ и осью x равен 135° ?
29. При каком значении p вектор $\vec{a} = (2; p)$ противоположен вектору $\vec{b} = (-2; 3)$?
30. При каких значениях m векторы $\vec{a} = (1; 2)$ и $\vec{b} = (m; -1)$:
а) перпендикулярны; б) коллинеарны?

Ответы к тесту для самоконтроля

1. Да (количество направленных отрезков 12, а векторов — 8). 2. Нет, они могут быть противоположными. 3. Да, если допускать «вырожденный»

случай — точки A, B, C, D лежат на одной прямой. **4.** Да. **5.** Нет, прямые могут совпадать. **6.** Да. **7.** Да (вспомните геометрический смысл векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$). **8.** Нет. **9.** Нет. **10. а)** Точка M делит отрезок AB в отношении 1:2, считая от точки A ; **б)** совершенно произвольно. **11.** От 1 до 7.

12. а) Сторона треугольника меньше суммы длин двух других сторон; **б)** сторона треугольника больше модуля разности двух других сторон. **13.** Нет, например, $-2 < 1$, но $|-2\vec{c}| > |\vec{c}|$. **14.** Да. Если $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то $\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$.

15. Да, так как $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}^2 = \vec{b}^2$. **16.** Нет, данное равенство означает, что вектор $\vec{b} - \vec{c} \perp \vec{a}$, но это не означает, что обязательно $\vec{b} = \vec{c}$.

17. Да, так как $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. **18.** Нет, из данного равенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обязательно коллинеарны. **19. а)** Коллинеарны; **б)** перпендикулярны; **в)** противоположны. **20.** Нет. **21. а)** Да; **б)** да; **в)** нет ($0,3 + 0,3 < 1$!).

22. От 0 до 360. **23.** Если $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq \vec{0}$. **24.** Нет, в пространстве равнодействующая трех таких сил не обязательно равна нулю (если силы «плоские», то это так). **25. а)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **б)** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **26.** При всех. **27.** Нет. **28.** $-\sqrt{2}$. **29.** $p = -3$. **30. а)** $m = 2$; **б)** $m = -\frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Даны точки $A(1; 3)$, $B(2; 1)$, $C(-1; 3)$, $D(-2; 5)$.

1) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$.

2) Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и косинус угла между ними.

3) Вычислите длину вектора $\overrightarrow{CP}$, если $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{BP}$.

4) При каких значениях k векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = (k; 1)$ коллинеарны; перпендикулярны?

5) Определите вид четырехугольника $ABCD$.

2. Запишите в векторном виде:

- 1) точка M лежит на отрезке AB ;
- 2) три точки M, N, P лежат на одной прямой;
- 3) три точки A, B, C являются вершинами треугольника;
- 4) точка K лежит на отрезке AB и делит его в отношении $p:q$.
- 5) точки A и B совпадают;
- 6) прямые AB и CD перпендикулярны;
- 7) $\angle ABC > 90^\circ$;
- 8) точка N лежит на прямой AB .

3. Каков геометрический смысл векторных соотношений:

- 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$;
- 2) $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- 3) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})$;
- 4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|$;
- 5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|$;
- 6) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$;
- 7) $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OD}^2$;
- 8) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$;
- 9) $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$?

4. Дан вектор $\vec{a}$. Представьте графически его в виде суммы двух векторов, если известны:

- 1) направления слагаемых;
- 2) направление и длина одного из слагаемых;
- 3) направление одного и длина другого слагаемого;
- 4) длины обоих слагаемых.

5. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, длины двух смежных сторон которого равны 3 и 1, а угол между ними равен 30° .

6. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

7. Докажите, что если точка O пересечения диагоналей четырехугольника $MNPQ$ и середины B и C его противоположных сторон MN и PQ лежат на

одной прямой, то четырехугольник $MNPQ$ — трапеция или параллелограмм.

8. Найдите угол между медианами, проведенными из вершин острых углов в прямоугольном равнобедренном треугольнике.

9. Дан произвольный четырехугольник $ABCD$ и окружность, центр которой совпадает с точкой пересечения средних линий этого четырехугольника. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки M этой окружности до точек A, B, C, D постоянна.

10. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами квадрата.

11. Груз опускается на парашюте со скоростью 3 м/с. Ветром его относит в сторону со скоростью 2 м/с. Под каким углом к вертикали будет опускаться груз при этих условиях?

12. Груз массой 10 кг висит на кронштейне, состоящем из двух стержней, концы которых закреплены в стене. Длины стержней равны 0,8 м и 1,0 м. Расстояние между их концами, закрепленными в стене, равно 0,4 м. Найдите силы, действующие на стержни.

13. Груз массой m подвешен на шнуре и оттянут горизонтальной оттяжкой. Найдите модули сил натяжения шнура и оттяжки, если угол между шнуром и оттяжкой равен φ и: **а)** $m = 1$ кг; $\varphi = 120^\circ$; **б)** $m = 0,6$ кг; $\varphi = 150^\circ$.

14.* Решите уравнение $x\sqrt{1-x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$ с помощью векторов.

Указания к задачам для самостоятельной работы

5. Выразите векторы, построенные на диагоналях, через векторы, построенные на сторонах, а затем вычислите их скалярное произведение.

6. Выразите векторы, построенные на сторонах треугольника, через данные в условиях векторы.

7. Воспользуйтесь векторным условием параллельности.

13. Полезно обратиться к теоремам синусов и косинусов.

14. Рассмотрите скалярное произведение векторов $(x; 1)$ и $(\sqrt{1-x}; \sqrt{3-x})$.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		Контроль- ный тест	Основное задание	Дополнитель- ное задание
«зачтено»	Решено не менее	15 задач	25 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	20 задач	35 задач	12 задач
«отлично»	Решено не менее	25 задач	42 задач	18 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям теста для самоконтроля, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

1. Сколько различных ненулевых векторов определяют вершины параллелограмма?

А. 12. Б. 8. В. 4. Г. 16.

2. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, если ...

А. отрезки AB и DC равны. Б. лучи AB и DC сонаправлены.

В. четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Г. точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма.

3. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC . Чему равна сумма векторов $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}$?

А. $\overrightarrow{CB}$. Б. $\overrightarrow{CA}$. В. $\overrightarrow{BC}$. Г. $\overrightarrow{AC}$.

4. Известно, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Длина суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может равняться ...

А. 1. Б. 6. В. 9 Г. 15

5. Какими должны быть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы длина их суммы была наибольшей?

А. Коллинеарными. Б. Равными. В. Сонаправленными.

Г. Противоположно направленными.

6. Какое из следующих неравенств верно для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

А. $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a}|$. Б. $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{b}|$. В. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Г. $|\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

7. На материальную точку действуют две силы, модули которых 3 Н и 7 Н. Модуль равнодействующей этих сил не может равняться ...

А. 1 Н. Б. 8 Н. В. 7 Н. Г. 10 Н.

8. При каком условии приложенные к точке две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не изменяют закона ее движения?

А. $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$. Б. $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$. В. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Г. Ответ отличен от приведенных.

9. При каких значениях k справедливо неравенство $|k\vec{c}| > |\vec{c}|$, где $|\vec{c}| \neq 0$?

А. $|k| < 1$. Б. $|k| > 1$. В. $k > -1$. Г. Таких значений не существует.

10. Как расположены прямые AB и CD , если $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$?

А. Параллельны. Б. Пересекаются. В. Совпадают.

Г. Совпадают или параллельны

11. Как расположены точки A, B, M , если справедливо равенство $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$?

А. Точка A лежит между точками B и M .

Б. Точка M — середина отрезка AB .

В. Точка B — середина отрезка AM .

Г. О расположении точек A, B, M ничего нельзя сказать.

12. Если $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, то точка M делит отрезок AB на части (считая от точки A), отношение длин которых равно ...

А. 2:3.

Б. 1:2.

В. 3:2.

Г. 2:1.

13. Точка M лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда ...

А. $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Б. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$. В. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$. Г. $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

14. Какие значения может принимать угол α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$?

А. $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Б. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. В. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Г. $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

15. Если равны скалярные квадраты векторов, то ...

А. векторы равны.

Б. длины векторов равны.

В. векторы коллинеарны.

Г. о векторах ничего сказать нельзя.

16. Что можно сказать о векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$?

А. Равны.

Б. Коллинеарны.

В. Имеют равные длины.

Г. О векторах ничего сказать нельзя.

17. Как расположены ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

А. Коллинеарны.

Б. Перпендикулярны.

В. Равны.

Г. О расположении векторов ничего сказать нельзя.

18. Как расположены прямые AB и AC , если справедливо равенство

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2?$$

А. Перпендикулярны.

Б. Параллельны.

В. Совпадают.

Г. О расположении прямых ничего нельзя сказать.

19. Как расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если выполняется равенство

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2?$$

А. Коллинеарны. Б. Равны. В. Одинаково направлены.

Г. О расположении векторов ничего нельзя сказать.

20. Как расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если справедливо равенство

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}?$$

А. Сонаправлены. Б. Коллинеарны. В. Противоположно направлены.

Г. О расположении векторов ничего нельзя сказать.

21. Что можно сказать о векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если для двух перпендикулярных ненулевых векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ выполняются равенства $\vec{a} \cdot \vec{m} = \vec{b} \cdot \vec{m}$, $\vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n}$?

А. Равны. Б. Перпендикулярны. В. Противоположно направлены.

Г. О векторах ничего нельзя сказать.

22. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Какие из следующих пар векторов могут быть коллинеарны?

А. $3\vec{a}$ и $-2\vec{b}$. Б. $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a}$. В. $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

Г. Коллинеарных пар векторов нет.

23. Сколько существует различных разложений вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам?

А. Одно. Б. Ни одного. В. Два. Г. Бесконечно много.

24. Силу в 1 Н можно разложить на две составляющие, модули которых равны a и b , если ...

А. $a = 0,3$ Н, $b = 0,2$ Н. Б. $a = 4$ Н, $b = 2$ Н.

В. $a = 0,5$ Н, $b = 1$ Н. Г. $a = 0,5$ Н, $b = 0,5$ Н.

25. Модуль вертикальной составляющей скорости точки, движущейся со скоростью 1 м/с, может равняться ...

А. 2 м/с. Б. 3 м/с. В. 0,5 км/ч. Г. любой величине.

26. Даны векторы $\vec{a} = (2; -5)$ и $\vec{b} = (1; 3)$. Какое равенство неверно?

А. $\vec{a} - \vec{b} = (1; -8)$. Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$. В. $|\vec{a}| = 5$. Г. $-5\vec{a} = (-10; 25)$.

27. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен углу между векторами ...

А. $-\vec{a}$ и $\vec{b}$. Б. $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$. В. $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Г. $-2\vec{a}$ и $3\vec{b}$.

28. Под каким углом к оси x двигалась прямолинейно точка на плоскости, если она переместилась из точки $(1; 1)$ в точку $(-4; -4)$?

А. 45° . Б. 135° . В. 225° . Г. Ответ отличен от приведенных.

29. При каких значениях x векторы $(x^3 - 1)\vec{a}$ и $2x\vec{a}$ сонаправлены, если $\vec{a} \neq 0$?

А. $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$. Б. $(-\infty; 0)$. В. $(1; +\infty)$. Г. Ответ отличен от приведенных.

30. Движущееся тело имеет горизонтальную и вертикальную составляющие скорости $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем $|\vec{v}_x| = 3$ м/с, $|\vec{v}_y| = 4$ м/с. Модуль скорости равен ...

А. 7 м/с. Б. 1 м/с. В. 7 м/с. Г. 5 м/с.

Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений.

1. Каково геометрическое истолкование векторных соотношений:

а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA}$; б) $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$; в) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{OB}$; г) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$; е) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

ж) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$; з) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; и) $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

2. Даны точки $A(-2; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-3; 8)$, $D(-6; 4)$.

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

б) Найдите длины векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DC}$ и угол между ними.

в) Вычислите длину вектора $\overrightarrow{CP}$, если $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{BP}$.

г) При каких значениях k векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{d} = (2; k)$ коллинеарны; перпендикулярны?

д) Определите вид четырехугольника $ABCD$.

3. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей которой и точка пересечения прямых, содержащих её боковые стороны, лежат на одной прямой.

4. На стороне AD и на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты, соответственно, точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$, $AN = \frac{1}{6}AC$. Покажите, что точки M ,

N и B лежат на одной прямой. В каком отношении точка N делит отрезок BM ?

5. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

6. Пусть в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, пересекаются под прямым углом. Найдите угол при вершине треугольника.

7. Величина равнодействующей двух взаимно перпендикулярных сил равна 10 Н. Найдите модуль одной составляющей, если

а) модуль другой равен 8 Н;

б) эта составляющая образует с равнодействующей угол 30° .

8. Тело массой m скользит под действием силы тяжести по наклонной плоскости. Найдите модуль составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости, если $m = 2$ кг, а угол наклона плоскости к поверхности земли равен 30° .

9. Найдите углы, которые образуют составляющие силы с направлением ее действия, если их модули равны 6 Н и 9 Н, а модуль данной силы равен 13 Н.

10. Две материальные точки начинают равномерное движение из одной точки под углом α друг к другу со скоростями v_1 и v_2 . С какой скоростью они удаляются друг от друга, если

а) $v_1 = 50$ км/ч, $v_2 = 10$ км/ч, $\alpha = 90^\circ$; б) $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 4$ м/с, $\alpha = 60^\circ$?

11. Скорость течения реки 5 км/ч, ширина реки 60 м, гребец в лодке развивает скорость 3 км/ч относительно воды.

а) На какое расстояние снесет лодку, если гребец переправляется через реку, направив лодку перпендикулярно берегу?

б) Как гребец должен направлять лодку, чтобы ее снесло течением как можно

меньше? На какое расстояние ее при этом снесет?

Указания к задачам основного задания

1. Воспользуйтесь рассуждением из задачи 1 из п. «Векторы и действия над ними».
2. Воспользуйтесь векторным условием принадлежности трех точек прямой.
3. Обратитесь к задаче 2 из п. «Применение векторов к решению геометрических задач».
4. Воспользуйтесь тем, что векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ взаимно перпендикулярны, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют равные длины.
5. Запишите с помощью векторного равенства перпендикулярность векторов, соответствующих медианам, выразив их при этом через векторы, определяемые боковыми сторонами треугольника.
6. Проанализируйте задачу 1 из п. «Применение векторов к решению физических задач».
7. Воспользуйтесь решением задачи 3 из п. «Применение векторов к решению физических задач».
8. Обратитесь к теореме косинусов.

Дополнительное задание

1. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное к заданию 6 для самостоятельной работы.
2. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное к утверждению 3 из основного задания.
3. Докажите, что если точка A , в которой пересекаются продолжения сторон NP и MQ четырехугольника $MNPQ$, и середины B , C сторон MN и PQ расположены на одной прямой, то четырехугольник $MNPQ$ — трапеция.
4. Дан равнобедренный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, точка C_1 лежит на гипотенузе и отрезок CC_1 перпендикулярен медиане AA_1 . Найдите $BC_1:C_1A$.

5. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника не зависит от положения точки на окружности.

6. В произвольном четырехугольнике $ABCD$, $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, где E, F — середины диагоналей AC и BD . Найдите угол между прямыми AB и CD .

7. Между двумя стенами висит на веревках фонарь массой m . Одна из веревок образует со стеной угол α , а другая — угол β . Найдите натяжение обеих веревок, если: а) $m = 2$ кг, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$; б) $m = 2$ кг, $\alpha = 46^\circ$, $\beta = 29^\circ$.

8. Паровоз движется по прямой с запада на восток со скоростью 36 км/ч. Под углом 60° к железнодорожной линии дует юго-западный ветер. Скорость ветра равна 5 м/с. Определите, какой угол с железнодорожной линией образует столб дыма (скоростью выхода дыма из трубы следует пренебречь).

9. Имеет ли решение система неравенств

$$\begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2 < 0, x_1x_3 + y_1y_3 < 0, x_1x_4 + y_1y_4 < 0, \\ x_2x_3 + y_2y_3 < 0, x_2x_4 + y_2y_4 < 0, x_3x_4 + y_3y_4 < 0? \end{cases}$$

10. Какое наибольшее и наименьшее значение может принимать выражение

$$5\sin \alpha - 12\cos \alpha?$$

11. Докажите, что для произвольных чисел $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + \dots + y_n)^2}.$$

Указания к задачам дополнительного задания

1. Можно воспользоваться единственностью точки M , удовлетворяющей равенству $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ для фиксированных точек A, B и C .

3. Воспользуйтесь векторным условием параллельности отрезков.

4. Выразите векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и число k , а затем воспользуйтесь соотношением $\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{A_1A} = 0$ для определения k .

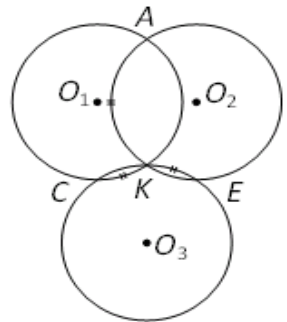
6. Доказав, что $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$, возведите полученное равенство в квадрат.

8. Полезно обратиться к теоремам синусов и косинусов.

9. Рассмотрите векторы $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$ и дайте геометрическое истолкование указанным неравенствам.
10. Рассмотрите векторы $\vec{a} = (5; -12)$, $\vec{b} = (\sin \alpha; \cos \alpha)$ и воспользуйтесь соотношением $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
11. Рассмотрите векторы $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и их сумму.

Олимпиадные задачи

1. Пусть на плоскости имеем несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек построены векторы $\overrightarrow{AB}$ так, что в каждой точке начинается столько направленных отрезков, сколько в ней заканчивается. Чему равняется сумма всех этих векторов?
2. В прямоугольнике $ABCD$ проведен перпендикуляр BK к диагонали AC . Точки M и N являются серединами AK и CD . Вычислите угол BMN .
3. Имеем два квадрата $ABCD$ и $BMNP$ такие, что точка B принадлежит отрезку AM , а точка P — отрезку BC . Найдите угол между прямыми AP и DM и вычислите отношение $DN : AP$.
4. Внутри окружности с радиусом R зафиксирована точка M . Проведите через эту точку хорду AB так, чтобы сумма $AM^2 + MB^2$ была:
- а) наибольшей; б) наименьшей.
5. Три одинаковые окружности пересекаются в одной точке, как это показано на рисунке. Чему равняется (в градусах) сумма величин отмеченных дуг AK, CK, EK ?
6. Воспользовавшись скалярным произведением векторов, найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$.



Указания к олимпиадным задачам

1. Зафиксируйте произвольную точку O и представьте каждый вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

2. Воспользовавшись векторами $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BK}$, вычислите скалярное произведение $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM}$.
3. Воспользуйтесь векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MN}$, выразив через них DN^2 и AP^2 . Угол можно найти из выражения для скалярного произведения $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DN}$.
4. Запишите данную сумму в векторной форме и выразите ее через R , OM , $\sin\beta$, где O — центр окружности, β — угол между OM и AB . Проанализируйте, при каких значениях β сумма принимает наибольшее и наименьшее значения.
5. Постройте векторы $\overrightarrow{O_1C}$, $\overrightarrow{O_2A}$, $\overrightarrow{O_3E}$ и выразите величины дуг через величины углов между этими векторами и противоположными им.
6. Рассмотрите векторы $\vec{a} = (1; 2\sqrt{2})$ и $\vec{b} = (\sqrt{x}; \sqrt{2-x})$.

Послесловие

Направленные отрезки для изображения физических величин (в первую очередь, сил) применялись еще в XVI - XVII ст. многими учеными, в частности Леонардо да Винчи (1452 - 1519), Г. Галилеем (1564 - 1642), Й. Кеплером (1571 - 1630). Нидерландский ученый С. Стевин (1548 - 1620) широко пользовался правилом параллелограмма для проектирования разных сооружений. Но современный вид векторное исчисление приобрело сравнительно недавно. Термин "вектор" (*vektor*) в переводе с латинского означает "тот, который несет", "несущий". Его ввел в 1845 году ирландский математик В. Гамильтон (1805 - 1865). Векторное исчисление, то есть исчисление с направленными отрезками, приобрело современный вид в конце XIX ст. в трудах Дж. Гиббса (1839 - 1903) и О. Хевисайда (1850 - 1925). Идея использования геометрических образов (отрезков) для представления ими величин относится к седой древности. Ведь мировой феномен — греческая математика — была геометрической. Числа отождествлялись с отрезками, действия над ними толковались с позиций геометрии, геометрическими средствами решались разные арифметические и алгебраические задачи (например, задачи, которые сейчас моделируются квадратными

уравнениями). Однако понадобилось свыше 2000 лет для создания своеобразного исчисления направленных отрезков.

Исторически развитие векторного исчисления шло тремя путями: геометрическим (исчисление отрезков), физическим (исследование векторных величин) и алгебраическим (сведение векторов к числам).

Применение векторов при моделировании объектов и явлений окружающей среды было быстро и охотно воспринято физиками, по-

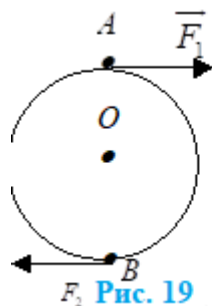


Рис. 19

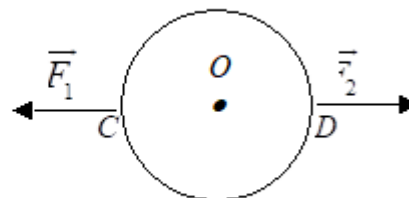


Рис. 20

тому что физический подход играл ведущую роль. В то же время, алгебраический подход открыл новые средства исследования векторных величин, возможности широкого обобщения векторного исчисления, распространения и проникновения идей векторной алгебры в разные разделы математики.

Алгебраический подход к векторам, когда в системе координат на плоскости вектор определяется парой вещественных чисел, приводит к естественному обобщению на пространство, где вектор характеризуется тройками чисел. А уже отсюда совсем естественно, с позиций математики, выглядит идея рассматривать n -мерные векторы, как упорядоченные последовательности из n вещественных чисел, действия над которыми производятся так же, как мы привыкли действовать над парами чисел при изучении векторов плоскости. Конечно, теория n -мерных векторов осталась бы "математической игрушкой", если бы она не нашла многочисленных приложений и в математике, и вне ее (достаточно, например, вспомнить четырехмерную геометрию в теории относительности).

Рассмотрим некоторые конкретные направления развития векторного исчисления и его обобщений, исходя из физического и алгебраического подходов. В школе изучаются свободные векторы, при введении которых отождествляются направленные отрезки, имеющие одинаковые длины и направления. А можно ли с помощью свободных векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ описать действие в точках A

и B двух равных по величине, но противоположно направленных сил, на маховик, закрепленный в точке O (рис. 19)? Сумма этих векторов равна нулю, то есть маховик должен остаться неподвижным. Но здравый смысл нам подсказывает, что маховик начнет вращаться.

Другое дело, когда силы действуют вдоль одной прямой (рис. 20), тогда действия соответствующих сил компенсируются. Возникает идея нового векторного исчисления, где отождествляются векторы (направленные отрезки), которые имеют одинаковую длину, направление и "действуют" вдоль одной прямой. При этом векторы складываются по правилу параллелограмма, если линии их действий пересекаются. В соответствии с этим правилом можно и раскладывать векторы.

Одной из ярких иллюстраций могущества векторного метода является его приложение к построению теории о центре масс системы материальных точек. Об этих возможностях свидетельствует задача.

Задача. Даны три точки A, B, C . Докажите, что существует лишь одна точка плоскости, для которой справедливо равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Именно эта точка и будет центром масс системы материальных точек A, B, C , которые имеют одинаковую массу. Эту задачу можно обобщить на произвольное количество точек и произвольные массы.

Афанасьева Ольга Николаевна
Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович
Слипенко Анатолий Константинович

Векторы и их применения

Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9 классов
Учебное пособие