



**Донецкий государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
Центр математического просвещения**

**Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л.,
Слипенко А. К.**

Числовые последовательности



**Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9-х классов**

Донецк 2025

УДК 519 11

ББК 74.262я 72

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики и информационных технологий

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
(протокол № 6 от 16 февраля 2023 г.)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л., Слипенко А. К. Числовые последовательности. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов. — Донецк. — 57 с.

Пособие предназначается для самостоятельного изучения математики обучающимися 9-х классов дополнительно к школьному курсу. Оно соответствует программе дополнительного обучения математике в открытом математическом колледже (ОМК), рекомендованной Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики (приказ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 25.06.2016г. № 863).

Пособие ориентировано на углубление и расширение знаний обучающихся о числовых последовательностях, развитие у них умений исследовать и применять их свойства.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Завершается пособие контрольным заданием, работа над которым обеспечивает контроль усвоения содержания темы. Контрольное задание, наряду с контрольным тестом, содержит основные и дополнительные задачи.

Пособие может быть использовано обучающимися девятых классов, учителями математики для организации внеурочного обучения математике.

Содержание

Предисловие	4
Введение для обучающихся	5
Введение для учителей	6
Числовые последовательности	7
Введение	7
1. Последовательности.....	8
2. Прогрессии	14
3. Метод математической индукции	28
Задания для самостоятельной работы.....	35
Тест для самоконтроля.....	35
Ответы к заданиям теста для самоконтроля	38
Указания к заданиям теста для самоконтроля.....	38
Задачи для самостоятельной работы.....	40
Ответы к задачам для самостоятельной работы.....	43
Инструкция по выполнению теста	45
Основное задание	48
Дополнительное задание	50
Указания к задачам основного задания	52
Олимпиадные задачи	52
Указания к олимпиадным задачам.....	54
Послесловие	55

Предисловие

Математическое образование является базой профессионального образования для многих профессий. Поэтому очень важно помочь обучающимся получить добротную математическую подготовку.

Предлагаемое пособие направлено на углубление математических знаний девятиклассников, на совершенствование их умений решать сложные задачи, в частности прикладные, на подготовку к итоговому оцениванию по математике, к продолжению обучения в профильной школе.

Пособие ориентировано на углубление и расширение знаний обучающихся о числовых последовательностях, развитие у них умений исследовать и применять их свойства.

В пособии содержатся понятия и утверждения, которые изучались в школьном курсе математики, некоторое их расширение, углубление, объяснения и советы, которые помогут обучающимся при решении задач.

Пособие содержит задания разных видов для формирования основных приемов математической деятельности, навыков самоконтроля. Каждый блок содержит образцы решения задач. Овладеть необходимым теоретическим материалом, проверить степень его усвоения помогут обучающимся вопросы для самоконтроля. К ним приведены ответы. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения и указания к ним.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основного и дополнительного заданий. Выполнение контрольного теста заключается в выборе правильного ответа из нескольких приведенных. В зависимости от намерений и возможностей обучающихся, они могут выполнять только контрольный тест, или контрольный тест и основное задание, или контрольный тест, основное и дополнительное задание.

Пособие предназначается для обучающихся 9-х классов разного типа образовательных учреждений, учителей математики. Оно может быть частично использовано обучающимися 10-х и 8-х классов.

Введение для обучающихся

Уважаемые друзья!

Настоящее пособие посвящено одному из важнейших классов функций — числовым последовательностям. Числовые последовательности играют важную роль в математике. Целью настоящего пособия является углубление и расширение ваших знаний о числовых последовательностях и подготовка к более основательному изучению этой темы в старших классах.

Выполнение контрольного задания, приведенного в пособии, поможет вам развить свои умения исследовать и применять функции натурального аргумента, овладеть ещё одним методом доказательства утверждений. Все необходимые для выполнения контрольного задания сведения и разъяснения приведены в пособии.

Убедиться в том, что вы усвоили данную тему, помогут тест для самоконтроля и задания для самостоятельного решения с ответами и указаниями, содержащимися в пособии. Если ваши ответы на тестовые задания не совпадают с приведенными в пособии, проанализируйте ошибки и учтите их в своей дальнейшей работе.

Контрольное задание состоит из контрольного теста, основных и дополнительных задач. Работа над контрольным тестом состоит в выборе для каждого тестового задания правильного ответа из предложенных. Помните, что правильный ответ среди них всегда имеется и он ровно один.

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений. Дополнительное задание предполагает решение более сложных задач. В пособии приведены олимпиадные задания для тех, кто хотел бы глубже овладеть методами исследования и применения последовательностей.

Надеемся, что работа над пособием будет для вас интересной и полезной.

Желаем вам успехов!

Введение для учителей

Уважаемые коллеги!

Настоящее пособие может быть использовано для организации дополнительного обучения математике, проведения факультативных занятий в 9-ом классе. Оно позволит также организовать самостоятельное обучение обучающихся математике, дополнительное к школьному.

Приведенный в пособии теоретический материал, который сопровождается решением типовых задач, достаточен для обеспечения готовности к самостоятельной работе над заданиями. Эту готовность можно проверить с помощью теста для самоконтроля. Наличие ответов и указаний к заданиям теста дает возможность корректировать подготовку учеников к обучению. В пособии помещены задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним. Оказание помощи в их решении является важной составляющей в управлении самостоятельной работой обучающихся. Формирование у обучающихся определенной последовательности действий при проработке учебного материала является необходимым условием формирования умения самостоятельно учиться.

Предложенное пособие может быть использовано как для организации индивидуального обучения, так и для проведения факультативов и других коллективных форм обучения. В начале рассмотрения темы необходимо помочь обучающимся осознать главную цель темы, ее основных заданий. Сжатый обзор теоретического материала и рекомендации к его проработке являются следующим шагом в работе с обучающимися. Наибольшее внимание следует уделить решению задач для самостоятельной работы. Именно они готовят обучающихся к выполнению контрольного задания. Целесообразно сделать акцент на самоконтроле. Надеемся, что предложенное пособие будет вашим надежным помощником в организации обучения математике, дополнительного к школьному, в организации самостоятельной работы обучающихся, в обеспечении допрофильного обучения математике.

Желаем вам успехов в обучении и воспитании детей!

Числовые последовательности

Введение

Функции, которые изучались раньше, имели своей областью определения множество вещественных чисел, или какой-то его промежуток, или объединение промежутков. Одним из важных классов функций являются последовательности, то есть функции, которые определены на всем множестве натуральных чисел, или на множестве первых n натуральных чисел. С такими функциями вы уже встречались и изучали их на уроках алгебры.

Термин "последовательность" часто употребляется в разных сферах деятельности человека. Например, технология изготовления некоторого изделия состоит из последовательности определенных производственных операций. Упражнение, которое выполняет гимнаст, являет собой последовательность отдельных элементов этого упражнения. Содержание этого термина полностью понятно — идет речь об определенном порядке следования чего-то за чем-то. В математике понятие последовательности приобретает новое содержание, которое в определенной мере отображает жизненные представления о ней, но, вместе с этим, существенно отличается от него. И в первую очередь это связано с рассмотрением так называемых бесконечных последовательностей, то есть последовательностей элементов, в которых нет последних членов. Учение о числовых последовательностях играет важную роль в математике и ее приложениях.

В данном пособии вы имеете возможность углубить свои знания, которые связаны с числовыми последовательностями и приобретены в школьном курсе алгебры. В нем определенное внимание уделяется общему понятию числовой последовательности и ее основным свойствам: возрастанию и убыванию, ограниченности и неограниченности. Эти свойства являются конкретизацией общих свойств функций для специального класса функций — функций натурального аргумента.

Основное внимание в пособии сосредоточено на рассмотрении арифметической и геометрической прогрессий. Это наиболее простые и, вместе с этим,

наиболее применимые виды числовых последовательностей. Опираясь на приобретенные знания об этих последовательностях, будут рассматриваться их приложения к решению задач разного содержания.

В разделе также представлен один из важнейших методов математики — метод математической индукции. Его назначение — обоснование огромного количества утверждений, которые связаны с функциями натуральных чисел. Этот материал рассчитан на учащихся, которые выбрали профиль обучения, где математика является ведущим предметом.

1. Последовательности

В математике довольно часто приходится рассматривать бесконечные совокупности чисел, которые можно занумеровать натуральными числами. Например, совокупность $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$ является последовательностью квадратов натуральных чисел. Имеем бесконечный набор чисел, причем, всегда можно сказать, какое число на каком месте стоит. Рассмотрим последовательные десятичные приближения числа $\sqrt{2}$, то есть будем записывать приближенно значение этого числа, учитывая каждый раз следующий десятичный знак:

$$1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \dots$$

Поскольку $\sqrt{2}$ — иррациональное число, то этот процесс будет продолжаться неограниченно, причем точно можно определить, какое число стоит на определенном месте.

Говорят, что задана **бесконечная последовательность чисел** $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число a_n . Обозначают такую последовательность через (a_n) ($a_n, n = 1, 2, \dots$). Чтобы задать бесконечную последовательность, нужно указать способ нахождения n -го члена a_n последовательности. Проще всего это сделать, задав формулу $a_n = f(n)$, то есть зависимость n -го члена от n . Например, $a_n = n^2$, $a_n = \frac{n^3 - 1}{n + 1}$, $a_n =$

$\frac{2n+1}{n^2+1}$ и т. п. В этом случае говорят, что последовательность задана **формулой n**

-го члена. Рассмотрим некоторые полезные примеры последовательностей.

Пример 1. 1. $a_n = c$. Это последовательность, у которой все элементы равняются некоторому числу c , то есть последовательность $c, c, c, \dots, c, \dots$.

2. Обозначим через $n!$ (читают n факториал) произведение первых n натуральных чисел: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Имеем последовательность $a_n = n!$ Это последовательность $1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \dots$.

3. Рассмотрим последовательность s_n площадей правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса R . Пусть AB — сторона правильного n -угольника, вписанного в окружность с центром в точке O и с радиусом R (рис. 1). Площадь этого многоугольника равняется площади треугольника AOB , умноженной на n . Пусть OC — высота треугольника AOB , тогда, учитывая, что $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, $\angle AOC$

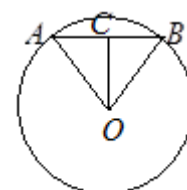


Рис. 1

$$= \frac{180^\circ}{n}, \text{ имеем: } s_n = n \cdot S_{AOB} = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OC = n \cdot R \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно, последовательность s_n площадей правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса R , определяется формулой своего n -го члена: $s_n = n \cdot R \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$, $n = 3, 4, \dots$ (мы пишем $n = 3, 4, \dots$, а не $n = 1, 2, \dots$, ибо, например, s_1 — площадь вписанного “одноугольника” — не имеет смысла).

Самостоятельно задайте формулой n -го члена последовательность:

1) (a_n) длин сторон правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса R ;

2) S_n площадей правильных многоугольников, описанных вокруг окружности радиуса R .

Не всегда правило, определяющее последовательность, можно записать аналитически, в виде формулы. Этого нельзя сделать в примере с числом $\sqrt{2}$.

Или пусть (p_n) — последовательность простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., то есть p_n — n -е по величине простое число. Для этой последовательности неизвестна формула, которая дала бы возможность вычислить значение p_n .

Если же имеем конечную совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_N$, занумерованных числами от 1 до N , то говорят, что задана **конечная последовательность**. Конечные последовательности задают также часто с помощью формулы n -го члена последовательности. Поэтому очень часто конечные последовательности являются «оборванными» бесконечными последовательностями. Такая связь позволяет употреблять термин «последовательность» без прилагательных «конечная», «бесконечная». Из текста задания обычно понятно, о каком виде последовательности идет речь.

Последовательность можно задать и другими способами. Один из них называется **рекуррентным** и заключается в том, что n -й член последовательности выражается через k предыдущих. При этом необходимо указать первые k членов последовательности. Например, $a_1 = 3, a_2 = 7, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, n \in N$.

Чтобы вычислить, например, a_{37} нужно знать a_{36} и a_{35} . Конечно, формула n -го члена последовательности для этих целей бывает удобнее. Но рекуррентный способ задания последовательностей тоже полезен. Он часто возникает в применениях.

Поскольку последовательности — частный вид функций, то среди них естественно можно выделить возрастающие и убывающие последовательности. Считают, что последовательность возрастает, если ее члены увеличиваются с ростом их номеров.

Последовательность (a_n) называется возрастающей, если для любого номера n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$.

Очевидно, что последовательность (a_n) , где $a_n = n^2$ является возрастающей.

Последовательность (a_n) называется убывающей, если для любого номера n выполняется неравенство $a_{n+1} < a_n$.

Последовательность (a_n) , где $a_n = \frac{1}{n}$, является убывающей: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$

Очевидно, что последовательность возрастающая тогда и только тогда, когда для любых n и m из неравенства $n < m$ вытекает неравенство $a_n < a_m$. (Докажите это!). Аналогичное замечание имеет место и для убывающих последовательностей.

Исследование последовательности на наличие свойства возрастания или убывания на практике сводится к оценке разности $a_{n+1} - a_n$ или отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, если для всех n $a_n > 0$.

Действительно, пользуясь определением неравенства $a > b$, придем к заключению, что когда выполняется неравенство $a_{n+1} - a_n > 0$ для всех натуральных n , то для всех натуральных n имеет место неравенство $a_{n+1} > a_n$, то есть последовательность (a_n) возрастает. И наоборот, поскольку из неравенства $a_{n+1} > a_n$ вытекает неравенство $a_{n+1} - a_n > 0$, то если последовательность (a_n) возрастает, то выполняется неравенство $a_{n+1} - a_n > 0$ для всех натуральных n . Следовательно, это неравенство является признаком возрастания последовательности. Так же, неравенство $a_{n+1} - a_n < 0$ (для всех натуральных n) является признаком того, что последовательность (a_n) убывает.

Аналогично, такие же выводы можно сделать на основе неравенств $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ или $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ при условии, что $a_n > 0$ для всех натуральных n .

Пример 2. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{n}{n+1}$ является возрастающей.

Решение. Рассмотрим разность $a_{n+1} - a_n$. Имеем

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Таким образом, при любом натуральном n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$, и потому данная последовательность возрастает. ■

Пример 3. Исследовать на возрастание и убывание последовательность с общим членом $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Решение. Поскольку $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ для всех натуральных n , то $a_n > 0$. Рассмотрим последовательность $b_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Очевидно, что $b_n > 0$ и эта последовательность является возрастающей:

$$b_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} = b_{n+1}.$$

Поскольку $a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{b_n}$, то последовательность (a_n) является убывающей. ■

Еще один вид свойств последовательностей связан с их поведением на бесконечности.

Последовательность (a_n) называется ограниченной сверху, если существует такое число M , что для любого номера n имеет место неравенство $a_n \leq M$.

Последовательность (a_n) называется ограниченной снизу, если существует такое число m , что для любого номера n имеет место неравенство $a_n \geq m$.

Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то она называется ограниченной.

Очевидно, что последовательность (a_n) , где $a_n = n^2$, является ограниченной снизу ($m = 1^2 = 1$) и не является ограниченной сверху, а последовательность (a_n) , где $a_n = -n^2$ является ограниченной сверху ($M = -1^2 = -1$) и не является ограниченной снизу. Последовательность s_n площадей правильных многоугольных, вписанных в окружность радиуса R , является ограниченной сверху (все члены этой последовательности не превышают площади правильного треугольника, описанного вокруг этой окружности) и ограниченной снизу (все члены последовательности не меньше площади правильного треугольника, вписанного в эту окружность), следовательно, она является ограниченной. Последовательность

десятичных приближений к числу $\sqrt{2}$ с недостатком является ограниченной сверху (числом M может служить, например, число 2) и ограниченной снизу (числом m может служить, например, 1), следовательно, она является ограниченной.

Из рассмотренных примеров можно прийти к общему выводу: возрастающая последовательность (a_n) всегда ограничена снизу. Все ее члены не меньше первого члена этой последовательности: $a_n \geq a_1$. Аналогично, что убывающая последовательность всегда ограничена сверху — первым членом.

Обратные утверждения, вообще говоря, не выполняются, то есть из ограниченности последовательностей никаких выводов о ее убывании или возрастании сделать нельзя. Так, последовательность $-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$ является ограниченной, но она ни возрастающая, ни убывающая. В предыдущих примерах мы видели, что ограниченная последовательность может как возрастать, так и быть убывающей.

Пример 4. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ является ограниченной.

Решение. Поскольку $a_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1$, то есть $a_n < 1$ при любом натуральном n , то последовательность (a_n) ограничена сверху. Чтобы доказать её ограниченность снизу, докажем, что она возрастающая. Для этого рассмотрим разность $a_n - a_{n+1}$. Имеем: $a_n - a_{n+1} = \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{-3}{(n+1)(n+2)} < 0$, то есть при любом натуральном n справедливо неравенство $a_n < a_{n+1}$, последовательность (a_n) возрастающая и её первый член $a_1 = -\frac{1}{2}$ является наименьшим членом этой последовательности. Таким образом, для любого натурального n справедливо неравенство $a_n \geq -\frac{1}{2}$, то есть последовательность (a_n) является ограниченной снизу. Следовательно, последовательность (a_n) ограничена сверху и ограничена снизу, поэтому она является ограниченной. ■

Пример 5. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$ является ограниченной.

Решение. Все члены данной последовательности являются положительными числами. Действительно, неравенство $a_n > 0$ вытекает из того, что $\sqrt{n^2 + 2} > \sqrt{n^2 + 1} > 0$ и из того, что функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая. Поэтому последовательность (a_n) ограничена снизу, например, нулем. Ограниченность сверху вытекает из того, что

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n^2 + 2 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} < 1.$$

Следовательно, данная последовательность является ограниченной. ■

2. Прогрессии

Одними из важнейших видов числовых последовательностей являются арифметическая и геометрическая прогрессии. Из школьного курса алгебры вам уже хорошо известны основные сведения о них. В следующей таблице представлены в сжатом виде перечнем формул основные сведения о них

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	$a_n = a_{n-1} + d, n \geq 2$	$b_n = b_{n-1} \cdot q, n \geq 2, b_1 \neq 0, q \neq 0$
Формула n -го члена	$a_n = a_1 + d(n-1), n \geq 1$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 1$
Характеристическое свойство	$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k = 2, 3, \dots$	$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}, k = 2, 3, \dots$
Формулы суммы n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \begin{cases} \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, & \text{если } q \neq 1, \\ nb_1, & \text{если } q = 1 \end{cases}$ $S_n = \begin{cases} \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, & \text{если } q \neq 1, \\ nb_1, & \text{если } q = 1 \end{cases}$

--	--	--

Анализируя определение арифметической и геометрической прогрессий, замечаем, что эти последовательности определены рекуррентно: следующий член выражается через предыдущий, кроме того, задан первый член. Таким образом, арифметическая прогрессия определяется первым членом a_1 и разностью d , а геометрическая прогрессия — первым членом b_1 и знаменателем q . Пользуясь определением, можно найти формулы n -х членов прогрессий. n -й член арифметической прогрессии зависит от переменной n линейно. Это является характеристическим свойством арифметической прогрессии, о чем свидетельствует следующая задача.

Пример 6. Доказать, что последовательность (a_n) , которая задана формулой n -го члена $a_n = an + b$, где a и b — вещественные числа, является арифметической прогрессией.

Решение. Разность последующего и предыдущего членов этой последовательности равняется $a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$, не зависит от n , то есть является постоянным для этой последовательности числом. Поэтому последовательность (a_n) , по определению, является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии равняется a , а первый член — $a_1 = a \cdot 1 + b = a + b$. ■

Связь между арифметическими прогрессиями и линейными функциями является очень тесной. Это видно из следующего примера.

Пример 7. Известно, что $y = f(x)$ — линейная функция и $x_1, x_2, x_3, \dots$ — арифметическая прогрессия. Доказать, что последовательность $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ также является арифметической прогрессией.

Решение. Пусть $f(x) = kx + l$. Рассмотрим последовательность с общим членом $y_n = f(x_n) = kx_n + l$. Разность последующего и предыдущего членов этой последовательности равняется

$y_{n+1} - y_n = (kx_{n+1} + l) - (kx_n + l) = k(x_{n+1} - x_n) = kd$, где d — разность арифметической прогрессии x_n : $d = x_{n+1} - x_n$. Поскольку разность последующего и

предыдущего членов последовательности (y_n) не зависит от n , то эта последовательность является арифметической прогрессией по определению. ■

Рассмотренный пример имеет важный смысл: если переменная x изменяется равномерно на одно и то же число, то значения линейной функции от x также изменяются равномерно.

Равенство $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n = 2, 3, \dots$ выражает важное свойство арифметической прогрессии: **каждый член арифметической прогрессии, кроме первого и последнего (для конечной прогрессии) равняется среднему арифметическому соседних с ним членов.** Справедливо и обратное утверждение: **если каждый член некоторой последовательности, кроме первого и последнего (для конечной последовательности) равняется среднему арифметическому соседних с ним членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.** Оба этих утверждения вместе образуют **характеристическое свойство** арифметической прогрессии. Следующая задача содержит ее обобщение.

Пример 8. Доказать, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2} \text{ для всех } n \geq 2 \text{ и } k < n.$$

Это утверждение имеет следующий смысл: последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой ее член, начиная со второго, равняется среднему арифметическому двух членов последовательности, равноудаленных от него, а потому суммы членов арифметической прогрессии, равноудаленных один от другого, равняются между собой.

Решение. Доказательство этого утверждения, содержащего необходимые и достаточные условия, состоит из двух частей.

1) Если последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, то

$$a_{n+k} = a_1 + d(n + k - 1), \quad a_{n-k} = a_1 + d(n - k - 1). \text{ Следовательно,}$$

$$\frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2} = \frac{a_1 + d(n+k-1) + a_1 + d(n-k-1)}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n-1)}{2} = a_n.$$

2) Пусть имеет место равенство, указанное в условии задачи. Возьмем $k = 1$. Тогда для всех $n \geq 2$ имеем $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ или $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$. Последнее равенство означает, что любые два соседних члена последовательности отличаются друг от друга на одно и то же число, то есть последовательность является арифметической прогрессией. ■

Применим доказанное утверждение для решения следующих задач.

Пример 9. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равняется 10. Найти: 1) ее шестой член; 2) сумму ее первых 11 членов.

Решение. Поскольку шестой член равноудален от третьего и девятого членов, то 1) $a_6 = \frac{a_3 + a_9}{2} = 5$; 2) $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{a_3 + a_9}{2} \cdot 11 = 55$.

Ответ: 1) 5; 2) 55.

Существует ошибочная мысль о том, например, что четыре числа образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних чисел равняется сумме средних чисел. Последовательность 1, 3, 4, 6 подтверждает несостоятельность этого утверждения.

В действительности, тот факт, что числа a_1, a_2, a_3, a_4 образуют арифметическую прогрессию, проверяется непосредственно на основании определения этой прогрессии: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$ или с помощью ее характеристического свойства.

Зависимость n -го члена геометрической прогрессии от переменной n является намного сложнее в сравнении с арифметической прогрессией. Там n является показателем степени знаменателя q . Эта зависимость станет понятнее после расширения классов функций, с которыми вы знакомы. Следующие примеры являются аналогами примеров 6 и 8 для арифметической прогрессии.

Пример 10. Доказать, что последовательность (b_n) , которая задана формулой n -го члена $b_n = k \cdot a^n$, $k \neq 0$, является геометрической прогрессией.

Решение. Отношение следующего и предыдущего членов этой последовательности равняется $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{k \cdot a^{n+1}}{k \cdot a^n} = a$, не зависит от n , то есть является постоянным для этой последовательности числом. Поэтому последовательность (b_n) , по определению, является геометрической прогрессией. Знаменатель этой прогрессии равняется a , а первый член — $b_1 = k \cdot a^1 = ka$. ■

Таким образом, равенство $b_n = k \cdot a^n$, $k \neq 0$, является характеристическим свойством геометрической прогрессии. Равенство $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n = 2, 3, \dots$ также является характеристическим свойством геометрической прогрессии.

Это характеристическое свойство геометрической прогрессии можно сформулировать так:

если квадрат каждого (кроме первого и последнего) члена числовой последовательности равняется произведению соседних с ним членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией.

Справедливо и обратное утверждение: *квадрат любого члена геометрической прогрессии (кроме первого и последнего) равняется произведению соседних с ним членов.*

Доказательство этого факта и его обобщение содержится в следующем примере.

Пример 11. Доказать, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда выполняется равенство $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$ для всех $n \geq 2$ и $k < n$.

Решение. Доказательство этого утверждения состоит из двух частей.

1) Если последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, то

$$b_{n-k} = b_1 \cdot q^{n-k-1}, \quad b_{n+k} = b_1 \cdot q^{n+k-1}. \text{ Следовательно,}$$

$$b_{n-k} \cdot b_{n+k} = b_1 \cdot q^{n-k-1} \cdot b_1 \cdot q^{n+k-1} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2 = b_n^2.$$

2) Пусть имеет место равенство $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$. Возьмем $k = 1$. Тогда

$$b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1} \text{ или } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Последнее равенство означает, что любые два соседних члена последовательности отличаются один от другого в одно и то же число раз, то есть последовательность является геометрической прогрессией. ■

Доказанное утверждение находит применение, например, при решении следующей задачи.

Пример 12. Произведение третьего и девятого членов геометрической прогрессии (b_n) равняется 16. Найти: 1) шестой член этой прогрессии; 2) произведение первых 11 ее членов.

Решение. Поскольку шестой член равноудален от третьего и девятого членов, то

$$1) b_6^2 = b_3 \cdot b_9 = 16; b_6 = \pm 4.$$

2) Произведение первых 11 членов равняется

$$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot \dots \cdot b_1 q^{10} = b_1^{11} q^{1+2+\dots+10} = b_1^{11} q^{\frac{1+10}{2} \cdot 10} = b_1^{11} q^{55} = (b_1 q^5)^{11} = b_6^{11} = (\pm 4)^{11}$$

При нахождении показателя степени знаменателя q мы воспользовались формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Ответ: 1) ± 4 ; 2) $(\pm 4)^{11}$.

Так же, как и в случае арифметической прогрессии, если в последовательности с положительными числами произведение членов, равноудаленных от концов, равняется произведению крайних членов, то эта последовательность не обязательно должна быть геометрической прогрессией (например, числа 2, 3, 4, 6 не образуют геометрическую прогрессию, хотя и выполняется условие $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$).

Имея арифметическую прогрессию (a_n) , можно образовать новые арифметические прогрессии, связанные с ней. Например, последовательность $a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$ является также арифметической прогрессией (найдите ее разность). Арифметической прогрессией является и последовательность $a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}, \dots$. Аналогичные построения возможны и для геометрической прогрессии.

Если есть две арифметических прогрессии (a_n) и (b_n) , то можно образовать новые последовательности, выполняя операции над членами этих последовательностей. Например, можно образовать последовательности $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$. Докажите самостоятельно, что первые две из этих последовательностей являются арифметическими прогрессиями, а третья, в общем случае, нет. Аналогичные построения применимы и для геометрических прогрессий. Там даже можно рассматривать и последовательность $\frac{a_n}{b_n}$ (почему?).

Наиболее важные применения прогрессий связаны с суммированием. Анализируя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии, можно сделать вывод, что сумма n первых членов является квадратичной функцией от n с нулевым свободным членом $\left(S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2} \right)n \right)$. Возникает вопрос, справедливо ли обратное утверждение: то есть, будет ли последовательность, сумма n первых членов которой является квадратичной функцией от n с нулевым свободным членом, арифметической прогрессией? Ответ на этот вопрос содержится в решении следующей задачи.

Пример 13. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n = an^2 + bn$. Доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

Решение. Нетрудно заметить, что n -й член данной последовательности можно найти как разность между суммой n и суммой $n - 1$ первых членов этой последовательности:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (an^2 + bn) - (a(n-1)^2 + b(n-1)) = 2a_n + b - a.$$

В соответствии с утверждением, доказанным при решении примера 6, данная последовательность является арифметической прогрессией. Ее первый член равняется $a + b$, а разность — $2a$. ■

Подобная ситуация имеет место и для геометрической прогрессии, только там идет речь о функции, которая будет изучаться в старшей школе, — о показательной функции.

Пример 14. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности вычисляется с помощью формулы $S_n = a - aq^n$. Доказать, что эта последовательность является геометрической прогрессией.

Решение. Как и для любой последовательности, n -й член данной последовательности можно найти как разность между суммой n и суммой $n - 1$ первых членов этой последовательности: $a_n = S_n - S_{n-1} = (a - aq^n) - (a - aq^{n-1}) = a(1 - q)q^{n-1}$. В соответствии с утверждением, доказанным при решении примера 10, данная последовательность является геометрической прогрессией. Ее первый член равняется $a(1 - q)$, а знаменатель — q . ■

Из формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии вытекает

важное следствие: $\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}}_{n \text{ членов}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, где $q \neq 1, n = 1, 2, 3, 4, \dots$

С этой формулой тесно связано следующее тождество:

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$, которое справедливо для всех чисел a, b и для $n = 2, 3, 4, \dots$. Чтобы доказать его в случае, когда $a \neq 0$, положим $q = \frac{b}{a}$ и умножим обе части полученного равенства на a^n . При $a = 0$ это тождество очевидно.

Рассмотренное тождество может быть эффективно использовано при решении разных задач, в частности задач на делимость чисел.

Пример 15. Доказать, что $11^{10} - 1$ делится на 100.

Решение. Из приведенного тождества вытекает, что

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1).$$

Первый сомножитель в правой части последнего равенства равняется 10, второй является суммой 10 слагаемых, каждый из которых заканчивается на 1, и потому делится на 10. Следовательно, $11^{10} - 1$ есть произведение 10 на число, делящееся на 10, и поэтому делится на 100. ■

При рассмотрении бесконечно убывающей геометрической прогрессии нужно четко понимать, что сумма бесконечного множества чисел — это совсем

новое понятие, которое существенно отличается от понятия обычной суммы в арифметике.

Сумма $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ конечного количества чисел имеет полностью определенный смысл: нужно найти число $S_2 = u_1 + u_2$, к полученному числу S_2 прибавить u_3 и получить $S_3 = S_2 + u_3 = u_1 + u_2 + u_3$ и т. д., пока не будут исчерпаны все данные числа.

Однако, если чисел бесконечно много, то это определение суммы нельзя применить, потому что нельзя исчерпать всех данных чисел. В этом случае подсчитаем так называемые частичные суммы, то есть:

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \dots$$

Члены полученной числовой последовательности $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ могут неограниченно приближаться к некоторому числу, которое называется **суммой чисел** $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. В ином случае, говорят, что сумма чисел $u_1, u_2, \dots, u_n$ не определена.

Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b, bq, bq^2, \dots, bq^{n-1}, \dots, 0 < |q| < 1$ последовательность частичных сумм стремится к числу $S = \frac{b}{1-q}$.

Эта формула находит широкое приложение в математике. Ярким примером ее приложения является преобразование десятичной периодической дроби в обыкновенную.

Пример 16. Представить дробь $0,4(56)$ в виде обыкновенной.

Решение. Данную периодическую дробь можно записать в следующем

виде: $0,4(56) = \frac{4}{10} + \left(\frac{56}{10^3} + \frac{56}{10^5} + \frac{56}{10^7} + \dots \right)$. В правой части равенства выражение в скобках является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (a_n) , у которой $a_1 = \frac{56}{1000}, q = \frac{1}{100}$. Поэтому

$$0,4(56) = \frac{4}{10} + \left(\frac{56}{10^3} + \frac{56}{10^5} + \frac{56}{10^7} + \dots \right) = \frac{4}{10} + \frac{0,056}{1-0,01} = \frac{4}{10} + \frac{56}{990} = \frac{452}{990} = \frac{226}{495}.$$

Ответ: $0,4(56) = \frac{226}{495}$.

Далее приведены задачи на прогрессии и их приложения.

Пример 17. Найти общий член последовательности 2, 4, 7, 11, ..., для которой разности между соседними членами составляют арифметическую прогрессию.

Решение. Обозначим n -й член данной последовательности через a_n . Тогда $a_2 - a_1 = b_1$, $a_3 - a_2 = b_2$, $a_4 - a_3 = b_3$, ..., $a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$, где числа $b_1, b_2, b_3, \dots$ образуют арифметическую прогрессию. Сложив все выписанные равенства, получим

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} = a_1 + \frac{2b_1 + d(n-2)}{2} \cdot (n-1),$$

где $b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$, $d = b_2 - b_1 = 3 - 2 = 1$, $a_1 = 2$.

$$\text{Поэтому } a_n = 2 + \frac{4 + 1 \cdot (n-2)}{2} \cdot (n-1) = 2 + \frac{(n+2)(n-1)}{2}.$$

Ответ: $a_n = 2 + \frac{(n+2)(n-1)}{2}$.

Пример 18. При каких условиях три члена геометрической прогрессии, стоящие подряд, могут быть длинами сторон треугольника?

Решение. Пусть b, bq, bq^2 — три последовательных члена геометрической прогрессии, которые являются длинами сторон треугольника, $b > 0$, $q > 0$. Значение $q = 1$ удовлетворяет условию: будем иметь дело с равносторонним треугольником.

Известно, что три отрезка образуют треугольник тогда и только тогда, когда наибольший из них меньше суммы двух других.

Пусть $q > 1$. Выясним, при каких условиях $bq^2 < b + bq$. Поскольку $b > 0$, $q > 0$, то решения этого неравенства имеют вид $1 < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Если $0 < q < 1$, то получим неравенство $b < bq + bq^2$, решения которого имеют вид: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1$.

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad b > 0.$$

Анализируя определения арифметической и геометрической прогрессий, замечаем, что эти последовательности определены рекуррентно. Важной задачей для последовательностей, заданных рекуррентным соотношением, является задача нахождения формулы, которая выражает n -й член как функцию от n .

Пример 19. Определить общий член последовательности, заданной соотношением $a_{n+1} = a_n + b^{n+1}$, $b \in \mathbf{R}$, $a_1 = 3$.

Решение. Если существует последовательность, заданная приведенным рекуррентным соотношением, то для натуральных чисел $1, 2, \dots, n-1$ имеем

$$a_2 = a_1 + b^2,$$

$$a_3 = a_2 + b^3,$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + b^n.$$

Складывая эти равенства, получим: $a_2 + \dots + a_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + b^2 + \dots + b^n$.

Замечаем, что обе части последнего равенства содержат общие слагаемые $a_2 + \dots + a_{n-1}$. После приведения подобных членов и учета равенства $a_1 = 3$ будем иметь: $a_n = 3 + b^2 + b^3 + \dots + b^n$. Применяя формулу суммы членов

геометрической прогрессии, имеем:
$$a_n = \begin{cases} 3 + \frac{b^2(b^{n-1}-1)}{b-1}, & \text{если } b \neq 1, \\ n+2, & \text{если } b = 1. \end{cases}$$

Этот результат получен в предположении, что последовательность существует. Проверка показывает, что найденная последовательность удовлетворяет данному рекуррентному соотношению. Действительно, при $b \neq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3 + \frac{b^2(b^n-1)}{b-1}, \quad a_n + b^{n+1} = 3 + \frac{b^2(b^{n-1}-1)}{b-1} + b^{n+1} = \\ &= 3 + \frac{b^{n+1} - b^2 + b^{n+2} - b^{n+1}}{b-1} = 3 + \frac{b^2(b^n-1)}{b-1}. \end{aligned}$$

Аналогично при $b = 1$ получим: $a_{n+1} = n+3$; $a_n + b^{n+1} = n+2+1 = n+3$.

$$\text{Ответ: } a_n = \begin{cases} 3 + \frac{b^2(b^{n-1} - 1)}{b - 1}, & \text{если } b \neq 1, \\ n + 2, & \text{если } b = 1. \end{cases}$$

Пример 20. Непровеянное зерно содержит $k\%$ мусора. После каждого провеивания количество мусора в этом зерне уменьшается на $q\%$, а количество чистого зерна остается неизменным. Какой будет засоренность зерна после n провеиваний?

Решение. Обозначим массу провеянного зерна через m (кг). Тогда оно содержит $\frac{mk}{100}$ кг мусора и $\frac{m(100 - k)}{100}$ кг чистого зерна. В процессе провеивания масса зерна остается неизменной, а количество мусора уменьшается. В результате первого провеивания масса мусора уменьшится на $\frac{mk}{100} \cdot \frac{q}{100}$ кг и будет составлять $\frac{mk}{100} - \frac{mk}{100} \cdot \frac{q}{100} = \frac{mk}{100} \cdot \frac{100 - q}{100}$ (кг). Нетрудно заметить, что каждое провеивание снижает массу мусора до $\frac{mk}{100} \cdot \frac{q}{100}$ того количества, которое было до этого провеивания. Следовательно, массы мусора после последовательных провеиваний образуют геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{mk}{100}$ и знаменателем $\frac{100 - q}{100}$. Масса мусора после n провеиваний является $(n + 1)$ членом этой геометрической прогрессии и, согласно формуле общего члена геометрической прогрессии, равняется $\frac{mk}{100} \cdot \left(\frac{100 - q}{100}\right)^n$ кг.

Естественно засоренностью зерна назвать отношение массы мусора к массе засоренного зерна. Потом n провеиваний она будет составлять

$$\frac{\frac{mk}{100} \cdot \left(\frac{100 - q}{100}\right)^n}{\frac{mk}{100} \cdot \left(\frac{100 - q}{100}\right)^n + \frac{m(100 - k)}{100}} \quad \text{Ответ: } \frac{\frac{mk}{100} \cdot \left(\frac{100 - q}{100}\right)^n}{\frac{mk}{100} \cdot \left(\frac{100 - q}{100}\right)^n + \frac{m(100 - k)}{100}}.$$

Пример 21. * Бак, который имеет форму прямоугольного параллелепипеда, наполнен водой. Высота бака равняется h . На боковой стенке проведена горизонтальная прямая, которая разделяет ее на две части. На каком расстоянии от верхней кромки стенки должна находиться эта прямая, чтобы давление воды на верхнюю часть стенки составляло не больше, чем $\frac{1}{k}$ ее давления на всю стенку?

Решение. Пусть a — ширина стенки $ABCD$, $KB = x$ — искомое расстояние горизонтальной прямой KL от верхней кромки этой стенки, а P и p — давления воды на всю эту стенку и на ее верхнюю часть $KBCL$ (рис. 2). Согласно условию, имеем неравенство $p \leq \frac{P}{k}$. Разделим стенку $ABCD$ на n равных горизонтальных

полосок. Площадь каждой из этих полосок равняется $a \cdot \frac{h}{n}$, а расстояния их ниж-

них кромок от BC образуют арифметическую прогрессию $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}, \dots, \frac{kh}{n}, \dots, \frac{(n-1)h}{n}, h$. Будем считать, что в пределах каждой из полосок

давление остается неизменным. Погрешность, которая возникает при этом, будет тем меньше, чем больше будет n , то есть чем меньше будет ширина полосок. Из курса физики известно, что сила давления жидкости на

горизонтальный участок равняется $P = g\rho hS$, где S — площадь участка, h — глубина его погружения, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости (в нашем случае $\rho = 1$). Давления, которые испыты-

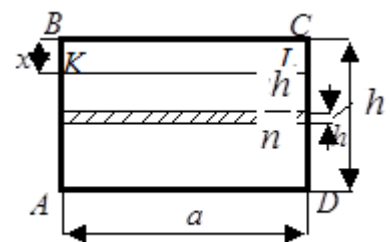


Рис. 2

вают эти полоски, также образуют арифметическую прогрессию

$$g \cdot \frac{ah}{n} \cdot \frac{h}{n}, g \cdot \frac{ah}{n} \cdot \frac{2h}{n}, g \cdot \frac{ah}{n} \cdot \frac{3h}{n}, \dots, g \cdot \frac{ah}{n} \cdot \frac{kh}{n}, \dots, g \cdot \frac{ah}{n} \cdot \frac{(n-1)h}{n}, g \cdot \frac{ah}{n} \cdot h,$$

$$\text{или} \quad \frac{gah^2}{n^2}, \frac{2gah^2}{n^2}, \frac{3gah^2}{n^2}, \dots, \frac{kgah^2}{n^2}, \dots, \frac{gah^2}{n}.$$

Таким образом, используя формулу суммы первых членов арифметической прогрессии, имеем:

$$P \approx \frac{gah^2}{n^2} + \frac{2gah^2}{n^2} + \frac{3gah^2}{n^2} + \dots + \frac{gah^2}{n} = \left(\frac{gah^2}{n^2} + \frac{gah^2}{n} \right) \cdot \frac{n}{2},$$

то есть $P \approx \frac{gah^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. Эта приближенная формула тем точнее, чем больше n .

При неограниченном увеличении n дробь $\frac{1}{n}$ стремится к 0. Поэтому $P = \frac{gah^2}{2}$.

Аналогично найдем, что $p = \frac{gax^2}{2}$. Теперь неравенство $p \leq \frac{P}{k}$ принимает вид

$$\frac{gax^2}{2} \leq \frac{gah^2}{2k}, \text{ откуда, учитывая, что } x > 0, \text{ имеем: } 0 < x \leq \frac{h}{\sqrt{k}}.$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{h}{\sqrt{k}}$.

Пример 22. Дано две бесконечно убывающие геометрические прогрессии, которые отличаются друг от друга только знаком их знаменателей. Их суммы соответственно равняются S_1 и S_2 . Найти сумму квадратов членов каждой из данных прогрессий.

Решение. Обозначим через a_1 первые члены данных прогрессий, а через q и $-q$ знаменатели соответственно первой и второй из них, $|q| < 1$. Тогда

$$\frac{a_1}{1-q} = S_1; \quad \frac{a_1}{1+q} = S_2.$$

Последовательность, составленная из квадратов членов одной из данных прогрессий, является бесконечной геометрической прогрессией, первый член которой a_1^2 , а знаменатель q^2 . Поскольку $0 < q^2 < 1$, то эта прогрессия убывающая, ее сумма равняется $S = \frac{a_1^2}{1-q^2} = S_1 S_2$.

Ответ: $S_1 S_2$.

3. Метод математической индукции

Индукцией называют метод рассуждений, который ведет от отдельных примеров к некоторому общему выводу. Рассмотрим, например, сумму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Полагая последовательно $n = 1, 2, 3, \dots$, будем получать суммы первых нескольких слагаемых :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; & S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}; & S_3 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}; \\ S_4 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}; & S_5 &= \frac{4}{5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{5}{6} \end{aligned}.$$

Нетрудно заметить, что во всех приведенных примерах сумма первых нескольких слагаемых рассмотренной суммы равняется дроби, числитель которой равняется количеству слагаемых, а знаменатель на 1 больше числителя. Напрашивается вывод, что это свойство имеет место при любом количестве слагаемых. Наше предположение (гипотезу) можно сформулировать таким способом: «Для всех натуральных n справедливо равенство

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ »}.$$

Таким образом, рассмотренные примеры привели нас к гипотезе, которая, как мы сейчас покажем, является правильной.

Действительно, из равенства $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ вытекает, что

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Однако не всегда, гипотеза, полученная индукцией, оказывается правильной. В одном из своих исследований знаменитый петербургский математик Л. Эйлер (1707 - 1783) писал: «У меня нет для доказательства никаких других доводов, за исключением длительной индукции, что я провел так далеко, что никоим

образом не могу сомневаться в законе, который руководит образованием этих членов И кажется невозможным, чтобы закон, что, как было обнаружено, выполняется, например, для 20 членов, нельзя было бы наблюдать и для следующих».

Эта фраза показывает, что математики не только часто употребляли индукцию, но и верили в безгрешность ее выводов. Однако то, что казалось Эйлеру невозможным, нередко оказывалось возможным.

Известный отечественный математик Д. О. Граве (1863 - 1939), который много лет работал в Харьковском и Киевском университетах, на основе многочисленных проверок выразил предположение, что число $2^{p-1} - 1$ не делится на p^2 , если p — простое число. В следующей таблице приведены результаты нескольких таких проверок.

p	$2^{p-1} - 1$	Не делится на
$p = 2$	$2^1 - 1 = 1$	$p^2 = 4$
$p = 3$	$2^2 - 1 = 3$	$p^2 = 9$
$p = 5$	$2^4 - 1 = 15$	$p^2 = 25$
$p = 7$	$2^6 - 1 = 63$	$p^2 = 49$
$p = 11$	$2^{10} - 1 = 1023$	$p^2 = 121$
$p = 13$	$2^{12} - 1 = 4095$	$p^2 = 169$
$p = 17$	$2^{16} - 1 = 65535$	$p^2 = 289$

Оказалось, что гипотеза остается справедливой, если p меньше 1093, но число $2^{1092} - 1$ делится на 1093^2 .

Подставляя в квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + x + 41$ вместо x натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, найдем:

$$P(1) = 43; P(2) = 47; P(3) = 53; P(4) = 61; P(5) = 71.$$

Все полученные значения данного трехчлена являются простыми числами. Подставляя вместо x числа 0, -1, -2, -3, -4, получим: $P(0) = 41$; $P(-1) = 41$; $P(-2) = 43$; $P(-3) = 47$; $P(-4) = 53$. Значения данного трехчлена при отмеченных значениях переменной x также являются простыми числами.

Возникает гипотеза, что значение трехчлена $P(x)$ является простым числом при любом целом значении x . Однако сформулированная гипотеза ошибочна, потому что, например, $P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть высказано утверждение, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых или простое число, или квадрат целого числа. Проверяя это утверждение для натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., каждый раз будем убеждаться в его справедливости: $1 = 1^2 + 0^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $3 = 2 + 1^2$, $4 = 3 + 1^2$, $5 = 3 + 2$, $6 = 2 + 2^2$, $7 = 3 + 2^2$ и т. д. Продолжая проверку дальше, можно дойти до 20, 50, 100. И для всех этих натуральных чисел рассмотренное утверждение выполняется. Возможно, не стоит дальше проверять и принять, что оно будет выполняться всегда? Оказывается, нет: число 127 уже не обладает сформулированным свойством.

Таким образом, тот же метод рассуждений приводит в некоторых случаях к правильному выводу (в первом примере), а в других — к ошибочному выводу (в других примерах). Поскольку при этом методе вывод делается после разбора нескольких примеров, которые не охватывают всех возможных случаев, то этот метод называется *неполной индукцией*.

Метод неполной индукции не приводит к полностью надежным выводам, но он полезен тем, которое позволяет сформулировать гипотезу, которую потом можно доказать или опровергнуть.

К середине семнадцатого века в математике накопились достаточное количество ошибочных индуктивных утверждений. Поэтому возникла потребность научиться обосновывать справедливость утверждений для выражений, которые зависят от переменной n , принимающей значения 1, 2, 3, ... В результате длинных поисков был изобретен фундаментальный прием доказательства, который обычно называют *методом математической индукции*. Большая заслуга в изобретении и использовании этого метода принадлежит выдающимся математикам семнадцатого столетия Б. Паскалю (1623 - 1662), Р. Декарту (1596 - 1650), Я. Бернулли (1654 - 1705).

Идею этого метода можно наглядно представить себе, если считать, что утверждение — это ступеньки на бесконечном пути познания. Как гарантировать прохождение этого пути? Во-первых, необходимо подняться на какую-то ступеньку, возможно, на первую. Во-вторых, гарантировать переход из каждой ступеньки на следующую. Здравый смысл свидетельствует, что при таких гарантиях на этом пути не будет преград. Математическое представление этого представления и составляет **принцип математической индукции**. Применения этого принципа для доказательства утверждений называют доказательством методом математической индукции.

Доказательство с помощью метода математической индукции заключается в следующем. Во-первых, проверяется правильность утверждения для $n = 1$ (или некоторого числа $n_0 > 1$). Во-вторых, доказывается теорема: «Если утверждение справедливо для $n = k$, то оно справедливо и для $n = k + 1$ ». Если эта теорема доказана, то можно утверждать, что утверждение справедливо для всех натуральных чисел, начиная с того, которое рассматривалось на первом шаге.

Пример 23. Найти сумму n первых нечетных чисел

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Решение. Обозначив эту сумму через $S(n)$, положим $n = 1, 2, 3, 4, 5$; тогда будем иметь:

$$S(1) = 1,$$

$$S(2) = 1 + 3 = 4,$$

$$S(3) = 1 + 3 + 5 = 9,$$

$$S(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$

$$S(5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Замечаем, что при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ сумма n первых нечетных чисел равняется n^2 . Можно ли отсюда сразу сделать вывод, что это имеет место при любом n ? Нет, подобный вывод «по аналогии» может оказаться ошибочным. Мы это видели на ряде примеров. Следовательно, формулу $S(n) = n^2$ нельзя считать доказанной, для скольких бы первых значений n мы ее ни проверили. Чтобы убедиться в ее справедливости для всех n , надо доказать, что как бы далеко мы не

продвинулись вдоль натурального ряда чисел, мы сможем предпринять еще один шаг.

Допустим, что рассмотренная формула выполняется для $n = k$, и попробуем доказать, что тогда она выполняется и для следующего числа $n = k + 1$.

Таким образом, мы допускаем, что $S(k) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ и докажем, что $S(k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

На основе сделанного предположения сумма k первых слагаемых в средней части последнего равенства равняется k^2 , поэтому $S(k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Следовательно, допустив, что формула $S(n) = n^2$ выполняется для какого-то натурального числа k , мы смогли доказать ее правильность и для непосредственно следующего числа $k + 1$. Но раньше мы проверили, что эта формула выполняется для $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно, она будет правильной и для числа $n = 6$, которое непосредственно следует за 5, а тогда она справедлива и для $n = 7$, и для $n = 8$, и для $n = 9$ и т. д. Теперь наша формула может считаться доказанной для любого количества слагаемых. ■

Следовательно, доказательство методом математической индукции состоит из следующих двух частей:

1) проверки того, что высказанное утверждение выполняется для некоторого значения n (понятно, этим значениям n не обязательно является единица, так, например, утверждения об общих свойствах n -угольников имеют смысл при $n \geq 3$);

2) доказательства того, что если это утверждение выполняется для натурального числа $n = k$, то оно выполняется и для непосредственно следующего числа $n = k + 1$.

В необходимости второй части доказательства мы уже убедились раньше на ряде примеров. Но и первая часть рассуждений не менее необходима: ведь доказательство того, что если какое-то утверждение выполняется для некоторого числа $n = k$, то оно выполняется и для числа $n = k + 1$, само по себе ничего не дает, потому что может оказаться, что это утверждение не выполняется вообще

ни для одного значения n . Проиллюстрируем эту необходимость следующим примером.

Выскажем сознательно неправильное утверждение: произведение первых n натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ является числом иррациональным.

Допустим, что это утверждение выполняется при $n = k$, и докажем, что оно имеет место и при $n = k + 1$, то есть произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1)$ является числом иррациональным. Это вытекает из того, что произведение иррационального числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$ на натуральное число $k + 1$ является числом иррациональным. Вторую часть доказательства методом математической индукции мы провели. Однако мы не установили, что при каком-то натуральном значении n это произведение является иррациональным, и не можем этого установить, потому что это неправильно.

Методом математической индукции можно доказать правильность формул n -го члена арифметической и геометрической прогрессий, сумм n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Рекомендуем провести самостоятельно эти доказательства.

В начале данного пункта мы выразили гипотезу о том, что $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Это равенство было доказано другим методом. Докажем его методом математической индукции.

Проверка его правильности при $n = 1$ была выполнена раньше.

Допустим, что $S_k = \frac{k}{k+1}$ и докажем, что $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Пример 24. Доказать равенство $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. 1. $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

2. Допустим, что равенство является правильным при $n = k$, то есть $S_2(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ и докажем, что оно выполняется для $n = k + 1$:

Применяя предположение, имеем:

$$\begin{aligned} S_2(k+1) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. ■

Метод математической индукции применяется в самых разнообразных областях математики.

Пример 25. Доказать, что при натуральном n выполняется неравенство $2^{n+2} > 2n + 5$.

Решение. 1. Неравенство справедливо при $n = 1$, поскольку $2^3 > 2 + 5$.

2. Допустим, что неравенство, которое доказывается, является правильным при $n = k$, то есть $2^{k+2} > 2k + 5$. Тогда при $n = k + 1$ будем иметь:

$$2^{(k+1)+2} = 2^{k+2} \cdot 2 > (2k + 5) \cdot 2 = 2(k + 1) + 5 + (2k + 3) > 2(k + 1) + 5,$$

то есть $2^{(k+1)+2} > 2(k + 1) + 5$. Следовательно неравенство $2^{n+2} > 2n + 5$ справедливо при любом натуральном n . ■

Пример 26. Доказать, что выражение $2^{2n} + 15n - 1$ при любом натуральном значении n делится на 9.

Решение. 1. При $n = 1$ значение данного выражения равняется 18 и делится на 9.

2. Допустим, что значение выражения при $n = k$, то есть $2^{2k} + 15k - 1$, делится на 9 и докажем, что при этом предположении значение выражения при $n = k + 1$, то есть $2^{2(k+1)} + 15(k + 1) - 1$, делится на 9. Имеем:

$$2^{2k+2} + 15(k + 1) - 1 = 4 \cdot 2^{2k} + 15k + 15 - 1 = 4 \cdot 2^{2k} + 60k - 4 - 45k + 18 =$$

$$= 4(2^{2k} + 15k - 1) - 9(5k - 2).$$

Первое слагаемое делится на 9, согласно предположению, второе слагаемое тоже, очевидно, делится на 9. Поэтому и сумма делится на 9. Следовательно, утверждение доказано для всех натуральных n . ■

Пример 27. Доказать, что число, составленное из $3n$ одинаковых цифр, делится на 3^n (так, число 222 делится на 3, число 777 777 777 делится на 9 и т. д.).

Решение. 1. Для $n = 1$ утверждение является правильным: число $\overline{aaa}$, составленное из трех одинаковых цифр, делится на 3, потому что сумма цифр этого числа, равная $3a$, делящаяся на 3 (черточка наверху в числе $\overline{aaa}$ поставлена для того, чтобы не путать с произведением $a \cdot a \cdot a$).

2. Допустим, что данное утверждение имеет место для $n = k$, то есть для каждого числа, составленного из $3k$ одинаковых цифр, и докажем его для $n = k + 1$, то есть для числа, составленного из $3k + 1$ одинаковой цифры. Число, составленное из $3k + 1$ одинаковой цифры, можно представить в следующем виде: .

$$\underbrace{\overline{aa\dots a}}_{3^k \text{ раз}} \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{3^k \text{ раз}} \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{3^k \text{ раз}} = \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{3^k \text{ раз}} \cdot \underbrace{100\dots 0}_{3^k \text{ цифр}} \underbrace{100\dots 0}_{3^k \text{ цифр}} 0$$

Но из двух сомножителей первый в силу предположения индукции делится на 3^k , а второй делится на 3; следовательно, все произведение делится на 3^{k+1} . Таким образом, утверждение выполняется для всех натуральных n . ■

Тест для самоконтроля

1. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = \frac{3n}{n+1}$. Её первый член равен ...

А. 3.

Б. 1,5.

В. 2.

Г. $\frac{2}{3}$.

2. Последовательность (a_n) задана формулой общего члена $a_n = \frac{3n-5}{2} \cdot (k+1)^n$. Член этой последовательности равен...

А. $\frac{3k-5}{2}$. Б. $\frac{3k+5}{2}$. В. $\frac{3k-2}{2}$. Г. $\frac{3k-8}{2}$.

3. Последовательность (a_n) задана рекуррентно $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = a_2 = 1$. Её шестой член равен ...

А. 8. Б. 13. В. 18. Г. 11.

4. Последовательность с общим членом $a_n = (-1)^n$...

А. возрастающая. Б. убывающая.
В. ни возрастающая, ни убывающая. Г. является неограниченной.

5. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой $a_n = 7n - 5$. Первый член и разность прогрессии соответственно равны ...

А. 2 и 7. Б. 7 и 2. В. 2 и -5. Г. -5 и 2.

6. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = -3n + 11$. На каком месте стоит член прогрессии, равный -25?

А. На 8^м. Б. На 9^м. В. На 11^м. Г. На 12^м.

Г. В данной прогрессии такого члена нет.

7. Арифметической прогрессией является последовательность (a_n) , заданная формулой ...

А. $a_n = 3n^2$. Б. $a_n = n + \frac{1}{n}$. В. $a_n = 3n - 2$. Г. $a_n = \frac{1}{n+2}$.

8. Чему равен номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии 29; 23; ... ?

А. 6. Б. 5. В. 7. Г. 4.

9. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{100} = 200$, $a_{200} = 400$. Чему равен a_{150} ?

А. 250. Б. 300. В. 350. Г. Ответ отличен от приведенных.

10. Арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью. Какому условию удовлетворяет ее разность d ?

А. $0 < d < 1$. Б. $d > 1$. В. $d < 0$. Г. $d > 0$.

11. Чему равна сумма n членов арифметической прогрессии, если ее разность равна 0, а первый член равен a ?

А. na . Б. a . В. a^n . Г. Ответ отличен от приведенных.

12. Сколько нужно взять, начиная с первого, членов арифметической прогрессии 4; 11; ..., чтобы их сумма была равна 90?

А. 5. Б. 6. В. 7. Г. 8.

13. Ребенок строит башню из кубиков так, что в верхнем ряду лежит один кубик, в следующем 2 кубика, в третьем — три и т.д. Сколько ему нужно кубиков, чтобы построить башню из 12 рядов?

А. 72. Б. 78. В. 144. Г. 156.

14. Сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 200 равна ...

А. 40200. Б. 10050. В. 20100. Г. 19900.

15. Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, если сумма n первых ее членов может быть найдена по формуле ...

А. $S_n = -2n^2 + n$. Б. $S_n = -2n^2 + 1$.

В. $S_n = -2n^2 + n + 1$. Г. $S_n = -2n + 1$.

16. n -й член геометрической прогрессии 3; -6; ... равен ...

А. $3 \cdot 2^{n-1}$. Б. $3 \cdot (-2)^{n-1}$. В. $3 \cdot (-2)^n$. Г. $3 \cdot 2^n$.

17. Знаменатель геометрической прогрессии (a_n) , у которой $a_1=250$, $a_4=-2$, равен ...

А. -0,2. Б. $\frac{1}{5}$. В. -5. Г. 5.

18. Четвертый член геометрической прогрессии равен -2. Произведение первых семи ее членов равно ...

А. 128. Б. 64. В. -128. Г. -64.

19. Геометрическая прогрессия является убывающей последовательностью и $b_1 < 0$. Ее знаменатель q удовлетворяет условию ...

А. $q > 1$. Б. $|q| > 1$. В. $q > 0$. Г. $|q| < 1$.

20. Бак емкостью 1000 л заполнен водой. Из него за сутки вытекает через отверстие 0,1 его содержимого. Сколько воды будет в баке через трое суток?

А. 810 л. Б. 700 л. В. 729 л.

Г. Ответ отличен от приведенных.

21. Какое отрицательное число надо поставить между числами 2 и 6, чтобы эти три числа были последовательными членами геометрической прогрессии?

- А. $-\sqrt{3}$. Б. $-3\sqrt{2}$. В. $-\sqrt{2}$. Г. $-2\sqrt{3}$.

22. Геометрическая прогрессия задана формулой n -го члена $b_n = 2 \cdot 3^n$. Чему равняется сумма её первых шести членов?

- А. 720. Б. 728. В. 2184. Г. 46656.

23. Сумма первых n членов геометрической прогрессии при любом n равна $S_n = 3(2^n - 1)$. Её пятый член равен ...

- А. 24; Б. 36; В. 48; Г. 96.

24. Чему равен знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 5, а сумма 20?

- А. $\frac{1}{4}$. Б. $\frac{1}{3}$. В. $-\frac{1}{4}$. Г. $\frac{3}{4}$.

25. Бесконечная геометрическая прогрессия задана формулой n -го члена $b_n = \frac{3}{4^{n-1}}$.

Ее сумма равна ...

- А. 4. Б. $\frac{4}{3}$. В. $\frac{16}{3}$. Г. 6.

Ответы к заданиям теста для самоконтроля

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Б	В	А	В	А	Г	В	А	Б	Г	Г	А	Б
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
В	А	Б	А	В	Г	В	Г	В	В	Г	А	

Указания к заданиям теста для самоконтроля

1. Следует найти a_1 .
2. Подставьте $k + 1$ вместо n .
3. Последовательно найдите a_3, a_4, a_5, a_6 .
4. Выпишите несколько членов этой последовательности.

5. Найдите первые два члена прогрессии.
6. Вспомните, какие значения может принимать n .
7. Вспомните, как зависит $n^{\text{й}}$ член арифметической прогрессии от его номера.
8. Составьте неравенство $a_n < 0$ и найдите его наименьшее решение в множестве целых чисел.
9. Можно воспользоваться характеристическим свойством арифметической прогрессии (пример 3).
10. Запишите условие возрастания последовательности.
11. Установите, какой вид имеет данная прогрессия.
12. Воспользуйтесь формулой для суммы n первых членов арифметической прогрессии.
13. Заметьте, что количества кубиков в рядах образуют арифметическую прогрессию.
14. Установите, какой вид имеет последовательность слагаемых.
15. Обратите внимание, как сумма первых n членов арифметической прогрессии зависит от n .
16. Воспользуйтесь формулой для n -го члена геометрической прогрессии.
17. Выразите a_4 через a_1 и знаменатель прогрессии.
18. Отдельно выразите через первый член и знаменатель четвертый член и произведение первых семи членов прогрессии и найдите связь между ними.
19. Не забудьте, что $b_1 < 0$.
20. Обратите внимание на то, что из бака вытекает за сутки 0,1 того объема, что занимала вода в начале суток.
21. Воспользуйтесь характеристическим свойством геометрической прогрессии.
22. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.
23. Воспользуйтесь решением примера 14.
24. Выразите b_2, b_3 через b_1 и знаменатель прогрессии.
25. Найдите сначала первый член и знаменатель прогрессии.

Задачи для самостоятельной работы

1. Подберите одну из возможных формул $n^{\text{го}}$ члена последовательности...

1) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \dots;$

2) $1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9}, \dots;$

3) $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

4)* $3, 1, 3, 1, 3, \dots;$

5)* $\frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 5}, \frac{2 \cdot 8}{4 \cdot 6}, \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7}, \frac{4 \cdot 10}{6 \cdot 8}, \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 9}, \dots;$

6) $19, 32, 45, 58, 71, \dots$

2. Докажите, что последовательности, заданные следующими формулами, являются убывающими:

1) $a_n = \frac{2n+9}{n+3};$

2) $c_n = \frac{n+1}{n^2+2n+5};$

3) $d_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}.$

3. Докажите, что последовательности, заданные следующими формулами, являются возрастающими:

1) $a_n = 9n - 10;$

2) $b_n = n^2 + 2n - 3;$

3) $c_n = \frac{3n+4}{n+2};$

4) $a_n = \frac{2^n}{2n+1}.$

4. Докажите, что последовательность (a_n) является ограниченной, если...

1) $a_n = \frac{2n+3}{n^2+2n+3};$

2) $a_n = \frac{n+2}{2^n}.$

5. Числовая последовательность задана формулой n -го члена $a_n = n^2 - n - 6$.

1) Является ли число 104 членом этой последовательности?

2) Могут ли два члена этой последовательности совпадать?

3) Имеется ли среди членов последовательности наибольший? наименьший?

4) Докажите, что она является возрастающей.

6. Имеется две арифметические прогрессии (a_n) и (b_n) . Будет ли арифметической прогрессией последовательность:

1) $(a_n + b_n);$

2) $(a_n \cdot b_n)?$

7. Четвертый член арифметической прогрессии равен $\frac{5}{14}$. Найдите сумму первых

семи членов этой прогрессии.

8. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 1.

9. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 7x + a = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 19x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите a и b .

10. Найдите сумму чисел, являющихся одновременно членами двух арифметических прогрессий 5, 9, 13, ... и 3, 9, 15, ..., если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

11. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — последовательные члены геометрической прогрессии, S_n — сумма её n первых членов. Докажите, что $S_n = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$.

12. Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу вписанного круга.

13. Имеются две геометрические прогрессии (a_n) и (b_n) , $b_n \neq 0$. Будет ли геометрической прогрессией последовательность:

$$1) (a_n + b_n); \quad 2) (a_n \cdot b_n); \quad 3) \left(\frac{a_n}{b_n} \right)?$$

14. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 126, а их произведение равно 13824. Найдите эти числа.

15. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 + bx + 16 = 0$, причем числа x_1, x_3, x_2, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b .

16. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию.

17. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если третий член уменьшить на 64, то полученные три числа составят арифметическую

прогрессию. Если затем второй член этой арифметической прогрессии уменьшить на 8, то

получится геометрическая прогрессия. Определите эти числа.

18. Найдите сумму первых семи членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, о которой известно, что ее второй член равняется 4, а отношение суммы квадратов ее членов к сумме членов — $\frac{16}{3}$.

19. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, которая на 100 м меньше, чем высота подъема за предыдущий час. За сколько часов он достигнет высоты 2 100 м?

20. В квадрат со стороной a вписан путем соединения середин его сторон новый квадрат; в этот квадрат таким же способом вписан квадрат и т. д. до бесконечности. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих квадратов.

21. Докажите методом математической индукции :

1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$;

3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$;

4) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$;

5) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$);

6) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$;

7) $a_n = 2n + 1$, якщо $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1}$;

8) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

9) $6^{2n} - 1$ делится на 35 при всех натуральных n .

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. 1) $\frac{n}{2n-1}$; 2) $\frac{n+1}{2n}$; 3) $(-1)^n$; 4) $2-(-1)^n$; 5) $\frac{n(n+6)}{(n+2)(n+4)}$; 6) $6+13n$.

5. 1) Да; 2) нет; 3) наименьший есть; наибольшего нет. 7. $\frac{35}{14}$. 8. 98730. 9. $a=10$;

$b=88$. 10. 27135. 13. 1) Нет; 2) да; 3) да. 14. 12; 24; 48. 15. $\{(-5;-$

$10);(5;10);(-5;10);(5;-10)\}$. 17. 4, 20, 100; $\frac{4}{9}$, $-\frac{52}{9}$, $\frac{676}{9}$. 18. $\frac{127}{8}$. 19. 3 ч. 20.

$\frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; $2a^2$.

Указания к задачам для самостоятельной работы

1. В заданиях 1), 2), 3) нетрудно «угадать» формулу $n^{\text{го}}$ члена, анализируя зависимость члена последовательности от его номера. Несколько сложнее это сделать в примерах г) и тем более д). Для «угадывания» полезно попытаться продолжить последовательность.

2., 3., 4. Следуйте образцам решения аналогичных задач, представленных в примерах 2 – 5.

5. Дело сводится к исследованию уравнений. Не забудьте, что n принимает значения 1, 2, 3

6. Воспользуйтесь определением арифметической прогрессии.

7. Можно решать эту задачу «в лоб», а можно воспользоваться характеристическим свойством арифметической прогрессии (см. пример 3).

8. Воспользуйтесь тем, что указанные в условии числа имеют вид $5k+1$, где $k \geq 20$ и $k < 200$.

9. Из условия задачи следует, что имеют место равенства $x_1 + x_2 = 7$; $x_3 + x_4 = 19$. Используя то, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют арифметическую прогрессию, нетрудно найти x_1, x_2 и x_3, x_4 , а, следовательно, a и b .

10. Покажите, что указанная последовательность является арифметической прогрессией. Найдите ее разность и подсчитайте число членов.
11. Преобразуйте правую часть равенства, которую необходимо доказать.
12. Воспользуйтесь тем, что $r = \frac{a + b - c}{2}$, где r — радиус вписанной окружности; a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника.
13. Воспользуйтесь определением геометрической прогрессии.
14. Дело сводится к решению систем уравнений.
15. См. указание к задаче 9.
16. Воспользуйтесь тем, что $h \cdot a = 2 \cdot S$, где a — длина стороны треугольника, h — длина высоты, проведенной к этой стороне, а S — площадь треугольника.
17. Данные числа имеют вид a, aq, aq^2 . Пользуясь характеристическими свойствами прогрессий можно составить систему уравнений с двумя неизвестными.
18. Воспользуйтесь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
20. Докажите, что последовательности периметров и площадей квадратов образуют геометрические прогрессии.

Контрольное задание

Выполнение контрольного задания предполагает выполнение или контрольного теста, или основного задания, или дополнительного задания, или контрольного теста с основным заданием, или контрольного теста с дополнительным заданием, или основного задания с дополнительным заданием, или всех трёх составных частей контрольного задания. Оцениваются результаты выполнения каждой части контрольного задания.

Критерии оценок

Оценка		Контроль- ный тест	Основное задание	Дополни- тельное зада- ние
«зачтено»	Решено не менее	15 задач	25 задач	—
«хорошо»	Решено не менее	20 задач	35 задач	12 задач
«отлично»	Решено не менее	25 задач	42 задач	18 задач

Контрольный тест

Настоящий тест предназначен для подготовки к выполнению основного задания. Его задания аналогичны заданиям теста для самоконтроля, к которым приведены указания и ответы. Пользуйтесь этим.

Инструкция по выполнению теста

Выполнение контрольного теста состоит в выборе правильного ответа из четырёх приведенных. Помните, что среди приведенных есть правильный ответ, и он только один. Если же Вы уверены, что правильного ответа нет среди приведенных, в качестве ответа поставьте букву «Д». Если Вы не можете решить задание, укажите букву Е.

- Последовательность (b_n) задана формулой $n^{\text{го}}$ члена $b_n = 3 \cdot 2^n$. Ее третий член равен ...
 А. 216. Б. 24. В. 12. Г. 6.
- Последовательность (a_n) задана формулой $n^{\text{го}}$ члена $a_n = 2(n - 10)$. $(n + 1)^{\text{й}}$ член этой последовательности равен ...
 А. $2n - 9$. Б. $2n - 19$. В. $2n - 21$. Г. $2(n - 9)$.
- Последовательность (a_n) задана рекуррентно $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Ее пятый член равен ...
 А. -19. Б. 8. В. 16. Г. 32.
- Последовательность с общим членом $a_n = (-1)^n$ не является ...
 А. ограниченной сверху. Б. ограниченной снизу.
 В. ограниченной. Г. возрастающей.

5. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой $a_n = -3n + 11$. Первый член и разность ее соответственно равны ...

- А. -3 и 11 . Б. -3 и 8 . В. 11 и -3 . Г. 8 и -3 .

6. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой $a_n = 7n - 5$. На каком месте стоит член прогрессии, равный 72 ?

- А. На $11^{\text{м}}$. Б. На $7^{\text{м}}$. В. На $9^{\text{м}}$. Г. На $10^{\text{м}}$.

7. Арифметической прогрессией не является последовательность (a_n) , заданная формулой ...

- А. $a_n = 3 - 2n$. Б. $a_n = 2n - \frac{1}{n}$. В. $a_n = 3n - 1$. Г. $a_n = 3$.

8. Чему равен первый положительный член арифметической прогрессии $-38; -31; \dots$?

- А. 5 . Б. 6 . В. 7 . Г. 8 .

9. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{10} = 25$, $a_{30} = 95$. Чему равно a_{20} ?

- А. 65 . Б. 60 . В. 55 . Г. 70 .

10. Арифметическая прогрессия является убывающей прогрессией. Ее разность удовлетворяет условию ...

- А. $|d| < 1$ Б. $-1 < d < 0$ В. $d < 0$ Г. $d > 0$

11. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = 2n + 3$. Найдите сумму первых 100 членов.

- А. 20800 . Б. 20600 . В. 10400 . Г. 10300 .

12. Сколько надо взять подряд, начиная с первого, членов арифметической прогрессии $5; 9; 13; 17, \dots$, чтобы получить сумму, равную 90 ?

- А. 6 . Б. 7 . В. 8 . Г. 5 .

13. Ребенок строит башню из кубиков так, что в верхнем ряду лежит один кубик, в следующем — два кубика, в третьем — три и т. д. Из скольких рядов состоит башня, в которой 120 кубиков?

- А. Из 16 . Б. Из 15 . В. Из 14 . Г. Из 17 .

14. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только число целых часов от 1 до 12 ?

А. 78.

Б. 144.

В. 72.

Г. 156.

15. Последовательность (a_n) не является арифметической прогрессией, если сумма n первых ее членов может быть найдена по формуле ...

А. $S_n = 3n^2$;

Б. $S_n = -n^2 + 3n$;

В. $S_n = 2n^2 - 1$;

Г. $S_n = 5n^2 + n$.

16. n -й член геометрической прогрессии 2, $-6, \dots$ равен ...

А. $2 \cdot 3^{n-1}$.

Б. $2 \cdot (-3)^{n-1}$.

В. $2 \cdot (-3)^n$.

Г. $2 \cdot 3^n$.

17. Первый член геометрической прогрессии (b_n) , у которой $b_6 = 3$, $q = 3$, равен

А. $\frac{1}{81}$.

Б. $\frac{1}{27}$.

В. $\frac{1}{243}$.

Г. числу, отличному от приведенных.

18. Третий член геометрической прогрессии равен 2. Произведение первых пяти ее членов равно ...

А. $\sqrt{2}$.

Б. 32.

В. 8.

Г. 16.

19. Геометрическая прогрессия является убывающей последовательностью. Какому условию удовлетворяет ее знаменатель q ?

А. $0 < q < 1$

Б. $q < 0$

В. $|q| < 1$

Г. $|q| > 1$

20. Сбербанк начисляет по вкладам ежегодно 10%. Вкладчик 1 января 2028г. внес в Сбербанк 1000 зедов (зед — условная денежная единица). Какой станет сумма его вклада 1 января 2031 г.?

А. 1210 зедов. Б. 1300 зедов. В. 1331 зедов.

Г. Ответ отличен от приведенных.

21. Какое положительное число надо поставить между числами 4 и 5, чтобы эти три числа были последовательными членами геометрической прогрессии?

А. 4,5.

Б. $5\sqrt{2}$.

В. $2\sqrt{5}$.

Г. Ответ отличен от приведенных.

22. Чему равна сумма n членов геометрической прогрессии, если знаменатель прогрессии равен 1, а первый член равен a ?

А. $a + n$.

Б. a^n .

В. na .

Г. Такой прогрессии не существует.

23. Сумма первых n членов геометрической прогрессии при любом n равна $S_n = 2(5^n - 1)$. Ее третий член равен ...

А. 248.

Б. 200.

В. 48.

Г. числу, отличному от приведенных.

24. Сумма прогрессии $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$ равна ...

- А. $\frac{3}{4}$; Б. $\frac{4}{3}$; В. $\frac{3}{2}$; Г. $\frac{2}{3}$.

25. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия задана формулой $n^{\text{го}}$ члена $b_n = \frac{5}{2^{n-1}}$. Ее сумма равна ...

- А. 5; Б. -5; В. 20; Г. 10.

Основное задание

Выполнение основного задания состоит в написании решений задач с полным обоснованием рассуждений и разъяснением выбора обозначений и построений.

1. Подберите одну из возможных формул $n^{\text{го}}$ члена последовательности:

- 1) $1; \frac{3}{4}; \frac{4}{6}; \frac{5}{8}; \frac{6}{10}; \dots$; 2) $5, -5, 5, -5, \dots$

3) натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

2. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$, является убывающей.

3. Даны две арифметические прогрессии (a_n) и (b_n) . Докажите, что последовательность $(a_n - b_n)$ также будет арифметической прогрессией.

4. Докажите, что если числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ и $b^2 + bc + c^2$ в указанном порядке также составляют арифметическую прогрессию.

5. В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый следующий — на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, который получил 7 штрафных очков?

6. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке

единицу.

7. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 1000 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 4750 м?

8. Между числами 1 и 256 вставьте три числа так, чтобы все пять чисел составляли геометрическую прогрессию.

9. Найдите четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 27, а произведение средних равно 72.

10. Докажите, что если стороны треугольника составляют геометрическую прогрессию, то этот треугольник подобен треугольнику, сторонами которого являются высоты данного треугольника.

11. Представьте в виде обыкновенной дроби $0,4(63)$.

12. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма всех ее членов, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма всех членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найдите эту прогрессию.

13. Три числа, сумма которых равна 93, составляют геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать так же, как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

14. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

Указания к задачам основного задания

1. 1) Обратите внимание на то, что $1 = \frac{2}{2}$. 2) Дело сводится к умению записать формулу n -го члена последовательности $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ 3) Обратите внимание на то, что нумерация членов последовательности начинается с 1.

2. Воспользуйтесь примером 2.

3. Воспользуйтесь определением арифметической прогрессии.
4. Воспользуйтесь характеристическим свойством прогрессии: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.
5. Найдите выражения для количества штрафных очков за n промахов.
6. Воспользуйтесь тем, что указанные числа имеют вид $4k + 1$.
7. Решение задачи сводится к решению уравнения $S_n = 4750$.
8. Дело сводится к нахождению знаменателя прогрессии.
9. Воспользуйтесь тем, что искомые числа имеют вид x, xq, xq^2, xq^3 .
10. Воспользуйтесь тем, что произведение стороны треугольника и высоты, проведенной к ней, постоянно (более того равно $2S!$).
11. Перевод периодической десятичной дроби в обыкновенную связан с суммированием бесконечной убывающей геометрической прогрессии.
12. Обратите внимание, что знаменатели указанных в условии прогрессий равны квадрату знаменателя исходной прогрессии.
13. Если искомые числа записать в виде a, aq, aq^2 , то решение сводится к нахождению двух неизвестных.

Дополнительное задание

1. В последовательности (x_n) каждый член с нечетным номером равен $2a$, а с четным $2b$. Напишите формулу n -го члена этой последовательности.
2. Последовательности (x_n) и (y_n) заданы формулами $x_n = 2n - 1$ и $y_n = n^2$. Если выписать в порядке возрастания все общие члены этих последовательностей, то получится последовательность (c_n) . Напишите формулу n -го члена последовательности (c_n) .
3. Докажите, что последовательности, заданные следующими формулами, не являются ни возрастающими, ни убывающими:

$$1) a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}; \quad 2) b_n = 3n^3 - 17n + 1.$$

4. Найдите арифметическую прогрессию, в которой среднее арифметическое n первых ее членов равно $2n$.

5. Найдите отношения сторон треугольника, зная, что один из его углов равен 120° и что стороны образуют арифметическую прогрессию.

6. Докажите, что если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то радиус вписанного круга равен трети одной из его высот.

7. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120° , образуют арифметическую прогрессию с разностью 5° . Определите число сторон этого многоугольника.

8. Последовательность 1, 8, 22, 43, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию 7, 14, 21, Найдите номер члена последовательности, равного 35351.

9. В угол, содержащий 60° , вписаны пять окружностей так, что каждая последующая окружность, начиная со второй, касается предыдущей. Во сколько раз сумма площадей всех пяти соответствующих кругов больше площади меньшего круга?

10. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 12x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b .

11. Три отличных от нуля действительных числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятых в том же порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найти все возможные знаменатели этой прогрессии.

12. Несколько рабочих взялись вырыть канаву и могли бы закончить работу за 24 часа, если бы работали все вместе. Вместо этого они приступили к работе один за другим через равные промежутки времени и потом каждый работал до

завершения всей работы. Сколько времен они рыли канаву, если тот, кто первым приступил к работе, работал в пять раз дольше, чем последний?

Указания к задачам дополнительного задания

1. Используйте тот факт, что выражение $(-1)^n$ при четных n равно 1, а при нечетных n равно -1 .
2. Воспользуйтесь тем, что члены последовательности (c_n) — нечетные числа, являющиеся квадратами натуральных чисел.
3. 1) Достаточно указать три последовательных члена, средний из которых равен либо больше двух соседних с ним, либо меньше их.
2) Можно исследовать квадратный трехчлен на возрастание и убывание.
4. Обратите внимание на то, что при любом n выполняется равенство $S_n = 2n^2$.
5. Используйте теорему косинусов.
6. Выразите высоту, проведенную на среднюю сторону, и радиус вписанной окружности через первый член и разность данной прогрессии.
7. Вспомните, чему равна сумма внутренних углов выпуклого n -угольника.
8. Докажите, что n -й член данной последовательности равен ее первому члену, сложенному с суммой первых $(n-1)$ членов образованной арифметической прогрессии.
10. Примените теорему Виета.
11. Воспользуйтесь тем, что данные числа имеют вид $a, a + d, a + 2d$.
12. Можно за неизвестные выбрать количество дней, которые работал последний, и количество землекопов.

Олимпиадные задачи

1. Последовательность чисел (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$. Найдите a_{2007} .

2. Садовник продал первому покупателю половину всех яблок и еще пол-яблока, второму покупателю — половину оставшихся яблок и еще пол-яблока; третьему — половину оставшихся яблок и еще пол-яблока и т. д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и еще пол-яблока, после чего яблок у него не осталось. Сколько яблок были у садовника?
3. Докажите, что если в арифметической прогрессии сумма n первых членов равняется $n^2 p$ и сумма k первых членов равняется $k^2 p$, то сумма p первых членов этой прогрессии будет равняться p^3 .
4. Чемпионат города по шахматам проходит в два круга. После окончания чемпионата оказалось, что количества очков, набранных шахматистами, составляют арифметическую прогрессию и спортсмен, который занял последнее место, имеет 6 очков. Сколько шахматистов участвовали в чемпионате?
5. Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 1000, не делящихся на 11.
6. Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой является целым числом, отличающимся от -1 . Докажите, что сумма двух или большего количества произвольно выбранных членов не может равняться ни одному члену этой прогрессии.
7. p простых чисел $a_1, a_2, \dots, a_p$ составляют возрастающую арифметическую прогрессию и $a_1 > p$. Докажите, что если p — простое число, то разность прогрессии делится на p .
8. Могут ли числа $2; \sqrt{6}; 4,5$ быть членами одной арифметической или геометрической прогрессии?
9. Могут ли цифры простого числа, которое не превышает 10^4 , составлять арифметическую или геометрическую прогрессию? Если могут, то найдите эти числа.
10. В арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4 , которая состоит из целых чисел, наибольший член равняется сумме квадратов других членов. Найдите члены этой прогрессии.
11. Пассажир приехал в город с очень интересной новостью и через 10 минут сообщает ее еще двум лицам. Каждый из тех, кто узнал эту новость, сообщает ее

через 10 минут еще двум лицам (тем, кто ее еще не знает) и т. д. Через какое время эту новость будет знать весь город, если в нем три миллиона жителей?

12. Велосипедист и кавалерист соревновались на стадионе. Им нужно было пройти 5 кругов. На первый круг они потратили одинаковое время. Каждый следующий круг велосипедист проезжал в 1,1 раза медленнее, чем предыдущий. Кавалерист на каждый круг тратил на одну и ту же величину больше времени, чем на предыдущий. К финишу они пришли одновременно. Кто из них потратил больше времени на пятый круг и во сколько раз?

13. Бактерии имеют такой закон развития: каждая живет один час и каждые полчаса порождает одну новую (всего две на своем веку). Сколько потомков будет иметь одна бактерия через 6 часов после ее рождения?

14. В некоторой точке прямой находится частица. За первую секунду она разделяется пополам и ее половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние 1 от предыдущего положения. За следующую секунду образованные частицы опять разделяются пополам и их половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние 1 от предыдущих положений. Столкнувшись, любые частицы уничтожаются. Например, через две секунды останется лишь две частицы. Сколько частиц останется через 129 секунд?

Указания к олимпиадным задачам

1. Учтите, что любой член последовательности равняется 1 или -1 .
2. Составьте уравнение относительно начального количества яблок.
3. Воспользуйтесь формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии.
4. Примите во внимание, что общее количество очков, которое набирают спортсмены в каждой шахматной партии, равняется 1.
5. Можно найти сумму всех натуральных чисел первой тысячи и сумму тех из них, которые делятся на 11.
6. Воспользуйтесь свойствами делимости целых чисел.
7. Рассмотрите остатки от деления чисел $a_1, a_2, \dots, a_p$ на p .

8. Воспользуйтесь условием, при котором три числа являются членами одной арифметической прогрессии.
9. Отдельно проанализируйте трёхзначные и четырехзначные числа.
10. Рассмотрите случаи положительной и отрицательной разности прогрессии.
11. Примените формулу суммы членов геометрической прогрессии.
12. Идет речь об арифметической и геометрической прогрессиях. Сравните их пятые члены.
13. Возьмите за единицу времени полчаса и покажите, что последовательность u_n количеств бактерий в момент времени n ($n = 1, 2, \dots$) совпадает с рядом Фибоначчи (см. послесловие).
14. Сначала определите количество частиц в моменты времени 0, 1, 2, 3, 4 (с). Попробуйте выдвинуть гипотезу о количестве частиц через $2n - 1$ секунду и через $2n$ секунд и об их размещении на прямой. Попробуйте доказать эту гипотезу методом математической индукции. Воспользуйтесь тем, что $129 = 2^7 + 1$.

Послесловие

Понятие числовой последовательности возникло в седую древность. До нас дошли многочисленные легенды, которые содержат описание разных ситуаций, решение которых требует применения сведений о последовательностях и их отдельных видах — прогрессиях. Среди них самой известной является легенда об изобретателе шахмат. Кроме того, известны задачи о вознаграждениях полководцу за заслуги, плату за ранение, о продаже коня, когда вместо стоимости коня было предложено оплатить за каждый гвоздь на подковах коня. Во всех перечисленных ситуациях плата или масса монет росла очень быстро по закону геометрической прогрессии. Следовательно, видим, что учение о прогрессиях во все времена вызывало определенную заинтересованность. Они встречаются в древних египетских папирусах, в древнем Вавилоне без них не могли обойтись при расчёте сложных процентов. Китайским чиновникам при очередном повышении должности вознаграждение росло по законам арифметической прогрессии.

Заметной была роль последовательностей в научных, технических, экономических задачах.

Например, наблюдая Луну, древние вавилоняне пришли к заключению: в первые пять дней от нового месяца до полного месяца рост освещения месячного диска осуществляется по закону геометрической прогрессии со знаменателем 2. Задачи на прогрессии были связаны с распределением продуктов, разделом наследства. В древней Греции арифметическая и геометрическая прогрессия связывались с арифметической и геометрической пропорциями: $a - b = b - c$, $a : b = b : c$.

Числовые и не только числовые последовательности являются мощным средством моделирования разнообразных процессов и явлений окружающего мира, а в самой математике — важным и надежным инструментарием. Интерес к ним, например, к прогрессиям, вошел даже в бытовые характеристики. Когда хотят говорить об умеренном росте, убывании, то вспоминают арифметическую прогрессию. В случае бурного роста говорят об изменении по закону геометрической прогрессии.

Даже в тех задачах, которые рассматривались в данном разделе, речь шла о многочисленных применениях последовательностей, прогрессий как в математике, так и в ее приложениях. Вспомните о последовательности десятичных приближений к иррациональному числу, последовательности площадей правильных многоугольников, вписанных в заданный круг и описанных вокруг него. А задачи о засоренности зерна, о давлении жидкости? Всюду там говорилось о применении прогрессий. Список таких примеров можно существенно продолжить.

Известно, что бактерии и другие простые организмы в благоприятных условиях размножаются по закону геометрической прогрессии. По этому закону распространяются слухи, распространяется эпидемия. Существенные приложения находят прогрессии в финансовых расчетах. Так, если банк начисляет вкладчикам простые проценты, то размер вклада в последовательные единицы времени является членом арифметической прогрессии. Если же начисляются сложные проценты, то содержимое счёта вырастает в геометрической прогрессии.

Даже формулу сложных процентов можно получить с помощью геометрической прогрессии.

Все, кого заинтересовала эта тема, имеют возможность углубить свои знания по ней. Одним из направлений этой работы является осознание одного из важнейших понятий математики — предела последовательности. С одной стороны, это понятие используется для определения таких понятий, как длина окружности (предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность или описанных вокруг нее), площадь круга (предел последовательности площадей правильных многоугольников, вписанных в круг, или описанных вокруг него), иррациональное число (предел последовательности рациональных приближений к нему с недостатком или избытком), степень с иррациональным показателем и многие другие. С другой стороны, понятие предела последовательности применяется при определении понятия предела функции в точке.

Вторым возможным направлением вашей дальнейшей работы с последовательностями может быть исследование последовательностей, заданных рекуррентно. Широко известна задача Фибоначчи о количестве кроликов. В ней необходимо определить количество пар зрелых кроликов, родившихся от одной пары в течение года, если известно, что каждая зрелая пара кроликов ежемесячно рождает новую пару, причем, рожденные кролики достигают полной зрелости в течение месяца. Получили последовательность (u_n) количеств зрелых пар кроликов через $n - 1$ месяцев. Очевидно, $u_1 = 1$ (количество пар в начальный момент), $u_2 = 1$ (количество зрелых пар через месяц. Через два месяца кролики достигнут зрелости и общее количество зрелых пар будет равным двум: $u_3 = 2$. Если количество зрелых пар через $n - 1$ месяцев равно u_n , а через n месяцев u_{n+1} , то через $n + 1$ месяцев общее количество зрелых пар будет равно $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, поскольку u_n зрелых пар, которые были до сих пор, дадут еще u_n пар приплода. Это последовательность, в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Эту последовательность задано

рекуррентно. Члены этой последовательности называют числами Фибоначчи. Их изучение имело важное значение в развитии математики и ее приложений.

Афанасьева Ольга Николаевна
Бродский Яков Соломонович
Павлов Александр Леонидович
Слипенко Анатолий Константинович

Числовые последовательности

Пособие для дополнительного изучения математики
обучающимися 9 классов
Учебное пособие